UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS COMPUTACIONAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

Modelagem em Programação Linear para Resolução de Jogos *Fuzzy* Intervalares

por
Stephanie Loi Brião

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Modelagem Computacional.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Graçaliz Pereira Dimuro
Coorientadora: Prof^a. Dr^a. Catia Maria dos Santos Machado

Rio Grande, outubro de 2013

AGRADECIMENTOS

A Deus meu grande protetor, minha luz e minha paz.

A minha orientadora Graçaliz pela sabedoria, incentivo e instrução.

A minha coorientadora Catia, pela confiança e carinho.

A minha mãe Jeane, pela força e incentivo em todos os momentos.

A meu pai Renato, pela amizade e conforto que me deu.

A minha vó Claudete, pelo amparo e cuidado.

Aos meu queridos familiares e amigos próximos.

As minhas amigas flores, unidas pela fé.

A minha amiga Flávia, pelo apoio e ao colega Jorge pela ajuda.

Aos colegas do mestrado, em especial do laboratório LAMSA.

Ao programa REUNI/CAPES pelo apoio financeiro.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS 5

LISTA DE TABELAS 6

LISTA DE NOTAÇÕES 7

RESUMO 9

ABSTRACT 10

1 INTRODUÇÃO 11
1.1 Contextualização e Justificativa 11
1.2 Objetivos 12
1.3 Metodologia 13
1.4 Organização do Trabalho 13

2 TEORIAS PARA MODELAR INCERTEZAS 15
2.1 Introdução 15
2.2 Matemática Intervalar 15
2.3 Lógica *Fuzzy* 17
2.3.1 Conjuntos *Fuzzy* 18
2.3.2 Números *Fuzzy* 21
2.3.3 Relações de Ordem entre Números *Fuzzy* 25
2.4 Considerações Finais 32

3 TEORIA *FUZZY* INTERVALAR 34
3.1 Introdução 34

3.2 Conjuntos *Fuzzy* Intervalares 34
3.3 Números *Fuzzy* Intervalares 37
3.4 Relações de Ordem entre Números *Fuzzy* Intervalares 39
3.4.1 Ordem de Asmus-Dimuro Intervalar 39
3.4.2 Ordem Proposta 40
3.4.3 Exemplos 42
3.5 Considerações Finais 46

4 TEORIA DOS JOGOS 47
4.1 Introdução 47
4.2 Conceitos básicos de um jogo 47
4.3 Jogos de Soma Zero 48
4.4 Jogos *Fuzzy* 52
4.5 Jogos *Fuzzy* Intervalares 53
4.6 Considerações Finais 54

5 ALGORITMOS 55
5.1 Introdução 55
5.2 Jogos *Fuzzy* de Soma Zero 55
5.2.1 Modelo de Campos 56
5.2.2 Modelo de Campos-Ezzati 58
5.2.3 Exemplos 61
5.2.4 Análise dos modelos 66
5.3 Jogos *Fuzzy* Intervalares de Soma Zero 67
5.3.1 Modelo de Campos Intervalar 68
5.3.2 Modelo de Loi-Dimuro-Machado 69
5.3.3 Exemplos 72
5.3.4 Análise dos modelos 75
5.4 Considerações Finais 75

6 CONCLUSÃO 76
6.1 Principais Contribuições 76
6.2 Trabalhos Futuros 77

BIBLIOGRAFIA 78

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 Exemplo de conjunto *fuzzy* (COSTA, 2012) 19
Figura 2.2 Conjunto dos números próximos a 2 20
Figura 2.3 União dos conjuntos *fuzzy* A e B (SILVEIRA, 2002) 21
Figura 2.4 Intersecção dos conjuntos *fuzzy* A e B (SILVEIRA, 2002) 21
Figura 2.5 Complemento do conjunto *fuzzy* A (SILVEIRA, 2002) 22
Figura 2.6 Número *fuzzy* trapezoidal (SILVEIRA, 2002) 23
Figura 2.7 Números *fuzzy* $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$ simétricos 29
Figura 2.8 Números *fuzzy* $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$ não simétricos 30

Figura 3.1 Conjunto *fuzzy* intervalar de temperaturas (SILVEIRA, 2002). 35
Figura 3.2 União dos conjuntos *fuzzy* intervalares A e B (SILVEIRA, 2002). . . 37
Figura 3.3 Intersecção dos conjuntos *fuzzy* intervalares A e B (SILVEIRA, 2002). 37
Figura 3.4 Complemento do conjunto *fuzzy* intervalares A (SILVEIRA, 2002). . 37
Figura 3.5 Número *fuzzy* intervalar triangular $\hat{A}$. 38
Figura 3.6 Número *fuzzy* intervalar trapezoidal $\hat{A}$. 39
Figura 3.7 Números *fuzzy* intervalares $\hat{A} = (\tilde{A}^l, \tilde{A}^u)$ e $\hat{B} = (\tilde{B}^l, \tilde{B}^u)$ (triangulares e simétricos) 43
Figura 3.8 Números *fuzzy* intervalares $\hat{A} = (\tilde{A}^l, \tilde{A}^u)$ (trapezoidal) e $\hat{B} = (\tilde{B}^l, \tilde{B}^u)$ (triangular) 45

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 Recompensas dos jogadores I e II em um jogo 49
Tabela 4.2 Recompensas dos jogadores no jogo de cobrança de penalidade . . . 51

Tabela 5.1 Resultados do modelo de Campos com números *fuzzy* diferentes . . . 62
Tabela 5.2 Resultados do modelo de Campos-Ezzati com números *fuzzy* diferentes 63
Tabela 5.3 Resultados do modelo de Campos-Ezzati com números *fuzzy* iguais . 64
Tabela 5.4 Resultados do modelo de Campos com números *fuzzy* iguais 65
Tabela 5.5 Resultados do modelo de Campos-Ezzati com números *fuzzy* trapezoidais 66
Tabela 5.6 Resultados do modelo de Campos Intervalar para $\tilde{\mathcal{A}}^l$ 73
Tabela 5.7 Resultados do modelo de Campos Intervalar para $\tilde{\mathcal{A}}^u$ 73
Tabela 5.8 Resultados do modelo de Loi-Dimuro-Machado para $\tilde{\mathcal{A}}^l$ 74
Tabela 5.9 Resultados do modelo de Loi-Dimuro-Machado para $\tilde{\mathcal{A}}^u$ 75

LISTA DE NOTAÇÕES

$[A]^{\alpha}$ Conjunto α-corte de A

$\bar{\leq}$ Ordem de Asmus-Dimuro

β Distância à direita de η_2 ou η

η Núcleo do número *fuzzy* triangular

η_1 e η_2 Núcleos do número *fuzzy* trapezoidal

$\hat{\leq}$ Ordem de Asmus-Dimuro Intervalar

$\hat{\mathcal{A}}$ Matriz *fuzzy* intervalar

$\hat{M}, \hat{N}$ e $\hat{P}$ Números *fuzzy* intervalares

$\leq_D$ Ordem da Distância

$\leq_I$ Ordem de Valor Integral

$\leq_K$ Ordem de Kulisch-Miranker

$\mathcal{A}$ Matriz clássica

$\mathcal{I}$ Valor Integral

$\mathrm{n}_1, \mathrm{n}_2, \mathrm{m}_1, \mathrm{m}_2, \mathrm{p}_1$ e p_2 Pares de valores dos α-cortes

μ Função de pertinência de um conjunto *fuzzy*

$\overline{\tilde{N}}$ e $\underline{\tilde{N}}$ Formas paramétricas de um número *fuzzy*

$\preceq$ Ordem de Ezzati

Ψ e Π Intervalos reais

σ Distância à esquerda de η_1 ou η

$\subseteq$ Ordem de Inclusão

$\tilde{\mathcal{A}}$ Matriz *fuzzy*

$\tilde{N}, \tilde{M}$ e $\tilde{P}$ Números *fuzzy*

$\tilde{N}^l$ Número *fuzzy* inferior

$\tilde{N}^u$ Número *fuzzy* superior

φ Função de pertinência de um conjunto *fuzzy* intervalar

ϑ Valor final de um jogo

A e B Conjuntos *fuzzy* ou *fuzzy* intervalares

a, b, c, d, e e f Elementos dos números *fuzzy* ou *fuzzy* intervalares

$D(\tilde{N}, \tilde{N}_0)$ Distância entre $\tilde{N}$ e $\tilde{N}_0$

I e J Conjunto das ações do jogador I e II

inf Ínfimo de um conjunto

Mag Magnitude de um número *fuzzy*

Mag' Derivada da magnitude

r_j Probabilidades em relação as estratégias mistas y_j

s_i Probabilidades em relação as estratégias mistas x_i

sup Supremo de um conjunto

$suppA$ Suporte de um conjunto *fuzzy*

U Conjunto universo

X e Y Conjuntos das estratégias mistas dos jogadores I e II

x^* e y^* Soluções ótimas

z e w Variáveis auxiliares nas programações lineares

RESUMO

A teoria de jogos modela estratégias entre agentes (jogadores), os quais possuem recompensas ao fim do jogo conforme suas ações. O melhor par de estratégias para os jogadores constitui uma solução de equilíbrio. Porém, nem sempre se consegue estimar os dados do problema. Diante disso, os parâmetros incertos presentes em modelos de jogos são formalizados pela teoria *fuzzy*. Assim, a teoria *fuzzy* auxilia a teoria de jogos, formando jogos *fuzzy*. Dessa forma, parâmetros, como as recompensas, tornam-se números *fuzzy*. Mais ainda, quando há incerteza na representação desses números *fuzzy* utilizam-se os números *fuzzy* intervalares. Então, neste trabalho modelos de jogos *fuzzy* intervalares são analisados e métodos computacionais são desenvolvidos para a resolução desses jogos. Por fim, realizam-se simulações de programação linear para observar melhor a aplicação das teorias estudadas e avaliar a proposta.

Palavras-chave: Teoria de Jogos; Lógica *Fuzzy* Intervalar; Programação Linear.

ABSTRACT

Game theory modeling strategies among agents (players), which have rewards at the end of the game as their actions. The best pair of strategies for the players constitutes an equilibrium solution. However, can not always estimate the data of the problem accurately. Before addition, the inaccurate parameters present in game models are formalized by fuzzy theory. So, fuzzy theory assists in game theory, forming fuzzy games. Thus, parameters such as the rewards become fuzzy numbers. Moreover, when there is uncertainty in the representation of fuzzy numbers using the interval fuzzy numbers. Then, this paper models of interval fuzzy games are analyzed and computational methods are developed for solving these games. Finally, simulations are carried out linear programming to better observe the application of the theories studied and evaluate the proposal.

Keywords: Games Theory; Interval *Fuzzy* Logic; Linear Programming.

1 INTRODUÇÃO

Em diversos problemas complexos de conflitos de interesse, a teoria de decisão é empregada. A teoria de jogos (FIANI, 2009), a qual faz parte da teoria de decisão, envolve interações estratégias entre duas ou mais entidades, busca uma solução de equilíbrio para essas entidades.

Apesar da teoria de jogos tratar de inúmeras aplicações práticas, quando ocorrem dados incertos no problema, a teoria *fuzzy* (ZADEH, 1965) pode contribuir na modelagem dessa incerteza presente em jogos. Assim, jogos *fuzzy* considera números *fuzzy* como recompensas. Entretanto, caso exista incerteza nos graus de pertinência dos números *fuzzy*, esses serão representados por números *fuzzy* intervalares.

Diante disso, este trabalho visa desenvolver métodos para solucionar jogos do tipo *fuzzy* intervalares. Para tanto, diversos outros conceitos e modelos foram definidos, tais como a ordem fuzzy intervalar baseada na ordem Ezzati (EZZATI et al., 2012) e a extensão do modelo de Campos (CAMPOS, 1989) para resolução de jogos fuzzy intervalares, conforme será discutido no decorrer do texto.

1.1 Contextualização e Justificativa

A teoria dos jogos surgiu por volta de 1940 em trabalhos de J. Von Neumann e O. Morgenstern. Essa teoria modela diversas situações de conflito de interesse, onde entidades (jogadores) agem estrategicamente para atingir um objetivo (FIANI, 2009). Existem várias aplicações de jogos, no entanto, em computação as áreas de pesquisa destacadas são inteligência artificial e sistemas multiagentes.

Em 1965, Zadeh introduziu a teoria *fuzzy*, a qual trata de dados que possuem incerteza (ZADEH, 2008, 1965, 1973). Assim, em modelos de jogos quando não há exatidão nos dados, como as recompensas, utiliza-se números *fuzzy* para contornar esse

problema, formando os jogos *fuzzy* (AMARAL, 2007).

Conforme (CAMPOS, 1989), em jogos *fuzzy* de soma zero não cooperativos, os quais possuem elementos da matriz de pagamento números *fuzzy*, pode-se encontrar uma solução de equilíbrio. Também, nesses jogos pode-se aplicar métodos de ordenação de números *fuzzy* (BUCKLEY; ESLAMI, 2002),(EZZATI et al., 2012),(ASMUS; DIMURO, 2013a), (ASMUS; DIMURO, 2013b), (KULISCH; MIRANKER, 1982) para transformar a programação linear *fuzzy* em uma programação linear clássica.

Por outro lado, a teoria intervalar por Moore, formaliza as imprecisões e as aproximações através de intervalos (MOORE et al., 2009). Dessa forma, constitui-se a teoria *fuzzy* intervalar (BEDREGAL et al., 2010), cuja incertezas estão tanto nos dados do problema quanto na configuração do próprio número *fuzzy*.

Logo, determinam-se os jogos do tipo *fuzzy* intervalares, com recompensas sendo números *fuzzy* intervalares. Diante disso, este trabalho busca estimar soluções para jogos que possuem incertezas nos dados do problema real.

1.2 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é desenvolver modelos de solução para jogos *fuzzy* intervalares, onde recompensas e restrições são *fuzzy* intervalares.

Diante disso, buscam-se alcançar os seguintes objetivos específicos:

- desenvolver uma relação de ordem total para números *fuzzy* intervalares trapezoidais, simétricos ou não, visando a aplicação em jogos *fuzzy* intervalares;
- abordar dois modelos de solução para jogos *fuzzy*;
- apresentar exemplos de jogos *fuzzy*, analisando as soluções obtidas em cada modelo utilizado;
- estender as definições de jogos *fuzzy* para jogos *fuzzy* intervalares;
- estender o modelo de Campos para um modelo de Campos Intervalar;
- desenvolver um modelo de solução para jogos *fuzzy* intervalares, cujo método de ordenação utilizado será a relação de ordem total proposta;
- apresentar exemplos de jogos *fuzzy* intervalares, analisando as soluções obtidas em cada modelo utilizado.

1.3 Metodologia

Primeiramente, estudaram-se os principais tópicos na área da Lógica *Fuzzy*, a qual trata de incertezas. Nesses estudos, houve uma busca para conceituar e operar conjuntos *fuzzy*. Além disso, pesquisaram-se diversos métodos de ordenação, no objetivo de trabalhar com números *fuzzy* do tipo trapezoidais, e simétricos ou não simétricos.

Em seguida, revisaram-se bibliografias sobre a Matemática Intervalar, cuja teoria modela imprecisões através de intervalos. Também, nessa teoria estudaram-se as operações e as ordenações entre intervalos.

Por outro lado, o tema *Fuzzy* Intervalar surgiu da junção da Teoria *Fuzzy* com a Matemática Intervalar. Assim, pode-se definir conjuntos *fuzzy* intervalares e números *fuzzy* intervalares. Nessa dissertação, desenvolveu-se um método de ordem total de números *fuzzy* intervalares trapezoidais, o qual foi demonstrado baseado nas ordens totais de Ezzati (EZZATI et al., 2012) e de Costa (COSTA, 2012).

Em Teoria de Jogos, conceitos de elementos, tipos e soluções são revisados. Para tratar de incertezas em jogos, aplicaram-se nebulosidades nas matrizes de recompensas e nas restrições. Então, para resolver a programação linear *fuzzy* utilizaram-se o modelo de Campos e de Campos-Ezzati.

Mais ainda, estenderam-se a teoria de jogos *fuzzy* para jogos *fuzzy* intervalares. Diante disso, para resolver jogos do tipo *fuzzy* intervalares, adotaram-se os modelos de Campos Intervalar e Loi-Dimuro-Machado, desenvolvidos nessa dissertação.

Por último, exemplificaram-se cada modelo para comparar os resultados obtidos a partir da implementação dos algoritmos.

1.4 Organização do Trabalho

No capítulo 1 foram apresentadas como seções a contextualização e justificativa dessa dissertação, os objetivos, as metodologias e a organização do trabalho.

O capítulo 2 introduz os conceitos básicos da Teoria *Fuzzy* (ZADEH, 1965), como definições e operações de conjuntos e números *fuzzy*. Nesse mesmo capítulo, mostram-se diversos métodos de ordenação de números *fuzzy*, necessários para os capítulos seguintes.

No terceiro capítulo, a Teoria *Fuzzy* Intervalar (BEDREGAL et al., 2010) é apresentada, a qual é uma extensão da Teoria *Fuzzy*. Também, nesse capítulo descreve-se a Teoria da Matemática Intervalar, para justificar os conceitos de conjuntos *fuzzy* intervalares e métodos de ordenação de números *fuzzy* intervalares.

Por outro lado, o capítulo 4 envolve a Teoria dos Jogos (FIANI, 2009), onde métodos são propostos para a solução dos jogos. Os tipos de jogos destacados foram: os Jogos *Fuzzy* e os Jogos *Fuzzy* Intervalares.

Ainda mais, no quinto capítulo, desenvolvem-se os algoritmos de solução para os jogos já citados. Além disso, após resolver as programações lineares, através de exemplos, comparam-se os modelos para cada jogo.

Por fim, o sexto capítulo possui as principais contribuições dessa dissertação e comentários sobre trabalhos futuros.

2 TEORIAS PARA MODELAR INCERTEZAS

2.1 Introdução

Neste capítulo serão apresentadas duas teorias, Lógica *Fuzzy* e a Matemática Intervalar, as quais tratam de incertezas presentes em diversos problemas computacionais.

As próximas seções apresentarão conceitos básicos de conjuntos *fuzzy* como os elementos, as operações, os tipos e as ordenações. Também, a teoria intervalar apresenta definições básicas, ordenação e operações de intervalos.

2.2 Matemática Intervalar

Em 1914, iniciou-se pesquisas sobre a Teoria Intervalar, onde intervalos numéricos representavam valores de distância e de tempo. Porém, somente no ano de 1959 que essa teoria firmou-se diante dos trabalhos de Moore (MOORE, 1979; MOORE et al., 2009).

Primeiramente, nessa seção defini-se um intervalo na reta real, para conseguir operar e relacionar intervalos.

Definição 1 *Seja* $\mathbb{R}$ *o conjunto dos números reais e elementos* π_1 *e* π_2 *de* $\mathbb{R}$*, tais que* $\pi_1 \leq \pi_2$*. O intervalo no conjunto dos reais formado por esses elementos é denotado por:*

$$\Pi = [\pi_1, \pi_2] = \{\pi \in \mathbb{R} \mid \pi_1 \leq \pi \leq \pi_2\}.$$

Os intervalos da forma $[\pi, \pi]$, isto é, possuem os extremos iguais são nomeados de intervalos degenerados. Também, pode-se dizer que esses intervalos representam um número real π. Logo, intervalos são representações ou aproximações de números reais.

Em seguida, definem-se as operações intervalares considerando $\Pi = [\pi_1, \pi_2]$ e $\Psi = [\psi_1, \psi_2]$ dois intervalos reais (OLIVEIRA; CLAUDIO; DIVERIO, 2005).

Definição 2 *(Adição)*

$\Pi + \Psi = \{\pi + \psi \mid \pi \in \Pi \textit{ e } \psi \in \Psi\} = [\pi_1 + \psi_1, \pi_2 + \psi_2]$.

Definição 3 *(Subtração)*

$\Pi - \Psi = \Pi + (-\Psi) = \{\pi - \psi \mid \pi \in \Pi \textit{ e } \psi \in \Psi\} = [\pi_1 - \psi_2, \pi_2 + \psi_1]$.

Definição 4 *(Multiplicação)*

$\Pi \cdot \Psi = \{\pi \cdot \psi \mid \pi \in \Pi \textit{ e } \psi \in \Psi\} = [\min\{\pi_1 \cdot \psi_1, \pi_1 \cdot \psi_2, \pi_2 \cdot \psi_1, \pi_2 \cdot \psi_2\}, \max\{\pi_1 \cdot \psi_1, \pi_1 \cdot \psi_2, \pi_2 \cdot \psi_1, \pi_2 \cdot \psi_2\}]$.

Definição 5 *(Divisão)*

$\frac{\Pi}{\Psi} = \Pi \cdot \Psi^{-1} = \{\frac{\pi}{\psi} \mid \pi \in \Pi \textit{ e } \psi \in \Psi\} = \left[\min\left\{\frac{\pi_1}{\psi_2}, \frac{\pi_1}{\psi_1}, \frac{\pi_2}{\psi_2}, \frac{\pi_2}{\psi_1}\right\}, \max\left\{\frac{\pi_1}{\psi_2}, \frac{\pi_1}{\psi_1}, \frac{\pi_2}{\psi_2}, \frac{\pi_2}{\psi_1}\right\}\right]$, *para* $0 \notin [\psi_1, \psi_2]$.

Definição 6 *(Intersecção)*

$\Pi \cap \Psi = [\max\{\pi_1, \psi_1\}, \min\{\pi_2, \psi_2\}]$.

Se $\pi_1 > \psi_2$ *ou* $\psi_1 > \pi_2$*, então* $\Pi \cap \Psi = \emptyset$.

Definição 7 *(União)*

$\Pi \cup \Psi = [\min\{\pi_1, \psi_1\}, \max\{\pi_2, \psi_2\}]$.

Definição 8 *(Distância)*

$d(\Pi, \Psi) = \max\{|\pi_1 - \psi_1|, |\pi_2 - \psi_2|\}$.

Definição 9 *(Módulo)*

$|\Pi| = |[\pi_1, \pi_2]| = d(\Pi, [0, 0]) = \max\{|\pi_1|, |\pi_2|\} \geq 0$.

Definição 10 *(Diâmetro)*

$diam(\Pi) = diam([\pi_1, \pi_2]) = \pi_2 - \pi_1 \geq 0$.

Definição 11 *(Ponto Médio)*

$med(\Pi) = med([\pi_1, \pi_2]) = \frac{\pi_1 + \pi_2}{2}$.

Exemplo 1 *Sejam os intervalos* $\Pi = [1, 3]$ *e* $\Psi = [4, 6]$ *são calculadas as seguintes operações aritméticas:*

$$\Pi + \Psi = [1 + 4, 3 + 6] = [5, 9];$$

$$\Pi - \Psi = [1 - 6, 3 - 4] = [-5, -1];$$

$$\Pi \cdot \Psi = [min\{1 \cdot 4, 1 \cdot 6, 3 \cdot 4, 3 \cdot 6\}, max\{1 \cdot 4, 1 \cdot 6, 3 \cdot 4, 3 \cdot 6\}] = [4, 18];$$

$$\frac{\Pi}{\Psi} = [min\{1/4, 1/6, 3/4, 3/6\}, max\{1/4, 1/6, 3/4, 3/6\}] = [1/6, 3/4];$$

$$\Pi \cap \Psi = [\max\{1, 4\}, \min\{3, 6\}] = \emptyset;$$

$$\Pi \cup \Psi = [\min\{1, 4\}, \max\{3, 6\}] = [1, 6];$$

$$d(\Pi, \Psi) = \max\{|1 - 4|, |3 - 6|\} = \max\{3, 3\} = 3;$$

$$|\Pi| = |[1, 3]| = d(\Pi, [0, 0]) = \max\{|1|, |3|\} = 3 \geq 0;$$

$$diam(\Pi) = diam([1, 3]) = 3 - 1 = 2 \geq 0;$$

$$med(\Pi) = med([1, 3]) = \frac{1 + 3}{2} = 2;$$

Supondo dois intervalos $[\pi_1, \pi_2]$ e $[\psi_1, \psi_2]$, algumas relações de intervalos serão apresentadas (MOORE, 1979; KULISCH; MIRANKER, 1982; COSTA, 2012). Mas, nessa dissertação será utilizada a relação de ordem total de Costa (Def. 15).

Definição 12 *(Relação de Inclusão)*
$[\pi_1, \pi_2] \subseteq [\psi_1, \psi_2] \Leftrightarrow \psi_1 \leq \pi_1$ *e* $\pi_2 \leq \psi_2$.

Definição 13 *(Relação de Ordem de Kulisch-Miranker)*
$[\pi_1, \pi_2] \leq_K [\psi_1, \psi_2] \Leftrightarrow \pi_1 \leq \psi_1$ *e* $\pi_2 \leq \psi_2$.

Definição 14 *(Relação de Ordem de Moore)*
$[\pi_1, \pi_2] <_M [\psi_1, \psi_2] \Leftrightarrow \pi_2 < \psi_1$.
Logo, se $[\pi_1, \pi_2] \leq_M [\psi_1, \psi_2]$ *então* $([\pi_1, \pi_2] <_M [\psi_1, \psi_2]$ *ou* $[\pi_1, \pi_2] = [\psi_1, \psi_2])$.

A ordem de Moore $<_M$ não satisfaz a condição de reflexividade, mas o seu fecho reflexivo é uma ordem parcial sobre $\mathbb{IR}$.

Definição 15 *(Relação de Ordem Total de Costa)*

$$[\pi_1, \pi_2] \trianglelefteq [\psi_1, \psi_2] \Leftrightarrow \pi_2 < \psi_2 \textit{ ou } (\pi_2 = \psi_2 \textit{ e } \psi_1 \leq \pi_1).$$

2.3 Lógica *Fuzzy*

Em 1870, Cantor introduziu a teoria clássica de conjuntos, onde os elementos pertencem ou não a um conjunto, ou seja, não há dúvida quanto à pertinência desses elementos.

Diante disso, a teoria *fuzzy* foi proposta por Lofti Zadeh em 1965 (ZADEH, 1965), na necessidade de trabalhar-se com incertezas presentes em diversos problemas. Por exemplo, na teoria *fuzzy* pode-se modelar a classificação da altura de pessoas conforme os termos linguísticos baixo, médio e alto. Para contornar esses problemas, determinou-se graus de pertinência para cada elemento do conjunto, dessa forma representa-se a incerteza desses elementos.

2.3.1 Conjuntos *Fuzzy*

Um conjunto *fuzzy* formaliza matematicamente elementos, os quais possuem informações incomuns e pertencem a conjuntos diferentes. Assim, através de uma função de pertinência consegue-se modelar objetos que possuem limites flexíveis em seus conjuntos.

Definição 16 *Um subconjunto fuzzy A de U (conjunto universo) tem sua função de pertinência definida a seguir (ZADEH, 1965, 1990):*

$$\mu_A : U \to [0, 1], \tag{2.1}$$

sendo $[0, 1]$ o intervalo dos valores dos graus de pertinência.

Dessa forma, $\mu_A(x) = 0$ indica que há certeza de que o elemento x não pertence ao conjunto *fuzzy* A e $\mu_A(x) = 1$ indica que há certeza de que o elemento x pertence a esse conjunto. Assim, se a imagem da função μ_A possuir apenas os graus de pertinência 0 e 1, então o conjunto descrito é um conjunto clássico. Logo, um conjunto *fuzzy* é uma extensão de um conjunto clássico.

Além disso, pode-se representar um conjunto *fuzzy* A de U por um conjunto de pares ordenados seguinte (BARROS; BASSANEZI, 2010; BUCKLEY, 2005a):

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in U\}. \tag{2.2}$$

Para melhor visualização dos elementos de um conjunto *fuzzy*, ilustra-se a Figura 2.1 abaixo:

Definem-se três tipos de conjuntos: o suporte, o núcleo e os α-cortes de um conjunto *fuzzy* A.

Definição 17 *O suporte de A é o conjunto dos elementos do conjunto universo que possuem graus de pertinência maior que zero, isto é,*

$$suppA = \{x \in U \mid \mu_A(x) > 0\}. \tag{2.3}$$

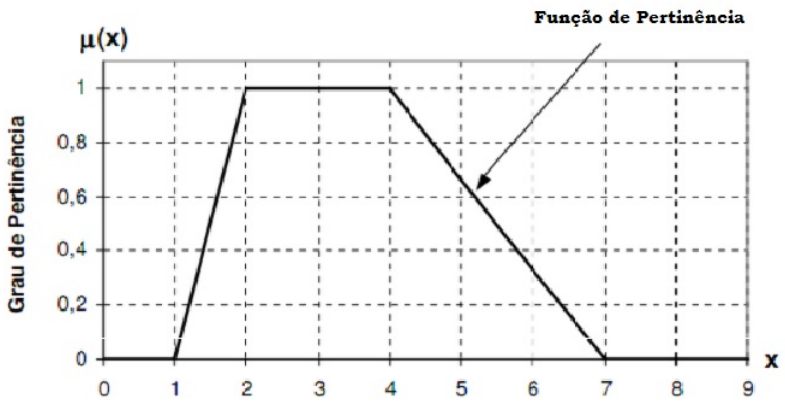

Figura 2.1: Exemplo de conjunto *fuzzy* (COSTA, 2012)

Definição 18 *O núcleo de A é um conjunto no qual elementos possuem graus de pertinência igual a um, isto é,*

$$coreA = \{x \in U \mid \mu_A(x) = 1\}. \tag{2.4}$$

Definição 19 *Os α-cortes de A é um conjunto no qual elementos fazem parte de classes divididas conforme o valor de α tal que:*

$$[A]^\alpha = \ \{x \in U \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}, \quad \textit{para}\ \alpha \in (0, 1]. \tag{2.5}$$

Se α é igual a zero, o α-corte de A é o fecho do suporte de A, ou seja, $[A]^0 = \widehat{suppA}$.

Então, outra forma de um conjunto *fuzzy* ser representado por completo é pelos seus α-cortes.

Exemplo 2 *Seja $A = \{x \in \mathbb{R} \mid$ x é próximo de $2\}$ o conjunto dos números próximos a 2, cuja função de pertinência $\mu_A : \mathbb{R} \to [0, 1]$ é definida:*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} (1- \mid x - 2 \mid), & \textit{se}\ 1 \leq x \leq 3 \\ 0, & \textit{se}\ x \notin [1, 3] \end{cases} \tag{2.6}$$

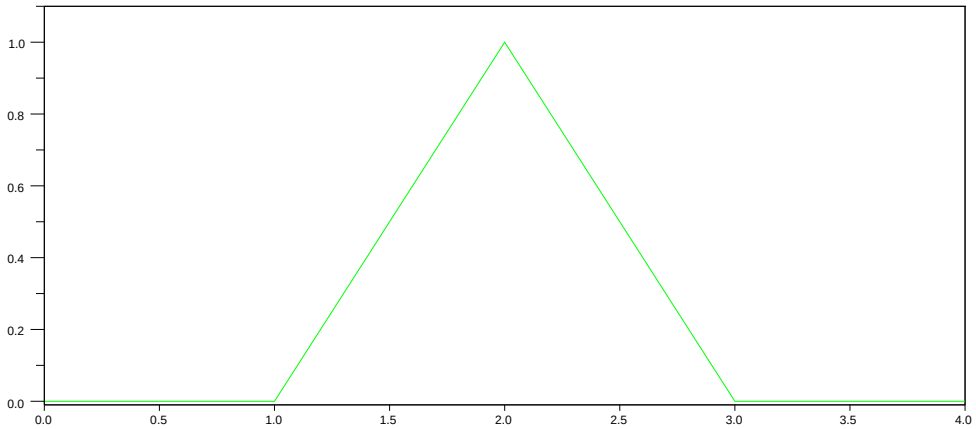

Figura 2.2: Conjunto dos números próximos a 2

$$suppA = \{x \in U \mid (1- \mid x-2 \mid) > 0\} \text{ para } 1 \leq x \leq 3$$

$$1 - x + 2 > 0 \text{ e } 1 + x - 2 > 0 \rightarrow x > 1 \text{ e } x < 3 \rightarrow suppA = (1, 3)$$

$$coreA = \{x \in U \mid (1- \mid x-2 \mid) = 1\} \text{ para } 1 \leq x \leq 3$$

$$1 - x + 2 = 1 \rightarrow x = 2 \rightarrow coreA = \{2\}$$

$$[A]^{\alpha} = \{x \in U \mid (1- \mid x-2 \mid) \geq \alpha\} \text{ para } \alpha \in (0, 1]$$

$$1 - x + 2 \geq \alpha \text{ e } 1 + x - 2 \geq \alpha \rightarrow x \leq 3 - \alpha \text{ e } x \geq \alpha + 1 \rightarrow [A]^{\alpha} = [1 + \alpha, 3 - \alpha]$$

Assim, como em conjuntos clássicos existem em conjuntos *fuzzy* as operações básicas de união, intersecção e complemento que serão apresentadas, respectivamente:

Definição 20 *União*

Sejão A e B conjuntos fuzzy de U. A união e A e B é o conjunto fuzzy cuja função de pertinência é definida como: $\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$.

Definição 21 *Intersecção*

Sejão A e B conjuntos fuzzy de U. A intersecção e A e B é o conjunto fuzzy cuja função de pertinência é definida como: $\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$.

Definição 22 *Complemento*

Seja A um conjunto fuzzy de U. O complemento de A é o conjunto fuzzy cuja função de pertinência é definida como: $\mu_{A^C}(x) = \mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x)$.

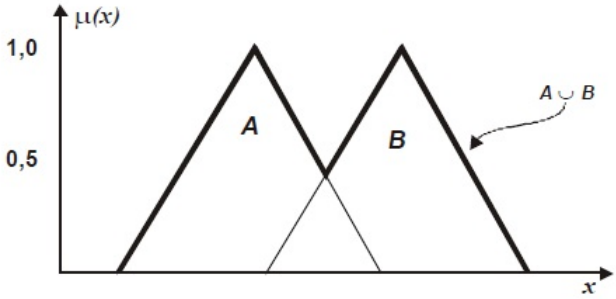

Figura 2.3: União dos conjuntos *fuzzy* A e B (SILVEIRA, 2002)

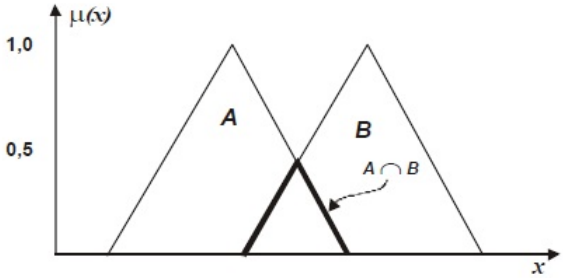

Figura 2.4: Intersecção dos conjuntos *fuzzy* A e B (SILVEIRA, 2002)

Logo, A será um subconjunto *fuzzy* de B, caso $\mu_A(x) \leq \mu_B(x), \forall x \in U$. Então, $\emptyset \subset A$ e $A \subset U$, pois $\mu_\emptyset(x) = 0$ e $\mu_U(x) = 1$ para qualquer elemento x de U.

2.3.2 Números *Fuzzy*

Os números *fuzzy* são um tipo especial de conjuntos *fuzzy* e possuem uma relevância na resolução de problemas que envolvem incertezas de dados. Os intervalos fechados, os quais serão abordados no próximo capítulo, e os números reais são casos de números *fuzzy*.

Definição 23 *Um conjunto fuzzy $\tilde{N}$ de universo $\mathbb{R}$ é considerado um número fuzzy se a função de pertinência $\mu_{\tilde{N}} : \mathbb{R} \to [0, 1]$ é tal que (BARROS; BASSANEZI, 2010):*

1. *O suporte de $\tilde{N}$ é limitado.*
2. *O core de $\tilde{N}$ é não vazio.*
3. *Os α-cortes de $\tilde{N}$ são intervalos fechados e limitados.*

Então, o suporte de $\tilde{N}$ não permite os intervalos $[\mathrm{n}_1, \infty]$, $[-\infty, \mathrm{n}_2]$ e $[-\infty, \infty]$. No conjunto $core\tilde{N}$ existe pelo menos um elemento, onde a função de pertinência atinge o

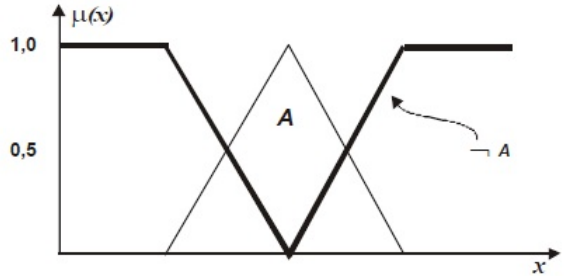

Figura 2.5: Complemento do conjunto *fuzzy* A (SILVEIRA, 2002)

valor 1. Por outro lado, os α-cortes podem ser representados por um par de valores n_1^α e n_2^α formando um intervalo.

Usualmente, trabalham-se com os números *fuzzy* triangulares e trapezoidais, pois esses números tornam mais simples a manipulação computacional. Além disso, esses números são nomeados devido ao gráfico das suas funções de pertinência.

Primeiramente, consideram-se os números *fuzzy* trapezoidais, pois são mais gerais que os triangulares, ou seja, todo número *fuzzy* triangular é um número *fuzzy* trapezoidal. Seja um número *fuzzy* trapezoidal $\tilde{N}$ definido por quatro valores $(a \mid b \mid c \mid d)$, onde a é o limite inferior do suporte de $\tilde{N}$, b é o limite inferior do núcleo (core) de $\tilde{N}$, c é o limite superior do núcleo (core) de $\tilde{N}$ e d é o limite superior do suporte de $\tilde{N}$. Então, sua função de pertinência é representada a seguir:

$$\mu_{\tilde{N}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } \ x \leq a \text{ ou } x \geq d \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{se } a < x < b \\ \dfrac{d-x}{d-c}, & \text{se } c < x < d \\ 1, & \text{se } \ b \leq x \leq c. \end{cases} \tag{2.7}$$

Para, a, b, c e $d \in \mathbb{R}$, o gráfico dessa função de pertinência está na Figura 2.6.

Apresentam-se três casos especiais de números *fuzzy* trapezoidais:

- Simétrico: $a = -d$ e $b = -c$
- Crisp: $a = b = c = d$
- Triangular: $b = c$.

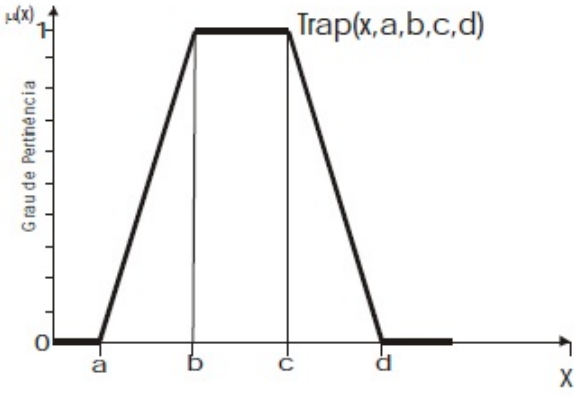

Figura 2.6: Número *fuzzy* trapezoidal (SILVEIRA, 2002)

Assim, um número *fuzzy* triangular pode ser expresso pela notação $\tilde{N} = (a \mid \eta \mid b)$, onde $\eta = b = c$. Além disso, pode-se denotar um número *fuzzy* trapezoidal $\tilde{N} = (\eta_1, \eta_2, \sigma, \beta)$, tais que $[\eta_1, \eta_2]$ é o núcleo de $\tilde{N}$, σ a distância à esquerda de η_1 e β a distância à direita de η_2. Também, para um número *fuzzy* trapezoidal $\tilde{N}$ os α-cortes são denotados como:

$$[\tilde{N}]^\alpha = [a + \alpha(b - a), d - \alpha(d - c)]. \tag{2.8}$$

Logo, as operações dos números *fuzzy* por seus α-cortes, se resumem em operações intervalares. As operações de soma, subtração, multiplicação e divisão entre números *fuzzy* $\tilde{N}$ e $\tilde{M}$ serão definidas, respectivamente:

$$[\tilde{N} + \tilde{M}]^\alpha = [\tilde{N}]^\alpha + [\tilde{M}]^\alpha \tag{2.9}$$

$$[\tilde{N} - \tilde{M}]^\alpha = [\tilde{N}]^\alpha - [\tilde{M}]^\alpha \tag{2.10}$$

$$[\tilde{N} \cdot \tilde{M}]^\alpha = [\tilde{N}]^\alpha \cdot [\tilde{M}]^\alpha \tag{2.11}$$

$$[\tilde{N} / \tilde{M}]^\alpha = [\tilde{N}]^\alpha / [\tilde{M}]^\alpha. \tag{2.12}$$

Tal que, considera-se 0 não pertencente ao suporte de $\tilde{M}$ na divisão.

Exemplo 3 *Os números fuzzy triangulares $\tilde{N}$ e $\tilde{M}$, do conjunto $\mathbb{R}$, possuem as funções*

de pertinência $\mu_{\tilde{N}} : \mathbb{R} \to [0,1]$ *e* $\mu_{\tilde{M}} : \mathbb{R} \to [0,1]$*, respectivamente:*

$$\mu_{\tilde{N}}(x) = \begin{cases} 0, & \textit{se} \;\; x \leq -1 \textit{ e } x > 3 \\ (x+1)/2, & \textit{se} \;\; -1 < x \leq 1 \\ (3-x)/2, & \textit{se} \;\; 1 < x \leq 3 \end{cases} \tag{2.13}$$

e

$$\mu_{\tilde{M}}(x) = \begin{cases} 0, & \textit{se} \;\; x \leq 1 \textit{ e } x > 5 \\ (x-1)/2, & \textit{se} \;\; 1 < x \leq 3 \\ (5-x)/2, & \textit{se} \;\; 3 < x \leq 5. \end{cases} \tag{2.14}$$

Para operar esses números obtém-se os α*-cortes, a partir da equação (2.8):*

$$[\tilde{N}]^\alpha = [2\alpha - 1, 3 - 2\alpha] \textit{ e } [\tilde{M}]^\alpha = [2\alpha + 1, 5 - 2\alpha].$$

Conforme, as equações (2.9)-(2.12) realizam-se as operações intervalares:

$$[\tilde{N} + \tilde{M}]^\alpha = [4\alpha, 8 - 4\alpha] \textit{ para } \alpha \in (0,1]$$

$$[\tilde{N} - \tilde{M}]^\alpha = [4\alpha - 6, 2 - 4\alpha] \textit{ para } \alpha \in (0,1]$$

$$[\tilde{N} \cdot \tilde{M}]^\alpha = \begin{cases} [-4\alpha^2 + 12\alpha - 5, 4\alpha^2 - 16\alpha + 15], & \textit{para } \alpha \in [0, 0.5] \\ [4\alpha^2 - 1, 4\alpha^2 - 16\alpha + 15], & \textit{para } \alpha \in [0.5, 1] \end{cases}$$

$$[\tilde{N}/\tilde{M}]^\alpha = \begin{cases} [(2\alpha - 1)/(2\alpha + 1), (3 - 2\alpha)/(2\alpha + 1)], & \textit{para } \alpha \in [0, 0.5] \\ [(2\alpha - 1)/(5 - 2\alpha), (3 - 2\alpha)/(2\alpha + 1)], & \textit{para } \alpha \in [0.5, 1]. \end{cases}$$

Logo,

$$(\mu_{\tilde{N}} + \mu_{\tilde{M}})(x) = \begin{cases} 0, & \textit{para } x \leq 0 \textit{ e } x > 8 \\ x/4, & \textit{para } 0 < x \leq 4 \\ (8-x)/4, & \textit{para } 4 < x \leq 8 \end{cases}$$

$$(\mu_{\tilde{N}} - \mu_{\tilde{M}})(x) = \begin{cases} 0, & \textit{para } x \leq 6 \textit{ e } x > 2 \\ (x+6)/4, & \textit{para } -6 < x \leq -2 \\ (2-x)/4, & \textit{para } -2 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$(\mu_{\tilde{N}} \cdot \mu_{\tilde{M}})(x) = \begin{cases} 0, & \textit{para } x < -5 \textit{ e } x \geq 15 \\ [3-(4-x)^{1/2}]/2, & \textit{para } -5 \leq x < 0 \\ (1+x)^{1/2}/2, & \textit{para } 0 \leq x < 3 \\ [4-(1+x)^{1/2}]/2, & \textit{para } 3 \leq x < 15 \end{cases}$$

$$(\mu_{\tilde{N}} / \mu_{\tilde{M}})(x) = \begin{cases} 0, & \textit{para } x < -1 \textit{ e } x \geq 3 \\ (x+1)/(2-2x), & \textit{para } -1 \leq x < 0 \\ (5x+1)/(2x+2), & \textit{para } 0 \leq x < 1/3 \\ (3-x)/(2x+2), & \textit{para } 1/3 \leq x < 3. \end{cases}$$

2.3.3 Relações de Ordem entre Números *Fuzzy*

Em problemas de tomada de decisão, onde as matrizes de recompensas (pagamentos) são números *fuzzy* precisam-se ordenar esses números. Diante disso, estudam-se vários métodos de ordenação (ASMUS; DIMURO, 2013a,b; BUCKLEY; ESLAMI, 2003; BUCKLEY, 2005b; EZZATI et al., 2012), os quais serão apresentados nessa seção. A escolha do método a ser utilizado depende do problema a ser alcançado. Entre os quatros métodos estudados, o método de Ezzati (EZZATI et al., 2012) será aplicado na solução de jogos. Esse método é definido e demonstrado como uma ordem total para números *fuzzy* simétricos ou não.

2.3.3.1 Ordem de Inclusão

Sejam os números *fuzzy* $\tilde{N}$, $\tilde{M}$ e $\tilde{P}$, cujos α-cortes são

$$[\tilde{N}]^{\alpha} = [\mathrm{n_1}^{\alpha}, \mathrm{n_2}^{\alpha}] \text{ , } [\tilde{M}]^{\alpha} = [\mathrm{m_1}^{\alpha}, \mathrm{m_2}^{\alpha}] \text{ e } [\tilde{P}]^{\alpha} = [\mathrm{p_1}^{\alpha}, \mathrm{p_2}^{\alpha}]. \tag{2.15}$$

Então,

$$\tilde{N} \leq \tilde{M} \;\Leftrightarrow \forall \alpha \in [0,1] : \; [\tilde{N}]^{\alpha} \subseteq [\tilde{M}]^{\alpha}. \tag{2.16}$$

Essa ordem, Eq. (2.16), é baseada na inclusão de intervalos que pertencem à Matemática Intervalar (BUCKLEY; ESLAMI, 2003). Também, é uma relação de ordem parcial, porque satisfaz as seguintes condições (MOORE, 1979; MOORE et al., 2009):

(a) Reflexão: $\tilde{N} \leq \tilde{N}$;

(b) Anti-simetria: $\tilde{N} \leq \tilde{M}$ e $\tilde{M} \leq \tilde{N} \;\Rightarrow\; \tilde{N} = \tilde{M}$;

(c) Transitividade: $\tilde{N} \leq \tilde{M}$ e $\tilde{M} \leq \tilde{P} \;\Rightarrow\; \tilde{N} \leq \tilde{P}$.

2.3.3.2 Ordem de Kulisch-Miranker

Considerando $\tilde{N}$ e $\tilde{M}$ números *fuzzy* e a Eq. (2.15). Obtém-se,

$$\tilde{N} \leq \tilde{M} \;\Leftrightarrow \forall\alpha \in (0,1] : [\tilde{N}]^{\alpha} \leq_K [\tilde{M}]^{\alpha} \text{ tal que,} \tag{2.17}$$

$[\tilde{N}]^{\alpha} \leq_K [\tilde{M}]^{\alpha} \Leftrightarrow \mathrm{n}_1^{\alpha} \leq \mathrm{m}_1^{\alpha}$ e $\mathrm{n}_2^{\alpha} \leq \mathrm{m}_2^{\alpha}$.

Como a relação de ordem acima Eq. (2.17), possui as propriedades de reflexão, anti-simetria e transitividade citadas anteriormente, determina-se que $\leq_K$ é uma ordem parcial (BUCKLEY, 2005b).

2.3.3.3 Ordem de Asmus-Dimuro

O método de ordenação de números *fuzzy* triangulares simétricos introduzido por Asmus e Dimuro (ASMUS; DIMURO, 2013a,b), consiste na extensão da ordem definida em (2.17) e na reinterpretação da ordem (2.16).

Sendo os números *fuzzy* triangulares simétricos $\tilde{N} = (a_1 \mid \eta_1 \mid b_1)$ e $\tilde{M} = (a_2 \mid \eta_2 \mid b_2)$, cujos α-cortes serão baseados pela Eq.(2.8) como:

$$[\tilde{N}]^{\alpha} = [(\eta_1 - a_1)\alpha + a_1, (\eta_1 - b_1)\alpha + b_1] \tag{2.18}$$

$$[\tilde{M}]^{\alpha} = [(\eta_2 - a_2)\alpha + a_2, (\eta_2 - b_2)\alpha + b_2]. \tag{2.19}$$

Essas representações de α-cortes são utilizadas para melhor visualização em casos de ordenação não triviais.

Por outro lado, a relação de ordem estrita $\bar{<}$ é definida a partir de um grau de imprecisão $\rho \in [0,1]$, o qual estabelece a influência dos *núcleos* na ordenação dos números

fuzzy muito próximos. Desse modo, quando os valores de ρ são próximos a zero, a precisão da informação do número *fuzzy* terá mais importância do que o valor númerico desse número. Ou seja, números *fuzzy* "estreitos" possuem melhor informação e por consequência são maiores (BEDREGAL et al., 2010; DIMURO et al., 2011, 2000). Então, a ordem estrita $\bar{<}$ é definida, considerando o grau de imprecisão ρ que depende do problema e todas as possíveis posições entre dois números *fuzzy* triangulares simétricos (ASMUS; DIMURO, 2013a,b).

Apresentam-se as quatro condições, onde uma delas é satisfeita, o restante será verdadeiro:

$$\begin{aligned}
&\tilde{N}\bar{<}\tilde{M} \;\Leftrightarrow \\
&\quad (a_1 < a_2) \text{ e } (b_1 \leq b_2) \\
&\text{ou } (a_1 < a_2) \text{ e } (b_2 < b_1) \text{ e } (\eta_1 \leq \eta_2) \\
&\text{ou } (a_1 < a_2) \text{ e } (b_2 < b_1) \text{ e } (\eta_2 < \eta_1) \text{ e} \\
&\qquad\qquad [\forall\alpha : (0 \leq \alpha \leq \rho) \text{ e } (\eta_1 - a_1)\alpha + a_1 \leq (\eta_2 - a_2)\alpha + a_2] \\
&\text{ou } (a_2 \leq a_1) \text{ e } ((b_1 < b_2) \text{ e } (\eta_1 < \eta_2) \text{ e} \\
&\qquad\qquad [\exists\alpha : (0 \leq \alpha \leq \rho) \text{ e } (\eta_1 - a_1)\alpha + a_1 < (\eta_2 - a_2)\alpha + a_2].
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Pela equação (2.20), pode-se definir a ordem $\preceq$ para números *fuzzy* triangulares simétricos $\tilde{N}$ e $\tilde{M}$, tal que:

$$\tilde{N}\bar{\leq}\tilde{M} \;\Leftrightarrow\; \tilde{N} = \tilde{M} \text{ ou } \tilde{N}\bar{<}\tilde{M} \tag{2.21}$$

Como essa ordem satisfaz as propriedades de reflexão, anti-simetria e transitividade, desse modo determina-se uma ordem parcial. Também, a seguinte relação de ordem total é satisfeita (ASMUS; DIMURO, 2013a,b):

$$\forall\tilde{N},\tilde{M} : \tilde{N} = \tilde{M} \text{ ou } \tilde{N}\bar{<}\tilde{M} \text{ ou } \tilde{M}\bar{<}\tilde{N}.$$

2.3.3.4 Ordem de Ezzati

Nessa seção, apresenta-se um método para ordenar números *fuzzy* (EZZATI et al., 2012) simétricos ou não, cujo método será base para ordenação de números *fuzzy* intervalares.

A tupla $\tilde{N} = (\eta_1, \eta_2, \sigma, \beta)$, a qual representa um número *fuzzy* trapezoidal, possui a forma paramétrica através do par ordenado $(\underline{\tilde{N}}(t), \overline{\tilde{N}}(t)) = (\eta_1 - \sigma + \sigma t, \eta_2 + \beta - \beta t)$, para $0 \leq t \leq 1$. Essa representação da forma paramétrica desse número *fuzzy* é utilizada no cálculo da magnitude e da derivada da magnitude de $\tilde{N}$, respectivamente:

$$Mag(\tilde{N}) = \frac{1}{2}\int_0^1 (\underline{\tilde{N}}(t) + \overline{\tilde{N}}(t) + \underline{\tilde{N}}(1) + \overline{\tilde{N}}(1))F(t)\mathrm{d}t \text{ e} \tag{2.22}$$

$$Mag'(\tilde{N}) = \frac{1}{2}\int_0^1 (\underline{\tilde{N}'}(t) - \overline{\tilde{N}'}(t) + \overline{\tilde{N}}(1) - \underline{\tilde{N}}(1))\mathrm{d}t, \tag{2.23}$$

onde a função $F(t)$ é crescente e não negativa no intervalo de $[0, 1]$, com $F(0) = 0$ e $\int_0^1 F(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$. Assim, por exemplo pode-se considerar que $F(t) = t$.

Pelo método de Abbasbandy (ABBASBANDY; HAJJARI, 2009), comparam-se os valores das magnitudes encontradas obtendo a ordem dos números *fuzzy*.

Mas, por Ezzati (EZZATI et al., 2012) calcula-se ainda mais o valor $R(\tilde{N}, \delta) = Mag(\tilde{N}) + \delta Mag'(\tilde{N})$, tal que:

$$\delta = \begin{cases} 0, & Mag(\tilde{N}) \neq Mag(\tilde{M}) \\ 1, & Mag(\tilde{N}) = Mag(\tilde{M}). \end{cases}$$

Definição 24 *Sejam $\tilde{N}$ e $\tilde{M}$ conjuntos dos números **fuzzy** em U ordenam-se esses números da seguinte forma (EZZATI et al., 2012):*

$$R(\tilde{N}, \delta) \leq R(\tilde{M}, \delta), \text{ se e somente se, } \tilde{N} \preceq \tilde{M}.$$

Observação:
$\tilde{N} \succeq \tilde{M}$ se e somente se $\tilde{N} \succ \tilde{M}$ ou $\tilde{N} \sim \tilde{M}$,
$\tilde{N} \preceq \tilde{M}$ se e somente se $\tilde{N} \prec \tilde{M}$ ou $\tilde{N} \sim \tilde{M}$.

Teorema 1 *A relação de ordem $\preceq$ é uma ordem total sobre os números fuzzy $\tilde{N}$,$\tilde{M}$ e $\tilde{P}$ em U, então satisfazem as propriedades:*

- *Reflexiva: Para qualquer número fuzzy $\tilde{N}$, então $\tilde{N} \preceq \tilde{N}$.*

  Prova: *Diretamente pela Definição 24 $R(\tilde{N}, \delta) \leq R(\tilde{N}, \delta)$. Logo, $\tilde{N} \preceq \tilde{N}$.*

- *Anti-Simétrica: Para quaisquer números fuzzy $\tilde{N}$ e $\tilde{M}$, se $\tilde{N} \preceq \tilde{M}$ e $\tilde{M} \preceq \tilde{N}$, então $\tilde{N} = \tilde{M}$.*

  Prova: *Sendo $\tilde{N} \preceq \tilde{M}$ e $\tilde{M} \preceq \tilde{N}$, então pela Definição 24 $R(\tilde{N}, \delta) \leq R(\tilde{M}, \delta)$ e $R(\tilde{M}, \delta) \leq R(\tilde{N}, \delta)$. Segue que, pela definição dos números reais $R(\tilde{M}, \delta) = R(\tilde{N}, \delta)$. Logo, se a condição sobre os $\mathbb{R}$ for injetiva, então $\tilde{N} = \tilde{M}$.*

- *Transitiva: Para quaisquer números fuzzy $\tilde{N}$,$\tilde{M}$ e $\tilde{P}$, se $\tilde{N} \preceq \tilde{M}$ e $\tilde{M} \preceq \tilde{P}$, então $\tilde{N} \preceq \tilde{P}$.*

  Prova: *Sendo $\tilde{N} \preceq \tilde{M}$ e $\tilde{M} \preceq \tilde{P}$, então pela Definição 24 $R(\tilde{N}, \delta) \leq R(\tilde{M}, \delta)$ e $R(\tilde{M}, \delta) \leq R(\tilde{P}, \delta)$. Segue que, pela definição dos números reais $R(\tilde{N}, \delta) \leq R(\tilde{P}, \delta)$. Logo, pela Definição 24 $\tilde{N} \preceq \tilde{P}$.*

- *Total: Para quaisquer números fuzzy $\tilde{N}$ e $\tilde{M}$, então $\tilde{N} \preceq \tilde{M}$ ou $\tilde{M} \preceq \tilde{N}$.*

  Prova: *Supondo por contradição que $\tilde{N} \not\preceq \tilde{M}$ e $\tilde{M} \not\preceq \tilde{N}$, então pela Definição 24 $R(\tilde{N}, \delta) \nleq R(\tilde{M}, \delta)$ e $R(\tilde{M}, \delta) \nleq R(\tilde{N}, \delta)$. Segue que, pela definição dos números reais $R(\tilde{N}, \delta) > R(\tilde{M}, \delta)$ e $R(\tilde{M}, \delta) > R(\tilde{N}, \delta)$. Falso, porque $R(\tilde{N}, \delta)$ e $R(\tilde{M}, \delta)$ são números reais. Logo, $\tilde{N} \preceq \tilde{M}$ ou $\tilde{M} \preceq \tilde{N}$.*

Exemplo 4 *Sendo $\tilde{A} = (3, 2, 2)$ e $\tilde{B} = (3, 1, 1)$ números fuzzy, consideram-se 3 o núcleo e os valores 2 e 1 as distâncias ao núcleo de cada número. Então, pelo método Ezzati, $R(\tilde{A}, \delta) = 5$ e $R(\tilde{B}, \delta) = 4$. Logo, $\tilde{A} \succ \tilde{B}$.*

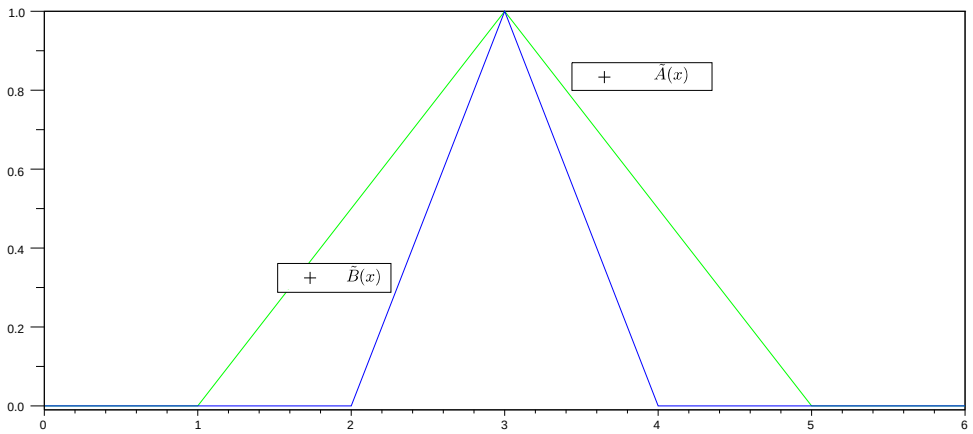

Figura 2.7: Números *fuzzy* $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$ simétricos

Exemplo 5 *Consideram-se dois números fuzzy* $\tilde{A} = (0.5, 0.1, 0.5)$ *e* $\tilde{B} = (0.9, 0.5, 0.1)$*, sendo os valores de núcleos* 0.5 *e* 0.9*, e as distâncias ao núcleo de cada número* 0.5 *e* 0.1*. Então, substituem-se esses valores nas formas paramétricas:*

$$(\underline{\tilde{A}}(t), \overline{\tilde{A}}(t)) = (0.4 + 0.1t, 1.0 - 0.5t),$$
$$(\underline{\tilde{B}}(t), \overline{\tilde{B}}(t)) = (0.4 + 0.5t, 1.0 - 0.1t).$$

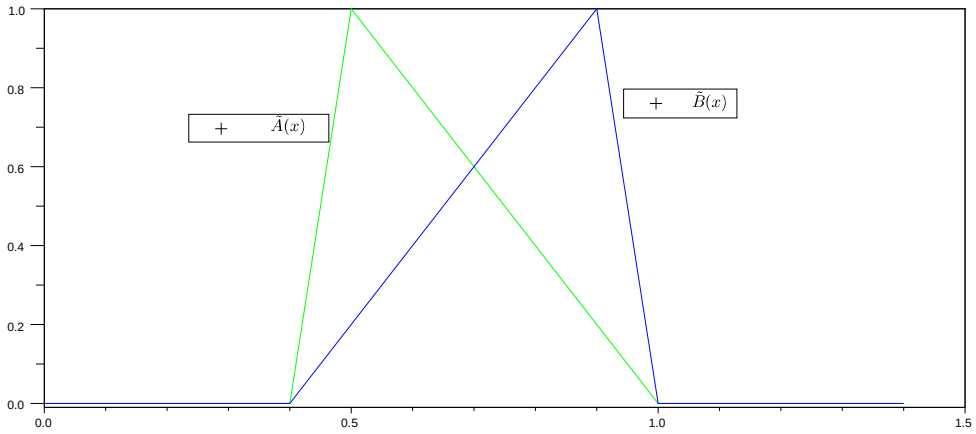

Figura 2.8: Números *fuzzy* $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$ não simétricos

Assim, essas formas paramétricas juntamente com as condições $F(0) = 0$, $\int_0^1 F(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$ e $F(t) = t$, resultam nas magnitudes de $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$:

$$Mag(\tilde{A}) = \frac{1}{2}\int_0^1 (2.4 - 0.4t)\, t\, \mathrm{d}t = 0.5334,$$
$$Mag(\tilde{B}) = \frac{1}{2}\int_0^1 (3.2 + 0.4t)\, t\, \mathrm{d}t = 0.8666.$$

Como $Mag(\tilde{A}) \neq Mag(\tilde{B})$, então $\delta = 0$ e os valores de R tornam-se: $R(\tilde{A}, \delta) = 0.5334$ e $R(\tilde{B}, \delta) = 0.8666$. Logo, $\tilde{A} \prec \tilde{B}$.

2.3.3.5 Outras Ordens

Adicionalmente, estudou-se os seguintes métodos de ordenação de números *fuzzy*:

Ordem D-distância

Conforme Abbasbandy (2009), essa ordem considera apenas números *fuzzy* positivos, sem perder a generalidade. Então, uma função de pertinência $\mu_{\tilde{N}_0}(x)$ do número *fuzzy* $\tilde{N}_0$, pode ser definida como:

$$\mu_{\tilde{N}_0}(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases} \tag{2.24}$$

Para ordenar os números *fuzzy* $\tilde{N}$ e $\tilde{N}_0$ utilizando esse método, determina-se a distância entre eles pela fórmula:

$$D(\tilde{N}, \tilde{N}_0) = \left[\int_0^1 (\underline{\tilde{N}}(t)^2 + \overline{\tilde{N}}(t)^2) \mathrm{d}t \right]^{1/2}. \tag{2.25}$$

Onde, $\underline{\tilde{N}}(t) = \eta_1 - \sigma + \sigma t$ e $\overline{\tilde{N}}(t) = \eta_2 + \beta - \beta t$.

Definição 25 *Assim, dois números fuzzy $\tilde{N}$ e $\tilde{M}$ serão ordenados pelas seguintes condições:*

- $\tilde{N} >_D \tilde{M}$ *se e somente se* $D(\tilde{N}, \tilde{N}_0) > D(\tilde{M}, \tilde{N}_0)$;
- $\tilde{N} <_D \tilde{M}$ *se e somente se* $D(\tilde{N}, \tilde{N}_0) < D(\tilde{M}, \tilde{N}_0)$;
- $\tilde{N} \cong \tilde{M}$ *se e somente se* $D(\tilde{N}, \tilde{N}_0) = D(\tilde{M}, \tilde{N}_0)$.

Sendo, um número *fuzzy* triangular $\tilde{N} = (\eta, \sigma, \beta)$ e um trapezoidal $\tilde{N} = (\eta_1, \eta_2, \sigma, \beta)$, a partir da Definição 25 pode-se representar a equação da distância (2.25) desses números, respectivamente:

$$D(\tilde{N}, \tilde{N}_0) = \left[2\eta^2 + \sigma^2/3 + \beta^2/3 + \eta(\beta - \sigma)\right]^{1/2} \text{ e} \tag{2.26}$$

$$D(\tilde{N}, \tilde{N}_0) = \left[{\eta_1}^2 + {\eta_2}^2 + \sigma^2/3 + \beta^2/3 - \eta_1\sigma + \eta_2\beta\right]^{1/2}. \tag{2.27}$$

Ordem de Valor Integral

Primeiramente, nesse método de Liou e Wang (1992), define-se a função de pertinência do número *fuzzy* $\tilde{N} = (a \mid b \mid c \mid d)$:

$$F_{\tilde{N}}(x) = \begin{cases} F_{1\tilde{N}}(x), & a \leq x < b \\ 1, & b \leq x \leq c \\ F_{2\tilde{N}}(x), & c < x \leq d \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{2.28}$$

tal que $F_{1\tilde{N}}(x) : [a, b] \to [0, 1]$ e $F_{2\tilde{N}}(x) : [c, d] \to [0, 1]$. Além disso, definem-se as funções $G_{1\tilde{N}}(x)$ e $G_{2\tilde{N}}(x)$, funções inversas de $F_{1\tilde{N}}(x)$ e $F_{2\tilde{N}}(x)$, respectivamente.

Definição 26 *Seja $\tilde{N}$ um número fuzzy, onde suas funções de pertinência esquerda e direita são $F_{1\tilde{N}}$ e $F_{2\tilde{N}}$. Então, determinam-se as funções inversas de F à esquerda $G_{1\tilde{N}}$ e à direita $G_{2\tilde{N}}$. Dessa forma, calculam-se os valores das integrais de $\tilde{N}$:*

$$\mathcal{I}_1(\tilde{N}) = \int_0^1 G_{1\tilde{N}}(y)\mathrm{d}y \tag{2.29}$$

$$\mathcal{I}_2(\tilde{N}) = \int_0^1 G_{2\tilde{N}}(y)\mathrm{d}y \tag{2.30}$$

Pelas equações (2.29) e (2.30) defini-se o valor integral:

$$\mathcal{I}^{\alpha}(\tilde{N}) = \alpha\mathcal{I}_2(\tilde{N}) + (1-\alpha)\mathcal{I}_1(\tilde{N}), \text{ para } \alpha \in [0, 1]. \tag{2.31}$$

Sendo, α o grau de otimismo em uma tomada de decisão, ou seja, se $\alpha = 0$ representa uma decisão pessimista e já para $\alpha = 1$ uma decisão otimista. Logo, essa equação será utilizada para ordenar os números *fuzzy*.

Definição 27 *Considerando dois números fuzzy $\tilde{N}$ e $\tilde{M}$, a ordenação desses números será de acordo com:*

- *Se $\mathcal{I}^{\alpha}(\tilde{N}) > \mathcal{I}^{\alpha}(\tilde{M})$ então $\tilde{N} >_I \tilde{M}$;*
- *Se $\mathcal{I}^{\alpha}(\tilde{N}) < \mathcal{I}^{\alpha}(\tilde{M})$ então $\tilde{N} <_I \tilde{M}$;*
- *Se $\mathcal{I}^{\alpha}(\tilde{N}) = \mathcal{I}^{\alpha}(\tilde{M})$ então $\tilde{N} \approx \tilde{M}$.*

2.4 Considerações Finais

Nesse capítulo foi apresentada uma introdução das teorias Fuzzy e Intervalar, onde incertezas e/ou imprecisões, presentes em problemas reais, são representadas. Essas incertezas serão aplicadas em parâmetros de modelos de jogos nos próximos capítulos.

Mais especificamente, a Matemática Intervalar foi abordada, com suas principais definições, operações e relações de ordem de intervalos.

Além disso, caracterizou-se definições de conjuntos *fuzzy*, tipos especiais de conjuntos *fuzzy* e operações elementares desses conjuntos. Também, enfatizou-se os conceitos de números *fuzzy* e suas formas triangulares e trapezoidais.

Analisou-se diversos métodos de ordenação de números *fuzzy*, onde se utilizam na ordem de inclusão, noções da matemática intervalar, na ordem D-distância, a distância entre dois números *fuzzy* e na ordem valor integral, integrais de funções inversas com parâmetro de otimismo.

Por outro lado, o método Asmus-Dimuro trabalha com números *fuzzy* triangulares simétricos, juntamente com a grandeza e a precisão da informação que esse número possui. Por fim, o método de Ezzati não tem restrição quanto à simetria e nem à forma do número *fuzzy*. Diante disso, pretende-se nos capítulos seguintes aplicar o método de Ezzati em problemas de otimização.

3 TEORIA *FUZZY* INTERVALAR

3.1 Introdução

Diante, da necessidade de trabalhar-se com dados mais precisos e erros menores, originou-se a Computação Intervalar. Dessa forma, trata-se de erros de dados iniciais, de arredondamento e de truncamento em problemas computacionais. Para resolver esses problemas, desenvolvem-se softwares com técnicas apropriadas na busca da minimização dos erros e modelos computacionais, os quais analisam e controlam os erros resultantes.

As aplicações da matemática intervalar está presente em diversas áreas da computação. Por exemplo, nas áreas de inteligência artificial, computação gráfica e robótica, porém será destacada nessa dissertação a teoria *fuzzy*.

Nesse capítulo apresentam-se a Matemática Intervalar juntamente com a Teoria *Fuzzy*, possibilitando tratar de incertezas e imprecisões ao mesmo tempo (BEDREGAL et al., 2010). Então, os conceitos da Teoria *Fuzzy* tornam-se base para os conceitos de conjuntos e números *fuzzy* intervalares e seus métodos de ordenação.

3.2 Conjuntos *Fuzzy* Intervalares

Na Teoria *Fuzzy* consegue-se contornar o problema da incerteza presente em dados, estipulando graus de pertinência nos elementos do conjunto. Porém, quando há nebulosidade nos graus de pertinência representam-se esses graus através de intervalos reais, justificando a utilidade da Teoria *Fuzzy* Intervalar.

Dessa forma, na definição de um conjunto *fuzzy* intervalar o grau de pertinência é um subintervalo do intervalo $[0, 1]$ (BEDREGAL et al., 2010; DIMURO et al., 2011). Assim, defini-se um conjunto *fuzzy* intervalar a seguir:

Definição 28 *Seja A um conjunto fuzzy intervalar de U, então*

$$A = \{(x, \varphi_A(x)) \mid x \in U\},$$

sendo $\mathbb{I}[0,1] = \{[\pi_1, \pi_2] \in \mathbb{IR} \mid 0 \leq \pi_1 \leq \pi_2 \leq 1\}$ *e* $\varphi_A(x) \in \mathbb{I}[0,1]$.

Definição 29 *Também, representa-se um conjunto fuzzy intervalar A pela seguinte função de pertinência:*

$$\varphi_A(x) = [\varphi_{A^l}(x), \varphi_{A^u}(x)],$$

onde φ_{A^l} e φ_{A^u} são funções de limite inferior e superior, respectivamente.

Exemplo 6 *Para um conjunto fuzzy intervalar de temperaturas 40^0, 50^0 e 60^0 (igura 3.1) supõem-se que os intervalos de graus de pertinência dessas temperaturas são:* $[0.1, 0.25]$, $[0.18, 0.65]$ *e* $[0.4, 0.8]$.

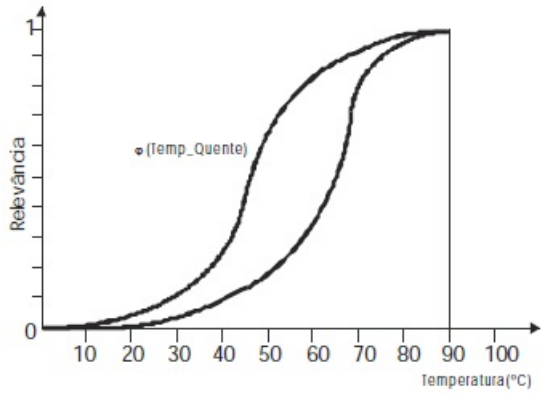

Figura 3.1: Conjunto *fuzzy* intervalar de temperaturas (SILVEIRA, 2002).

Logo, estendem-se os conceitos e as operações de conjuntos *fuzzy* para os conjuntos *fuzzy* intervalares.

Pela Definição 28, tem-se que

Definição 30 *(Suporte de A)*

$$suppA = \{x \in U \mid [\varphi_{A^l}(x), \varphi_{A^u}(x)] > [0,0]\}.$$

Ou seja, $suppA = \{x \in U \mid 0 < \varphi_{A^l}(x) \leq \varphi_{A^u}(x) \leq 1\}$.

Definição 31 *(Núcleo de A)*

$$coreA = \{x \in U \mid [\varphi_{A^l}(x), \varphi_{A^u}(x)] = [1, 1]\}.$$

$$\textit{Ou seja, } coreA = \{x \in U \mid \varphi_{A^l}(x) = \varphi_{A^u}(x) = 1\}.$$

Definição 32 *($[\alpha_1, \alpha_2]$-cortes de A)*

$$[A]^{[\alpha_1,\alpha_2]} = \{x \in U \mid \varphi_A(x) \geq [\alpha_1, \alpha_2]\}, \textit{ onde } 0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1.$$

$$\textit{Ou seja, } [A]^{[\alpha_1,\alpha_2]} = \{x \in U \mid [\alpha_1, \alpha_2] \leq [\varphi_{A^l}(x), \varphi_{A^u}(x)]\}.$$

Definem-se as operações de conjuntos *fuzzy* intervalares com base nas operações de conjuntos *fuzzy* por Zadeh (ZADEH, 1973). Sejam dois conjuntos *fuzzy* intervalares A e B com as seguintes representações:

$$A = \{(x, \varphi_A(x)) \mid x \in U\}, \text{ e } \varphi_A(x) \in \mathbb{I}[0, 1],$$

$$B = \{(x, \varphi_B(x)) \mid x \in U\}, \text{ e } \varphi_B(x) \in \mathbb{I}[0, 1].$$

Sendo que, $\varphi_A(x) = [\varphi_{A^l}(x), \varphi_{A^u}(x)]$ e $\varphi_B(x) = [\varphi_{B^l}(x), \varphi_{B^u}(x)]$, são intervalos com limites inferiores e superiores.

Definição 33 *União*

O conjunto fuzzy intervalar $A \cup B$ é denotado pela seguinte função de pertinência e supremo com respeito a $\leq_K$:

$$\varphi_{A\cup B}(x) = sup\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\} = [\max\{\varphi_{A^l(x)}, \varphi_{B^l(x)}\}, \max\{\varphi_{A^u(x)}, \varphi_{B^u(x)}\}]$$

.

Definição 34 *Intersecção*

O conjunto fuzzy intervalar $A \cap B$ é denotado pela seguinte função de pertinência e ínfimo com respeito a $\leq_K$:

$$\varphi_{A\cap B}(x) = inf\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\} = [\min\{\varphi_{A^l(x)}, \varphi_{B^l(x)}\}, \min\{\varphi_{A^u(x)}, \varphi_{B^u(x)}\}]$$

.

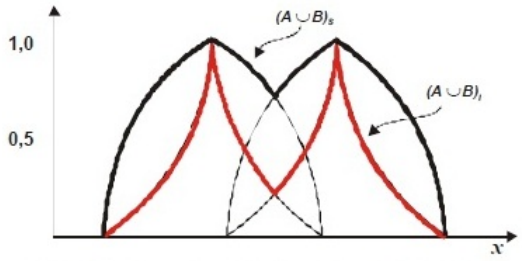

Figura 3.2: União dos conjuntos *fuzzy* intervalares A e B (SILVEIRA, 2002).

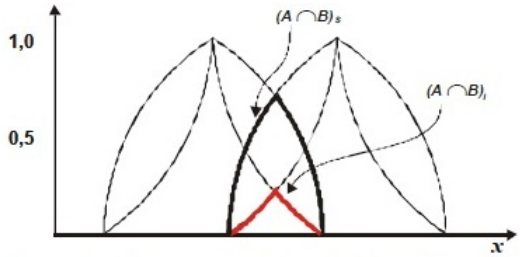

Figura 3.3: Intersecção dos conjuntos *fuzzy* intervalares A e B (SILVEIRA, 2002).

Definição 35 *Complemento*

O conjunto fuzzy intervalar A^C é denotado pela seguinte função de pertinência: $\varphi_{A^C}(x) = \varphi_{\neg A}(x) = 1 - \varphi_A(x) = [1 - \varphi_{A^u}(x), 1 - \varphi_{A^l}(x)]$.

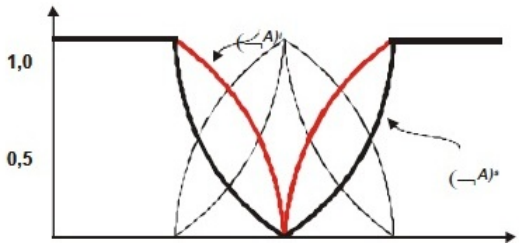

Figura 3.4: Complemento do conjunto *fuzzy* intervalares A (SILVEIRA, 2002).

3.3 Números *Fuzzy* Intervalares

Um número *fuzzy* intervalar é definido a partir do conceito de um conjunto *fuzzy* intervalar e de um número *fuzzy*. Desse modo, apresenta-se:

Definição 36 *Seja $\hat{N}$ um subconjunto fuzzy intervalar de $\mathbb{R}$, então esse subconjunto será um número fuzzy intervalar se satisfazer as condições:*

- *O conjunto suporte de $\hat{N}$ é limitado;*
- *O conjunto core de $\hat{N}$ é diferente de vazio;*
- *Os $[\alpha_1, \alpha_2]$-cortes de $\hat{N}$ são fechados e limitados.*

Entre diversas representações, pode-se denotar um número *fuzzy* intervalar como um par ordenado de números *fuzzy* da seguinte forma: $\hat{N} = (\tilde{N}^l, \tilde{N}^u)$.

Diante disso, considerando a Definição 32 expressam-se os intervalos $[\alpha_1, \alpha_2]$-cortes de $\hat{N}$:

$$[\hat{N}]^{[\alpha_1,\alpha_2]} = [\tilde{N}^l]^{\alpha_1} \cap [\tilde{N}^u]^{\alpha_2}. \tag{3.1}$$

O tipo de número *fuzzy* intervalar triangular é denotado $\hat{N} = (a, b \mid c \mid d, e)$ (Figura 3.5), tal que pelas equações (2.8) e (3.1), os $[\alpha_1, \alpha_2]$-cortes desse número serão:

$$[\hat{N}]^{[\alpha_1,\alpha_2]} = [b + \alpha_1(c - b), d + \alpha_1(c - d)] \cap [a + \alpha_2(c - a), e + \alpha_2(c - e)].$$

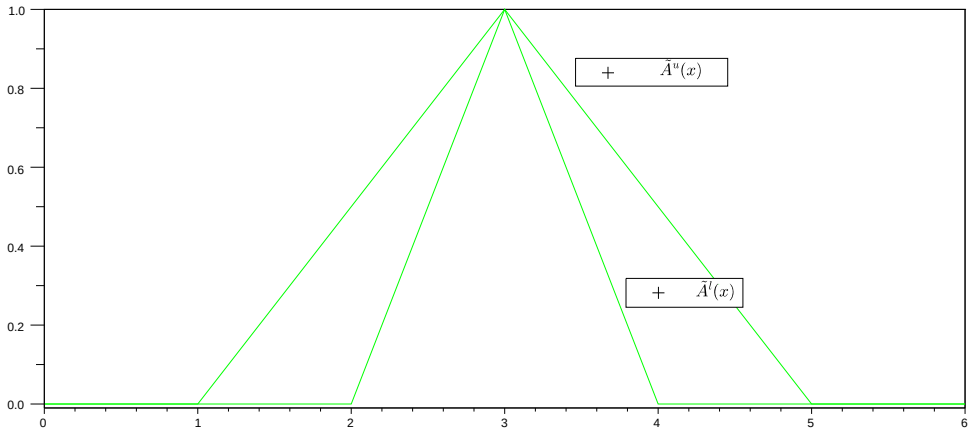

Figura 3.5: Número *fuzzy* intervalar triangular $\hat{A}$.

Por outro lado, o número *fuzzy* intervalar trapezoidal $\hat{N} = (a, b \mid c, d \mid e, f)$ (Figura 3.6), possui os respectivos $[\alpha_1, \alpha_2]$-cortes:

$$[\hat{N}]^{[\alpha_1,\alpha_2]} = [b + \alpha_1(c - b), e + \alpha_1(d - e)] \cap [a + \alpha_2(c - a), f + \alpha_2(d - f)].$$

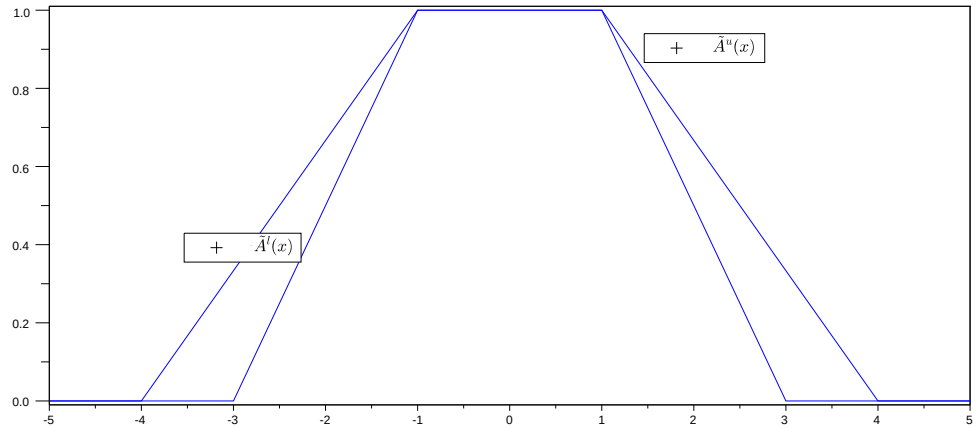

Figura 3.6: Número *fuzzy* intervalar trapezoidal $\hat{A}$.

3.4 Relações de Ordem entre Números *Fuzzy* Intervalares

Nesta seção, apresentam-se dois métodos de ordenação de números *fuzzy* intervalares, buscando a aplicação em Jogos *Fuzzy* Intervalares.

3.4.1 Ordem de Asmus-Dimuro Intervalar

Essa ordem trabalha com números *fuzzy* intervalares simétricos, os quais são números *fuzzy* simétricos, inferior e superior, com mesmo valor de núcleo. Consideram-se os números *fuzzy* simétricos $\tilde{N}^l$ e $\tilde{N}^u$, geradores do número *fuzzy* intervalar $\hat{N}$, e os números *fuzzy* simétricos $\tilde{M}^l$ e $\tilde{M}^u$ geradores do número *fuzzy* intervalar $\hat{M}$. Então, definem-se a relação de igualdade entre esses números:

$$\hat{N} \hat{=} \hat{M} \Leftrightarrow \tilde{N}^l \bar{=} \tilde{M}^l \text{ e } \tilde{N}^l \bar{=} \tilde{M}^u. \tag{3.2}$$

Assim, todo número *fuzzy* intervalar será igual a outro, caso seus geradores forem iguais. Para a relação $\hat{<}$ representam-se os números *fuzzy* intervalares da seguinte forma: $\hat{N} = (\tilde{N}^l, \tilde{N}^u)$ e $\hat{M} = (\tilde{M}^l, \tilde{M}^u)$.

$$\hat{N} \hat{<} \hat{M} \Leftrightarrow (\tilde{N}^u \bar{<} \tilde{M}^u) \text{ ou } (\tilde{N}^u \bar{=} \tilde{M}^u \text{ e } \tilde{N}^l \bar{<} \tilde{M}^l) \tag{3.3}$$

Logo, a relação $\hat{\leq}$ é denotada:

$$\hat{N} \hat{\leq} \hat{M} \;\Leftrightarrow\; \hat{N} \hat{=} \hat{M} \text{ ou } \hat{N} \hat{<} \hat{M} \tag{3.4}$$

Pelas relações (3.2), (3.3) e (3.4), a relação de ordem $\preceq$ é parcial, pois estabelece a reflexividade, a antissimetria e a transitividade. Finalmente, essa ordem parcial torna-se ordem total, por satisfazer a seguinte sentença (ASMUS; DIMURO, 2013a):

$$\forall \hat{N}, \hat{M} : \hat{N} \hat{=} \hat{M} \text{ ou } \hat{N} \hat{<} \hat{M} \text{ ou } \hat{M} \hat{<} \hat{N}.$$

3.4.2 Ordem Proposta

Desenvolveu-se a relação de ordem total (BRIãO; DIMURO, 2012) para ordenar números *fuzzy* intervalares baseado nos artigos (EZZATI et al., 2012; ABBASBANDY; HAJJARI, 2009). Esses números podem ser triangulares ou trapezoidais, sendo simétricos ou não simétricos.

Um número *fuzzy* intervalar $\hat{N} = (\tilde{N}^l, \tilde{N}^u)$, possui a forma paramétrica inferior $(\underline{\tilde{N}^l}(t), \overline{\tilde{N}^l}(t)) = (\eta_1^l - \sigma^l + \sigma^l t, \eta_2^l + \beta^l - \beta^l t)$ e superior $(\underline{\tilde{N}^u}(t), \overline{\tilde{N}^u}(t)) = (\eta_1^u - \sigma^u + \sigma^u t, \eta_2 + \beta^u - \beta^u t)$, sendo $0 \leq t \leq 1$. A partir das formas paramétricas apresentam-se as magnitudes e suas derivadas, inferior e superior, abaixo:

$$Mag(\tilde{N}^l) = \frac{1}{2}\int_0^1 (\underline{\tilde{N}^l}(t) + \overline{\tilde{N}^l}(t) + \underline{\tilde{N}^l}(1) + \overline{\tilde{N}^l}(1))F(t)\mathrm{d}t,$$

$$Mag'(\tilde{N}^l) = \frac{1}{2}\int_0^1 (\underline{\tilde{N}^{l'}}(t) - \overline{\tilde{N}^{l'}}(t) + \overline{\tilde{N}^l}(1) - \underline{\tilde{N}^l}(1))\mathrm{d}t,$$

$$Mag(\tilde{N}^u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (\underline{\tilde{N}^u}(t) + \overline{\tilde{N}^u}(t) + \underline{\tilde{N}^u}(1) + \overline{\tilde{N}^u}(1))F(t)\mathrm{d}t,$$

$$Mag'(\tilde{N}^u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (\underline{\tilde{N}^{u'}}(t) - \overline{\tilde{N}^{u'}}(t) + \overline{\tilde{N}^u}(1) - \underline{\tilde{N}^u}(1))\mathrm{d}t.$$

Onde, a função $F(t)$ é crescente e não negativa no intervalo de $[0, 1]$, com $F(0) = 0$ e $\int_0^1 F(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$. Então, conforme essas condições considera-se que $F(t) = t$.

Finaliza-se esse método, calculando os valores de $R(\tilde{N}^l, \delta^l) = Mag(\tilde{N}^l) + \delta^l Mag'(\tilde{N}^l)$ e $R(\tilde{N}^u, \delta^u) = Mag(\tilde{N}^u) + \delta^u Mag'(\tilde{N}^u)$, considerando-se:

$$\delta^l = \begin{cases} 0, & Mag(\tilde{N}^l) \neq Mag(\tilde{M}^l) \\ 1, & Mag(\tilde{N}^l) = Mag(\tilde{M}^l), \end{cases}$$

$$\delta^u = \begin{cases} 0, & Mag(\tilde{N}^u) \neq Mag(\tilde{M}^u) \\ 1, & Mag(\tilde{N}^u) = Mag(\tilde{M}^u). \end{cases}$$

Definição 37 *Dados* $\hat{N} = (\tilde{N}^l, \tilde{N}^u)$ *e* $\hat{M} = (\tilde{M}^l, \tilde{M}^u)$ *números fuzzy intervalares então:*

$$\hat{N} \preceq \hat{M} \text{ se e somente se } (\tilde{N}^u \prec \tilde{M}^u \text{ ou } (\tilde{N}^u \sim \tilde{M}^u \text{ e } \tilde{M}^l \preceq \tilde{N}^l)).$$

Proposição 1 *Sejam dois números fuzzy intervalares* $\hat{N}$ *e* $\hat{M}$*, a ordem total desses números fica definida como:*

$$\hat{N} \preceq \hat{M} \text{ se e somente se } [R(\tilde{N}^l, \delta^l), R(\tilde{N}^u, \delta^u)] \trianglelefteq [R(\tilde{M}^l, \delta^l), R(\tilde{M}^u, \delta^u)]$$

Prova: Pela Definição 37,
$\hat{N} \preceq \hat{M}$ se e somente se $(\tilde{N}^u \prec \tilde{M}^u$ ou $(\tilde{N}^u \sim \tilde{M}^u$ e $\tilde{M}^l \preceq \tilde{N}^l))$
Então, por Def. 24 $(R(\tilde{N}^u, \delta^u) < R(\tilde{M}^u, \delta^u)$ ou $(R(\tilde{N}^u, \delta^u) = R(\tilde{M}^u, \delta^u)$ e $R(\tilde{M}^l, \delta^l) \leq R(\tilde{N}^l, \delta^l)))$. Logo, $[R(\tilde{N}^l, \delta^l), R(\tilde{N}^u, \delta^u)] \trianglelefteq [R(\tilde{M}^l, \delta^l), R(\tilde{M}^u, \delta^u)]$.

Corolário 1 *Os números fuzzy intervalares* $\hat{N}$ *e* $\hat{M}$ *são ordenados da seguinte forma:*

- $[R(\tilde{N}^l, \delta^l), R(\tilde{N}^u, \delta^u)] \triangleright [R(\tilde{M}^l, \delta^l), R(\tilde{M}^u, \delta^u)]$ *se e somente se* $\hat{N} \succ \hat{M}$;
- $[R(\tilde{N}^l, \delta^l), R(\tilde{N}^u, \delta^u)] \triangleleft [R(\tilde{M}^l, \delta^l), R(\tilde{M}^u, \delta^u)]$ *se e somente se* $\hat{N} \prec \hat{M}$;
- $[R(\tilde{N}^l, \delta^l), R(\tilde{N}^u, \delta^u)] = [R(\tilde{M}^l, \delta^l), R(\tilde{M}^u, \delta^u)]$ *se e somente se* $\hat{N} \sim \hat{M}$.

Logo, estendeu-se a definição de ordenar números *fuzzy* (EZZATI et al., 2012) para ordenar números *fuzzy* intervalares.

Teorema 2 *A relação de ordem* $\preceq$ *é uma ordem total sobre os números fuzzy intervalares* $\hat{N}$,$\hat{M}$ *e* $\hat{P}$*, os quais satisfazem as propriedades:*

- *Reflexiva: Para qualquer número fuzzy intervalar* $\hat{N}$*, então* $\hat{N} \preceq \hat{N}$.

  Prova: *Supondo por contradição que* $(\tilde{N}^l, \tilde{N}^u) \npreceq (\tilde{N}^l, \tilde{N}^u)$*, então pela Definição 1* $(\tilde{N}^u \nprec \tilde{N}^u$ *e* $(\tilde{N}^u \nsim \tilde{N}^u$ *ou* $\tilde{N}^l \npreceq \tilde{N}^l))$*. Segue que,* $((\tilde{N}^u \nprec \tilde{N}^u$ *e* $\tilde{N}^u \nsim \tilde{N}^u)$ *ou* $(\tilde{N}^u \nprec \tilde{N}^u$ *e* $\tilde{N}^l \npreceq \tilde{N}^l))$*. Falso, pelas propriedades de números fuzzy. Logo,* $\hat{N} \preceq \hat{N}$.

- *Anti-Simétrica: Para quaisquer números fuzzy intervalares $\hat{N}$ e $\hat{M}$, se $\hat{N} \preceq \hat{M}$ e $\hat{M} \preceq \hat{N}$, então $\hat{N} \sim \hat{M}$.*

  Prova: *Sendo $\hat{N} \preceq \hat{M}$ e $\hat{M} \preceq \hat{N}$, então pela Definição 1 ($\tilde{N}^u \prec \tilde{M}^u$ ou ($\tilde{N}^u \sim \tilde{M}^u$ e $\tilde{M}^l \preceq \tilde{N}^l$)) e ($\tilde{M}^u \prec \tilde{N}^u$ ou ($\tilde{M}^u \sim \tilde{N}^u$ e $\tilde{N}^l \preceq \tilde{M}^l$)). Segue que, pelas propriedades de números fuzzy $\tilde{N}^u \sim \tilde{M}^u$ e $\tilde{N}^l \sim \tilde{M}^l$. Logo, $\hat{N} \sim \hat{M}$.*

- *Transitiva: Para quaisquer números fuzzy intervalares $\hat{N}$,$\hat{M}$ e $\hat{P}$, se $\hat{N} \preceq \hat{M}$ e $\hat{M} \preceq \hat{P}$, então $\hat{N} \preceq \hat{P}$.*

  Prova: *Sendo $\hat{N} \preceq \hat{M}$ e $\hat{M} \preceq \hat{P}$, então pela Definição 1 ($\tilde{N}^u \prec \tilde{M}^u$ ou ($\tilde{N}^u \sim \tilde{M}^u$ e $\tilde{M}^l \preceq \tilde{N}^l$)) e ($\tilde{M}^u \prec \tilde{P}^u$ ou ($\tilde{M}^u \sim \tilde{P}^u$ e $\tilde{P}^l \preceq \tilde{M}^l$)). Segue que, pelas propriedades de números fuzzy ($\tilde{N}^u \prec \tilde{P}^u$ ou ($\tilde{N}^u \sim \tilde{P}^u$ e $\tilde{P}^l \preceq \tilde{N}^l$)) . Logo, $\hat{N} \preceq \hat{\tilde{P}}$.*

- *Total: Para quaisquer números fuzzy intervalares $\hat{N}$ e $\hat{M}$, então $\hat{N} \preceq \hat{M}$ ou $\hat{M} \preceq \hat{N}$.*

  Prova: *Supondo por contradição que $\hat{N} \not\preceq \hat{M}$ e $\hat{M} \not\preceq \hat{N}$, assim $(\tilde{N}^l, \tilde{N}^u) \not\preceq (\tilde{M}^l, \tilde{M}^u)$ e $(\tilde{M}^l, \tilde{M}^u) \not\preceq (\tilde{N}^l, \tilde{N}^u)$. Segue que, pela Definição 1 ($\tilde{N}^u \not\prec \tilde{M}^u$ e ($\tilde{N}^u \nsim \tilde{M}^u$ ou $\tilde{M}^l \not\preceq \tilde{N}^l$)) e ($\tilde{M}^u \not\prec \tilde{N}^u$ e ($\tilde{M}^u \nsim \tilde{N}^u$ ou $\tilde{N}^l \not\preceq \tilde{M}^l$)). Então, ($\tilde{N}^u \succ \tilde{M}^u$ ou ($\tilde{N}^u \not\prec \tilde{M}^u$ e $\tilde{M}^l \not\preceq \tilde{N}^l$)) e ($\tilde{M}^u \succ \tilde{N}^u$ ou ($\tilde{M}^u \not\prec \tilde{N}^u$ e $\tilde{N}^l \not\preceq \tilde{M}^l$)). Falso, pelas propriedades de números fuzzy. Logo, $\hat{N} \preceq \hat{\tilde{M}}$ ou $\hat{M} \preceq \hat{N}$.*

3.4.3 Exemplos

Exemplo 1

Definidas as funções de pertinência dos números *fuzzy* intervalares $\hat{A}$ e $\hat{B}$:

$$\varphi_{\tilde{A}^l}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 2 \\ x-2, & \text{se } 2 < x \leq 3 \\ -x+4, & \text{se } 3 < x \leq 4 \\ 0, & \text{se } x > 4, \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\varphi_{\tilde{A}^u}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } \ x \leq 1 \\ \dfrac{x-1}{2}, & \text{se } 1 < x \leq 3 \\ \dfrac{-x+5}{2}, & \text{se } 3 < x \leq 5 \\ 0, & \text{se } \ x > 5, \end{cases} \tag{3.6}$$

$$\varphi_{\tilde{B}^l}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } \ x \leq 4 \\ x-4, & \text{se } 4 < x \leq 5 \\ -x+6, & \text{se } 5 < x \leq 6 \\ 0, & \text{se } \ x > 6, \end{cases} \tag{3.7}$$

$$\varphi_{\tilde{B}^u}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } \ x \leq 3 \\ \dfrac{x-3}{2}, & \text{se } 3 < x \leq 5 \\ \dfrac{-x+7}{2}, & \text{se } 5 < x \leq 7 \\ 0, & \text{se } \ x > 7, \end{cases} \tag{3.8}$$

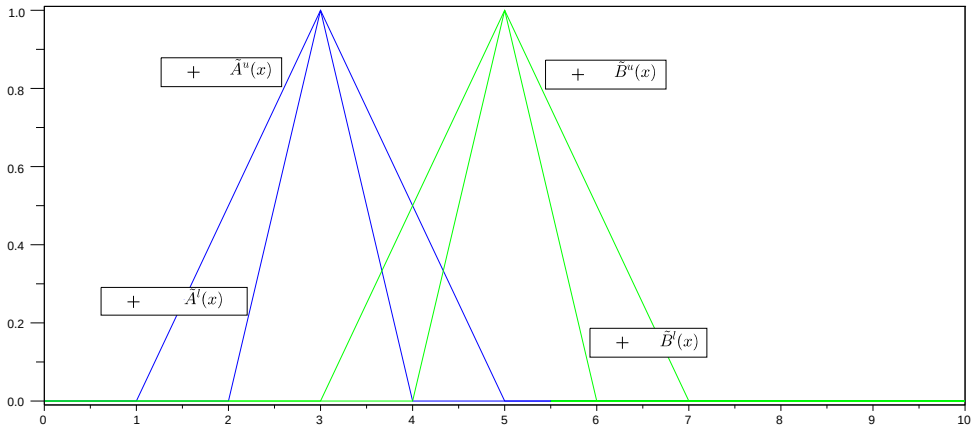

Figura 3.7: Números *fuzzy* intervalares $\hat{A} = (\tilde{A}^l, \tilde{A}^u)$ e $\hat{B} = (\tilde{B}^l, \tilde{B}^u)$ (triangulares e simétricos)

As formas paramétricas de $\hat{A}$ são os pares ordenados:

$$(\underline{\tilde{A}^u}(t), \overline{\tilde{A}^u}(t)) = (1+2t, 5-2t), (\underline{\tilde{A}^l}(t), \overline{\tilde{A}^l}(t)) = (2+t, 4-t)$$

e de $\hat{B}$

$$(\underline{\tilde{B}^u}(t), \overline{\tilde{B}^u}(t)) = (3+2t, 7-2t), (\underline{\tilde{B}^l}(t), \overline{\tilde{B}^l}(t)) = (4+t, 6-t).$$

Conforme essas formas paramétricas e as condições $F(0) = 0$, $\int_0^1 F(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$ e $F(t) = t$, as magnitudes de $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são:

$$Mag(\tilde{A}^l) = \frac{1}{2}\int_0^1 (2+t+4-t+3+3)\, t\, \mathrm{d}t = 3$$

$$Mag(\tilde{A}^u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (1+2t+5-2t+3+3)\, t\, \mathrm{d}t = 3$$

$$Mag(\tilde{B}^l) = \frac{1}{2}\int_0^1 (2+t+4-t+3+3)\, t\, \mathrm{d}t = 5$$

$$Mag(\tilde{B}^u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (1+2t+5-2t+3+3)\, t\, \mathrm{d}t = 5.$$

Para encontrar os valores de R calcula-se:

$$Mag'(\tilde{A}^l) = \frac{1}{2}\int_0^1 (1+1+3-3)\mathrm{d}t = 1, Mag'(\tilde{A}^u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (2+2+2-3)\mathrm{d}t = 2$$

$$Mag'(\tilde{B}^l) = \frac{1}{2}\int_0^1 (1+1+3-3)\mathrm{d}t = 1, Mag'(\tilde{B}^u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (2+2+2-3)\mathrm{d}t = 2.$$

Diante disso, $Mag(\tilde{A}^l) \neq Mag(\tilde{B}^l)$ e $Mag(\tilde{A}^u) \neq Mag(\tilde{B}^u)$, então δ^l e δ^u possuem valor zero.

Logo,

$$R(\tilde{A}^l, \delta^l) = 3 + 0 \cdot 1 = 3, R(\tilde{A}^u, \delta^u) = 3 + 0 \cdot 2 = 3,$$

$$R(\tilde{B}^l, \delta^l) = 5 + 0 \cdot 1 = 5 \text{ e } R(\tilde{A}^u, \delta^u) = 5 + 0 \cdot 2 = 5.$$

Assim, pela Proposição 1 $[R(\tilde{A}^l, \delta^l), R(\tilde{A}^u, \delta^u)] = [3, 3]$ e $[R(\tilde{B}^l, \delta^l), R(\tilde{B}^u, \delta^u)] = [5, 5]$, então $[3, 3] \trianglelefteq [5, 5]$, portanto $\hat{A} \prec \hat{B}$.

Exemplo 2

Seja o número *fuzzy* intervalar $\hat{A}$, formado pelos números *fuzzy* trapezoidais inferior $\tilde{A}^l = (-1, 1, 2, 2)$ e superior $\tilde{A}^u = (-1, 1, 3, 3)$, e o número *fuzzy* intervalar $\hat{B}$, com números *fuzzy* trapezoidais $\tilde{B}^l = (0, 1, 1)$ e $\tilde{B}^u = (0, 2, 2)$. Onde, a representação desses números *fuzzy* fica na ordem: intervalo dos núcleos e distâncias desses intervalos. Dessa modo, apresenta-se o gráfico abaixo:

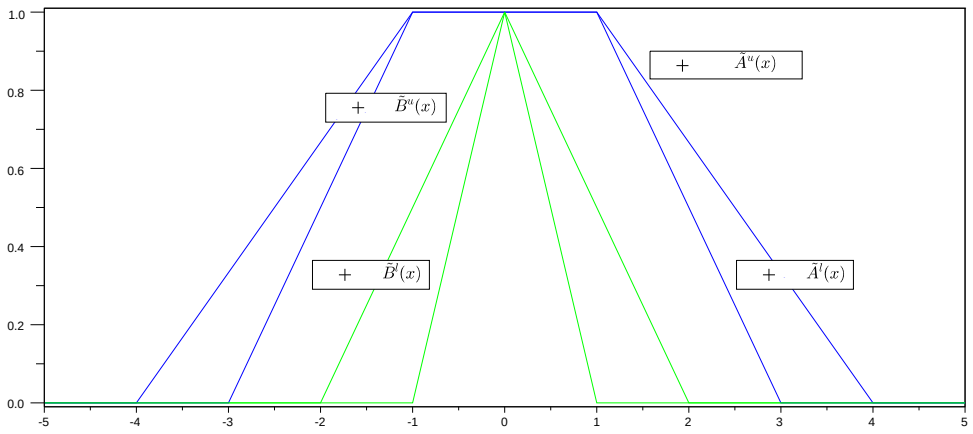

Figura 3.8: Números *fuzzy* intervalares $\hat{A} = (\tilde{A}^l, \tilde{A}^u)$ (trapezoidal) e $\hat{B} = (\tilde{B}^l, \tilde{B}^u)$ (triangular)

Substituindo-se os valores de $\tilde{A}^l$, $\tilde{A}^u$, $\tilde{B}^l$ e $\tilde{B}^u$ nas formas paramétricas, tais que:

$$(\underline{\tilde{A}^u}(t), \overline{\tilde{A}^u}(t)) = (-4 + 3t, 4 - 3t), (\underline{\tilde{A}^l}(t), \overline{\tilde{A}^l}(t)) = (-3 + 2t, 3 - 2t)$$

e de B

$$(\underline{\tilde{B}^u}(t), \overline{\tilde{B}^u}(t)) = (-2 + 2t, 2 - 2t), (\underline{\tilde{B}^l}(t), \overline{\tilde{B}^l}(t)) = (-1 + t, 1 - t).$$

Assim, essas formas paramétricas juntamente com as condições $F(0) = 0$, $\int_0^1 F(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$ e $F(t) = t$, resultam nas magnitudes de $\hat{A}$ e $\hat{B}$:

$$Mag(\tilde{A}^l) = \frac{1}{2}\int_0^1 0\ t\ \mathrm{d}t = 0, Mag(\tilde{A}^u) = \frac{1}{2}\int_0^1 0\ t\ \mathrm{d}t = 0$$

$$Mag(\tilde{B}^l) = \frac{1}{2}\int_0^1 0\ t\ \mathrm{d}t = 0, Mag(\tilde{B}^u) = \frac{1}{2}\int_0^1 0\ t\ \mathrm{d}t = 0.$$

Finaliza-se o método encontrando os valores de R, para isso calcula-se:

$$Mag'(\tilde{A}^l) = \frac{1}{2}\int_0^1 6\mathrm{d}t = 3, Mag'(\tilde{A}^u) = \frac{1}{2}\int_0^1 8\mathrm{d}t = 4$$

$$Mag'(\tilde{B}^l) = \frac{1}{2}\int_0^1 2\mathrm{d}t = 1, Mag'(\tilde{B}^u) = \frac{1}{2}\int_0^1 4\mathrm{d}t = 2.$$

Como $Mag(\tilde{A}^l) = Mag(\tilde{B}^l)$ e $Mag(\tilde{A}^u) = Mag(\tilde{B}^u)$, segue que δ^l e δ^u possuem valor um.

Então, pelo método proposto nesse artigo $[R(\tilde{A}^l, \delta^l), R(\tilde{A}^u, \delta^u)] = [3, 4]$ e $[R(\tilde{B}^l, \delta^l), R(\tilde{B}^u, \delta^u)] = [1, 2]$. Logo, $\hat{B} \prec \hat{A}$.

3.5 Considerações Finais

Como a Teoria Intervalar auxilia na modelagem de incertezas e imprecisões, juntou-se a Teoria *Fuzzy* formando a Teoria *Fuzzy* Intervalar. Diante disso, formou-se os conjuntos *fuzzy* intervalares, os quais possuem operações e propriedades representadas nesse capítulo.

Um conjunto destacado foi os números *fuzzy* intervalares, onde tipos, operações, exemplos e figuras foram mostrados. Por fim, apresentou-se dois métodos de ordenação de números *fuzzy* intervalares, sendo que o último método foi desenvolvido e demonstrado nessa dissertação. O conteúdo do próximo capítulo será a Teoria de Jogos, a qual aplicará as teorias dos capítulos anteriores.

4 TEORIA DOS JOGOS

4.1 Introdução

Neste capítulo, apresentam-se conceitos da Teoria dos Jogos, onde destacam-se as teorias de Jogos *Fuzzy* e de Jogos *Fuzzy* Intervalares.

Jogo é um modelo que representa interações entre entidades ou agentes, chamados de jogadores, sendo que esses jogadores agem de forma estratégica conforme suas preferências.

Na teoria dos jogos, os jogadores são considerados racionais pelo fato que eles procuram obter uma menor perda ao término do jogo, assim eles tomam decisões a partir de premissas, não distorcendo os fatos ou omitindo as evidências (FIANI, 2009).

A teoria dos jogos possui diversas aplicações, como por exemplo, nas áreas da economia, da engenharia, da computação e da política. Porém, seus estudos científicos são recentes e se referencia Von Neumann e John Nash como principais autores que desenvolveram essa teoria (FIANI, 2009).

4.2 Conceitos básicos de um jogo

Um jogo possui como elementos básicos conjuntos de agentes, de ações e de recompensas para cada jogador. Essa recompensa ou pagamento é o resultado que o jogador recebe ao atingir um objetivo, sendo negativo (perda) ou positivo (ganho).

As estratégias são escolhas de ações em determinados momentos, as quais podem ser mistas ou puras. As estratégias mistas variam as tomadas de ações ao longo do jogo. Isso ocorre porque um jogador pode tentar surpreender ou evitar ser surpreendido. Já as estratégias puras mantém uma mesma escolha de ação durante todo o jogo.

A representação mais comum de um jogo finito de dois jogadores é por uma ma-

triz de recompensas com dimensões conforme o número de ações de cada jogador (AMARAL, 2007).

A solução de um jogo é um par de estratégias que otimiza os ganhos de cada jogador, a qual é chamada de solução de equilíbrio de Nash. O método *minmax* busca a solução ótima de um jogo através de soluções de equilíbrio e a implementação desse método resulta em uma programação linear.

Os jogos podem ser classificados em simultâneos ou sequenciais, onde nos jogos simultâneos os jogadores ignoram ou não sabem as ações que o outro jogador fez, antes de tomar a sua decisão. Por outro lado, nos jogos sequencias a ação de um jogador é baseada através da decisão do outro.

Um jogo é dito de informação perfeita quando é de conhecimento comum as ações passadas de cada jogador, senão, é dito de informação imperfeita. Então, consideram-se nessa dissertação jogos simultâneos de informação imperfeita, onde os jogadores não compartilham decisões, ou seja, são jogos não cooperativos.

Ainda mais, na próxima seção serão apresentados jogos do tipo soma zero cujas recompensas somadas de cada jogador com seu oponente resulta em zero, isto é, quando um jogador ganha em uma dada estratégia o outro perde.

Logo, nessa dissertação consideram-se jogos não cooperativos de soma zero que possuem dois jogadores.

4.3 Jogos de Soma Zero

Nos jogos de soma zero, as matrizes de recompensas de dois jogadores quando somadas resultarão em uma matriz nula. Ou seja, se um jogador recebe um valor de recompensa o seu adversário receberá o valor inverso dessa recompensa (FIANI, 2009).

Sejam os jogadores I e II, os quais possuem conjuntos de ações $I = \{1, 2, ..., n\}$ e $J = \{1, 2, ..., m\}$, respectivamente. Então, a matriz de recompensas $\mathcal{A}$ do jogador I é definida:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

Sendo, m o número de ações do jogador I e n o número de ações do jogador II. Dessa forma, em jogos de soma zero e dois jogadores, a matriz de recompensas $\mathcal{B}$ do jogador II será a matriz negativa de $\mathcal{A}$, isto é, $\mathcal{B} = -\mathcal{A}$.

Também, pode-se representar um jogo através de uma tabela, onde as células são as recompensas que os jogadores recebem após realizar uma ação considerando a ação de seu adversário, determinando uma estratégia (Tabela 4.1).

Tabela 4.1: Recompensas dos jogadores I e II em um jogo

	Jogador I		
Jogador II	1	$\cdots$	n
1	a_{11}	$\cdots$	a_{1n}
2	a_{21}	$\cdots$	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	a_{m1}	$\cdots$	a_{mn}

As estratégias mistas $x = (x_1, \cdots, x_m)$ e $y = (y_1, \cdots, y_n)$ dos jogadores I e II são uma distribuição de probabilidades de estratégias puras. Dessa forma, representam-se as estratégias mistas a seguir (NISHIZAKI; SAKAWA, 2001):

$$X = \{x = (x_1, \cdots, x_m) \in R^m \mid \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1, \cdots, m\} \tag{4.2}$$

$$Y = \{y = (y_1, \cdots, y_n) \in R^n \mid \sum_{j=1}^{n} y_j = 1, y_j \geq 0, j = 1, \cdots, n\} \tag{4.3}$$

Assim, considerando estratégias mistas, pode-se sempre determinar pelo menos uma solução de jogos, mas em forma de probabilidades.

Definição 38 *A recompensa esperada ao final de um jogo soma zero, após realizadas as estratégias dos jogadores, é calculada através da expressão (NISHIZAKI; SAKAWA, 2001):*

$$\vartheta(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j = x\mathcal{A}y \tag{4.4}$$

O jogador I busca maximizar a recompensa mínima, assim o valor esperado de recompensa ao final do jogo, solução ótima, desse jogador é:

$$v_I = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} (x\mathcal{A}y). \tag{4.5}$$

Como o jogo é de soma zero, os objetivos são opostos dos jogadores. Então, o valor esperado de recompensa do jogador II é:

$$v_{II} = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} (x\mathcal{A}y). \tag{4.6}$$

Nas igualdades (4.4), (4.5) e (4.6), omitem-se o vetor transposto x' para simplificar a notação, sempre quando não causar confusão. Diante disso, apresenta-se um teorema fundamental da teoria dos jogos, o qual determina a existência da solução de equilíbrio de um jogo.

Teorema 3 *A solução de equilíbrio de um jogo soma zero de dois jogadores, com matriz de recompensas $\mathcal{A}$, é o par de estratégias (x, y) que satisfaz a seguinte condição (NISHIZAKI; SAKAWA, 2001):*

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} (x\mathcal{A}y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} (x\mathcal{A}y) \tag{4.7}$$

Para encontrar o valor de v_I, sendo $a_{ij} > 0$ e $\mathcal{A}.j = [a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mn}]'$, utilizam-se as igualdades:

$$v_I = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} (x\mathcal{A}y) = \max_{x \in X} \min_{j \in J} (x\mathcal{A}.j) = \max_{x \in X} \min_{j \in J} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i, \tag{4.8}$$

Assim,

$$\begin{aligned} &\max_{x \in X} \min_{j \in J} \textstyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \\ &sa : x_1 + x_2 + ... + x_m = 1 \\ &x_i \geq 0, i = 1, ..., m \end{aligned} \tag{4.9}$$

Para simplificar a programação introduze-se uma variável auxiliar z, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &\max z \\ &sa : a_{1j} x_1 + \cdots + a_{mj} x_m \geq z, j = 1, ..., n \\ &x_1 + x_2 + ... + x_m = 1 \\ &x_i \geq 0, i = 1, ..., m. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Como $\max z$ é equivalente a $\min 1/z = s_1 + ... + s_m$, então pode-se reescrever o problema de encontrar a solução ótima na seguinte programação linear:

$$\begin{aligned} &\min(s_1 + \cdots + s_m) \\ &sa : a_{1j}s_1 + \cdots + a_{mj}s_m \geq 1, j = 1, ..., n \\ &s_i \geq 0, i = 1, ..., m \end{aligned} \tag{4.11}$$

Analogamente, para o jogador II:

$$\begin{aligned} &\max(r_1 + \cdots + r_n) \\ &sa : a_{i1}r_1 + \cdots + a_{in}r_n \leq 1, i = 1, ..., m \\ &r_i \geq 0, i = 1, ..., n \end{aligned} \tag{4.12}$$

Diante disso, conceitua-se uma programação linear como um problema onde possui (GANDOLPHO, 2005):

- uma função objetivo linear, a qual é uma meta a atingir;
- as variáveis de decisões, as quais determinam qual medida será solução do problema;
- as restrições, as quais limitam os valores das variáveis de decisões;
- a região viável, onde todas as restrições são obedecidas para encontrar a solução final;
- a linearidade, a qual aparece nas representações do problema.

Exemplo 7 *Jogo de cobrança de penalidade*

Nesse jogo soma zero e simultâno há um batedor (jogador I) e um goleiro (jogador II). Além disso, possui as ações do batedor de chutar a bola para o lado direito ou esquerdo e do goleiro de ir defender a bola para o lado direito ou esquerdo do gol, como mostrado na Tabela 4.1.

Tabela 4.2: Recompensas dos jogadores no jogo de cobrança de penalidade

	Goleiro	
Batedor	Lado Direito	Lado Esquerdo
Lado Direito	$-7, 7$	$1, -1$
Lado Esquerdo	$2, -2$	$-6, 6$

4.4 Jogos *Fuzzy*

Em situações reais pode-se não conseguir determinar precisamente os valores das recompensas e das restrições. Então, a Teoria *Fuzzy* (ZADEH, 1965) juntamente com a Teoria de Jogos (FIANI, 2009) formularam os jogos do tipo *fuzzy*, os quais consideram parâmetros *fuzzy*. Assim, consegue-se modelar as incertezas presentes nos dados relativos do problema real.

Diante disso, representam-se um jogo *fuzzy* de soma zero com dois jogadores pela matriz $m \times n$:

$$\tilde{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \dots & \tilde{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{m1} & \dots & \tilde{a}_{mn} \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

Onde, m e n determinam a quantidade de ações de cada jogador e os elementos $\tilde{a}_{ij}$ da matriz $\tilde{\mathcal{A}}$ são números *fuzzy*.

Logo, um jogo *fuzzy* é uma extensão de um jogo clássico representado por uma matriz de números *fuzzy*.

Também, pode-se definir a matriz $\tilde{\mathcal{A}} = [\mathcal{A}_1, \mathcal{A}, \mathcal{A}_2]$ pelo limite inferior, núcleo e limite superior, respectivamente. Em jogos *fuzzy*, defini-se a condição de existência de equilíbrio a partir da igualdade:

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} (x\tilde{\mathcal{A}}y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} (x\tilde{\mathcal{A}}y) \tag{4.14}$$

Para solucionar a igualdade (4.14), encontrando a solução ótima, deve-se resolver os problemas para o jogador I e II, respectivamente:

$$\begin{aligned} &\min(s_1 + \cdots + s_m) \\ &sa : \tilde{a}_{1j}s_1 + \cdots + \tilde{a}_{mj}s_m \succeq 1, j = 1, ..., n \\ &s_i \geq 0, i = 1, ..., m \end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned} &\max(r_1 + \cdots + r_n) \\ &sa : \tilde{a}_{i1}r_1 + \cdots + \tilde{a}_{in}r_n \preceq 1, i = 1, ..., m \\ &r_i \geq 0, i = 1, ..., n \end{aligned} \tag{4.16}$$

Sendo, $\preceq$ e $\succeq$ restrições *fuzzy*. Por fim, o valor esperado do jogo *fuzzy* é expresso:

$$\vartheta = x\mathcal{A}y. \tag{4.17}$$

Como os problemas (4.15) e (4.16) tratam de parâmetros *fuzzy*, não necessariamente as soluções de cada serão iguais. Ou seja, não é garantido a dualidade desses problemas, no entanto em programações lineares clássicas ocorre a dualidade.

No próximo capítulo, apresentam-se dois modelos de resolução dos problemas (4.15) e (4.16).

4.5 Jogos *Fuzzy* Intervalares

Em problemas reais, onde há incertezas nos valores das recompensas e nas dispersões dessas recompensas, utiliza-se a Teoria *Fuzzy* Intervalar para modelar esses problemas. Diante disso, jogos *fuzzy* intervalares são modelos de tomada de decisões, cujas recompensas são números *fuzzy* intervalares. Nesta seção estende-se a abordagem de jogos *fuzzy* apresentada em Amaral (AMARAL, 2007) para jogos *fuzzy* intervalares.

A matriz de recompensa *fuzzy* intervalar $\hat{\mathcal{A}}$, pode ser representada pelo par de matrizes de recompensas *fuzzy* inferior e superior, como $\hat{\mathcal{A}} = (\tilde{\mathcal{A}}^l, \tilde{\mathcal{A}}^u)$.

Um jogo *fuzzy* intervalar de soma zero com dois jogadores é denotado por duas matrizes de recompensas *fuzzy*, inferior e superior:

$$\tilde{\mathcal{A}}^l = \begin{bmatrix} \tilde{a}^l_{11} & \dots & \tilde{a}^l_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}^l_{m1} & \dots & \tilde{a}^l_{mn} \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

$$\tilde{\mathcal{A}}^u = \begin{bmatrix} \tilde{a}^u_{11} & \dots & \tilde{a}^u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}^u_{m1} & \dots & \tilde{a}^u_{mn} \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

Sendo, os elementos $\tilde{a}^l_{ij}$ da matriz $\tilde{\mathcal{A}}^l$ e $\tilde{a^u}_{ij}$ da matriz $\tilde{\mathcal{A}}^u$ números *fuzzy*.

Logo, um jogo *fuzzy* intervalar é uma extensão de um jogo *fuzzy* representado por duas matrizes de números *fuzzy*. Para esse jogo, a solução de equilíbrio é determinada pelas seguintes igualdades:

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} (x \tilde{\mathcal{A}}^l y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} (x \tilde{\mathcal{A}}^l y) \tag{4.20}$$

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} (x \tilde{\mathcal{A}}^u y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} (x \tilde{\mathcal{A}}^u y) \tag{4.21}$$

Solucionam-se as igualdades (4.20) e (4.21) através dos métodos de programação

linear *fuzzy* abaixo, os quais formam a programação linear *fuzzy* intervalar.

$$\begin{array}{ll} \min(s_1 + \cdots + s_m) & \max(r_1 + \cdots + r_n) \\ sa : \tilde{a}^l_{1j} s_1 + \cdots + \tilde{a}^l_{mj} s_m \succeq 1, j = 1, ..., n & sa : \tilde{a}^l_{i1} r_1 + \cdots + \tilde{a}^l_{in} r_n \preceq 1, i = 1, ..., m \\ s_i \succeq 0, i = 1, ..., m & r_i \succeq 0, i = 1, ..., n \end{array} \tag{4.22}$$

$$\begin{array}{ll} \min(s_1 + \cdots + s_m) & \max(r_1 + \cdots + r_n) \\ sa : \tilde{a}^u_{1j} s_1 + \cdots + \tilde{a}^u_{mj} s_m \succeq 1, j = 1, ..., n & sa : \tilde{a}^u_{i1} r_1 + \cdots + \tilde{a}^u_{in} r_n \preceq 1, i = 1, ..., m \\ s_i \succeq 0, i = 1, ..., m & r_i \succeq 0, i = 1, ..., n \end{array} \tag{4.23}$$

Assim, como em jogos *fuzzy* a dualidade em jogos *fuzzy* intervalares também não é garantida. Além disso, as equações para encontrar as recompensas esperadas, ao fim do jogo, da matriz $\tilde{A}^l$ e $\tilde{A}^u$ são:

$$\vartheta^l = x\mathcal{A}^l y \qquad \text{e} \qquad \vartheta^u = x\mathcal{A}^u y. \tag{4.24}$$

Finalmente, encontram-se os valores finais do jogo, formando um intervalo com os valores obtidos.

$$\vartheta = [\vartheta^l, \vartheta^u] \tag{4.25}$$

4.6 Considerações Finais

Apresentou-se nesse capítulo uma introdução a Teoria de Jogos com as definições de jogadores, estratégias, ações e recompensas. Ainda mais, nessa teoria abordou-se os jogos de tipo soma zero, simultâneo e não-cooperativos. Também, exemplicou-se um jogo de soma zero de dois jogadores.

Além disso, destacou-se os jogos *fuzzy* e os jogos *fuzzy* intervalares, os quais modelam incertezas presentes em dados de problemas reais. O próximo capítulo mostrará os modelos de algoritmos que resolvem os jogos já apresentados.

5 ALGORITMOS

5.1 Introdução

Esse capítulo apresenta algoritmos para solucionar jogos do tipo soma zero e não cooperativos, os quais possuem dois jogadores com objetivos opostos. Além disso, consideram-se os modelos de jogos *fuzzy* e de jogos *fuzzy* intervalares, introduzidos no capítulo anterior, cujos parâmetros do jogo são incertos. Também, através de exemplos comparam-se dois modelos de resolução de jogo *fuzzy* e dois modelos de jogos *fuzzy* intervalares.

5.2 Jogos *Fuzzy* de Soma Zero

Apresentam-se nessa seção, dois modelos para solucionar jogos *fuzzy* de soma zero, os modelos de Campos (CAMPOS, 1989) e o modelo de Campos modificado nesta dissertação para a ordem de Ezzati, que será denominado, no seguimento do texto, de modelo Campos-Ezzati.

Observa-se que, na literatura ((AMARAL, 2007),(CAMPOS, 1989)), os exemplos encontrados utilizando o modelo de Campos lidam somente com números triangulares simétricos. A utilização da ordem de Ezzati permite maior flexibilidade ao utilizar números *fuzzy* trapezoidais, simétricos ou não. Diante disso, comparam-se esses modelos realizando uma análise dos resultados obtidos.

A partir, da definição de jogos de soma zero pode-se deduzir que a soma das recompensas de dois jogadores resulta em zero, porém em jogos *fuzzy* de soma zero as recompensas somadas resultam em números *fuzzy* próximos de zero.

Ainda mais, os modelos de resolução desses jogos resultam em programações lineares, nas equações (4.15) e (4.16), as quais podem ser formuladas conforme o método

minmax seguinte:

$$\begin{array}{l} \min \sum_{i=1}^{m} s_i \\ sa : \sum_{i=1}^{m} \tilde{a}_{ij} s_i \ \succeq \ \tilde{b}, j = 1, ..., n \\ s_i \succeq 0, i \in I \end{array} \tag{5.1}$$

$$\begin{array}{l} \max \sum_{j=1}^{n} r_j \\ sa : \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} r_j \ \preceq \ \tilde{b}, i = 1, ..., m \\ r_j \succeq 0, j \in J. \end{array} \tag{5.2}$$

onde $\preceq$ e $\succeq$ são ordens *fuzzy*.

A solução de equilíbrio, encontra as soluções ótimas x^* e y^*, pela resolução das seguintes equações:

$$s_i = x_i/z, i \in I \qquad \text{e} \qquad r_j = y_j/w, j \in J. \tag{5.3}$$

5.2.1 Modelo de Campos

O modelo de Campos (CAMPOS, 1989) é um método de resolução de jogos *fuzzy* que considera *fuzzy* as desigualdades, o vetor coluna $\tilde{b}$ e a matriz de pagamentos $\tilde{A}$, da seguinte forma:

$$\tilde{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \dots & \tilde{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{m1} & \dots & \tilde{a}_{mn} \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

Diante disso, o método *minmax* de um jogo *fuzzy* de dois jogadores não cooperativos de soma zero é descrito como a seguinte programação linear *fuzzy*:

$$\begin{array}{ll} \min \sum_{i=1}^{m} s_i & \max \sum_{j=1}^{n} r_j \\ sa : \sum_{i=1}^{m} \tilde{a}_{ij} s_i \ \succeq \ \tilde{b}, j = 1, ..., n & sa : \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} r_j \ \preceq \ \tilde{b}, i = 1, ..., m \\ s_i \geq 0, i \in I & r_j \geq 0, j \in J \end{array} \tag{5.5}$$

Primeiramente, nesse método transformam-se as desigualdades *fuzzy* no conjunto convexo:

$$\tilde{a}s \geq \tilde{b} + \tilde{p}(1-\alpha) \text{ e } \tilde{a}r \leq \tilde{b} + \tilde{q}(1-\alpha), \text{ para } \alpha \in [0,1]. \tag{5.6}$$

Sendo, $\tilde{p}$ e $\tilde{q}$ números *fuzzy*, cujos valores expressam o máximo que os jogadores podem atingir submetendo-se as restrições.

Então, substituindo as desigualdades (5.6) em (5.5) a programação linear *fuzzy* torna-se:

$$\begin{array}{ll} \min \sum_{i=1}^{m} s_i & \max \sum_{j=1}^{n} r_j \\ sa : \sum_{i=1}^{m} \tilde{a}_{ij} s_i \geq \tilde{b} + \tilde{p}(1-\alpha), j = 1, ..., n & sa : \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} r_j \leq \tilde{b} + \tilde{q}(1-\alpha), i = 1, ..., m \\ s_i \geq 0, i \in I, \alpha \in [0,1] & r_j \geq 0, j \in J, \alpha \in [0,1] \end{array} \tag{5.7}$$

Os números *fuzzy* presentes em (5.7) são ordenados conforme os métodos, abaixo:

$$a_i x \leq b_i + h_i(1-\alpha); \tag{5.8}$$

$$[a_1 i + a_2 i + a_i]x \leq [b_1 i + b_2 i + b_i] + [h_1 i + h_2 i + h_i](1-\alpha). \tag{5.9}$$

Desse modo, as matrizes *fuzzy* tornam-se matrizes clássicas após o uso dos métodos de ordenação. Portanto, a resolução desse método iniciou-se por uma programação linear *fuzzy* e finalizou-se em uma programação linear clássica.

Para, o jogador I conforme o método 5.8 obtém-se a programação linear:

$$\begin{array}{l} \min \sum_{i=1}^{m} s_i \\ sa : \sum_{i=1}^{m} a_i s_i \geq b_i + h_i(1-\alpha), j = 1, ..., n \\ s_i \geq 0, i \in I, \alpha \in [0,1] \end{array} \tag{5.10}$$

e para o jogador II:

$$\begin{array}{l} \max \sum_{j=1}^{n} r_j \\ sa : \sum_{j=1}^{n} a_i r_j \leq b_i + h_i(1-\alpha), i = 1, ..., m \\ r_j \geq 0, j \in J, \alpha \in [0,1] \end{array} \tag{5.11}$$

Por outro lado, o método 5.9 para o jogador I obtém-se a programação linear:

$$\begin{array}{l} \max \sum_{j=1}^{n} r_j \\ sa : \sum_{j=1}^{n} [a_1 i + a_2 i + a_i] r_j \leq [b_1 i + b_2 i + b_i] + [h_1 i + h_2 i + h_i](1-\alpha), i = 1, ..., m \\ r_j \geq 0, j \in J, \alpha \in [0,1] \end{array} \tag{5.12}$$

e para o jogador II:

$$\begin{aligned}
&\min \textstyle\sum_{i=1}^{m} s_i \\
&sa : \textstyle\sum_{i=1}^{m} [a_1 i + a_2 i + a_i] s_i \geq [b_1 i + b_2 i + b_i] + [h_1 i + h_2 i + h_i](1-\alpha), j = 1, ..., n \\
&s_i \geq 0, i \in I, \alpha \in [0,1]
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Logo, resulta em uma programação linear clássica, a qual encontra as estratégias ótimas x^* e y^*, conforme as equações:

$$x^* = s \times z \text{ e } y^* = r \times w. \tag{5.14}$$

Por fim, o valor final do jogo é calculado como:

$$\vartheta = x^* \mathcal{A} y^*. \tag{5.15}$$

Resume-se o algoritmo do modelo de Campos (CAMPOS, 1989) na seguinte ordem:

1. atribuir valores para $\alpha, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{b}, \tilde{p}$ e $\tilde{q}$;

2. escolher o método de ordenação;

3. transformar em programação linear clássica;

4. encontrar estratégias ótimas;

5. calcular o valor final do jogo.

5.2.2 Modelo de Campos-Ezzati

Esse modelo atribui termos *fuzzy* à matriz de pagamentos $\mathcal{A}$, ao termo independente b e às restrições $\leq$ e $\geq$. Então, como no modelo de Campos, a matriz *fuzzy* e a programação linear *fuzzy* são denotados:

$$\tilde{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \dots & \tilde{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{m1} & \dots & \tilde{a}_{mn} \end{bmatrix} \tag{5.16}$$

$$\begin{array}{ll} \min \sum_{i=1}^{m} s_i & \max \sum_{j=1}^{n} r_j \\ sa: \sum_{i=1}^{m} \tilde{a}_{ij} s_i \ \succeq \ \tilde{b}, j = 1, ..., n & sa: \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} r_j \ \preceq \ \tilde{b}, i = 1, ..., m \\ s_i \geq 0, i \in I & r_j \geq 0, j \in J \end{array} \tag{5.17}$$

Substituindo as restrições *fuzzy* em (5.17), por desigualdades não *fuzzy*:

$$\begin{array}{ll} \min \sum_{i=1}^{m} s_i & \max \sum_{j=1}^{n} r_j \\ sa: \sum_{i=1}^{m} \tilde{a}_{ij} s_i \geq \tilde{b} + \tilde{p}(1-\alpha), j = 1, ..., n & sa: \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} r_j \leq \tilde{b} + \tilde{q}(1-\alpha), i = 1, ..., m \\ s_i \geq 0, i \in I, \alpha \in [0,1] & r_j \geq 0, j \in J, \alpha \in [0,1] \end{array} \tag{5.18}$$

Diante disso, considera-se o método de ordenação de Ezzati (EZZATI et al., 2012) aplicado ao modelo de Campos (CAMPOS, 1989). Assim, a matriz inicial $\tilde{\mathcal{A}}$ é adaptada para a matriz $R(\tilde{\mathcal{A}}, \delta)$:

$$R(\tilde{\mathcal{A}}, \delta) = \begin{bmatrix} R(\tilde{a}_{11}, \delta) & \dots & R(\tilde{a}_{1n}, \delta) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R(\tilde{a}_{m1}, \delta) & \dots & R(\tilde{a}_{mn}, \delta) \end{bmatrix} \tag{5.19}$$

Os elementos dessa matriz são representados pela equação:

$$R(\tilde{a}_{ij}, \delta) = Mag(\tilde{a}_{ij}) + \delta Mag'(\tilde{a}_{ij}). \tag{5.20}$$

Então, substituindo a equação (5.20) em (5.19) a matriz $R(\tilde{\mathcal{A}}, \delta)$ torna-se:

$$R(\tilde{\mathcal{A}}, \delta) = \begin{bmatrix} Mag(\tilde{a}_{11}) + \delta Mag'(\tilde{a}_{11}) & \dots & Mag(\tilde{a}_{1n}) + \delta Mag'(\tilde{a}_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Mag(\tilde{a}_{m1}) + \delta Mag'(\tilde{a}_{m1}) & \dots & Mag(\tilde{a}_{mn}) + \delta Mag'(\tilde{a}_{mn}) \end{bmatrix} \tag{5.21}$$

Onde, os termos $Mag(\tilde{a}_{ij})$ e $Mag'(\tilde{a}_{ij})$ são calculados em (2.22) e (2.23). Também, pode-se representar a matriz (5.21) como:

$$R(\tilde{\mathcal{A}}, \delta) = Mag(\tilde{\mathcal{A}}) + \delta Mag'(\tilde{\mathcal{A}}). \tag{5.22}$$

Para,

$$Mag(\tilde{\mathcal{A}}) = \begin{bmatrix} Mag(\tilde{a}_{11}) & \dots & Mag(\tilde{a}_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Mag(\tilde{a}_{m1}) & \dots & Mag(\tilde{a}_{mn}) \end{bmatrix} \tag{5.23}$$

e

$$Mag'(\tilde{\mathcal{A}}) = \begin{bmatrix} Mag'(\tilde{a}_{11}) & \dots & Mag'(\tilde{a}_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Mag'(\tilde{a}_{m1}) & \dots & Mag'(\tilde{a}_{mn}) \end{bmatrix}. \tag{5.24}$$

Sendo, $\delta = 0$ quando os elementos $Mag(\tilde{a}_{ij})$ são diferentes e caso houver uma igualdade nos elementos $Mag(\tilde{a}_{ij})$ considera-se $\delta = 1$.

Dessa forma, definiu-se uma nova matriz de pagamentos iniciais para resolver problemas tomada de decisões. Assim, o método de ordenação para esse modelo é denotado:

$$R(\tilde{a}_i, \delta)x \leq R(\tilde{b}_i, \delta) + R(\tilde{h}_i, \delta)(1 - \alpha) \tag{5.25}$$

Conforme, o método acima representam-se a programação linear clássica para o jogador I e II, respectivamente:

$$\begin{aligned} &\min \textstyle\sum_{i=1}^{m} s_i \\ &sa : \textstyle\sum_{i=1}^{m} R(\tilde{a}_i, \delta)s_i \geq R(\tilde{b}_i, \delta) + R(\tilde{h}_i, \delta)(1 - \alpha), j = 1, ..., n \\ &s_i \geq 0, i \in I, \alpha \in [0, 1] \end{aligned} \tag{5.26}$$

e

$$\begin{aligned} &\max \textstyle\sum_{j=1}^{n} r_j \\ &sa : \textstyle\sum_{j=1}^{n} R(\tilde{a}_i, \delta)r_j \leq R(\tilde{b}_i, \delta) + R(\tilde{h}_i, \delta)(1 - \alpha), i = 1, ..., m \\ &r_j \geq 0, j \in J, \alpha \in [0, 1]. \end{aligned} \tag{5.27}$$

Assim, como em jogos clássicos as soluções ótimas são obtidas:

$$x^* = s \times z \text{ e } y^* = r \times w. \tag{5.28}$$

Logo, a recompensa esperada ao final do jogo é calculada:

$$\vartheta = x^* R(\tilde{\mathcal{A}}, \delta) y^*. \tag{5.29}$$

O algoritmo do modelo de Campos-Ezzati é resumido da seguinte forma:

1. atribuir valores para $\alpha, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{b}, \tilde{p}$ e $\tilde{q}$;
2. calcular a matriz $R(\tilde{\mathcal{A}}, \delta)$
3. utilizar o método de ordenação de Ezzati (5.25);
4. transformar em programação linear clássica;
5. encontrar estratégias ótimas;
6. calcular o valor final do jogo.

5.2.3 Exemplos

Exemplo 8 *Nesse exemplo de jogo fuzzy de soma zero, utilizam-se os modelos de Campos e Campos-Ezzati na resolução. Primeiramente, atribuem-se valores para a matriz de pagamentos $\mathcal{A}$:*

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 180 & 156 & 90 \\ 90 & 180 & 155 \\ 180 & 156 & 177 \end{bmatrix} \tag{5.30}$$

Em seguida, estipulam-se valores para as matrizes de dispersão à direita e à esquerda, respectivamente:

$$\mathcal{A}_1 = \begin{bmatrix} 179 & 155 & 89 \\ 87 & 177 & 150 \\ 179 & 154 & 174 \end{bmatrix} \tag{5.31}$$

$$\mathcal{A}_2 = \begin{bmatrix} 180 & 160 & 91 \\ 91 & 181 & 160 \\ 181 & 158 & 180 \end{bmatrix} \tag{5.32}$$

A partir, das matrizes $\mathcal{A}$ (5.30), $\mathcal{A}_1$ (5.31) e $\mathcal{A}_2$ (5.32) origina-se a seguinte matriz fuzzy:

$$\tilde{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} (180,1,0) & (156,1,4) & (90,1,1) \\ (90,3,1) & (180,3,1) & (155,5,5) \\ (180,1,1) & (156,2,2) & (177,3,3) \end{bmatrix}$$

Para o modelo de Campos, consideram-se o termo independente $\tilde{b} = (1,0,0)$ e o método de ordenação 5.8.

Assim, a programação linear desse modelo para o jogador I, adotando o parâmetro $\tilde{p} = (0.10, 0.02, 0.01)$*, é denotada*

$$\begin{aligned}
&\min(s_1 + s_2 + s_3) \\
&sa : 180s_1 + 90s_2 + 180s_3 \geq 0.9 \\
&156s_1 + 180s_2 + 156s_3 \geq 0.9 \\
&90s_1 + 155s_2 + 177s_3 \geq 0.9 \\
&s_1, s_2, s_3 \geq 0.
\end{aligned} \tag{5.33}$$

Por outro lado, para o jogador II é estipulado $\tilde{q} = (0.15, 0.01, 0.02)$*, então*

$$\begin{aligned}
&\max(r_1 + r_2 + r_3) \\
&sa : 180r_1 + 156r_2 + 90r_3 \leq 1.15 \\
&90r_1 + 180r_2 + 155r_3 \leq 1.15 \\
&180r_1 + 156r_2 + 177r_3 \leq 1.15 \\
&r_1, r_2, r_3 \geq 0.
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Logo, resolvendo essa programação linear clássica, para o modelo de Campos, obtém-se as soluções ótimas e o valor do jogo apresentados na Tabela 5.1.

Tabela 5.1: Resultados do modelo de Campos com números *fuzzy* diferentes

x^*	y^*	ϑ
(0.1301, 0.2104, 0.6594)	(0.2104, 0.7893, 0.0000)	161.0026

O modelo de Campos-Ezzati é determinado pela matriz $R(\tilde{\mathcal{A}}, \delta)$ *(5.21), através dos cálculos dos elementos* $Mag(\tilde{a}_{ij})$ *e* $Mag'(\tilde{a}_{ij})$*. Então, calcula-se*

$$Mag\tilde{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 179.91 & 156.25 & 90 \\ 89.83 & 179.83 & 155 \\ 180 & 156 & 177 \end{bmatrix}.$$

Porém, como os valores das magnitudes são diferentes , δ *será igual a zero pela regra desse modelo. Diante disso, não há necessidade de calcular a matriz* $Mag'(\tilde{\mathcal{A}})$*.*

Nesse exemplo, $Mag(\tilde{b}) = 1$ *e* $Mag(\tilde{p}) = 0.0991$*, considerando o jogador I temos:*

$$
\begin{aligned}
&\min(s_1 + s_2 + s_3) \\
&sa : 179.91s_1 + 89.83s_2 + 180s_3 \geq 0.9009 \\
&156.25s_1 + 179.83s_2 + 156s_3 \geq 0.9009 \\
&90s_1 + 155s_2 + 177s_3 \geq 0.9009 \\
&s_1, s_2, s_3 \geq 0.
\end{aligned} \tag{5.35}
$$

Por outro lado, para o jogador II temos que $Mag(\tilde{q}) = 0.1508$*, então*

$$
\begin{aligned}
&\max(r_1 + r_2 + r_3) \\
&sa : 179.91r_1 + 156.25r_2 + 90r_3 \leq 1.1508 \\
&89.83r_1 + 179.83r_2 + 155r_3 \leq 1.1508 \\
&180r_1 + 156r_2 + 177r_3 \leq 1.1508 \\
&r_1, r_2, r_3 \geq 0.
\end{aligned} \tag{5.36}
$$

Tabela 5.2: Resultados do modelo de Campos-Ezzati com números *fuzzy* diferentes

x^*	y^*	ϑ
(0.1303, 0.2102, 0.6596)	(0.2082, 0.7896, 0.0020)	161.0241

Exemplo 9 *Seja a matriz de pagamentos* $\tilde{\mathcal{A}}$ *exemplificada a seguir:*

$$
\tilde{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} (180,1,0) & (156,1,4) & (90,1,1) \\ (90,3,1) & (180,1,0) & (156,1,4) \\ (180,1,1) & (156,2,2) & (177,3,3) \end{bmatrix} \tag{5.37}
$$

Onde, dois números fuzzy triangulares, elementos da matriz, são idênticos, o que implica na igualdade das magnitudes. Então, pelo método de Ezzati δ *terá valor um e calculam-se as matrizes* $Mag(\tilde{\mathcal{A}})$ *e* $Mag'(\tilde{\mathcal{A}})$*.*

$$
Mag\tilde{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 179.91 & 156.25 & 90 \\ 89.83 & 179.91 & 156.25 \\ 180 & 156 & 177 \end{bmatrix}
$$

$$
Mag'\tilde{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 0.5 & 2.5 & 1 \\ 2 & 0.5 & 2.5 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Assim,

$$R(\tilde{\mathcal{A}}, \delta) = Mag\tilde{\mathcal{A}} + Mag'(\tilde{\mathcal{A}}) = \begin{bmatrix} 180.41 & 158.75 & 91 \\ 91.83 & 180.41 & 158.75 \\ 182 & 156 & 178 \end{bmatrix}$$

A programação linear desse exemplo de jogo fuzzy de soma zero considera $Mag'\tilde{b} = 0$*,* $Mag'\tilde{p} = -0.015$ *e* $Mag'\tilde{q} = 0.015$*. Diante disso, para o jogador I temos:*

$$\begin{aligned} &\min(s_1 + s_2 + s_3) \\ &sa : 180.41s_1 + 91.83s_2 + 182s_3 \geq 0.8859 \\ &158.75s_1 + 180.41s_2 + 156s_3 \geq 0.8859 \\ &91s_1 + 158.75s_2 + 178s_3 \geq 0.8859 \\ &s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned} \tag{5.38}$$

e para o jogador II

$$\begin{aligned} &\max(r_1 + r_2 + r_3) \\ &sa : 180.41r_1 + 158.75r_2 + 91r_3 \leq 1.1658 \\ &91.83r_1 + 180.41r_2 + 158.75r_3 \leq 1.1658 \\ &182r_1 + 156r_2 + 178r_3 \leq 1.1658 \\ &r_1, r_2, r_3 \geq 0. \end{aligned} \tag{5.39}$$

Logo, resolve-se o método minmax e obtém-se os resultados mostrados na Tabela 5.3.

Tabela 5.3: Resultados do modelo de Campos-Ezzati com números *fuzzy* iguais

x^*	y^*	ϑ
(0.1373, 0.2216, 0.6409)	(0.2051, 0.7740, 0.0206)	161.7087

Pelo método de Campos, a matriz de pagamentos $\tilde{\mathcal{A}}$ *em (5.37), é substituída pela seguinte matriz* $\mathcal{A}$*:*

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 180 & 156 & 90 \\ 90 & 180 & 156 \\ 180 & 156 & 177 \end{bmatrix}.$$

Considerando os elementos $b_i = 1$ *e* $p_i = 0.10$*, então* $b_i - p_i = 0.9$ *para* $i \in I = \{1, 2, 3\}$*. Assim, para o jogador I temos a programação linear:*

$$
\begin{aligned}
&\min(s_1 + s_2 + s_3) \\
&sa : 180s_1 + 90s_2 + 180s_3 \geq 0.9 \\
&156s_1 + 180s_2 + 156s_3 \geq 0.9 \\
&90s_1 + 156s_2 + 177s_3 \geq 0.9 \\
&s_1, s_2, s_3 \geq 0.
\end{aligned} \tag{5.40}
$$

Por outro lado, a programação linear para o jogador II com $b_i + q_i = 1.15$*, pois* $q_i = 0.15$*, fica:*

$$
\begin{aligned}
&\max(r_1 + r_2 + r_3) \\
&sa : 180r_1 + 156r_2 + 90r_3 \leq 1.15 \\
&90r_1 + 180r_2 + 156r_3 \leq 1.15 \\
&180r_1 + 156r_2 + 177r_3 \leq 1.15 \\
&r_1, r_2, r_3 \geq 0.
\end{aligned} \tag{5.41}
$$

Portanto, as soluções obtidas resolvendo o método minmax são representadas na Tabela 5.4.

Tabela 5.4: Resultados do modelo de Campos com números *fuzzy* iguais

x^*	y^*	ϑ
(0.1324, 0.2104, 0.6569)	(0.2104, 0.7893, 0.0000)	160.9560

Exemplo 10 *O último exemplo dessa seção considera números fuzzy trapezoidais na matriz de recompensas* $\tilde{\mathcal{A}}$*, como:*

$$
\tilde{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} (179, 180, 1, 1) & (156, 158, 1, 4) & (89, 90, 1, 1) \\ (87, 90, 3, 1) & (178, 180, 1, 2) & (155, 156, 1, 4) \\ (180, 182, 1, 1) & (156, 158, 2, 2) & (177, 178, 3, 3) \end{bmatrix}. \tag{5.42}
$$

Analisando essa matriz, verifica-se que os números são diferentes. Então, calcula-se a seguinte matriz $Mag(\tilde{\mathcal{A}})$, pelo método de Ezzati:

$$
Mag(\tilde{\mathcal{A}}) = \begin{bmatrix} 179.5 & 157.25 & 89.5 \\ 88.33 & 179.08 & 155.75 \\ 181 & 157 & 177.2 \end{bmatrix}. \tag{5.43}
$$

Assim, para o jogador I com $Mag(\tilde{p}) = 0.0991$, a programação linear é denotada:

$$
\begin{aligned}
&\min(s_1 + s_2 + s_3) \\
&sa : 179.5s_1 + 88.33s_2 + 181s_3 \geq 0.9009 \\
&157.25s_1 + 179.08s_2 + 157s_3 \geq 0.9009 \\
&89.5s_1 + 155.75s_2 + 177.2s_3 \geq 0.9009 \\
&s_1, s_2, s_3 \geq 0
\end{aligned} \tag{5.44}
$$

e para o jogador II, com $Mag(\tilde{q}) = 0.1508$:

$$
\begin{aligned}
&\max(r_1 + r_2 + r_3) \\
&sa : 179.5r_1 + 157.25r_2 + 89.5r_3 \leq 1.1508 \\
&88.33r_1 + 179.08r_2 + 155.75r_3 \leq 1.1508 \\
&181r_1 + 157r_2 + 177.2r_3 \leq 1.1508 \\
&r_1, r_2, r_3 \geq 0.
\end{aligned} \tag{5.45}
$$

Portanto, resolve-se essa programação linear e obtém-se os dados apresentados na Tabela 5.5.

Tabela 5.5: Resultados do modelo de Campos-Ezzati com números *fuzzy* trapezoidais

x^*	y^*	ϑ
(0.0000, 0.2091, 0.7908)	(0.1929, 0.8081, 0.0000)	161.7635

5.2.4 Análise dos modelos

Os modelos para solucionar jogos *fuzzy* de soma zero de dois jogadores transformam as programações lineares *fuzzy* em programações lineares.

Dessa forma, o modelo de Campos inicia com uma matriz *fuzzy*, mas após utilizar os métodos de ordenação de números *fuzzy*, finaliza com uma matriz clássica. Aliás, esse modelo trabalha com números *fuzzy* triangulares e com parâmetros de violação máxima.

Outro modelo estudado, o modelo de Campos-Ezzati, pode considerar números *fuzzy* triangulares ou trapezodais. Também, trabalha com as magnitudes e derivada das magnitudes, ou seja, com números reais.

A partir, dos modelos de Campos e Campos-Ezzati os resultados obtidos convergiram em todos os exemplos para soluções ótimas e valores de jogo semelhantes.

5.3 Jogos *Fuzzy* Intervalares de Soma Zero

Assim, como em jogos *fuzzy* de soma zero, os jogos *fuzzy* intervalares de soma zero não tem garantia que a soma das recompensas resultem em zero, mas pode-se afirmar que os números *fuzzy* obtidos são próximos de zero.

Os modelos para solucionar jogos *fuzzy* intervalares de soma zero introduzidos nesta dissertação são: o modelo de Campos Intervalar (uma extensão do modelo de Campos para a abordagem *fuzzy* intervalar) e o modelo proposto, denominado de modelo de Loi-Dimuro-Machado no restante do texto. A partir da utilização desses modelos, haverá uma análise dos resultados.

Seja $\hat{\mathcal{A}} = (\tilde{\mathcal{A}}^l, \tilde{\mathcal{A}}^u)$ uma matriz *fuzzy* intervalar formada por um par de matrizes *fuzzy*, então

$$\tilde{\mathcal{A}}^l = \begin{bmatrix} \tilde{a}^l_{11} & \dots & \tilde{a}^l_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}^l_{m1} & \dots & \tilde{a}^l_{mn} \end{bmatrix} \tag{5.46}$$

$$\tilde{\mathcal{A}}^u = \begin{bmatrix} \tilde{a}^u_{11} & \dots & \tilde{a}^u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}^u_{m1} & \dots & \tilde{a}^u_{mn} \end{bmatrix} \tag{5.47}$$

Nesses jogos, consideram-se para $\tilde{\mathcal{A}}^l$ as seguintes programações lineares:

$$\begin{array}{l} \min \sum_{i=1}^{m} s_i \\ sa : \sum_{i=1}^{m} \tilde{a}^l_{ij} s_i \ \succeq \ \tilde{b}^l, j = 1, ..., n \\ s_i \geq 0, i = 1 \in I \end{array} \tag{5.48}$$

$$\begin{array}{l} \max \sum_{j=1}^{n} r_j \\ sa : \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}^l_{ij} r_j \ \preceq \ \tilde{b}^l, i = 1, ..., m \\ r_j \geq 0, j = 1 \in J \end{array} \tag{5.49}$$

e para $\tilde{\mathcal{A}}^u$

$$\begin{array}{l} \min \sum_{i=1}^{m} s_i \\ sa : \sum_{i=1}^{m} \tilde{a}^u_{ij} s_i \ \succeq \ \tilde{b}^u, j = 1, ..., n \\ s_i \geq 0, i = 1 \in I \end{array} \tag{5.50}$$

$$\begin{array}{l} \max \sum_{j=1}^{n} r_j \\ sa : \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}^{u} r_j \ \preceq \ \tilde{b}^u, i = 1, ..., m \\ r_j \geq 0, j = 1 \in J. \end{array} \tag{5.51}$$

Sendo, as desigualdades *fuzzy* $\preceq$ e $\succeq$.

5.3.1 Modelo de Campos Intervalar

Diante, das programações lineares *fuzzy* (5.48), (5.49), (5.50) e (5.51), determinam-se o método *minmax* do modelo de Campos Intervalar para $\tilde{\mathcal{A}}^l$ e $\tilde{\mathcal{A}}^u$, respectivamente:

$$\begin{array}{ll} \min \sum_{i=1}^{m} s_i & \max \sum_{j=1}^{n} r_j \\ sa : \sum_{i=1}^{m} \tilde{a}_{ij}^{l} s_i \geq \tilde{b}^l + \tilde{p}^l(1-\alpha), j = 1, ..., n & sa : \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}^{l} r_j \leq \tilde{b}^l + \tilde{q}^l(1-\alpha), i = 1, ..., m \\ s_i \geq 0, i \in I, \alpha \in [0,1] & r_j \geq 0, j \in J, \alpha \in [0,1] \end{array} \tag{5.52}$$

$$\begin{array}{ll} \min \sum_{i=1}^{m} s_i & \max \sum_{j=1}^{n} r_j \\ sa : \sum_{i=1}^{m} \tilde{a}_{ij}^{u} s_i \geq \tilde{b}^u + \tilde{p}^u(1-\alpha), j = 1, ..., n & sa : \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}^{u} r_j \leq \tilde{b}^u + \tilde{q}^u(1-\alpha), i = 1, ..., m \\ s_i \geq 0, i \in I, \alpha \in [0,1] & r_j \geq 0, j \in J, \alpha \in [0,1] \end{array} \tag{5.53}$$

Então, conforme o método a) do modelo de Campos obtém-se as programações lineares para o jogador I:

$$\begin{array}{l} \min \sum_{i=1}^{m} s_i \\ sa : \sum_{i=1}^{m} a_i^l s_i \geq b_i^l + h_i^l(1-\alpha), j = 1, ..., n \\ s_i \geq 0, i \in I, \alpha \in [0,1] \end{array} \tag{5.54}$$

$$\begin{array}{l} \min \sum_{i=1}^{m} s_i \\ sa : \sum_{i=1}^{m} a_i^u s_i \geq b_i^u + h_i^u(1-\alpha), j = 1, ..., n \\ s_i \geq 0, i \in I, \alpha \in [0,1] \end{array} \tag{5.55}$$

e para o jogador II:

$$\begin{array}{l} \max \sum_{j=1}^{n} r_j \\ sa : \sum_{j=1}^{n} a_i^l r_j \leq b_i^l + h_i^l(1-\alpha), i = 1, ..., m \\ r_j \geq 0, j \in J, \alpha \in [0,1]. \end{array} \tag{5.56}$$

$$\begin{aligned}
&\max \textstyle\sum_{j=1}^{n} r_j \\
&sa : \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_i^u r_j \leq b_i^u + h_i^u(1-\alpha), i = 1, ..., m \\
&r_j \geq 0, j \in J, \alpha \in [0,1].
\end{aligned} \tag{5.57}$$

A partir, dessas programações lineares resultam-se as soluções ótimas:

$$x^{l^*} = s^l \times z^l \text{ e } y^{l^*} = r^l \times w^l \tag{5.58}$$

$$x^{u*} = s^u \times z^u \text{ e } y^{u*} = r^u \times w^u. \tag{5.59}$$

Por fim, calculam-se os valores finais do jogo, inferior e superior:

$$\vartheta^l = x^{l^*} \mathcal{A}^l y^{l^*} \text{ e } \vartheta^u = x^{u*} \mathcal{A}^u y^{u*}. \tag{5.60}$$

Logo, forma-se o seguinte intervalo de solução final do jogo:

- Se $\vartheta^l \leq \vartheta^u$, então $\vartheta = [\vartheta^l, \vartheta^u]$;
- Se $\vartheta^l \geq \vartheta^u$, então $\vartheta = [\vartheta^u, \vartheta^l]$.

Resume-se o algoritmo do modelo de Campos Intervalar na seguinte ordem:

1. atribuir valores para α, $\tilde{\mathcal{A}}^l$, $\tilde{\mathcal{A}}^u$, $\tilde{b}^l$, $\tilde{b}^u$, $\tilde{p}^l$, $\tilde{p}^u$, $\tilde{q}^l$ e $\tilde{q}^u$;
2. escolher o método de ordenação;
3. transformar em programação linear clássica;
4. encontrar estratégias ótimas;
5. calcular o valor final do jogo.

5.3.2 Modelo de Loi-Dimuro-Machado

Primeiramente, para desenvolver o modelo de Loi-Dimuro-Machado, determinam-se as matrizes de $R(\tilde{\mathcal{A}}^l, \delta)$ e $R(\tilde{\mathcal{A}}^u, \delta)$, as quais serão utilizadas no método de ordenação desse modelo (BRIãO; DIMURO, 2012). Então,

$$R(\tilde{\mathcal{A}}^l, \delta) = \begin{bmatrix} R(\tilde{a}_{11}^l, \delta) & \dots & R(\tilde{a}_{1n}^l, \delta) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R(\tilde{a}_{m1}^l, \delta) & \dots & R(\tilde{a}_{mn}^l, \delta) \end{bmatrix} \tag{5.61}$$

e

$$R(\tilde{\mathcal{A}}^u, \delta) = \begin{bmatrix} R(\tilde{a}^u_{11}, \delta) & \dots & R(\tilde{a}^u_{1n}, \delta) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R(\tilde{a}^u_{m1}, \delta) & \dots & R(\tilde{a}^u_{mn}, \delta) \end{bmatrix}. \tag{5.62}$$

Onde, essas matrizes possuem as seguintes fórmulas:

$$R(\tilde{\mathcal{A}}^l, \delta) = Mag(\tilde{\mathcal{A}}^l) + \delta Mag'(\tilde{\mathcal{A}}^l) \tag{5.63}$$

e

$$R(\tilde{\mathcal{A}}^u, \delta) = Mag(\tilde{\mathcal{A}}^u) + \delta Mag'(\tilde{\mathcal{A}}^u). \tag{5.64}$$

Dessa forma, caso os elementos de cada matriz $Mag(\tilde{\mathcal{A}}^l)$ e $Mag(\tilde{\mathcal{A}}^u)$ forem todos diferentes considera-se $\delta = 0$, caso contrário, $\delta = 1$. Diante disso, pode-se definir o método de ordenação, para $\tilde{\mathcal{A}}^l$ e $\tilde{\mathcal{A}}^u$, através das desigualdades, abaixo:

$$R(\tilde{a}^l_i, \delta)x \leq R(\tilde{b}^l_i, \delta) + R(\tilde{h}^l_i, \delta)(1 - \alpha) \tag{5.65}$$

e

$$R(\tilde{a}^u_i, \delta)x \leq R(\tilde{b}^u_i, \delta) + R(\tilde{h}^u_i, \delta)(1 - \alpha). \tag{5.66}$$

Pela restrição (5.65), as programações lineares de $\tilde{\mathcal{A}}^l$ tornam-se:

$$\begin{aligned} &\min \textstyle\sum_{i=1}^m s_i \\ &sa : \textstyle\sum_{i=1}^m R(\tilde{a}^l_i, \delta)s_i \geq R(\tilde{b}^l_i, \delta) + R(\tilde{h}^l_i, \delta)(1 - \alpha), j = 1, ..., n \\ &s_i \geq 0, i \in I, \alpha \in [0, 1] \end{aligned} \tag{5.67}$$

e

$$\begin{aligned} &\max \textstyle\sum_{j=1}^n r_j \\ &sa : \textstyle\sum_{j=1}^n R(\tilde{a}^l_i, \delta)r_j \leq R(\tilde{b}^l_i, \delta) + R(\tilde{h}^l_i, \delta)(1 - \alpha), i = 1, ..., m \\ &r_j \geq 0, j \in J, \alpha \in [0, 1]. \end{aligned} \tag{5.68}$$

Por outro lado, pela restrição (5.66) as programações lineares de $\tilde{\mathcal{A}}^u$ ficam:

$$\begin{aligned} &\min \textstyle\sum_{i=1}^m s_i \\ &sa : \textstyle\sum_{i=1}^m R(\tilde{a}^u_i, \delta)s_i \geq R(\tilde{b}^u_i, \delta) + R(\tilde{h}^u_i, \delta)(1 - \alpha), j = 1, ..., n \\ &s_i \geq 0, i \in I, \alpha \in [0, 1] \end{aligned} \tag{5.69}$$

e

$$\begin{aligned}
&\max \textstyle\sum_{j=1}^{n} r_j \\
&sa : \textstyle\sum_{j=1}^{n} R(\tilde{a}_i^u, \delta) r_j \leq R(\tilde{b}_i^u, \delta) + R(\tilde{h}_i^u, \delta)(1-\alpha), i = 1, ..., m \\
&r_j \geq 0, j \in J, \alpha \in [0, 1].
\end{aligned} \tag{5.70}$$

Assim, resolvendo-se essas programações lineares, obtém-se as soluções ótimas pelas seguintes fórmulas:

$$x^{l^*} = s^l \times z^l \text{ e } y^{l^*} = r^l \times w^l \tag{5.71}$$

$$x^{u*} = s^u \times z^u \text{ e } y^{u*} = r^u \times w^u. \tag{5.72}$$

A partir, dos resultados das soluções ótimas pode-se obter os valores finais do jogo ϑ^l e ϑ^u, respectivamente:

$$\vartheta^l = x^{l^*} \mathcal{A}^l y^{l^*} \text{ e } \vartheta^u = x^{u*} \mathcal{A}^u y^{u*}. \tag{5.73}$$

Por fim, resulta-se em um intervalo de recompensa esperada do jogo, a seguir:

- Se $\vartheta^l \leq \vartheta^u$ então $\vartheta = [\vartheta^l, \vartheta^u]$;
- Se $\vartheta^l \geq \vartheta^u$ então $\vartheta = [\vartheta^u, \vartheta^l]$.

O algoritmo do modelo de Loi-Dimuro-Machado pode-se resumir da seguinte forma:

1. atribuir valores para $\alpha, \tilde{\mathcal{A}}^l, \tilde{\mathcal{A}}^u, \tilde{b}^l, \tilde{b}^u, \tilde{p}^l, \tilde{p}^u, \tilde{q}^l$ e $\tilde{q}^u$;
2. calcular as matrizes $R(\tilde{\mathcal{A}}^l, \delta)$ e $R(\tilde{\mathcal{A}}^u, \delta)$;
3. utilizar os métodos de ordenação (5.65) e (5.66);
4. transformar em programação linear clássica;
5. encontrar estratégias ótimas;
6. calcular o valor final do jogo.

5.3.3 Exemplos

Exemplo 11 *Para o modelo de Campos Intervalar exemplificam-se as seguintes matrizes $\tilde{\mathcal{A}}^l$ e $\tilde{\mathcal{A}}^u$:*

$$\tilde{\mathcal{A}}^l = \begin{bmatrix} (180, 0.5, 0) & (156, 0.5, 2) & (90, 0.5, 0.5) \\ (90, 1, 0.5) & (180, 2, 0.5) & (155, 4, 4) \\ (180, 0.5, 0.5) & (156, 1, 1) & (177, 2, 2) \end{bmatrix} \tag{5.74}$$

$$\tilde{\mathcal{A}}^u = \begin{bmatrix} (180, 2, 0) & (156, 2, 5) & (90, 2, 2) \\ (90, 4, 2) & (180, 4, 2) & (155, 6, 6) \\ (180, 2, 2) & (156, 3, 3) & (177, 4, 4) \end{bmatrix}. \tag{5.75}$$

Mais ainda, determinam-se os termos independentes e os parâmetros de violação máxima, inferiores e superiores, respectivamente:

$$\tilde{b}^l = (1, 0, 0), \tilde{b}^u = (1, 1, 1) \tag{5.76}$$

e

$$\tilde{p}^l = (0.10, 0.01, 0.005), \tilde{p}^u = (0.10, 0.03, 0.02), \tilde{q}^l = (0.15, 0.005, 0.01), \tilde{q}^u = (0.10, 0.02, 0.03). \tag{5.77}$$

Pelo método de ordenação a) do modelo de Campos $\mathcal{A}^u = \mathcal{A}^l$, $b^u = b^l$, $p^u = p^l$ e $q^u = q^l$. Diante disso, as programações lineares, inferior e superior, são iguais, como:

$$\begin{aligned} &\min(s_1 + s_2 + s_3) \\ &sa : 180s_1 + 90s_2 + 180s_3 \geq 0.9 \\ &156s_1 + 180s_2 + 156s_3 \geq 0.9 \\ &90s_1 + 155s_2 + 177s_3 \geq 0.9 \\ &s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned} \tag{5.78}$$

e

$$\begin{aligned} &\max(r_1 + r_2 + r_3) \\ &sa : 180r_1 + 156r_2 + 90r_3 \leq 1.15 \\ &90r_1 + 180r_2 + 155r_3 \leq 1.15 \\ &180r_1 + 156r_2 + 177r_3 \leq 1.15 \\ &r_1, r_2, r_3 \geq 0. \end{aligned} \tag{5.79}$$

Então, resolvendo o método minmax obtém-se os resultados apresentados nas Tabelas 5.6 e 5.7.

Tabela 5.6: Resultados do modelo de Campos Intervalar para $\tilde{\mathcal{A}}^l$

x^{l^*}	y^{l^*}	ϑ^l
(0.1301, 0.2104, 0.6594)	(0.2104, 0.7893, 0.0000)	161.0026

Tabela 5.7: Resultados do modelo de Campos Intervalar para $\tilde{\mathcal{A}}^u$

x^{u^*}	y^{u^*}	ϑ^u
(0.1301, 0.2104, 0.6594)	(0.2104, 0.7893, 0.0000)	161.0026

Logo, a solução final desse jogo é o intervalo:

$$\vartheta = [161.0026, 161.0026] \rightarrow \vartheta = 161.0026. \tag{5.80}$$

Por outro lado, o modelo Loi-Dimuro-Machado considera as matrizes (5.74) e (5.75) para calcular as seguintes matrizes:

$$Mag(\tilde{\mathcal{A}}^l) = \begin{bmatrix} 179.95 & 156.12 & 90 \\ 89.95 & 179.87 & 155 \\ 180 & 156 & 177 \end{bmatrix} \tag{5.81}$$

e

$$Mag(\tilde{\mathcal{A}}^u) = \begin{bmatrix} 179.83 & 156 & 90 \\ 89.83 & 179.83 & 155 \\ 180 & 156 & 177 \end{bmatrix}. \tag{5.82}$$

Também, calculam-se as magnitudes dos termos independentes (5.76) e dos parâmetros de violação máxima (5.77). Assim,

$$Mag(\tilde{b}^l) = 1, Mag(\tilde{b}^u) = 1 \tag{5.83}$$

e

$$Mag(\tilde{p}^l) = 0.0995, Mag(\tilde{p}^u) = 0.0991, Mag(\tilde{q}^l) = 0.1504, Mag(\tilde{q}^u) = 0.1508. \tag{5.84}$$

A partir, desses dados formulam-se as programações lineares para a matriz $Mag(\tilde{\mathcal{A}}^l)$:

$$\begin{aligned}
&\min(s_1 + s_2 + s_3)\\
&sa : 179.95s_1 + 89.95s_2 + 180s_3 \geq 0.9005\\
&156.12s_1 + 179.87s_2 + 156s_3 \geq 0.9005\\
&90s_1 + 155s_2 + 177s_3 \geq 0.9005\\
&s_1, s_2, s_3 \geq 0
\end{aligned} \tag{5.85}$$

$$\begin{aligned}
&\max(r_1 + r_2 + r_3)\\
&sa : 179.95r_1 + 156.12r_2 + 90r_3 \leq 1.1504\\
&89.95r_1 + 179.87r_2 + 155r_3 \leq 1.1504\\
&180r_1 + 156r_2 + 177r_3 \leq 1.1504\\
&r_1, r_2, r_3 \geq 0
\end{aligned} \tag{5.86}$$

e para $Mag(\tilde{\mathcal{A}}^u)$:

$$\begin{aligned}
&\min(s_1 + s_2 + s_3)\\
&sa : 179.83s_1 + 89.83s_2 + 180s_3 \geq 0.9009\\
&156s_1 + 179.83s_2 + 156s_3 \geq 0.9009\\
&90s_1 + 155s_2 + 177s_3 \geq 0.9009\\
&s_1, s_2, s_3 \geq 0
\end{aligned} \tag{5.87}$$

$$\begin{aligned}
&\max(r_1 + r_2 + r_3)\\
&sa : 179.83r_1 + 156r_2 + 90r_3 \leq 1.1508\\
&89.83r_1 + 179.83r_2 + 155r_3 \leq 1.1508\\
&180r_1 + 156r_2 + 177r_3 \leq 1.1508\\
&r_1, r_2, r_3 \geq 0.
\end{aligned} \tag{5.88}$$

Por fim, as soluções ótimas e o valor do dessas programações lineares são mostrados nas Tabelas 5.8 e 5.9.

Tabela 5.8: Resultados do modelo de Loi-Dimuro-Machado para $\tilde{\mathcal{A}}^l$

x^{l^*}	y^{l^*}	ϑ^l
(0.1301, 0.2104, 0.6593)	(0.2091, 0.7898, 0.0009)	160.97

Logo, o intervalo de recompensa esperada ao fim do jogo é:

$$\vartheta = [160.97, 161.09]. \tag{5.89}$$

Tabela 5.9: Resultados do modelo de Loi-Dimuro-Machado para $\tilde{\mathcal{A}}^u$

x^{u^*}	y^{u^*}	ϑ^u
(0.0000, 0.2105, 0.7894)	(0.2090, 0.7916, 0.0000)	161.09

5.3.4 Análise dos modelos

Os jogos *fuzzy* intervalares de soma zero de dois jogadores possuem modelos de solução que transformam programações lineares *fuzzy*, inferior e superior, em programações lineares.

No modelo de Campos Intervalar, a matriz de recompensas é representada por duas matrizes *fuzzy*, assim o problema de programação linear torna-se duplo, inferior e superior. Também, nesse modelo trabalha-se com números *fuzzy* intervalares triangulares e com parâmetros de violação máxima.

Por outro lado, o modelo de Loi-Dimuro-Machado considera os números *fuzzy* intervalares triangulares e trapezoidais. Entretanto, dada a relação de ordem proposta, o problema se reduz à utilização de suas magnitudes e derivadas de magnitudes.

A partir, da comparação das soluções ótimas e dos valores de jogo obtidos nos exemplos utilizando os dois modelos citados anteriormente, analisou-se esses resultados, cujos valores foram muito próximos entre os modelos utilizados.

5.4 Considerações Finais

Neste capítulo apresentaram-se algoritmos de solução para jogos *fuzzy* e jogos *fuzzy* intervalares, os quais são do tipo soma zero e não cooperativos. Esses algoritmos de programações lineares *fuzzy* transformam-se em programações lineares clássicas, através de métodos de ordenação de números *fuzzy*.

Diante disso, compararam-se os modelos de Campos e Campos-Ezzati para os jogos *fuzzy* e os modelos Campos Intervalar e Loi-Dimuro-Machado para jogos *fuzzy* intervalares. Para a análise desses modelos foram utilizados diversos exemplos.

6 CONCLUSÃO

Esse trabalhou apresentou diversos conceitos sobre as teorias de jogos, *fuzzy* e intervalar. Mais especificamente, trabalhou-se com modelos de soluções para jogos *fuzzy* e jogos *fuzzy* intervalares, sendo jogos de soma zero e não cooperativos.

Então, a partir dos exemplos pode-se fazer análises sobre os modelos aplicados em cada jogo com seus métodos de ordenação de números *fuzzy* ou *fuzzy* intervalares.

6.1 Principais Contribuições

- Elaboração de uma relação de ordem total para números *fuzzy* intervalares, sendo trapezoidais simétricos ou não;
- Conceituação da relação de ordem total para números *fuzzy* intervalares, com base na relação de ordem total de intervalos;
- Demonstração de propriedades de relação de ordem total para números *fuzzy* intervalares;
- Extensão do modelo de Campos, já reconhecido na literatura, para utilização da ordem de Ezzati, permitindo maior flexibilidade ao permitir lidar com números *fuzzy* triangulares e/ou trapezoidas, simétricos ou não.
- Formalização de jogos *fuzzy* intervalares de soma zero para dois jogadores;
- Expansão do modelo de Campos de jogos *fuzzy* para Campos Intervalar;
- Elaboração de um modelo de resolução para jogos *fuzzy* intervalares, com base na ordem total desenvolvida;

- Resolução de jogos *fuzzy* intervalares, a partir de modelos de solução desenvolvidos;
- Transformação de uma programação linear *fuzzy* intervalar em uma programação linear clássica;
- Determinação de pelo menos uma solução de equilíbrio de qualquer tipo de jogo, por considerar estratégias mistas;
- Exemplificação de jogos *fuzzy* intervalares, com recompensas sendo números *fuzzy* intervalares trapezoidais simétricos ou não.

6.2 Trabalhos Futuros

Para trabalhos futuros, pretende-se tratar de números *fuzzy* e números *fuzzy* intervalares, cujas funções de pertinência não são funções lineares.

Além disso, jogos cooperativos não foram analisados nesse trabalho, sendo outra possibilidade de pesquisa para adaptação dos métodos desenvolvidos nesse trabalho.

Outro desafio é investigar jogos do tipo soma não zero, onde jogadores podem ter objetivos comuns. Assim, na resolução de jogos de soma não zero *fuzzy* ou *fuzzy* intervalares pretendem-se aplicar ou adaptar os modelos já desenvolvidos.

BIBLIOGRAFIA

ABBASBANDY, S.; HAJJARI, T. A new approach for ranking of trapezoidal fuzzy numbers. **Computers and Mathematics with Applications**, [S.l.], v.57, p.413 – 419, 2009.

AMARAL, W. M. **Teoria de Jogos Nebulosos na Resolução de Problemas de Decisão e Conflito de Interesses**. 2007. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) — UNICAMP, Campinas.

ASMUS, T. C.; DIMURO, G. P. Uma Abordagem para Jogos Bayesianos Fuzzy com base na Probabilidade Fuzzy de Buckley. **Revista de Informática Teórica e Aplicada - RITA**, [S.l.], v.20, n.1, p.180–215, 2013.

ASMUS, T. C.; DIMURO, G. P. A Total Order for Symmetric Triangular (Interval) Fuzzy Numbers. **Mathware & Soft Computing**, [S.l.], v.20, n.1, p.76 – 85, 2013.

BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. **Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática**. 2th.ed. Universidade Estadual de Campinas (Unicamp): IMECC, 2010.

BEDREGAL, B. C.; DIMURO, G. P.; SANTIAGO, R. H. N.; REISER, R. H. S. On interval fuzzy S-implications. **Information Sciences**, [S.l.], v.180, n.8, p.1373–1389, 2010.

BRIãO, S. L.; DIMURO, G. P. Método de Ordenação de Números Fuzzy Intervalares: uma proposta. In: RECENTES AVANçOS EM SISTEMAS "FUZZY11, ANAIS DO II CBSF - SEGUNDO CONGRESSO BRASILEIRO DE SISTEMAS FUZZY, 2012, São Carlos. **Anais...** SBMAC, 2012. p.102–112.

BUCKLEY, J. J. **Fuzzy Probabilities**: New Approach and Applications. Berlin: Springer, 2005.

BUCKLEY, J. J. **Fuzzy Probabilities**: New Approach and Applications. Berlin: Springer, 2005.

BUCKLEY, J. J.; ESLAMI, E. **An Introduction to Fuzzy Logic and Fuzzy Sets**. Heidelberg: Physica-Verlag, 2002. (Advances in Soft Computing).

BUCKLEY, J. J.; ESLAMI, E. Uncertain probabilities I: the discrete case. **Soft Computing - A Fusion of Foundations, Methodologies and Applications**, Berlin, v.7, p.500 – 505, 2003.

CAMPOS, L. Fuzzy linear programming models to solve fuzzy matrix games. **Fuzzy Sets and Systems**, [S.l.], v.32, p.275–289, 1989.

COSTA, C. G. da. **Probabilidades Imprecisas**: Intervalar, Fuzzy e Fuzzy Intuicionista. 2012. Tese (Doutorado em Ciência da Computação) — Centro de Tecnologia – Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), Natal, Rio Grande do Norte.

DIMURO, G. P.; BEDREGAL, B. C.; SANTIAGO, R. H. N.; REISER, R. H. S. Interval additive generators of interval t-norms and interval t-conorms. **Information Sciences**, [S.l.], v.181, n.18, p.3898 – 3916, 2011.

DIMURO, G. P.; COSTA, A. C. R.; ; CLAUDIO, D. M. A Coherence Space of Rational Intervals for a Construction of IR. **Reliable Computing**, [S.l.], v.6, n.2, p.139–178, 2000.

EZZATI, R.; ALLAHVIRANLOO, T.; KHEZERLOO, S.; KHESERLOO, M. An approach for ranking of fuzzy numbers. **Expert Systems with Applications**, [S.l.], v.39, p.690 – 695, 2012.

FIANI, R. **Teoria dos Jogos**: com Aplicações em Economia, Administração e Ciências Sociais. 3rd.ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2009.

GANDOLPHO, A. A. **Metodologia de Resolução de Problemas de Programação Linear Fuzzy**. 2005. Tese (Doutorado em Ciência da Computação) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. PUC, Rio de Janeiro.

KULISCH, U. W.; MIRANKER, W. L. **Computer arithmetic**. New York: Academic Press, 1982.

MOORE, R. E. **Methods and Applications of Interval Analysis**. Philadelphia: SIAM, 1979.

MOORE, R. E.; KEARFOTT, R. B.; ; CLOUD, M. J. **Introduction to Interval Analysis**. Philadelphia: SIAM, 2009.

NISHIZAKI, I.; SAKAWA, M. **Fuzzy and Multiobjective Games for Conflict Resolution**. New York: Physica-Verlag, 2001.

OLIVEIRA, P. W.; CLAUDIO, D. M.; DIVERIO, T. A. **Fundamentos da Matematica Intervalar**. 2th.ed. Porto Alegre: Sagra-Luzzatto, 2005.

SILVEIRA, M. M. M. **Teoria Fuzzy Intervalar**: uma Proposta de Integração da Matemática Intervalar à Teoria Fuzzy. 2002. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal.

ZADEH, L. A. Fuzzy Sets. **Information and Control**, [S.l.], v.8, n.3, p.338–353, 1965.

ZADEH, L. A. Outline of a New Approach to the Analysis of Complex Systems and Decision Processes. **IEEE Transactions on Systems,Man and Cybernetics**, [S.l.], v.SMC-3, p.28–44, 1973.

ZADEH, L. A. The birth and evolution of Fuzzy Logic. **Int. J. General Systems**, [S.l.], v.17, p.95 – 105, 1990.

ZADEH, L. A. Is there a need for fuzzy logic? **Information Sciences**, [S.l.], v.178, p.2751–2779, 2008.