

Penetração da onda de maré em um canal fluvial: solução analítica adimensional

Gilmar de Oliveira Gomes¹, Eloi Melo Filho²

¹Matemática – CEFET-RS, Pelotas, RS – goliveirag@ig.com.br

²Laboratório de Hidráulica Marítima – UFSC, Florianópolis, SC – emf@ens.ufsc.br

RESUMO:

Este trabalho analisa o fenômeno da maré fluvial em um canal idealizado, através da solução adimensional das equações de Saint-Venant unidimensionais para o caso em que a maré perturba o escoamento permanente uniforme do rio, evidenciando a relação entre a variação do período e do número adimensional M com a atenuação da mesma. Assim, o aumento no período, acaba propiciando um aumento nas forças de atrito do escoamento o que, por sua vez, faz com que a onda se atenua mais rapidamente, relativamente ao seu comprimento. A velocidade da onda de maré quando confrontada com a velocidade básica do rio e com a velocidade de uma onda de gravidade, em um regime de escoamento sub-crítico, acaba situando-se em uma faixa, cujos limites inferior e superior são respectivamente a velocidade básica do canal e a velocidade da onda de gravidade.

PALAVRAS-CHAVE:

1. Marés fluviais. 2. Propagação de maré. 3. Canais fluviais. 4. Equações de Saint-Venant

1. INTRODUÇÃO

Vários são os exemplos na zona litorânea brasileira onde o trecho final das bacias hidrográficas situa-se na região de encontro do rio ou canal fluvial com o mar; como o caso do rio Amazonas e o rio Itajaí em Santa Catarina.

Em geral, os estudos existentes sobre esta região de transição, o estuário, tem como foco fenômenos hidrodinâmicos relacionados a variação de densidade decorrente da mistura de água doce e salgada, tais como a penetração da cunha salina no interior do estuário. Entretanto, as ações que o mar pode exercer sobre o rio não se esgotam neste aspecto, outro ponto importante é o efeito que as oscilações de nível impostas pela maré à jusante podem causar no interior do rio, ou seja, a *Maré Fluvial*.

O presente trabalho tem por objetivo contribuir para o melhor entendimento dos efeitos que a maré provoca no escoamento do rio no trecho próximo a foz. Considerando inicialmente a solução analítica adimensional para as equações que regem o fenômeno, é possível obter-se a partir daí resultados abrangentes, uma vez que se está utilizando uma abordagem completamente adimensional.

2. EQUAÇÕES DE SAINT-VENANT

As equações utilizadas para estudar a maré fluvial são as equações de Saint-Venant unidimensionais (1-D) na forma diferencial.

As equações de Saint-Venant são deduzidas a partir das leis básicas da Mecânica dos Fluidos que governam escoamentos à superfície livre: a conservação da massa e a conservação da quantidade de movimento linear.

2.1. Sistema natural de coordenadas e hipóteses básicas

Inicialmente é importante estabelecer o sentido atribuído no texto a expressão **canal fluvial**. O canal em questão é aquele no qual o escoamento se dá primordialmente pela ação direta da gravidade através da componente do peso da água na direção do declive. Em uma analogia direta com o que acontece nos rios. Dessa forma o escoamento em um canal fluvial ao contrário do que ocorre em um canal de maré, caracteriza-se por um único sentido de movimento; montante para jusante.

O sistema de coordenadas adotado para determinar as equações de Saint-Venant, tem o eixo x sobreposto ao leito do canal, o qual é inclinado em relação a horizontal de forma que a componente da velocidade de maior interesse tenha a mesma direção de x . Observa-se que, se o eixo x fosse colocado na horizontal, como nas equações de águas rasas, haveria a possibilidade de surgir uma componente vertical da velocidade, causando uma dificuldade extra.

Assim, no sistema de coordenadas natural para se estudar o fenômeno, o eixo x (longitudinal) segue o eixo do canal acompanhando a sua macro-topografia, apresentando uma inclinação S_0 em relação à horizontal, considerando o eixo z perpendicular ao eixo x como mostra a figura 1.

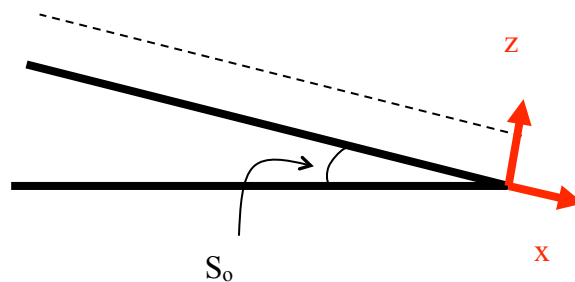


Figura1 Vista em corte da seção longitudinal do canal.

Definidas as características básicas da geometria do problema, o próximo passo, consiste em estabelecer as demais hipóteses necessárias a dedução das equações de Saint-Venant, como segue:

- (i) Escoamento isocórico, implicando em um valor constante para a densidade, excluindo-se desta análise, escoamentos de fluidos estratificados;
- (ii) Campo de pressão hidrostático, uma vez que no balanço de forças na direção perpendicular ao movimento, as acelerações verticais são desprezíveis em presença da componente do peso, conforme ref.[6]

- (iii) Escoamento em alto número de Reynolds, segundo ref.[2] caracterizando-o como turbulento;
- (iv) Aproximação de pequeno declive de Morris, segundo ref.[13];
- (v) Declividade constante.

2.2 Modelo unidimensional

A partir das hipóteses estabelecidas no item anterior é possível deduzir as equações de Saint-Venant na sua forma unidimensional, conforme ref.[14], uma vez que, as características do escoamento permitem uma aproximação unidimensional; $\vec{U} = u\vec{i}$, na qual u representa uma velocidade média na seção transversal.

Conservação da massa

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

Sendo que, o termo $\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)$ representa a taxa de acumulo de massa em um volume de controle considerado e, o termo $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ representa um balanço do fluxo de massa no volume de controle, no qual, $Q = uA$, é a vazão em volume e A é a área da seção transversal.

Conservação da quantidade de movimento linear

$$gAS_o - gA \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{kQ^2}{AR_h} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) \quad (2)$$

Assim, a equação 2 representa a conservação da quantidade de movimento, a qual relaciona a aceleração local $\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)$, a aceleração advectiva $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right)$, a força peso por unidade de massa gAS_o , a força de pressão por unidade de massa $gA \frac{\partial h}{\partial x}$ e a força de resistência por unidade de massa $\frac{kQ^2}{AR_h}$.

Cabe ressaltar que $R_h = \frac{A}{P}$ significa o raio hidráulico, ou seja, a razão entre a área (A) e perímetro molhado (P) e $k = \frac{g}{C_f^2}$ é o coeficiente de proporcionalidade de Chézy.

Dessa forma, as equações 1 e 2 constituem-se nas equações da Saint-Venant na forma unidimensional, utilizadas para descrever escoamentos em canais fluviais.

2.3 Caso particular

Nessa seção será determinada uma forma particular das equações de Saint-Venant, a qual será utilizada no restante do trabalho. Para tanto, faz-se necessário admitir algumas hipóteses adicionais àquelas apresentadas no início da seção 2.1:

- (vi) Largura constante do canal, tornando as equações independentes da mesma;
- (vii) Largura muito maior do que a altura da lamina de água, permitindo desprezar a contribuição de paredes laterais, considerando apenas o atrito existente no fundo, para o cálculo das forças de resistência;
- (viii) Canal retangular.

Conservação da massa

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) = 0 \quad (3)$$

Sendo $h(x,t)$ a altura da linha de água.

Conservação da quantidade de movimento linear

$$gS_o - g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{ku^2}{h} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4)$$

Portanto, as equações 3 e 4, constituem-se na versão unidimensional das equações de Saint-Venant que serão utilizadas no presente trabalho.

3. SOLUÇÃO ANALÍTICA ADIMENSIONAL DAS EQUAÇÕES DE SAINT-VENANT PARA A MARÉ FLUVIAL

Apresenta-se aqui uma solução analítica das equações de Saint-Venant, obtidas no item anterior, para o problema da maré fluvial. com base em uma abordagem totalmente adimensional.

3.1 Formulação do problema

A situação será estudada através de um modelo simplificado, porém com os mesmos aspectos físicos fundamentais do fenômeno. Para tanto, será necessário considerar outras hipóteses em complementaridade às hipóteses usadas na dedução das equações de Saint-Venant 3 e 4.

Sejam as hipóteses:

- (ix) A maré provoca perturbações em uma situação de equilíbrio, dada pelo escoamento permanente uniforme sub-crítico no rio. Tais perturbações devem ser pequenas de forma a provocar apenas variações na velocidade da corrente sem, no entanto, ocasionar inversão de fluxo em nenhum local do canal.

Assim, uma pequena oscilação periódica é produzida no nível médio da água na foz, tal que;

$$h(0, t) = h_0 \left[1 + \frac{a}{h_0} \cos(st) \right] \quad (5)$$

sendo, a , s e h_0 , respectivamente, a amplitude, a freqüência da oscilação e a altura da água para o escoamento básico do rio em regime permanente uniforme, de forma que;

$$\frac{a}{h_0} = \varepsilon \ll 1 \quad (6)$$

(x) A maré é representada de forma simplificada por uma única componente harmônica no tempo, com período T , capaz de se propagar rio acima sem sofrer reflexão.

A vazão do rio a montante, é considerada constante, ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x, t)h(x, t) = u_0 h_0 = q \quad (7)$$

sendo, u_0 a velocidade média do escoamento básico do rio em regime permanente uniforme e $q = Q/B$, a vazão por unidade de largura (B) ou vazão específica.

O fenômeno é descrito esquematicamente na figura 2

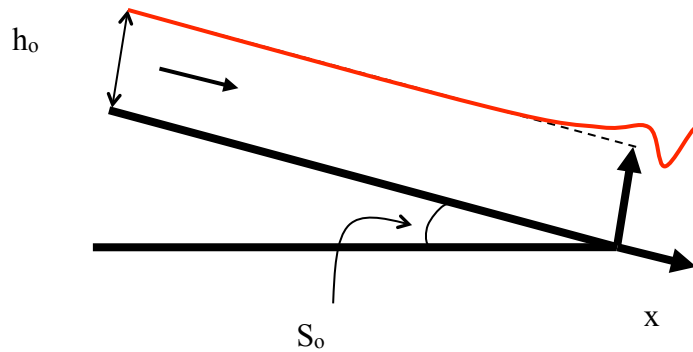


Figura 2 Representação esquemática do problema estudado.

3.2 Adimensionalização das equações

Sob o ponto de vista das aplicações, soluções adimensionais são mais convenientes do que as dimensionais, na medida que a independência de valores numéricos (dimensionais) possibilita que tais soluções sejam utilizadas em um espectro maior de situações.

A adimensionalização será feita usando-se uma escala intrínseca da onda definida em termos da velocidade básica do rio (u_0) e da freqüência da oscilação de nível $\left(s = \frac{2\pi}{T} \right)$ de período T imposta na foz, conforme ref.[8].

$$\lambda = \frac{u_0}{s} \quad (8)$$

Portanto as variáveis adimensionais, são calculadas como segue:

$$\hat{h} = \frac{h}{h_0} ; \hat{u} = \frac{u}{u_0} ; \hat{x} = \frac{x}{\lambda} ; \hat{t} = ts$$

Substituindo as novas variáveis nas equações 3 e 4, respectivamente, vem que:

$$\frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial}{\partial \hat{x}} (\hat{h} \hat{u}) = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} = \frac{g}{u_o s} S_o - F_R^{-2} \frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{x}} - M^{-1} \frac{\hat{u}^2}{\hat{h}} \quad (10)$$

sendo os parâmetros adimensionais, $F_R = \frac{u_o}{\sqrt{gh_o}}$ o número de Froude, relativo ao escoamento

não perturbado e $M = \frac{sh_o}{ku_o}$ o parâmetro, definido por Melo ^o conforme ref.[8], cujo significado físico será explorado mais adiante.

3.3 Solução analítica

Uma solução analítica para o problema proposto será obtida, utilizando a técnica das perturbações que consiste em supor que a solução completa para a altura de água $\hat{h}(\hat{x}, \hat{t})$ e para a velocidade da corrente $\hat{u}(\hat{x}, \hat{t})$ do rio, pode ser expressa como a superposição de soluções parciais, ou seja:

$$\hat{h}(\hat{x}, \hat{t}) = 1 + \varepsilon \hat{\eta}_1(\hat{x}, \hat{t}) + O(\varepsilon^2) \quad (11)$$

$$\hat{u}(\hat{x}, \hat{t}) = 1 + \varepsilon \hat{u}_1(\hat{x}, \hat{t}) + O(\varepsilon^2) \quad (12)$$

sendo $\hat{\eta}_1$ e \hat{u}_1 soluções parciais e ε o parâmetro de ordenamento das soluções parciais, o qual explicita a ordem de grandeza de cada termo da expansão. Portanto $\hat{\eta}_1$ e \hat{u}_1 são soluções de ordem $O(\varepsilon)$.

Substituindo as equações 11 e 12 em 9 e 10, vem que:

$$\varepsilon \left(\frac{\partial \hat{\eta}_1}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial (\hat{u}_1 + \hat{\eta}_1)}{\partial \hat{x}} \right) = O(\varepsilon^2) \quad (13)$$

$$\varepsilon \left(\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \hat{x}} \right) = \frac{gS_o}{u_o s} - M^{-1} + \varepsilon \left(M^{-1} (\hat{\eta}_1 - 2\hat{u}_1) - F_R^{-2} \frac{\partial \hat{\eta}_1}{\partial \hat{x}} \right) + O(\varepsilon^2) \quad (14)$$

onde foi utilizada a expansão binomial $(1 + \varepsilon \hat{\eta}_1)^{-1} = 1 - \varepsilon \hat{\eta}_1 + (\varepsilon \hat{\eta}_1)^2$, admitindo que $|\varepsilon \hat{\eta}_1| < 1$

3.3.1 Solução de ordem zero (escoamento permanente uniforme)

Muito embora a equação da conservação da massa (13), não introduza nenhuma informação em ordem zero; a partir da equação da conservação da quantidade de movimento (14), vem que:

$$\frac{gS_o}{u_o s} - M^{-1} = 0 \quad (15)$$

$$h_o = \left(\frac{q}{C_f (S_o)^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (16)$$

sendo $u_o = \frac{q}{h_o}$, fato que corresponde ao caso do escoamento permanente uniforme básico do rio.

3.3.2 Solução de primeira ordem (propagação da onda de maré no interior do rio)

Aqui é possível observar o efeito da maré fluvial através da resolução do sistema abaixo, obtido a partir das equações 13 e 14;

$$\frac{\partial \hat{\eta}_1}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial (\hat{u}_1 + \hat{\eta}_1)}{\partial \hat{x}} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \hat{x}} + F_R^{-2} \frac{\partial \hat{\eta}_1}{\partial \hat{x}} + M^{-1} (2\hat{u}_1 - \hat{\eta}_1) = 0 \quad (18)$$

Considerando que, a hipótese x requer funções periódicas no tempo, a solução apresenta a seguinte forma:

$$\hat{\eta}_1(\hat{x}, \hat{t}) = e^{f\hat{x}} \cos(f_i\hat{x} + \hat{t}) \quad (19)$$

$$\hat{u}_1(\hat{x}, \hat{t}) = -D e^{f\hat{x}} \cos(f_i\hat{x} + \hat{t} + \theta) \quad (20)$$

sendo, o número de onda adimensional f, dado por:

$$f = f_r + if_i = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (21)$$

$$e \ A = F_R^{-2} - 1 \quad ; \ B = 2i + 3M^{-1} \quad ; \ C = 1 - 2M^{-1}i \quad ; \ D = \sqrt{1 + \left(\frac{1 + 2f_i}{|f|^2} \right)^2} \quad ; \ \theta = \arctan\left(\frac{f_r}{|f|^2 + f_i} \right) \quad a$$

diferença de fase entre o nível de água e a velocidade da corrente e $|f|^2 = f_r^2 + f_i^2$

O número de onda adimensional (f) da maré fluvial, é o equivalente ao número de onda dimensional k, definido por Melo F^o conforme ref.[8] Para o qual, f_r determina a intensidade do amortecimento e, f_i determina o comprimento de onda $\left(L = \frac{2\pi\lambda}{f_i} \right)^{\frac{1}{2}}$ no interior do rio, conseqüentemente, determina também a velocidade de propagação da maré (C_M), uma vez que:

$$C_M = \frac{L}{T} = \frac{2\pi/T}{2\pi/L} = \frac{s}{\lambda^{-1}f_i} \quad (22)$$

Assim, substituindo as equações 19 e 20 respectivamente, em 11 e 12, vem que

$$\hat{h}(\hat{x}, \hat{t}) = 1 + \varepsilon e^{f\hat{x}} \cos(f_i\hat{x} + \hat{t}) \quad (23)$$

$$\hat{u}(\hat{x}, \hat{t}) = 1 - \varepsilon D e^{f\hat{x}} \cos(f_i\hat{x} + \hat{t} + \theta) \quad (24)$$

As equações 23 e 24 constituem, portanto, a versão adimensional da solução do problema da maré fluvial de ordem O(ε).

3.4 Relevância da solução adimensional

Um outro aspecto importante da solução adimensional, refere-se a melhor interpretação física do fenômeno. Inicialmente, observa-se que os parâmetros ε , F_R devem admitir valores suficientemente pequenos, afim de garantir a maré de pequena amplitude em regime sub-crítico.

O parâmetro M adimensional, pode ser interpretado fisicamente como a razão entre as forças de inércia e atrito, sendo utilizado como um indicador da dinâmica predominante no fenômeno da maré fluvial.

$$M = \frac{h_0 s}{k u_0} \equiv \frac{\text{inércia}}{\text{atrito}} \quad (25)$$

Portanto, M pode ser interpretado como um equivalente ao número de Reynolds e, pode ser utilizado como indicador do regime em que o escoamento se processa, como segue:

$M \ll 1$, indica predomínio das forças de atrito

$M \gg 1$, indica predomínio das forças de inércia

Cabe verificar então, em qual regime o fenômeno da maré fluvial se enquadra. Para tanto foram utilizados valores sugeridos por Melo F^o conforme ref.[8], como valores típicos desta situação. São eles: $h_0 = 5\text{m}$, $u_0 = 0,5\text{m/s}$, $k = 0,004$ e $s = 0,00014\text{rad/s}$. Obtendo-se $M = 0,35$ indicando que o fenômeno ocorre em um regime intermediário, visto que $0,35$ não é um valor muito menor do que um (1), entretanto é inegável a importância das forças de atrito.

O número M , pode ser re-escrito, como segue

$$M = \frac{s C_f^{2/3} q^{1/3}}{g S_0^{2/3}} \quad (26)$$

A equação 26 indica que, mudanças no regime da maré fluvial, podem ocorrer em razão da variação de diversos fatores. Por exemplo, pode-se verificar um aumento na importância das forças de inércia, a medida que houver um aumento na frequência (s), mantendo-se os demais parâmetros fixos.

4. APLICAÇÕES

A solução analítica adimensional será utilizada para investigar aspectos de interesse no fenômeno da maré fluvial.

4.1 Regime de inércia & regime de atrito

Será investigado aqui o comportamento da maré fluvial nos regimes de inércia e de atrito. Para tanto, foram considerados os mesmos valores típicos para os parâmetros fundamentais usados no item anterior, os quais, foram sugeridos por Melo F^o conforme ref. [8] como sendo representativos para o caso do rio Itajaí em Santa Catarina.

Assim:

- $q = 4.6 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$;
- $S_0 = 1/12000 \text{ m}/\text{m}$;
- $C_f = 30 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$.

Com base nos valores acima, obteve-se $h_0 = 6,56 \text{ m}$, $u_0 = 0,7 \text{ m/s}$.

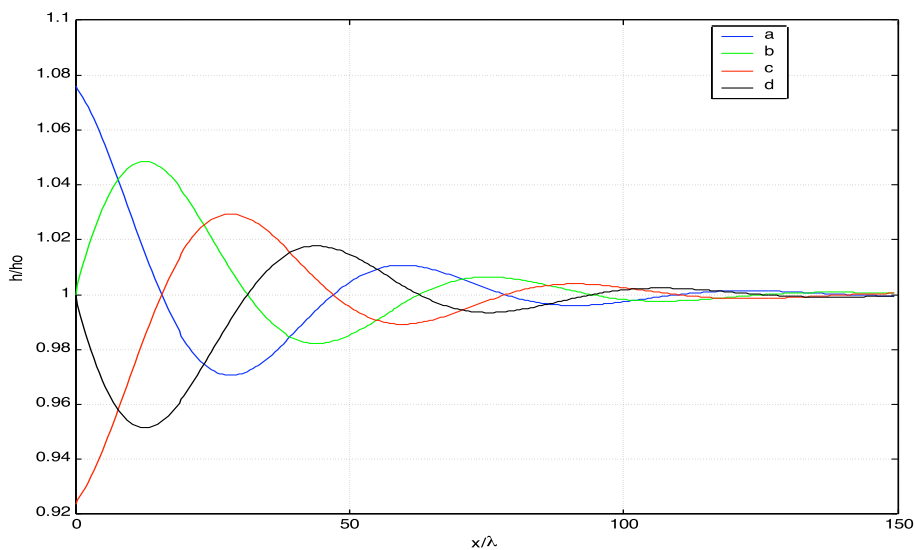
Considerando ainda, que a amplitude da maré seja, $a = 0,5\text{m}$, calculou-se os parâmetros adimensionais $\varepsilon = 0,076 \ll 1$ satisfazendo a condição de maré de pequena

amplitude e $F_R = 0,0874$, indicando que o escoamento básico do rio se processa em regime sub-crítico como requerido pela solução.

A especificação do regime em que o escoamento se processa depende do valor do parâmetro adimensional M , o qual será determinado a partir do valor a ser atribuído ao último parâmetro fundamental ainda não fornecido: o período da maré (T).

Considerando o período de oscilação da maré na foz $T = 0,5h$, tem-se que, $s=0,0035rad/s$, o que fornece $M = 2,995$, indicando um regime no qual as forças de inércia predominam ($M \gg 1$). O parâmetro de escala λ , vale neste caso 200m.

A solução adimensional para a posição da superfície da água $\left(\hat{h} = \frac{h}{h_0} \right)$ é mostrada na figura 3 para 4 fases do período; em $\hat{t} = 0$, $\hat{t} = \pi/2$, $\hat{t} = \pi$ e $\hat{t} = 3\pi/2$, lembrando que $\hat{x} = x/\lambda$



e $\hat{t} = t s$.

Figura 3 Representa o nível de água (adimensional) no regime dominado pela inércia em $\hat{t} = 0$ (a), $\hat{t} = \pi/2$ (b), $\hat{t} = \pi$ (c) e $\hat{t} = 3\pi/2$ (d).

A figura 3, mostra que, a maré fluvial sofre um forte amortecimento ao penetrar no rio, sendo possível identificar a presença de pelo menos duas cristas no interior do canal.

Considerando agora, uma oscilação com $T = 12,42h$, ou seja, o período da componente lunar semi-diurna, tem-se $s = 0.0001405rad/s$ e conseqüentemente $M = 0,1206$, fato que caracteriza uma situação na qual as forças de atrito predominam ($M \ll 1$). O parâmetro de escala (λ) nesse caso, vale 4991m.

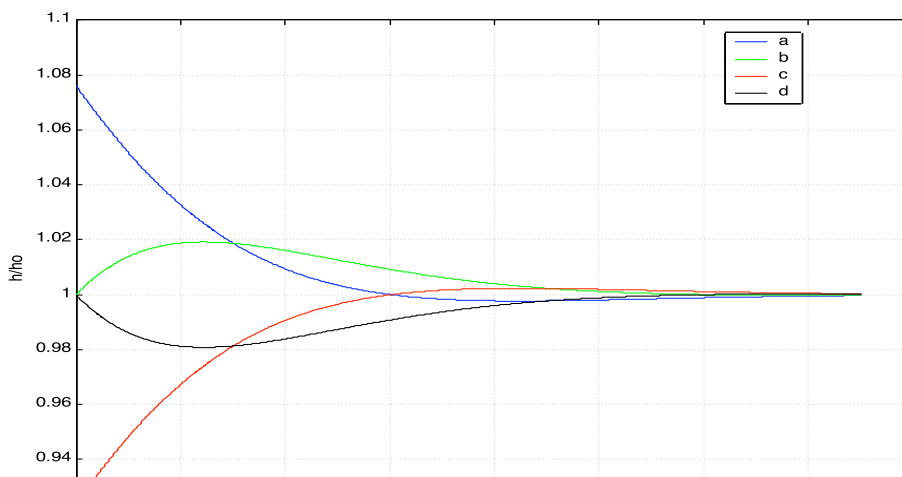


Figura 4 Representa o nível de água (adimensional) no regime dominado pelo atrito em $\hat{t}=0$ (a), $\hat{t} = \pi/2$ (b), $\hat{t} = \pi$ (c) e $\hat{t}=3\pi/2$ (d).

Comparando as figuras 3 e 4, nota-se que a maré fluvial, no caso do predomínio das forças de atrito (figura 4) atenua-se mais fortemente, uma vez que a onda quase que desaparece a uma distância aproximada da metade do seu comprimento.

Todavia, oscilações com períodos na faixa de 0.5h são muito raras. Então, como sugere Melo F^o ref.[9], considerando que os parâmetros acima são representativos da condição do rio Itajaí, a maré fluvial de caráter astronômico aconteceria no regime de atrito neste rio.

4.2 Distância de penetração adimensional

Uma das aplicações mais úteis da presente teoria refere-se à previsão da distância de penetração a partir da foz, até onde a maré será perceptível no rio.

Melo & Jordan ref.[11], propuseram uma forma de quantificar a distância de penetração (X), como sendo a distância para a qual a amplitude da oscilação do nível de água corresponde a 1% da amplitude existente na foz. Todavia, os resultados apresentados pelos autores citados acima, consistiam em um medida dimensional que quantificava a intensidade do decaimento da maré em unidade de distância (km). Agora é possível obter a sua equivalente adimensional (\hat{X}), aplicando a mesma definição;

$$e^{f_r \hat{X}} = 0,01 \quad (27)$$

Ou seja

$$\hat{X} = \frac{X}{\lambda} = -\ln(0,01) \frac{1}{f_r} \quad (28)$$

sendo o sinal negativo, necessário para tornar a distância de penetração adimensional, uma medida positiva.

Desta forma, vê-se que a distância de penetração adimensional, depende única e exclusivamente do número f_r o qual, por sua vez, depende apenas de M e F_R , conforme indica a equação 21; então:

$$\hat{X} = \hat{X}(F_R, M) \quad (29)$$

Portanto, considerando valores de F_R em uma faixa característica de escoamentos sub-críticos e, admitindo T entre 0,5h e 12,42h, cobrindo assim o fenômeno em estudo, equivalentemente M situar-se-á entre 0,12 e 3. Então, pode-se verificar que o crescimento da distância de penetração adimensional é diretamente proporcional ao crescimento de M, como mostra a figura 5.

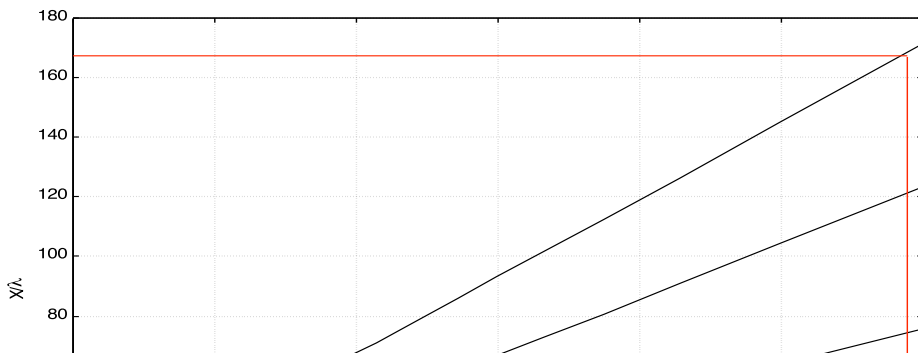


Figura 5 Relaciona a distância de penetração adimensional ($\hat{X} = X/\lambda$) com a variação de M para F_R igual a 0,075 (curva que atinge os maiores valores da distância); 0,10; 0,15; 0,20; 0,25 e 0,3 (curva que atinge os menores valores da distância).

Na figura 5 é possível fazer uma estimativa gráfica da distância de penetração da maré em um determinado rio. Por exemplo, considerando o rio citado no presente trabalho: $q = 4.6 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$, $S_o = 1/12000 \text{ m}/\text{m}$, $C_f = 30 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$, $h_o = 6,56 \text{ m}$ e $u_o = 0,7 \text{ m}/\text{s}$, então $F_R = 0,075$, $M = 2,995$ e $\lambda = 200\text{m}$. É possível estabelecer o seguinte procedimento:

- 1º Traçar uma reta vertical no valor de M calculado (2,995);
- 2º Determinar o ponto de encontro da reta traçada no passo anterior com a curva para a qual F_R foi previamente calculado (0,075);
- 3º Traçar uma reta horizontal, a partir do ponto determinado no passo anterior;
- 4º Determinar no eixo vertical, o ponto de interseção deste com a reta traçada no passo anterior (aproximadamente 170);
- 5º Calcular X, através da fórmula $X = \hat{X} \cdot \lambda$ (34000m).

4.3 Comprimento de onda da maré fluvial

Outro aspecto da presente teoria, refere-se a determinação do comprimento de onda da maré fluvial (L). Considerando que o comprimento de onda dimensional é determinado por f_i (a parte imaginária do número de onda), como segue:

$$L = \frac{2\pi\lambda}{f_i} \quad (30)$$

Então:

$$\frac{L}{\lambda} = \frac{2\pi}{f_i} \quad (31)$$

Entretanto, é mais conveniente ao invés da adimensionalização do comprimento de onda (equação 31) utilizar a versão normalizada pelo comprimento da onda longa (L_o), dada por:

$$L_o = \frac{2\pi}{s} \sqrt{gh_o} \quad (32)$$

Dividindo a equação 31 pela equação 32, obtêm-se a expressão para o comprimento de onda da maré fluvial normalizada:

$$L_{\text{nor}} = \frac{L}{L_o} = \frac{F_R}{f_i} \quad (33)$$

Portanto, L_{nor} é função dos parâmetros adimensionais F_R e M, possibilitando verificar a variação de L_{nor} para M entre 0,12 e 3 e, $F_R = 0,075; 0,10; 0,15; 0,20; 0,25$ e 0,3.

A figura 6 mostra que, o comprimento de onda da maré fluvial, pouco difere do comprimento de onda da onda “clássica”, dependendo do regime de escoamento. De fato, L

aproxima-se de L_0 a medida que as forças de inércia dominam o escoamento ($M \gg 1$). No entanto para o regime típico da maré fluvial, os resultados mostram que $L < L_0$

4.4 Distância de penetração normalizada

É possível agora, determinar a distância de penetração adimensional normalizada pelo comprimento de onda (L), dividindo a equação 28 pela equação 31, o que resulta em:

$$\frac{X}{L} = -\frac{\ln(0,01)}{2\pi} \cdot \frac{f_i}{f_r} \quad (34)$$

Sendo que f_i e f_r dependem de F_R e M , é possível escrever

$$\frac{X}{L} = \frac{X}{L}(F_R, M) \quad (35)$$

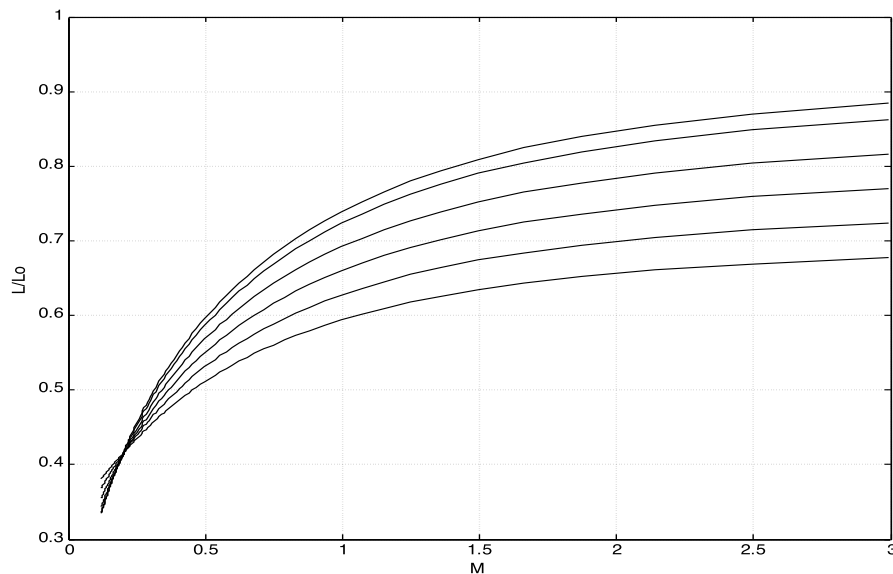


Figura 6 Representa a variação de $L_{nor}=L/L_0$ em função de M ($0,12 < M < 3$) e $F_R = 0,075$ (curva que atinge os maiores valores de L_{nor}); 0,10; 0,15; 0,20; 0,25 e 0,3 (curva que atinge os menores valores de L_{nor}).

A figura 7, a seguir, mostra que para a faixa de valores de M , segundo os quais as forças de inércia e de atrito são da mesma ordem de grandeza, tem-se $X/L \approx 1$, o que indica que a maré fluvial sofre uma atenuação aproximadamente de 100%, na distância de um (1) comprimento de onda quando $M \approx 1$. Conseqüentemente, como $M = 1$ representa o ponto de separação entre o regime dominado pela inércia e o regime dominado pelo atrito, verifica-se que no regime dominado pela inércia, X será sempre maior do que L , sendo possível identificar mais de uma crista de onda no interior do rio, enquanto que, no regime dominado pelo atrito isso nunca acontecerá. Aliás, este aspecto já podia ser observado nas figuras 7 e 9.

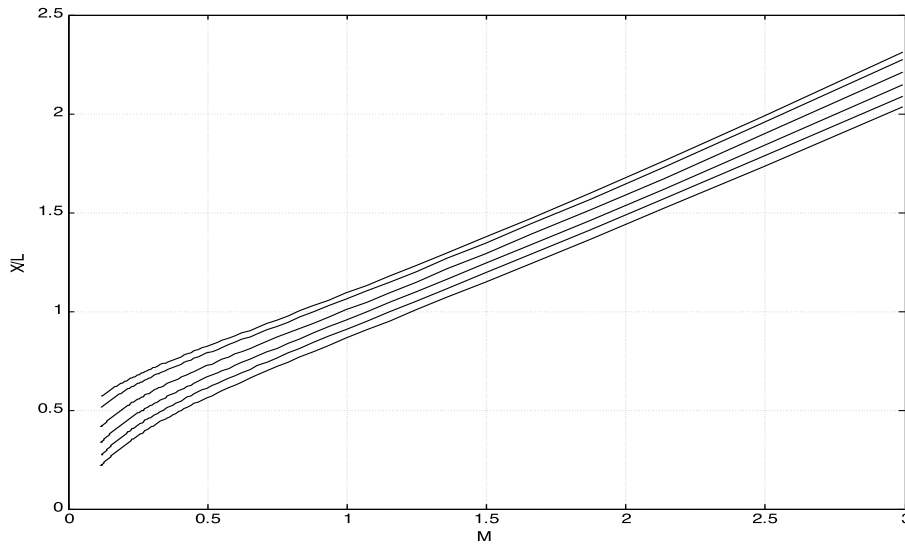


Figura 7 Representa a variação de X/L em função de M ($0,12 < M < 3$) e $F_R = 0,075$ (curva que atinge os maiores valores de X/L); 0,10; 0,15; 0,20; 0,25 e 0,3 (curva que atinge os menores valores de X/L).

4.5 Velocidade de propagação

A velocidade de propagação de uma onda é obtida através da equação que relaciona o seu número de onda com a frequência, a chamada “relação de dispersão”. No caso da maré fluvial a velocidade de propagação é calculada pela equação 22. Utilizando a definição de λ , dada no item 3, é possível re-escrever a equação 22, como segue:

$$C_M = \frac{u_o}{f_i} \quad (36)$$

Para melhor interpretar este resultado, é interessante comparar C_M com a velocidade C_{grav} de uma onda longa em um canal horizontal com atrito desprezível, sujeito a uma corrente constante de velocidade u_o de sentido contrário ao da onda.

Seja:

$$C_{grav} = \sqrt{gh_o} - u_o \quad (37)$$

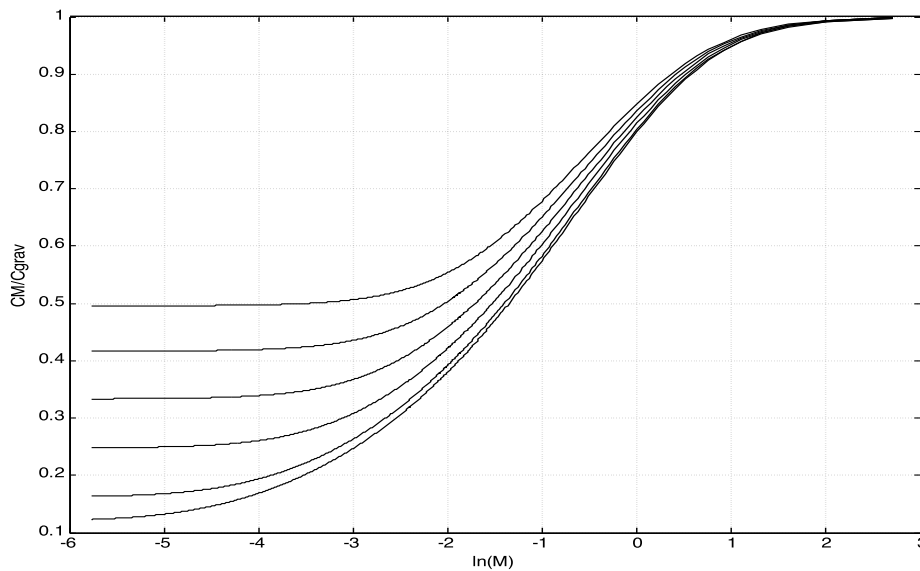
Assim, dividindo a equação 36 por 37, e lembrando que $F_R = \frac{u_o}{\sqrt{gh_o}}$, resulta;

$$\frac{C_M}{C_{grav}} = \frac{F_R}{f_i(1 - F_R)} \quad (38)$$

Ou seja, normalizando C_M por C_{grav} , obtêm-se uma expressão que depende somente dos parâmetros F_R e M .

$$\frac{C_M}{C_{grav}} = \frac{C_M}{C_{grav}}(F_R, M) \quad (39)$$

A partir da equação 38, é possível obter a figura 8, utilizando os mesmos valores de F_R , considerados até aqui, porém admitindo uma faixa maior para os valores de M , afim de ajudar na compreensão dos resultados. A faixa de valores considerados para M , equívale a admitir $0,1h < T < 480h$. Utilizou-se na figura 8, $\ln(M)$ ao invés de do próprio M , para facilitar a interpretação da mesma. Convém lembrar que, $\ln(M)$ é uma função crescente,



portanto, um aumento nos valores de M acarreta, aumento em $\ln(M)$.

Figura 8 Relaciona a velocidade da maré fluvial e a velocidade da onda de gravidade em água rasa (C_M/C_{grav}) em função de $\ln(M)$ ($0,003 < M < 14,974$) e $F_R = 0,075$ (curva que atinge os menores valores de C_M/C_{grav}); 0,10; 0,15; 0,20; 0,25 e 0,3 (curva que atinge os maiores valores de C_M/C_{grav}).

A figura 8 indica claramente que a maré fluvial tende a ser significativamente mais lenta que a onda gravitacional, no regime de atrito, enquanto que no regime de inércia as velocidades tendem a se igualar. Entretanto, este resultado comprova o caráter dispersivo da maré fluvial observado primeiramente por Godin ref.[4]. A dependência da velocidade da maré fluvial (C_M) com a frequência (s) (fato que caracteriza uma onda dispersiva) pode ser

notada na figura 8, lembrando (como visto no item 3) que, $M \left(M = \frac{sh_o}{ku_o} \right)^{\frac{1}{3}}$ é diretamente

proporcional a s , ou seja, ondas de frequência mais baixa, propagam-se mais lentamente que ondas de frequência mais alta, contrariamente ao que se observa para ondas em águas profundas.

O fato da velocidade da maré fluvial tender assintoticamente para a velocidade de uma onda longa, quando predominam as forças de inércia (M e s crescem), pode ser demonstrado analiticamente, levando a equação 38 ao limite.

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{C_M}{C_{\text{grav}}} = 1 \quad (40)$$

Considerando o que foi visto até aqui, cabe indagar o que acontece, no extremo oposto das curvas $\frac{C_M}{C_{\text{grav}}}$ (na figura 8), quando $M \ll 1$ e conseqüentemente $\ln(M) \ll 0$ (regime dominado pelo atrito). É possível perceber que, as curvas tendem a valores fixos que variam conforme o valor de F_R .

Para melhor analisar esta questão, convém utilizar como referência a própria velocidade básica do rio (u_0).

A partir da equação 36, é possível escrever:

$$\frac{C_M}{u_0} = \frac{1}{f_i} \quad (41)$$

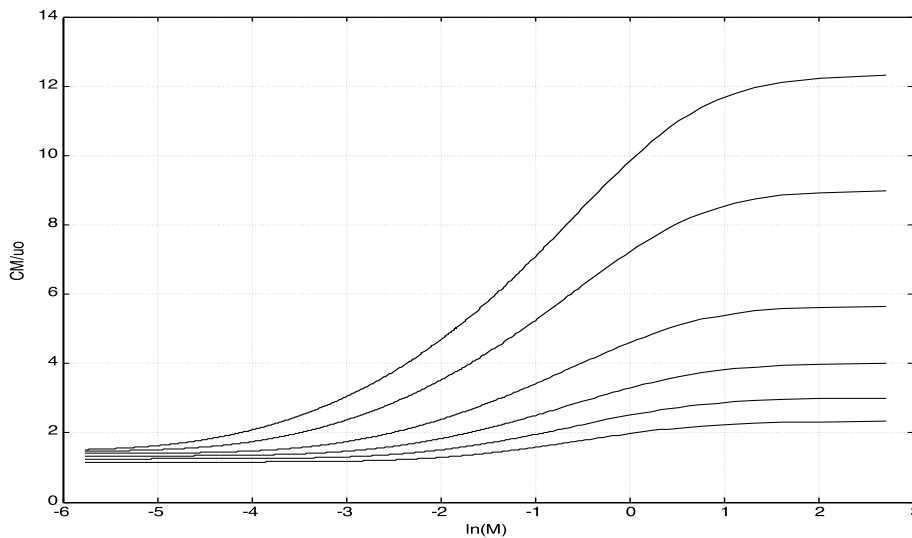


Figura 9 Relaciona a velocidade da maré fluvial e a velocidade básica do rio (C_M/u_0) em função de $\ln(M)$ ($0,003 < M < 14,974$) e $F_R = 0,075$ (curva que atinge os menores valores de C_M/u_0); 0,10; 0,15; 0,20; 0,25 e 0,3 (curva que atinge os maiores valores de C_M/u_0).

Portanto

$$\frac{C_M}{u_0} = \frac{C_M}{f_i}(F_R, M) \quad (42)$$

Analisando a figura 9, conclui-se que, a velocidade de propagação da maré fluvial em um escoamento dominado pelo atrito, tende a um valor mínimo da mesma ordem de grandeza da velocidade básica do rio, dependendo do número de Froude.

Assim, a velocidade de propagação da maré fluvial dever estar na faixa:

$$1,5u_0 < C_M < C_{\text{grav}} \quad (43)$$

No entanto, a velocidade $1,5u_0$ corresponde, curiosamente, á velocidade de uma onda cinemática (C_{cin}), conforme definida por Melo F^o ref.[10], que se propaga em um regime dominado pelo atrito.

Assim, ao que tudo indica, é possível escrever:

$$C_{cin} < C_M < C_{grav} \quad (44)$$

Cabe ressaltar que a presente conclusão é válida para os valores dos parâmetros admitidos neste trabalho.

5. CONCLUSÕES

Neste trabalho, foi apresentado o efeito dos parâmetros adimensionais ϵ , F_R e M , no fenômeno da maré fluvial. Sendo M o parâmetro que caracteriza o regime de escoamento dominado pelas forças de atrito ($M \ll 1$) ou pelas forças de inércia ($M \gg 1$). Verificou-se também que, no regime de atrito a atenuação da maré em relação ao seu comprimento de onda, é mais fortemente observada. Finalizando, observou-se que a velocidade da onda de maré encontrar-se limitada entre a velocidade da onda cinemática e a velocidade de uma onda de gravidade.

REFERÊNCIAS

1. DEAN, R. G.; DALRYMPLE, R. A. - *Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists*, Prentice Hall, Inc., 353 p., 1984.
2. FRENCH, R.H. – *Open Channel Hydraulics*, Mc Graw-Hill, New York, 705 pp. 1986.
3. FOX, R. W. & MCDONALD, A. T. - *Introdução à Mecânica dos Fluidos*, LTC/SA, ed. 4, 662 p., 1998.
4. GODIN, G. - *Modification of River Tides by the Discharge*, Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering, v.111, n.2, pp. 257-274, March, 1985.
5. GODIN, G. - *The Tide in Rivers*, International Hydrographic Review, Monaco, LXI 2, pp. 159-170, 1984.
6. JANSSEN, P.Ph.-*Principles of River Engineering: The non-tidal alluvial river*, Pitman Publ.Ltd., London, 485pp., 1979.
7. JORDEN, V. - *Investigações Sobre a Influência da Maré em Canais Fluviais*. Tese de mestrado, Prog. Eng. Ambiental, UFSC, Florianópolis, 52 p., 1998.
8. MELO F^o E. - *Marés Fluviais. Parte 1: Teoria*, Revista Brasileira de Recursos Hídricos, v.7, n.4, pp. 135-145, 2002.
9. MELO F^o E. - *Marés Fluviais. Parte 2: Aplicações*, Revista Brasileira de Recursos Hídricos, v.7, n.4, pp. 147-165, 2002.

10. MELO F^o E. - *Considerações Sobre a Hidráulica de Canais Fluviais e de Canais de Maré*, Revista Brasileira de Recursos Hídricos, v.3, n.2, pp. 95-107, 1998.
11. MELO F^o E.; JORDEN, V. - *Tide Penetration in Coastal Rivers*, Proc. of the COPEDEC V, Cape Town, South Africa, v.3, pp1771-1781, 1999.
12. MELO PORTO, R. – *Hidráulica Básica*, EESC-USP, 519p., 1998.
13. MORRIS, E. M. - The Effect of the Small-Slope Approximation and Lower Boundary Conditions on Solutions of the Saint-Venant Equations, *Journal of Hydrology*, v.40, pp. 31-47, 1979.
14. STOKER, J.J. – *Water Waves: The Mathematical Theory with Applications*, Interscience Publishers LTD.London565pp. 1957.
15. TAYFUR, G. - KAVVAS, M. L.; GOVINDARAJU, R. S. & STORM, D. - Applicability of Saint-Venant Equations for two-dimensional Overland Flows over Rough Infiltrating Surfaces, *Journal of Hydraulic Engineering*, v. 119, n. 1, pp 51-63., 1993.
16. VONGVISENSSONJAI, S.; ROJANAKAMTHORN, S. – *Interaction of Tide and River Flow*, Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering, ASCE, v.115, n.1, pp. 86-104, 1989.