Interpolação

Interpolação de Lagrange

4.5 Interpolação de Lagrange:

Se $(x_i, f(x_i))$ $i = 0, 1, 2, ..., n$ são pontos distintos, então, existe um único polinômio $P_n(x)$ de grau $\leq n$, tal que $P(x_i) = f(x_i)$.

4.5 Interpolação de Lagrange:

Se $(x_i, f(x_i))$ $i = 0, 1, 2, ..., n$ são pontos distintos, então, existe um único polinômio $P_n(x)$ de grau $\leq n$, tal que $P(x_i) = f(x_i)$.

4.5.1 Obtenção da fórmula:

Sejam os $n+1$ polinômios de Lagrange, $p_i(x)$ de grau n:

$$p_0(x) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$$

$$p_1(x) = (x - x_0)(x - x_2)...(x - x_n)$$

...

$$p_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})$$

Observa-se que, para $p_i(x)$, quando $i = 0$, é excluído do produtório o termo $(x - x_0)$, quando $i = 1$, é excluído do produtório o termo $(x - x_1)$ e assim segue até $i = n$.

4.5 Interpolação de Lagrange:

Se $(x_i, f(x_i))$ $i = 0, 1, 2, ..., n$ são pontos distintos, então, existe um único polinômio $P_n(x)$ de grau $\leq n$, tal que $P(x_i) = f(x_i)$.

4.5.1 Obtenção da fórmula:

Sejam os n+1 polinômios de Lagrange, $p_i(x)$ de grau n:

$$p_0(x) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$$

$$p_1(x) = (x - x_0)(x - x_2)...(x - x_n)$$

...

$$p_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})$$

Fórmula Compacta: os polinômios acima podem ser representados por:

$$p_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x - x_j); \; i = 0, 1, 2, ... , n$$

4.5.2 Propriedades dos polinômios de Lagrange:

1) $p_i(x_i) \neq 0$, para todo i;

2) $p_i(x_j) = 0$, para todo $i \neq j$.

4.5.2 Propriedades dos polinômios de Lagrange:

1) $p_i(x_i) \neq 0$, para todo i;

2) $p_i(x_j) = 0$, para todo $i \neq j$.

$P_n(x)$ é obtido através de uma combinação linear dos $p_i(x)$, isto é:

$$P_n(x) = b_0 p_0(x) + b_1 p_1(x) + \ldots + b_n p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i p_i(x) \qquad (1)$$

4.5.2 Propriedades dos polinômios de Lagrange:

1) $p_i(x_i) \neq 0$, para todo i;

2) $p_i(x_j) = 0$, para todo $i \neq j$.

$P_n(x)$ é obtido através de uma combinação linear dos $p_i(x)$, isto é:

$$P_n(x) = b_0 p_0(x) + b_1 p_1(x) + \ldots + b_n p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i p_i(x) \qquad (1)$$

Substituindo em (1) $x = x_k$, obtém-se:

$$P_n(x_k) = b_0 p_0(x_k) + b_1 p_1(x_k) + \ldots + b_k p_k(x_k) + \ldots + b_n p_n(x_k) \qquad (2)$$

4.5.2 Propriedades dos polinômios de Lagrange:

1) $p_i(x_i) \neq 0$, para todo i;

2) $p_i(x_j) = 0$, para todo $i \neq j$.

$P_n(x)$ é obtido através de uma combinação linear dos $p_i(x)$, isto é:

$$P_n(x) = b_0 p_0(x) + b_1 p_1(x) + \ldots + b_n p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i p_i(x) \qquad (1)$$

Substituindo em (1) $x = x_k$ obtém-se:

$$P_n(x_k) = b_0 \underbrace{\cancel{p_0(x_k)}}_{0} + b_1 \underbrace{\cancel{p_1(x_k)}}_{0} + \ldots + b_k p_k(x_k) + \ldots + b_n \underbrace{\cancel{p_n(x_k)}}_{0} \qquad (2)$$

Aplicando as propriedades dos polinômios de lagrange em (2), tem-se:

$$P_n(x_k) = b_k p_k(x_k)$$

> *É zero devido à segunda propriedade dos polinômios de Lagrange, pois $i \neq j$.*

4.5.2 Propriedades dos polinômios de Lagrange:

1) $p_i(x_i) \neq 0$, para todo i;

2) $p_i(x_j) = 0$, para todo $i \neq j$.

$P_n(x)$ é obtido através de uma combinação linear dos $p_i(x)$, isto é:

$$P_n(x) = b_0 p_0(x) + b_1 p_1(x) + \ldots + b_n p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i p_i(x) \qquad (1)$$

Substituindo em (1) $x = x_{k,}$ obtém-se:

$$P_n(x_k) = b_0 p_0(x_k) + b_1 p_1(x_k) + \ldots + b_k p_k(x_k) + \ldots + b_n p_n(x_k) \qquad (2)$$

Aplicando as propriedades dos polinômios de lagrange em (2), tem-se:

$P_n(x_k) = b_k p_k(x_k)$ explicitando b_k obtém-se:

$$b_k = \frac{P_n(x_k)}{p_k(x_k)}$$ ou, genericamente, $$b_i = \frac{P_n(x_i)}{p_i(x_i)}.$$

Considerando

$$b_i = \frac{P_n(x_i)}{p_i(x_i)}$$

como $P_n(x_i) = f(x_i)$, tem-se $b_i = \dfrac{f(x_i)}{p_i(x_i)}$ que, substituindo em

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i p_i(x),$$

obtém – se:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i) p_i(x)}{p_i(x_i)}$$

Considerando

$$b_i = \frac{P_n(x_i)}{p_i(x_i)}$$

como $P_n(x_i) = f(x_i)$, tem-se $b_i = \dfrac{f(x_i)}{p_i(x_i)}$ que, substituindo em

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i p_i(x),$$

obtém-se:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)\, p_i(x)}{p_i(x_i)} \quad \therefore \quad p_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x - x_j) \ \text{ e } \ p_i(x_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j)$$

Considerando

$$b_i = \frac{P_n(x_i)}{p_i(x_i)}$$

como $P_n(x_i) = f(x_i)$, tem-se $b_i = \dfrac{f(x_i)}{p_i(x_i)}$ que, substituindo em

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i p_i(x),$$

obtém-se:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)\, p_i(x)}{p_i(x_i)} \quad \therefore \quad p_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x - x_j) \text{ e } p_i(x_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j)$$

então,

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \rightarrow \textbf{Fórmula de interpolação de Lagrange}$$

Exercícios:

1) Determinar o polinômio de interpolação de Lagrange para a função conhecida pelos pontos tabelados abaixo:

x_i	-1	0	2
$f(x_i)$	4	1	-1

Exercícios:

1) Determinar o polinômio de interpolação de Lagrange para a função conhecida pelos pontos tabelados abaixo:

x_i	-1	0	2
$f(x_i)$	4	1	-1

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{2} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

Como neste exemplo têm-se 3 pontos, o polinômio de interpolação será de grau ≤ 2.

Exercícios:

1) Determinar o polinômio de interpolação de Lagrange para a função conhecida pelos pontos tabelados abaixo:

x_i	-1	0	2
$f(x_i)$	4	1	-1

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{2} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

$$P_2(x) = \underbrace{f(x_0)\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}} +$$

Este termo foi obtido fazendo (i = 0) e (j =1 e j =2).

Exercícios:

1) Determinar o polinômio de interpolação de Lagrange para a função conhecida pelos pontos tabelados abaixo:

x_i	-1	0	2
$f(x_i)$	4	1	-1

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{2} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

$$P_2(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \underbrace{f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}} +$$

Este termo foi obtido fazendo (i = 1) e (j =0 e j =2).

Exercícios:

1) Determinar o polinômio de interpolação de Lagrange para a função conhecida pelos pontos tabelados abaixo:

x_i	-1	0	2
$f(x_i)$	4	1	-1

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{2} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

$$P_2(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \underbrace{f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}}$$

Este termo foi obtido fazendo (i = 2) e (j =0 e j =1).

Exercícios:

1) Determinar o polinômio de interpolação de Lagrange para a função conhecida pelos pontos tabelados abaixo:

x_i	-1	0	2
$f(x_i)$	4	1	-1

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{2} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

$$P_2(x) = \underbrace{f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}}$$

Agora, para obter o polinômio, basta substituir os valores de x_i e $f(x_i)$da tabela. Veja a seguir ...

Exercícios:

1) Determinar o polinômio de interpolação de Lagrange para a função conhecida pelos pontos tabelados abaixo:

x_i	-1	0	2
$f(x_i)$	4	1	-1

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{2} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

$$P_2(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$P_2(x) = 4\frac{(x-0)(x-2)}{(-1-0)(-1-2)} + 1\frac{(x+1)(x-2)}{(0+1)(0-2)} - 1\frac{(x+1)(x-0)}{(2+1)(2-0)}$$

Exercícios:

1) Determinar o polinômio de interpolação de Lagrange para a função conhecida pelos pontos tabelados abaixo:

x_i	-1	0	2
$f(x_i)$	4	1	-1

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{2} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

$$P_2(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$P_2(x) = 4\frac{(x-0)(x-2)}{(-1-0)(-1-2)} + 1\frac{(x+1)(x-2)}{(0+1)(0-2)} - 1\frac{(x+1)(x-0)}{(2+1)(2-0)}$$

$$P_2(x) = \frac{4}{3}(x^2-2x) - \frac{x^2-x-2}{2} - \frac{x^2+x}{6}$$

Exercícios:

1) Determinar o polinômio de interpolação de Lagrange para a função conhecida pelos pontos tabelados abaixo:

x_i	-1	0	2
$f(x_i)$	4	1	-1

$$P_2(x)=\sum_{i=0}^{2} f(x_i)\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{2}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

$$P_2(x)=f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$P_2(x)=4\frac{(x-0)(x-2)}{(-1-0)(-1-2)}+1\frac{(x+1)(x-2)}{(0+1)(0-2)}-1\frac{(x+1)(x-0)}{(2+1)(2-0)}$$

$$P_2(x)=\frac{4}{3}(x^2-2x)-\frac{x^2-x-2}{2}-\frac{x^2+x}{6}=\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)x^2+\left(-\frac{8}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)x+1$$

$$P_2(x)=1-\frac{7}{3}x+\frac{2}{3}x^2$$

Este é o polinômio que interpola os pontos da tabela.

2) Obter o polinômio que interpola nos pontos abaixo:

x_i	-1	0	2	3
$f(x_i)$	0	-5	-3	2

2) Obter o polinômio que interpola nos pontos abaixo:

x_i	-1	0	2	3
$f(x_i)$	0	-5	-3	2

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^{3} f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{3} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

2) Obter o polinômio que interpola nos pontos abaixo:

x_i	-1	0	2	3
$f(x_i)$	0	-5	-3	2

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^{3} f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{3} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

$$P_3(x) = f(x_0) \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} +$$

2) Obter o polinômio que interpola nos pontos abaixo:

x_i	-1	0	2	3
$f(x_i)$	0	-5	-3	2

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^{3} f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{3} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

$$P_3(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} +$$

2) Obter o polinômio que interpola nos pontos abaixo:

x_i	-1	0	2	3
$f(x_i)$	0	-5	-3	2

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^{3} f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{3} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

$$P_3(x) = \underbrace{f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + f(x_3)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}}$$

Agora, para obter o polinômio, basta substituir os valores de x_i e $f(x_i)$ da tabela.

2) Obter o polinômio que interpola nos pontos abaixo:

x_i	-1	0	2	3
$f(x_i)$	0	-5	-3	2

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^{3} f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{3} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

$$P_3(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} +$$

$$f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + f(x_3)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

$$P_3(x) = -5 - \frac{16}{6}x + \frac{13}{6}x^2 - \frac{1}{6}x^3$$

Substituindo os devidos valores de x_i e $f(x_i)$ e, após, realizando as simplificações, obter-se-á o polinômio.

3) Obter o polinômio que interpola nos pontos abaixo:

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	1	2	1	-2

Exercício complementa

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^{3} f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{3} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

Observa-se que, pela teoria de interpolação o grau do polinômio é menor ou igual a n, neste exercício n é igual a 3 e o polinômio que melhor representa os pontos interpolados é de segunda ordem.

Resposta: $P_3(x) = 2 - x^2$

Obrigado.