Integração Numérica

6.4 Segunda Regra de Simpson

6.4.1 Obtenção da Fórmula

A Segunda Regra de Simpson é obtida aproximando a função $f(x)$ por um polinômio interpolador de Gregory-Newton de terceiro grau, ou seja:

$$f(x) = P_3(x) = y_0 + \frac{z\,\Delta y_0}{1!} + \frac{z(z-1)\Delta^2 y_0}{2!} + \frac{z(z-1)(z-2)\Delta^3 y_0}{3!}. \qquad (1)$$

Observa-se que, a obtenção da fórmula da Segunda Regra de Simpson é semelhante aos dois métodos anteriores.

6.4 Segunda Regra de Simpson

6.4.1 Obtenção da Fórmula

A Segunda Regra de Simpson é obtida aproximando a função $f(x)$ por um polinômio interpolador de Gregory-Newton de terceiro grau, ou seja:

$$f(x) = P_3(x) = y_0 + \frac{z\,\Delta y_0}{1!} + \frac{z(z-1)\Delta^2 y_0}{2!} + \frac{z(z-1)(z-2)\Delta^3 y_0}{3!}. \qquad (1)$$

Assim

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b P_3(x)dx \qquad (2)$$

6.4 Segunda Regra de Simpson

6.4.1 Obtenção da Fórmula

A Segunda Regra de Simpson é obtida aproximando a função $f(x)$ por um polinômio interpolador de Gregory-Newton de terceiro grau, ou seja:

$$f(x) = P_3(x) = y_0 + \frac{z\,\Delta y_0}{1!} + \frac{z(z-1)\Delta^2 y_0}{2!} + \frac{z(z-1)(z-2)\Delta^3 y_0}{3!}. \qquad (1)$$

Assim

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b P_3(x)dx \qquad (2)$$

que substituindo a eq. (1) na eq. (2) obtém-se:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \left(y_0 + \frac{z\,\Delta y_0}{1!} + \frac{z(z-1)\Delta^2 y_0}{2!} + \frac{z(z-1)(z-2)\Delta^3 y_0}{3!} \right) dx \qquad (3)$$

com $z = \dfrac{x - x_0}{h}$ (4)

Como $f(x)$ é função de x e o polinômio é em função de z, é necessário realizar a troca de variável na integral, com a eq. (4) obtém-se dx, como segue:

$$z = \frac{x - x_0}{h} \quad \rightarrow \quad x = hz + x_0 \text{ diferenciando } dx = hdz. \qquad (5)$$

Como $f(x)$ é função de x e o polinômio é em função de z, é necessário realizar a troca de variável na integral, com a eq. (4) obtém-se dx, como segue:

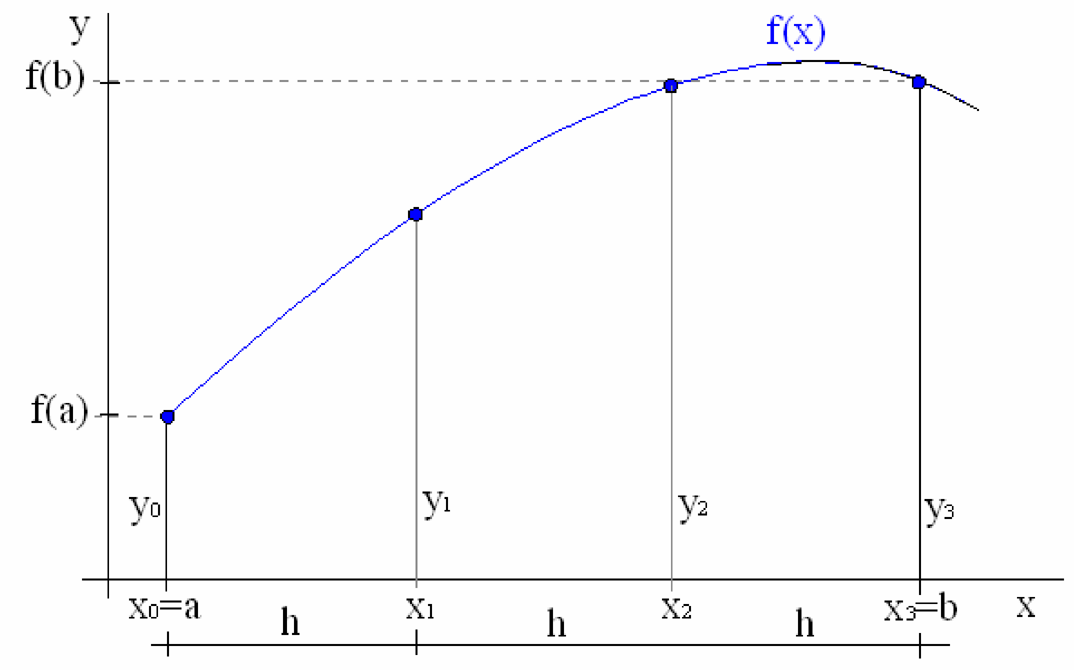
$$z = \frac{x - x_0}{h} \quad \rightarrow \quad x = hz + x_0 \ \text{diferenciando} \ dx = hdz. \qquad (5)$$

Para aproximar a função $f(x)$ por um polinômio de terceira ordem são necessários 4 pontos, (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), e (x_3, y_3), igualmente espaçados, conforme figura abaixo.

Como $f(x)$ é função de x e o polinômio é em função de z, é necessário realizar a troca de variável na integral, com a eq. (4) obtém-se dx, como segue:

$$z = \frac{x - x_0}{h} \quad \rightarrow \quad x = hz + x_0 \text{ diferenciando } dx = hdz. \tag{5}$$

Para aproximar a função $f(x)$ por um polinômio de terceira ordem são necessários 4 pontos, (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3), igualmente espaçados, conforme figura abaixo.



Neste caso, $x_0 = a$ e $x_3 = b$, então os limites de integração ficam:

$$\text{para } x = a \quad \rightarrow \quad z = \frac{x-a}{h} = \frac{a-a}{h} = 0$$

Neste caso, $x_0 = a$ e $x_3 = b$, então os limites de integração ficam:

$$\begin{aligned} &\text{para } x = a \quad \rightarrow \quad z = \frac{x-a}{h} = \frac{a-a}{h} = 0 \\ &\text{para } x = b \quad \rightarrow \quad z = \frac{x-a}{h} = \frac{b-a}{h} = \frac{3h}{h} = 3 \end{aligned} \qquad (6)$$

Como pode ser observado na figura anterior, $(b - a) = 3h$*.*

Neste caso, $x_0 = a$ e $x_3 = b$, então os limites de integração ficam:

$$\begin{aligned} &\text{para } x = a \quad \rightarrow \quad z = \frac{x-a}{h} = \frac{a-a}{h} = 0 \\ &\text{para } x = b \quad \rightarrow \quad z = \frac{x-a}{h} = \frac{b-a}{h} = \frac{3h}{h} = 3 \end{aligned} \qquad (6)$$

Substituindo as eqs. (5) e (6) na eq. (4) e obtém-se:

$$I = \int_0^3 \left(y_0 + z\Delta y_0 + \frac{z(z-1)\Delta^2 y_0}{2!} + \frac{z(z-1)(z-2)\Delta^3 y_0}{3!} \right) h dz$$

Neste caso, $x_0 = a$ e $x_3 = b$, então os limites de integração ficam:

$$\begin{aligned} &\text{para } x = a \quad \rightarrow \quad z = \frac{x-a}{h} = \frac{a-a}{h} = 0 \\ &\text{para } x = b \quad \rightarrow \quad z = \frac{x-a}{h} = \frac{b-a}{h} = \frac{3h}{h} = 3 \end{aligned} \qquad (6)$$

Substituindo as eqs. (5) e (6) na eq. (4) e obtém-se:

$$I = \int_0^3 \left(y_0 + z\Delta y_0 + \frac{z(z-1)\Delta^2 y_0}{2!} + \frac{z(z-1)(z-2)\Delta^3 y_0}{3!} \right) h\,dz$$

$$I = \int_0^3 \left(y_0 + z\Delta y_0 + \frac{(z^2 - z)\Delta^2 y_0}{2} + \frac{(z^3 - 3z^2 + 2z)\Delta^3 y_0}{6} \right) h\,dz$$

Neste caso, $x_0 = a$ e $x_3 = b$, então os limites de integração ficam:

$$\begin{aligned} &\text{para } x = a \quad \rightarrow \quad z = \frac{x-a}{h} = \frac{a-a}{h} = 0 \\ &\text{para } x = b \quad \rightarrow \quad z = \frac{x-a}{h} = \frac{b-a}{h} = \frac{3h}{h} = 3 \end{aligned} \qquad (6)$$

Substituindo as eqs. (5) e (6) na eq. (4) e obtém-se:

$$I = \int_0^3 \left(y_0 + z\Delta y_0 + \frac{z(z-1)\Delta^2 y_0}{2!} + \frac{z\,(z-1)(z-2)\Delta^3 y_0}{3!} \right) hdz$$

$$I = \int_0^3 \left(y_0 + z\Delta y_0 + \frac{(z^2 - z)\Delta^2 y_0}{2} + \frac{(z^3 - 3z^2 + 2z)\Delta^3 y_0}{6} \right) hdz$$

$$I = h\left[zy_0 + \frac{z^2}{2}\Delta y_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2} \right)\Delta^2 y_0 + \frac{1}{6}\left(\frac{z^4}{4} - z^3 + z^2 \right)\Delta^3 y_0 \right]_0^3 \qquad (7)$$

Substituindo os limites de integração a eq. (7) fica:

$$I = h\left\{3y_0 + \frac{9}{2}\Delta y_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{27}{3} - \frac{9}{2}\right)\Delta^2 y_0 + \frac{1}{6}\left(\frac{81}{4} - 27 + 9\right)\Delta^3 y_0\right\}$$

Substituindo os limites de integração a eq. (7) fica:

$$I = h\left\{3y_0 + \frac{9}{2}\Delta y_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{27}{3} - \frac{9}{2}\right)\Delta^2 y_0 + \frac{1}{6}\left(\frac{81}{4} - 27 + 9\right)\Delta^3 y_0\right\}$$

$$I = h\left\{3y_0 + \frac{9}{2}\Delta y_0 + \frac{9}{4}\Delta^2 y_0 + \frac{3}{8}\Delta^3 y_0\right\}. \qquad (8)$$

Substituindo os limites de integração a eq. (7) fica:

$$I = h\left\{3y_0 + \frac{9}{2}\Delta y_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{27}{3} - \frac{9}{2}\right)\Delta^2 y_0 + \frac{1}{6}\left(\frac{81}{4} - 27 + 9\right)\Delta^3 y_0\right\}$$

$$I = h\left\{3y_0 + \frac{9}{2}\Delta y_0 + \frac{9}{4}\Delta^2 y_0 + \frac{3}{8}\Delta^3 y_0\right\}. \tag{8}$$

As diferenças finitas são expressas por:

$$\Delta y_0 = \mathbf{y_1} - \mathbf{y_0}$$

Substituindo os limites de integração a eq. (7) fica:

$$I = h\left\{3y_0 + \frac{9}{2}\Delta y_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{27}{3} - \frac{9}{2}\right)\Delta^2 y_0 + \frac{1}{6}\left(\frac{81}{4} - 27 + 9\right)\Delta^3 y_0\right\}$$

$$I = h\left\{3y_0 + \frac{9}{2}\Delta y_0 + \frac{9}{4}\Delta^2 y_0 + \frac{3}{8}\Delta^3 y_0\right\}. \qquad (8)$$

As diferenças finitas são expressas por:

$$\Delta y_0 = \mathbf{y_1 - y_0}$$

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = \mathbf{y_2 - 2y_1 + y_0}$$

Substituindo os limites de integração a eq. (7) fica:

$$I = h\left\{3y_0 + \frac{9}{2}\Delta y_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{27}{3} - \frac{9}{2}\right)\Delta^2 y_0 + \frac{1}{6}\left(\frac{81}{4} - 27 + 9\right)\Delta^3 y_0\right\}$$

$$I = h\left\{3y_0 + \frac{9}{2}\Delta y_0 + \frac{9}{4}\Delta^2 y_0 + \frac{3}{8}\Delta^3 y_0\right\}. \qquad (8)$$

As diferenças finitas são expressas por:

$$\Delta y_0 = \mathbf{y_1 - y_0}$$

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = \mathbf{y_2 - 2y_1 + y_0}$$

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = (\Delta y_2 - \Delta y_1) - (\Delta y_1 - \Delta y_0) \qquad (9)$$

$$\Delta^3 y_0 = (y_3 - y_2) - (y_2 - y_1) - (y_2 - y_1) + (y_1 - y_0)$$

$$\Delta^3 y_0 = \mathbf{y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0}$$

Substituindo as eqs. (9) na eq. (8) obtém-se:

$$I = h\left\{3y_0 + \frac{9}{2}(y_1 - y_0) + \frac{9}{4}(y_2 - 2y_1 + y_0) + \frac{3}{8}(y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0)\right\}$$

Substituindo as eqs. (9) na eq. (8) obtém-se:

$$I = h\left\{3y_0 + \frac{9}{2}(y_1 - y_0) + \frac{9}{4}(y_2 - 2y_1 + y_0) + \frac{3}{8}(y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0)\right\}$$

$$I = h\left\{\left(3 - \frac{9}{2} + \frac{9}{4} - \frac{3}{8}\right)y_0 + \left(\frac{9}{2} - \frac{9}{2} + \frac{9}{8}\right)y_1 + \left(\frac{9}{4} - \frac{9}{8}\right)y_2 + \frac{3}{8}y_3\right\}$$

Substituindo as eqs. (9) na eq. (8) obtém-se:

$$I = h\left\{3y_0 + \frac{9}{2}(y_1 - y_0) + \frac{9}{4}(y_2 - 2y_1 + y_0) + \frac{3}{8}(y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0)\right\}$$

$$I = h\left\{\left(3 - \frac{9}{2} + \frac{9}{4} - \frac{3}{8}\right)y_0 + \left(\frac{9}{2} - \frac{9}{2} + \frac{9}{8}\right)y_1 + \left(\frac{9}{4} - \frac{9}{8}\right)y_2 + \frac{3}{8}y_3\right\}$$

$$I = h\left\{\frac{3}{8}y_0 + \frac{9}{8}y_1 + \frac{9}{8}y_2 + \frac{3}{8}y_3\right\}$$

Substituindo as eqs. (9) na eq. (8) obtém-se:

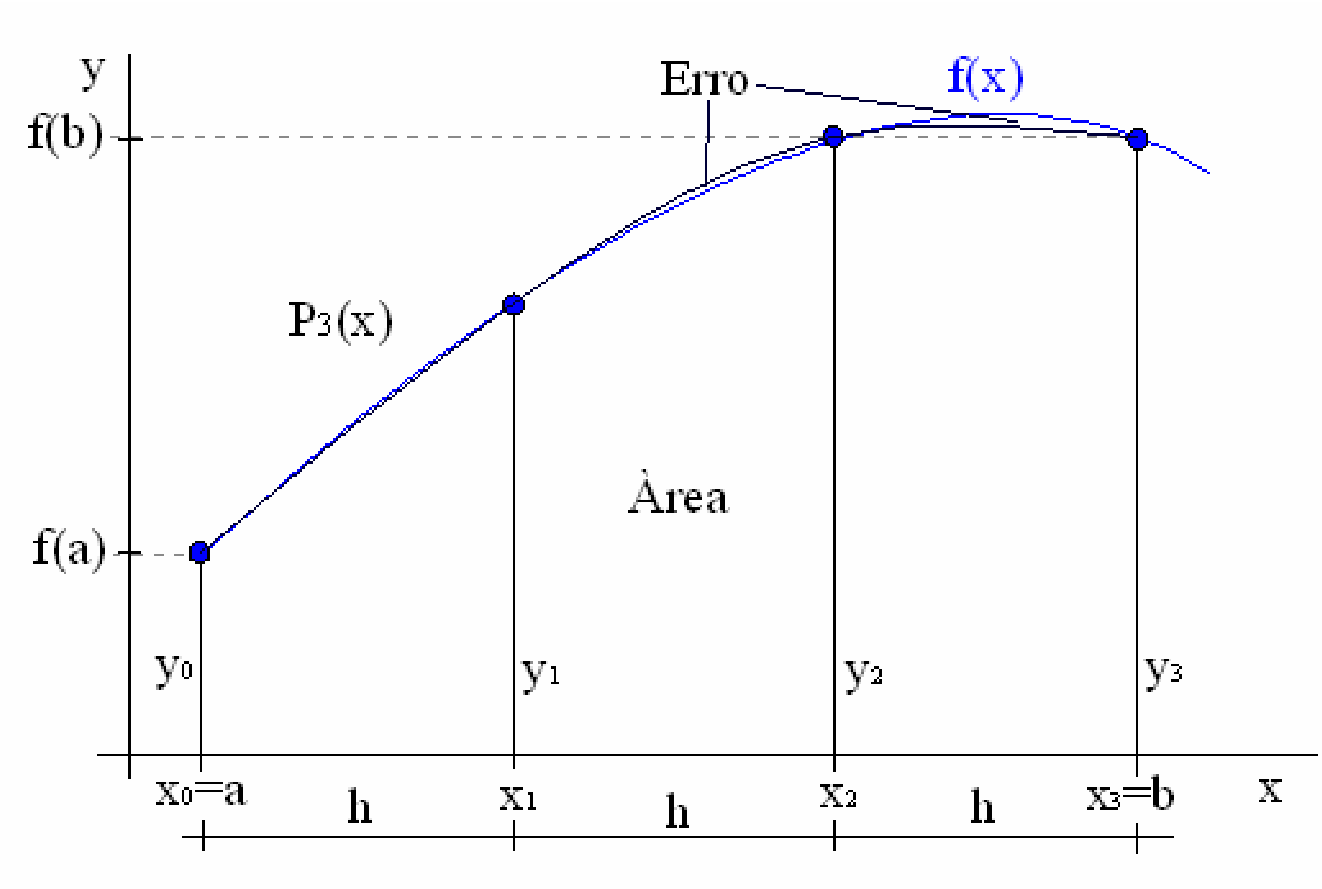
$$I = h\left\{3y_0 + \frac{9}{2}(y_1 - y_0) + \frac{9}{4}(y_2 - 2y_1 + y_0) + \frac{3}{8}(y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0)\right\}$$

$$I = h\left\{\left(3 - \frac{9}{2} + \frac{9}{4} - \frac{3}{8}\right)y_0 + \left(\frac{9}{2} - \frac{9}{2} + \frac{9}{8}\right)y_1 + \left(\frac{9}{4} - \frac{9}{8}\right)y_2 + \frac{3}{8}y_3\right\}$$

$$I = h\left\{\frac{3}{8}y_0 + \frac{9}{8}y_1 + \frac{9}{8}y_2 + \frac{3}{8}y_3\right\}$$

$$I = \frac{3}{8}h(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3) \rightarrow \text{Segunda Regra de Simpson} \qquad (10)$$

6.4.2 Interpretação Geométrica



$$I = \frac{3}{8} h(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3)$$

6.4.3 Erro de Truncamento:

O erro de truncamento é a diferença entre a solução exata da integral de $f(x)$ e a solução aproximada da integral, calculado por:

$$E = \int_a^b R_3 dx$$

6.4.3 Erro de Truncamento:

O erro de truncamento é a diferença entre a solução exata da integral de $f(x)$ e a solução aproximada da integral, calculado por:

$$E = \int_a^b R_3 dx$$

onde R_3 é o resíduo, que para a segunda regra de Simpson, é dado por:

$$R_3 = \frac{z(z-1)(z-2)(z-3)h^4 f^{(IV)}(\varepsilon)}{4!}$$

6.4.3 Erro de Truncamento:

O erro de truncamento é a diferença entre a solução exata da integral de $f(x)$ e a solução aproximada da integral, calculado por:

$$E = \int_a^b R_3 dx$$

onde R_3 é o resíduo, que para a segunda regra de Simpson, é dado por:

$$R_3 = \frac{z(z-1)(z-2)(z-3)h^4 f^{(IV)}(\varepsilon)}{4!}$$

então

$$E = \int_a^b \frac{z(z-1)(z-2)(z-3)h^4 f^{(IV)}(\varepsilon)}{4!} dx$$

6.4.3 Erro de Truncamento:

O erro de truncamento é a diferença entre a solução exata da integral de $f(x)$ e a solução aproximada da integral, calculado por:

$$E = \int_a^b R_3 dx$$

onde R_3 é o resíduo, que para a segunda regra de Simpson, é dado por:

$$R_3 = \frac{z(z-1)(z-2)(z-3)h^4 f^{(IV)}(\varepsilon)}{4!}$$

então

$$E = \int_a^b \frac{z(z-1)(z-2)(z-3)h^4 f^{(IV)}(\varepsilon)}{4!} dx$$

substituindo os limites de integração, o dx por hdz e integrando obtém-se:

$$E = h^5 f^{(IV)}(\varepsilon) \int_0^3 \frac{z(z-1)(z-2)(z-3)}{4!} dz$$

6.4.3 Erro de Truncamento:

O erro de truncamento é a diferença entre a solução exata da integral de $f(x)$ e a solução aproximada da integral, calculado por:

$$E = \int_a^b R_3 dx$$

onde R_3 é o resíduo, que para a segunda regra de Simpson, é dado por:

$$R_3 = \frac{z(z-1)(z-2)(z-3)h^4 f^{(IV)}(\varepsilon)}{4!}$$

então

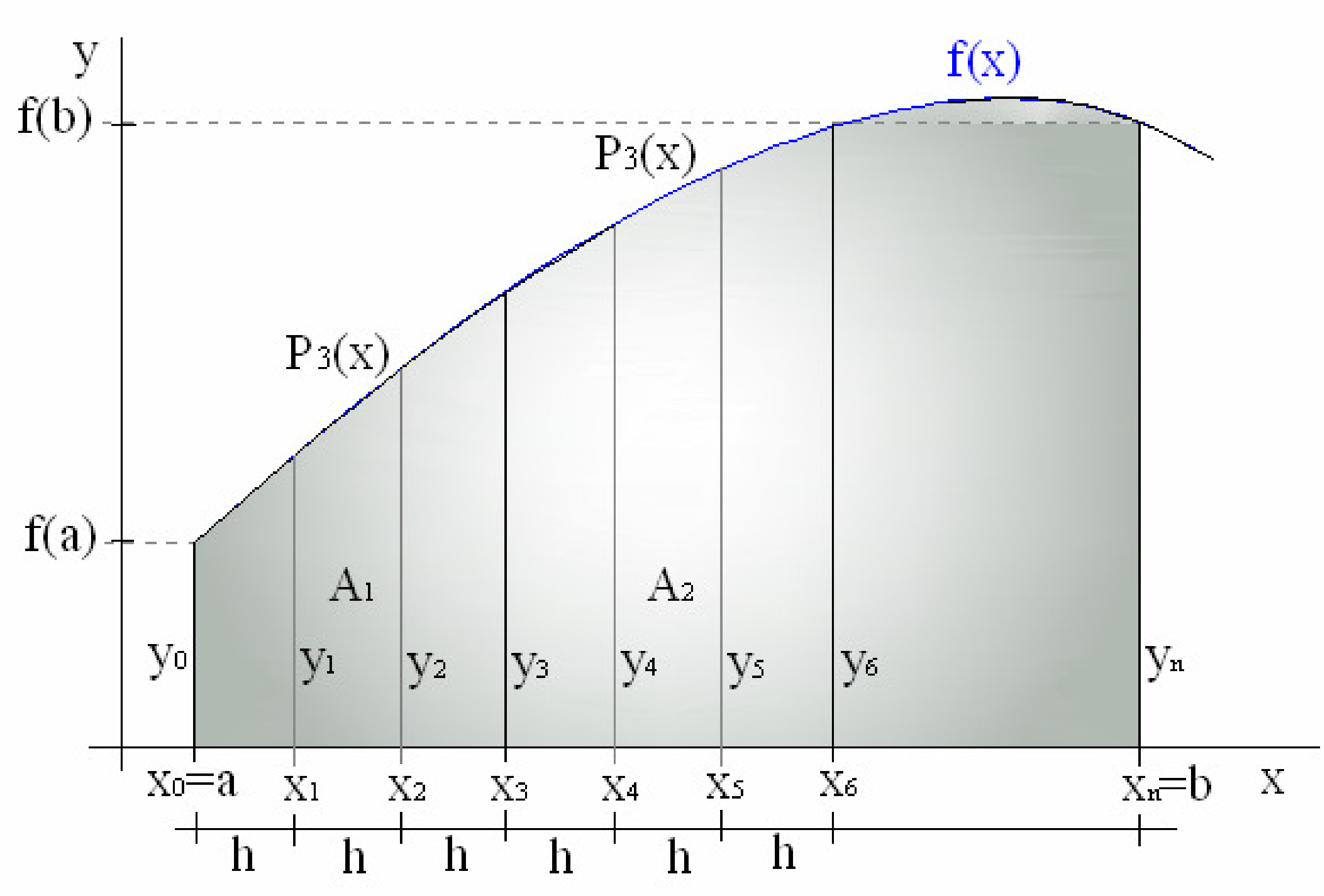
$$E = \int_a^b \frac{z(z-1)(z-2)(z-3)h^4 f^{(IV)}(\varepsilon)}{4!} dx$$

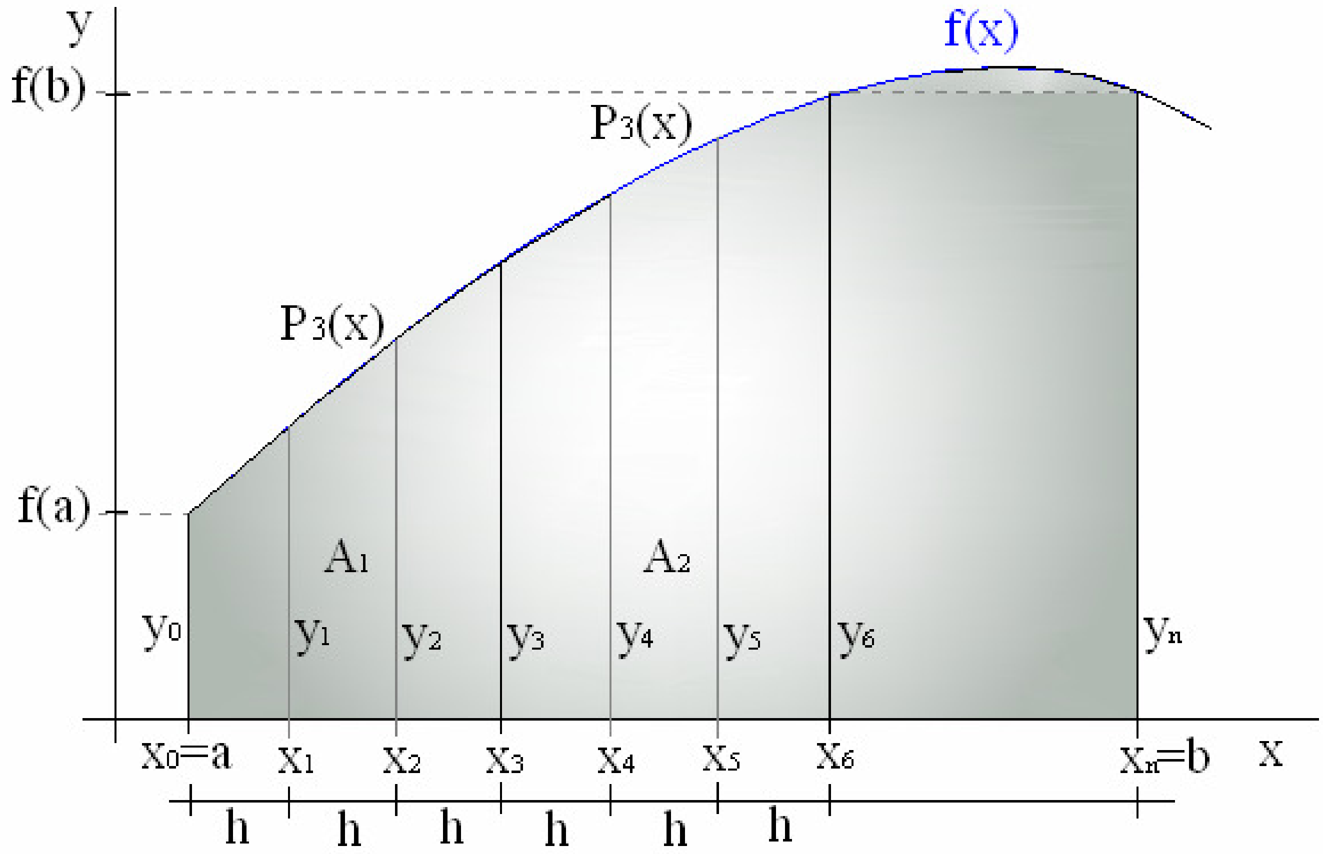
substituindo os limites de integração, o dx por hdz e integrando obtém-se:

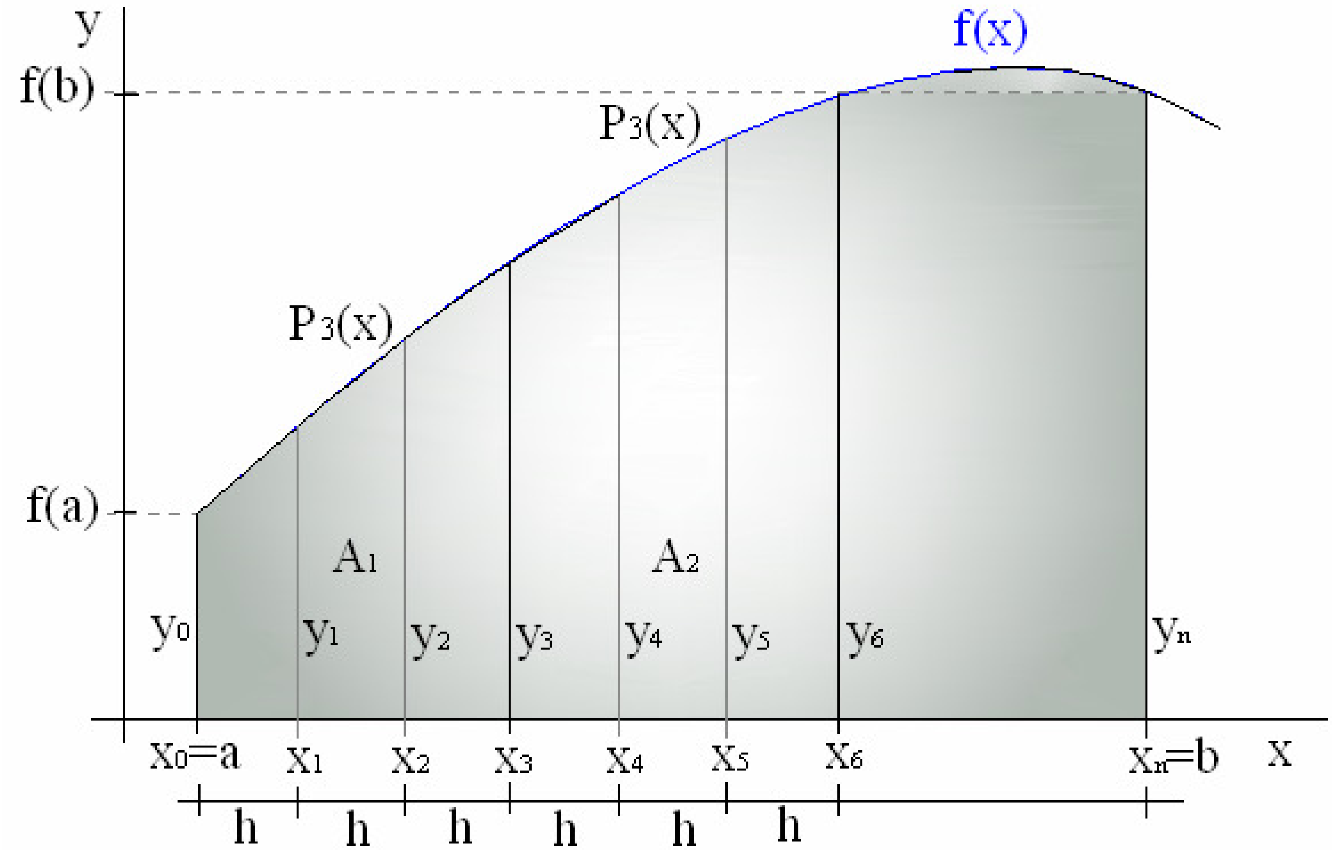
$$E = h^5 f^{(IV)}(\varepsilon) \int_0^3 \frac{z(z-1)(z-2)(z-3)}{4!} dz = -\frac{3}{80} h^5 f^{(IV)}(\varepsilon) \qquad (11)$$

6.4.4 Fórmula Composta:

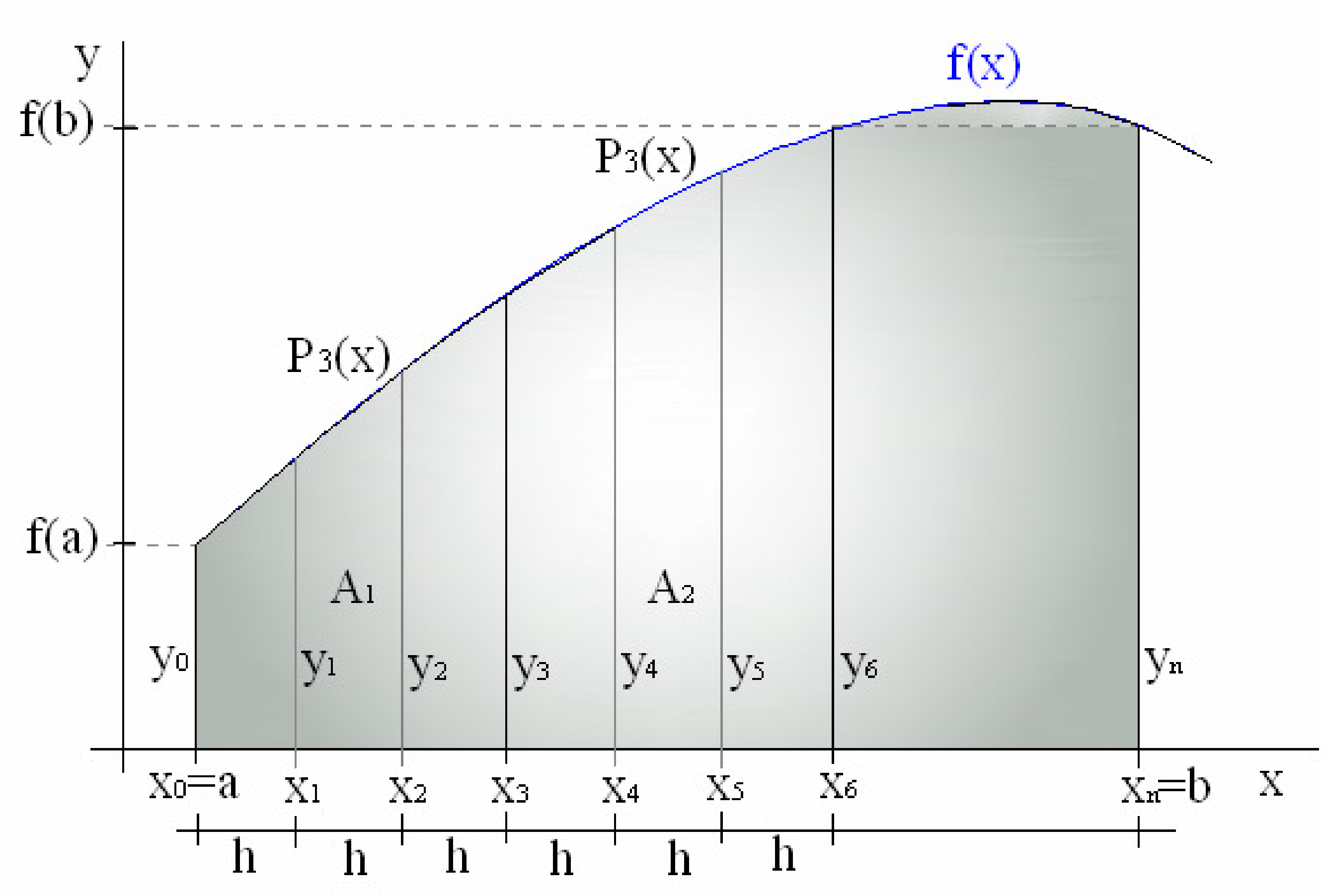
Subdividindo o intervalo de integração [a, b] por subintervalos múltiplo de 3 e a cada 3 subintervalos aplicar a segunda regra de Simpson, tem-se a fórmula composta.




y
f(x)
f(b)
P3(x)
P3(x)
f(a)
A1
A2
y0
y1
y2
y3
y4
y5
y6
yn
x0=a
x1
x2
x3
x4
x5
x6
xn=b
x
h
h
h
h
h
h

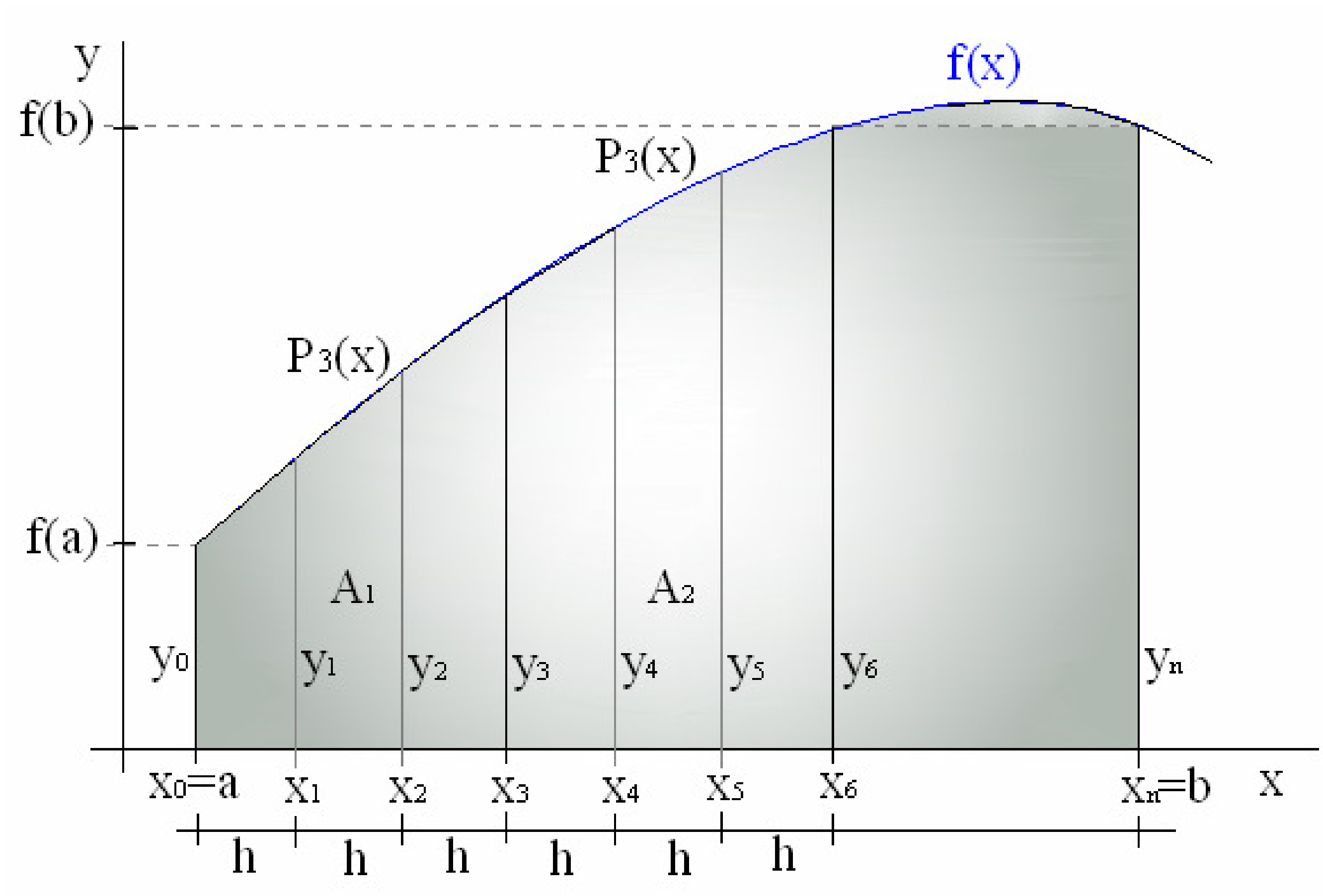


$$I = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_{n/3}$$



$$I = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_{n/3}$$

$$I = \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3) + \frac{3h}{8}(y_3 + 3y_4 + 3y_5 + y_6) + \ldots)$$



$$I = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_{n/3}$$

$$I = \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3) + \frac{3h}{8}(y_3 + 3y_4 + 3y_5 + y_6) + \ldots)$$

$$I = \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 3y_5 + 2y_6 + \ldots + 3y_{n-2} + 3y_{n-1} + y_n) \quad (12)$$

6.4.5 Erro de Truncamento da Fórmula Composta:

O erro de truncamento total é a soma dos erros cometidos a cada aplicação da Segunda Regra de Simpson.

$$E = E_1 + E_2 + ... + E_{n/3}$$

6.4.5 Erro de Truncamento da Fórmula Composta:

O erro de truncamento total é a soma dos erros cometidos a cada aplicação da Segunda Regra de Simpson.

$$E = E_1 + E_2 + \ldots + E_{n/3}$$

$$E = \frac{n}{3}\left(\frac{-3h^5}{80} f^{(IV)}(\varepsilon)\right)$$

6.4.5 Erro de Truncamento da Fórmula Composta:

O erro de truncamento total é a soma dos erros cometidos a cada aplicação da Segunda Regra de Simpson.

$$E = E_1 + E_2 + \ldots + E_{n/3}$$

$$E = \frac{n}{3}\left(\frac{-3h^5}{80} f^{(IV)}(\varepsilon)\right)$$

$$E = -\frac{(b-a)^5}{80n^4} f^{(IV)}(\varepsilon) \qquad (13)$$

Exercícios:

1) Calcular numericamente a integral abaixo, utilizando a Segunda Regra de Simpson, subdividindo o intervalo de integração em 9 subintervalos ($n = 9$):

$$I = \int_1^4 \ln(x^3 + \sqrt{e^x + 1})dx$$

Exercícios:

1) Calcular numericamente a integral abaixo, utilizando a Segunda Regra de Simpson, subdividindo o intervalo de integração em 9 subintervalos ($n = 9$):

$$I = \int_1^4 \ln(x^3 + \sqrt{e^x + 1})dx$$

Solução numérica:

$$I = \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 3y_5 + 2y_6 + 3y_7 + 3y_8 + y_9)$$

Exercícios:

1) Calcular numericamente a integral abaixo, utilizando a Segunda Regra de Simpson, subdividindo o intervalo de integração em 9 subintervalos ($n = 9$):

$$I = \int_1^4 \ln(x^3 + \sqrt{e^x + 1})dx$$

Solução numérica:

$$I = \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 3y_5 + 2y_6 + 3y_7 + 3y_8 + y_9)$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{9} = 0,333333$$

Exercícios:

1) Calcular numericamente a integral abaixo, utilizando a Segunda Regra de Simpson, subdividindo o intervalo de integração em 9 subintervalos ($n = 9$):

$$I = \int_1^4 \ln(x^3 + \sqrt{e^x + 1})dx$$

Solução numérica:

$$I = \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 3y_5 + 2y_6 + 3y_7 + 3y_8 + y_9)$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{9} = 0{,}333333$$

$$y = \ln(x^3 + \sqrt{e^x + 1})$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m	$m*y_i$
0				
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m	$m*y_i$
0				
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				

$$I = \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 3y_5 + 2y_6 + 3y_7 + 3y_8 + y_9)$$

$$y = \ln(x^3 + \sqrt{e^x + 1})$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m	$m*y_i$
0	1,000000			
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				

O primeiro valor de x_i é $x_0 = 1{,}0$ que é o valor do limite inferior da integral.

$$I = \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 3y_5 + 2y_6 + 3y_7 + 3y_8 + y_9)$$

$$y = \ln(x^3 + \sqrt{e^x + 1})$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m	$m*y_i$
0	1,000000	1,074417		
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				

O valor de y_i é obtido substituindo x_i na função de integração.

$$y_0 = \ln(x_0^{\,3} + \sqrt{e^{x_0} + 1}) = \ln(1^3 + \sqrt{e^1 + 1}) = 1{,}074417$$

$$I = \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 3y_5 + 2y_6 + 3y_7 + 3y_8 + y_9)$$

$$y = \ln(x^3 + \sqrt{e^x + 1})$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m	$m*y_i$
0	1,000000	1,074417	1	
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				

É o multiplicador de y_0. Veja na fórmula abaixo.

$$I = \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 3y_5 + 2y_6 + 3y_7 + 3y_8 + y_9)$$

$$y = \ln(x^3 + \sqrt{e^x + 1})$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m	$m*y_i$
0	1,000000	1,074417	1	1,074417
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				

É o resultado do produto m_0*y_0.

$$I = \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 3y_5 + 2y_6 + 3y_7 + 3y_8 + y_9)$$

$$y = \ln(x^3 + \sqrt{e^x + 1})$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m	$m*y_i$
0	1,000000	1,074417	1	1,074417
1	1,333333			
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				

O valor de x_i é obtido pela expressão:

$x_{n+1} = x_n + h = 1{,}0 + 0{,}333333 = 1{,}333333$

$$I = \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 3y_5 + 2y_6 + 3y_7 + 3y_8 + y_9)$$

$$y = \ln(x^3 + \sqrt{e^x + 1})$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m	$m*y_i$
0	1,000000	1,074417	1	1,074417
1	1,333333	1,517282		
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				

O valor de y_i é obtido substituindo x_i na função de integração.

$$y_1 = \ln(x_1^{\,3} + \sqrt{e^{x_1} + 1}\,) = \ln(1{,}333333^3 + \sqrt{e^{1{,}333333} + 1}\,) = 1{,}517282$$

$$I = \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 3y_5 + 2y_6 + 3y_7 + 3y_8 + y_9)$$

$$y = \ln(x^3 + \sqrt{e^x + 1})$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m	$m*y_i$
0	1,000000	1,074417	1	1,074417
1	1,333333	1,517282	3	
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				

É o multiplicador de y_1. Veja na fórmula abaixo.

$$I = \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 3y_5 + 2y_6 + 3y_7 + 3y_8 + y_9)$$

$$y = \ln(x^3 + \sqrt{e^x + 1})$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m	$m*y_i$
0	1,000000	1,074417	1	1,074417
1	1,333333	1,517282	3	4,551846
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				

É o resultado do produto m_1*y_1.

$$I = \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 3y_5 + 2y_6 + 3y_7 + 3y_8 + y_9)$$

$$y = \ln(x^3 + \sqrt{e^x + 1})$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m	m^*y_i
0	1,000000	1,074417	1	1,074417
1	1,333333	1,517282	3	4,551846
2	1,666667			
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				

Acompanhe os cálculos.

$$I = \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 3y_5 + 2y_6 + 3y_7 + 3y_8 + y_9)$$

$$y = \ln(x^3 + \sqrt{e^x + 1})$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m	$m*y_i$
0	1,000000	1,074417	1	1,074417
1	1,333333	1,517282	3	4,551846
2	1,666667	1,965504		
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				

$$I = \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 3y_5 + 2y_6 + 3y_7 + 3y_8 + y_9)$$

$$y = \ln(x^3 + \sqrt{e^x + 1})$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m	$m*y_i$
0	1,000000	1,074417	1	1,074417
1	1,333333	1,517282	3	4,551846
2	1,666667	1,965504	3	
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				

$$I = \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 3y_5 + 2y_6 + 3y_7 + 3y_8 + y_9)$$

$$y = \ln(x^3 + \sqrt{e^x + 1})$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m	$m*y_i$
0	1,000000	1,074417	1	1,074417
1	1,333333	1,517282	3	4,551846
2	1,666667	1,965504	3	5,896513
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				

$$I = \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 3y_5 + 2y_6 + 3y_7 + 3y_8 + y_9)$$

$$y = \ln(x^3 + \sqrt{e^x + 1})$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m	$m*y_i$
0	1,000000	1,074417	1	1,074417
1	1,333333	1,517282	3	4,551846
2	1,666667	1,965504	3	5,896513
3	2,000000	2,388431	2	4,776862
4				
5				
6				
7				
8				
9				

$$I = \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 3y_5 + 2y_6 + 3y_7 + 3y_8 + y_9)$$

$$y = \ln(x^3 + \sqrt{e^x + 1})$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m	$m*y_i$
0	1,000000	1,074417	1	1,074417
1	1,333333	1,517282	3	4,551846
2	1,666667	1,965504	3	5,896513
3	2,000000	2,388431	2	4,776862
4	2,333333	2,776772	3	8,330316
5	2,666667	3,130535	3	9,391604
6	3,000000	3,452901	2	6,905801
7	3,333333	3,747741	3	11,243223
8	3,666667	4,018730	3	12,056191
9	4,000000	4,269088	1	4,269088

$$I = \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 3y_5 + 2y_6 + 3y_7 + 3y_8 + y_9)$$

$$y = \ln(x^3 + \sqrt{e^x + 1})$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m	$m*y_i$
0	1,000000	1,074417	1	1,074417
1	1,333333	1,517282	3	4,551846
2	1,666667	1,965504	3	5,896513
3	2,000000	2,388431	2	4,776862
4	2,333333	2,776772	3	8,330316
5	2,666667	3,130535	3	9,391604
6	3,000000	3,452901	2	6,905801
7	3,333333	3,747741	3	11,243223
8	3,666667	4,018730	3	12,056191
9	4,000000	4,269088	1	4,269088
Somatório de $m*y_i$				68,495863

$$I = \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 3y_5 + 2y_6 + 3y_7 + 3y_8 + y_9)$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m	$m*y_i$
0	1,000000	1,074417	1	1,074417
1	1,333333	1,517282	3	4,551846
2	1,666667	1,965504	3	5,896513
3	2,000000	2,388431	2	4,776862
4	2,333333	2,776772	3	8,330316
5	2,666667	3,130535	3	9,391604
6	3,000000	3,452901	2	6,905801
7	3,333333	3,747741	3	11,243223
8	3,666667	4,018730	3	12,056191
9	4,000000	4,269088	1	4,269088
Somatório de $m*y_i$				68,495863

$$I = \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 3y_5 + 2y_6 + 3y_7 + 3y_8 + y_9)$$

$$I = \frac{3*0,333333}{8}(68,495863) = 8,561983$$

2) Calcular numericamente a integral abaixo, utilizando a Segunda Regra de Simpson, fórmula composta e escolhendo um n adequado.

a) $I = \int_0^1 e^x dx$

b) $I = \int_0^1 \frac{\cos(x)}{1+x} dx$

Fim.

Fim.

Universidade Federal do Rio Grande - FURG
Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF
Licenciatura em Matemática – EaD/PROLIC
Professor Formador Tales Luiz Popiolek