

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

**MODELAGEM MATEMÁTICA DE CABOS UMBILICAIS E VEÍCULOS  
SUBAQUÁTICOS NÃO TRIPULADOS**

IURI BARCELOS PEREIRA ROCHA

Dissertação apresentada à Comissão de Curso do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal do Rio Grande, para obtenção do título de mestre em Modelagem Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Sebastião Cícero P. Gomes

Rio Grande, novembro de 2013.

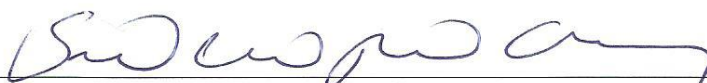
IURI BARCELOS PEREIRA ROCHA

“MODELAGEM MATEMÁTICA DE CABOS UMBILICAIS E VEÍCULOS SUBAQUÁTICOS  
NÃO TRIPULADOS”

Dissertação apresentada ao Programa de Pós  
Graduação em Modelagem Computacional da  
Universidade Federal do Rio Grande -FURG,  
como requisito parcial para obtenção do Grau  
de Mestre. Área concentração: Modelagem  
Computacional.

Aprovada em

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Sebastião Cícero Pinheiro Gomes  
Orientador - FURG



Prof.ª Dra. Bárbara Denicol Rodriguez  
FURG



Prof. Dr. Leonardo Ramos Emmendorfer  
FURG



Prof. Dr. Álvaro Luiz de Bortoli  
UFRGS

Rio Grande -RS  
2013

R672m Rocha, Iuri Barcelos Pereira.  
Modelagem matemática de cabos umbilicais e veículos  
subaquáticos não tripulados / Iuri Barcelos Pereira Rocha – 2013.  
116 f. : il. Color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio  
Grande/FURG, Programa de Pós-Graduação em Modelagem  
Computacional.

Orientador: Dr.º Sebastião Cícero Pinheiro Gomes

1. Veículos subaquáticos. 2. Cinemática. 3. Dinâmica. 4. ROV.  
5. Cabo umbilical. I. Rocha, Iuri Barcelos Pereira. II. Título.

CDU 551.462

Catálogo na fonte: Bibliotecária Flávia Reis de Oliveira CRB10/1946

## **DEDICATÓRIA**

Este trabalho é dedicado a minha esposa Ezdehar e aos meus pais Antônio e Lia Marta.

## **AGRADECIMENTOS**

Ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional pela oportunidade de realização desta dissertação.

Ao Prof. Dr. Sebastião Cícero Pinheiro Gomes pelo excelente trabalho de orientação, pela compreensão, paciência, dedicação, colaboração e amizade.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, pelos conhecimentos construídos.

Aos colegas de mestrado pela amizade e companheirismo, em especial ao colega Adriano Zeillman pela colaboração na elaboração deste trabalho.

A minha esposa, pelo carinho, amor, incentivo e compreensão nos momentos de ausência.

A minha família, pelo apoio incondicional em todos os momentos.

## RESUMO

A modelagem dinâmica de veículos subaquáticos não tripulados do tipo ROV (*Remotely Operated Vehicle*) incluindo a dinâmica do cabo umbilical consiste em um desafio de grande complexidade, sendo esta a razão da maioria dos autores negligenciar a dinâmica do cabo. Esta dissertação propõe um formalismo matemático que torne possível simular as duas dinâmicas, do cabo e do ROV, simultaneamente. Inicialmente, apresenta-se a modelagem cinemática do veículo, utilizando o método de Ângulos de Euler para transformações entre referenciais. O modelo dinâmico do veículo é desenvolvido considerando a interação entre o veículo e o meio aquático e a ação dos propulsores. A perturbação provocada pelo cabo é modelada a partir de um formalismo que trata a flexibilidade contínua do cabo aproximada de forma discreta. Elos rígidos são conectados por articulações fictícias que permitem movimentos elásticos de azimute, elevação e torção. O ROV passa a ser a carga terminal do cabo, fixo à sua extremidade livre, mas possuindo dinâmica própria, principalmente influenciada pelos seus atuadores. As simulações mostraram resultados fisicamente esperados. Dessa forma, conclui-se que o formalismo que acopla as dinâmicas do cabo e do ROV consiste em uma interessante ferramenta para o desenvolvimento de projetos de veículos subaquáticos remotamente operados.

Palavras chave: Veículos Subaquáticos, Cinemática, Dinâmica, ROV, Cabo Umbilical.

## ABSTRACT

The dynamic modeling of unmanned underwater vehicles type ROV (Remotely Operated Vehicle) including the dynamics of the umbilical cable is still an open problem of great complexity, which is why most authors neglect the dynamics of the cable. This dissertation proposes a formalism to couple the dynamics of cable and ROV. Initially, it is presented the kinematic modeling of the vehicle, described by the method of Euler angles transformations between reference frames. The dynamic modeling of the vehicle is developed considering the interaction between the vehicle and the aquatic environment and the action of the thrusters. Disturbances caused by the cable are modeled using a method based on a formalism that treats continuing flexibility of the cable as approximate discreetly. Rigid links are connected by joints that allow fictitious elastic movements of azimuth, elevation and twist. The ROV becomes the terminal load of the cable, attached to its free end, but having its own dynamics, mainly influenced by its actuators. The simulations showed physically expected results. Therefore, we conclude that the formalism that couples the dynamics of the cable and the ROV is presented as an interesting tool for the projects development of remotely operated underwater vehicles.

Keywords: Underwater Vehicles, Kinematic, Dynamic, ROV, Umbilical Cable.

## SUMÁRIO

LISTA DE SÍMBOLOS.....	11
LISTA DE ABREVIATURAS .....	16
LISTA DE TABELAS .....	17
LISTA DE FIGURAS.....	18
1. INTRODUÇÃO.....	21
1.2. VEÍCULOS REMOTAMENTE OPERADOS – ROVs .....	22
1.2.1 BREVE HISTÓRICO DO DESENVOLVIMENTO DOS ROVs .....	22
1.2.2 CARACTERÍSTICAS DOS ROVs .....	24
1.2.3. CLASSIFICAÇÃO DOS ROVs .....	24
1.2.4. CABO UMBILICAL .....	26
1.3. OBJETIVOS DA DISSERTAÇÃO .....	26
1.4. BIBLIOGRAFIA COMENTADA .....	28
1.4.1 MODELAGEM DE VEÍCULOS SUBAQUÁTICOS .....	28
1.4.2 MODELAGEM DE CABOS UMBILICAIS .....	30
1.5. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO .....	32
2. MODELAGEM CINEMÁTICA DE VEÍCULOS SUBAQUÁTICOS .....	34
2.1 APRESENTAÇÃO.....	34
2.2 SISTEMAS DE COORDENADAS.....	34
2.3.1 ROTAÇÕES PRINCIPAIS .....	36
2.3.2 VELOCIDADE LINEAR.....	36
2.3.3 VELOCIDADE ANGULAR .....	39
2.3.3 MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO NOS SEIS GRAUS DE LIBERDADE .....	41
3.    MODELAGEM DINÂMICA DE VEÍCULOS SUBAQUÁTICOS .....	42
3.1. DINÂMICA DO CORPO RÍGIDO .....	42
3.1.1. MATRIZ DE INÉRCIAS .....	42



3.1.2 MATRIZ DE CORIOLIS E CENTRÍPETA.....	43
3.2. FORÇA DE MASSA ADICIONAL .....	44
3.2.1 MATRIZ DE INÉRCIA DE MASSA ADICIONAL .....	44
3.2.2 MATRIZ DE CORIOLIS E CENTRÍPETA DE MASSA ADICIONADA .....	44
3.3 FORÇAS DE ARRASTO HIDRODINÂMICO E SUSTENTAÇÃO .....	45
3.4 FORÇAS RESTAURADORAS.....	47
3.5. MODELO DINÂMICO DOS VEÍCULOS SUBAQUÁTICOS .....	48
3.5.1 MODELO SEM CORRENTE OCEÂNICA .....	48
3.5.2 MODELO DINÂMICO COM CORRENTE OCEÂNICA .....	49
3.6. MODELAGEM DINÂMICA DOS PROPULSORES .....	50
3.6.1. FORÇAS DE PROPULSÃO .....	50
3.6.2 DINÂMICA DOS ATUADORES.....	51
3.7. SIMULAÇÕES EM MALHA ABERTA.....	52
3.7.1 SIMULAÇÃO 1 .....	54
3.7.2 SIMULAÇÃO 2 .....	55
3.7.3 SIMULAÇÃO 3 .....	55
3.7.4 CONCLUSÕES DAS SIMULAÇÕES EM MALHA ABERTA .....	56
4. MODELAGEM ANALÍTICA DO CABO UMBILICAL .....	57
4.1 APRESENTAÇÃO.....	57
4.2. MODELAGEM DO CABO .....	57
4.3. CABO COM TRÊS ARTICULAÇÕES.....	69
4.4. SIMULAÇÕES DO CABO DIVIDIDO EM 3 ELOS .....	74
5. ACOPLAMENTO DAS DINÂMICAS DO CABO E DO ROV .....	76
5.1. CABO COM UMA ARTICULAÇÃO FICTÍCIA .....	76
5.2. CABO COM $n$ ARTICULAÇÕES .....	83
6. RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES DO SISTEMA ACOPLADO .....	88
6.1. CABO DIVIDIDO EM 3 ELOS.....	90

6.2. CABO DIVIDIDO EM 4 ELOS.....	96
6.4. CABO DIVIDIDO EM 5 ELOS.....	103
7. CONCLUSÕES.....	111
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	113

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\vec{v}$  - vetor velocidade no referencial do corpo

$\vec{v}_1$  - velocidade linear ou de translação no referencial do corpo;

$\vec{v}_2$  - velocidade angular ou de rotação no referencial do corpo;

$u$  – componente de  $v_1$  na direção de  $X_0$ , movimento de avanço (Surge)

$v$  – componente de  $v_1$  na direção de  $Y_0$ , movimento de balanço (Sway)

$w$  – Componente de  $v_1$  na direção de  $Z_0$ , movimento de oscilação (Heave)

$p$  – componente de  $v_2$  em torno do eixo  $X_0$ , movimento de rolamento (Roll)

$q$  – componente de  $v_2$  em torno do eixo  $Y_0$ , movimento de arfagem (Pitch)

$r$  – componente de  $v_2$  em torno do eixo  $Z_0$ , movimento de guinada (Yaw)

$\vec{\eta}$  - vetor posição e orientação no referencial inercial

$\vec{\eta}_1$  - posição do veículo em relação ao referencial inercial

$\vec{\eta}_2$  - orientação do veículo em relação ao referencial inercial

$\phi$  - ângulo de rolamento

$\theta$  - ângulo de arfagem

$\psi$  - ângulo de guinada ou rumo

$X_0Y_0Z_0$  - referencial do corpo (ROV)

$XYZ$  - referencial inercial

$B_\phi$  - matriz de rotação em torno do eixo  $X$  de um ângulo  $\phi$

$B_\theta$  - matriz de rotação em torno do eixo  $Y$  de um ângulo  $\theta$

$B_\psi$  - matriz de rotação em torno do eixo  $Z$  de um ângulo  $\psi$

$\mathbf{J}(\vec{\eta}_2)$  - Matriz de transformação da velocidade por ângulos de Euler

$\mathbf{J}_1(\vec{\eta}_2)$  - Matriz de transformação da velocidade linear por ângulos de Euler

$\mathbf{J}_2(\vec{\eta}_2)$  - Matriz de transformação da velocidade angular por ângulos de Euler

$E_C$  - Energia Cinética

$E_{C_T}$  - Energia Cinética de Translação

$E_{C_R}$  - Energia Cinética de Rotação

$m_c$  - massa da carga terminal do cabo

$X_i Y_i Z_i$  - sistema referencial da  $i$ -ésima articulação do cabo

$k_{ia}$  - constante elástica de azimute da  $i$ -ésima articulação

$k_{ie}$  - constante elástica de elevação da  $i$ -ésima articulação

$k_{iT}$  - constante elástica de torção da  $i$ -ésima articulação

$\theta_{ia}$  - ângulo de azimute do  $i$ -ésimo elo

$\theta_{ie}$  - ângulo de elevação do  $i$ -ésimo elo

$\theta_{iT}$  - ângulo de torção do  $i$ -ésimo elo

$I_{R_1}, I_{R_2}, I_{R_3}, \dots, I_{R_n}$  - momentos de inércia de rotação nas articulações

$I_{T_1}, I_{T_2}, I_{T_3}, \dots, I_{T_n}, I_{T_c}$  - momento de inércia de torção nas articulações.

$E_P$  - energia potencial

$L$  - Lagrangeano

$\vec{f}(\dot{\vec{\theta}}, \vec{\theta})$  - vetor de forças que atuam sobre o cabo

$I(\vec{\theta})$  - matriz de inércia do cabo

$C$  - matriz das constantes de atrito do cabo

$K$  - matriz das constantes elásticas do cabo

$\vec{T}_m$  - vetor dos torques externos ao cabo

$\vec{F}_D$  - força de arrasto

$\vec{v}$  - velocidade do veículo em relação ao fluido

$D_S$  - o coeficiente de arrasto linear

$D_Q$  - o coeficiente de arrasto quadrático

$C_D(R\eta, \alpha)$  - um coeficiente de amortecimento

$X_{DL}, Y_{DL}$  e  $Z_{DL}$  - forças resultantes de arrasto e sustentação nas direções  $X_0, Y_0$  e  $Z_0$ , respectivamente;

$K_{DL}, M_{DL}$  e  $N_{DL}$  - momentos produzidos pelas forças resultantes de arrasto e sustentação nas direções  $X_0, Y_0$  e  $Z_0$ , respectivamente;

$\rho$  - massa específica do fluido;

$\nabla$  - volume do veículo;

$U$  - módulo da velocidade linear do veículo, ou seja,  $U = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ ;

$C_p, C_q$  e  $C_r$  - coeficientes de amortecimento ao movimento de rotação do veículo;

$C_x, C_y$  e  $C_z$  - coeficientes das forças de arrasto e sustentação;

$C_k, C_m$  e  $C_n$  - coeficientes dos momentos produzidos pelas forças de arrasto e sustentação;

$\alpha$  - ângulo de ataque;

$\beta$  - ângulo de deriva;

$\gamma$  - ângulo de ataque lateral;

$\mathbf{D}(\vec{v})$  - matriz de arrasto e sustentação;

$\vec{f}_W$  - força peso ;

$\vec{f}_B$  - força de empuxo;

$\nabla$ - volume de fluido deslocado pelo veículo;

$\vec{r}_G = [x_G, y_G, z_G]^T$  - centro de gravidade do veículo;

$\vec{r}_B = [x_B, y_B, z_B]^T$  - o centro de empuxo (centro de volume);

$\vec{M}_W$  - momento provocado pela força peso;

$\vec{M}_B$  - momento provocado pelo empuxo;

$\vec{v}_C = [u_C, v_C, w_C, 0, 0, 0]^T$  - velocidade da corrente no referencial do corpo.

T - empuxo desenvolvido por cada propulsor;

Q - torque desenvolvido por cada propulsor;

$v_w$  - velocidade com que a água se dirige para o hélice,

D - diâmetro do hélice;

$T_{|n|n}$ - coeficiente de empuxo;

$Q_{|n|n}$  - coeficiente de torque;

$i_a$  - corrente de armadura;

$v_a$  - tensão aplicada sobre os propulsores;

$R_a$  - resistência da armadura;

$L_a$  - indutância da armadura;

$K_m$ - constante eletromagnética do motor;

$J_p$ - soma dos momentos de inércia do rotor;

$\mathbf{P}$  - matriz diagonal contendo os momentos de inércia dos propulsores

$E_{CR}$  - energia cinética devido ao movimento de rotação do cabo;

$E_{CT}$  - energia cinética devido ao movimento de translação do cabo;

$I_{R1}, I_{R2}, I_{R3}, \dots, I_{Rn}$ , - momentos de inércia de rotação em elevação dos elos;

$I_{T1}, I_{T2}, I_{T3}, \dots, I_{Tn}, I_{Tc}$  - momentos de inércia devido ao movimento de torção nos elos;

$k_{1e}, k_{2e}, k_{3e}, \dots, k_{ne}$  - constantes elásticas nas articulações devido aos ângulos de elevação;

$k_{1a}, k_{2a}, k_{3a}, \dots, k_{na}$  - constantes elásticas nas articulações devido aos ângulos de azimute;

$k_{1T}, k_{2T}, k_{3T}, \dots, k_{nT}$  - constantes elásticas nas articulações devido aos ângulos de torção;

## **LISTA DE ABREVIATURAS**

AUV	Autonomous Underwater Vehicles
NEROV	Norwegian Experimental Remotely Operated Vehicles
ROV	Remotely Operated Vehicles
UUV	Unmanned Underwater Vehicles
CURV	Cable-Controlled Underwater Recovery Vehicle
PUV	Veículo Subaquático Programado
MTS	Marine Technology Society



## **LISTA DE TABELAS**

TABELA 1.1. Classificação dos Veículos Subaquáticos Remotamente Operados .....	25
--------------------------------------------------------------------------------	----

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - As reservas do Pré-sal da Costa Brasileira .....	23
Figura 1.2 - ROV e suas principais partes. ....	24
Figura 1.3 - (a) pequeno (b) grande capacidade: (c) Ultraprofundo.....	26
Figura 1.4 - Panorama de uma missão típica de um ROV .....	26
Figura 2.1 - Sistemas de coordenadas de um Veículo Subaquático.....	34
Figura 2.2 - Orientação do veículo em relação ao referencial inercial.....	37
Figura 3.1 - Desenho simplificado do NEROV.....	53
Figura 3.2 - Velocidades no referencial do corpo. ....	54
Figura 3.3 - Posições e orientações no referencial inercial. ....	54
Figura 3.4 - Trajetórias nos planos coordenados .....	54
Figura 3.5 - Trajetórias no espaço. ....	54
Figura 3.6 - Velocidades no referencial do corpo. ....	55
Figura 3.7 - Posições e orientações no referencial inercial. ....	55
Figura 3.8 - Velocidades no referencial do corpo. ....	55
Figura 3.9 - Posições e orientações no referencial inercial .....	55
Figura 3.10 - Trajetórias nos planos coordenados .....	56
Figura 3.11 - Trajetórias nos planos coordenados .....	56
Figura 4.1 - Representação esquemática do cabo umbilical.....	58
Figura 4.2 - Cabo umbilical dividido em cinco partes rígidas ( $n = 5$ ) .....	58
Figura 4.3 - Ângulos de azimute, elevação e torção na $i$ -ésima articulação.....	58
Figura 4.4 - Representação do posicionamento dos eixos coordenados.....	59
Figura 4.5 - Cabo dividido em 4 partes rígidas ( $n=4$ ) .....	62
Figura 4.6 - Representação do primeiro elo do cabo.....	63
Figura 4.7 - Representação do primeiro e segundo elos do cabo. ....	64
Figura 4.8 - Cabo com três articulações fictícias (PEREIRA, 2010). ....	70
Figura 4.9 - Posição angular em elevação para cada elo. ....	74
Figura 4.10 - Posição angular em azimute para cada elo .....	75
Figura 4.11 - Movimento espacial da carga.....	75
Figura 5.1 - Sistemas de referência do cabo e do ROV.....	76
Figura 5.2 - Força provocada pelos propulsores do ROV .....	77

Figura 5.3 - Comparação entre os referenciais inicial e do corpo .....	78
Figura 5.4 - Representação dos torques de azimute, elevação e torção.....	80
Figura 5.5 - Ângulos e velocidades angulares da carga terminal do cabo.....	81
Figura 5.6 - Trajetória espacial do ROV. ....	82
Figura 5.7 - Ângulos e velocidades angulares da carga terminal do cabo.....	82
Figura 5.8 - Trajetória espacial do ROV. ....	83
Figura 5.9 - Sistemas de referência inicial e do ROV, cabo dividido em três elos .....	84
Figura 5.10 - Sistemas de referência da última articulação e do corpo. ....	84
Figura 5.11 - Braço de alavanca para o cabo dividido em 3 elos ( $n=3$ ).....	86
Figura 6.1 - Tela principal do software gerador de modelos dinâmicos.....	90
Figura 6.2 - Ângulos de elevação – propulsores frontais com tensões iguais ( $n=3$ ). ....	92
Figura 6.3 - Posição do ROV – propulsores frontais com tensões iguais ( $n=3$ ).....	92
Figura 6.4 - Trajetória espacial do ROV – tensões iguais ( $n=3$ ). ....	93
Figura 6.5 - Ângulos de torção – tensões de sinais contrários ( $n=3$ ). ....	93
Figura 6.6 - Ângulos de elevação - tensões de mesmo sinal e módulos diferentes.....	94
Figura 6.7 - Ângulos de azimute - tensões de mesmo sinal e módulos diferentes .....	94
Figura 6.8 - Ângulos de torção - tensões de mesmo sinal e módulos diferentes.....	95
Figura 6.9 - Posição do ROV - tensões de mesmo sinal e módulos diferentes .....	96
Figura 6.10 - Ângulos de elevação – propulsores com tensões iguais ( $n=4$ ). ....	98
Figura 6.11 - Posição do ROV – propulsores com tensões iguais ( $n=4$ ). ....	98
Figura 6.12 - Movimento espacial do ROV – tensões iguais ( $n=4$ ). ....	99
Figura 6.13 - Ângulos de torção – tensões de mesmo módulo e sinais diferentes. ....	100
Figura 6.14 - Posição ROV – tensões de mesmo módulo e sinais diferentes.....	100
Figura 6.15 - Ângulos de elevação - tensões de mesmo sinal e módulos diferentes nos atuadores frontais ( $n=4$ ).....	101
Figura 6.16 - Ângulos de azimute - tensões de mesmo sinal e módulos diferentes. ...	101
Figura 6.17 - Ângulos de torção - tensões de mesmo sinal e módulos diferentes.....	102
Figura 6.18 - Posição do ROV - tensões de mesmo sinal e módulos diferentes ( $n=4$ ). 102	
Figura 6.19 - Ângulos de elevação – propulsores frontais com tensões iguais ( $n=5$ ). .	104
Figura 6.20 - Posição do centro de massa do ROV – tensões iguais ( $n=5$ ). ....	105
Figura 6.21 - Movimento espacial do ROV – tensões iguais ( $n=5$ ). ....	105
Figura 6.22 - Ângulos de torção – tensões de mesmo módulo e sinais diferentes .....	106
Figura 6.23 - Posição ROV – tensões de mesmo módulo e sinais diferentes.....	107
Figura 6.24 - Ângulos de elevação - tensões de mesmo sinal e módulos diferentes....	107

Figura 6.25 - Ângulos de azimute - tensões de mesmo sinal e módulos diferentes .....	108
Figura 6.26 - Ângulos de torção - tensões de mesmo sinal e módulos diferentes.....	109
Figura 6.27 - Posição do ROV - tensões de mesmo sinal e módulos diferentes. ....	109

# 1. INTRODUÇÃO

A partir de meados do século XX, e de forma mais efetiva, depois da Segunda Guerra Mundial, houve um crescimento acentuado no interesse do homem pela exploração e compreensão dos oceanos. Necessitando de recursos naturais que sustentassem o desenvolvimento econômico e buscando descobrir novas fontes de energia, diversas nações direcionaram esforços à exploração dos territórios marinhos.

A exploração do fundo do mar, entretanto, ainda consiste em um grande desafio científico. Embora os oceanos cubram 71% da superfície terrestre, contenham 90% dos seus recursos hídricos e abriguem mais de 97% dos seres vivos existentes no planeta, estima-se que cerca de 5% a 7% dessa área seja amplamente conhecida (PRADO, 2009; MATIAS, 2005). O desconhecimento desses habitats se deve principalmente aos seguintes fatores: elevados custos financeiros para construção de submarinos tripulados, extensa área a ser explorada, ocorrência de fortes correntes marinhas, baixa visibilidade e elevadas pressões a grandes profundidades - o que representa grande risco para mergulhadores e tripulantes de veículos submarinos.

Após a corrida espacial, o desenvolvimento de tecnologias para exploração do oceano também foi impulsionado. Os pesquisadores perceberam que a construção de máquinas para exploração das profundezas poderia utilizar tecnologias semelhantes às empregadas na construção de aeronaves. Tecnologias aeroespaciais foram utilizadas em uma nova classe de veículos, os subaquáticos, que funcionam essencialmente como um satélite espacial, mas aplicados às profundezas (SOARES JÚNIOR, 2008).

Com a descoberta de jazidas de petróleo em águas profundas, a indústria petrolífera passou a estimular o desenvolvimento de veículos subaquáticos para realização de manutenção e instalação de seus equipamentos no fundo do mar. A utilização de veículos subaquáticos não tripulados (*Underwater Unmanned Vehicles* - UUVs) passou, então, a apresentar-se como uma importante alternativa para exploração do fundo do oceano por possuir um custo inferior ao de um submarino tripulado, atingir profundidades maiores e principalmente por não apresentar nenhum tipo de risco ao operador humano.

Atualmente, os UUVs são utilizados na realização de diversas atividades no fundo do mar, de rios, barragens ou até mesmo em reatores de usinas de geração de energia nuclear. Entre as principais tarefas executadas por veículos subaquáticos, podem-se destacar (YUH, 2000;

TAVARES, 2003; GOULART, 2007): resgate de destroços de aviões e navios; a exploração de recursos naturais fósseis; pesquisas de reconhecimento e identificação de regiões oceânicas; mapeamento do fundo do mar; inspeção de cabos de transmissão de energia e telecomunicações; inspeção e reparação de construções subaquáticas; inspeção de cascos de navios e plataformas de exploração de petróleo; recuperação de material bélico.

## **1.1. CLASSIFICAÇÃO DOS VEÍCULOS SUBAQUÁTICOS NÃO TRIPULADOS**

Existem diferentes classificações dos veículos subaquáticos não tripulados. A maior parte dos trabalhos científicos divide esses veículos em dois grupos distintos: os veículos subaquáticos operados remotamente (*Remotely Operated Vehicles – ROVs*), e os veículos subaquáticos autônomos (*Autonomous Underwater Vehicles – AUVs*) (TAVARES, 2003).

Os ROVs diferem-se dos AUVs pela forma de geração de trajetórias. Enquanto o primeiro caracteriza-se pela dependência do controle do operador humano, transmitido ao veículo por um cabo umbilical, os AUVs caracterizam-se por possuir autonomia no seu deslocamento. Sob o ponto de vista da dinâmica e do controle de velocidade e posição, no entanto, a operação de ambos ocorre de maneira semelhante, exceto pelo cabo umbilical, presente na primeira categoria de veículos submarinos, e inexistente na maioria dos AUVs.

Neste trabalho propõe-se um formalismo matemático que possibilite a unificação das dinâmicas de um veículo do tipo ROV e do seu cabo umbilical. O modelo que englobará as dinâmicas do cabo e do veículo representa com um maior nível de realismo o movimento do ROV, possibilitando assim o projeto de leis de controle. Em função disso, serão analisadas a seguir as principais características de veículos remotamente operados.

## **1.2. VEÍCULOS REMOTAMENTE OPERADOS – ROVS**

Nesta seção é apresentada uma sucinta descrição dos veículos subaquáticos operados remotamente, brevemente destacando sua história de desenvolvimento, características essenciais de operação, classificações e ilustrações de alguns tipos de veículos.

### **1.2.1 BREVE HISTÓRICO DO DESENVOLVIMENTO DOS ROVS**

De acordo com a Sociedade de Tecnologia Marinha dos Estados Unidos (*Marine Technology Society of USA - MTS*), o destaque pelo desenvolvimento dos primeiros veículos submersíveis não tripulados é dado à empresa *Luppis Whitehead Automobile*. A empresa

desenvolveu, em 1864, na Áustria, um veículo submersível que apresentava a forma de um torpedo, denominado PUV (veículo subaquático programado).

Quase um século depois, em 1953, o francês Dimitri Rebikoff, desenvolveu o veículo *POODLE* para observação em águas profundas, sendo este, o primeiro veículo ligado à superfície por um cabo umbilical (MAGALHÃES, 2007). A partir daí, diversos submersíveis foram construídos e ganharam maior notoriedade quando, no ano de 1966, foram utilizados na recuperação de uma bomba atômica perdida na Espanha (Bomba “H”) em um acidente com uma aeronave. Nesta missão, o robô CURV I (*Cable-Controlled Underwater Recovery Vehicle*) foi o responsável pelo resgate da bomba à superfície (SORANI, 2002). Desde então, inúmeros outros submersíveis foram construídos para as mais diversas finalidades.

Atualmente, os veículos são utilizados para execução de diversas tarefas em águas profundas: na oceanografia, na pesca, na engenharia civil, na segurança, na exploração de minerais e outros. Todavia, o desenvolvimento e aperfeiçoamento de tecnologias para os ROVs são impulsionados de forma mais acentuada pelo crescimento da exploração “offshore” de petróleo e gás, já que os veículos consistem em ferramentas indispensáveis para perfuração, instalação e construção de estruturas submersas.



Figura 1.1 - As reservas do Pré-sal da Costa Brasileira (Petrobras – 2009)

No Brasil, existem diversos projetos para o desenvolvimento de veículos subaquáticos, incentivados principalmente pela indústria do petróleo. A utilização desses veículos tem uma forte tendência de aumento no país em decorrência das recentes descobertas da existência de gás e óleo na camada do Pré-Sal, apresentadas na Figura 1.1. Estima-se que 75% das reservas de petróleo estejam em águas profundas (400 a 1000m) e ultra profunda (com profundidade superior a 1000m) (PETROBRAS, 2009).

### 1.2.2 CARACTERÍSTICAS DOS ROVS

Os ROVs (*Remotely Operated Vehicle*) são veículos subaquáticos não tripulados conectados em uma embarcação ou uma plataforma através de um cabo, denominado cabo umbilical. Os propulsores (*thrusters*) são responsáveis pela movimentação do veículo. Através do cabo umbilical são enviados os sinais de comando, controle e transporte de energia. Em geral, os veículos possuem um módulo de flutuabilidade na parte superior, constituído por um material de baixa densidade, e um chassi de liga metálica na parte inferior, promovendo uma flutuabilidade<sup>1</sup> praticamente neutra do equipamento.

Para que haja uma boa estabilidade e equilíbrio do veículo é fundamental que a carga seja bem distribuída, obedecendo ao centro de flutuação e de gravidade. Por isso, normalmente as luminárias e sensores são colocados na parte superior, enquanto os componentes de maior massa são afixados na parte inferior (CARVALHO et al, 2009).

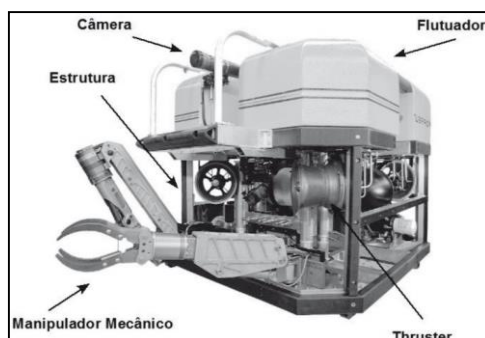


Figura 1.2 - ROV e suas principais partes (CARVALHO et al, 2009).

Os ROVs podem executar diferentes funções, apresentar diferentes tamanhos e formas (GUO, FUTUKADA & ASAKA, 2003). Normalmente, são equipados com câmeras de vídeo e lanternas. De acordo com a finalidade, podem possuir: sonares, hidrofones, magnetômetros, máquinas fotográficas, manipuladores, braço cortante ou perfurador, ou ainda, sensores para medir variáveis, tais como, temperatura, classificação da água, nível de correnteza, entre outros.

### 1.2.3. CLASSIFICAÇÃO DOS ROVS

Os veículos subaquáticos remotamente operados podem ser classificados com relação ao tamanho, peso, habilidade, capacidade de submersão, potência e tipo de operação realizada. Com relação à funcionalidade, normalmente são divididos em duas grandes classes: de observação e de trabalho (*work class*). Os veículos de observação são geralmente menores que

---

<sup>1</sup> A flutuabilidade de um veículo pode ser neutra (peso = empuxo), negativa (peso > empuxo) ou positiva (peso < empuxo).



um metro cúbico e não dispõem de braços. Basicamente são constituídos por câmeras e lanternas. Enquanto, os ROVs de trabalho possuem tamanhos maiores e diferentes possibilidades de operação (MAGALHÃES, 2007).

A MTS classifica os ROVs com relação aos trabalhos executados por eles, a capacidade de submersão e a potência demandada pelos sistemas embarcados, de acordo com a Tabela 1.1.

Tabela 1.1 -

Classificação	Capacidade	Potência (hp)
<b>Veículos Pequenos de Baixo custo (Elétrico)</b>	Observação (<100 metros)	<5
<b>Pequenos (Elétrico)</b>	Observação (< 300 metros)	<10
<b>Médios (Elétrico / Hidráulico)</b>	Reconhecimento / Trabalho Mediano (< 2000 metros)	<100
<b>Grande Capacidade (Elétrico)</b>	Observação/Trabalho Leve (< 3000 metros)	<20
<b>Grande Capacidade (Elétrico/Hidráulico)</b>	Trabalho Pesado/Grande Carga extra (< 3000 metros)	<300
<b>Ultra profundos (Elétrico)</b>	Observação/Coleta de Dados (> 3000 metros)	<25
<b>Ultra Profundos (Elétrico/Hidráulico)</b>	Trabalho pesado/Grande Carga Extra (> 3000 metros)	<120

Classificação dos Veículos Subaquáticos Remotamente Operados

Os veículos Pequenos de Baixo Custo, Figura 1.3(a), são usados principalmente para tarefas de inspeção e observação, e atingem uma profundidade máxima de 300 metros. Os veículos médios, em geral, pesam entre 100 kg e 200 kg e possuem um único manipulador. Podem executar tarefas consideradas médias, como inspeção, perfuração e manutenção. Os veículos grandes, Figura 1.3 (b) pesam entre 2000 kg e 6500 kg são capazes de executar tarefas em regiões mais profundas (até 3000 metros de profundidade) e carregar grandes cargas.

Os veículos Ultra-profundos, Figura 1.3 (c), têm a capacidade de navegar a profundidades maiores do que 3000 metros, e tendem a possuir um menor consumo de potência, o que permite a utilização de um cabo umbilical de diâmetro pequeno. Alguns desses veículos já ultrapassaram a barreira dos 6000 metros de profundidade. Apenas dois robôs superaram os 11000 metros de profundidade: o ABISMO, produzido pela JAMSTEC, e o Nereus, produzido pela WHOI (Woods Hole Oceanographic Institution).



Figura 1.3 - (a) ROV pequeno (b) ROV de grande capacidade: (c) ROV Ultra-profundo

#### 1.2.4. CABO UMBILICAL

Os ROVs são conectados à superfície através do cabo umbilical. O cabo é responsável por fornecer energia, sinais de controle ao veículo e transmitir as informações dos sensores presentes no ROV, imagens de câmeras de vídeo, por exemplo. O cabo umbilical geralmente inclui membros de uma força adicional para permitir a recuperação dos equipamentos pesados e destroços, ou ainda, para resgatar o próprio veículo em caso de problemas na operação.

A Figura 1.4 ilustra um exemplo de uma missão realizada por um ROV conectado a uma embarcação na superfície através do cabo umbilical. Nesse tipo de situação o cabo fica sujeito à ação de ondas, correntes e ventos. Estes efeitos ambientais, juntamente com o posicionamento dinâmico da embarcação, podem representar distúrbios ao posicionamento do cabo e, conseqüentemente, do veículo.

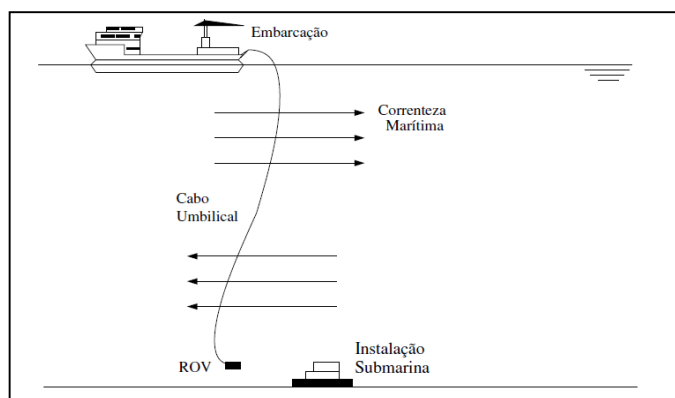


Figura 1.4 - Panorama de uma missão típica de um ROV (SOUZA, 2003).

### 1.3. OBJETIVOS DA DISSERTAÇÃO

O cabo umbilical é um elemento essencial em um ROV e requer certa estrutura para sua manipulação, o que pode, em alguns casos, interferir no dimensionamento do próprio veículo. A realização de tarefas a grandes profundidades, por exemplo, exige a utilização de cabos com grandes comprimentos, o que implica em perdas de energia na transmissão. Esse problema pode ser resolvido com a utilização de cabos de maior diâmetro. Todavia, o aumento da espessura

resulta em um maior arrasto hidrodinâmico do cabo, o que pode interferir significativamente na dinâmica do veículo. Além disso, as ações do vento, das ondas e das correntes marítimas sobre o cabo também podem produzir distúrbios ao posicionamento do veículo.

Em razão disso, percebe-se que o estudo dos esforços provocados pelo cabo umbilical é fundamental para o desenvolvimento de sistemas de controle para veículos subaquáticos. Apesar disso, a modelagem dinâmica de cabos umbilicais flexíveis ainda representa um desafio científico. As dificuldades crescem quando uma das extremidades do cabo consiste em uma carga com dinâmica própria, como é o caso de cabos umbilicais conectados a robôs subaquáticos do tipo ROV.

Devido à complexidade desses modelos, a maior parte dos trabalhos sobre modelagem de veículos subaquáticos negligencia, despreza ou apresenta formas extremamente simplificadas dos distúrbios provocados pelo cabo. Alguns trabalhos utilizam modelos que exigem um grande esforço computacional para a obtenção das perturbações do cabo.

Dessa forma, esta dissertação tem como objetivo principal apresentar um modelo matemático que possibilite o acoplamento da dinâmica do ROV com a dinâmica do cabo umbilical, utilizando um novo método de modelagem de cabos umbilicais desenvolvido via formalismo discreto por PEREIRA (2010). Além disso, pretende-se nesta dissertação:

- Apresentar a modelagem física de veículos subaquáticos, considerando aspectos dinâmicos e cinemáticos;
- Apresentar e validar um novo método de modelagem de cabos umbilicais, baseado num formalismo discreto;
- Desenvolver uma proposta de acoplamento das dinâmicas apresentadas para o cabo umbilical e para o ROV;
- Efetuar simulações e analisar o comportamento dinâmico de um ROV, considerando as perturbações provocadas pelo cabo umbilical em diferentes situações.

Espera-se que, a partir de um modelo dinâmico global mais realista, sejam fornecidos subsídios para o desenvolvimento de futuros projetos de veículos submersíveis remotamente operados conectados a cabos umbilicais.

## 1.4. BIBLIOGRAFIA COMENTADA

A elaboração deste trabalho foi feita a partir do estudo teórico sobre modelagem de veículos subaquáticos e modelagem de cabos umbilicais. Os principais trabalhos estudados estão brevemente descritos nesta seção.

### 1.4.1 MODELAGEM DE VEÍCULOS SUBAQUÁTICOS

Diversos trabalhos abordam a modelagem cinemática e dinâmica de veículos subaquáticos, dentre os quais se destacam:

#### **R. B. Dominguez (1989)**

##### *Simulação e Controle de um Veículo Submarino de Operação Remota*

Nesta dissertação é desenvolvido um estudo sobre modelagem dinâmica de veículos submarinos de operação remota, incluindo um método simplificado de modelagem do cabo umbilical. Além disso, é apresentado um *software* de simulação de ROVs para microcomputadores, denominado de SOL (Simulador *Off-Line*). Este trabalho destaca-se como pioneiro no Brasil na área de veículos subaquáticos não tripulados.

#### **T. I. Fossen (1994)**

##### *Guidance and Control of Ocean Vehicles*

Este livro é referência da maioria dos trabalhos que abordam a modelagem e controle de veículos subaquáticos. Apresenta um estudo aprofundado sobre o controle de diversos veículos marinhos. No capítulo 2 é apresentada a modelagem desses veículos, considerando aspectos dinâmicos e cinemáticos. O capítulo 3 trata da modelagem das perturbações externas, como ventos, correntes oceânicas e ondas. O Capítulo 4 descreve o estudo do controle e da estabilidade de veículos subaquáticos. No capítulo 5 é discutido o estado da arte, com técnicas de modelagem para navios. Por fim, os dois últimos capítulos tratam do estudo de controle automático de navios e outras embarcações de superfície de alta velocidade.

#### **E.C. Souza (2003)**

##### *Modelagem e Controle de Veículos Submarinos Não Tripulados*

Esta dissertação desenvolve o emprego de algumas técnicas de controle em veículos submarinos e apresenta a modelagem dos propulsores levando em consideração efeitos eletromecânicos de motores elétricos e hidrodinâmicos causados pela interação entre a água e o propulsor. Além disso, apresenta um modelo de cabo umbilical de um veículo operado remotamente, com o objetivo de reproduzir os efeitos de distúrbio presentes quando operado sob condições reais. O modelo resultante foi utilizado nas simulações para avaliação do desempenho do sistema controlado.

**A. M. Tavares (2003)**

*Um Estudo Sobre a Modelagem e o Controle de Veículos Subaquáticos Não Tripulados*

Esta dissertação apresenta um abrangente estudo teórico sobre a modelagem dinâmica e cinemática de veículos subaquáticos não tripulados. São apresentados e comparados métodos de modelagem cinemática por ângulos de Euler, parâmetros de Euler e parâmetros de Rodrigues. A modelagem dinâmica considera a interação entre a estrutura do veículo e o meio aquático e a ação dos propulsores sobre o veículo.

**C. Goulart (2007)**

*Modelagem, Simulação e Controle de um Veículo Submarino de Operação Remota*

Este trabalho aborda a modelagem dinâmica do ROV LUMA, veículo desenvolvido com objetivo de inspecionar dutos de adução em barragens de usinas hidrelétricas. É desenvolvido um simulador de ROVs para ilustrar o comportamento dinâmico do veículo. Outra contribuição importante refere-se a obtenção, de forma experimental das características hidrodinâmicas do veículo, como as massas adicionais, a força de arrasto e o torque restaurador além dos centros de gravidade e de flutuação do veículo.

**P. H. V. Magalhães (2007)**

*Desenvolvimento de um Submersível Remotamente Operado de Baixo Custo e Caracterização dos Sistemas de Propulsão e Vetorização de Empuxo por Hélice*

Esta tese de doutorado apresenta o projeto conceitual, o desenvolvimento e a construção de um veículo submersível remotamente operado (ROV), com o intuito de atuar na inspeção de usinas hidrelétricas. Apresenta modelagem cinemática e dinâmica do movimento do veículo, as características de vários sistemas embarcados, o desenvolvimento de um sistema de controle e

um estudo da propulsão e vetorização do empuxo por hélice. São avaliados, também, os custos de desenvolvimento do projeto.

**A. V. Santana (2010)**

*Estudo do Comportamento Dinâmico Aplicável a Veículos de Localização, Investigação e Resgate Submarino*

Esta dissertação apresenta o desenvolvimento do modelo cinemático e dinâmico de um veículo utilizado em operações com submarinos sinistrados. Desenvolve um controlador robusto de posição e investiga mecanismos para controlar a atitude do mesmo. Apresenta, também, de forma sucinta, os diferentes métodos de modelagem do cabo umbilical encontrados na literatura.

#### 1.4.2 MODELAGEM DE CABOS UMBILICAIS

A partir de estudo bibliográfico identificou-se diversos trabalhos que abordam técnicas de modelagem dinâmica de cabos umbilicais. Observou-se que as técnicas mais utilizadas são: método de elementos finitos, métodos diferenciais e o de massas concentradas (*lumped mass*). Embora o foco desta dissertação esteja voltado à recente técnica de modelagem baseada no formalismo discreto, desenvolvido por PEREIRA, 2010, foram analisados outros trabalhos sobre modelagem de cabos, dos quais pode-se destacar:

**A. Rochinha *et al.* (1990)**

*O Método do Lagrangeano Aumentado no Estudo de Cabos Umbilicais*

Este artigo apresenta um modelo numérico para cabos umbilicais hiperelásticos que desenvolvem grandes deslocamentos e grandes rotações. O modelo não linear desenvolvido é resolvido via Lagrangeano Aumentado. Esta forma de resolução possibilita a descrição do acoplamento existente entre flexão e torção em cabos submetidos a grandes deslocamentos.

**F. Driscoll (2000)**

*Development and Validation of a Lumped-Mass Dynamics Model of a Deep-Sea ROV System*

Este artigo utiliza para a modelagem dinâmica de cabos umbilicais o modelo de massas concentradas. Nesse modelo a estrutura do cabo discretizada por pequenos elementos cilíndricos extensíveis. Neste procedimento as massas são consideradas localizadas nos nós, que correspondem à interface entre os vários cilindros. Para estimar os coeficientes requeridos pelo modelo foram feitas análises experimentais em alto mar.

**T. Yokobiki et al. (2000)**

*Dynamics and Control of a Towed Vehicle in Transient Mode*

Este artigo apresenta o desenvolvimento da modelagem dinâmica e de um sistema de controle para um veículo subaquático remotamente operado. A dinâmica do cabo umbilical é desenvolvida através do método de massas concentradas. A tração do cabo foi apresentada de forma teórica e validada experimentalmente.

**M.C. Fang, et al. (2007)**

*On the motions of the underwater remotely operated vehicle with the umbilical cable effect*

Este artigo desenvolve um modelo hidrodinâmico de simulação do ROV. O efeito do cabo umbilical é considerado através do método do lagrangeano aumentado. Foram apresentados resultados de simulações com e sem o efeito do cabo umbilical, mostrando que o cabo interfere de forma significativa no movimento do ROV e não deve ser negligenciado nas simulações.

**D. C. S. Cordovés (2008)**

*Análise de Confiabilidade Estrutural de Cabos Umbilicais*

Esta dissertação de mestrado se propõe a avaliar a confiabilidade da estrutura do cabo umbilical, observando a falha obtida devido ao escoamento e pela fadiga mecânica. Para identificar as tensões que atuam sobre a estrutura do cabo, foi apresentado um modelo dinâmico do cabo umbilical, desenvolvido utilizando o método dos elementos finitos.

**K. Q. Zhu et al. (2008)**

### *A multi-body space-coupled motion simulation for a deep-sea tethered remotely operated vehicle*

Este artigo desenvolve um modelo de acoplamento dinâmico não linear da dinâmica de um ROV à dinâmica de um cabo umbilical. O movimento do ROV é considerado com seis graus de liberdade. O modelo do cabo é desenvolvido usando a técnica de massa concentradas. São apresentados resultados de simulações da proposta de acoplamento.

#### **A. E. L. Pereira (2010)**

##### *O Método da Decomposição de Adomian Aplicada à Interação Fluido-Estrutura de um Cabo*

Esta tese de doutorado descreve a interação de um cabo submerso em um fluido. O processo se dá pelo acoplamento entre a dinâmica do cabo com os movimentos produzidos no fluido. Na modelagem dinâmica, o cabo é representado de forma discreta, considerando o mesmo formado por elementos rígidos conectados através de articulações elásticas fictícias, possibilitando movimentos em três graus de liberdade, para cada elo. Para identificar o movimento do fluido, considera-se a interação do cabo com o meio como o escoamento de um fluido sobre um cilindro circular, obtendo-se as soluções analíticas das equações de Navier-Stokes através do Método da Decomposição de Adomian. São apresentadas simulações do acoplamento das dinâmicas do cabo e sua interação com o fluido.

## **1.5. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO**

O texto apresentado a seguir é organizado com a seguinte estrutura:

- *Capítulo 2:* É apresentado um estudo sobre a modelagem cinemática de veículos subaquáticos. O método utilizado para transformação das velocidades e posições do referencial do corpo para o referencial inercial é o de Ângulos de Euler.
- *Capítulo 3:* É desenvolvida a modelagem dinâmica de veículos subaquáticos, considerando aspectos hidrodinâmicos, a ação dos propulsores sobre o veículo e a ação das correntes marinhas. Além disso, são realizadas simulações em malha aberta com base no modelo dinâmico do veículo NEROV, que também é descrito neste capítulo.
- *Capítulo 4:* O cabo umbilical presente nos ROVs é modelado em três dimensões via formalismo discreto, considerando a discretização do cabo umbilical em pequenas hastes rígidas conectadas por articulações flexíveis fictícias. As equações do modelo são obtidas a



partir da aplicação das equações de Euler – Lagrange. Após a apresentação do modelo são realizadas simulações em malha aberta e análise do comportamento dinâmico do cabo.

- *Capítulo 5:* Neste capítulo são descritos os métodos para o acoplamento entre as dinâmicas do cabo e do ROV, detalhando as transformações efetuadas entre os sistemas de referência utilizados e a obtenção dos torques produzidos pelo ROV.
- *Capítulo 6:* São apresentados os resultados das simulações do comportamento dinâmico do veículo acoplado ao cabo umbilical. Além disso, são realizadas análises sobre esses resultados.
- *Capítulo 7:* Neste capítulo são apresentadas as conclusões da dissertação e sugestões para trabalhos futuros.

## 2. MODELAGEM CINEMÁTICA DE VEÍCULOS SUBAQUÁTICOS

### 2.1 APRESENTAÇÃO

Neste capítulo é desenvolvida a modelagem cinemática dos UUVs, relacionando posições, velocidades e acelerações entre os referenciais inercial e do corpo, sem considerar as forças atuantes sobre o corpo.

### 2.2 SISTEMAS DE COORDENADAS

A modelagem de veículos subaquáticos é desenvolvida utilizando dois sistemas de referência. O primeiro (na Figura 2.1 corresponde ao eixo  $XYZ$ ), chamado de referencial inercial ou referencial fixo, possui sua origem em um ponto qualquer da superfície, e, por convenção, tem o eixo  $X$  apontando para o norte, o eixo  $Y$  para o leste e o eixo  $Z$  apontando para o fundo do mar.

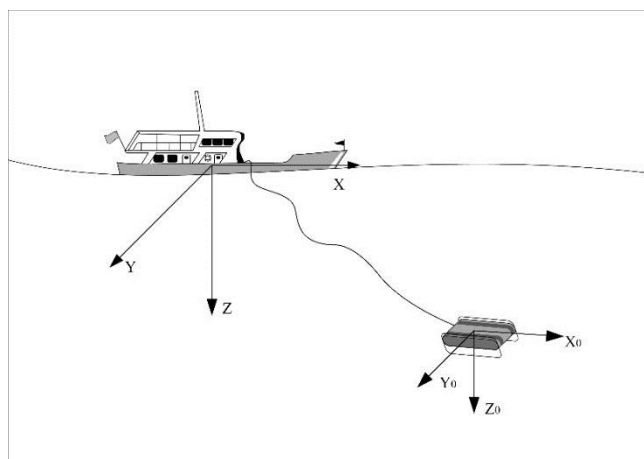


Figura 2.1 - Sistemas de coordenadas de um Veículo Subaquático

O outro sistema de referência utilizado é conhecido por referencial do corpo ou referencial móvel (na Figura 2.1 corresponde ao eixo  $X_0Y_0Z_0$ ). Esse sistema tem sua origem no centro de gravidade do veículo e os eixos coordenados coincidentes com os eixos principais de inércia do veículo (FOSSSEN, 1994).

O veículo possui movimento nos seis graus de liberdade (6 DOF - *Degrees of Freedom*), três lineares (na direção dos três eixos coordenados) e três angulares (rotações em torno dos eixos). Sua dinâmica é obtida no referencial do corpo e a cada passo de integração das equações diferenciais do modelo, são feitas transformações das velocidades para o referencial inercial. Integrando-se as velocidades é possível obter a posição e orientação do veículo no referencial inercial.

As componentes da velocidade no referencial do corpo ( $\vec{v}$ ) dividem-se em velocidade linear ( $\vec{v}_1$ ) e velocidade angular ( $\vec{v}_2$ ) e podem ser expressas na forma vetorial como:

$$\vec{v}_1 = [u, v, w]^T, \vec{v}_2 = [p, q, r]^T \text{ e } \vec{v} = [\vec{v}_1^T, \vec{v}_2^T]^T, \quad (2.1)$$

onde:

$\vec{v}_1$  - velocidade linear ou de translação no referencial do corpo;

$\vec{v}_2$  - velocidade angular ou de rotação no referencial do corpo;

u - componente de  $\vec{v}_1$  na direção de  $X_0$ , movimento de avanço (*Surge*);

v - componente de  $\vec{v}_1$  na direção de  $Y_0$ , movimento de balanço (*Sway*);

w - componente de  $\vec{v}_1$  na direção de  $Z_0$ , movimento de oscilação (*Heave*);

p - componente de  $\vec{v}_2$  em torno do eixo  $X_0$ , movimento de rolamento (*Roll*);

q - componente de  $\vec{v}_2$  em torno do eixo  $Y_0$ , movimento de arfagem (*Pitch*);

r - componente de  $\vec{v}_2$  em torno do eixo  $Z_0$ , movimento de guinada (*Yaw*).

No referencial inercial, as componentes da velocidade ( $\dot{\vec{\eta}}$ ) dividem-se em velocidade linear ( $\dot{\vec{\eta}}_1$ ) e velocidade angular ( $\dot{\vec{\eta}}_2$ ) e são expressas na forma vetorial por:

$$\dot{\vec{\eta}}_1 = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]^T; \dot{\vec{\eta}}_2 = [\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^T \text{ e } \dot{\vec{\eta}} = [\dot{\vec{\eta}}_1^T, \dot{\vec{\eta}}_2^T]^T. \quad (2.2)$$

Os vetores de posição ( $\vec{\eta}_1$ ) e orientação ( $\vec{\eta}_2$ ) no referencial inercial são obtidos a partir da integração dos vetores  $\dot{\vec{\eta}}_1$  e  $\dot{\vec{\eta}}_2$ , e são expressos por:

$$\vec{\eta}_1 = [x, y, z]^T; \vec{\eta}_2 = [\phi, \theta, \psi]^T \text{ e } \vec{\eta} = [\vec{\eta}_1^T, \vec{\eta}_2^T]^T, \quad (2.3)$$

onde:

$\vec{\eta}_1$  - posição do veículo em relação ao referencial inercial;

$\vec{\eta}_2$  - orientação do veículo em relação ao referencial inercial;

x, y e z - indicam as coordenadas do centro de gravidade no referencial inercial;

$\phi, \theta$  e  $\psi$  - indicam os ângulos em relação aos eixos do referencial inercial;

As velocidades angulares e lineares são obtidas no referencial do corpo e devem ser convertidas para o sistema inercial a cada movimento. Essas transformações podem ser feitas de diferentes maneiras. Neste trabalho, é apresentado o método de transformação por Ângulos

de Euler.

### 2.3. TRANSFORMAÇÃO POR ÂNGULOS DE EULER

#### 2.3.1 ROTAÇÕES PRINCIPAIS

O método de transformação por Ângulos de Euler consiste em alinhar os referenciais a partir de rotações sucessivas em torno de cada um dos eixos coordenados. Essas rotações são chamadas de rotações principais, e os ângulos associados a elas são denominados Ângulos de Euler. Existem três matrizes associadas às rotações principais, são elas:

- matriz de rotação em torno do eixo  $X$  de um ângulo  $\phi$ , representada por  $B_\phi$ :

$$B_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \text{sen}\phi \\ 0 & -\text{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix}; \quad (2.4)$$

- matriz de rotação em torno do eixo  $Y$  de um ângulo  $\theta$ , representada por  $B_\theta$ :

$$B_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\text{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}; \quad (2.5)$$

- matriz de rotação em torno do eixo  $Z$  de um ângulo  $\psi$ , representada por  $B_\psi$ :

$$B_\psi = \begin{bmatrix} \cos\psi & \text{sen}\psi & 0 \\ -\text{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (2.6)$$

#### 2.3.2 VELOCIDADE LINEAR

A transformação da velocidade linear entre referenciais se dá a partir de sucessivas rotações principais. Para tal, é fundamental respeitar a ordem das rotações. Existem diversas convenções a respeito da ordem das rotações. Neste trabalho é adotada a convenção xyz usada por (FOSSEN, 1994), para veículos marinhos.

Supondo-se que a velocidade no referencial inercial,  $\vec{\eta}_1 = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]^T$ , seja conhecida. Para obter a velocidade no referencial do corpo é necessário identificar um sistema de eixos paralelos aos eixos do referencial inercial -  $X_3Y_3Z_3$  - e com origem coincidente com a origem do referencial do corpo  $X_0Y_0Z_0$ . A velocidade linear em  $X_3Y_3Z_3$  é igual à velocidade no referencial inercial.

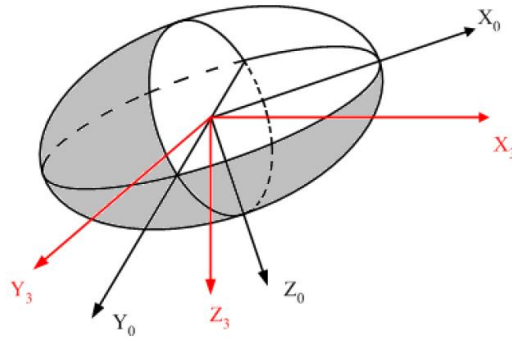


Figura 2.2 - Orientação do veículo em relação ao referencial inercial

Para efetuar a transformação da velocidade do referencial inercial para o referencial do corpo são feitas rotações de  $X_3Y_3Z_3$  em torno de cada um de seus eixos. De acordo com a convenção xyz adotada, é feita, inicialmente, uma rotação em torno do eixo  $Z_3$ , obtendo um novo sistema de eixos  $X_2Y_2Z_2$ . A velocidade linear em  $X_2Y_2Z_2$  pode ser obtida a partir do produto entre a matriz de rotação  $B_\psi$  e o vetor  $\dot{\eta}_1$  expresso da seguinte maneira:

$$\vec{v}_{12} = B_\psi \dot{\eta}_1 \tag{2.7}$$

onde  $\vec{v}_{12}$  representa a velocidade linear no referencial  $X_2Y_2Z_2$ .

O próximo passo consiste em efetuar a rotação do sistema  $X_2Y_2Z_2$  em torno do eixo  $Y_2$ , obtendo, assim, um novo sistema de eixos -  $X_1Y_1Z_1$ . A velocidade linear  $\vec{v}_{11}$  no referencial  $X_1Y_1Z_1$  pode ser obtida a partir do produto da matriz de rotação  $B_\theta$  com o vetor  $\vec{v}_{12}$ , e é escrita como:

$$\vec{v}_{11} = B_\theta \vec{v}_{12} = B_\theta B_\psi \dot{\eta}_1 \tag{2.8}$$

onde  $\vec{v}_{11}$  representa a velocidade linear no referencial  $X_1Y_1Z_1$ .

Por fim, para obter a expressão do vetor velocidade no referencial do corpo ( $X_0Y_0Z_0$ ), efetua-se a rotação do sistema  $X_1Y_1Z_1$  em torno do eixo  $X_1$ , multiplicando-se a matriz de rotação  $B_\phi$  pela velocidade linear no referencial  $X_1Y_1Z_1$ :

$$\vec{v}_1 = B_\phi \vec{v}_{11} = B_\phi B_\theta B_\psi \dot{\eta}_1. \tag{2.9}$$

O produto das matrizes  $B_\phi B_\theta B_\psi$  é definido por:

$$\mathbf{J}_1^T(\vec{\eta}_2) = B_\phi B_\theta B_\psi \quad (2.10)$$

Das equações (2.9) e (2.10), obtém-se a seguinte expressão:

$$\vec{v}_1 = \mathbf{J}_1^T(\vec{\eta}_2)\dot{\vec{\eta}}_1; \quad (2.11)$$

na qual a matriz  $\mathbf{J}_1^T(\vec{\eta}_2)$  corresponde a matriz de transformação da velocidade linear do referencial inercial para o referencial do corpo.

Efetuada-se o produto das matrizes de rotação  $B_\phi B_\theta B_\psi$ , chega-se a forma final da matriz  $\mathbf{J}_1^T(\vec{\eta}_2)$ :

$$\mathbf{J}_1^T(\vec{\eta}_2) = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & s\psi c\theta & -s\theta \\ -s\psi c\phi + c\psi s\theta s\phi & c\psi c\phi + s\phi s\theta s\psi & c\theta s\phi \\ s\psi s\phi + c\psi c\phi s\theta & -c\psi s\phi + s\theta s\psi c\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

onde  $s * = \text{sen}(*)$  e  $c * = \text{cos}(*)$ .

A matriz  $\mathbf{J}_1^T(\vec{\eta}_2)$  é ortogonal (FOSSSEN, 1994), então:

$$\mathbf{J}_1^{-1}(\vec{\eta}_2) = \mathbf{J}_1^T(\vec{\eta}_2) \quad (2.13)$$

Dessa forma, a transformação da velocidade linear no referencial do corpo para o referencial inercial é dada por:

$$\dot{\vec{\eta}}_1 = \mathbf{J}_1^T(\vec{\eta}_2)\vec{v}_1. \quad (2.14)$$

A matriz de transformação da velocidade linear do referencial do corpo para o referencial inercial tem a forma:

$$\mathbf{J}_1(\vec{\eta}_2) = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & -s\psi c\phi + c\psi s\theta s\phi & s\psi s\phi + c\psi c\phi s\theta \\ s\psi c\theta & c\psi c\phi + s\phi s\theta s\psi & -c\psi s\phi + s\theta s\psi c\phi \\ -s\theta & c\theta s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

### 2.3.3 VELOCIDADE ANGULAR

O objetivo deste procedimento consiste em identificar a relação entre a velocidade angular no referencial do corpo,  $\vec{v}_2 = [p, q, r]^T$ , e a taxa de variação dos ângulos de Euler,  $\dot{\vec{\eta}}_2 = [\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^T$ .

São considerados os mesmos sistemas de eixos utilizados na seção anterior. A velocidade angular do sistema  $X_3Y_3Z_3$  (Figura 2.2) em torno do eixo  $Z_3$  é expressa no mesmo referencial como  $\vec{\omega}_3 = [0, 0, \dot{\psi}]^T$ . A transformação de  $\vec{\omega}_3$  para o referencial do corpo é obtida a partir da rotação dos ângulos  $\theta$  e  $\phi$  em torno dos eixos  $Y_2$  e  $X_2$ , respectivamente. Com a utilização das matrizes de rotação, obtém-se a velocidade angular no referencial do corpo em torno do eixo  $Z_3$ :

$$\vec{\omega}_{30} = B_\phi B_\theta [0, 0, \dot{\psi}]^T \quad (2.16)$$

Em seguida, obtém-se a transformação da velocidade angular no sistema  $X_2Y_2Z_2$  em torno de  $Y_2$ ,  $\vec{\omega}_2 = [0, \dot{\theta}, 0]^T$ , para o referencial do corpo. Essa transformação é feita através da rotação de um ângulo  $\phi$  em torno de  $X_1$ , obtendo:

$$\vec{\omega}_{20} = B_\phi [0, \dot{\theta}, 0]^T \quad (2.17)$$

Por fim, a transformação da velocidade angular no sistema  $X_1Y_1Z_1$  em torno do eixo  $X_1$  é dada por:

$$\vec{\omega}_{10} = [\dot{\phi}, 0, 0]^T \quad (2.18)$$

O vetor velocidade angular é obtido a partir da soma das três velocidades angulares encontradas no referencial do corpo (TAVARES, 2003):

$$\vec{v}_2 = [\dot{\phi}, 0, 0]^T + B_\phi [0, \dot{\theta}, 0]^T + B_\phi B_\theta [0, 0, \dot{\psi}]^T \quad (2.19)$$

Efetuando-se as operações entre as matrizes de rotação e os vetores de velocidades angulares, obtém-se a velocidade angular no referencial do corpo como produto da matriz de transformação pelo vetor taxa de variação dos Ângulos de Euler – referencial inercial, dada por:

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & s\phi c\theta \\ 0 & -s\phi & c\phi c\theta \end{bmatrix} \dot{\vec{\eta}}_2. \quad (2.20)$$

Para obter a transformação inversa, do referencial do corpo para o referencial inercial é necessário obter a inversa da matriz obtida, dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & s\phi c\theta \\ 0 & -s\phi & c\phi c\theta \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & s\phi t\theta & c\phi t\theta \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & s\phi/c\theta & c\phi/c\theta \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

onde  $t = \tan(*)$ .

A matriz inversa não é definida para  $\theta = \pm 90^\circ$ , condição que corresponde ao veículo executando um movimento de subida ou descida com eixo longitudinal posicionado na posição vertical. Essa singularidade, entretanto, não chega a representar um problema, uma vez que, normalmente, os centros de gravidade e de flutuação estão suficientemente afastados para que o ângulo permaneça pequeno (DOMINGUEZ, 1989).

Determina-se a transformação da velocidade angular do referencial do corpo para o referencial inercial por:

$$\dot{\vec{\eta}}_2 = \begin{bmatrix} 1 & s\phi t\theta & c\phi t\theta \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & s\phi/c\theta & c\phi/c\theta \end{bmatrix} \vec{v}_2 \quad (2.22)$$

Define-se a matriz de transformação por:

$$\mathbf{J}_2(\vec{\eta}_2) = \begin{bmatrix} 1 & s\phi t\theta & c\phi t\theta \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & s\phi/c\theta & c\phi/c\theta \end{bmatrix}; \quad (2.23)$$

Consequentemente:

$$\dot{\vec{\eta}}_2 = \mathbf{J}_2(\vec{\eta}_2) \vec{v}_2. \quad (2.24)$$

No caso da matriz de  $\mathbf{J}_2(\vec{\eta}_2)$  é possível observar que:



$$\mathbf{J}_2^{-1}(\vec{\eta}_2) \neq \mathbf{J}_2^T(\vec{\eta}_2) \quad (2.25)$$

### 2.3.3 MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO NOS SEIS GRAUS DE LIBERDADE

A transformação das coordenadas do referencial do corpo para o referencial inercial, para os seis graus de liberdade, simultaneamente, pode ser descrita como:

$$\dot{\vec{\eta}} = \mathbf{J}(\vec{\eta})\vec{v} \quad (2.26)$$

onde:

$$\dot{\vec{\eta}} = \begin{bmatrix} \dot{\vec{\eta}}_1 \\ \dot{\vec{\eta}}_2 \end{bmatrix}; \mathbf{J}(\vec{\eta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1(\vec{\eta}_1) & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{J}_2(\vec{\eta}_2) \end{bmatrix} \text{ e } \vec{v} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

### 3. MODELAGEM DINÂMICA DE VEÍCULOS SUBAQUÁTICOS

Neste capítulo é desenvolvida a modelagem dinâmica de veículos subaquáticos, considerando a interação da estrutura do veículo com o meio aquático, as forças de massa adicional, peso, empuxo, arrasto, sustentação, o efeito das correntes oceânicas e a ação dos propulsores. No caso específico dos ROVs, ainda deve ser considerada a tração do cabo umbilical, cujo modelo é desenvolvido no capítulo 4.

#### 3.1. DINÂMICA DO CORPO RÍGIDO

Um corpo material pode ser interpretado como ponto material ou como corpo rígido, dependendo das dimensões e da sua distribuição de massa. Um veículo subaquático possui dimensões não desprezíveis, com sua massa distribuída por sua estrutura, e portanto, deve ser tratado como um corpo rígido (SOUZA, 2003).

A representação da dinâmica para um corpo rígido possui termos adicionais em relação à dinâmica do ponto material, que estão relacionados com o movimento de rotação do corpo em torno dos seus eixos. Estes termos adicionais correspondem à força centrípeta e à força de Coriolis. Segundo (YUH, 1990) as equações matriciais da dinâmica de translação e rotação do corpo rígido podem ser escritas como:

$$M_{RB}\dot{\vec{v}} + C_{RB}(\vec{v})\vec{v} = \vec{\tau}_{RB}. \quad (3.1)$$

A matriz  $M_{RB}$  é a chamada de matriz de inércia,  $C_{RB}$  corresponde a matriz de Coriolis e Centrípeta,  $\vec{v} = [u, v, w, p, q, r]^T$  é o vetor das velocidades (lineares e angulares), e  $\vec{\tau}_{RB} = [X_{RB}, Y_{RB}, Z_{RB}, K_{RB}, M_{RB}, N_{RB}]^T$  é o vetor resultante de todas as forças e momentos aplicados no veículo.

##### 3.1.1. MATRIZ DE INÉRCIAS

Segundo FOSSEN (1994) a matriz de inércia possui uma única parametrização possível, definida por:

$$M_{RB} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & mz_G & -my_G \\ 0 & m & 0 & -mz_G & 0 & mx_G \\ 0 & 0 & m & my_G & -mx_G & 0 \\ 0 & -mz_G & my_G & I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ mz_G & 0 & -mx_G & -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -my_G & mx_G & 0 & -I_{xz} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

onde  $m$  é a massa do veículo,  $I_x$ ,  $I_y$  e  $I_z$  são os momentos de inércia do referencial do corpo;  $I_{xy}$ ,  $I_{yz}$  e  $I_{xz}$  são os produtos de inércia e  $\mathbf{r}_G = [x_G, y_G, z_G]^T$  corresponde ao centro de gravidade no referencial do corpo.

De maneira geral a matriz de inércias é simétrica e positiva definida, ou seja:

$$M_{RB} = M_{RB}^T > 0 \quad (3.3)$$

$$\dot{M}_{RB} = 0 \quad (3.4)$$

Nos veículos que apresentam mobilidade em componentes internos a equação  $\dot{M}_{RB} = 0$  não é verdadeira, pois qualquer deslocamento de massas internas pode implicar no deslocamento do centro de massa, dos momentos e produtos de inércia.

### 3.1.2 MATRIZ DE CORIOLIS E CENTRÍPETA

Diferentemente da matriz de inércias, a matriz de Coriolis e Centrípeta admite diferentes parametrizações. Segundo GOULART (2007) a matriz pode ser escrita como:

$$C_{RB} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & C_1 \\ -C_1^T & C_2 \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

onde:

$$C_1 = \begin{bmatrix} m(y_G q + z_G r) & -m(x_G q - w) & -m(x_G r + w) \\ -m(y_G p + w) & m(z_G r + x_G p) & -m(y_G r - u) \\ -m(z_G p - v) & -m(z_G q + u) & m(x_G p + y_G q) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

e

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & -I_{yz}q - I_{xz}p + I_z r & I_{yz}r + I_{xz}p - I_y q \\ I_{yz}q + I_{xz}p - I_z r & 0 & -I_{xz}r - I_{xy}q + I_x p \\ -I_{yz}r - I_{xz}p + I_y q & I_{xz}r + I_{xy}q - I_x r & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Pode-se concluir que a matriz  $C_{RB}$  é anti-simétrica, ou seja:

$$C_{RB} = -C_{RB}^T. \quad (3.8)$$

### 3.2. FORÇA DE MASSA ADICIONAL

Quando o veículo encontra-se submerso, este passa a ter massas adicionais a seu comportamento de corpo rígido, devido ao volume de fluido que o envolve. Dessa forma, para que o veículo se desloque no fluido, ele deve vencer também a inércia do fluido, o que faz o veículo parecer ter uma massa superior à real.

Segundo FOSSEN (1994), a expressão da força devido à massa adicional,  $\vec{\tau}_A = [X_A, Y_A, Z_A, K_A, M_A, N_A]$ , em função das matrizes de inércia  $M_A$  e de Coriolis  $C_A$ , pode ser obtida da seguinte maneira:

$$M_A \dot{v} + C_A(v)v = -\vec{\tau}_A. \quad (3.9)$$

#### 3.2.1 MATRIZ DE INÉRCIA DE MASSA ADICIONAL

Para o caso de veículos com três planos de simetria, considera-se a matriz de inércia de massa adicionada ( $M_A$ ) como diagonal. Suas componentes são associadas às acelerações, variações dos esforços externos e a geometria do veículo. Porém, dada a complexidade de obtenção dos coeficientes para todos os estados de operação possíveis do veículo, adotam-se coeficientes constantes (FOSSEN, 1994). No caso do veículo possuir três planos de simetria, considera-se como diagonal a matriz  $M_A$ .

Assim sendo, a matriz  $M_A$  possui a seguinte parametrização:

$$M_A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

#### 3.2.2 MATRIZ DE CORIOLIS E CENTRÍPETA DE MASSA ADICIONADA

A matriz de Coriolis e Centrípeta de massa adicional possui termos dependentes das componentes do vetor velocidade do veículo, e pode apresentar diferentes parametrizações. Uma parametrização possível é:

$$C_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & A_{33}w & -A_{22}v \\ 0 & 0 & 0 & -A_{33}w & 0 & A_{11}u \\ 0 & 0 & 0 & A_{22}v & -A_{11}u & 0 \\ 0 & A_{33}w & -A_{22}v & 0 & A_{66}r & -A_{55}q \\ -A_{33}w & 0 & A_{11}u & -A_{66}r & 0 & A_{44}p \\ A_{22}v & -A_{11}u & 0 & A_{55}q & -A_{44}p & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

### 3.3 FORÇAS DE ARRASTO HIDRODINÂMICO E SUSTENTAÇÃO

As forças de arrasto e sustentação são dependentes de dimensões e formato do veículo, rugosidade da sua superfície e velocidade de operação. Existem diferentes modelos para identificação das forças de arrasto e sustentação. Neste trabalho é apresentado o modelo desenvolvido por TAVARES (2003).

A força de arrasto é paralela à velocidade do veículo em relação ao fluido, porém com sentido contrário, e pode ser escrita como uma expansão não linear (FOSSEN, 1994), da seguinte forma:

$$\vec{F}_D = D_S \vec{v} + D_Q |\vec{v}| \vec{v}, \quad (3.12)$$

onde  $\vec{F}_D$  é a força de arrasto,  $\vec{v}$  é a velocidade do veículo em relação ao fluido,  $D_S$  é o coeficiente de arrasto linear,  $D_Q$  é o coeficiente de arrasto quadrático.

A força de sustentação ( $\vec{F}_L$ ) é ortogonal (lateral e vertical) à velocidade do veículo em relação ao fluido, e é expressa por:

$$\vec{F}_L = \frac{1}{2} \rho C_L(Rn, \alpha) A(\alpha) |\mathbf{v}| \mathbf{v}, \quad (3.13)$$

onde  $C_L(Rn, \alpha)$  é o coeficiente de sustentação,  $\rho$  é a massa específica do fluido,  $A(\alpha)$  é a área frontal projetada pelo veículo.

As forças e os momentos produzidos nas direções  $X_0$ ,  $Y_0$  e  $Z_0$ , devido a arrasto e sustentação são obtidos pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} X_{DL} &= \frac{1}{2} \rho U^2 \nabla^{\frac{2}{3}} C_x(\alpha, \beta) \\ Y_{DL} &= \frac{1}{2} \rho U^2 \nabla^{\frac{2}{3}} C_y(\beta, \gamma) \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$Z_{DL} = \frac{1}{2} \rho U^2 \nabla^{2/3} C_z(\alpha, \gamma)$$

$$K_{DL} = \frac{1}{2} \rho U^2 \nabla C_k(\gamma) + \frac{1}{2} \rho \nabla^{5/3} C_p p |p|$$

$$M_{DL} = \frac{1}{2} \rho U^2 \nabla C_m(\alpha) + \frac{1}{2} \rho \nabla^{5/3} C_q q |q|$$

$$N_{DL} = \frac{1}{2} \rho U^2 \nabla C_n(\beta) + \frac{1}{2} \rho \nabla^{5/3} C_r r |r|$$

Nestas equações são utilizadas as seguintes notações:

- $X_{DL}$ ,  $Y_{DL}$  e  $Z_{DL}$  são as forças resultantes de arrasto e sustentação nas direções  $X_0$ ,  $Y_0$  e  $Z_0$ , respectivamente;
- $K_{DL}$ ,  $M_{DL}$  e  $N_{DL}$ , e são os momentos produzidos pelas forças resultantes de arrasto e sustentação nas direções  $X_0$ ,  $Y_0$  e  $Z_0$ , respectivamente;
- $\nabla$  é o volume do veículo;
- $U$  é o módulo da velocidade linear do veículo, ou seja,  $U = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ ;
- $C_p$ ,  $C_q$  e  $C_r$  são os coeficientes de amortecimento ao movimento de rotação do veículo;
- $C_x$ ,  $C_y$  e  $C_z$  são os coeficientes das forças de arrasto e sustentação;
- $C_k$ ,  $C_m$  e  $C_n$  são os coeficientes dos momentos produzidos pelas forças de arrasto e sustentação;
- $\alpha$  é o ângulo de ataque,  $\beta$  é o ângulo de deriva e  $\gamma$  é o ângulo de ataque lateral.

Os coeficientes são obtidos de maneira experimental em tanques de provas para vários ângulos de ação. As equações das forças e momentos obtidos em função do arrasto e da sustentação podem ser expressas num formato matricial-vetorial. Definindo-se  $\vec{\tau}_{DL} = [X_{DL}, Y_{DL}, Z_{DL}, K_{DL}, M_{DL}, N_{DL}]^T$ , obtém-se:

$$\vec{\tau}_{DL} = -\mathbf{D}(\vec{v})\vec{v}, \quad (3.15)$$

onde  $v = [u, v, w, p, q, r]^T$  é o vetor velocidade no referencial do corpo.

A matriz de arrasto e sustentação ( $\mathbf{D}(\vec{v})$ ) possui o seguinte formato (DOMINGUEZ, 1989; TAVARES, 2003):

$$D(\vec{v}) = -\frac{1}{2}\rho \begin{bmatrix} \nabla^{\frac{2}{3}}u C_x(\alpha, \beta) & \nabla^{\frac{2}{3}}v C_x(\alpha, \beta) & \nabla^{\frac{2}{3}}w C_x(\alpha, \beta) & 0 & 0 & 0 \\ \nabla^{\frac{2}{3}}u C_y(\beta, \gamma) & \nabla^{\frac{2}{3}}v C_y(\beta, \gamma) & \nabla^{\frac{2}{3}}w C_y(\beta, \gamma) & 0 & 0 & 0 \\ \nabla^{\frac{2}{3}}u C_z(\alpha, \gamma) & \nabla^{\frac{2}{3}}v C_z(\alpha, \gamma) & \nabla^{\frac{2}{3}}w C_z(\alpha, \gamma) & 0 & 0 & 0 \\ \nabla u C_k(\gamma) & \nabla v C_k(\gamma) & \nabla w C_k(\gamma) & \nabla^{\frac{5}{3}}C_p |p| & 0 & 0 \\ \nabla u C_m(\alpha) & \nabla v C_m(\alpha) & \nabla w C_m(\alpha) & 0 & \nabla^{\frac{5}{3}}C_q |q| & 0 \\ \nabla u C_n(\beta) & \nabla v C_n(\beta) & \nabla w C_n(\beta) & 0 & 0 & \nabla^{\frac{5}{3}}C_r |r| \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

### 3.4 FORÇAS RESTAURADORAS

As forças restauradoras são oriundas da ação gravitacional (peso) e do empuxo hidrostático, que possuem a mesma direção, paralela ao eixo Z do referencial inercial, e sentidos contrários. Os vetores da força peso ( $\vec{f}_W$ ) e da força de empuxo ( $\vec{f}_B$ ) podem ser escritos no referencial do veículo de acordo com:

$$\vec{f}_W = \mathbf{J}_1^{-1}(\vec{\eta}_2)[0,0,W]^T \quad (3.17)$$

$$\vec{f}_B = -\mathbf{J}_1^{-1}(\vec{\eta}_2)[0,0,B]^T. \quad (3.18)$$

A componente W corresponde ao módulo da força peso, definida pela equação 3.17, enquanto a componente B corresponde ao módulo da força de empuxo, dada pela equação 3.18.

$$W = m \cdot g \quad (3.19)$$

$$B = \rho g \nabla \quad (3.20)$$

O símbolo  $\nabla$  na expressão do empuxo B representa o volume de fluido deslocado pelo veículo,  $g$  é a aceleração da gravidade e  $\rho$  corresponde à massa específica da água. A força peso atua sobre o centro de gravidade do veículo, que tem sua posição definida por  $\vec{r}_G = [x_G, y_G, z_G]^T$ , e a força de empuxo atua sobre o centro de empuxo (centro de volume), cujo vetor posição é  $\vec{r}_B = [x_B, y_B, z_B]^T$ . Ambos os vetores de posição estão expressos no referencial do corpo. O momento provocado pela força peso ( $\vec{M}_W$ ) e o momento provocado pelo empuxo ( $\vec{M}_B$ ) em relação à origem do referencial do corpo são definidos por:

$$\vec{M}_W = \vec{r}_G \times \vec{f}_W \quad (3.21)$$

$$\vec{M}_B = \vec{r}_B \times \vec{f}_B$$

Os momentos produzidos por peso e empuxo atuam no sentido de tentar trazer os ângulos de rolamento ( $\phi$ ) e de arfagem ( $\theta$ ) para zero. Por esta razão, forças de peso e empuxo são denominadas forças restauradoras.

A expressão geral das forças e momentos restauradores, no referencial do corpo, é dada por  $\vec{\tau}_{WB}$ :

$$\vec{\tau}_{WB} = \begin{bmatrix} \vec{f}_W + \vec{f}_B \\ \vec{M}_W + \vec{M}_B \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} (W - B)s\theta \\ -(W - B)c\theta s\phi \\ -(W - B)c\theta c\phi \\ -(y_G W - y_B B)c\theta c\phi + (z_G W - z_B B)c\theta s\phi \\ (z_G W - z_B B)s\theta + (x_G W - x_B B)c\theta c\phi \\ -(x_G W - x_B B)c\theta s\phi - (y_G W - y_B B)s\theta \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

### 3.5. MODELO DINÂMICO DOS VEÍCULOS SUBAQUÁTICOS

#### 3.5.1 MODELO SEM CORRENTE OCEÂNICA

Conhecidas as forças e momentos que atuam sobre os veículos subaquáticos, expressos no referencial do corpo, é possível identificar o seu modelo dinâmico, sob a forma:

$$M_{RB}\dot{\vec{v}} + C_{RB}(\vec{v})\vec{v} = \vec{\tau}_A + \vec{\tau}_{DL} + \vec{\tau}_{WB} + \vec{\tau}. \quad (3.23)$$

Substituindo  $\vec{\tau}_A$  e  $\vec{\tau}_{DL}$  pelas equações 3.9 e 3.15, e considerando  $\vec{\tau}_{WB} = -\vec{g}$ , obtém-se uma nova expressão para o modelo dinâmico:

$$(M_{RB} + M_A)\dot{\vec{v}} + (C_{RB}(\vec{v}) + C_A(\vec{v}))\vec{v} + D(\vec{v})\vec{v} + \vec{g} = \vec{\tau}. \quad (3.24)$$

Considerando  $M = M_{RB} + M_A$ ,  $C(\vec{v}) = C_{RB}(\vec{v}) + C_A(\vec{v})$ , pode-se reescrever a equação da seguinte forma:

$$M\dot{\vec{v}} + C(\vec{v})\vec{v} + D(\vec{v})\vec{v} + \vec{g} = \vec{\tau}. \quad (3.25)$$

O modelo dinâmico expresso na equação 3.25 está expresso no referencial do corpo. O mesmo pode ser transformado para o referencial inercial, trabalhando-se com ângulos de Euler. Dessa forma, a dinâmica do veículo, no referencial inercial é totalmente descrita por:



$$\begin{aligned}
M\dot{\vec{v}} + C(\vec{v})\vec{v} + D(\vec{v})\vec{v} + \mathbf{g}(\vec{\eta}) &= \vec{\tau} \quad (\text{dinâmica}); \\
\dot{\vec{\eta}} &= \mathbf{J}(\vec{\eta})\vec{v} \quad (\text{cinemática}),
\end{aligned} \tag{3.26}$$

onde:

- $M$  é a matriz de inércia;
- $C(\vec{v})$  é a matriz Coriolis e Centrípeta;
- $D(\vec{v})$  é a matriz de arrasto e sustentação;
- $\mathbf{g}(\vec{\eta})$  é o vetor de forças e momentos restauradores;
- $\vec{\tau}$  é o vetor de forças e momentos dos propulsores;
- $\mathbf{J}(\vec{\eta})$  é a matriz de transformação por ângulos de Euler;
- $\vec{v}$  é o vetor velocidade no referencial do corpo;
- $\dot{\vec{\eta}}$  é o vetor velocidade no referencial inercial.

### 3.5.2 MODELO DINÂMICO COM CORRENTE OCEÂNICA

A velocidade da correnteza  $\vec{v}_C^E$  pode ser indicada, no referencial inercial, pelo vetor:  $\vec{v}_C^E = [u_C^E, v_C^E, w_C^E, 0, 0, 0]^T$ , desprezando o movimento de rotação provocado pela corrente. Esse vetor pode ser indicado no referencial do corpo utilizando a transformação por Ângulos de Euler, ou seja:

$$\vec{v}_C = \mathbf{J}^{-1}(\vec{\eta})\vec{v}_C^E. \tag{3.27}$$

O vetor  $\vec{v}_C = [u_C, v_C, w_C, 0, 0, 0]^T$  corresponde à velocidade da corrente no referencial do corpo. A diferença entre a velocidade do veículo  $\vec{v}$  e a velocidade da corrente  $\vec{v}_C$  é denominada velocidade relativa e indicada por  $\vec{v}_r$ .

$$\vec{v}_r = \vec{v} - \vec{v}_C. \tag{3.28}$$

Substituindo a velocidade relativa à corrente no lugar da velocidade do veículo no modelo dinâmico expresso na equação 3.25, obtém-se a seguinte equação:

$$M\dot{\vec{v}}_r + C(\vec{v}_r)\vec{v}_r + D(\vec{v}_r)\vec{v}_r + \mathbf{g}(\vec{\eta}) = \vec{\tau}. \tag{3.29}$$

Considerando que  $\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_C$ , a equação cinemática 3.27 resulta em:

$$\dot{\vec{\eta}} = \mathbf{J}(\vec{\eta})\vec{v}_r + \vec{v}_c^E. \quad (3.30)$$

A taxa de variação da corrente no referencial pode ser considerada nula, ou seja,  $\dot{\vec{v}}_c = 0$ . Logo  $\dot{\vec{v}} = \dot{\vec{v}}_r$ . Dessa forma o modelo dinâmico com a corrente oceânica é descrito pelas equações:

$$\begin{aligned} M\dot{\vec{v}} + C(\vec{v}_r)\vec{v}_r + D(\vec{v}_r)\vec{v}_r + \mathbf{g}(\vec{\eta}) &= \vec{\tau} \\ \dot{\vec{\eta}} &= \mathbf{J}(\vec{\eta})\vec{v}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

### 3.6. MODELAGEM DINÂMICA DOS PROPULSORES

#### 3.6.1. FORÇAS DE PROPULSÃO

A propulsão dos veículos subaquáticos é feita por hélices acionados por motores elétricos ou motores hidráulicos. O empuxo (T) e o torque (Q) desenvolvidos por cada propulsor são expressos por (DOMINGUEZ, 1989; CUNHA *et al.*, 2000):

$$T = C_T(\sigma) \frac{\rho}{8} [v_w^2 + (0,7\pi nD)^2] \pi D^2, \quad (3.32)$$

$$Q = C_Q(\sigma) \frac{\rho}{8} [v_w^2 + (0,7\pi nD)^2] \pi D^3. \quad (3.33)$$

Nestas equações, o ângulo de avanço é definido por:

$$\sigma = \tan^{-1} \left( \frac{v_w}{0,7\pi nD} \right), \quad (3.34)$$

onde  $v_w$  é a velocidade com que a água se dirige para o hélice, D é o diâmetro do hélice e  $n$  é o número de rotações por segundo.

Os coeficientes  $C_T$  e  $C_Q$  são funções do ângulo de avanço e obtidos a partir de consulta a curvas características do propulsor (DOMINGUEZ, 1989).

A velocidade de entrada de água no hélice ( $v_w$ ) é considerada igual a componente da velocidade relativa do veículo paralela à linha de ação do hélice. Por exemplo, para os hélices que atuam na direção  $X_0$ , a velocidade de entrada da água é igual a componente de velocidade relativa na direção  $X_0$ . Porém, observa-se que a parcela de propulsão associada à velocidade de entrada de água nos hélices é bem menor do que a parcela devido à rotação dos hélices

(FOSSSEN, 1994; SOUZA, 2003). Assim, tomando  $\sigma = 0^\circ$ , as equações (3.32) e (3.33) podem ser expressas como:

$$T = T_{|n|n}|n|n \quad (3.35)$$

$$Q = Q_{|n|n}|n|n, \quad (3.36)$$

onde  $T_{|n|n} = C_T(0^\circ)\rho(0,7)^2\pi^3D^4/8$  é o coeficiente de empuxo e  $Q_{|n|n} = C_Q(0^\circ)\rho(0,7)^2\pi^3D^5/8$  é o coeficiente de torque, ambos com fluxo axial de água no hélice desprezado.

Considerando esta simplificação, o vetor de forças e momentos de propulsão  $\vec{\tau}$  resulta em:

$$\vec{\tau} = \mathbf{B}\vec{u}. \quad (3.37)$$

sendo  $p$  o número de propulsores,  $\mathbf{u}$  é um vetor de dimensão  $p \times 1$  com elementos  $u_i = |n_i|n_i$  e  $\mathbf{B}$  é uma matriz de dimensão  $6 \times p$  cujos elementos estão distribuídos em função da localização dos propulsores, ou seja, a definição dos seus elementos depende do posicionamento dos propulsores.

### 3.6.2 DINÂMICA DOS ATUADORES

Neste trabalho, considera-se que os hélices são acionadas por motores de corrente contínua (c.c). Este é o tipo de motor descrito na maioria dos trabalhos pesquisados. A dinâmica elétrica do motor c.c. é descrita por:

$$L_a \frac{di_a}{dt} = -R_a i_a - 2\pi K_m n + v_a \quad (3.38)$$

Nesta equação,  $i_a$  é a corrente de armadura,  $v_a$  é a tensão aplicada,  $R_a$  é a resistência da armadura,  $L_a$  é a indutância da armadura,  $n$  é o número de rotações por segundo e  $K_m$  é a constante eletromagnética do motor. A constante  $2\pi$  é utilizada porque está se trabalhando com a velocidade do hélice expressa em rotações por segundo. A constante de tempo do circuito elétrico do motor é bem menor do que a sua constante de tempo mecânica, de modo que normalmente o termo  $L_a \frac{di_a}{dt}$  é desconsiderado. Portanto:

$$-R_a i_a - 2\pi K_m n + v_a = 0 \quad (3.39)$$

A dinâmica mecânica do motor é expressa por:

$$2\pi J_p \frac{dn}{dt} = T_m - Q, \quad (3.40)$$

onde  $J_p$  é a soma dos momentos de inércia do rotor e do hélice e  $T_m$  é o torque do motor. O torque resistente devido à interação entre a água e o hélice é designado por  $Q$ .

Para motores de ímãs permanentes, o torque é aproximadamente proporcional à corrente, podendo ser apresentado como:

$$T_m = K_m i_a \quad (3.41)$$

Para motores de excitação, o torque é aproximadamente proporcional ao quadrado da corrente, ou seja:

$$T_m = K_m i_a^2 \quad (3.42)$$

Nas equações (3.41) e (3.42) o efeito da saturação magnética foi desprezado.

A equação diferencial matricial-vetorial para a dinâmica dos propulsores pode ser representada por:

$$\mathbf{P}\dot{\vec{n}} = \vec{\tau}_m - \vec{\tau}_r, \quad (3.43)$$

onde  $\mathbf{P}$  é uma matriz diagonal contendo os momentos de inércia dos propulsores,  $\dot{\vec{n}}$  é o vetor aceleração angular dos hélices,  $\vec{\tau}_m$  é o vetor de torques motores e  $\vec{\tau}_r$  é o vetor de torques resistentes.

Os conceitos teóricos apresentados até aqui, constituem uma base de conhecimentos que permite o desenvolvimento de modelos dinâmicos para veículos subaquáticos, independentemente de suas dimensões ou formas. A definição dos parâmetros difere-se entre os veículos principalmente devido ao formato do casco, número de propulsores, utilização ou não de lemes de controle e existência ou não de cabo umbilical.

Neste trabalho, apresenta-se o desenvolvimento do modelo dinâmico do veículo denominado NEROV (*Norwegian Experimental Remotely Operated*), pois os seus parâmetros são conhecidos e difundidos na literatura. O trabalho de modelagem, acompanhado de simulações computacionais, é apresentado na próxima seção.

### 3.7. SIMULAÇÕES EM MALHA ABERTA

Para verificação do comportamento dinâmico do ROV foram realizadas simulações considerando diferentes possibilidades de operação. As simulações foram realizadas considerando o veículo NEROV, de fabricação norueguesa, com seis propulsores e controle ativo nos seis graus de liberdade (FOSSEN, 1994). Os parâmetros para as simulações e a

dinâmica dos propulsores foram os mesmos utilizados em (TAVARES, 2003). Em todas as simulações a velocidade da corrente oceânica foi considerada nula. Os programas foram desenvolvidos no Matlab, utilizando a função “ODE45” como integrador numérico.

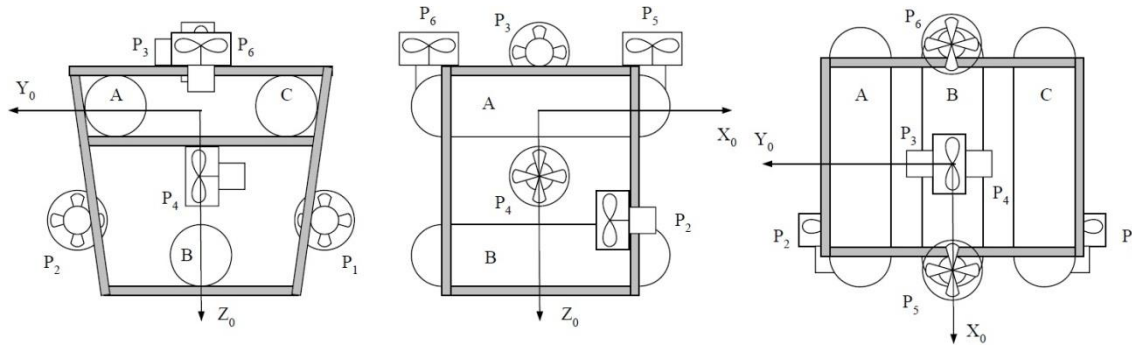


Figura 3.1 - Desenho simplificado do NEROV

Conforme ilustra a Figura 3.1, o NEROV possui seis propulsores, com dois atuando em cada direção do referencial do corpo. O modelo dinâmico do veículo, de forma resumida é descrito por:

$$\begin{aligned}
 M\dot{\vec{v}} + C(\vec{v})\vec{v} + D(\vec{v})\vec{v} + g(\vec{\eta}) &= \vec{\tau} \quad (\text{dinâmica}) \\
 \dot{\vec{\eta}} &= \mathbf{J}(\vec{\eta})\vec{v} \quad (\text{cinemática}) \\
 \mathbf{P}\dot{\vec{n}} &= \vec{\tau}_m - \vec{\tau}_r \quad (\text{propulsores})
 \end{aligned}
 \tag{3.44}$$

onde

- $M$  é a matriz de inércia ( $M = M_{RB} + M_A$ );
- $C(\vec{v})$  é a matriz de Coriolis e Centrípeta ( $C(\vec{v}) = C_{RB}(\vec{v}) + C_A(\vec{v})$ );
- $D(\vec{v})$  é a matriz de arrasto e sustentação;
- $g(\vec{\eta})$  é o vetor de forças e momentos restauradores;
- $\vec{\tau}$  é o vetor de forças e momentos dos propulsores;
- $\dot{\vec{\eta}}$  é o vetor de velocidade no referencial inercial;
- $\vec{v}$  é o vetor de velocidade no referencial do corpo;
- $\mathbf{J}(\vec{\eta})$  é a matriz de transformação por ângulos de Euler;
- $\mathbf{P}$  é a matriz de inércia dos propulsores;
- $\dot{\vec{n}}$  é o vetor aceleração angular dos propulsores.

Conforme apresentado anteriormente, o modelo dinâmico de um veículo subaquático é complexo. Ele é não linear, multivariável e acoplado (uma vez que os seis graus de liberdade

estão acoplados). A dinâmica do veículo nos seis graus de liberdade é representada por seis equações diferenciais de segunda ordem.

Nas simulações realizadas foram aplicadas tensões em cada propulsor para verificar o comportamento do robô frente a diferentes condições iniciais. A dinâmica do cabo foi negligenciada. A seguir são apresentados os resultados de algumas simulações realizadas com condições iniciais diferentes.

### 3.7.1 SIMULAÇÃO 1

Nesta simulação (figuras 3.2 a 3.5) foram ligados somente os propulsores 1 e 2, os demais permaneceram desligados. As condições iniciais e a velocidade da corrente oceânica foram consideradas nulas. A simulação foi realizada da seguinte forma: no intervalo de 0s a 20s os propulsores 1 e 2 foram alimentados com 8V e -8V, respectivamente; no intervalo de 20s a 40s todos os propulsores foram desligados; no intervalo de 40s a 60s os propulsores 1 e 2 foram alimentados com -8V e 8V, respectivamente; a partir de 60s todos os propulsores permaneceram desligados.

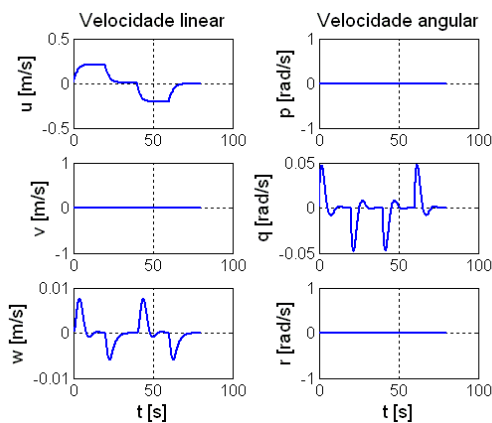


Figura 3.2 - Velocidades no referencial do corpo.

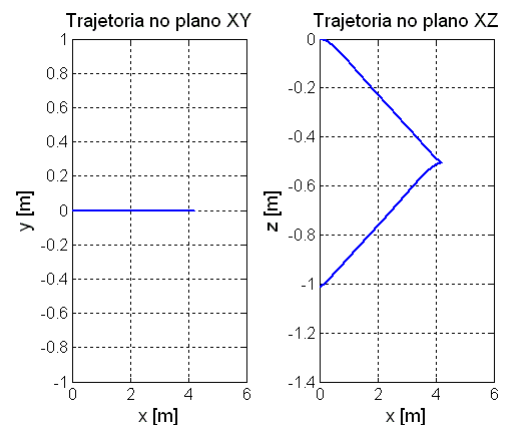


Figura 3.4 - Trajetórias nos planos coordenados.

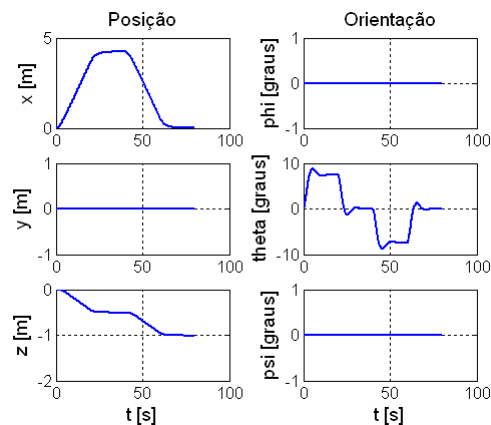


Figura 3.3 - Posições e orientações no referencial inercial.

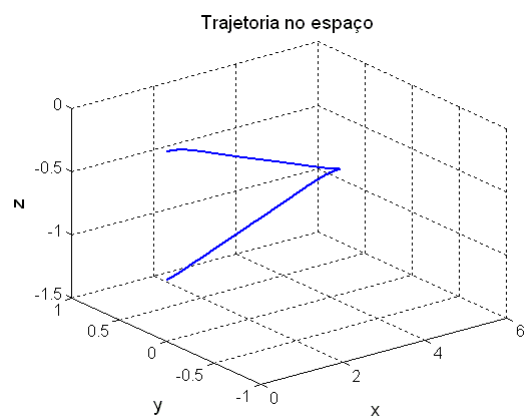


Figura 3.5 - Trajetórias no espaço.

### 3.7.2 SIMULAÇÃO 2

Nesta simulação (figuras 3.6 e 3.7) todos os propulsores permaneceram desligados. As posições angulares iniciais foram consideradas  $\phi = \theta = \psi = 60^\circ$  e as demais condições iniciais, assim como a velocidade da corrente oceânica, foram consideradas nulas. A simulação foi realizada para verificar a ação das forças restauradoras sobre os ângulos de rolamento ( $\phi$ ) e arfagem ( $\theta$ ).

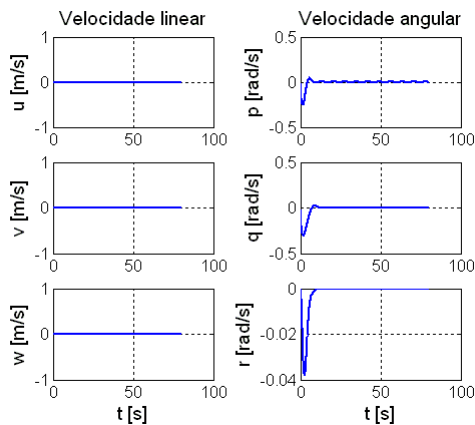


Figura 3.6. Velocidades no referencial do corpo.

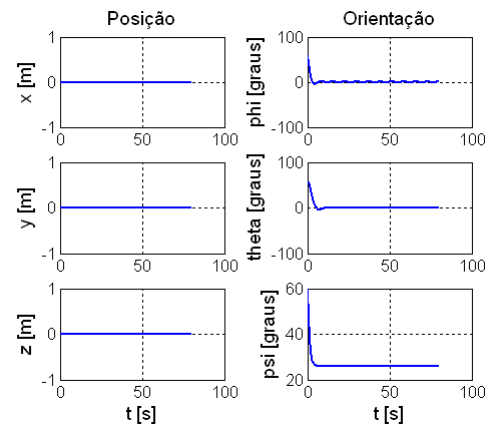


Figura 3.7. Posições e orientações no referencial inercial.

### 3.7.3 SIMULAÇÃO 3

Nesta simulação (figuras 3.8 a 3.11) foram ligados somente os propulsores 1 e 2, os demais permaneceram todo o tempo desligados. As condições iniciais e a velocidade da corrente oceânica foram consideradas nulas. Durante toda a simulação os propulsores 1 e 2 permaneceram alimentados, respectivamente, com 24V e -20V.

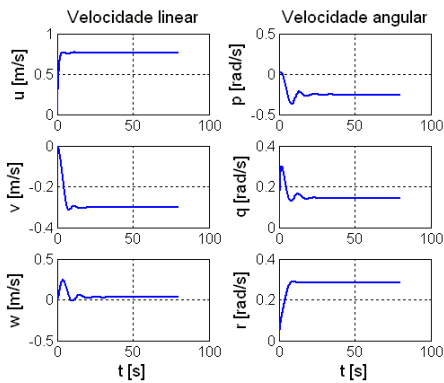


Figura 3.8. Velocidades no referencial do corpo.

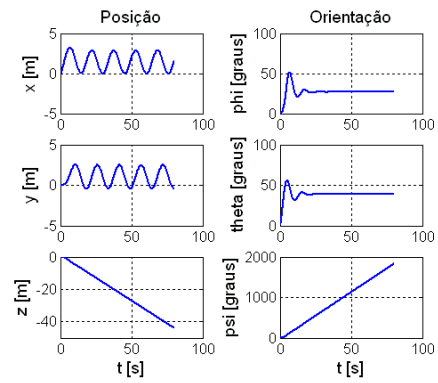


Figura 3.9. Posições e orientações no referencial inercial.

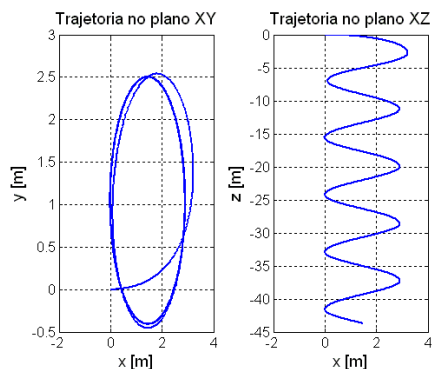


Figura 3.10 Trajetórias nos planos coordenados

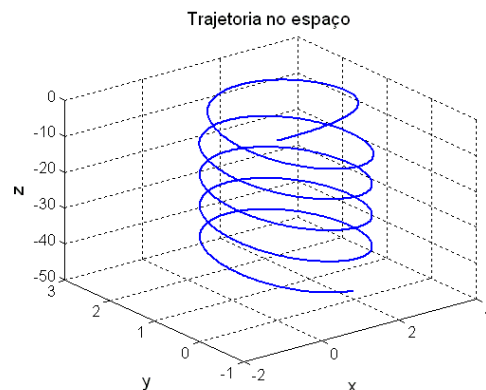


Figura 3.11 - Trajetórias nos planos coordenados

### 3.7.4 CONCLUSÕES DAS SIMULAÇÕES EM MALHA ABERTA

Na simulação 1, foram aplicadas tensões de mesmo módulo, porém com sentidos contrários nos propulsores 1 e 2. Como os propulsores 1 e 2 são responsáveis pelo movimento longitudinal do robô esperava-se que ele realizasse movimento apenas para frente ou para trás. No entanto, percebe-se um deslocamento vertical do robô. Isso acontece devido ao fato das linhas de ação dos propulsores estarem abaixo do centro de gravidade, gerando, assim, um movimento de arfagem.

A simulação 2 foi realizada para verificar a ação das forças restauradoras sobre o robô. Foram consideradas posições angulares iniciais iguais a  $60^\circ$  e não foi aplicada tensão alguma sobre os propulsores. Dessa forma, percebe-se que depois de transcorrido um determinado tempo os ângulos de rolamento e arfagem se aproximam de zero devido à ação das forças restauradoras. As velocidades lineares permanecem nulas e, portanto, não ocorre deslocamento longitudinal no referencial inercial.

Na simulação 3 os propulsores 1 e 2 foram alimentados com tensões diferentes em módulo. A força de propulsão está na direção longitudinal, no entanto, a diferença entre as velocidades de rotação dos hélices gera um movimento de guinada. Esse movimento unido ao movimento vertical faz com que o corpo se movimente descrevendo uma trajetória espiral.



## **4. MODELAGEM ANALÍTICA DO CABO UMBILICAL**

### **4.1 APRESENTAÇÃO**

Os cabos umbilicais são utilizados em diversas atividades marinhas e possuem como principais funções transmitir sinais de controle e alimentar com energia sistemas instalados no fundo do mar. Nesta dissertação é formulada uma proposta de acoplamento entre as dinâmicas de cabos umbilicais e veículos submersíveis remotamente operados, os ROVs.

Para efetuar o desenvolvimento de um sistema de controle confiável desses veículos é importante a determinação do modelo dinâmico do cabo. Entretanto, a obtenção desse modelo é um problema complexo, dadas às não linearidades presentes no sistema, à flexibilidade estrutural do cabo no espaço tridimensional e à identificação de interações do cabo com o meio no qual ele está submerso.

Existem diferentes técnicas para a modelagem dinâmica do cabo. Neste trabalho, considera-se o formalismo discreto desenvolvido em uma recente tese de doutorado (PEREIRA, 2010), que propõe um novo formalismo para a modelagem de cabos, cujo fundamento principal é supor que o cabo é formado por diversos elos rígidos conectados por articulações elásticas. É como se o cabo fosse constituído por múltiplos pêndulos esféricos, sendo que cada junção entre dois pêndulos consecutivos é realizada por uma articulação elástica.

### **4.2. MODELAGEM DO CABO**

A proposta central deste modelo consiste na formulação de um método que permita determinar o Lagrangeano do sistema de forma algorítmica, independente do número de elementos que se escolheu para dividir a estrutura flexível. Através da aplicação das equações de Euler-Lagrange para todos os graus de liberdade do sistema é possível a obtenção final do modelo dinâmico.

Considera-se inicialmente um cabo umbilical com sua extremidade superior afixada a uma base, que pode ser fixa ou móvel, com extremidade inferior conectada a um objeto de massa  $m_c$ , conforme Figura 4.1. O objeto pode ser um ROV, por exemplo.

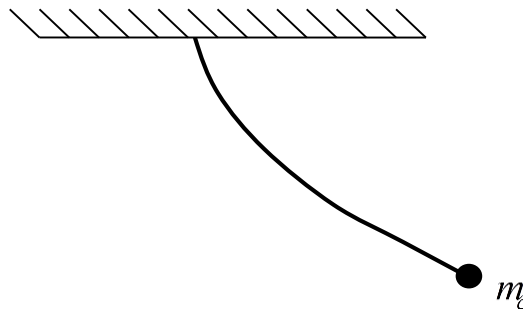


Figura 4.1 - Representação Esquemática do Cabo Umbilical.

O cabo é dividido em  $n$  pequenas hastes rígidas (elos), de comprimento  $l_k$ , com  $1 \leq k \leq n$ , conectadas por articulações fictícias flexíveis, que permitem movimentos em três graus de liberdade, denominados de azimute, elevação e torção. A Figura 4.2 apresente um cabo dividido em 5 elos.

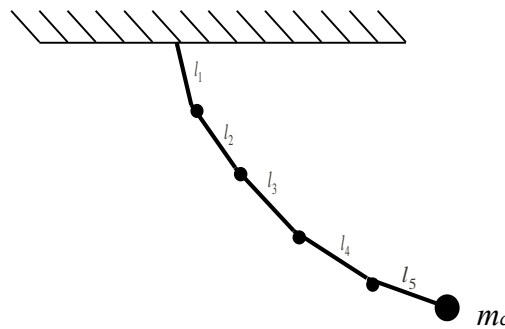


Figura 4.2 - Cabo umbilical dividido em cinco partes rígidas ( $n = 5$ )

Para determinar a posição de cada elo e da carga terminal é associado um sistema de referência na extremidade fixa do cabo, denominado sistema  $X_1Y_1Z_1$ , e um sistema de eixos coordenados  $X_iY_iZ_i$  para cada articulação, com  $i \in \mathbb{N}$  e  $2 \leq i \leq n - 1$ .

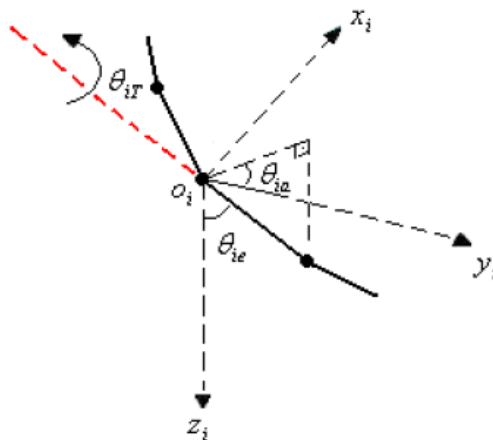


Figura 4.3 - Ângulos de azimute, elevação e torção na  $i$ -ésima articulação.

Em cada articulação são considerados os ângulos de azimute, elevação e torção do cabo

(conforme Figura 4.3). Na  $k$ -ésima articulação, por exemplo, os ângulos podem ser descritos da seguinte forma:  $\theta_{ke}$  é o ângulo de elevação do  $k$ -ésimo elo, correspondente ao ângulo formado entre a reta suporte do elo e o eixo vertical  $Z_k$ ;  $\theta_{ka}$  é o ângulo de azimute e corresponde ao ângulo formado pela projeção do elo no plano horizontal  $X_k Y_k$  com o sentido positivo do eixo  $Y_k$ ,  $\theta_{kT}$  é o ângulo de torção e corresponde a rotação em torno do próprio eixo do elo.

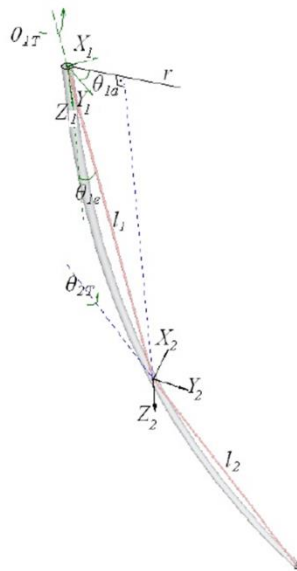


Figura 4.4 - Representação do posicionamento dos eixos coordenados

Para desenvolver o modelo dinâmico do cabo define-se, primeiramente, o sistema referencial inicial,  $X_1 Y_1 Z_1$ , que possui origem coincidente com a extremidade fixa do cabo, eixo  $Z_1$  com direção vertical, eixo  $Y_1$  com direção coincidente ao movimento inicial do cabo e, eixo  $X_1$  perpendicular a  $Y_1$ . Em seguida, deve-se determinar um referencial para cada articulação,  $X_i Y_i Z_i$ , da seguinte forma (conforme Figura 4.4):  $O_i Z_i$  é paralelo ao eixo  $OZ_1$ ; o eixo  $O_i Y_i$  é paralelo a projeção horizontal do elo anterior à  $i$ -ésima articulação; e o eixo  $O_i X_i$  é ortogonal ao eixo  $O_i Y_i$ .

Os elos têm massas concentradas nos centros de massa. As coordenadas dos centros de massa dos elos que possuem massas  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$  são, respectivamente,  $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) \dots (x_n, y_n, z_n)$ , enquanto  $(x_c, y_c, z_c)$  são as coordenadas do centro de massa da carga de massa  $m_c$ . Em cada articulação são consideradas três constantes elásticas, ou seja, na  $k$ -ésima articulação são consideradas as constantes elásticas  $k_{ia}, k_{ie}, k_{iT}$ , devidas aos ângulos de azimute, elevação e torção, respectivamente.

A Energia Cinética é definida por:

$$E_C = E_{C_R} + E_{C_T} \quad (4.1)$$

onde  $E_{C_R}$  é a energia cinética devido ao movimento de rotação do cabo e  $E_{C_T}$  é a energia cinética devido ao movimento de translação do cabo.

A energia cinética devido ao movimento de rotação do cabo é definida por:

$$\begin{aligned} E_{C_R} = & \frac{1}{2} I_{R_1} \dot{\theta}_{1e}^2 + \frac{1}{2} I_{R_2} (\dot{\theta}_{1e}^2 + \dot{\theta}_{2e}^2) + \frac{1}{2} I_{R_3} (\dot{\theta}_{1e}^2 + \dot{\theta}_{2e}^2 + \dot{\theta}_{3e}^2) + \dots \\ & + \frac{1}{2} I_{R_n} \left( \sum_{i=1}^n \dot{\theta}_{ie} \right)^2 + \frac{1}{2} I_{T_1} \dot{\theta}_{1T}^2 + \frac{1}{2} I_{T_2} \dot{\theta}_{2T}^2 \\ & + \frac{1}{2} I_{T_3} \dot{\theta}_{3T}^2 + \dots + \frac{1}{2} (I_{T_n} + I_{T_c}) \dot{\theta}_{nT}^2, \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde  $I_{R_1}, I_{R_2}, I_{R_3}, \dots, I_{R_n}$ , são os momentos de inércia de rotação em elevação dos elos e  $I_{T_1}, I_{T_2}, I_{T_3}, \dots, I_{T_n}, I_{T_c}$  são os momentos de inércia devido ao movimento de torção nas articulações. É importante ressaltar que a parcela de energia cinética rotacional devida aos movimentos em azimute foi negligenciada. De fato, a energia cinética de translação é a mais importante e ainda, negligenciar a parcela em azimute facilita em muito a obtenção de fórmulas genéricas para o Lagrangeano do sistema, conforme será visto posteriormente.

A energia cinética devida ao movimento de translação do cabo é definida por:

$$\begin{aligned} E_{C_T} = & \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) \\ & + \frac{1}{2} m_3 (\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2 + \dot{z}_3^2) + \dots + \frac{1}{2} m_n (\dot{x}_n^2 + \dot{y}_n^2 + \dot{z}_n^2) \\ & + \frac{1}{2} m_c (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + \dot{z}_c^2), \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde  $\frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2)$ ,  $\frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2)$ ,  $\frac{1}{2} m_3 (\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2 + \dot{z}_3^2)$ , ...,  $\frac{1}{2} m_n (\dot{x}_n^2 + \dot{y}_n^2 + \dot{z}_n^2)$  e  $\frac{1}{2} m_c (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + \dot{z}_c^2)$  são as energias cinéticas devidas ao movimento das massas  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$  dos elos e da massa  $m_c$  da carga, respectivamente.

A energia potencial é definida por:

$$\begin{aligned}
E_P = & \frac{1}{2}k_{1e}\theta_{1e}^2 + \frac{1}{2}k_{2e}(\theta_{2e} - \theta_{1e})^2 + \frac{1}{2}k_{3e}(\theta_{3e} - \theta_{2e})^2 + \dots \\
& + \frac{1}{2}k_{ne}(\theta_{ne} - \theta_{(n-1)e})^2 + \frac{1}{2}k_{1a}\theta_{1a}^2 + \frac{1}{2}k_{2a}(\theta_{2a} - \theta_{1a})^2 \\
& + \frac{1}{2}k_{3a}(\theta_{3a} - \theta_{2a})^2 + \dots + \frac{1}{2}k_{na}(\theta_{na} - \theta_{(n-1)a})^2 + \frac{1}{2}k_{1T}\theta_{1T}^2 \\
& + \frac{1}{2}k_{2T}(\theta_{2T} - \theta_{1T})^2 \\
& + \frac{1}{2}k_{3T}(\theta_{3T} - \theta_{2T})^2 + \dots + \frac{1}{2}k_{nT}(\theta_{nT} - \theta_{(n-1)T})^2 + m_1g h_1 \\
& + m_2g h_2 + m_3g h_3 + \dots + m_n g h_n,
\end{aligned} \tag{4.4}$$

onde  $k_{1e}, k_{2e}, k_{3e}, \dots, k_{ne}$  são as constantes elásticas nas articulações devido aos ângulos de elevação;  $k_{1a}, k_{2a}, k_{3a}, \dots, k_{na}$  são as constantes elásticas nas articulações devido aos ângulos de azimute;  $k_{1T}, k_{2T}, k_{3T}, \dots, k_{nT}$  são as constantes elásticas nas articulações devido aos ângulos de torção;  $m_1g h_1 + m_2g h_2 + m_3g h_3 + \dots + m_n g h_n$  é a energia potencial gravitacional, sendo  $h_1, h_2, h_3, \dots, h_n$  as alturas.

As alturas são definidas por:

$$\begin{aligned}
h_1 &= \frac{a_1}{2} \Rightarrow h_1 = \frac{l_1}{2}(1 - \cos\theta_{1e}), \\
h_2 &= a_1 + \frac{a_2}{2} \Rightarrow h_2 = a_1 + \frac{l_2}{2}(1 - \cos\theta_{2e}), \\
h_3 &= a_1 + a_2 + \frac{a_3}{2} \Rightarrow h_3 = a_1 + a_2 + \frac{l_3}{2}(1 - \cos\theta_{3e}), \\
&\vdots \\
h_n &= \sum_{i=1}^{n-1} a_i + \frac{a_n}{2} \Rightarrow h_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i + \frac{l_n}{2}(1 - \cos\theta_{ne}).
\end{aligned} \tag{4.5}$$

A Figura 4.5 mostra a representação das alturas em função dos ângulos de elevação.

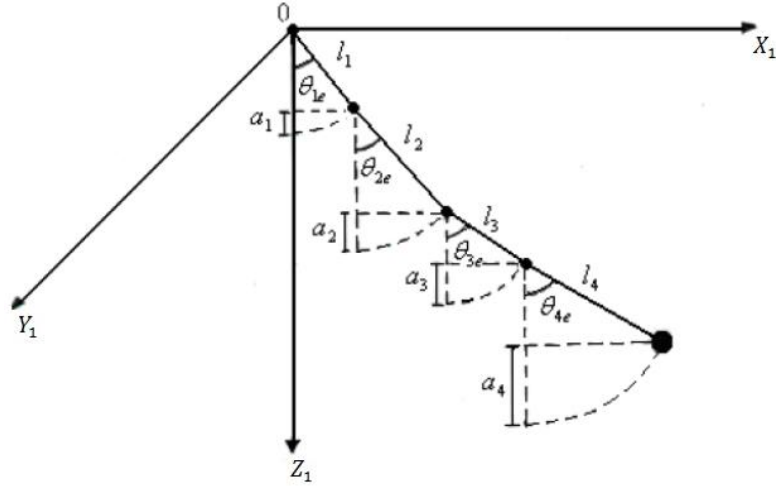


Figura 4.5 - Cabo dividido em 4 partes rígidas (n=4)

Por definição, o Lagrangeano de um sistema físico é determinado por:

$$L = E_c - E_p \tag{4.6}$$

Das equações (4.1), (4.2), (4.3), (4.4), (4.5), e (4.6) pode-se obter o Lagrangeano do sistema, dado por:

$$\begin{aligned}
 L = & \frac{1}{2} I_{R1} \dot{\theta}_{1a}^2 + \frac{1}{2} I_{R2} (\dot{\theta}_{1a}^2 + \dot{\theta}_{2a}^2) + \frac{1}{2} I_{R3} (\dot{\theta}_{1a}^2 + \dot{\theta}_{2a}^2 + \dot{\theta}_{3a}^2) + \dots \\
 & + \frac{1}{2} I_{Rn} \left( \sum_{i=1}^n \dot{\theta}_{ia} \right)^2 + \frac{1}{2} I_{T1} \dot{\theta}_{1T}^2 + \frac{1}{2} I_{T2} \dot{\theta}_{2T}^2 + \frac{1}{2} I_{T3} \dot{\theta}_{3T}^2 \\
 & + \dots + \frac{1}{2} (I_{Tn} + I_{Tc}) \dot{\theta}_{nT}^2 + \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) \\
 & + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) + \frac{1}{2} m_3 (\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2 + \dot{z}_3^2) + \dots \\
 & + \frac{1}{2} m_n (\dot{x}_n^2 + \dot{y}_n^2 + \dot{z}_n^2) + \frac{1}{2} m_c (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + \dot{z}_c^2) \\
 & - \frac{1}{2} k_{1e} \theta_{1e}^2 - \frac{1}{2} k_{2e} (\theta_{2e} - \theta_{1e})^2 - \frac{1}{2} k_{3e} (\theta_{3e} - \theta_{2e})^2 \\
 & - \dots - \frac{1}{2} k_{ne} (\theta_{ne} - \theta_{(n-1)e})^2 - \frac{1}{2} k_{1a} \theta_{1a}^2 \\
 & - \frac{1}{2} k_{2a} (\theta_{2a} - \theta_{1a})^2 \\
 & - \frac{1}{2} k_{3a} (\theta_{3a} - \theta_{2a})^2 - \dots - \frac{1}{2} k_{na} (\theta_{na} - \theta_{(n-1)a})^2 \\
 & - \frac{1}{2} k_{1T} \theta_{1T}^2 - \frac{1}{2} k_{2T} (\theta_{2T} - \theta_{1T})^2 \\
 & - \frac{1}{2} k_{3T} (\theta_{3T} - \theta_{2T})^2 - \dots - \frac{1}{2} k_{nT} (\theta_{nT} - \theta_{(n-1)T})^2 \\
 & - m_1 g h_1 - m_2 g h_2 - m_3 g h_3 - \dots - m_n g h_n.
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Simplificando a equação (4.7) e considerando  $\theta_0 = 0$  e  $\sum_{i=1}^{\ell-1} a_i = 0$ , quando  $\ell = 1$ , tem-se:

$$\begin{aligned}
 L = \sum_{\ell=1}^n & \left\{ \frac{1}{2} I_{R\ell} \left( \sum_{i=1}^{\ell} \dot{\theta}_{ia} \right)^2 + \frac{1}{2} I_{T\ell} \dot{\theta}_{\ell T}^2 + \frac{1}{2} m_{\ell} (\dot{x}_{\ell}^2 + \dot{y}_{\ell}^2 + \dot{z}_{\ell}^2) \right. \\
 & - \frac{1}{2} k_{\ell e} (\theta_{\ell e} - \theta_{(\ell-1)e})^2 - \frac{1}{2} k_{\ell a} (\theta_{\ell a} - \theta_{(\ell-1)a})^2 \\
 & - \frac{1}{2} k_{\ell T} (\theta_{\ell T} - \theta_{(\ell-1)T})^2 \\
 & \left. - m_{\ell} g \left[ \sum_{i=1}^{\ell-1} a_i + \frac{l_{\ell}}{2} (1 - \cos(\theta_{\ell e})) \right] \right\} + \frac{1}{2} I_{Tc} \dot{\theta}_{nT}^2 \\
 & + \frac{1}{2} m_c (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + \dot{z}_c^2).
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

As coordenadas dos centros de massa das partes rígidas e da carga terminal são determinadas a partir de transformações homogêneas. A primeira articulação fictícia é colocada na origem do sistema de referência  $X_1 Y_1 Z_1$ , o ponto  $O$ , e os ângulos de azimute  $\theta_{1a}$  e elevação  $\theta_{1e}$  são considerados de acordo com a figura 4.6.

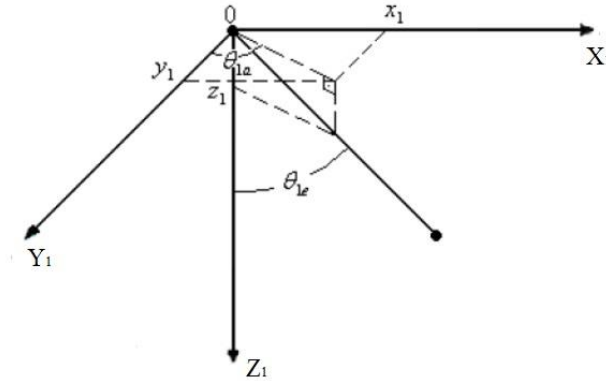


Figura 4.6 - Representação do primeiro elo do cabo.

A partir desta figura, conclui-se que as coordenadas da segunda articulação fictícia  $x_{0_1}$ ,  $y_{0_1}$ ,  $z_{0_1}$  em relação ao sistema de referência  $X_1 Y_1 Z_1$  são:

$$\begin{cases}
 x_{0_1} = l_1 \text{sen}(\theta_{1e}) \text{sen}(\theta_{1a}) \\
 y_{0_1} = l_1 \text{sen}(\theta_{1e}) \text{cos}(\theta_{1a}) \\
 z_{0_1} = l_1 \text{cos}(\theta_{1e})
 \end{cases} \tag{4.9}$$

Conseqüentemente, as coordenadas do centro de massa do primeiro elo ( $l_1$ ) em relação ao referencial  $X_1 Y_1 Z_1$  são:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{l_1}{2} \text{sen}(\theta_{1e}) \text{sen}(\theta_{1a}) \\ y_1 = \frac{l_1}{2} \text{sen}(\theta_{1e}) \text{cos}(\theta_{1a}) \\ z_1 = \frac{l_1}{2} \text{cos}(\theta_{1e}) \end{cases} \quad (4.10)$$

Um novo sistema de referência  $X_2Y_2Z_2$  é incorporado na estrutura do cabo, com origem na segunda articulação fictícia. Considera-se a matriz homogênea de rotação de um ângulo  $\theta_{1a}$  em torno do eixo  $OZ_1$  em relação ao referencial  $X_1Y_1Z_1$ , dada por:

$$H_{0_1} = \begin{bmatrix} [R_{z,\theta}]_{3 \times 3} & \begin{pmatrix} x_{0_1} \\ y_{0_1} \\ z_{0_1} \end{pmatrix} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

onde a matriz de rotação  $R_{z,\theta}$  de um ângulo  $\theta_{1a}$  em torno do eixo  $OZ_1$  é definida por

$$R_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \text{cos}(\theta) & \text{sen}(\theta) & 0 \\ -\text{sen}(\theta) & \text{cos}(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Das equações (4.11) e (4.12) obtém-se a matriz de transformação entre os referenciais  $X_1Y_1Z_1$  e  $X_2Y_2Z_2$ :

$$H_{0_1} = \begin{bmatrix} \text{cos}(\theta_{1a}) & \text{sen}(\theta_{1a}) & 0 & l_1 \text{sen}(\theta_{1e}) \text{sen}(\theta_{1a}) \\ -\text{sen}(\theta_{1a}) & \text{cos}(\theta_{1a}) & 0 & l_1 \text{sen}(\theta_{1e}) \text{cos}(\theta_{1a}) \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \text{cos}(\theta_{1e}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Em seguida, considera-se o próximo elo ( $l_2$ ) e um novo sistema de referência  $X_3Y_3Z_3$  é posicionado na terceira articulação fictícia, conforme mostra a Figura 4.7.

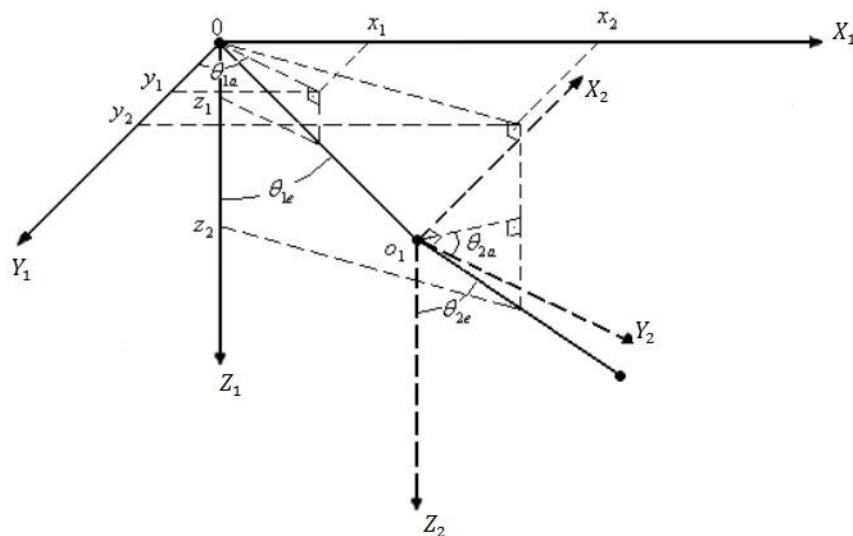


Figura 4.7 - Representação do primeiro e segundo elos do cabo.

As coordenadas da terceira articulação em relação ao referencial  $X_2Y_2Z_2$  são:



$$\begin{cases} x_{1_2} = l_2 \text{sen}(\theta_{2e}) \text{sen}(\theta_{2a}) \\ y_{1_2} = l_2 \text{sen}(\theta_{2e}) \text{cos}(\theta_{2a}) \\ z_{1_2} = l_2 \text{cos}(\theta_{2e}) \end{cases} \quad (4.14)$$

Então a matriz homogênea de rotação de um ângulo  $\theta_{2a}$  em torno do eixo  $O_2Z_2$  em relação ao referencial  $X_2Y_2Z_2$ , é definida por:

$$H_{1_2} = \begin{bmatrix} [R_{z,\theta}]_{3 \times 3} & \begin{pmatrix} x_{1_2} \\ y_{1_2} \\ z_{1_2} \end{pmatrix} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

ou seja, a matriz de transformação que relaciona os sistemas  $X_2Y_2Z_2$  e  $X_3Y_3Z_3$  tem a forma:

$$H_{1_2} = \begin{bmatrix} \text{cos}(\theta_{2a}) & \text{sen}(\theta_{2a}) & 0 & l_2 \text{sen}(\theta_{2e}) \text{sen}(\theta_{2a}) \\ -\text{sen}(\theta_{2a}) & \text{cos}(\theta_{2a}) & 0 & l_2 \text{sen}(\theta_{2e}) \text{cos}(\theta_{2a}) \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \text{cos}(\theta_{2e}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

A fim de determinar a posição da terceira articulação fictícia e das coordenadas do centro de massa da segunda parte rígida em relação ao referencial  $X_1Y_1Z_1$ , efetua-se o produto das matrizes  $H_{0_1}$  e  $H_{1_2}$ , de onde se obtém:  $H_{0_2} = H_{0_1} \cdot H_{1_2}$ , ou seja:

$$\begin{aligned} & H_{0_2} \\ &= \begin{bmatrix} \text{cos}(\theta_{1a} + \theta_{2a}) & \text{sen}(\theta_{1a} + \theta_{2a}) & 0 & l_2 \text{sen}\theta_{2e} \text{sen}(\theta_{1a} + \theta_{2a}) + l_1 \text{sen}(\theta_{1e}) \text{sen}(\theta_{1a}) \\ -\text{sen}(\theta_{1a} + \theta_{2a}) & \text{cos}(\theta_{1a} + \theta_{2a}) & 0 & l_2 \text{sen}\theta_{2e} \text{cos}(\theta_{1a} + \theta_{2a}) + l_1 \text{sen}(\theta_{1e}) \text{cos}(\theta_{1a}) \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \text{cos}(\theta_{2e}) + l_1 \text{cos}(\theta_{1e}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Portanto as coordenadas do centro de massa da segunda parte rígida do cabo, em relação ao referencial  $X_1Y_1Z_1$  são dadas por:

$$\begin{cases} x_2 = \frac{l_2}{2} \text{sen}(\theta_{2e}) \text{sen}(\theta_{1a} + \theta_{2a}) + l_1 \text{sen}(\theta_{1e}) \text{sen}(\theta_{1a}) \\ y_2 = \frac{l_2}{2} \text{sen}(\theta_{2e}) \text{cos}(\theta_{1a} + \theta_{2a}) + l_1 \text{sen}(\theta_{1e}) \text{cos}(\theta_{1a}) \\ z_2 = \frac{l_2}{2} \text{cos}(\theta_{2e}) + l_1 \text{cos}(\theta_{1e}) \end{cases} \quad (4.18)$$

Adicionando-se mais um elo ( $l_3$ ) e procedendo-se analogamente ao modo descrito anteriormente, mostra-se que as coordenadas da quarta articulação fictícia em relação ao referencial  $X_3Y_3Z_3$  são:

$$\begin{cases} x_{23} = l_3 \text{sen}(\theta_{3e}) \text{sen}(\theta_{3a}) \\ y_{23} = l_3 \text{sen}(\theta_{3e}) \text{cos}(\theta_{3a}) \\ z_{23} = l_3 \text{cos}(\theta_{3e}) \end{cases} \quad (4.19)$$

Então a matriz homogênea de rotação de um ângulo  $\theta_{3a}$  em torno do eixo  $O_3Z_3$  em relação ao referencial  $X_3Y_3Z_3$ , é definida por:

$$H_{13} = \begin{bmatrix} [R_{z,\theta}]_{3 \times 3} & \begin{pmatrix} x_{23} \\ y_{23} \\ z_{23} \end{pmatrix} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

ou seja,

$$H_{13} = \begin{bmatrix} \text{cos}(\theta_{3a}) & \text{sen}(\theta_{3a}) & 0 & l_3 \text{sen}(\theta_{3e}) \text{sen}(\theta_{3a}) \\ -\text{sen}(\theta_{3a}) & \text{cos}(\theta_{3a}) & 0 & l_3 \text{sen}(\theta_{3e}) \text{cos}(\theta_{3a}) \\ 0 & 0 & 1 & l_3 \text{cos}(\theta_{3e}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

As posições da terceira articulação fictícia e das coordenadas do centro de massa da terceira parte rígida, em relação ao referencial  $X_1Y_1Z_1$ , são determinadas a partir do produto das matrizes  $H_{02}$  e  $H_{13}$ , ou seja,  $H_{03} = H_{02} \cdot H_{13}$ , e de modo semelhante ao que foi mostrado anteriormente, obtém-se as seguintes coordenadas do centro de massa da terceira parte rígida:

$$\begin{cases} x_3 = \frac{l_3}{2} \text{sen}\theta_{3e} \text{sen}(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a}) + l_2 \text{sen}\theta_{2e} \text{sen}(\theta_{1a} + \theta_{2a}) + l_1 \text{sen}(\theta_{1e}) \text{sen}(\theta_{1a}) \\ y_3 = \frac{l_3}{2} \text{sen}\theta_{3e} \text{cos}(\theta_{1a} + \theta_{2a} + \theta_{3a}) + l_2 \text{sen}\theta_{2e} \text{cos}(\theta_{1a} + \theta_{2a}) + l_1 \text{sen}(\theta_{1e}) \text{cos}(\theta_{1a}) \\ z_3 = \frac{l_3}{2} \text{cos}(\theta_{3e}) + l_2 \text{cos}(\theta_{2e}) + l_1 \text{cos}(\theta_{1e}) \end{cases} \quad (4.22)$$

Usando o procedimento análogo ao que foi mostrado para as coordenadas dos centros de massa da primeira, segunda e terceira partes rígidas, obtém-se as coordenadas do centro de massa da  $k$ -ésima parte rígida e as coordenadas da carga terminal, respectivamente, como sendo:

$$\begin{cases} x_k = \frac{l_k}{2} \text{sen}(\theta_{ke}) \text{sen} \left( \sum_{i=1}^k \theta_{ia} \right) + \sum_{j=1}^{k-1} \left[ l_j \text{sen}(\theta_{je}) \text{sen} \left( \sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \right] \\ y_k = \frac{l_k}{2} \text{sen}(\theta_{ke}) \cos \left( \sum_{i=1}^k \theta_{ia} \right) + \sum_{j=1}^{k-1} \left[ l_j \text{sen}(\theta_{je}) \cos \left( \sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \right] \\ z_k = \frac{l_k}{2} \cos(\theta_{ke}) + \sum_{j=1}^{k-1} l_j \cos(\theta_{je}) \end{cases} \quad (4.23)$$

com  $k = 1, 2, \dots, n$ ,

$$\begin{cases} x_c = \sum_{j=1}^n \left[ l_j \text{sen}(\theta_{je}) \text{sen} \left( \sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \right] \\ y_c = \sum_{j=1}^n \left[ l_j \text{sen}(\theta_{je}) \cos \left( \sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \right] \\ z_c = \sum_{j=1}^n l_j \cos(\theta_{je}) \end{cases} \quad (4.24)$$

As derivadas destas coordenadas em relação à  $t$ , são dadas por:

$$\begin{cases} \dot{x}_k = \frac{l_k}{2} \left[ \text{sen}(\theta_{ke}) \cos \left( \sum_{i=1}^k \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^k \dot{\theta}_{ia} + \cos(\theta_{ke}) \text{sen} \left( \sum_{i=1}^k \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{ke} \right] + \\ \quad + \sum_{j=1}^{k-1} l_j \left[ \text{sen}(\theta_{je}) \cos \left( \sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^j \dot{\theta}_{ia} + \cos(\theta_{je}) \text{sen} \left( \sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{je} \right] \\ \dot{y}_k = \frac{l_k}{2} \left[ -\text{sen}(\theta_{ke}) \text{sen} \left( \sum_{i=1}^k \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^k \dot{\theta}_{ia} + \cos(\theta_{ke}) \cos \left( \sum_{i=1}^k \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{ke} \right] + \\ \quad + \sum_{j=1}^{k-1} l_j \left[ -\text{sen}(\theta_{je}) \text{sen} \left( \sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^j \dot{\theta}_{ia} + \cos(\theta_{je}) \cos \left( \sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{je} \right] \\ \dot{z}_k = -\frac{l_k}{2} \text{sen}(\theta_{ke}) \dot{\theta}_{ke} - \sum_{j=1}^{k-1} l_j \text{sen}(\theta_{je}) \dot{\theta}_{je} \end{cases}$$

(4.25)

$$\begin{cases} \dot{x}_c = \sum_{j=1}^n l_j \left[ \text{sen}(\theta_{je}) \cos \left( \sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^j \dot{\theta}_{ia} + \cos(\theta_{je}) \text{sen} \left( \sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{je} \right] \\ \dot{y}_c = \sum_{j=1}^n l_j \left[ -\text{sen}(\theta_{je}) \text{sen} \left( \sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^j \dot{\theta}_{ia} + \cos(\theta_{je}) \cos \left( \sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{je} \right] \\ \dot{z}_c = - \sum_{j=1}^n l_j \text{sen}(\theta_{je}) \dot{\theta}_{je} \end{cases} \quad (4.26)$$

Substituindo as coordenadas cartesianas obtidas na equação (4.7), obtém-se a expressão final do Lagrangeano do sistema:

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 \quad (4.27)$$

onde

$$L_1 = \sum_{\ell=1}^n \left\{ \frac{1}{2} I_{R\ell} \left( \sum_{i=1}^{\ell} \dot{\theta}_{ia} \right)^2 + \frac{1}{2} I_{T\ell} \dot{\theta}_{\ell T}^2 - \frac{1}{2} k_{\ell e} (\theta_{\ell e} - \theta_{(\ell-1)e})^2 - \frac{1}{2} k_{\ell a} (\theta_{\ell a} - \theta_{(\ell-1)a})^2 - \frac{1}{2} k_{\ell T} (\theta_{\ell T} - \theta_{(\ell-1)T})^2 - m_{\ell} g \left[ \sum_{i=1}^{\ell-1} a_i + \frac{l_{\ell}}{2} (1 - \cos(\theta_{\ell e})) \right] \right\},$$

$$L_2 = \sum_{\ell=1}^n \frac{m_{\ell}}{2} \left\{ \frac{l_{\ell}}{2} \left[ \text{sen}(\theta_{\ell e}) \cos \left( \sum_{i=1}^{\ell} \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^{\ell} \dot{\theta}_{ia} + \cos(\theta_{\ell e}) \text{sen} \left( \sum_{i=1}^{\ell} \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{\ell e} \right] + \sum_{j=1}^{\ell-1} l_j \left[ \text{sen}(\theta_{je}) \cos \left( \sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^j \dot{\theta}_{ia} + \cos(\theta_{je}) \text{sen} \left( \sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{je} \right] \right\}^2,$$

$$L_3 = \sum_{\ell=1}^n \frac{m_{\ell}}{2} \left\{ \frac{l_{\ell}}{2} \left[ -\text{sen}(\theta_{\ell e}) \text{sen} \left( \sum_{i=1}^{\ell} \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^{\ell} \dot{\theta}_{ia} + \cos(\theta_{\ell e}) \cos \left( \sum_{i=1}^{\ell} \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{\ell e} \right] + \sum_{j=1}^{\ell-1} l_j \left[ -\text{sen}(\theta_{je}) \text{sen} \left( \sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^j \dot{\theta}_{ia} + \cos(\theta_{je}) \cos \left( \sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{je} \right] \right\}^2,$$

$$L_4 = \sum_{\ell=1}^n m_{\ell} \left[ -\frac{l_{\ell}}{2} \text{sen}(\theta_{\ell e}) \dot{\theta}_{\ell e} - \sum_{j=1}^{\ell-1} l_j \text{sen}(\theta_{je}) \dot{\theta}_{je} \right]^2 + \frac{1}{2} I_{T_c} \dot{\theta}_{nT}^2$$

$$+ \frac{1}{2} m_c \left\{ \sum_{j=1}^n l_j \left[ \text{sen}(\theta_{je}) \cos \left( \sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^j \dot{\theta}_{ia} \right. \right.$$

$$\left. \left. + \cos(\theta_{je}) \text{sen} \left( \sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{je} \right] \right\}^2$$

e

$$L_5 = \frac{1}{2} m_c \left\{ \sum_{j=1}^n l_j \left[ -\text{sen}(\theta_{je}) \text{sen} \left( \sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^j \dot{\theta}_{ia} + \cos(\theta_{je}) \cos \left( \sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{je} \right] \right\}^2$$

$$+ \frac{1}{2} m_c \left\{ - \sum_{j=1}^n l_j \text{sen}(\theta_{je}) \dot{\theta}_{je} \right\}^2.$$

Aplicando as equações de Euler-Lagrange a todos os graus de liberdade do sistema obtém-se o modelo dinâmico:

$$I(\vec{\theta}) \ddot{\vec{\theta}} + C \dot{\vec{\theta}} + K \vec{\theta} + \vec{f}(\dot{\vec{\theta}}, \vec{\theta}) + \vec{G}(\vec{\theta}) = \vec{T}_m, \quad (4.28)$$

onde:

$I(\vec{\theta})$  é a matriz de inércia;

$C$  é a matriz das constantes de atrito;

$K$  é a matriz das constantes elásticas;

$\vec{f}(\dot{\vec{\theta}}, \vec{\theta})$  corresponde ao vetor de torques Coriolis-centrífugos;

$\vec{G}(\vec{\theta})$  é o vetor com os torques de natureza gravitacional;

$\vec{T}_m$  é o vetor dos torques.

É importante ressaltar que no vetor  $\vec{G}(\vec{\theta})$  estão inclusos os esforços relativos ao empuxo devido à imersão subaquática.

### 4.3. CABO COM TRÊS ARTICULAÇÕES

Para avaliar o comportamento dinâmico do cabo, será considerado um cabo dividido em três elos rígidos conectados por articulações flexíveis, conforme ilustra a Figura 4.8.

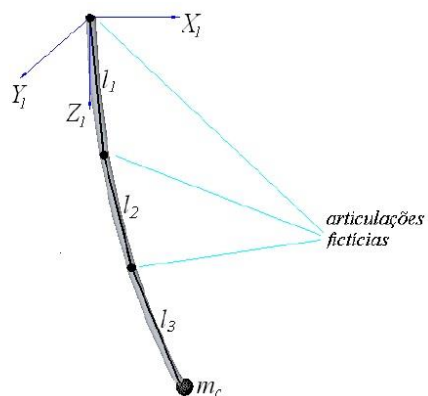


Figura 4.8 - Cabo com três articulações fictícias (PEREIRA, 2010).

Considerando  $n=3$  na equação (4.27), obtém-se o Lagrangeano desse sistema, que é dado por:

$$\begin{aligned}
L = \sum_{\ell=1}^3 & \left\{ \frac{1}{2} I_{R\ell} \left( \sum_{i=1}^{\ell} \dot{\theta}_{ia} \right)^2 + \frac{1}{2} I_{T\ell} \dot{\theta}_{\ell T}^2 - \frac{1}{2} k_{\ell e} (\theta_{\ell e} - \theta_{(\ell-1)e})^2 - \frac{1}{2} k_{\ell a} (\theta_{\ell a} - \theta_{(\ell-1)a})^2 \right. \\
& - \frac{1}{2} k_{\ell T} (\theta_{\ell T} - \theta_{(\ell-1)T})^2 - m_{\ell} g \left[ \sum_{i=1}^{\ell-1} a_i + \frac{l_{\ell}}{2} (1 - \cos(\theta_{\ell e})) \right] \left. \right\} \\
& + \sum_{\ell=1}^3 \frac{m_{\ell}}{2} \left\{ \frac{l_{\ell}}{2} \left[ \text{sen}(\theta_{\ell e}) \cos \left( \sum_{i=1}^{\ell} \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^{\ell} \dot{\theta}_{ia} + \cos(\theta_{\ell e}) \text{sen} \left( \sum_{i=1}^{\ell} \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{\ell e} \right] \right. \\
& + \sum_{j=1}^{\ell-1} l_j \left[ \text{sen}(\theta_{je}) \cos \left( \sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^j \dot{\theta}_{ia} + \cos(\theta_{je}) \text{sen} \left( \sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{je} \right] \left. \right\}^2 \\
& + \sum_{\ell=1}^3 \frac{m_{\ell}}{2} \left\{ \frac{l_{\ell}}{2} \left[ -\text{sen}(\theta_{\ell e}) \text{sen} \left( \sum_{i=1}^{\ell} \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^{\ell} \dot{\theta}_{ia} + \cos(\theta_{\ell e}) \cos \left( \sum_{i=1}^{\ell} \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{\ell e} \right] \right. \\
& + \sum_{j=1}^{\ell-1} l_j \left[ -\text{sen}(\theta_{je}) \text{sen} \left( \sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^j \dot{\theta}_{ia} + \cos(\theta_{je}) \cos \left( \sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{je} \right] \left. \right\}^2 \\
& + \sum_{\ell=1}^3 m_{\ell} \left[ -\frac{l_{\ell}}{2} \text{sen}(\theta_{\ell e}) \dot{\theta}_{\ell e} - \sum_{j=1}^{\ell-1} l_j \text{sen}(\theta_{je}) \dot{\theta}_{je} \right]^2 + \frac{1}{2} I_{T_c} \dot{\theta}_{nT}^2 \\
& + \frac{1}{2} m_c \left\{ \sum_{j=1}^3 l_j \left[ \text{sen}(\theta_{je}) \cos \left( \sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^j \dot{\theta}_{ia} + \cos(\theta_{je}) \text{sen} \left( \sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{je} \right] \right\}^2 \\
& + \frac{1}{2} m_c \left\{ \sum_{j=1}^3 l_j \left[ -\text{sen}(\theta_{je}) \text{sen} \left( \sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \sum_{i=1}^j \dot{\theta}_{ia} \right. \right. \\
& \left. \left. + \cos(\theta_{je}) \cos \left( \sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \dot{\theta}_{je} \right] \right\}^2 + \frac{1}{2} m_c \left\{ -\sum_{j=1}^3 l_j \text{sen}(\theta_{je}) \dot{\theta}_{je} \right\}^2,
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Com  $\theta_0 = 0$  e  $\sum_{i=1}^{\ell-1} a_i = 0$ , quando  $\ell = 1$ .

Aplicando as equações de Euler - Lagrange a todos os graus de liberdade:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{1e}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{1e}} = T_{1e} - c_{1e} \dot{\theta}_{1e} - c_{2e} (\dot{\theta}_{1e} - \dot{\theta}_{2e}) \tag{4.30}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{2e}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{2e}} = T_{2e} - c_{2e}(\dot{\theta}_{2e} - \dot{\theta}_{1e}) - c_{3e}(\dot{\theta}_{2e} - \dot{\theta}_{3e}) \quad (4.31)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{3e}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{3e}} = T_{3e} - c_{3e}(\dot{\theta}_{3e} - \dot{\theta}_{2e}) \quad (4.32)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{1a}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{1a}} = T_{1a} - c_{1a}\dot{\theta}_{1a} - c_{2a}(\dot{\theta}_{1a} - \dot{\theta}_{2a}) \quad (4.33)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{2a}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{2a}} = T_{2a} - c_{2a}(\dot{\theta}_{2a} - \dot{\theta}_{1a}) - c_{3a}(\dot{\theta}_{2a} - \dot{\theta}_{3a}) \quad (4.34)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{3a}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{3a}} = T_{3a} - c_{3a}(\dot{\theta}_{3a} - \dot{\theta}_{2a}) \quad (4.35)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{1t}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{1t}} = T_{1t} - c_{1t}\dot{\theta}_{1t} - c_{2t}(\dot{\theta}_{1t} - \dot{\theta}_{2t}) \quad (4.36)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{2t}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{2t}} = T_{2t} - c_{2t}(\dot{\theta}_{2t} - \dot{\theta}_{1t}) - c_{3t}(\dot{\theta}_{2t} - \dot{\theta}_{3t}) \quad (4.37)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{3t}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{3t}} = T_{3t} - c_{3t}(\dot{\theta}_{3t} - \dot{\theta}_{2t}) \quad (4.38)$$

onde  $c_{1e}$ ,  $c_{2e}$  e  $c_{3e}$  são os coeficientes de atrito devido aos movimentos de elevação,  $c_{1a}$ ,  $c_{2a}$  e  $c_{3a}$  os coeficientes de atrito de azimute,  $c_{1t}$ ,  $c_{2t}$  e  $c_{3t}$  os coeficientes de atrito de torção,  $T_{1e}$ ,  $T_{2e}$ ,  $T_{3e}$ ,  $T_{1a}$ ,  $T_{2a}$ ,  $T_{3a}$ ,  $T_{1t}$ ,  $T_{2t}$  e  $T_{3t}$  são os torques de elevação, azimute e torção, respectivamente.

Resolvendo as equações de 4.30 a 4.38 obtêm-se o modelo dinâmico do cabo umbilical, definido por:

$$I(\vec{\theta})\ddot{\vec{\theta}} + C\dot{\vec{\theta}} + K\vec{\theta} + \vec{f}(\dot{\vec{\theta}}, \vec{\theta}) + \vec{G}(\vec{\theta}) = \vec{T}_m, \quad (4.39)$$

onde  $\vec{f}(\dot{\vec{\theta}}, \vec{\theta})$  corresponde ao vetor de torques Coriolis-centrífugos,  $\vec{G}(\vec{\theta})$  o vetor de torques gravitacionais,  $I(\vec{\theta})$  é a matriz de inércia,  $C$  é a matriz das constantes de atrito,  $K$  é a matriz das constantes elásticas e  $\vec{T}_m$  é o vetor dos torques.

Para a integração numérica do sistema definido pela equação 4.39 considera-se inicialmente a seguinte troca de variáveis:



$$\begin{aligned}
x_1 &= \theta_{1e} \Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{\theta}_{1e} = x_{10} \Rightarrow x_{10} = \ddot{\theta}_{1e} \\
x_2 &= \theta_{2e} \Rightarrow \dot{x}_2 = \dot{\theta}_{2e} = x_{11} \Rightarrow x_{11} = \ddot{\theta}_{2e} \\
x_3 &= \theta_{3e} \Rightarrow \dot{x}_3 = \dot{\theta}_{3e} = x_{12} \Rightarrow x_{12} = \ddot{\theta}_{3e} \\
x_4 &= \theta_{1a} \Rightarrow \dot{x}_4 = \dot{\theta}_{1a} = x_{13} \Rightarrow x_{13} = \ddot{\theta}_{1a} \\
x_5 &= \theta_{2a} \Rightarrow \dot{x}_5 = \dot{\theta}_{2a} = x_{14} \Rightarrow x_{14} = \ddot{\theta}_{2a} \\
x_6 &= \theta_{3a} \Rightarrow \dot{x}_6 = \dot{\theta}_{3a} = x_{15} \Rightarrow x_{15} = \ddot{\theta}_{3a} \\
x_7 &= \theta_{1t} \Rightarrow \dot{x}_7 = \dot{\theta}_{1t} = x_{16} \Rightarrow x_{16} = \ddot{\theta}_{1t} \\
x_8 &= \theta_{2t} \Rightarrow \dot{x}_8 = \dot{\theta}_{2t} = x_{17} \Rightarrow x_{17} = \ddot{\theta}_{2t} \\
x_9 &= \theta_{3t} \Rightarrow \dot{x}_9 = \dot{\theta}_{3t} = x_{18} \Rightarrow x_{18} = \ddot{\theta}_{3t}
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Obtém-se um sistema de equações diferenciais de 1ª ordem na forma matricial, dado por:

$$\dot{\vec{X}} = P(\vec{X})\vec{X} + \vec{F}(\vec{X}) + \vec{\Gamma}, \tag{4.41}$$

onde

$$P(\vec{X}) = \begin{bmatrix} [0]_{9 \times 9} & [1]_{9 \times 9} \\ -[I(\vec{X})]^{-1}K & -[I(\vec{X})]^{-1}C \end{bmatrix}$$

$$\vec{F}(\vec{X}) = \begin{bmatrix} [0]_{9 \times 9} \\ -[I(\vec{X})]^{-1}f(\vec{X}) \end{bmatrix}$$

$$\vec{\Gamma} = \begin{bmatrix} [0]_{9 \times 1} \\ [I(\vec{X})]^{-1}\vec{T}_m \end{bmatrix}$$

$$\vec{X} = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_{18}]^T$$

#### 4.4. SIMULAÇÕES DO CABO DIVIDIDO EM 3 ELOS

Para a realização de simulações em malha aberta foi considerado um cabo com 3.2m. Considerou-se um passo de integração de 0.005s. O cabo foi dividido em três partes rígidas, com uma extremidade fixa a um corpo sem movimento e com a extremidade livre contendo uma carga terminal de 0.5kg, com coeficientes de atrito e constantes elásticas conhecidas. O cabo foi solto com vetor de estados igual a:

$$\vec{X} = \left[ \frac{\pi}{6} \quad \frac{\pi}{6} \quad \frac{\pi}{6} \quad \frac{\pi}{6} \quad \frac{\pi}{6} \quad \frac{\pi}{6} \quad \frac{\pi}{6} \quad \frac{\pi}{6} \quad \frac{\pi}{6} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right], \text{ em que as}$$

nove primeiras coordenadas correspondem às posições angulares e as outras nove correspondem às respectivas velocidades angulares.

Nas simulações realizadas percebeu-se que o cabo descreveu um movimento amortecido, devido aos efeitos do empuxo e do arrasto, este último considerado a partir de um modelo simples, com forças proporcionais ao quadrado das velocidades relativas entre o fluido e a estrutura. Observando-se as figuras 4.9, 4.10 e 4.11, por exemplo, percebe-se que a extremidade do cabo saiu da posição inicial e chegou à posição final  $(x, y, z) = (0, 0, 3.2)$  praticamente sem oscilações. No gráfico 4.11, correspondente ao deslocamento espacial da carga terminal, a coordenada Z foi multiplicada por -1 para facilitar a visualização. Os resultados apresentados nas simulações são fisicamente coerentes onde o cabo descreve um movimento semelhante a um pêndulo múltiplo amortecido em função da submersão em um fluido.

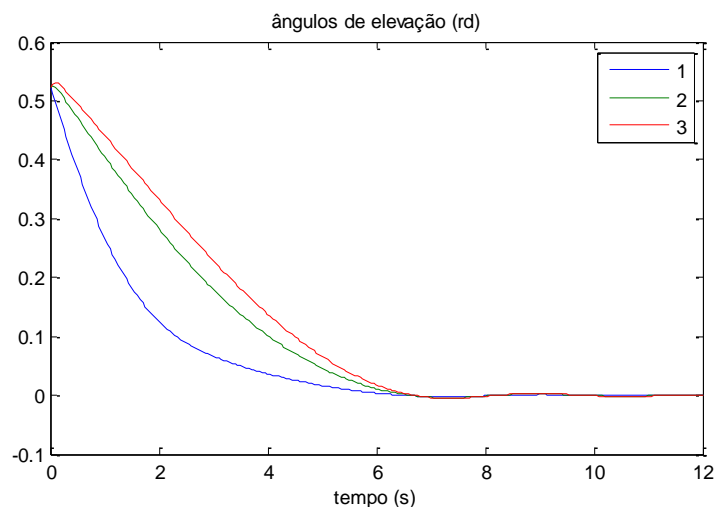


Figura 4.9. Posição angular em elevação para cada elo.

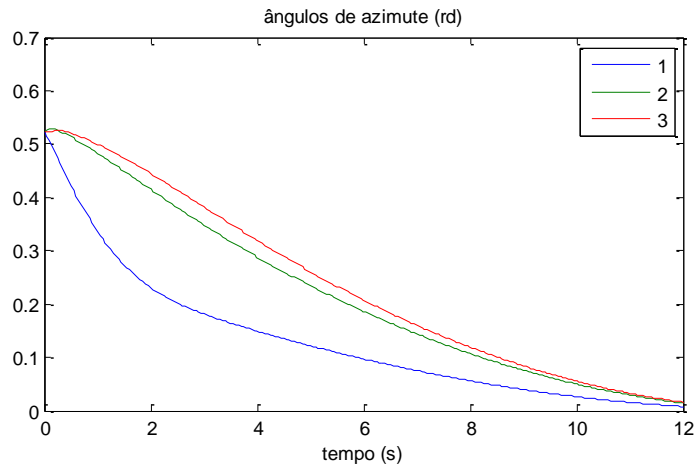


Figura 4.10. Posição angular em azimute para cada elo.

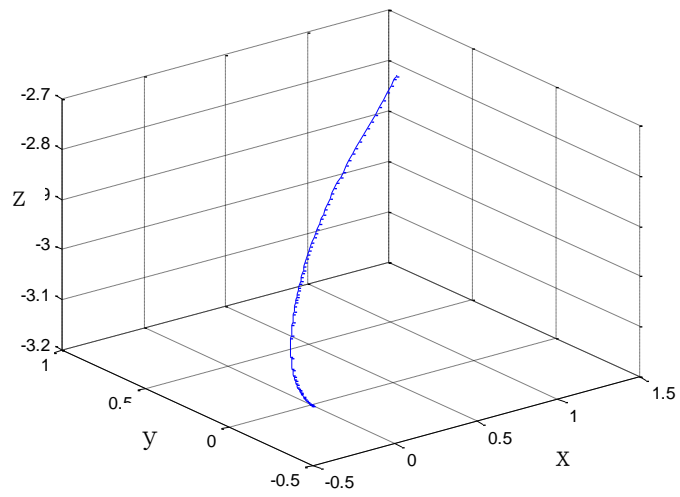


Figura 4.11. Movimento espacial da carga.

## 5. ACOPLAMENTO DAS DINÂMICAS DO CABO E DO ROV

Neste capítulo é desenvolvido o modelo de acoplamento entre as dinâmicas do cabo e do ROV. Considera-se que a carga terminal, presa na extremidade livre do cabo, possui uma dinâmica própria, tratando-se de um veículo subaquático do tipo ROV. Pretende-se identificar os torques provocados sobre o cabo umbilical pelas forças e torques do ROV, que são conhecidos em um referencial fixo ao centro de massa do veículo.

Para a identificação precisa dos torques é necessário compreender e efetuar adequadamente as transformações das forças e torques produzidos pelas duas dinâmicas, já que as modelagens do veículo e do cabo são desenvolvidas em diferentes sistemas referenciais. Dessa forma, apresenta-se a seguir, de forma detalhada, todos os processos de transformação entre os referenciais utilizados.

### 5.1. CABO COM UMA ARTICULAÇÃO FICTÍCIA

Para compreender adequadamente o processo de transformação entre referenciais, é interessante trabalhar, inicialmente, considerando o cabo como um único elo rígido, preso na parte superior a uma articulação flexível. Neste caso, o cabo corresponde a um pêndulo espacial simples. A figura 5.1 ilustra essa situação e os sistemas referenciais utilizados para identificação dos torques.

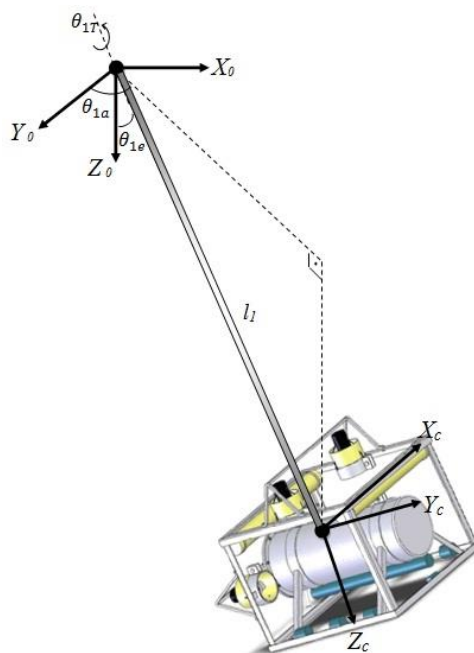


Figura 5.1 - Sistemas de referência do cabo e do ROV

A modelagem do cabo é desenvolvida considerando-se um sistema de referência inicial

$X_0Y_0Z_0$ , com origem coincidente com a extremidade fixa do cabo, eixo  $Z_0$  com direção vertical para baixo, eixo  $Y_0$  coincide com a direção do movimento inicial realizado pelo cabo e o eixo  $X_0$  perpendicular ao eixo  $Y_0$ . Este referencial, chamado de inicial é também inercial.

Para a identificação dos torques produzidos pelo ROV, é necessário definir o sistema referencial móvel no qual se desenvolve sua dinâmica ( $X_cY_cZ_c$ ), chamado de sistema referencial do corpo. Esse sistema tem origem fixa no centro de massa do veículo, o eixo  $Y_c$  paralelo à direção frontal do ROV, o eixo  $X_c$  perpendicular a  $Y_c$  determinando a direção transversal, enquanto que o eixo  $Z_c$  coincide com a direção do elo fixo ao veículo, como ilustra a Figura 5.1.

Quando os propulsores do ROV são ligados e ele entra em movimento é produzida uma força resultante, denotada por  $\vec{F}_c$ , expressa no sistema referencial do corpo -  $X_cY_cZ_c$  (Figura 5.2). Essa força produz torques sobre o cabo ( $\vec{\tau}_0 = (T_{0x}, T_{0y}, T_{0z})$ ) – expresso no referencial inicial) e sobre o próprio ROV ( $\vec{\tau}_c = (T_{xr}, T_{yr}, T_{zr})$ ) – conhecido do modelo dinâmico do ROV).

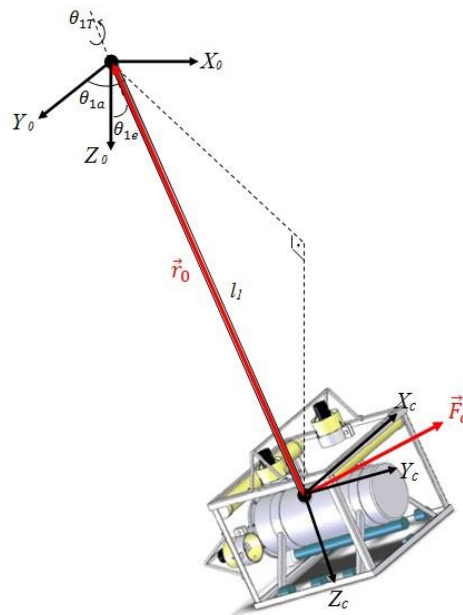


Figura 5.2 - Força provocada pelos propulsores do ROV

O vetor dos torques provocados pelo ROV sobre o cabo é obtido pelo produto vetorial entre a força aplicada e o braço de alavanca  $\vec{r}_0$ . Como a dinâmica do cabo é desenvolvida no referencial  $X_0Y_0Z_0$ , é conveniente calcular os torques nesse mesmo referencial. Assim sendo, faz-se necessário identificar as coordenadas de  $\vec{r}_0$  e  $\vec{F}_c$  no referencial inicial.

Na Figura 5.2 o cabo é constituído por apenas um elo e o braço de alavanca corresponde ao vetor  $\vec{r}_0 = (r_{0x}, r_{0y}, r_{0z})$ , com coordenadas expressas no referencial  $X_0Y_0Z_0$  dadas por:

$$\begin{cases} r_{0x} = -l_1 \text{sen}(\theta_{1e}) \text{sen}(\theta_{1a}) \\ r_{0y} = -l_1 \text{sen}(\theta_{1e}) \text{cos}(\theta_{1a}) \\ r_{0z} = -l_1 \text{cos}(\theta_{1e}) \end{cases} \quad (5.1)$$

A força gerada pelos propulsores do veículo, denotada por  $\vec{F}_c = (f_{xc}, f_{yc}, f_{zc})$ , é obtida do modelo dinâmico do ROV e tem suas coordenadas expressas no sistema referencial do corpo. A representação dessa força no referencial inicial, denotada por  $\vec{F}_0 = (f_{x0}, f_{y0}, f_{z0})$ , é obtida a partir de transformações homogêneas. Considera-se inicialmente um sistema de eixos paralelos aos eixos do referencial do inicial, indicado aqui por  $X_{40}Y_{40}Z_{40}$ , e com origem coincidente com a origem do referencial do corpo  $X_cY_cZ_c$  (Figura 5.3).

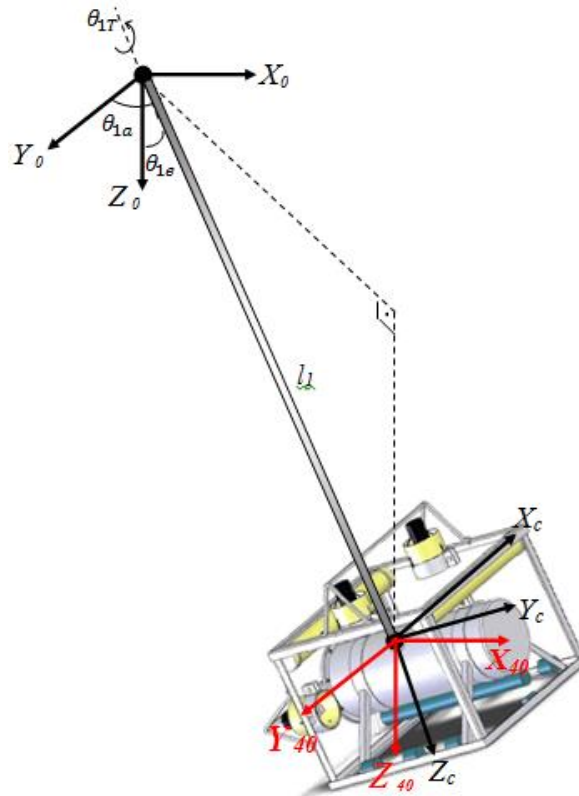


Figura 5.3 - Comparação entre os referenciais inicial e do corpo

A partir da rotação do sistema  $X_{40}Y_{40}Z_{40}$  sobre o eixo  $Z_{40}$  de um ângulo  $\theta_{1a}$ , obtém-se um novo sistema de eixos  $X_{30}Y_{30}Z_{30}$ . A força  $\vec{F}_{3c}$  aplicada pelo veículo no referencial  $X_{30}Y_{30}Z_{30}$  é definida por:

$$\vec{F}_{3c} = R_{Z,\theta_{1a}} \vec{F}_0, \quad (5.2)$$

onde  $R_{Z,\theta_{1a}}$  é a matriz de rotação em torno de  $Z$  de um ângulo  $\theta_{1a}$ .

Em seguida, o referencial  $X_{30}Y_{30}Z_{30}$  é rotacionado sobre o eixo  $Y_{30}$ , através de um ângulo  $\theta_{1e}$ , gerando o referencial  $X_{20}Y_{20}Z_{20}$ . A força  $\vec{F}_{2c}$  aplicada pelo veículo no referencial  $X_{20}Y_{20}Z_{20}$  é definida por:

$$\vec{F}_{2c} = R_{Y,\theta_{1e}} \vec{F}_{3c} = R_{Y,\theta_{1e}} R_{Z,\theta_{1a}} \vec{F}_0, \quad (5.3)$$

onde  $R_{Y,\theta_{1e}}$  é a matriz de rotação em torno de Y de um ângulo  $\theta_{1e}$ .

A seguir, é realizada a rotação do sistema  $X_{20}Y_{20}Z_{20}$  sobre o eixo  $Z_{20}$ , de um ângulo  $-\theta_a$ , gerando o referencial  $X_{10}Y_{10}Z_{10}$ . A força  $\vec{F}_{1c}$  aplicada pelo veículo no referencial  $X_{10}Y_{10}Z_{10}$  é definida por:

$$\vec{F}_{1c} = R_{Z,-\theta_{1a}} \vec{F}_{2c} = R_{Z,-\theta_{1a}} R_{Y,\theta_{1e}} R_{Z,\theta_{1a}} \vec{F}_0 \quad (5.4)$$

onde  $R_{Z,-\theta_{1a}}$  é a matriz de rotação em torno de Y de um ângulo  $-\theta_{1a}$ .

Finalmente, rotacionando  $X_{10}Y_{10}Z_{10}$  sobre o eixo  $Z_{10}$ , de um ângulo  $\theta_T$ , chega-se ao sistema referencial do corpo  $X_cY_cZ_c$ . O vetor força  $\vec{F}_0$ , expresso no referencial  $X_cY_cZ_c$  é:

$$\vec{F}_0 = R_{Z,\theta_{1T}} \vec{F}_{1c} = R_{Z,\theta_{1T}} R_{Z,-\theta_{1a}} R_{Y,\theta_{1e}} R_{Z,\theta_{1a}} \vec{F}_0 \quad (5.5)$$

onde  $R_{Z,\theta_{1T}}$  é a matriz de rotação em torno de Z de um ângulo  $\theta_{1T}$ .

As matrizes de rotação são dadas por:

$$R_{Z,\theta_{1a}} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{1a} & \text{sen}\theta_{1a} & 0 \\ -\text{sen}\theta_{1a} & \cos\theta_{1a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (5.6)$$

$$R_{Y,\theta_{1e}} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{1e} & 0 & \text{sen}\theta_{1e} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\theta_{1e} & 0 & \cos\theta_{1e} \end{bmatrix}; \quad (5.7)$$

$$R_{Z,-\theta_{1a}} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{1a} & -\text{sen}\theta_{1a} & 0 \\ \text{sen}\theta_{1a} & \cos\theta_{1a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

$$R_{Z,\theta_{1T}} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{1T} & \text{sen}\theta_{1T} & 0 \\ -\text{sen}\theta_{1T} & \cos\theta_{1T} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

Define-se o produto das matrizes de rotação por:

$$M_1^T = R_{Z,\theta_{1T}} R_{Z,-\theta_{1a}} R_{Y,\theta_{1e}} R_{Z,\theta_{1a}}. \quad (5.10)$$

Logo, de (5.5) e de (5.10), obtém-se a seguinte expressão:

$$\vec{F}_c = M_1^T \vec{F}_0, \quad (5.11)$$

onde  $M_1^T$  é a matriz de transformação do vetor força do referencial inicial para o referencial do corpo.

De (5.10) tem-se que:

$$M_1 = (R_{Z,\theta_{1T}} R_{Z,-\theta_{1a}} R_{Y,\theta_{1e}} R_{Z,\theta_{1a}})^T \quad (5.12)$$

A matriz  $M_1$  é ortogonal. Portanto, a transformação do vetor força do referencial do corpo para o referencial inicial pode ser obtida, através do produto:

$$\vec{F}_0 = M_1 \vec{F}_c. \quad (5.13)$$

Definido o vetor força no referencial inicial, identifica-se o momento produzido pelo ROV, expresso no referencial inicial, calculado por:

$$\vec{\tau}_0 = \vec{F}_0 \times \vec{r}_0. \quad (5.14)$$

As coordenadas do vetor de torques  $\vec{\tau}_0 = (T_{0x}, T_{0y}, T_{0z})$  correspondem aos torques sobre os eixos  $X_0$ ,  $Y_0$  e  $Z_0$ , respectivamente. A partir desses torques, expressos no sistema referencial inicial, identificam-se os torques de azimute, elevação e torção sobre o cabo.

De acordo com a figura 5.4, conclui-se que o torque de azimute é igual ao torque sobre o eixo  $Z_0$ , ou seja:

$$T_a = T_{0z}. \quad (5.15)$$

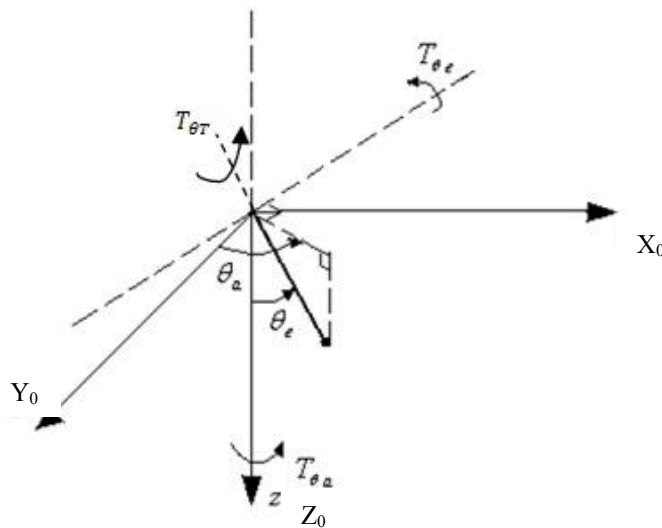


Figura 5.4 - Representação dos torques de azimute, elevação e torção.

O torque de elevação é realizado sobre um eixo perpendicular à projeção do elo no plano horizontal e pode ser definido por:

$$T_e = T_{0x} \cos \theta_a - T_{0y} \sin \theta_a. \quad (5.16)$$

O torque de torção na última articulação, denotado por  $T_t$ , é igual ao torque produzido pelo ROV sobre o eixo  $Z_c$  do referencial do corpo, logo:



$$T_t = T_{zr}. \quad (5.17)$$

Os troques em azimute, elevação e torção entram na dinâmica do cabo e permitem a realização de simulações do sistema acoplado.

Foram realizadas simulações para avaliar o comportamento da dinâmica do cabo com um único elo conectado a uma carga terminal com dinâmica própria (ROV). Inicialmente, considerou-se o ROV apenas com os propulsores frontais ligados, com tensões de mesmo módulo.

Observando-se as Figuras 5.5 e 5.6, percebe-se não ocorrem variações dos ângulos de azimute e torção quando os atuadores frontais são ligados, ambos com o mesmo empuxo. Apenas ocorrem variações nos ângulos de elevação, o que faz com que o veículo descreva uma trajetória no plano ZY.

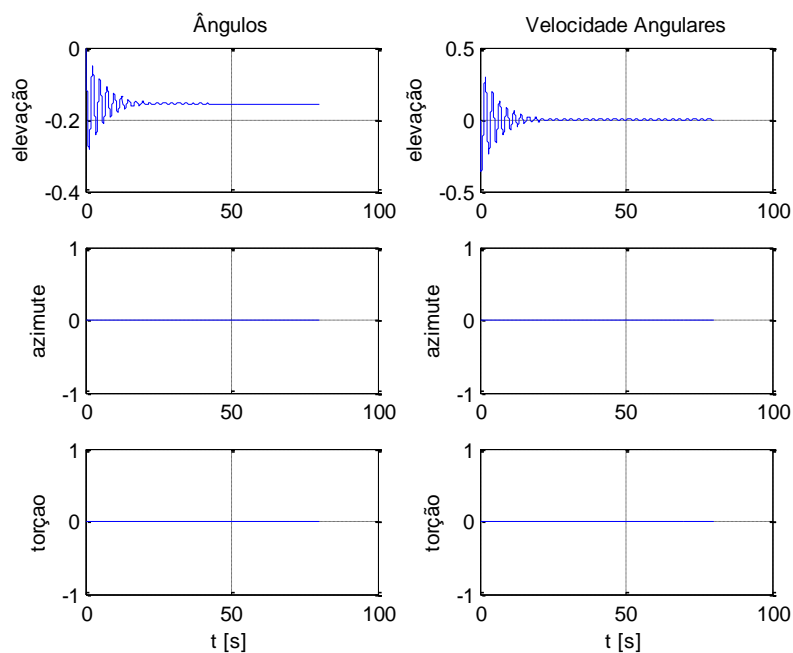


Figura 5.5 - Ângulos e velocidades angulares da carga terminal do cabo.

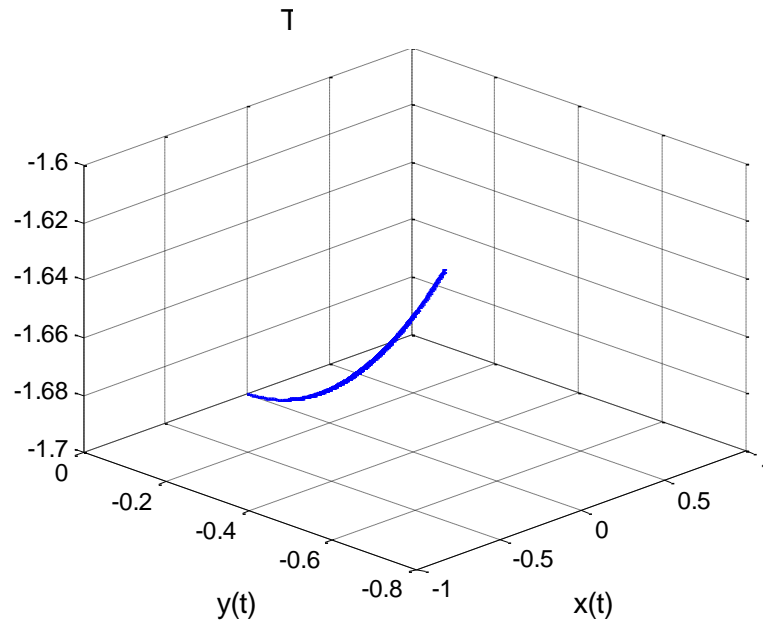


Figura 5.6 - Trajetória espacial do ROV.

Em outra simulação, foram ligados apenas os propulsores frontais, no entanto, com tensões de módulos diferentes. As Figuras 5.7 e 5.8 ilustram as variações angulares e a trajetória do ROV nessa condição.

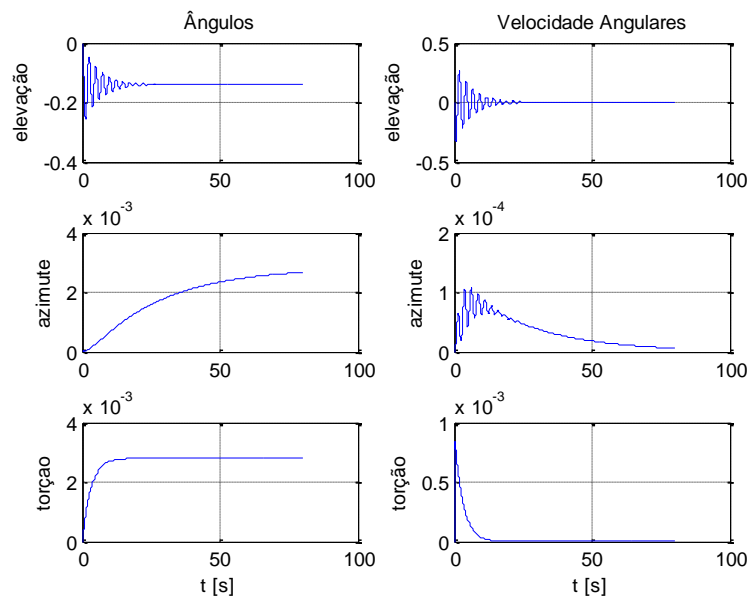


Figura 5.7 - Ângulos e velocidades angulares da carga terminal do cabo.

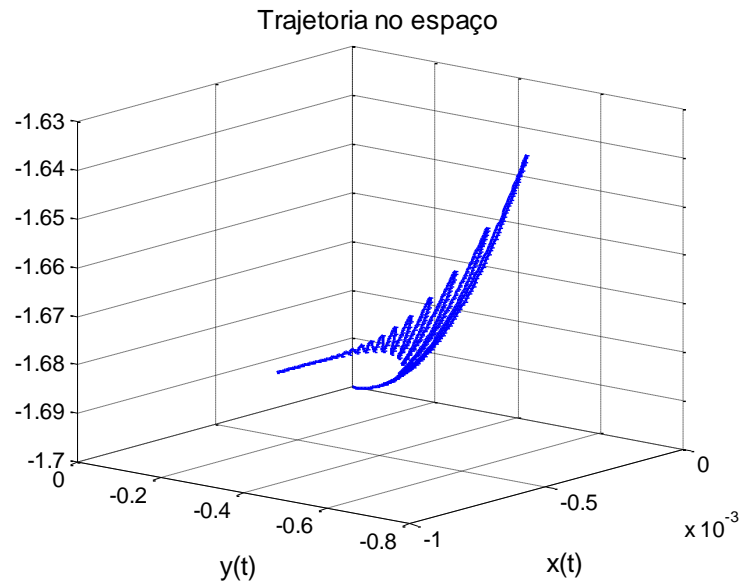


Figura 5.8 - Trajetória espacial do ROV.

Percebe-se que os ângulos de elevação variam até o sistema encontrar o equilíbrio. O ângulo de torção varia devido à diferença de módulo entre as forças produzidas por cada propulsor, o que implica na variação do ângulo de azimute. Depois de certo tempo, os ângulos de torção se estabilizam e o mesmo ocorre com o azimute. Estas estabilizações ocorrem porque os movimentos atingiram os limites permissíveis por cada constante elástica.

Os resultados obtidos nas simulações para o cabo constituído de um único elo são fisicamente coerentes. Assim sendo, no restante do capítulo apresenta-se uma generalização desse modelo de acoplamento, estendida para  $n$  elos.

## 5.2. CABO COM $n$ ARTICULAÇÕES

A obtenção dos torques para cabos com  $n$  articulações, com  $n > 1$ , é desenvolvida de forma análoga à expressa anteriormente. O trabalho consiste em identificar os torques provocados pelo ROV sobre o último elo do cabo. A figura 5.9 ilustra os sistemas de referência utilizados em cada articulação para o cabo dividido em três elos ( $n=3$ ).

Quando os propulsores do ROV são ligados e ele entra em movimento é produzida uma força resultante, denotada por  $\vec{F}_c = (f_{xc}, f_{yc}, f_{zc})$ , expressa no referencial do corpo ( $X_c Y_c Z_c$ ). Essa força produz torques sobre a última articulação do cabo ( $\vec{\tau}_{nc} = (T_{nx}, T_{ny}, T_{nz})$  – expresso no referencial da junta) e sobre o próprio ROV ( $\vec{\tau}_{cr} = (T_{xr}, T_{yr}, T_{zr})$  conhecido do modelo dinâmico do ROV).

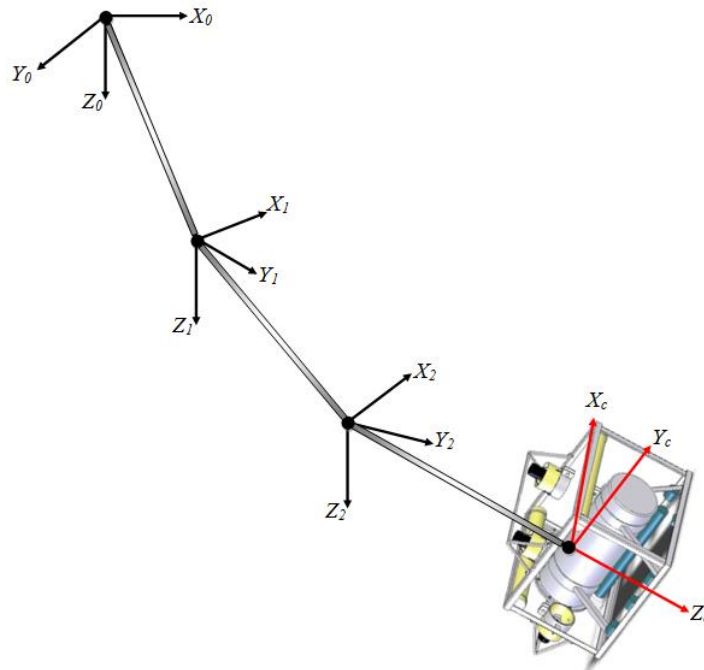


Figura 5.9 - Sistemas de referência inicial e do ROV, cabo dividido em três elos ( $n = 3$ ).

Para obter o torque no referencial da última articulação é necessário efetuar a transformação de força  $\vec{F}_c$  para o referencial da última articulação ( $X_{n-1}Y_{n-1}Z_{n-1}$ ), que é exatamente onde os torques provocados pelo ROV atuam. A figura 5.10 ilustra os dois últimos sistemas de referência.

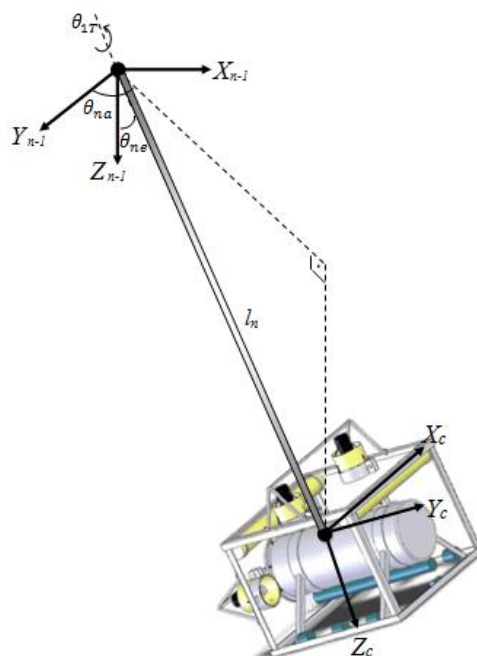


Figura 5.10 - Sistemas de referência da última articulação e do corpo.

Para a obtenção da força resultante no referencial da última junta é necessário efetuar uma transformação sobre o vetor força. Essa transformação é obtida de forma análoga à realizada para o caso do cabo com uma única articulação, conforme exemplificado anteriormente.

Dessa forma, a matriz de transformação do referencial do corpo para o referencial da última articulação pode ser obtida a partir do produto das quatro matrizes de rotação dadas anteriormente, e possui a seguinte forma:

$$M_{1n} = (R_{Z,\theta_{nT}} \cdot R_{Z,-\theta_{na}} \cdot R_{Y,\theta_{ne}} \cdot R_{Z,\theta_{na}})^T. \quad (5.18)$$

A transformação do vetor força do referencial do corpo para o referencial da junta é definida por:

$$\vec{F}_j = M_{1n} \cdot \vec{F}_c. \quad (5.19)$$

As coordenadas obtidas estão expressas no referencial da última articulação  $X_{n-1}Y_{n-1}Z_{n-1}$  e devem ser transformadas para o inicial  $X_0Y_0Z_0$  a fim de identificar os torques produzidos por essa força. Considerando o cabo com  $n$  articulações, pode-se obter a matriz de transformação através de  $n-1$  rotações de azimute negativas sobre o eixo  $Z_{n-1}$ , definidas pela inversa da matriz:

$$M_i = \begin{bmatrix} \cos\left(\sum_{i=1}^{n-1} \theta_{ia}\right) & \text{sen}\left(\sum_{i=1}^{n-1} \theta_{ia}\right) & 0 \\ -\text{sen}\left(\sum_{i=1}^{n-1} \theta_{ia}\right) & \cos\left(\sum_{i=1}^{n-1} \theta_{ia}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

Dessa forma, a força aplicada sobre o cabo, expressa no referencial inicial, é obtida por:

$$\vec{F}_0 = M_i^T \cdot \vec{F}_j. \quad (5.21)$$

O vetor de torques produzidos pelo ROV sobre o cabo, no referencial inicial, é definido como o produto vetorial entre a força aplicada  $\vec{F}_0$  e o braço de alavanca  $\vec{r}$ , e denotado por  $\vec{\tau}_0$ .

$$\vec{\tau}_0 = \vec{F}_0 \times \vec{r}. \quad (5.22)$$

O vetor  $\vec{r}$  (ver Figura 5.11), expresso no referencial inicial, é dado pela diferença entre o vetor com extremidade no ponto de conexão do ROV com o cabo ( $\vec{r}_c$ ) e o vetor com extremidade na última articulação ( $\vec{r}_{na}$ ), ambos com coordenadas conhecidas (PEREIRA, 2010).

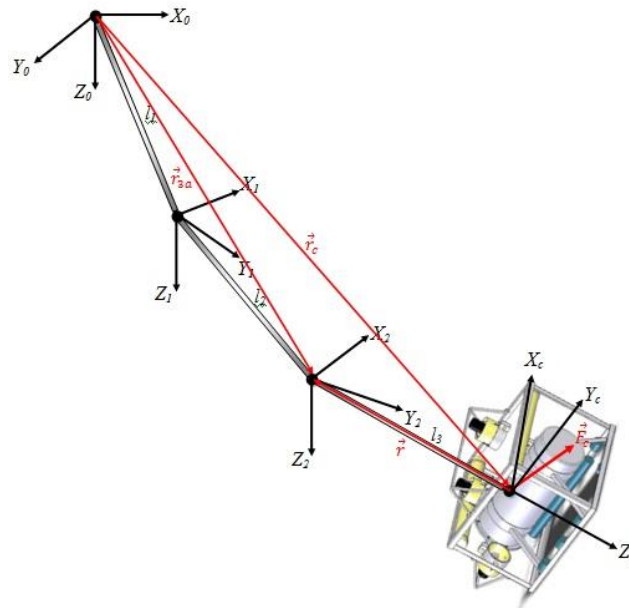


Figura 5.11 -Braço de alavanca para o cabo dividido em 3 elos (n=3)

$$\vec{r} = \vec{r}_c - \vec{r}_{na}. \tag{5.23}$$

O vetor  $\vec{r}_c = (x_c, y_c, z_c)$  tem coordenadas dadas por:

$$\begin{cases} x_c = \sum_{j=1}^n \left[ l_j \text{sen} \theta_{je} \text{sen} \left( \sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \right] \\ y_c = \sum_{j=1}^n \left[ l_j \text{sen} \theta_{je} \cos \left( \sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \right] \\ z_c = \sum_{j=1}^n l_j \cos \theta_{je} \end{cases}. \tag{5.24}$$

O vetor  $\vec{r}_{na} = (x_{0n}, y_{0n}, z_{0n})$  tem coordenadas dadas por:

$$\begin{cases} x_{0k} = \sum_{j=1}^{k-1} \left[ l_j \text{sen} \theta_{je} \text{sen} \left( \sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \right] \\ y_{0k} = \sum_{j=1}^{k-1} \left[ l_j \text{sen} \theta_{je} \cos \left( \sum_{i=1}^j \theta_{ia} \right) \right] \\ z_{0k} = \sum_{j=1}^{k-1} l_j \cos \theta_{je} \end{cases}. \tag{5.25}$$

O vetor  $\vec{\tau}_0 = (T_{0x}, T_{0y}, T_{0z})$ , obtido na equação 5.14 possui coordenadas correspondentes aos torques sobre os eixos  $X_0, Y_0$  e  $Z_0$ , respectivamente. Esses torques estão

expressos no referencial inicial, e como a força provocada pelo ROV atua no último elo do cabo, faz-se necessário expressar os torques no referencial correspondente, ou seja, o referencial da última articulação  $X_{n-1}Y_{n-1}Z_{n-1}$ .

A representação no sistema  $X_{n-1}Y_{n-1}Z_{n-1}$  pode ser obtida por meio de  $n-1$  transformações homogêneas, dadas por rotações de  $\theta_{1a}, \theta_{2a}, \dots, \theta_{(n-1)a}$  em torno do eixo  $Z_0$ . A matriz correspondente a essas transformações é indicada por:

$$M_f = \begin{bmatrix} \cos\left(\sum_{i=1}^{n-1} \theta_{ia}\right) & \text{sen}\left(\sum_{i=1}^{n-1} \theta_{ia}\right) & 0 \\ -\text{sen}\left(\sum_{i=1}^{n-1} \theta_{ia}\right) & \cos\left(\sum_{i=1}^{n-1} \theta_{ia}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.26)$$

Portanto, o vetor de torques na última articulação, denotado por  $\vec{\tau}_{nc} = (T_{nx}, T_{ny}, T_{nz})$ , é obtido a partir do produto entre a matriz de transformação e o torque obtido no referencial inicial, da seguinte forma:

$$\vec{\tau}_n = M_f \cdot \vec{\tau}_0 \quad (5.27)$$

Obtidos os torques cartesianos no referencial da última junta é possível identificar os torques de azimute, elevação e torção, da mesma forma como foram identificados para o cabo definido como um único elo rígido. Pode-se concluir que o torque de azimute é igual ao torque em relação ao eixo  $Z_{n-1}$ , ou seja:

$$T_{na} = T_{nz}. \quad (5.28)$$

O torque de elevação é realizado sobre um eixo perpendicular à projeção do elo no plano horizontal  $X_{n-1}Y_{n-1}$ . Esse torque pode ser obtido a partir da equação:

$$T_{ne} = T_{nx} \cos(\theta_{na}) - T_{ny} \text{sen}(\theta_{na}) \quad (5.29)$$

O torque de torção na última articulação, denotado por  $T_{nt}$ , é igual ao torque produzido pelo ROV sobre o eixo  $Z_c$  do referencial do corpo, ou seja:

$$T_{nt} = T_{zr}. \quad (5.30)$$

Os torques atuantes na última articulação, em azimute, elevação e torção, entram na dinâmica Cabo-ROV, no vetor  $\vec{T}_m$ , permitindo a realização das simulações apresentadas no próximo capítulo.

## 6. RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES DO SISTEMA ACOPLADO

Neste capítulo apresentam-se resultados de simulações realizadas do comportamento dinâmico de um cabo umbilical conectado a um veículo com dinâmica própria, no caso, um ROV, utilizando a proposta desenvolvida no capítulo 5. Embora o cabo possa apresentar diferentes formas, com diversos tipos de entrelaçamento e materiais, o modelo dinâmico apresentado nesta dissertação é genérico e aplicável a qualquer tipo de cabo. Não se dispõe ainda de um aparato experimental para a estimação de parâmetros do modelo, tais como constantes elásticas e coeficientes de atrito, de forma que as simulações apresentadas neste capítulo têm o intuito de verificar se o modelo é fisicamente coerente, ou seja, se os resultados das simulações correspondem aos esperados em uma situação real. Entretanto, a escolha das constantes elásticas de elevação foi feita obedecendo a um critério conhecido. Imagina-se o cabo sendo de aço e semelhante a uma viga delgada. Caso se aplique uma força perpendicular a essa viga delgada e na extremidade livre, a flecha seria (PEREIRA, 2010):

$$d = \frac{ql^4}{8EI}, \quad (6.1)$$

onde  $q$  é o carregamento homogêneo gerado pela interação do fluido com a estrutura (neste caso considera-se a força aplicada pelo ROV sobre o cabo);  $l = 3.2\text{m}$  é o comprimento total da estrutura;  $E = 80\text{GPa} = 80 \times 10^9\text{N/m}^2$  é o Módulo de Young transversal do aço e  $I = \pi r^4/4 = 7,854 \times 10^{-9}\text{m}^4$  é a inércia da seção transversal.

A determinação das constantes elásticas de elevação em cada articulação foi realizada a partir de testes até que os resultados apresentados nas simulações fossem fisicamente coerentes, ou seja, até que o cabo se estabilizasse com um deslocamento final da extremidade próximo da flecha máxima obtida na equação 6.1. Assim sendo, verificou-se que as constantes elásticas de elevação em cada articulação do cabo podem ser obtidas a partir da expressão:

$$k = \frac{5}{6} \left( \frac{nEI}{l} \right). \quad (6.2)$$

As constantes elásticas de azimute foram consideradas nulas, enquanto que as constantes elásticas de torção foram especificadas de forma a possibilitar um tempo de resposta ao degrau de aproximadamente 1.5s. Os coeficientes de atrito, assim como os coeficientes de arrasto hidrodinâmico, foram especificados por tentativa e erro, até a obtenção de tempos de estabilização coerentes, ou seja, fisicamente esperados.



Inicialmente, foram realizadas simulações do cabo dividido em três elos. Em seguida foi analisado o comportamento dinâmico do sistema, considerando o cabo dividido em quatro, cinco e seis elos. As constantes elásticas em elevação obtidas a partir da equação 6.2, variam conforme o número de elos. Adotaram-se para as constantes de atrito variações proporcionais às verificadas para as constantes elásticas.

Para a realização das simulações, foi considerado um ROV de massa igual a 16 kg, com distância entre os propulsores frontais dada por 0.08m. O integrador numérico foi o Runge-Kutta de 4ª e 5ª ordem com ajuste automático do passo de integração, através da função ODE45 do MATLAB. As constantes de arrasto hidrodinâmico foram as mesmas para todos os casos.

Conforme definido nos capítulos 4 e 5, a dinâmica acoplada cabo/ROV, para o caso de um cabo umbilical dividido em  $n$  elos rígidos pode ser descrita pelo sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$I(\vec{\theta})\ddot{\vec{\theta}} + C\dot{\vec{\theta}} + K\vec{\theta} + \vec{f}(\dot{\vec{\theta}}, \vec{\theta}) + \vec{G}(\vec{\theta}) = \vec{T}_m, \quad (6.3)$$

onde:

$I(\vec{\theta})$  é a matriz de inércia (matriz quadrada de ordem  $3n$ );

$C$  é a matriz das constantes de atrito (matriz quadrada de ordem  $3n$ );

$K$  é a matriz das constantes elásticas (matriz quadrada de ordem  $3n$ );

$\vec{f}(\dot{\vec{\theta}}, \vec{\theta})$  corresponde ao vetor com os torques Coriolis-centrífugos;

$\vec{G}(\vec{\theta})$  é o vetor que contém os esforços gravitacionais (peso e empuxo) e

$\vec{T}_m$  é o vetor dos torques oriundos do ROV (vetor coluna com  $3n$  linhas).

Devido à grande complexidade e extensão das equações geradas pelo formalismo de Euler-Lagrange, o cálculo das equações do modelo dinâmico de forma analítica é inviável para um número grande de elos. Assim sendo, para a realização das simulações do cabo dividido em 3, 4, 5 e 6 elos, foi utilizada uma ferramenta computacional desenvolvida por (VIEIRA & FABER, 2010), capaz de construir as equações de maneira iterativa, gerando automaticamente o modelo do cabo de acordo com o número de elos predefinido. Este *software* foi desenvolvido em MATLAB e utiliza a manipulação simbólica de variáveis para gerar as equações do modelo. A figura 6.1 mostra a tela principal da interface do usuário. Nela há a opção para se digitar o número de elos que representará a flexibilidade estrutural. A partir de então a própria interface abre espaços específicos para

a digitação numérica dos parâmetros do modelo.

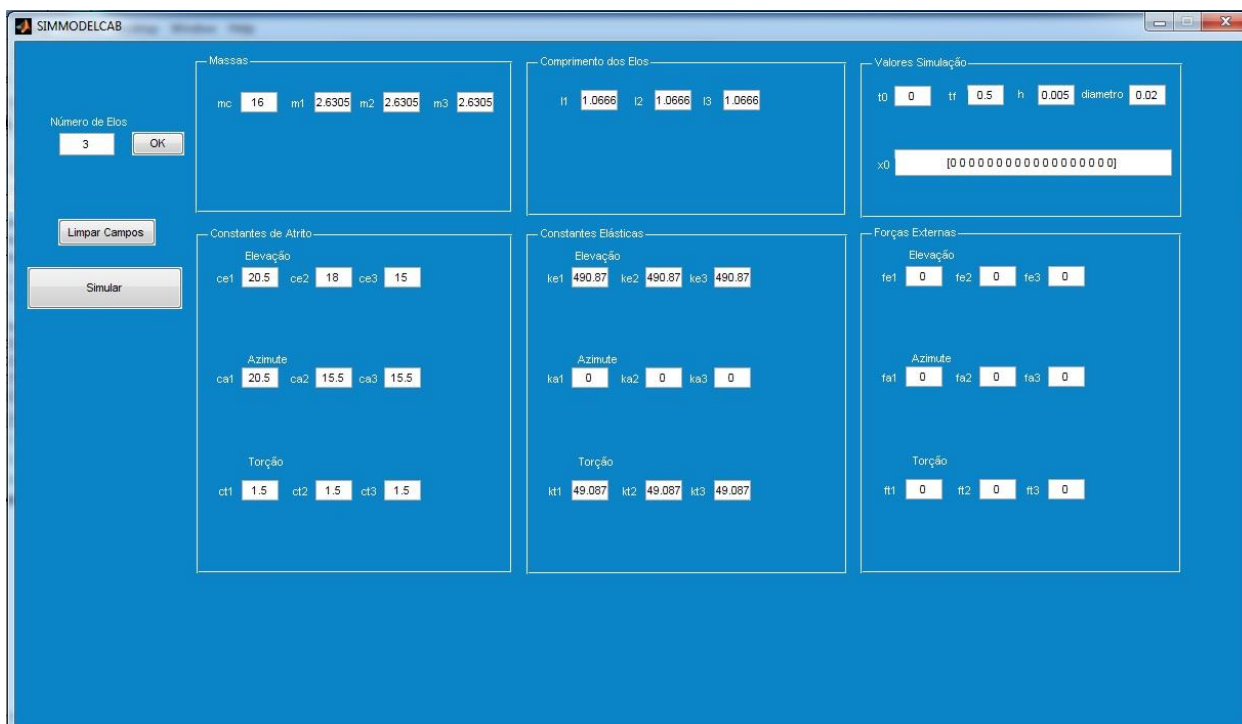


Figura 6.1 Tela principal do *software* gerador de modelos dinâmicos via manipulação simbólica de variáveis.

O *software* possibilita a realização de simulações de acordo com parâmetros definidos pelo usuário, como comprimento do cabo, massa do cabo, constantes de atrito e elásticas e as forças advindas das correntes marítimas. No intuito de efetuar simulações do sistema acoplado foram realizadas modificações no programa, a fim de garantir a inserção dos torques produzidos pelo ROV, identificados no capítulo 5.

Os torques produzidos pelo ROV, identificados no capítulo 5, são inseridos no modelo dinâmico do cabo, no vetor  $\vec{T}_m$ , a fim de promover o acoplamento entre as duas dinâmicas. Em todas as simulações o cabo encontrava-se submerso e, dessa forma, foram consideradas as perturbações advindas das forças de arrasto e empuxo.

### 6.1. CABO DIVIDIDO EM 3 ELOS

Foram realizadas simulações considerando o cabo dividido em três elos de mesmo comprimento. A massa de cada elo é 2,6305 kg e a massa do ROV é de 16 kg.

Para o cabo dividido em três elos, o vetor de estados  $\vec{X}$  possui dezoito coordenadas, definidas pela equação 6.4, sendo que as nove primeiras determinam as posições angulares e as demais correspondem às velocidades angulares de elevação, azimute e torção, respectivamente,

em cada uma das articulações.

$$\vec{X} = [x_1 x_2 \ x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8 x_9 x_{10} x_{11} x_{12} x_{13} x_{14} x_{15} x_{16} x_{17} x_{18}]^T \quad (6.4)$$

Logo:

$$\begin{aligned} x_1 = \theta_{1e} &\Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{\theta}_{1e} = x_{10} \Rightarrow \dot{x}_{10} = \ddot{\theta}_{1e} \\ x_2 = \theta_{2e} &\Rightarrow \dot{x}_2 = \dot{\theta}_{2e} = x_{11} \Rightarrow \dot{x}_{11} = \ddot{\theta}_{2e} \\ x_3 = \theta_{3e} &\Rightarrow \dot{x}_3 = \dot{\theta}_{3e} = x_{12} \Rightarrow \dot{x}_{12} = \ddot{\theta}_{3e} \\ x_4 = \theta_{1a} &\Rightarrow \dot{x}_4 = \dot{\theta}_{1a} = x_{13} \Rightarrow \dot{x}_{13} = \ddot{\theta}_{1a} \\ x_5 = \theta_{2a} &\Rightarrow \dot{x}_5 = \dot{\theta}_{2a} = x_{14} \Rightarrow \dot{x}_{14} = \ddot{\theta}_{2a} \\ x_6 = \theta_{3a} &\Rightarrow \dot{x}_6 = \dot{\theta}_{3a} = x_{15} \Rightarrow \dot{x}_{15} = \ddot{\theta}_{3a} \\ x_7 = \theta_{1t} &\Rightarrow \dot{x}_7 = \dot{\theta}_{1t} = x_{16} \Rightarrow \dot{x}_{16} = \ddot{\theta}_{1t} \\ x_8 = \theta_{2t} &\Rightarrow \dot{x}_8 = \dot{\theta}_{2t} = x_{17} \Rightarrow \dot{x}_{17} = \ddot{\theta}_{2t} \\ x_9 = \theta_{3t} &\Rightarrow \dot{x}_9 = \dot{\theta}_{3t} = x_{18} \Rightarrow \dot{x}_{18} = \ddot{\theta}_{3t} \end{aligned} \quad (6.5)$$

onde  $\theta_{1e}$ ,  $\theta_{2e}$  e  $\theta_{3e}$  são os ângulos de elevação,  $\theta_{1a}$ ,  $\theta_{2a}$  e  $\theta_{3a}$  são os ângulos de azimute e  $\theta_{1t}$ ,  $\theta_{2t}$  e  $\theta_{3t}$  são os ângulos de torção nas articulações 1, 2 e 3, respectivamente.

O vetor de estados inicial utilizado na simulação apresentada na Figura 6.2, Figura 6.3 e Figura 6.4 foi  $\vec{X} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ , com as coordenadas de posições e velocidades todas nulas. Considera-se como condição inicial o cabo completamente esticado, com coordenadas da carga terminal dadas por  $(x_c, y_c, z_c) = (0, 0, -3.2)$ . Consideram-se ligados os propulsores frontais do ROV, com empuxo de  $15.75N$  em cada atuador.

A Figura 6.2 mostra a variação dos ângulos de elevação nos três elos. Nota-se que a amplitude do movimento angular é maior no terceiro elo, já que a força é aplicada sobre ele. Os demais elos apresentam movimentos pendulares semelhantes, em função do acoplamento dinâmico do cabo, e podem ser mais ou menos amortecidos em função das constantes de atrito nas articulações e das constantes de arrasto definidas. Os ângulos de azimute e torção não sofreram nenhum tipo de variação, permanecendo nulos durante todo o tempo de simulação.

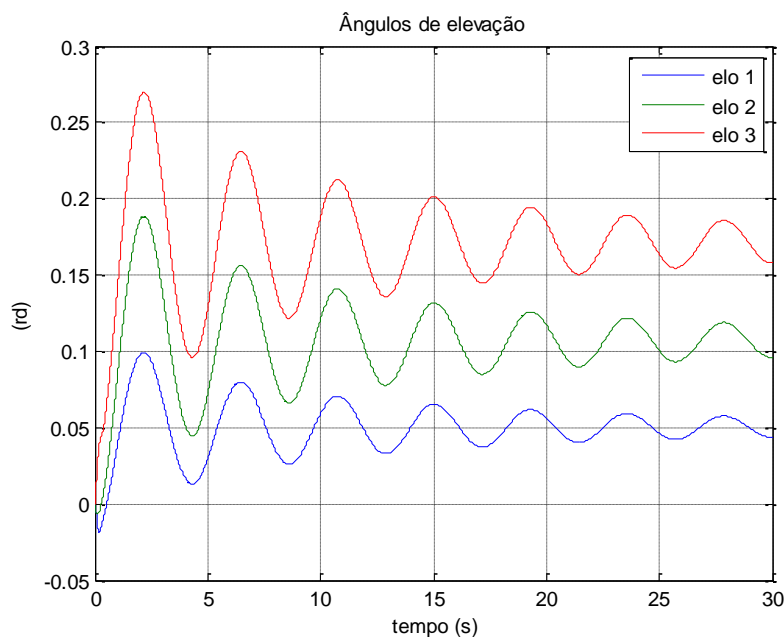


Figura 6.2 – Ângulos de elevação – propulsores frontais ligados com tensões iguais ( $n=3$ ).

A Figura 6.3 mostra a trajetória descrita pelo centro de massa do ROV em cada um dos eixos do referencial inicial. Observa-se que o veículo apresenta oscilações decrescentes e que com o passar do tempo o veículo tende a se estabilizar em uma posição fora da origem. Além disso, verifica-se um movimento pouco amortecido, o que ocorre em função do coeficiente de arrasto adotado.

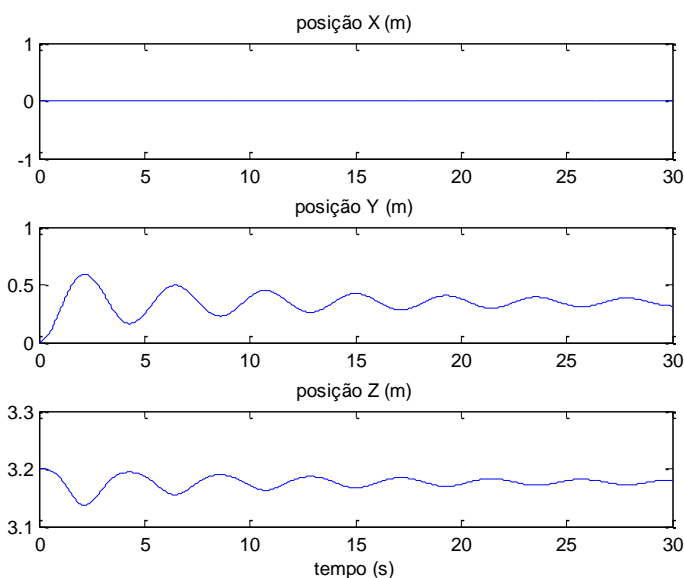


Figura 6.3 – Posição do centro de massa do ROV – propulsores frontais com tensões iguais ( $n=3$ ).

Observando-se a Figura 6.4, que apresenta a trajetória espacial descrita pelo centro de massa do veículo, é possível perceber que ao ligar apenas os propulsores frontais, o veículo percorre uma trajetória no plano ZY.

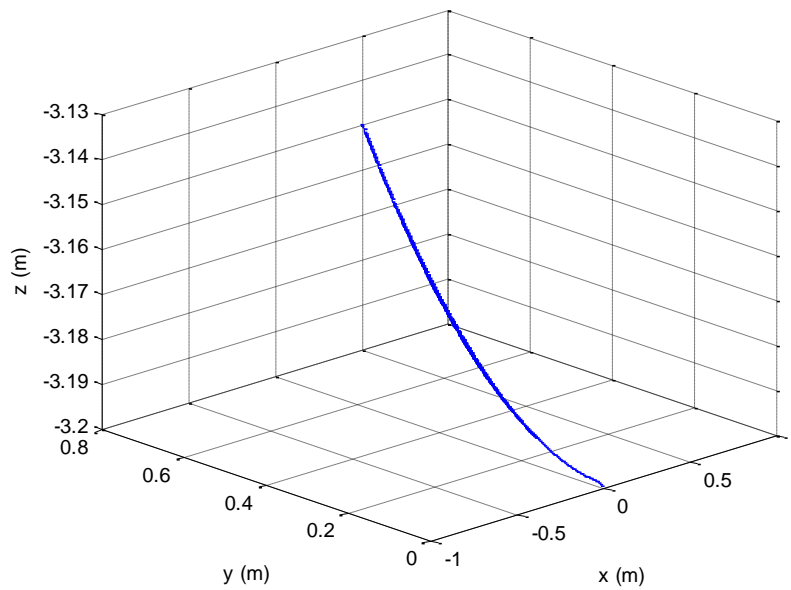


Figura 6.4 – Trajetória espacial do centro de massa do ROV – propulsores frontais com tensões iguais (n=3).

A próxima simulação apresentada considera o mesmo vetor de estados inicial,  $\vec{X} = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$ , com o atuador frontal esquerdo gerando empuxo de  $15.75N$  e o atuador frontal direito com empuxo de  $-15.75N$ . Nessas condições, o cabo está completamente esticado e o ROV descreve um movimento de rotação sobre o eixo  $Z_c$  (referencial do corpo), que inicialmente coincide com o eixo  $Z_0$ , o que provoca variação apenas nos ângulos de torção dos três elos do cabo, como mostra a Figura 6.5.

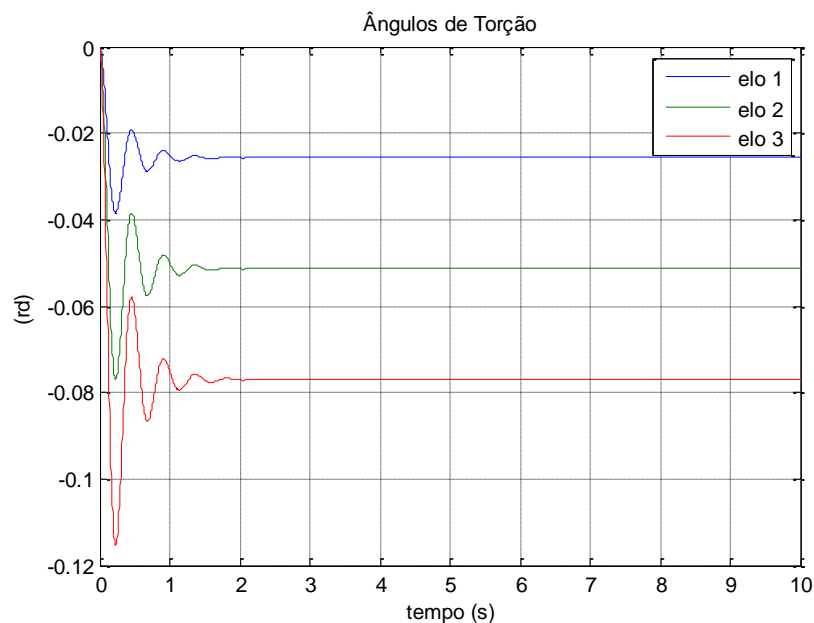


Figura 6.5 – Ângulos de torção – propulsores frontais com tensões de sinais contrários (n=3).

Nessa simulação os ângulos de elevação e azimute permanecem nulos durante todo o

tempo e as coordenadas do centro de massa do ROV permanecem inalteradas. Os ângulos de torção se estabilizam depois de aproximadamente dois segundos.

As figuras 6.6, 6.7, 6.8 e 6.9 mostram os resultados da simulação realizada com o vetor de estados inicial definido por  $\vec{X} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  e com um empuxo produzido pelo atuador esquerdo equivalente a  $15.75N$  e o empuxo produzido pelo atuador direito igual a  $7.88N$ , empuxos produzidas pelos propulsores frontais. Considera-se o propulsor direito gerando metade da força produzida pelo propulsor esquerdo.

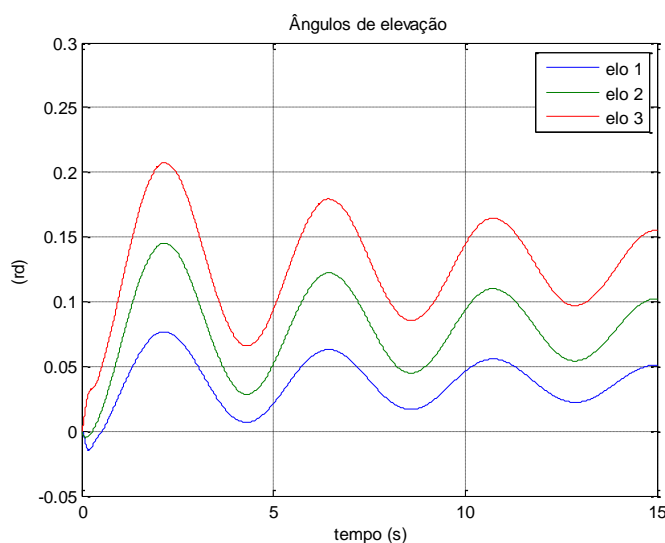


Figura 6.6 – Ângulos de elevação - tensões de mesmo sinal e módulos diferentes ( $n=3$ ).

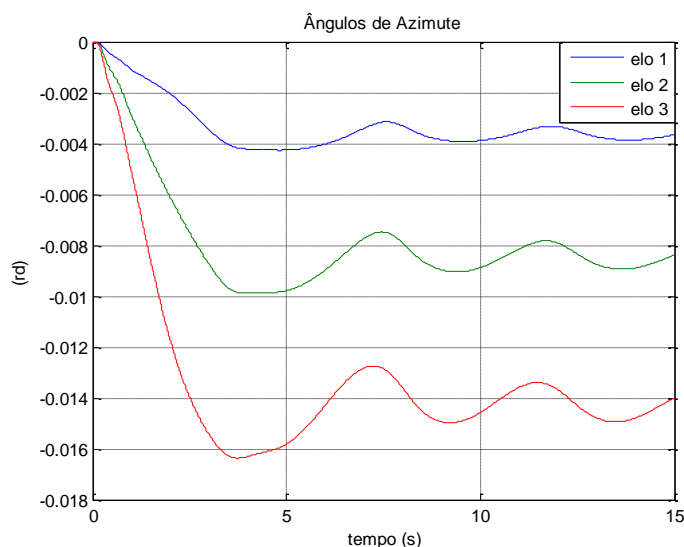


Figura 6.7 – Ângulos de azimute - tensões de mesmo sinal e módulos diferentes ( $n=3$ ).

A figura 6.6 apresenta a variação dos ângulos de elevação, na qual observa-se que a amplitude da variação no terceiro elo é maior que nos anteriores, comportamento semelhante à primeira simulação realizada. Percebe-se que o movimento é levemente amortecido e os ângulos tendem a estabilizarem-se (o equilíbrio estático ocorrerá com o ROV fora da posição

de equilíbrio inicial em razão dos atuadores frontais continuarem ligados).

A figura 6.7 ilustra a variação dos ângulos de azimute do cabo em cada articulação, que ocorre em função da torção que o ROV provoca no cabo devida à diferença entre as forças aplicadas nos propulsores frontais. Os ângulos são negativos, pois o ROV realiza uma rotação no sentido horário e tendem a se estabilizar mesmo com constantes elástica nulas em azimute. Isto ocorre em razão dos ângulos detorção (figura 6.8) chegarem ao limite imposto pelo torque de torção, surgido devido à diferença de empuxo nos dois atuadores frontais. Dessa forma, depois que os ângulos de torção se estabilizam, os ângulos de azimute também começam a se estabilizar.

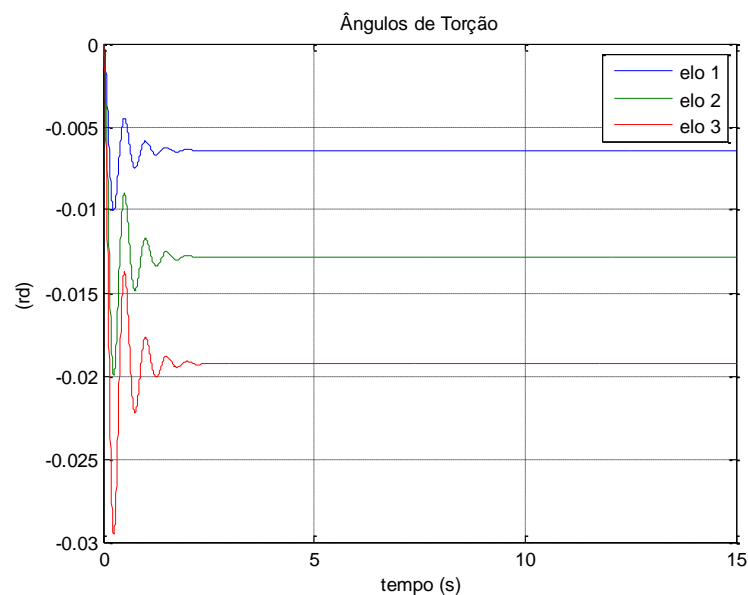


Figura 6.8 – Ângulos de Torção - tensões de mesmo sinal e módulos diferentes nos atuadores frontais ( $n=3$ ).

A Figura 6.9 apresenta a posição do centro de massa do ROV durante o tempo de simulação. Observa-se que houve variações das posições em  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ , obtidas em função das variações dos ângulos de elevação, azimute e torção do cabo. Logo, o movimento realizado pelo ROV não está mais restrito a um único plano, como nas simulações anteriores.

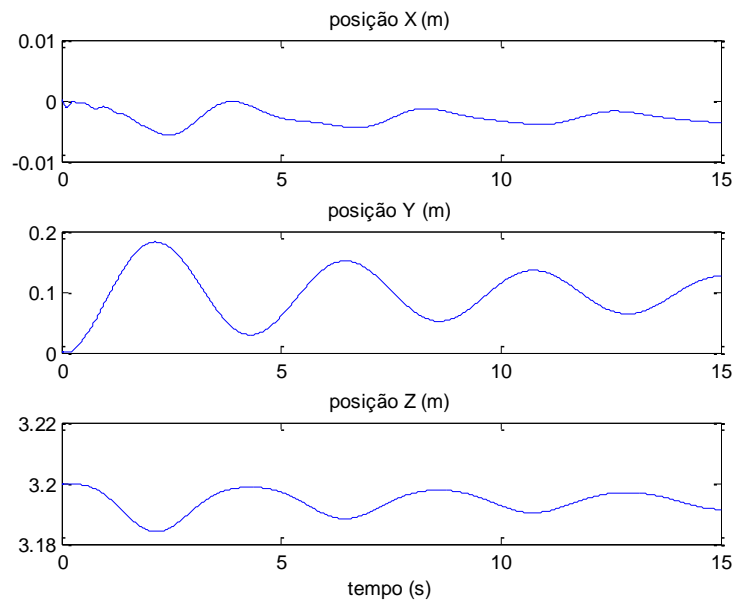


Figura 6.9 – Posição do centro de massa do ROV - tensões de mesmo sinal e módulos diferentes nos atuadores frontais ( $n=3$ ).

## 6.2. CABO DIVIDIDO EM 4 ELÓS

Foram realizadas simulações considerando-se o cabo dividido em quatro elos de mesmos comprimentos. As constantes elásticas de elevação nas quatro articulações utilizadas em todas as simulações foram obtidas segundo a equação 6.2, as constantes elásticas de torção iguais a um décimo das constantes de elevação, as constantes elásticas de azimute nulas, e as constantes de atrito foram obtidas seguindo a mesma variação percentual verificada para as constantes elásticas, de três elos para quatro elos. A massa de cada elo é  $1,973 \text{ kg}$  e a massa do ROV é  $16 \text{ kg}$ .

Para o cabo dividido em quatro elos, o vetor de estados  $\vec{X}$  possui vinte e quatro coordenadas, sendo que as doze primeiras correspondem às posições angulares e as demais correspondem às velocidades angulares, de elevação, azimute e torção, respectivamente, em cada uma das articulações.

Considera-se cada elemento do vetor  $\vec{X}$  correspondente a uma posição angular ou a uma velocidade angular, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 x_1 = \theta_{1e} &\Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{\theta}_{1e} = x_{13} \Rightarrow \dot{x}_{13} = \ddot{\theta}_{1e} \\
 x_2 = \theta_{2e} &\Rightarrow \dot{x}_2 = \dot{\theta}_{2e} = x_{14} \Rightarrow \dot{x}_{14} = \ddot{\theta}_{2e} \\
 x_3 = \theta_{3e} &\Rightarrow \dot{x}_3 = \dot{\theta}_{3e} = x_{15} \Rightarrow \dot{x}_{15} = \ddot{\theta}_{3e}
 \end{aligned} \tag{6.6}$$



$$x_4 = \theta_{4e} \Rightarrow \dot{x}_4 = \dot{\theta}_{4e} = x_{16} \Rightarrow \dot{x}_{16} = \ddot{\theta}_{4e}$$

$$x_5 = \theta_{1a} \Rightarrow \dot{x}_5 = \dot{\theta}_{1a} = x_{17} \Rightarrow \dot{x}_{17} = \ddot{\theta}_{1a}$$

$$x_6 = \theta_{2a} \Rightarrow \dot{x}_6 = \dot{\theta}_{2a} = x_{18} \Rightarrow \dot{x}_{18} = \ddot{\theta}_{2a}$$

$$x_7 = \theta_{3a} \Rightarrow \dot{x}_7 = \dot{\theta}_{3a} = x_{19} \Rightarrow \dot{x}_{19} = \ddot{\theta}_{3a}$$

$$x_8 = \theta_{4a} \Rightarrow \dot{x}_8 = \dot{\theta}_{4a} = x_{20} \Rightarrow \dot{x}_{20} = \ddot{\theta}_{4a}$$

$$x_9 = \theta_{1t} \Rightarrow \dot{x}_9 = \dot{\theta}_{1t} = x_{21} \Rightarrow \dot{x}_{21} = \ddot{\theta}_{1t}$$

$$x_{10} = \theta_{2t} \Rightarrow \dot{x}_{10} = \dot{\theta}_{2t} = x_{22} \Rightarrow \dot{x}_{22} = \ddot{\theta}_{2t}$$

$$x_{11} = \theta_{3t} \Rightarrow \dot{x}_{11} = \dot{\theta}_{3t} = x_{23} \Rightarrow \dot{x}_{23} = \ddot{\theta}_{3t}$$

$$x_{12} = \theta_{4t} \Rightarrow \dot{x}_{12} = \dot{\theta}_{4t} = x_{24} \Rightarrow \dot{x}_{24} = \ddot{\theta}_{4t}$$

onde  $\theta_{1e}, \theta_{2e}, \theta_{3e}$  e  $\theta_{4e}$  são os ângulos de elevação,  $\theta_{1a}, \theta_{2a}, \theta_{3a}$  e  $\theta_{4a}$  são os ângulos de elevação e  $\theta_{1t}, \theta_{2t}, \theta_{3t}$  e  $\theta_{4t}$  são os ângulos de torção nas articulações 1, 2, 3 e 4, respectivamente.

O vetor de estados inicial utilizado na simulação apresentada na Figura 6.10, Figura 6.11 e na Figura 6.12 foi  $\vec{X} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ , com as coordenadas de posições e velocidades angulares todas nulas. Considera-se como condição inicial o cabo completamente esticado, com coordenadas da carga terminal dadas por  $(x_c, y_c, z_c) = (0, 0, -3.2)$ . Consideram-se ligados os propulsores frontais do ROV, produzindo empuxos iguais nos dois atuadores, dados por  $15,75N$ .

A Figura 6.10 apresenta a variação dos ângulos de elevação nos quatro elos, onde se observa que a amplitude do movimento angular, assim como nas simulações anteriores, é maior no último elo. Os demais elos apresentam movimentos pendulares semelhantes e podem ser mais ou menos amortecidos em função das constantes de atrito nas articulações e a constante de arrasto definida. Com o passar do tempo os ângulos de elevação se estabilizam. Os ângulos de azimute e torção não sofreram nenhum tipo de variação, em razão dos atuadores frontais produzirem forças iguais.

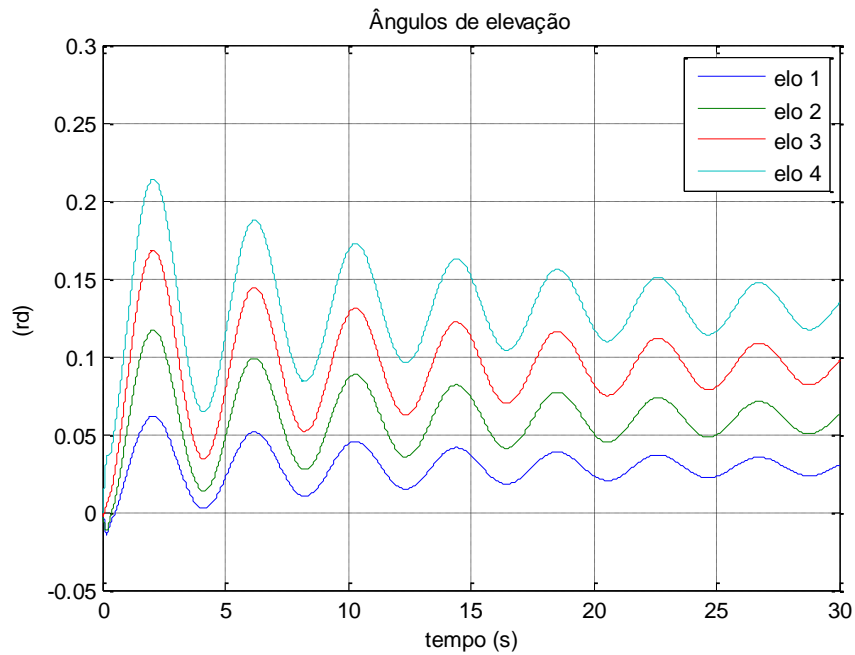


Figura 6.10 – Ângulos de elevação – propulsores com tensões iguais (n=4).

A Figura 6.11 mostra a trajetória descrita pelo centro de massa do ROV em cada um dos eixos do referencial inicial. Observa-se que o veículo apresenta oscilações em função da ação das forças peso e empuxo e principalmente em função dos empuxos aplicados no ROV. O ROV tende a se estabilizar em uma posição fora da inicial.

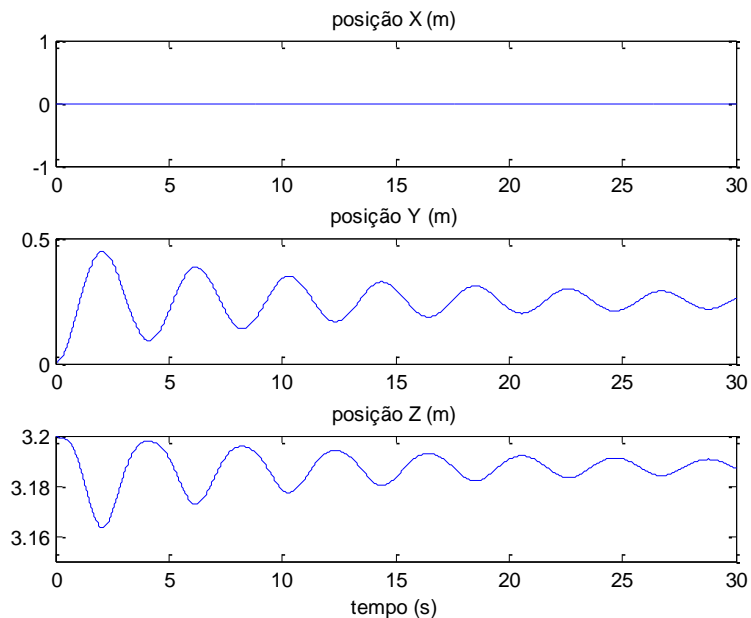


Figura 6.11 – Posição do centro de massa do ROV – propulsores com tensões iguais (n=4).

Observando-se a Figura 6.14, que apresenta a trajetória espacial descrita pelo centro de massa do veículo, nota-se que, assim como na simulação realizada com três elos, ao ligarmos apenas os propulsores frontais com tensões iguais, o veículo percorre uma trajetória no plano

ZY.

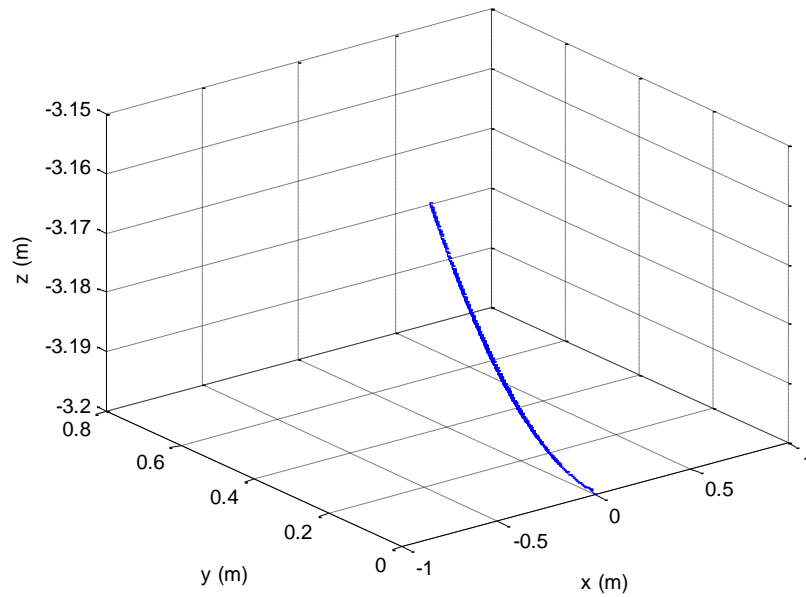


Figura 6.12 – Movimento espacial do ROV – propulsores frontais com tensões iguais ( $n=4$ ).

Em seguida, realizaram-se simulações considerando o mesmo vetor de estados inicial,  $\vec{X} = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$ , com propulsores frontais ligados com tensões de sinais contrários, produzindo no atuador esquerdo um empuxo de  $15.75N$  e no atuador direito um empuxo de  $-15.75N$ . Dessa forma, um propulsor produz força pra frente outro produz uma força de mesmo módulo para trás. Inicialmente, o cabo está completamente esticado e o ROV descreve um movimento de rotação sobre o eixo  $Z_c$ , o que provoca variação apenas nos ângulos de torção dos quatro elos do cabo, como mostra a Figura 6.13. Os ângulos de torção se estabilizam em aproximadamente dois segundos.

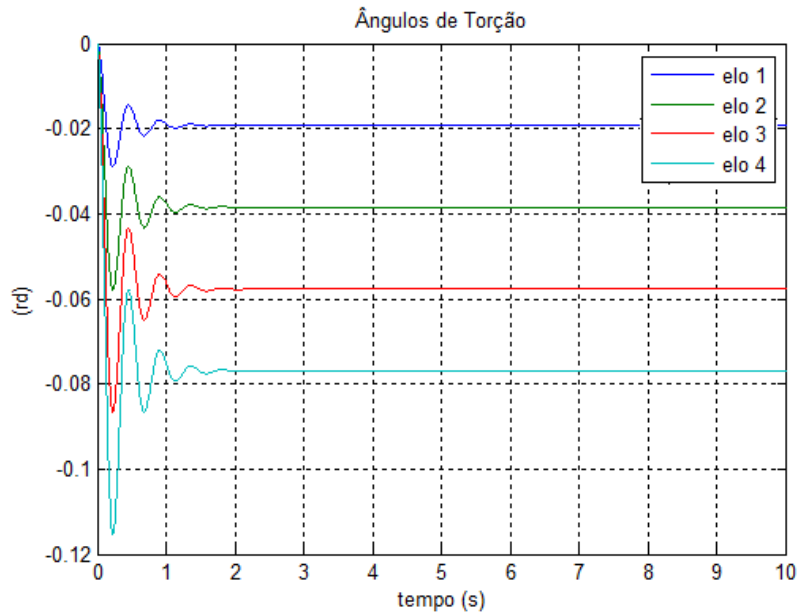


Figura 6.13 – Ângulos de torção – propulsores com tensões de mesmo módulo e sinais diferentes (n=4).

Os ângulos de elevação e azimute permanecem nulos durante todo o tempo e as coordenadas do centro de massa do ROV permanecem inalteradas, como pode ser observado na Figura 14.

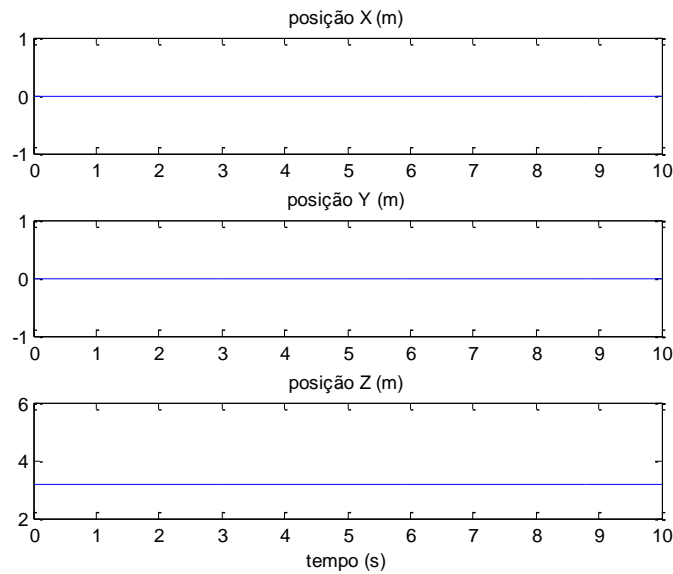


Figura 6.14 – Posição ROV – tensões de mesmo módulo e sinais diferentes (n=4).

As Figuras 6.15, 6.16, 6.17 e 6.18 mostram os resultados da simulação realizada com o cabo dividido em quatro elos, com vetor de estados inicial definido por  $\vec{X} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  e com as forças produzidas pelos propulsores frontais com mesmo sinal, porém com módulos diferentes. O empuxo produzido pelo propulsor esquerdo igual a  $15.75N$  e para o propulsor direito igual a  $7.88N$ . Considera-se o propulsor direito gerando metade da força produzida pelo propulsor esquerdo.

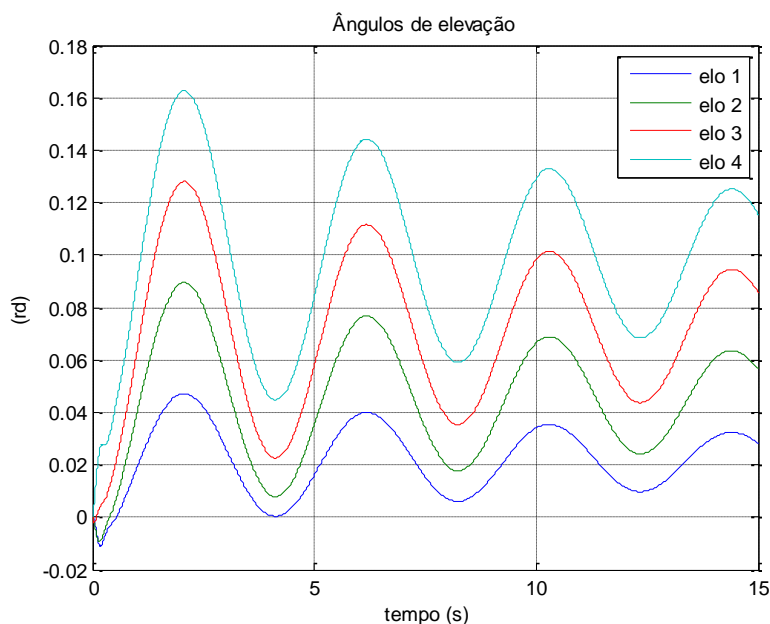


Figura 6.15 – Ângulos de elevação - tensões de mesmo sinal e módulos diferentes nos atuadores frontais ( $n=4$ ).

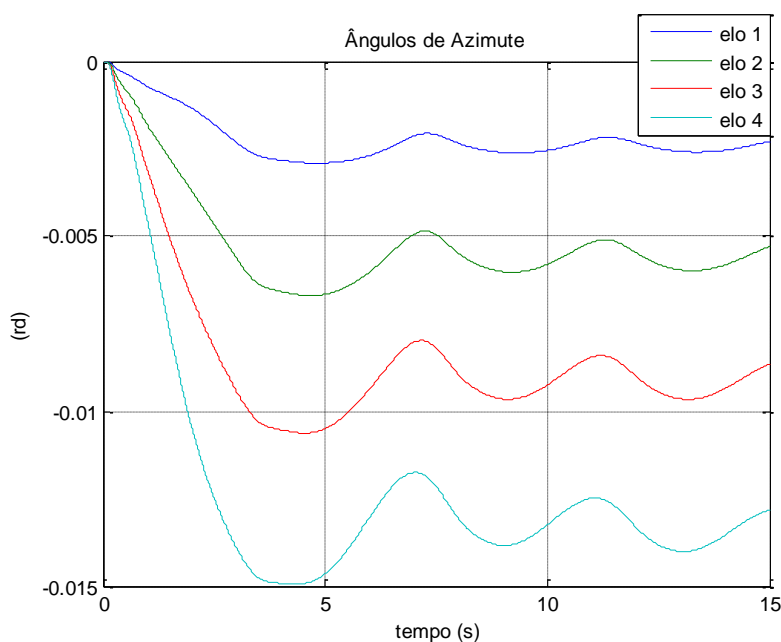


Figura 6.16 – Ângulos de azimute - tensões de mesmo sinal e módulos diferentes ( $n=4$ ).

A Figura 6.15 apresenta a variação dos ângulos de elevação, na qual observa-se que a amplitude do movimento no quarto elo é maior que nos anteriores e os ângulos vão se estabilizando no decorrer do tempo, comportamento semelhante ao verificado nas simulações anteriores.

A Figura 6.16 ilustra a variação dos ângulos de azimute do cabo em cada articulação, que ocorre em razão da torção que o ROV exerce no cabo devida à diferença de forças aplicadas nos propulsores frontais. Os ângulos são negativos, pois o ROV realiza uma rotação no sentido horário.

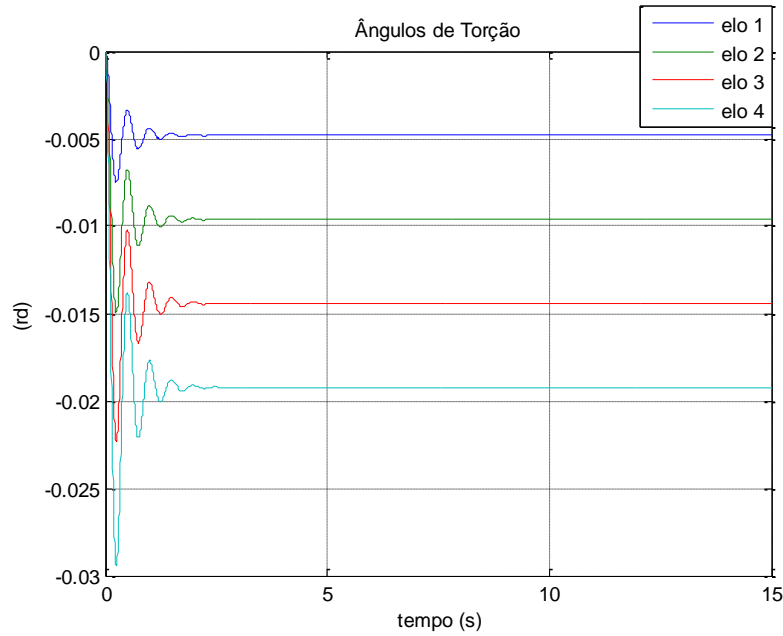


Figura 6.17 – Ângulos de torção - tensões de mesmo sinal e módulos diferentes nos atuadores frontais ( $n=4$ ).

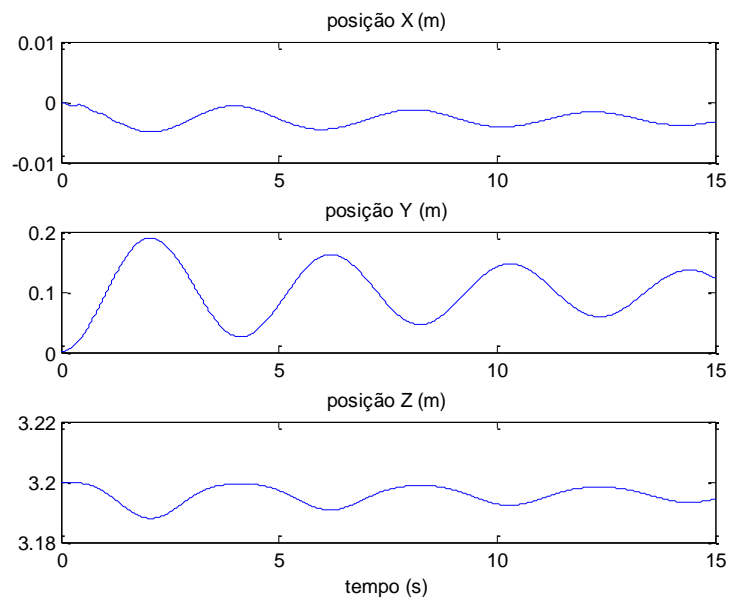


Figura 6.18 – Posição do centro de massa do ROV - tensões de mesmo sinal e módulos diferentes nos atuadores frontais ( $n=4$ ).

Os ângulos de torção, apresentados pela Figura 6.17, também são negativos devido à rotação no sentido horário realizada pelo ROV. Depois que os ângulos de torção se estabilizam, os ângulos de azimute também começam a se estabilizar. A Figura 6.18 apresenta a posição do centro de massa do ROV durante o tempo de simulação. Observa-se que houve variações das posições em  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ , obtidas em função das variações dos ângulos de elevação, azimute e torção do cabo. Dessa forma, o movimento do ROV não fica restrito ao plano  $ZY$  como na simulação anterior.

#### 6.4. CABO DIVIDIDO EM 5 ELOS

As simulações realizadas a seguir consideram o cabo dividido em cinco elos de mesmo comprimento ( $n=5$ ). As constantes elásticas de elevação, nas cinco articulações, em todas as simulações foram obtidas segundo a equação 6.2, as constantes elásticas de torção iguais a um décimo das constantes de elevação e as constantes elásticas de azimute nulas. As constantes de atrito foram obtidas seguindo a mesma variação percentual verificada para as constantes elásticas, de quatro elos para cinco elos. A massa de cada elo é 1,5784 kg e a massa do ROV é de 16kg.

Para o cabo dividido em cinco elos, o vetor de estados  $\vec{X}$  possui trinta coordenadas, sendo que as quinze primeiras correspondem às posições angulares e as demais às velocidades angulares, de elevação, azimute e torção, respectivamente, em cada uma das articulações.

Considera-se cada elemento do vetor correspondente a uma posição angular ou a uma velocidade angular, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \theta_{1e} \Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{\theta}_{1e} = x_{16} \Rightarrow \dot{x}_{16} = \ddot{\theta}_{1e} \\
 x_2 &= \theta_{2e} \Rightarrow \dot{x}_2 = \dot{\theta}_{2e} = x_{17} \Rightarrow \dot{x}_{17} = \ddot{\theta}_{2e} \\
 x_3 &= \theta_{3e} \Rightarrow \dot{x}_3 = \dot{\theta}_{3e} = x_{18} \Rightarrow \dot{x}_{18} = \ddot{\theta}_{3e} \\
 x_4 &= \theta_{4e} \Rightarrow \dot{x}_4 = \dot{\theta}_{4e} = x_{19} \Rightarrow \dot{x}_{19} = \ddot{\theta}_{4e} \\
 x_5 &= \theta_{5e} \Rightarrow \dot{x}_5 = \dot{\theta}_{5e} = x_{20} \Rightarrow \dot{x}_{20} = \ddot{\theta}_{5e} \\
 x_6 &= \theta_{1a} \Rightarrow \dot{x}_6 = \dot{\theta}_{1a} = x_{21} \Rightarrow \dot{x}_{21} = \ddot{\theta}_{1a} \\
 x_7 &= \theta_{2a} \Rightarrow \dot{x}_7 = \dot{\theta}_{2a} = x_{22} \Rightarrow \dot{x}_{22} = \ddot{\theta}_{2a} \\
 x_8 &= \theta_{3a} \Rightarrow \dot{x}_8 = \dot{\theta}_{3a} = x_{23} \Rightarrow \dot{x}_{23} = \ddot{\theta}_{3a} \\
 x_9 &= \theta_{4a} \Rightarrow \dot{x}_9 = \dot{\theta}_{4a} = x_{24} \Rightarrow \dot{x}_{24} = \ddot{\theta}_{4a} \\
 x_{10} &= \theta_{5a} \Rightarrow \dot{x}_{10} = \dot{\theta}_{5a} = x_{25} \Rightarrow \dot{x}_{25} = \ddot{\theta}_{5a} \\
 x_{11} &= \theta_{1t} \Rightarrow \dot{x}_{11} = \dot{\theta}_{1t} = x_{26} \Rightarrow \dot{x}_{26} = \ddot{\theta}_{1t} \\
 x_{12} &= \theta_{2t} \Rightarrow \dot{x}_{12} = \dot{\theta}_{2t} = x_{27} \Rightarrow \dot{x}_{27} = \ddot{\theta}_{2t} \\
 x_{13} &= \theta_{3t} \Rightarrow \dot{x}_{13} = \dot{\theta}_{3t} = x_{28} \Rightarrow \dot{x}_{28} = \ddot{\theta}_{3t} \\
 x_{14} &= \theta_{4t} \Rightarrow \dot{x}_{14} = \dot{\theta}_{4t} = x_{29} \Rightarrow \dot{x}_{29} = \ddot{\theta}_{4t}
 \end{aligned} \tag{6.7}$$







frontais ligados, com tensões de mesmo módulo, mas com sinais diferentes, sendo o empuxo produzido pelo atuador esquerdo igual  $15,75N$  e o empuxo produzido pelo atuador direito igual a  $-15,75N$ .

Dessa forma, um propulsor produz força pra frente e o outro produz uma força de mesmo módulo para trás. Inicialmente, o cabo está completamente esticado e o ROV descreve um movimento de rotação sobre o eixo  $Z_c$ , o que provoca variação apenas nos ângulos de torção dos cinco elos do cabo, como mostra a Figura 6.22. Os ângulos de torção se estabilizam em aproximadamente dois segundos.

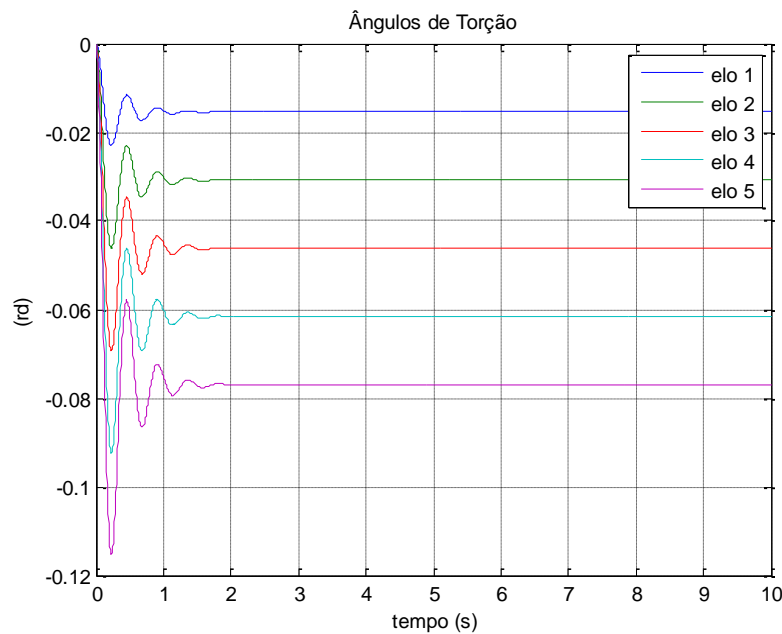


Figura 6.22 – Ângulos de torção – propulsores frontais com tensões de mesmo módulo e sinais diferentes ( $n=5$ ).

Os ângulos de elevação e azimute permanecem nulos durante todo o tempo e as coordenadas do centro de massa do ROV permanecem inalteradas, como pode ser observado na Figura 23.



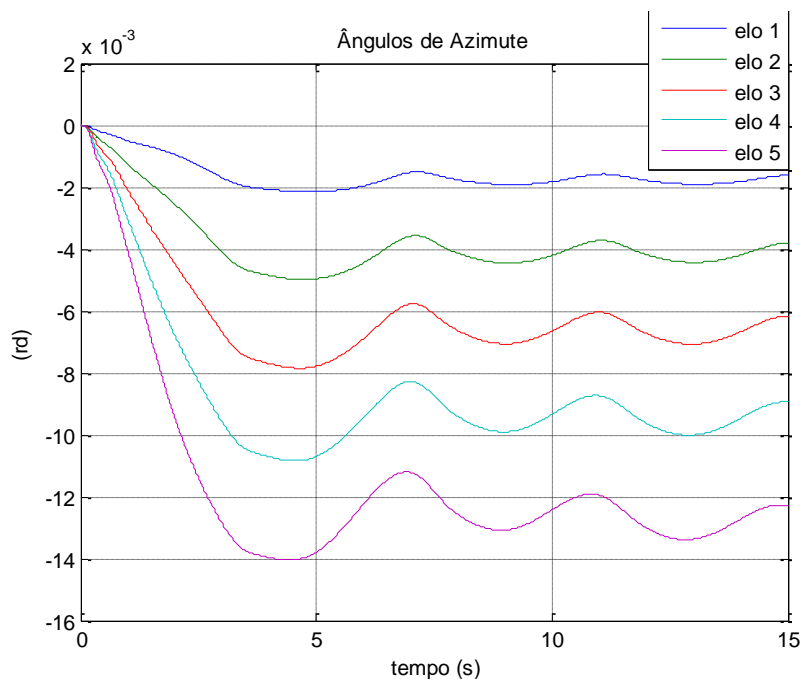


Figura 6.25 – Ângulos de azimute - tensões de mesmo sinal e módulos diferentes nos atuadores frontais ( $n=5$ ).

A Figura 6.24 apresenta a variação dos ângulos de elevação, onde nota-se que a amplitude da variação no quinto elo é maior que nos anteriores e o comportamento é pendular amortecido como nas simulações anteriores. Os ângulos de elevação tendem a se estabilizar com o decorrer do tempo.

A Figura 6.25 ilustra a variação dos ângulos de azimute do cabo em cada articulação, que ocorre devida à diferença de forças aplicadas nos propulsores frontais e, embora a força seja aplicada em todo o tempo de simulação, os ângulos de azimute tendem a se estabilizar em razão dos ângulos de torção chegarem ao limite imposto pelo torque de torção, surgido devido à diferença de empuxo nos dois atuadores frontais.

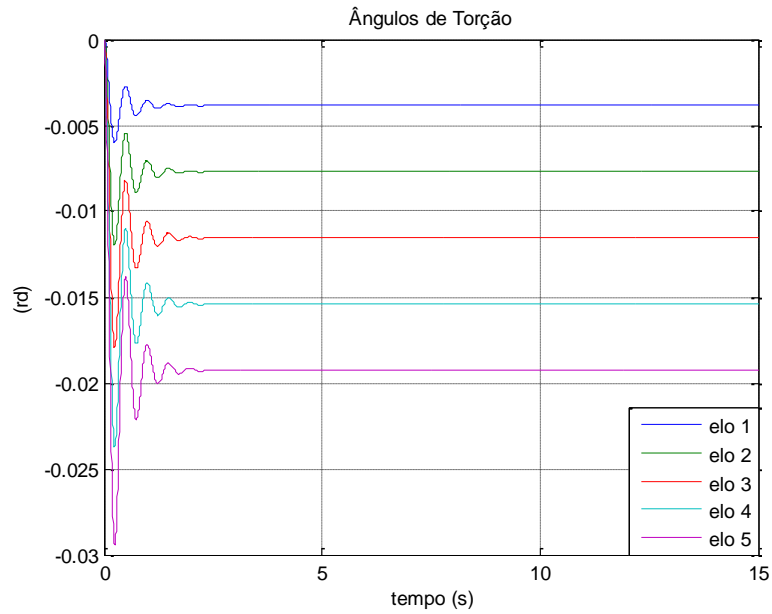


Figura 6.26 – Ângulos de torção - tensões de mesmo sinal e módulos diferentes nos atuadores frontais ( $n=5$ ).

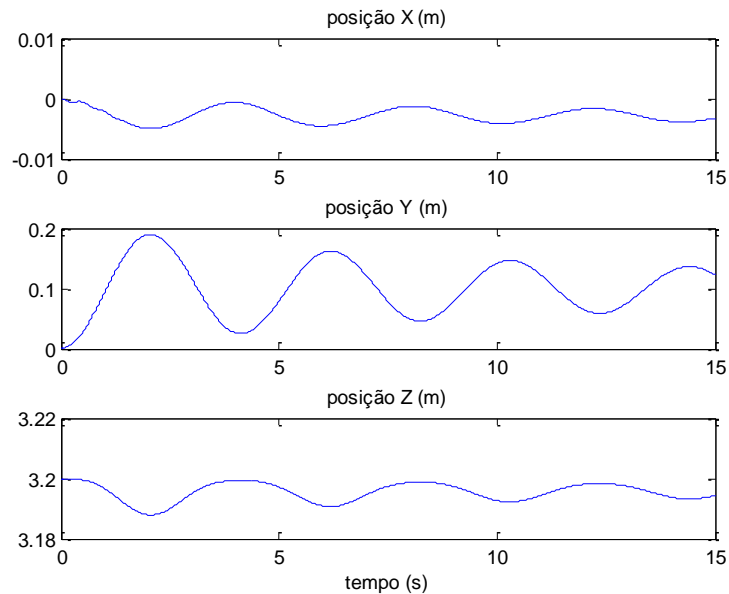


Figura 6.27 – Posição do centro de massa do ROV - tensões de mesmo sinal e módulos diferentes nos atuadores frontais ( $n=5$ ).

Os ângulos de torção, representados pela Figura 6.26, também são negativos devido à rotação no sentido horário realizada pelo ROV. Depois que os ângulos de torção se estabilizam, os ângulos de azimute também começam a se estabilizar.

A Figura 6.27 apresenta a posição do centro de massa do ROV durante o tempo de simulação. Observa-se que houve variações das posições em  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ , obtidas em função das variações dos ângulos de elevação, azimute e torção do cabo. Dessa forma, o movimento do ROV não fica restrito ao plano  $ZY$ . A Figura 6.28 apresenta a trajetória espacial do centro de

massa do ROV para esta mesma simulação.

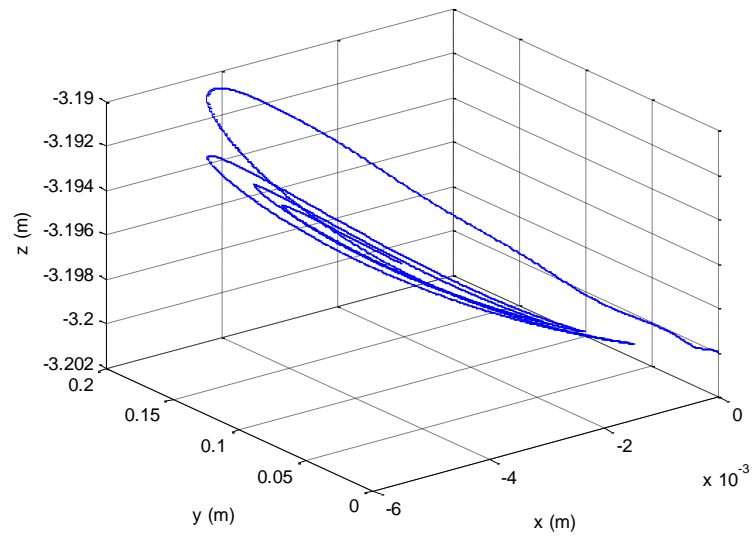


Figura 6.28 – Trajetória espacial do ROV - tensões de mesmo sinal e módulos diferentes nos atuadores frontais ( $n=5$ ).

Ao analisar os gráficos apresentados, pode-se concluir que os resultados obtidos nas simulações são os fisicamente esperados, para os três tipos de simulação propostas, tanto no caso da primeira simulação (empuxos iguais), quanto na segunda (empuxos com sinais diferentes nos dois atuadores frontais) e na terceira (empuxos com módulos diferentes nos dois atuadores frontais).

## 7. CONCLUSÕES

Neste capítulo apresentam-se as considerações finais sobre os resultados obtidos na presente dissertação. Diversas observações sobre cada etapa do trabalho desenvolvido já foram apresentadas ao longo dos capítulos. Entretanto, as principais conclusões verificadas em toda a dissertação são resumidas no presente capítulo, complementadas por comentários que possibilitem uma melhor interpretação dos resultados obtidos.

Sobre a modelagem cinemática de veículos subaquáticos, utilizou-se o formalismo baseado nos Ângulos de Euler. Esse método possibilita uma fácil visualização da orientação do veículo. Entretanto apresenta singularidades para ângulos de arfagem de  $90^\circ$  e  $270^\circ$ , fato que não representa um problema, já que os veículos subaquáticos dificilmente precisariam se deslocar com os eixos longitudinais na vertical.

A modelagem dinâmica de veículos subaquáticos tem um nível de complexidade importante, embora a teoria já seja bem conhecida. Porém, a maior dificuldade ainda reside na identificação dos parâmetros do modelo dinâmico. Efeitos dinâmicos tais como arrasto, sustentação, Coriolis-centrífugos, massa adicional, possuem, em seus modelos específicos, parâmetros físicos difíceis de identificar. Talvez seja por essa razão que a maioria dos projetos de controle para veículos subaquáticos são realizados sem a necessidade do conhecimento prévio do modelo dinâmico.

Embora existam outras técnicas de modelagem de cabos umbilicais amplamente utilizadas, com destaque aos métodos de Elementos Finitos e Diferenças Finitas, busca-se, neste trabalho, compreender e explorar uma nova abordagem para o desenvolvimento do modelo dinâmico de cabos umbilicais, cujo fundamento principal é considerar o cabo dividido em elos rígidos conectados por articulações elásticas fictícias. A principal vantagem desta abordagem está na possibilidade da identificação automática do Lagrangeano do sistema a partir de uma única equação, constituída por somatórios que dependem unicamente do número de elos considerados, ou seja, dependem do número de graus de liberdade que se pretende para a dinâmica do sistema. Esse método é mais simples que os demais, pois não há a necessidade de se trabalhar com equações diferenciais parciais nem com as condições de contorno.

No Capítulo 5 é desenvolvida a proposta de acoplamento entre as dinâmicas do cabo umbilical com um veículo subaquático do tipo ROV. Inicialmente, realiza-se uma detalhada explicação sobre os sistemas de referência utilizados e as forças atuantes no sistema. Identifica-

se a força provocada pelo ROV e os torques produzidos por essa força. Esses torques entram na dinâmica do cabo, promovendo, assim, o acoplamento entre as duas dinâmicas.

Para avaliar o comportamento desta proposta, são apresentados, no Capítulo 6, os resultados de simulações com o sistema Cabo-ROV. Foram atribuídos valores aos parâmetros do modelo dinâmico e aplicados diferentes forças pelos propulsores do ROV. Observou-se que os resultados obtidos são fisicamente coerentes, o que permite a validação do modelo proposto.

Em síntese, pode-se afirmar que a principal contribuição apresentada por esta dissertação consiste na proposição de um novo formalismo para acoplar as dinâmicas do cabo umbilical e do ROV. A modelagem dinâmica do cabo utiliza o formalismo discreto a partir das equações de Euler-Lagrange, no qual o Lagrangiano é escrito em uma equação compacta, permitindo a sua obtenção para um número qualquer de elos escolhidos para representar de forma discreta a flexibilidade contínua do cabo. Esta é, sem dúvida, uma vantagem significativa do formalismo, pois o Lagrangiano do sistema pode ser determinado para um número qualquer de elos adotados para o cabo.

O ROV é fixo na extremidade livre do cabo e entra na dinâmica como sendo a carga terminal deste, mas com dinâmica própria, influenciando assim a dinâmica do cabo. Não se dispõe no momento de um aparato experimental para validar simulações, mas os resultados que estas mostraram estão compatíveis com o comportamento físico esperado para a dinâmica acoplada do cabo com o ROV. Logo, conclui-se que o formalismo apresentado consiste em uma interessante ferramenta para o desenvolvimento de projetos de veículos subaquáticos remotamente operados conectados a cabos umbilicais.

Como sugestão para trabalhos futuros, destaca-se a necessidade de construção de um aparato experimental para a identificação de parâmetros elásticos e de atrito do modelo, bem como, para discernir os comprimentos ideais adotados para os elos em função do número de elos escolhido.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] AGUILAR, L. **Controle Inteligente para a Navegação de Veículos Submarinos Semi-autônomos**. São Paulo, 2007. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2007.
- [2] BUCKHAM, B., NAHON, M. and SETO, M., Three-Dimensional Dynamics Simulation of a Towed Underwater Vehicle, Proceedings of the 18th Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering pp. 1–8, 1990.
- [3] CACCIA, M., BRUZZONE, G. and VERUGGIO, G., Experiments in the guidance of unmanned underwater vehicles, **Underwater Technology**, v. 24(4): 143–151, 2001.
- [4] CARVALHO et. al., Inspeção Submarina: perspectivas e avanços. **Rev. Tecnol. Fortaleza**, v. 30, n. 2, 198-209, 2009.
- [5] CONRADO, E. **Modelagem e Controle de veículos Submarinos Não tripulados**. São Paulo, 2003. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2003.
- [6] CORDOVÉS, D. C. S. **Análise de Confiabilidade Estrutural de Cabos Umbilicais**. São Paulo, 2008. Dissertação (Mestrado em Engenharia), Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2008.
- [7] DRISCOLL, F. R., LUECK, R. G. and NAHON, M., Development and Validation of a Lumped-Mass Dynamics Model of a Deep-Sea ROV System, **Applied Ocean Research**, v. 22: 169–182, 2000.
- [8] DOMINGUEZ, R. B. **Simulação e controle de um veículo submarino de operação remota**, Rio de Janeiro, 1989. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica), Programa de Engenharia Elétrica, COPPE – Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1989.
- [9] FANG, Z. et al. A finite element cable model and its applications based on the cubic spline curve. **China Ocean Engineering**, Vol.27 (5), 683-692, 2013.
- [10] FANG, M.; HOU, C.; LUO, J. On the motions of the underwater remotely operated vehicle with the umbilical cable effect. **Ocean Engineering**, Vol.34 (8), pp.1275-1289, 2007.
- [11] FENG, Y. W. et al. Estimation of the Hydrodynamics Coefficients of an ROV using Free Decay Pendulum Motion. **Engineering Letters**, vol. 16, no. 3, 2008.
- [12] FJELLSTAD, O. **Control of Unmanned Underwater Vehicles in Six Degrees of**

- Freedom: A Quaternion Feedback Approach.** Trondheim - Norway, 1994. Thesis (Doutorado em Engenharia), Department of Engineering Cybernetics, The Norwegian Institute of Technology, University of Trondheim, 1994.
- [13] FOSSEN, T. I., **Guidance and Control of Ocean Vehicles.** Chichester: John Wiley & Sons, 480p, 1994.
- [14] GOHEEN, K. R. & JEFFERYYS, E. R., The application of alternative modelling techniques to ROV dynamics, **Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation**, pp. 1302–1309, 1990.
- [15] GOULART, C., **Modelagem, Simulação e Controle de um Veículo Submarino de Operação Remota.** Rio de Janeiro, 2007. 126 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica), Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- [16] GUO, S., FUTUKADA, T. & ASAKA, K., A new type of fish-like underwater micro-robot. **IEEE/Asme transactions on mechatronics**, 8, 2003.
- [17] HOVER, F. S., GROSENBAUGH, M. A. and TRIANTAFYLLOU, M. S., Calculation of Dynamic Motions and Tensions of Towed Underwater Cables, **IEEE Journal of Oceanic Engineering**, 19(3), 449–457, 1994.
- [18] JORDAN, M.; BUSTAMANTE, J. **Numerical stability analysis and control of umbilical–ROV systems in one-degree-of-freedom taut–slack condition.** *Nonlinear Dynamics*, 2007, Vol.49 (1), pp.163-191.
- [19] HSU, L., LIZARRALDE, F. C., COSTA, R. R. & CUNHA, J. P. V. S., Avaliação experimental da modelagem e simulação da dinâmica de um veículo submarino de operação remota, **Revista de Controle e Automação**, v. 11(2), 82–93, 2000.
- [20] MAGALHÃES, P. **Desenvolvimento de um submersível remotamente operado de baixo custo e caracterização dos sistemas de propulsão e vetorização de empuxo por hélice.** Belo Horizonte, 2007. Tese (Doutorado em Engenharia), Universidade Federal de Minas Gerais, 2007.
- [21] MATIAS, V. O Mar – Um oceano de oportunidades para Portugal. **Cadernos Navais**. N°. 13, abr-jun, 2005. Comissão Cultural da Marinha – Grupo de Estudo e Reflexão de Estratégia (GERE), 2005.
- [22] MELO, J. L. da R., MATOS, A. C. C. de. **Controlo coordenado de veículos autónomos submarinos e de superfície.** Porto – Portugal, 2008. Dissertação (Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores). Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto, 2008.
- [23] MUTTIN, F. Umbilical deployment modeling for tethered UAV detecting oil pollution

- from ship. **Applied Ocean Research**, Vol.33 (4), pp.332-343, 2011.
- [24] NOMOTO, M. and HATTORI, M., A Deep ROV "DOLPHIN 3K": Design and Performance Analysis, **IEEE Journal of Oceanic Engineering**, v. 11(3): 373 – 391, 1986.
- [25] PAIM, P. **Modelamento, Simulação e Controle de Veículos Autônomos Aéreos e Submarinos**. Brasília, 2005. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Universidade de Brasília, 2005.
- [26] PEREIRA, A. E. L. **O Método da Decomposição de Adomian Aplicado à Interação Fluido - Estrutura de um Cabo**. Porto Alegre, 2010. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, UFRGS, 2010.
- [27] PETROBRAS. **Próxima fronteira de exploração em águas ultraprofundas**. [S.l.], 2009.
- [28] PRADO, A. A. **Metodologia Experimental para Obtenção dos Parâmetros Hidrodinâmicos do VSNT JAÚ II, Baseado em Processamento Digital de Imagens**. São Paulo, 2009. Dissertação (Mestrado em Engenharia). Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2009.
- [29] PROVASI, Rodrigo. **Contribuição ao projeto de cabos umbilicais e tubos flexíveis: ferramentas de CAD e modelo de macro elementos**. São Paulo, 2012. Tese (Doutorado em Engenharia de Controle e Automação Mecânica), Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, 2012.
- [30] RAMOS Jr., R. **Modelos Analíticos no Estudo do Comportamento Estrutural de Tubos Flexíveis e Cabos Umbilicais**. São Paulo, 2001. Tese (Doutorado em Engenharia), Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2001.
- [31] ROCHINHA, A., SAMPAIO, R., and LE TALLEC, P. O Método do Lagrangeano Aumentado no Estudo de Cabos Umbilicais. **Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería**. Vol. 6,1, 97-108, 1990.
- [32] SAEVIK, S. and GJOSTEEN, J. K., Strength Analysis Modelling of Flexible Umbilical Members for Marine Structures. **Journal of Applied Mathematics**, vol. 2012, 18 pages, 2012.
- [33] SANTANA, A.V. **Estudo do Comportamento Dinâmico Aplicável à Veículos de Localização, Investigação e Resgate**. Rio de Janeiro, 2010. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica). Programa de Engenharia Mecânica, COPPE/ UFRJ/, 2010.
- [34] SKOGLUND, M. A., JÖNSSON, K. and FREDRIK, G.. Modeling and Sensor Fusion of a Remotely Operated Underwater Vehicle. 2012. **Proceedings of the 15th International**

- Conference on Information Fusion**. 947-954, Cingapura, 2012.
- [35] SOARES, L. C. S., **Desenvolvimento de um sistema para navegação e Telemetria de um ROV atuando em águas rasas**. Salvador, 2008. Dissertação (Mestrado em Mecatrônica). Departamento de Engenharia da Computação, Universidade Federal da Bahia, 2008.
- [36] SORANI, L.A., **Estudo da Dinâmica e Controle de um Submersível não Tripulado para uso no Ambiente Fluvial**. São Paulo, 2003. Dissertação (Mestrado em Engenharia Naval e Oceânica). Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, USP, 2003.
- [37] SOUZA, E.C., **Modelagem e Controle de Veículos Submarinos Não Tripulados**. São Paulo, 2003. 168 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecatrônica), Universidade Federal de São Paulo, 2003.
- [38] TAVARES, A.M. **Um Estudo Sobre a Modelagem e o Controle de Veículos Subaquáticos Não Tripulados**. Rio Grande, 2003. 218 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Oceânica), Universidade Federal do Rio Grande, 2003.
- [39] TAVARES, A. M., GOMES, S. C. P. & CUNHA, A. B., Controle de veículos subaquáticos sub-atuados utilizando linearização por realimentação, Congresso Brasileiro de Automática (CBA) XV, 2004.
- [40] VIEIRA, A. C. & FABER, I., **Gerador Automático de Modelos Dinâmicos de Cabos Umbilicais Subaquáticos Utilizando Formulação Discreta**. Rio Grande, 2010. 49 p. Monografia (Graduação em Engenharia da Computação), Universidade Federal do Rio Grande, 2010.
- [41] YOKOBIKI, T., KOTERAYAMA, W., YAMAGUCHI, S. and NAKAMURA, M., Dynamics and Control of a Towed Vehicle in Transient Mode, **International Journal of Offshore and Polar Engineering**, v. 10(1): 19–25, 2000.
- [42] YUH, J., Design and Control of Autonomous Underwater Robots: A Survey, **Int'l J. of Autonomous Robots**, 2000.
- [43] YUH, J. Learning control for underwater robotic vehicles. **IEEE Control Systems**, v. 14, p. 39-46, 1994.
- [44] ZHU, K.-Q. et al., A multi-body space-coupled motion simulation for a deep-sea tethered remotely operated vehicle. **Journal of Hydrodynamic**, 20(2):210-215, 2008.