Cálculo e Aplicações II

Material da Unidade I

Lineia Schütz

Conteúdo

UNIDADE I

1 Introdução ao Estudo de Integrais

1.1 Um Pouco da História[1]

O desenvolvimento da teoria conhecida como Cálculo Diferencial e Integral foi uma das contribuições mais importantes desde que Euclides (século III a.C.) publicou em seus “Elementos” a formalização da geometria clássica.

A teoria do Cálculo Infinitesimal deve-se, em especial, a dois matemáticos: Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Porém, a idéia de usar o processo de limites para derivar resultados vem desde os antigos gregos. Arquimedes de Siracusa (por volta de 287-212 a.C.) foi um dos primeiros a utilizar o tal processo para calcular áreas de figuras planas e sólidas através do *Método da Exaustão*.

A palavra *calculus*, que em latim significa pedra, está associada com a matemática devido ao uso de pedras para contagem. A nomenclatura *Cálculo Diferencial e Integral* é devido a Leibniz. Newton nunca a usou, pois preferia chamar a sua teoria de *Método de Fluxões*.

Newton e Leibniz observaram que muitos problemas de geometria e física dependem da noção que podemos citar de forma intuitiva como *antiderivação* ou *derivação para trás*. Dentre estes problemas está o problema da área, que pode ser enunciado como segue.

1.2 Problema da Área

Dada a função f não-negativa no intervalo real $[a, b]$, determine a área da região entre o gráfico de f e o eixo x, para $x \in [a, b]$ (Figura 1).

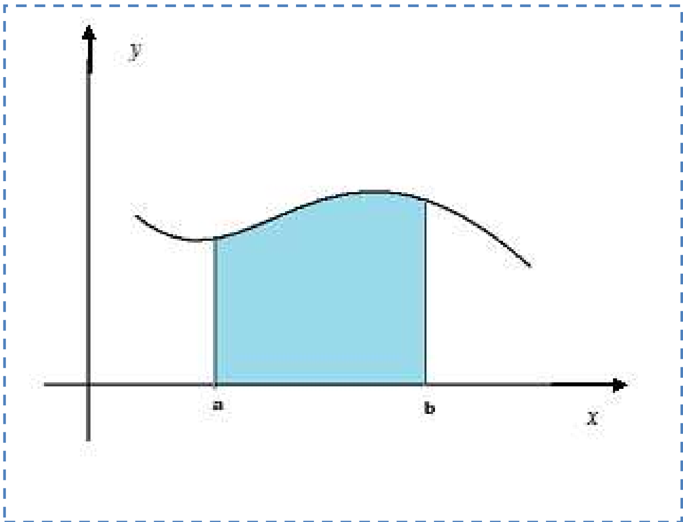

Figura 1

[1] As idéias desta seção foram extraídas do livro *“e- a história de um número”* de Eli Maor .

O primeiro avanço com relação aos métodos para cálculo de áreas foi obtido pelo matemático grego Arquimedes de Siracusa que desenvolveu o *Método da Exaustão*, uma técnica para o cálculo de áreas de regiões limitadas por parábolas, por espirais e por várias outras curvas. Entretanto, o maior avanço em relação a um método geral para o cálculo de áreas deu-se no século XVII através da técnica desenvolvida, independentemente, por Newton e Leibniz. Tal técnica tem por base obter as áreas revertendo o processo de diferenciação, dando inicio a teoria do Cálculo Integral.

Na próxima seção, vamos encontrar a área de uma determinada região revertendo o processo de diferenciação, seguindo as idéias de Newton e Leibniz.

1.2.1 Cálculo de Área pelo Método da Antiderivada

Para encontrar a área sob uma curva f, conforme região representada na Figura 1, através do Método da Antiderivada deve-se, primeiramente, considerar o problema mais geral de determinar a área $A(x)$, sob a curva f de um ponto a até um ponto arbitrário x, conforme a Figura 2.

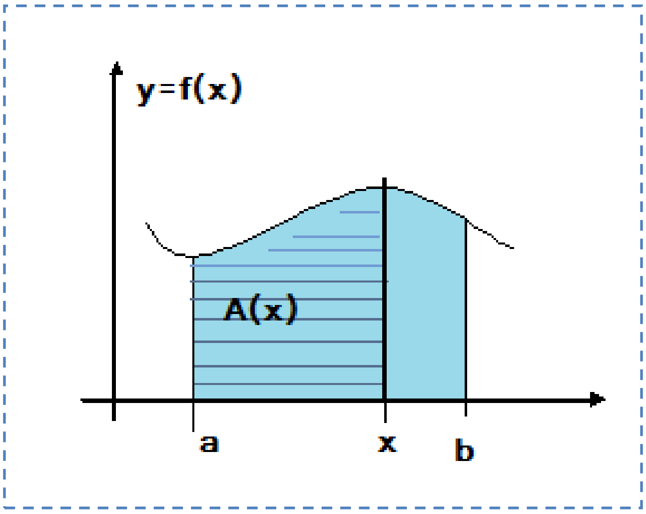

Figura 2

A idéia do método é obter a área $A(x)$ a partir de sua derivada $A'(x)$ e, em seguida, obter a área da Figura 1 substituindo-se x por b na fórmula da área $A(x)$.

Determina-se $A'(x)$ por meio da definição de derivada de uma função, conforme a relação abaixo.

$$A'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h}$$

Eq.1

Sem perda de generalidade, podemos supor que $h > 0$. Observe que $[A(x+h) - A(x)]$ é a diferença entre a áreas, conforme Figura 3.

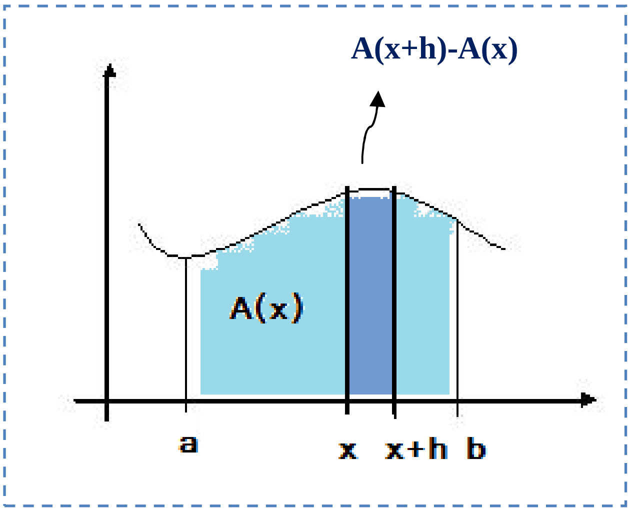

Figura 3

Dessa forma, se c for o ponto médio entre x e $x+h$, então $[A(x+h)-A(x)] \approx f(c)h$. Logo,

$$A'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{A(x+h)-A(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(c)h}{h} = \lim_{h\to 0} f(c).$$

Eq. 2

Como c é o ponto médio do intervalo $[x, x+h]$, c tende a x quando h tende a zero [Figura 4].

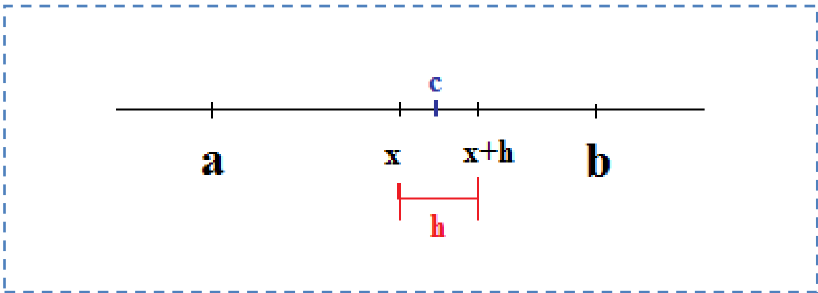

Figura 4

Assim,

$$A'(x) = \lim_{h\to 0} f(c) = f(x).$$

Portanto, $A^{'}(x) = f(x)$, ou seja, a função cujo gráfico constitui o limite superior da região $A(x)$ é a derivada da função $A(x)$. Observe que no problema da área, enunciando na página 2, como a lei da função $f(x)$ é conhecida, também é conhecida a derivada da função $A(x)$. Portanto, para encontrar a área procurada, basta encontrar a função $A(x)$ visto que conhecemos $A'(x)$. Este problema é chamado *Problema da Antiderivada*.

Exemplo: Determine a área sob a curva $y = x^2$ no intervalo [1,2].

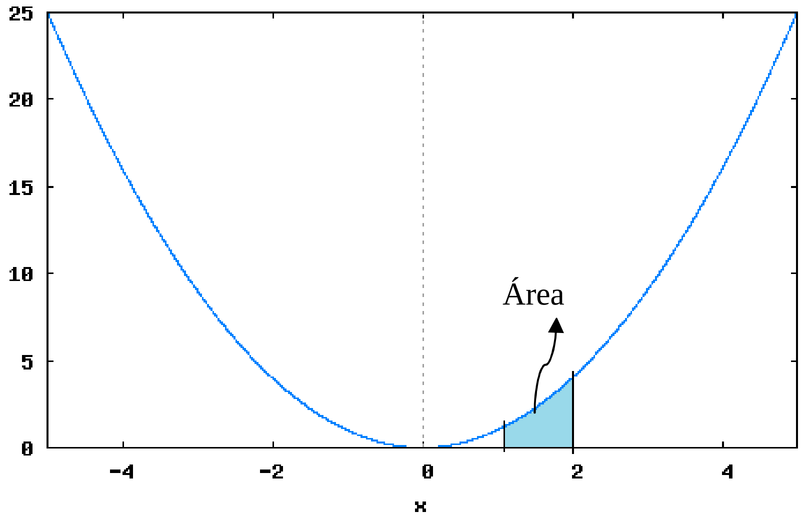

Figura 5

Resolução do exemplo:

Pelo método da antiderivada, sabemos que

$$A'(x) = f(x) = x^2$$

Assim, para encontrar $A(x)$, precisamos de uma função cuja derivada seja a função $f(x) = x^2$, ou seja, precisamos "desfazer" a diferenciação. Lembrado da disciplina de Cálculo e Aplicações I, vemos que

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{3}x^3\right] = \frac{1}{3}3x^2 = x^2.$$

Essa não é a única solução, pois, para qualquer $C \in \mathbb{R}$,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{3}x^3 + C\right] = \frac{1}{3}3x^2 + 0 = x^2,$$

Portanto,

$$A(x) = \frac{1}{3}x^3 + C, \forall C \in \mathbb{R}$$

Eq. 3

Observe que relação acima (Eq. 3) envolve uma constante C que deve ser determinada. Para obtermos a constante C, utilizamos a relação $A(1) = 0$ (obtemos essa relação substituindo x por 1 na função $A(x)$, ou seja, $A(1)$ representa a área entre o gráfico de f e o eixo x, para $x \in [1,1] = \{1\}$)

Dessa forma, temos:

$$A(1) = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}(1)^3 + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{3}$$

Substituindo o valor de C na Equação 3, obtemos a função

$$A(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3},$$

Eq. 4

que representa a área da Figura 6.

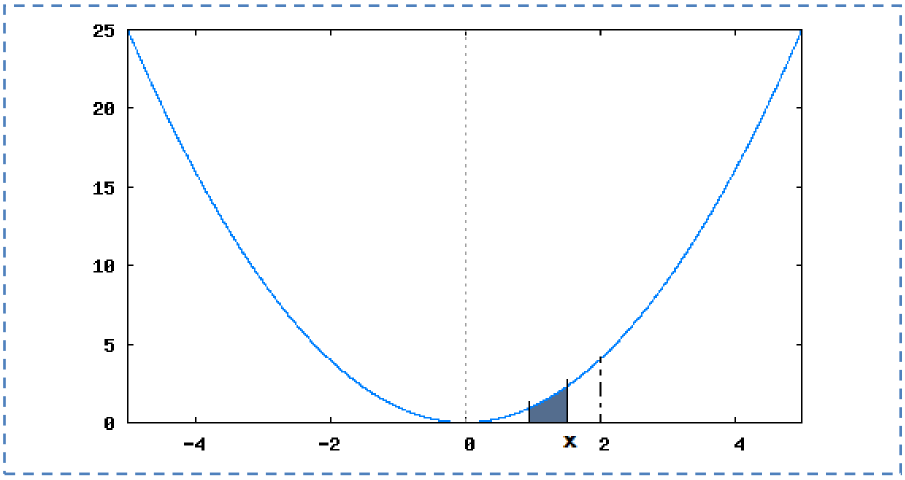

Figura 6

Pelo Método a Antiderivada, a área da região procurada é dada por $A(2)$, ou seja, a área do exemplo é

$$A(2) = \frac{1}{3}(2)^3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Na seguinte seção, vamos generalizar as idéias vistas até aqui através do estudo das Integrais Indefinidas.

2 Integral Indefinida

Na seção anterior, vimos que para determinar uma função f conhecendo sua derivada f' precisamos também conhecer um de seus valores, pois existem infinitas funções que tem como derivada a função f'. Tais funções recebem o nome de *Primitivas* de f e o conjunto de todas elas é chamado *Integral Indefinida* de f.

Definição 1: (Primitiva ou Antiderivada)

Dada uma função f definida em um intervalo real I, dizemos que uma função $F(x)$ é uma *primitiva (ou antiderivada)* para a função f em I se

$$F'(x) = f(x)$$

para todo x no intervalo I.

Exemplos:

a) $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ é uma primitiva de $f(x) = x^2$ no intervalo $I = (-\infty, +\infty)$, pois

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{3}x^3\right] = \frac{1}{3}3x^2 = x^2.$$

$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3$ é uma primitiva de $f(x) = x^2$ no intervalo $I = (-\infty, +\infty)$, pois

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{3}x^3 + 3\right] = \frac{1}{3}3x^2 + 0 = x^2.$$

$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 1$ é uma primitiva de $f(x) = x^2$ no intervalo $I = (-\infty, +\infty)$, pois

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{3}x^3 - 1\right] = \frac{1}{3}3x^2 + 0 = x^2.$$

Dada $C \in \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$ é uma primitiva de $f(x) = x^2$ no intervalo $I = (-\infty, +\infty)$, pois

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{3}x^3 + C\right] = \frac{1}{3}3x^2 + 0 = x^2.$$

b) $F(x) = x^4$ é uma primitiva de $f(x) = 4x^3$ no intervalo $I = (-\infty, +\infty)$, pois

$$F'(x) = \frac{d}{dx}[x^4\ ] = 4x^3.$$

$F(x) = x^4 + \frac{1}{3}$ é uma primitiva de $f(x) = 4x^3$ no intervalo $I = (-\infty, +\infty)$, pois

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left[x^4 + \frac{1}{3}\right] = 4x^3 + 0 = 4x^3.$$

c) $F(x) = -cos(x)$ é uma primitiva de $f(x) = sen(x)$ no intervalo $I = (-\infty, +\infty)$, pois

$$F'(x) = \frac{d}{dx}[-cos(x)] = -\frac{d}{dx}[\cos(x)] = -[-sen(x)] = sen(x).$$

Dada $C \in \mathbb{R}$, $F(x) = -cos(x) + C$ é uma primitiva de $f(x) = sen(x)$ no intervalo $I = (-\infty, +\infty)$, pois

$$F'(x) = \frac{d}{dx}[-\cos(x) + \mathrm{C}] = -\frac{d}{dx}[\cos(x) + C\ ] = -[-sen(x + 0)] = sen(x).$$

Observação:

- Se $F(x)$ é uma primitiva para a função f no intervalo real I, então, para toda constante C, $F(x) + C$ também é uma primitiva para a função f em I.
- Se $G(x)$ é uma primitiva para a função f em I, então existe uma constante C tal que $G(x) = F(x) + C$.

Utilize a definição 1 acima e o conhecimento obtido na disciplina Cálculo e Aplicações I para resolver os exercícios da Lista de Exercícios I.

Lista de Exercícios I

Determine as primitivas das funções dadas abaixo.

1. $f(x) = 3x^5$
2. $f(x) = 2$
3. $f(x) = 3x^5+2$
4. $f(x) = 2x$
5. $f(x) = 3x^5 + 2x + 2$
6. $f(x) = \cos(x)$
7. $f(x) = e^x$
8. $f(x) = \frac{1}{x}, x > 0$

Segundo a definição 1, existem infinitas primitivas (ou antiderivadas) de uma determinada função. Vamos agora desenvolver alguns resultados sobre o processo de antiderivação em busca de um procedimento que nos permita determinar uma função a partir de sua derivada.

Definição 2 (Integral Indefinida)

Considere uma função f definida em um intervalo real I. Se $F(x)$ é uma primitiva para a função f em I, então $F(x) + C$, onde C é uma constante arbitrária, é chamada *Integral Indefinida* de f em I.

Usamos o "s alongado" para denotar a integral indefinida de f como segue:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

Eq. 5

onde $f(x)$ é chamada de *integrando*, C é a *constante de integração* e dx representa a variável de integração. Podemos ler a Equação 5 como " a integral de $f(x)$ com relação a variável x é igual a função $F(x) + C$". A palavra indefinida indica que o processo de integração (ou o processo de antiderivação) produz infinitas soluções.

Exemplos

a) $\int 4x^3dx = x^4 + C$, pois $\frac{d}{dx}[x^4 + C] = 4x^3 + 0 = 4x^3$

b) $\int 5dx = 5x + C$, pois $\frac{d}{dx}[5x + C] = 5.1 + 0 = 5$

c) $\int \cos(x)dx = sen(x) + C$, pois $\frac{d}{dx}[sen(x) + C] = cos(x) + 0 = \cos(x)$

d) $\int e^x dx = e^x + C$, pois $\frac{d}{dx}[e^x + C] = e^x + 0 = e^x$

e) $\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + C$, pois $\frac{d}{dx}[\ln(x) + C] = \frac{1}{x} + 0 = \frac{1}{x}$

f) $\int (4x^3 + 5)dx = x^4 + 5x + C$, pois $\frac{d}{dx}[x^4 + 5x + C] = 4x^3 + 5 + 0 = 4x^3 + 5$

2.1 Integrais Imediatas

De acordo com a definição 2, a integração é o processo inverso ao da derivação. Logo, através das regras de derivação vistas na disciplina Cálculo e Aplicações I, obtemos as chamadas integrais imediatas, como descrito abaixo.

1. $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$, se $m \neq -1$.

Justificativa: $\frac{d}{dx}\left[\frac{x^{m+1}}{m+1} + C\right] = (m+1)\frac{x^m}{m+1} + 0 = x^m$.

2. $\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln(|x|) + C$.

Justificativa: $\frac{d}{dx}[\ln(|x|) + C] = \frac{1}{x}$.

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$.

Justificativa: $\frac{d}{dx}\left[\frac{a^x}{\ln(a)} + C\right] = \frac{a^x \ln(a)}{\ln(a)} = a^x$.

4. $\int \cos(x)dx = \mathrm{sen}(x) + C$.

Justificativa: $\frac{d}{dx}[sen(x) + C] = \cos(x) + 0 = \cos(x)$.

5. $\int \mathrm{sen}(x)dx = -\cos(x) + C$.

Justificativa: $\frac{d}{dx}[-\cos(x) + C] = -(-sen(x)) + 0 = sen(x)$.

6. $\int \sec^2(x)dx = tg(x) + C$.

Justificativa: $\frac{d}{dx}[tg(x) + C] = \sec^2(x) + 0 = \sec^2(x)$.

7. $\int \cos\sec^2(x)dx = -\cot g(x) + C$

Justificativa: $\frac{d}{dx}[-\cot g(x) + C] = \cos\sec^2(x)$.

8. $\int \frac{dx}{x^2 + 1} = arctg(x) + C$.

Justificativa: $\frac{d}{dx}[arctg(x)+C]=\frac{1}{1+x^2}$.

2.2 Propriedades das Integrais Indefinidas

Vamos agora estudar algumas propriedades das integrais indefinidas. Primeiramente, observe que, pelas definições 1 e 2, temos:

a) Se $\int f(x)dx = F(x)+C$,então

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] \Leftrightarrow \frac{d}{dx}[F(x)+C] \Leftrightarrow F'(x)=f(x)$$

Eq. 6

b) Se $\int f(x)dx = F(x)+C$, então

$$\int f(x)dx = \int \frac{d}{dx}[F(x)+C]dx = F(x)+C \Leftrightarrow \int F'(x)dx = F(x)+C,$$

Eq. 7

onde C é a constante de integração.

Da observação acima, decorrem as seguintes propriedades das integrais indefinidas:

Propriedade 1: Se f é uma função definida em um intervalo real I e α é uma constante real, então

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$$

Propriedade 2: Se f e g são duas funções definidas em um intervalo real I , então

$$\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Demonstração da propriedade 2:

Lembrando que a derivada de uma soma é a soma das derivadas e utilizando a observação a) acima, temos:

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx+\int g(x)dx\right]=\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right]+\frac{d}{dx}\left[\int g(x)dx\right] \underset{Obs.a)}{=} f(x)+g(x) \underset{Obs.a)}{=} \frac{d}{dx}\left[\int [f(x)+g(x)]dx\right]$$

Assim,

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx+\int g(x)dx\right]=\frac{d}{dx}\left[\int [f(x)+g(x)]dx\right]$$

Integrando a relação acima, obtemos:

$$\int \frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx + \int g(x)dx\right]dx = \int \frac{d}{dx}\left[\int [f(x)+g(x)]dx\right]$$

Logo, pela observação b) :

$$\int [f(x)+g(x)]dx + C_1 = \int f(x)dx + \int g(x)dx + C_2,$$

onde C_1 e C_2 são as constantes de integração. Lembre que a constante de integração gera a família de primitivas representada pela integral indefinida. Dessa forma, ao atribuirmos valores reais as constantes de integração determinamos uma primitiva particular. Assim, reordenando adequadamente os valores atribuídos para C_1 e C_2, podemos escrever, sem perda de generalidade:

$$\int [f(x)+g(x)]dx + C = \int f(x)dx + \int g(x)dx + C,$$

onde C é a constante de integração.

Portanto,

$$\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

■

A demonstração da propriedade 1 segue de forma análoga.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplos

Através da lista de integrais imediatas e as propriedades da integral indefinida, vamos calcular as seguintes integrais:

a) $\int 4x^{-3}dx,\ x \neq 0$

Resolução:

$$\int 4x^{-3}dx = 4\int x^{-3}dx = 4\left(\frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C\right) = 4\left(\frac{x^{-2}}{-2} + C\right) = -2x^{-2} + 4C = -\frac{2}{x^2} + C.$$

Como a constante de integração representa qualquer número real, então podemos chamar $4C$ de C.

b) $\int (3x^5 - 4x^3 + 7x - 2)dx$

Resolução:

$$\int (3x^5 - 4x^3 + 7x - 2)dx = \int 3x^5 dx + \int -4x^3 dx + \int 7x dx + \int -2 dx = 3\int x^5 dx - 4\int x^3 dx + 7\int x dx - 2\int 1 dx$$

$$= 3\frac{x^6}{6} - 4\frac{x^4}{4} + 7\frac{x^2}{2} - 2x + C = \frac{x^6}{2} - x^4 + \frac{7x^2}{2} - 2x + C.$$

c) $\int (\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}})dx,\ x \neq 0$

Resolução:

$$\int (\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}})dx = \int \sqrt[3]{x^2}\,dx + \int -\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \int \sqrt[3]{x^2}\,dx - \int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \int x^{2/3}dx - \int x^{-1/3}dx =$$

$$= \frac{x^{(2/3+1)}}{(2/3+1)} - \frac{x^{(-1/3+1)}}{(-1/3+1)} + C = \frac{3x^{5/3}}{5} - \frac{3x^{2/3}}{2} + C.$$

d) $\int (\sqrt{2}\cos x - 3e^x + \frac{1}{x})dx, x \neq 0$

Resolução:

$$\int \left(\sqrt{2}\cos x - 3e^x + \frac{1}{x}\right)dx = \sqrt{2}\int \cos(x)dx - 3\int e^x dx + \int \frac{1}{x}dx = \sqrt{2}sen(x) - 3e^x + \ln(x) + C.$$

Utilize a definição 2, a lista de integrais imediatas e as propriedades da integral indefinida para resolver os exercícios da Lista de Exercícios II.

Lista de Exercícios II

Calcular as integrais indefinidas abaixo:

1. $\int (x^7 - 3x + 8)dx$
2. $\int \left(\frac{2}{x} + \frac{6}{x^2+1}\right)dx,\ x \neq 0$
3. $\int 2x(1 + x^{-3})dx,\ x \neq 0$
4. $\int -4\text{cossec}^2(x)dx$
5. $\int \left(\frac{1}{x^2} + 3x - \frac{1}{4}\right)dx,\ x \neq 0$
6. $\int (y-1)^2 dy$
7. $\int \frac{(t^2 + \sqrt{t^3} - 7)}{\sqrt{t}}dt,\ t > 0$
8. $\int (1 + \sec^2 x)dx$
9. $\int (\sqrt{5}e^x + 5^x)dx$
10. $\int (sen(x) + \cos(x))dx$
11. $\int (t^3 - 4t)(4t - 8)dt$

3 Bibliografia

ANTON, H. *Cálculo: Um Novo Horizonte*. Porto Alegre: Bookman, vol. 1, 2000.
MAOR, Eli. *e: a história de um número*. 3 ed. Rio de Janeiro: Record, 2006.
STEWART, J. *Cálculo.* São Paulo: Pioneira Thomson Learning, vol. 1 2003.
THOMAS, G. B.. *Cálculo*. São Paulo: Pearson Addison Wesley, vol. 1 2002.