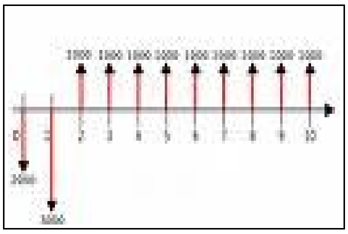
Aula 3

- Leia o material didático com muita atenção;
- Use uma calculadora e refaça os cálculos de todos os exemplos;
- Sempre que tiver dúvidas recorra ao tutor a distância.

Equivalência de Capitais com Capitalização Composta



Já vimos nos casos de operações de juros e de desconto a freqüente necessidade de antecipar ou prorrogar títulos nas operações financeiras. Muitas vezes queremos substituir um título por outro ou por vários; ou substituir vários títulos por um único. Estes tipos de problemas dizem respeito a ***equivalência de capitais.***

Segundo Elon Lages Lima, existe um único problema de Matemática Financeira: **DESLOCAR QUANTIAS NO TEMPO.**

*Para obter o valor futuro, basta **multiplicar** o valor atual por* $(1+i)^n$.

*Para obter o valor atual, basta **dividir** o valor futuro por* $(1+i)^n$.

Data Focal

É a data considerada como base para comparação de valores que se encontram em datas diferentes. Também é conhecida como data de avaliação ou data de referência.

Valor Atual de um Conjunto de Títulos

É a soma dos valores atuais de cada título em uma mesma data focal.

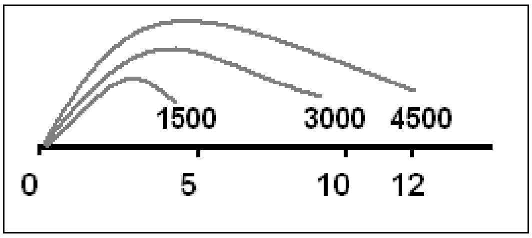
Exemplos:

1) Suponha que o "Grupo Valadão" tenha os seguintes títulos a receber nas seguintes datas:

N° título	Valor	Vencimento
1	1500,00	5 meses
2	3000,00	10 meses
3	4500,00	12 meses

Admitindo- se uma taxa de juros de 4%a.m., qual o valor atual deste conjunto de títulos na data focal zero?

Veja o esquema gráfico:



Chamando de V a soma dos valores atuais na ***data focal zero*** *temos:*

$$V = \frac{1500}{(1{,}04)^5} + \frac{3000}{(1{,}04)^{10}} + \frac{4500}{(1{,}04)^{12}}$$

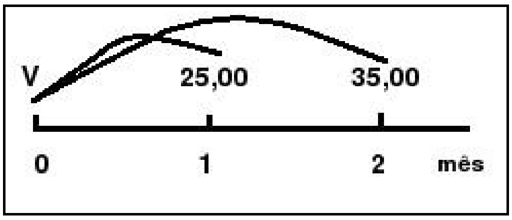
$$V = 1232{,}89 + 2026{,}69 + 2810{,}69$$

$$V = 6070{,}27$$

Logo, o valor atual desse conjunto de títulos é de R$6070,27.

2) Qual deve ser o valor a vista de uma batedeira vendida a prazo em 2 prestações: a 1ª de R$25,00 e a 2ª de R$35,00 para 1 e 2 meses respectivamente, sabendo que a taxa de juros compostos de mercado é de 4,5%a.m?

Veja o esquema gráfico:



Data focal: 0

$$V = \frac{25}{(1{,}045)^1} + \frac{35}{(1{,}045)^2}$$

$$V = 23{,}92 + 32{,}05$$

$$V = 55{,}97$$

Logo, o valor a vista da batedeira é de R$ 55,97.

Princípio Fundamental da Equivalência

Dois ou mais capitais financeiros são ditos **equivalentes** a uma determinada taxa de juro quando apresentam o **mesmo valor** em qualquer data escolhida para data focal.

Equação do Valor

É a equação que permite que sejam igualados capitais quaisquer, referidos a datas diferentes, em uma mesma data focal.

Conjuntos Equivalentes de Capitais

Diz-se que dois conjuntos de capitais são equivalentes quando, **fixada uma data focal** e uma taxa de juros, os **valores atuais** dos **dois conjuntos forem iguais.**

Exemplos:

1) Verificar se os conjuntos de valores, são equivalentes à taxa de juros de 10% a.a.

1º Conjunto:

Valor a receber (R$)	Data de vencimento
2.000,00	1 ano
2.200,00	2 anos
2420,00	3 anos
2662,00	4 anos

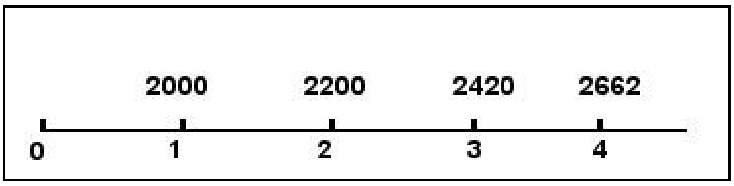
2º Conjunto:

Valor a receber (R$)	Data de vencimento
2.100,00	1 ano
2.000,00	2 anos
2.300,00	3 anos
2.902,90	4 anos

Resolução:

Vejamos os esquemas gráficos

1º conjunto:

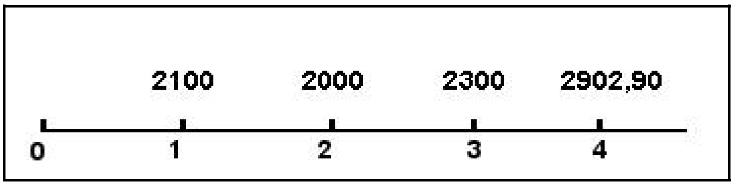


Encontrando o valor atual na data focal zero, temos:

$$\mathbf{V_1} = \frac{\mathbf{2000}}{(\mathbf{1{,}10})} + \frac{\mathbf{2200}}{(\mathbf{1{,}10})^{\mathbf{2}}} + \frac{\mathbf{2420}}{(\mathbf{1{,}10})^{\mathbf{3}}} + \frac{\mathbf{2662}}{(\mathbf{1{,}10})^{\mathbf{4}}} = \mathbf{7272{,}72}$$

Use uma calculadora e refaça os cálculos

2º conjunto:



Encontrando o valor atual na data focal zero, temos:

$$\mathbf{V_2} = \frac{\mathbf{2100}}{(\mathbf{1{,}10})} + \frac{\mathbf{2000}}{(\mathbf{1{,}10})^{\mathbf{2}}} + \frac{\mathbf{2300}}{(\mathbf{1{,}10})^{\mathbf{3}}} + \frac{\mathbf{2902{,}90}}{(\mathbf{1{,}10})^{\mathbf{4}}} = \mathbf{7272{,}72}$$

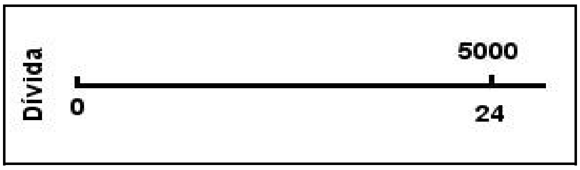
Use uma calculadora e refaça os cálculos

Como os valores atuais $V_1 = V_2$ dizemos que estes dois conjuntos de capitais são equivalentes a uma taxa de 10%a.a.

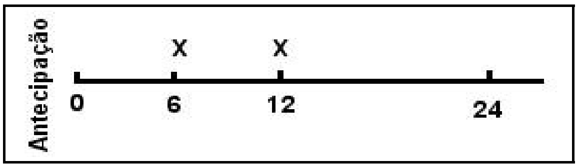
2) O Grupo Magalhães tem uma dívida no valor de R$ 5000,00, exigível no final de 2 anos. Desejando antecipar o pagamento, propõe ao credor liquidar a dívida através de 2 pagamentos com vencimentos, respectivamente, dentro de um semestre e de um ano. Calcule o valor de cada pagamento, sendo que foi acordada entre as partes uma taxa de juros de 2% a.m.

Resolução:

Façamos primeiramente o esquema gráfico:



Note que a unidade de tempo utilizada é o mês.



***X** é o valor de cada prestação de mesmo valor que desejamos saber.*

*Encontremos o valor atual na **data focal zero** dos dois conjuntos:*

$$\mathbf{V_{Dív.}} = \frac{\mathbf{5000}}{\mathbf{1{,}02^{24}}}$$ *(valor atual da dívida) e*

$$\mathbf{V_{Ant.}} = \frac{\mathbf{X}}{\mathbf{1{,}02^{6}}} + \frac{\mathbf{X}}{\mathbf{1{,}02^{12}}}$$ *(valor atual da antecipação)*

Agora, para que estes pagamentos sejam equivalentes, igualemos o $V_{Dív} = V_{ant.}$

$$\frac{5000}{1{,}02^{24}} = \frac{X}{1{,}02^{6}} + \frac{X}{1{,}02^{12}}$$

$$3108{,}61 = \frac{1.X}{1{,}12616} + \frac{1.X}{1{,}26824}$$

$$3108{,}61 = 0{,}88797.X + 0{,}78849.X$$

$$1{,}67646.X = 3108{,}61$$

$$X = \frac{3108{,}61}{1{,}67646} = 1854{,}27$$

Logo, os valores que quitam essa dívida antecipadamente são dois pagamentos iguais de R$1854,27.

3) O proprietário de um imóvel recebeu as seguintes propostas de compra:

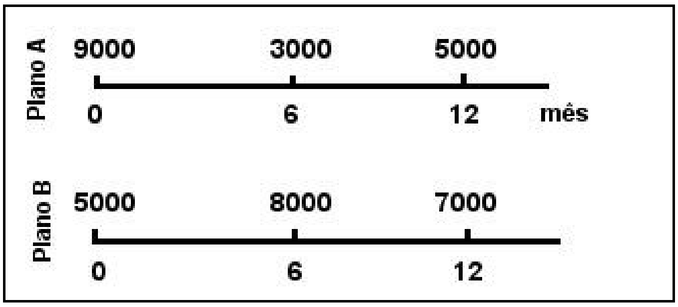
A) R$ 9000,00 de entrada + R$ 3000,00 em 6 meses + R$5000,00 em 1 ano;

B) R$ 5000,00 de entrada + R$ 8000,00 em 6 meses + R$7000,00 em 1 ano.

Qual a proposta mais vantajosa para o vendedor, sabendo-se que os títulos podem ser descontados a 10% a.m. através de capitalização composta?

Neste tipo de problema queremos saber qual é a proposta mais vantajosa, ou seja, vamos encontrar o valor atual de cada proposta na data focal zero e comparar os valores

O esquema gráfico:



Vamos encontrar o valor atual dos dois planos:

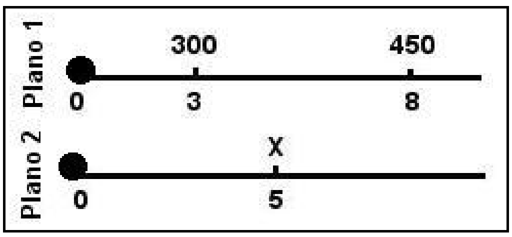
$$P_A = 9000 + \frac{3000}{1{,}10^6} + \frac{5000}{1{,}10^{12}} = 12286{,}58$$

$$P_B = 5000 + \frac{8000}{1{,}10^6} + \frac{7000}{1{,}10^{12}} = 11746{,}21$$

Como $P_A > P_B$, a melhor opção para o vendedor é o plano A, pois é o que tem o maior valor atual.

4) Uma pessoa deve R$ 300,00 com vencimento em 3 meses e R$ 450,00 com vencimento em 8 meses. Pretende pagar seus débitos por meio de um pagamento único a ser realizado no final de 5 meses. Considerando uma taxa de 5%a.m., determine o valor do pagamento único que liquida a dívida.

Veja o esquema gráfico:



*Podemos encontrar os valores atuais na **data focal zero**:*

$$P_1=\frac{300}{(1{,}05)^3}+\frac{450}{(1{,}05)^8}$$ *Valor atual do plano 1*

$$P_2=\frac{X}{(1{,}05)^5}$$ *Valor atual do plano 2*

Fazendo $P_1 = P_2$ temos:

$$\frac{300}{(1{,}05)^3}+\frac{450}{(1{,}05)^8}=\frac{X}{(1{,}05)^5}$$

$$259{,}15+304{,}58=\frac{X}{(1{,}05)^5}$$

$$563{,}73=\frac{X}{(1{,}05)^5}$$

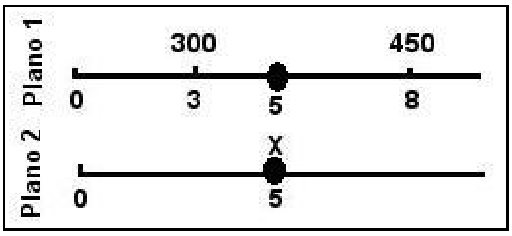
$$X=563{,}73.(1{,}05)^5$$

$$X=719{,}48$$

Observação: Podemos considerar como data focal outras datas diferentes da data zero.

Vamos resolver o exemplo anterior utilizando uma outra data focal.

Veja novamente o esquema gráfico:



*Agora utilizando como data de comparação a **data focal 5,** data onde se encontra a parcela incógnita.*

Vamos chamar de P'_1 e P'_2 os valores na data focal 5:

$$P'_1=300(1{,}05)^2+\frac{450}{(1{,}05)^3}$$

$$P'_2=X$$

O valor de 300,00 foi "levado" para o futuro, por isso foi multiplicado por $(1{,}05)^2$, enquanto o valor de 450,00 foi "trazido" para 3 meses antes de vencer, por isso foi divido por $(1{,}05)^3$. Já o valor de X nada sofreu, pois está na data de comparação.

Fazendo $P'_1 = P'_2$ temos:

$$X=300(1{,}05)^2+\frac{450}{(1{,}05)^3}$$

$$X=330{,}75+388{,}73=719{,}48$$

Série de Pagamentos Uniformes

Também conhecida como rendas e anuidades, são um conjunto de pagamentos ou recebimentos destinados a amortizar uma dívida ou constituir um capital.

Veremos somente as situações em que teremos operações envolvendo pagamentos ou recebimentos periódicos.

Classificação das Séries de Pagamentos

1) Quanto ao tempo:

Temporária: quando tem um número limitado de pagamentos.

Perpétua: quando tem um número ilimitado de pagamentos.

2) Quanto a periodicidade:

Periódicas: quando os pagamentos ocorrem em intervalos de tempos iguais.

Não periódicas: quando os pagamentos ocorrem em intervalos de tempo variáveis.

3) Quanto ao valor dos pagamentos:

Fixos ou uniformes: quando todos os pagamentos são iguais.

Variáveis: quando os valores dos pagamentos variam.

4) Quanto ao vencimento do primeiro pagamento:

Imediata: quando o primeiro pagamento ocorre no período inicial da série (data 0 ou 1).

Diferida: quando o primeiro pagamento não ocorre no primeiro período da série, ou seja, ocorrerá em períodos seguintes. Também chamado de período de **carência**.

5) Quanto ao momento dos pagamentos:

Antecipadas: quando o primeiro pagamento ocorre no momento "0" (zero) da série de pagamentos.

Postecipadas: quando o primeiro pagamento ocorre no momento "1" da série.

Série de Pagamentos Postecipadas

Modelo Básico da Série Uniforme de Pagamento

Por modelo básico de uma série uniforme de pagamentos entendemos as séries que são simultaneamente: **temporárias, periódicas, fixas, imediatas** e **postecipadas** e que a taxa seja referida ao mesmo período dos pagamentos.

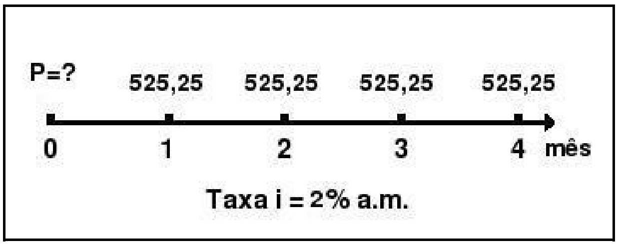
As séries uniformes postecipadas são aquelas em que o primeiro pagamento ocorre no momento 1 da série **(0+n)**.

Valor Presente ou Principal de uma Série Postecipada

Vejamos um exemplo motivador:

Uma pessoa compra uma TV que, irá pagar em 4 prestações mensais de R$ 525,25 sem entrada. As prestações serão pagas a partir do mês seguinte ao da compra e o vendedor afirmou estar cobrando uma taxa de juros compostos de 2%a.m. Pergunta-se o valor da TV a vista.

Veja o esquema gráfico:



A soma dos valores atuais **P** (principal) é:

$$P=\frac{525,25}{(1,02)^1}+\frac{525,25}{(1,02)^2}+\frac{525,25}{(1,02)^3}+\frac{525,25}{(1,02)^4}$$

$$P=525,25\left[\frac{1}{(1,02)^1}+\frac{1}{(1,02)^2}+\frac{1}{(1,02)^3}+\frac{1}{(1,02)^4}\right]$$

$$P=525,25[0,980392+0,961169+0,942322+0,923845]$$

$$P=525,25[3,807729]$$

$$P=2000,01$$

Conclusão: Concluímos que o preço da TV à vista é de R$2000,01.

Podemos notar que o valor a vista da TV foi obtido multiplicando-se a prestação por um **fator constante** que depende apenas da taxa de juros e do número de parcelas do financiamento e que a **soma** (entre colchetes) é de termos de uma progressão geométrica (PG) finita onde:

$a_1 = \dfrac{1}{1{,}02}$ $\qquad a_4 = \dfrac{1}{(1{,}02)^4}$ $\qquad q = \dfrac{1}{1{,}02}$

Na verdade, esse fator, denominado por Teixeira e Netto (1998) de **Fator de Valor Presente por Operação Múltipla (FVPm)**, pode ser generalizado para qualquer taxa e número de parcelas, utilizando para isso a fórmula do somatório dos termos de uma PG finita. Sendo assim, temos:

$$a_1=\frac{1}{(1+i)};\quad a_n=\frac{1}{(1+i)^n};\quad q=\frac{1}{(1+i)}\quad \text{e}$$

$$S_n=FVP_m=\frac{a_1-a_n.q}{1-q}$$

Então:

$$FVP_m=\frac{\dfrac{1}{(1+i)}-\dfrac{1}{(1+i)^n}.\dfrac{1}{(1+i)}}{1-\dfrac{1}{(1+i)}}$$

onde fazendo as simplificações temos:

$$\mathbf{FVP_m=\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n\cdot i}}$$

Ou seja, para se encontrar o valor presente (ou valor a vista) de uma série de pagamentos basta multiplicar o valor da prestação (R) pelo FVPm.

P = R. (FVPm)

Ou ainda:

$$R=\frac{P}{FVPm}=P.(FVPm)^{-1}$$

R é o valor da prestação;

P é o valor a vista;

n é o número de parcelas;

i é a taxa de juros na mesma unidade de tempo das parcelas.

Observações:

1) Alguns autores tratam o fator FVPm pelo símbolo **an ¬i** (lê- se “a , n cantoneira i” ou “a n i”)

2) Para algumas taxas e número de parcelas, existe uma tabela financeira que já traz calculado o valor do FVPm.

Exemplos:

1) Qual é o valor atual de uma série de pagamentos periódica de R$100,00 mensais à uma taxa de 2%a.m. no prazo de 24 meses cujo primeiro pagamento é feito no momento 1 da série?

P = ? (principal ou valor a vista)

R = 100,00 (valor da parcela)

n = 24 parcelas mensais

i = 0,02 a.m.

$$P = R(FVPm)$$

$$P = 100 \left[\frac{(1{,}02)^{24} - 1}{(1{,}02)^{24} . 0{,}02} \right]$$

$$P = 100 . 18{,}91393$$

$$P = 1891{,}39$$

Ou seja, o valor a vista da série é de R$ 1891,39.

2) O preço de um carro à vista é de R$ 15.000,00 e será pago em 12 prestações mensais iguais, sem entrada e a primeira parcela será paga um mês após a compra. Considerando que a taxa de juros na compra do carro usado é de 3% a.m., calcule o valor de cada prestação.

P = 15000,00 (preço a vista do carro)

i = 0,03 a.m.

n = 12 parcelas mensais

R = ? (valor da parcela)

$$R = \frac{P}{(FVPm)}$$

$$R = \frac{15000}{\left[\frac{(1{,}03)^{12} - 1}{(1{,}03)^{12} . 0{,}03} \right]}$$

$$R = \frac{15000}{9{,}95400} = 1506{,}93$$

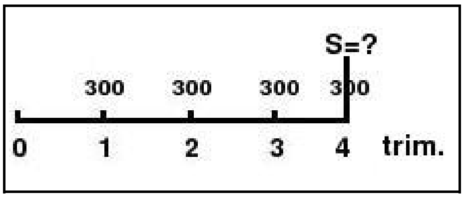
Ou seja, deve ser pago 12 parcelas iguais de R$ 1506,93.

Montante do Modelo Básico de uma Série

Veja o exemplo motivador:

JH Silva fez uma aplicação em um plano de capitalização onde fará 4 depósitos trimestrais no valor de R$ 300,00 cada. A taxa nessa aplicação é de 5% a.trim e o cliente faz o primeiro depósito 1 trimestre após a abertura da conta.

Veja o esquema gráfico:



Qual será o montante **S** dessa aplicação?

Temos de encontrar todos os montantes na data 4 e somá- los:

$$S=300 + 300(1{,}05) + 300(1{,}05)^2 + 300(1{,}05)^3$$

$$S=300\left[1 + (1{,}05) + (1{,}05)^2 + (1{,}05)^3\right]$$

$$S=300\left[1+ 1{,}05 + 1{,}1025+1{,}157625\right]$$

$$S=300[4{,}310125]$$

$$S=1293{,}04$$

Concluímos que o montante dessa aplicação é de R$ 1293,04.

É notável que o montante foi obtido multiplicando-se o valor do depósito por um **fator constante** que depende apenas da taxa e do número de depósitos e que a **soma** (entre colchetes) é também de termos de uma progressão geométrica (PG) finita onde:

$a_1 = 1$ $a_4 = (1{,}05)^3$ $q = (1{,}05)$

Esse fator, denominado por Teixeira e Netto (1998) de **Fator de Acumulação de Capitais por Operação Múltipla (FACm)**, pode ser generalizado para qualquer taxa e número de parcelas, utilizando a fórmula do somatório dos termos de uma PG finita. Sendo assim, temos:

$a_1=1;\quad a_n=(1+i)^{n-1};\quad q=(1+i)$ e

substituindo na fórmula da soma temos:

$$S_n = FAC_m = \frac{a_1 - a_n.q}{1-q}$$

Então:

$$FAC_m = \frac{1-(1+i)^{n-1}.(1+i)}{1-(1+i)}$$

$$FAC_m = \frac{1-(1+i)^n}{-i}$$

e multiplicando o numerador e denominador por (–1), temos:

$$\mathbf{FAC_m = \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

Logo podemos expressar o montante de uma série de pagamentos como:

S = R . (FACm)

Por outro lado, sabendo-se qual o montante desejado, podemos calcular o valor dos termos que devem ser aplicados, isto é:

$$\mathbf{R = \frac{S}{FAC_m}}$$

Exemplos:

1) Uma pessoa deposita R$500,00 mensalmente em um banco que remunera o capital à taxa de 2%a.m. Pergunta-se quanto possuirá em 2 anos?

R = 500,00 (valor de cada depósito)

i = 0,02 a.m.

n = 24 depósitos mensais

S = ? (Montante total)

Utilizando a fórmula do montante de série de pagamentos, temos:

$$S = R(FACm)$$

$$S = 500\left[\frac{(1{,}02)^{24}-1}{0{,}02}\right]$$

$$S = 500.\,30{,}42186$$

$$S = 15210{,}93$$

Logo o montante acumulado feito os 24 depósitos mensais é de R$ 15210,93.

2) Preciso juntar R$ 20.000,00 no prazo de 20 meses. Se fizer depósitos mensais durante este prazo em uma caderneta de poupança de um banco que paga uma taxa de 0,8% a.m., qual deverá ser o valor de cada depósito sendo o primeiro depósito feito um mês após a abertura da conta?

S = 20.000,00 (Montante que preciso acumular)

i = 0,008 a.m.

n = 20 depósitos mensais

R = ? (Valor de cada depósito)

$$R=\frac{S}{FACm}$$

$$R=\frac{20000}{\left[\frac{(1{,}008)^{20}-1}{0{,}008}\right]}$$

$$R=\frac{20000}{21{,}59551}$$

$$R=926{,}12$$

Logo , se fizer 20 depósitos mensais de R$ 926,12 obtenho um montante de R$20000,00.