

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

# **Análise Comparativa do Desempenho Numérico de Técnicas de Inversão da Transformada de Laplace**

por

Gleyber Conceição Martuchele do Amaral

Dissertação submetida como requisito parcial  
para a obtenção do grau de  
Mestre em Modelagem Computacional

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez  
Orientadora

Prof. Dr. João Francisco Prolo Filho  
Coorientador

Rio Grande, março de 2016.

## CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Amaral, Gleyber Conceição Martuchele do

Análise Comparativa do Desempenho Numérico de Técnicas de Inversão da Transformada de Laplace / Gleyber Conceição Martuchele do Amaral.—Rio Grande: PPGMC, FURG, 2016.

92 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, Rio Grande, 2016.

Orientadora: Rodriguez, Bárbara Denicol do Amaral; Coorientador: Prolo Filho, João Francisco

Dissertação: Modelagem Computacional, Transformada de Laplace, Transformada Inversa, Técnicas numéricas, Problema de transporte

# Análise Comparativa do Desempenho Numérico de Técnicas de Inversão da Transformada de Laplace

por

Gleyber Conceição Martuchele do Amaral

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em  
Modelagem Computacional da Universidade Federal do Rio Grande,  
como requisito parcial para a obtenção do grau de

## Mestre em Modelagem Computacional

Linha de Pesquisa: Computação Científica e Modelagem Física, Ma-  
temática e Estatística

Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez

Coorientador: Prof. Dr. João Francisco Prolo Filho

Banca examinadora:

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Camila Becker Picoloto  
PPGMAp-UFRGS

Prof. Dr. Darci Luiz Savicki  
IMEF-FURG

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Catia Maria Machado  
PPGMC-FURG

Dissertação submetida em  
março de 2016.

Prof. Dr. Jeferson Ávila Souza  
Coordenador

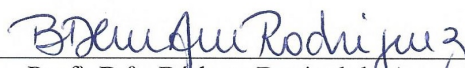
**GLEYBER CONCEIÇÃO MARTUCHELE DO AMARAL**

**“Análise Comparativa do Desempenho Numérico de Técnicas de Inversão da Transformada de Laplace”**

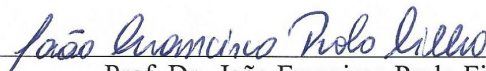
Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal do Rio Grande - FURG, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre. Área de concentração: Modelagem Computacional.

Aprovada em

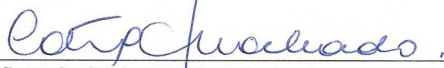
BANCA EXAMINADORA




Prof.<sup>a</sup>. Dr.<sup>a</sup>. Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez  
Orientadora – FURG



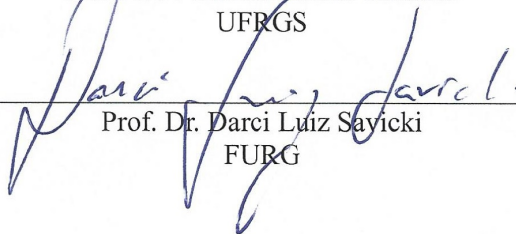
Prof. Dr. João Francisco Prolo Filho  
Co-orientador – FURG



Prof.<sup>a</sup>. Dr.<sup>a</sup>. Cátia Maria Machado  
FURG



Prof.<sup>a</sup>. Dr.<sup>a</sup>. Camila Becker Picoloto  
UFRGS



Prof. Dr. Darci Luiz Sayicki  
FURG

*“O conhecimento que temos das coisas é pequeno, na verdade, quando comparado com a imensidão daquilo em que ainda somos ignorantes.”*

Pierre Simon Marquis de Laplace (1749 - 1827)

# AGRADECIMENTOS

Quero agradecer a todos que, de alguma forma, contribuíram para a elaboração do presente trabalho.

À Professora Bárbara, a quem devo os meus sinceros agradecimentos por seus ensinamentos e conselhos, pelo exemplo profissional, demonstrando competência e comprometimento no exercício de sua função enquanto orientadora e docente do PPGMC.

Ao meu coorientador Professor João, pelas suas ideias e sugestões que foram essenciais para a construção deste trabalho.

Aos meus pais por todo apoio, dedicação e incentivo.

A todos os meus amigos e colegas que sempre apoiaram as minhas escolhas.

Às professoras Catia Maria Machado e Diana Adamatti pela colaboração em minha formação e pela receptividade em suas aulas.

Aos professores Darci Luiz Savicki e Camila Becker Picoloto pela disponibilidade e por suas valiosas contribuições.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro e ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional representado pelo seu corpo docente e funcionários.

# Sumário

<b>LISTA DE FIGURAS</b> . . . . .	<b>x</b>
<b>LISTA DE TABELAS</b> . . . . .	<b>xii</b>
<b>LISTA SIGLAS E SÍMBOLOS</b> . . . . .	<b>xiii</b>
<b>RESUMO</b> . . . . .	<b>xvi</b>
<b>ABSTRACT</b> . . . . .	<b>xvii</b>
<b>1 INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS E CONCEITUAIS</b> . . . . .	<b>8</b>
2.1 A Transformada de Laplace: contextualização . . . . .	8
2.2 Revisão Bibliográfica . . . . .	9
2.3 Definição, Existência e Unicidade . . . . .	12
2.4 Propriedades Operacionais . . . . .	13
2.4.1 Linearidade . . . . .	13
2.4.2 Translação sobre o eixo $s$ . . . . .	14
2.4.3 Translação sobre o eixo $t$ e a função degrau unitário . . . . .	14
2.4.4 Convolução . . . . .	15
2.4.5 Função Delta de Dirac . . . . .	16
2.4.6 Transformada de uma derivada . . . . .	16
<b>3 A TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE</b> . . . . .	<b>19</b>
3.1 Método das Frações Parciais . . . . .	19
3.2 Método das Séries . . . . .	20
3.3 Inversão por Convolução . . . . .	20
3.4 Fórmula de Desenvolvimento de Heaviside . . . . .	20
3.5 A Integral Complexa de Inversão . . . . .	21

<b>4</b>	<b>INVERSÃO NUMÉRICA DA TRANSFORMADA DE LAPLACE</b>	<b>25</b>
4.1	Expansão em Série de Potências . . . . .	26
4.2	Quadratura Gaussiana . . . . .	28
4.3	O Método de Talbot . . . . .	30
<b>5</b>	<b>APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE À EQUAÇÃO DE TRANSPORTE UNIDIMENSIONAL</b>	<b>34</b>
5.1	Introdução . . . . .	34
5.2	Formulação Matemática para o Problema de Transporte de Partículas Neutras . . . . .	38
5.2.1	Solução Analítica pela Fórmula de Expansão de Heaviside . . . . .	41
5.2.2	Solução por Série de Potências . . . . .	43
5.2.3	Solução por Quadratura Gaussiana . . . . .	45
5.2.4	Solução pelo Método de Talbot . . . . .	46
<b>6</b>	<b>RESULTADOS NUMÉRICOS</b>	<b>48</b>
6.1	Comparativos para funções elementares . . . . .	48
6.1.1	Comparativo 1 . . . . .	49
6.1.2	Comparativo 2 . . . . .	52
6.1.3	Comparativo 3 . . . . .	56
6.1.4	Comparativo 4 . . . . .	57
6.1.5	Comparativo 5 . . . . .	58
6.1.6	Comparativo 6 . . . . .	59
6.1.7	Comparativo 7 . . . . .	63
6.1.8	Comparativo 8 . . . . .	67
6.1.9	Comparativo 9 . . . . .	70
6.1.10	Discussão dos resultados . . . . .	72
6.2	Comparativos para Solução da Equação de Transporte de Nêutrons Utilizando o Método $LTS_N$ . . . . .	75



7 CONCLUSÃO . . . . .	82
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .	85

## Lista de Figuras

Figura 3.1	Representação geométrica do contorno de Bromwich. . . . .	22
Figura 4.1	O contorno de Talbot. . . . .	31
Figura 6.1	Comparativo dos métodos de inversão numérica para $F_1(s)$ . . .	49
Figura 6.2	Comparativo dos métodos de inversão numérica de $F_2(s)$ com $a = 2$ . . . . .	52
Figura 6.3	Comparativo dos métodos de inversão numérica de $F_2(s)$ com $a = 0.5$ . . . . .	53
Figura 6.4	Comparativo dos métodos de inversão numérica de $F_2(s)$ com $a = 50$ . . . . .	54
Figura 6.5	Comparativo dos métodos de inversão numérica de $F_3(s)$ . . . . .	56
Figura 6.6	Comparativo dos métodos de inversão numérica de $F_4(s)$ . . . . .	57
Figura 6.7	Comparativo dos métodos de inversão numérica de $F_5(s)$ . . . . .	58
Figura 6.8	Comparativo dos métodos de inversão numérica para $F_6(s)$ com $a = 1$ . . . . .	59
Figura 6.9	Comparativo dos métodos de inversão numérica de $F_6(s)$ com $a = 0.5$ . . . . .	60
Figura 6.10	Comparativo dos métodos de inversão numérica para $F_6(s)$ com $a = 2$ . . . . .	61
Figura 6.11	Comparativo dos métodos de inversão numérica para $F_7(s)$ com $a = 1$ . . . . .	63
Figura 6.12	Comparativo dos métodos de inversão numérica de $F_7(s)$ com $a = 0.5$ . . . . .	64
Figura 6.13	Comparativo dos métodos de inversão numérica de $F_7(s)$ com $a = 2$ . . . . .	65
Figura 6.14	Comparativo dos métodos de inversão numérica de $F_8(s)$ . . . . .	67
Figura 6.15	Comparativo dos métodos de inversão numérica de $F_9(s)$ . . . . .	70
Figura 6.16	Convergência da solução por Série de Potências com $k$ fixo. . . .	76
Figura 6.17	Convergência da solução por Série de Potências para diferentes valores de $k$ . . . . .	76

Figura 6.18	Convergência da solução por Quadratura Gaussiana. . . . .	77
Figura 6.19	Convergência da solução por Talbot. . . . .	77
Figura 6.20	Comparativo entre as soluções numéricas e analítica. . . . .	78

## Lista de Tabelas

Tabela 6.1	Transformada de Laplace para funções elementares . . . . .	48
Tabela 6.2	Erro absoluto para inversão numérica de $F_1(s)$ . . . . .	49
Tabela 6.3	Comparativo da inversão numérica de $F_1(s)$ com os métodos empregados por Junqueira (1990). . . . .	51
Tabela 6.4	Erro absoluto para inversão numérica de $F_2(s)$ com $a = 2$ . . . . .	52
Tabela 6.5	Erro absoluto para inversão numérica de $F_2(s)$ com $a = 0.5$ . . . . .	53
Tabela 6.6	Erro absoluto para inversão numérica de $F_2(s)$ com $a = 50$ . . . . .	54
Tabela 6.7	Erro absoluto para inversão numérica de $F_3(s)$ . . . . .	56
Tabela 6.8	Erro absoluto para inversão numérica de $F_4(s)$ . . . . .	57
Tabela 6.9	Erro absoluto para inversão numérica de $F_5(s)$ . . . . .	58
Tabela 6.10	Erro absoluto para inversão numérica de $F_6(s)$ com $a = 1$ . . . . .	59
Tabela 6.11	Erro absoluto para inversão numérica de $F_6(s)$ com $a = 0.5$ . . . . .	60
Tabela 6.12	Erro absoluto para inversão numérica de $F_6(s)$ com $a = 2$ . . . . .	61
Tabela 6.13	Erro absoluto para inversão numérica de $F_7(s)$ com $a = 1$ . . . . .	63
Tabela 6.14	Erro absoluto para inversão numérica de $F_7(s)$ com $a = 0.5$ . . . . .	64
Tabela 6.15	Erro absoluto para inversão numérica de $F_7(s)$ com $a = 2$ . . . . .	65
Tabela 6.16	Erro absoluto para inversão numérica de $F_8(s)$ . . . . .	67
Tabela 6.17	Comparativo para inversão numérica de $F_8(s)$ com o método de Brochet. . . . .	68
Tabela 6.18	Erro absoluto para inversão numérica de $F_9(s)$ . . . . .	70
Tabela 6.19	Comparativo da inversão numérica de $F_9(s)$ com o método de Brochet. . . . .	71
Tabela 6.20	Comparativo entre as soluções numéricas e analítica. . . . .	78
Tabela 6.21	Erro absoluto para a solução numérica da equação de transporte . . . . .	79
Tabela 6.22	Comparação dos métodos numéricos com a solução apresentada no referencial teórico . . . . .	80

# LISTA SIGLAS E SÍMBOLOS

## Lista de Siglas

$LTS_N$	Transformada de Laplace $S_N$
$S_N$	Sistema de ordenadas discretas
$SGF$	Spectral Green's Function
$EDO$	Equação Diferencial Ordinária
$EDP$	Equação Diferencial Parcial
$PVI$	Problema de Valor Inicial
$PITT$	Titulação Potenciostática Intermitente
$ADMM$	Advection Diffusion Multilayer Method
$GITT$	Generalized Integral Transform Technique
$MHD$	Magneto HidroDiâmica
$SVD$	Decomposição em Valores Singulares

## Lista de Símbolos

$A_k$	Pesos da Quadratura Gaussiana
$F(s)$	Função Transformada pela técnica de Laplace
$P_k$	Pontos da Quadratura Gaussiana
$\mathcal{L}^{-1}$	Operador da Transformada Inversa de Laplace
$\mathcal{L}$	Operador da Transformada de Laplace
$H_{ij}$	Matriz de Hilbert

$H_{ij}^{-1}$	Inversa da matriz de Hilbert
$Q(x, \mu)$	Termo fonte
$f_m$	Fluxo incidente em $x = 0$
$g_m$	Fluxo incidente em $x = a$
$s$	Parâmetro complexo proveniente da Transformada de Laplace
$a$	Comprimento do domínio
$b$	Parâmetro da formulação do problema $S_N$
$c_m$	Parâmetro da formulação do problema $S_N$
$d_m$	Parâmetro da formulação do problema $S_N$
$\alpha_m$	Parâmetro da formulação do problema $S_N$
$\eta_m$	Parâmetro da formulação do problema $S_N$
$\psi_m$	Fluxo angular de partículas na direção discreta $\mu_m$
$\Phi$	Fluxo escalar de partículas
$\overline{I}_\theta$	Vetor do fluxo angular transformado
$\overline{\psi}_m$	Fluxo angular transformado pela técnica de Laplace
$\sigma_t$	Seção de choque macroscópica total
$\sigma_{s_0}$	Seção de choque macroscópica de espalhamento isotrópico
$\sigma_{s_1}$	Seção de choque macroscópica de espalhamento anisotrópico
$\mu$	Variável direção
$\mu_m$	Direção discreta
$\mu_k$	Pontos da quadratura angular de Gauss-Legendre associados à $k$ -ésima direção

$\omega_k$	Pesos da quadratura angular de Gauss-Legendre associados à $k$ -ésima direção
$\alpha_n$	Constantes de ponderação do método de inversão por Série de Potências

# RESUMO

AMARAL, Gleyber Conceição Martuchele do. **Análise comparativa do desempenho numérico de técnicas de inversão da Transformada de Laplace.** 2016. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional. Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande.

Neste trabalho, apresenta-se uma análise comparativa de três técnicas numéricas utilizadas para solucionar problemas relacionados à Transformada Inversa de Laplace. Os métodos apresentados têm embasamento teórico nas formulações das Séries de Potências e da Integral Complexa de Inversão. Inicialmente, procurou-se avaliar o desempenho numérico dos algoritmos implementados para inverter a Transformada de Laplace utilizando os métodos de Expansão em Série de Potências, Quadratura Gaussiana e Talbot. Realizaram-se testes no sentido de quantificar o potencial de resolução desses recursos ao serem aplicados às transformadas de funções elementares. Esta análise foi estendida a um problema de transporte de nêutrons, na versão em ordenadas discretas  $S_N$ , em geometria Cartesiana unidimensional, comparando os resultados numéricos com a inversão analítica, obtida através da fórmula de desenvolvimento de Heaviside. Convém ressaltar que neste estudo não se pretende indicar o melhor método para calcular a Transformada inversa de Laplace, e sim avaliar a eficiência numérica com base nos resultados obtidos a partir das simulações realizadas.

**Palavras-Chave:** Transformada de Laplace, Transformada Inversa, Técnicas numéricas, Problema de transporte.



# ABSTRACT

AMARAL, Gleyber Conceição Martuchele do. **Comparative analysis of the numerical performance of techniques of inversion of the Laplace transform.** 2016. Master Thesis - Graduate Program in Computational Modeling. Federal University of Rio Grande, Rio Grande.

In this work we present a comparative analysis of three numerical techniques used to solve problems related to inverse Laplace transform. The methods presented are theoretical grounding in the the Power Series and Integral Complex Inversion formulations. Initially, we tried to evaluate the performance of numerical algorithms implemented to reverse the Laplace transform using the methods of expansion in Power Series, Gaussian Quadrature and Talbot. Tests were carried out which aimed to quantify the solving potential of these features to be applied to the transformations elementary functions. This analysis was extended to a neutron transport problem, on  $S_N$  discrete ordinates over version one-dimensional Cartesian geometry, comparing the numerical results with the analytical solution obtained by development of Heaviside formula. It is worth noticing that this study is not intended to indicate the best way to calculate the inverse Laplace transform, but to evaluate the numeric efficiency based on results obtained by the simulation performed.

**Keywords:** Laplace Transform, Inverse Transform, Numerical techniques, Transport problem.

# 1 INTRODUÇÃO

A Matemática formal, tal qual é conhecida hoje, e a forma como se aplicam seus conceitos às mais variadas áreas do campo científico e tecnológico, não foi concebida em um momento único da história. Desde os tempos antigos, houve muitas tentativas em propor explicações consistentes para a ocorrência de certos fenômenos naturais instituindo simbologias próprias para descrever os fatos observados na natureza ou através de experimentos.

Com a evolução do formalismo matemático, surgiram conceitos que possibilitaram o tratamento quantitativo desses fenômenos que passaram a ser representados por modelos heurísticos, embasados nas explicações sobre as causas ou mecanismos naturais, e empíricos, assentados nas observações diretas ou nos resultados de experiências. Esses modelos são frequentemente utilizados para analisar o comportamento de sistemas complexos presentes em diferentes áreas da Ciência. Assim, a importância do estudo de tais modelos deve-se ao fato de que, a partir deles, é possível expressar por meio de uma linguagem simbólica a representação simplificada de uma situação real.

Para melhor compreensão de determinados eventos físicos, químicos ou biológicos é muito comum buscar subsídios em instrumentos que permitam a sua análise. Inseridos nesse contexto, os modelos matemáticos contribuem para o entendimento de uma situação dada, podendo oferecer alternativas de como agir sobre ela, ao fazer previsões e estimativas, efetuando simulações que reproduzam de maneira sintetizada os acontecimentos reais.

A modelagem fenomenológica, assim como a construção dos modelos matemáticos, tem fundamentação nas hipóteses formuladas e nas leis que regem o comportamento de um sistema conhecido [8]. Dessa forma, efetua-se a análise desse sistema com base nas grandezas variáveis (de tempo, temperatura, espaço, volume, concentração, intensidade, etc.) que, de modo geral, são expressas por equações

diferenciais. Estas equações são muito comuns em problemas envolvendo sistemas físicos, processos químicos, dinâmica das populações, entre outros. No entanto, suas soluções nem sempre são obtidas com facilidade.

Os métodos convencionais para resolução de equações diferenciais, que aparecem em problemas com elevado grau de complexidade, por terem muitas variáveis envolvidas, tornam as operações algébricas de difícil trato exigindo, muitas vezes, o emprego de técnicas mais robustas.

Nesta perspectiva, por volta do século XVIII, alguns matemáticos iniciaram uma busca por alternativas capazes de solucionar certas equações diferenciais cujas soluções pareciam impossíveis de serem calculadas. De acordo com Tonidandel [52], um dos precursores desses estudos foi Leonard Euler (1707 - 1783) ao tentar resolver, sem sucesso, uma equação linear de segunda ordem com coeficientes variáveis empregando uma técnica de transformação integral. Ainda neste mesmo período, Pierre Simon de Laplace (1749 - 1827), ao tratar problemas envolvendo equações diferenciais e de diferenças, procurou estipular uma solução para a equação

$$S = Ay(s) + B \Delta y(s) + C \Delta^2 y(s) + \dots, \quad (1.1)$$

onde  $A, B, C, \dots$ , são funções de  $s$  consideradas expansíveis em séries de potências e  $y(s)$  seria uma função desconhecida, para a qual, Laplace considerou que

$$y(s) = \int e^{-sx} \phi(x) dx, \quad (1.2)$$

uma integral definida, com limites de integração não especificados. Nesta mesma abordagem, assumiu

$$\Delta^{(n)} y(s) = \int e^{-sx} (e^{-x} - 1)^n \phi(x) dx, \quad (1.3)$$

de maneira que a solução  $S$  poderia ser determinada em função das equações (1.2) e (1.3) [52].

Em trabalhos posteriores, ao escrever sobre as integrais definidas e suas aplicações no cálculo de probabilidades [52], Laplace introduz um conjunto de inte-

grais da forma

$$\int_0^{\infty} f(x)e^{-ax} dx. \quad (1.4)$$

Entretanto, seu objetivo neste contexto consistia apenas em avaliar integrais e não demonstrava nenhuma pretensão de instaurar um artifício destinado à resolução de equações diferenciais [52]. Contudo, a teoria de Laplace constitui a base do desenvolvimento de uma importante ferramenta matemática que, nos dias atuais, é conhecida como *Transformada de Laplace*.

Segundo Tonidandel [52], a utilidade dessa técnica de transformação integral para solucionar equações diferenciais, foi verificada somente a partir do século XIX após o delineamento dos trabalhos de Cauchy (1789 - 1857), que em seus estudos sobre integrais definidas com limites complexos, enunciou o teorema dos resíduos e explorou métodos simbólicos utilizando operadores diferenciais.

No entanto, atribui-se a Heaviside (1850 - 1925) o mérito pela consolidação da Teoria da Transformada de Laplace, embora seus métodos de investigação tivessem sido questionados por estudiosos daquela época pela ausência do rigor matemático nas suas demonstrações. Heaviside, dedicou-se ao estudo da teoria da eletricidade e magnetismo, e também forneceu contribuições para a concepção da análise vetorial, onde introduziu o cálculo operacional para resolver equações diferenciais presentes nos modelos que descreviam circuitos elétricos, transformando-as em equações algébricas, cujas soluções eram obtidas de forma direta [51]. As regras operacionais propostas por ele foram justificadas e demonstradas somente no início do século XX, período no qual entusiastas como Bromwich, Carson, Van der Pol, entre outros matemáticos, dedicaram atenção à teoria das variáveis complexas.

Também conhecida como Cálculo Operacional, a Transformada de Laplace tornou-se um instrumento muito útil para a resolução de problemas físicos cujos modelos matemáticos são constituídos por equações diferenciais parciais ou ordinárias, sendo que, após aplicar a transformação, podem ser obtidas novas equações em função da variável  $s$ , que indica uma mudança para o “domínio de Laplace”. Por-

tanto, uma das principais características dessa técnica refere-se justamente ao seu potencial para “desfazer” derivadas, transformando uma equação diferencial parcial (EDP) em ordinária (EDO), ou uma equação diferencial ordinária em uma equação algébrica [56].

A Transformada de Laplace tem sido amplamente utilizada para auxiliar na resolução de problemas que surgem no contexto real [36]. Apesar de suas propriedades fornecerem meios fáceis para a simplificação das equações envolvidas nesses problemas, cabe destacar que ao efetuar a transformação de uma função cuja transformada seja possível de se determinar, torna-se indispensável a aplicação do procedimento inverso para retornar a função ao seu domínio de origem. Assim, uma dificuldade que se pode enfrentar ao utilizar esse recurso está relacionada à obtenção da função original através do cômputo da transformada inversa [5].

O cálculo da transformada inversa é considerado um processo instável e para o tratamento de funções menos elementares, em sua maior parte, é necessário o emprego de técnicas específicas. Em virtude disso, nas últimas décadas, tem-se observado um crescente interesse, na comunidade científica, pelo desenvolvimento de métodos numéricos com o único intuito de estabelecer uma alternativa viável para inverter a Transformada de Laplace, como pode ser verificado em Abate e Valkó [1], Airapetyan e Ramm [2], Chung e Sun [17], Crump [20], Dubner e Abate [21], Heydarian et. al [24], Honig e Hirdes (1984) [25], Murli e Rizzardi [39], Piessens [42] e Salzer [45].

Decorrente da grande relevância que se atribui à Transformada de Laplace, encontra-se na literatura uma quantidade significativa de trabalhos que demonstram interesse pela aplicação desta técnica associada à utilização de procedimentos de inversão numérica, cuja finalidade é propor soluções para os problemas apresentados. Nesse sentido, tem-se constatado que a solução para determinados problemas que envolvem transformações inversas por recursos numéricos pode ser facilitada, ou demonstrar melhores resultados, mediante escolha acertada do método de inversão.

Deve-se ressaltar, porém, que não se pode afirmar de maneira categórica que um método específico possibilitará o cálculo da transformada inversa, de forma generalizada, para todas as classes de funções [5]. Por isso, é necessário levar em consideração fatores, tais como precisão numérica, tempo computacional e dificuldade de implementação, que conduzem algumas pesquisas a optarem por um esquema numérico típico.

Partindo do pressuposto de que as aplicações da Transformada de Laplace não estão esgotadas, e que ainda podem favorecer o desenvolvimento de novas pesquisas a respeito de sua capacidade para solucionar problemas que surgem com certa frequência nos ramos da física e engenharia, este trabalho tem por objetivo realizar uma análise comparativa visando investigar a eficiência numérica, quanto à precisão, de três alternativas indicadas na literatura, para o cálculo da transformada inversa de Laplace. Para isso, optou-se por avaliar o desempenho numérico das técnicas de inversão por Expansão em Série de Potências, Quadratura Gaussiana e Talbot. Tal escolha é justificada pela regularidade com a qual se apresentam no referencial teórico, com exceção da técnica de Expansão por Série.

Na pesquisa bibliográfica, verificou-se que o esquema de Quadratura Gaussiana tem sido empregado, por muitas vezes, para inverter funções transformadas presentes em problemas de transferência radiativa, conforme citado por Aseka [3], Borges et al. [11], Campos Velho [15], Rodriguez [44], Segatto [47] e Vilhena e Barichello [54] e outros relacionados à dispersão de poluentes, como pode-se verificar em Buligon [13], Leite [29] e Moreira et. al [37].

O método de Talbot, em anos recentes, vem sendo aplicado para o tratamento de funções decorrentes da equação de difusão-advecção, como foi explicitado por Costa et. al [19], Leite [29], Moreira et. al [37], Venzke [53] e Wang e Zhan [55]. Cumpre ressaltar que ao efetuar o estudo bibliográfico para embasamento teórico deste trabalho, não foram encontradas referências relacionadas à utilização da técnica de Expansão em Série de Potências aplicada a problemas físicos.

Considerando os aspectos discutidos, o principal objetivo deste trabalho é realizar uma análise comparativa visando investigar a capacidade de inversão da Transformada de Laplace, quanto à precisão numérica, dos três métodos mencionados ao aplicá-los a um conjunto de funções elementares e posteriormente a um problema físico, efetuando simulações com uso de recurso computacional apropriado. Como objetivos específicos, propôs-se efetuar estudo teórico sobre a Transformada de Laplace buscando compreender suas propriedades e aplicações, realizar uma pesquisa bibliográfica a fim de verificar a quais tipos de problemas a Transformada de Laplace tem maior utilidade, identificar os métodos de inversão numérica apresentados no referencial teórico e analisar o desempenho dos métodos de Expansão em Série de Potências, Quadratura Gaussiana e Talbot para o cálculo da transformada inversa.

A análise comparativa tem como ponto inicial uma investigação sobre quais classes de funções elementares, os métodos escolhidos têm maior adequação quanto ao potencial de resolução. Através desta análise, espera-se que seja possível prever qual técnica é mais indicada para resolver um determinado problema de natureza prática, ao identificar o tipo de função presente no modelo matemático que o descreve. Em um segundo momento, propôs-se investigar a viabilidade de aplicação dos métodos de inversão numérica da Transformada de Laplace ao problema de transporte de partículas neutras, comparando os resultados com os que foram apresentados no referencial teórico e com a solução analítica. Para a realização dos testes, utilizou-se o *software* GNU OCTAVE 4.0, em um computador com sistema operacional Windows 8.1, memória (RAM) de 2.00 GB, HD 160 GB e processador Intel Celeron de 2.00 GHz.

No intuito de cumprir o objetivo proposto, este trabalho está estruturado em sete capítulos. No Capítulo 2, descreve-se uma breve contextualização a respeito das aplicações da Transformada de Laplace a diversos problemas encontrados nos textos que embasaram este estudo, além de expor sua definição e algumas propriedades operacionais. O Capítulo 3 tem o propósito de informar a respeito dos

recursos disponíveis para inverter a Transformada de Laplace de forma analítica. Os métodos numéricos que motivaram o delineamento desta pesquisa são apresentados no Capítulo 4. Uma aplicação da Transformada de Laplace é explicitada no Capítulo 5. No Capítulo 6, são mostrados os resultados obtidos através de simulações efetuadas utilizando recurso computacional apropriado. Por fim, as conclusões do presente trabalho e as sugestões de continuidade são elucidadas no Capítulo 7.



## 2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS E CONCEITUAIS

Neste capítulo, será exposta uma breve descrição sobre a Transformada de Laplace, sua definição e propriedades operacionais, além das aplicações desse conceito no tratamento de problemas encontrados no referencial teórico.

### 2.1 A Transformada de Laplace: contextualização

A Transformada de Laplace é um importante método operacional utilizado nas diversas áreas que abrangem problemas modelados por equações diferenciais e íntegro-diferenciais. O uso recorrente desta transformada para obter a solução de problemas que surgem em vários campos da Ciência é justificado pelo fato desse método reduzir a complexidade dos modelos, possibilitando a resolução de equações diferenciais ordinárias e seus correspondentes problemas de valor inicial (PVI), por exemplo, ao transformá-las em equações algébricas cujo tratamento é relativamente simples [23].

Em alguns ramos da física e engenharia, problemas práticos envolvendo sistemas lineares invariantes no tempo, tais como circuitos elétricos, osciladores harmônicos, dispositivos ópticos e sistemas mecânicos [51], podem ser solucionados com o auxílio da Transformada de Laplace. Isso porque, este método operacional possui propriedades que facilitam o processo de resolução das Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's) que descrevem esses sistemas.

De modo particular, a Transformada de Laplace se destaca entre os demais métodos de resolução de EDOs lineares e problemas de valor inicial (PVI), devido a algumas vantagens proporcionadas pelo uso de propriedades intrínsecas a essa técnica. Dessa forma, Kreyszig [27] e Nagle et. al [40] destacam duas características relevantes desta transformada:

i) Os problemas podem ser resolvidos diretamente, sem precisar determinar uma solução geral, e é possível resolver uma EDO não-homogênea sem ter que resolver antes sua EDO homogênea correspondente;

ii) O uso da função degrau unitário (função de Heaviside) e do Delta de Dirac torna o método muito mais conveniente para resolver problemas com entradas (forças motrizes) apresentando descontinuidades, ou representando impulsos curtos ou funções periódicas complicadas.

Apesar dessas vantagens, a Transformada de Laplace é utilizada para resolver os mesmos tipos de equações em que outros recursos também são aplicáveis [22]. Os aspectos que a distingue dos demais métodos, estão relacionados com a facilidade de se obter uma solução de forma direta, não havendo a necessidade de efetuar complexas operações e manipulações algébricas para chegar ao resultado desejado.

## 2.2 Revisão Bibliográfica

Nas últimas décadas, motivados pela grande utilidade da Transformada de Laplace aplicada à teoria das equações diferenciais, numerosos trabalhos, entre eles destacam-se, Barichello [5], Junqueira [26], Vilhena e Barichello [54], Aseka [3], Buligon [13], Montella et al. [36], Moreira et al. [37], Leite [29], Wang e Zhan [55] e Awais [4], têm utilizado essa técnica para analisar diversos modelos matemáticos.

No estudo proposto por Barichello [5], efetuou-se uma análise do modelo de fluxo de nêutrons dependente do tempo em um reator nuclear leito-fluidizado, aplicando-se a Transformada de Laplace a um problema de fronteira móvel, modelado pela equação de difusão, conhecidas as condições inicial e de contorno.

Para resolver o problema inverso da condução de calor, Junqueira [26] utilizou a Transformada de Laplace para determinar a distribuição de temperatura na superfície de uma placa de espessura conhecida e com isolamento em uma de suas

extremidades. Na perspectiva de se obter os dados da variação de temperatura com o tempo no interior da placa, resolveu-se a equação de condução de calor, aplicando a transformada à variável temporal. Assim, a temperatura na superfície da placa foi obtida após computar os dados exatos da temperatura interior.

Em 1991, Vilhena e Barichello [54], propuseram uma solução analítica para a equação de transporte de partículas neutras, empregando a Transformada de Laplace à equação discretizada segundo a quadratura  $S_N$ . Essa proposta estimulou o desenvolvimento de novas investigações a respeito das aplicações dessa técnica de transformação, no tratamento do problema  $S_N$  com diferentes abordagens, conforme mostram os trabalhos de Borges e Derivi [10], Rodriguez [44], Segatto [47], Tomaschewski [50] e Zabadal et al. [57].

Com o intuito de estabelecer o cálculo do fluxo de calor que entra em um ambiente condicionado, Aseka [3] desenvolveu uma metodologia semianalítica para a solução de problemas relacionados à equação de condução de calor bidimensional, não estacionária em meios multicompostos, combinando os métodos nodal e a técnica da Transformada de Laplace. Dessa forma, aplicou-se o método nodal integrando transversalmente a equação do calor bidimensional em relação à variável espacial  $y$  gerando problemas unidimensionais na variável  $x$ , que descrevem as temperaturas médias. Esses últimos problemas são avaliados através da aplicação da Transformada de Laplace na variável temporal.

Buligon [13], por sua vez, apresentou uma solução analítica para a equação que descreve a dispersão vertical turbulenta em uma Camada Limite Convectiva, recorrendo ao uso da Transformada de Laplace na formulação que fornece a concentração média de poluentes na camada atmosférica.

Na análise de processos químicos, Motella et al. [36] fizeram uma avaliação dos coeficientes de difusão química em eletrodos íon-inserção investigados pela técnica de titulação potencioestática intermitente (PITT). Nesse trabalho, os autores concluem que a Transformada de Laplace pode ser uma ferramenta muito útil

para avaliar modelos semelhantes ao que foi apresentado por eles, ressaltando a necessidade de investigar outros aspectos inerentes a esses processos, no domínio do tempo.

Recentemente Moreira et al. [37], interessados em estimar a concentração de poluentes atmosféricos, propuseram um modelo em estado estacionário semianalítico no qual a Transformada de Laplace é aplicada à equação de difusão-advecção com parâmetros constantes. Seguindo esse mesmo contexto, Leite [29] apresentou simulações com uma solução semianalítica tridimensional estacionária. Nesse caso, a equação de difusão-advecção foi resolvida combinando as técnicas ADMM (*Advection Diffusion Multilayer Method*), baseada na discretização da Camada Limite Convectiva em subcamadas, onde em cada subcamada a equação é resolvida através da Transformada de Laplace e com o método GITT (*Generalized Integral Transform Technique*).

No tratamento de problemas dependentes do tempo do fluido de terceiro grau, Awais [4], avaliou três diferentes tipos de fluxos (fluxo instável sobre uma placa rígida plana com meio poroso, fluxo de MHD (fluxo de fluido magneto-hidrodinâmico) instável num meio poroso e fluxo MHD instável em um espaço não poroso) recorrendo ao uso da Transformada de Laplace para obter a solução das equações envolvidas em cada caso.

Observa-se que a equação de difusão-advecção é muito utilizada para descrever fenômenos de transporte. Ao lidar com o problema de transferência de solutos no subsolo sob condição uniforme ou de fluxo radial, Wang e Zhan [55], referem-se à Transformada de Laplace como uma das ferramentas mais eficientes para investigar o comportamento desses fenômenos.

Na literatura, podem-se encontrar outros modelos matemáticos de sistemas lineares cujo emprego da Transformada de Laplace facilita o entendimento dos processos físicos envolvidos. Porém, apesar de todas as vantagens atribuídas à utilização desse recurso, deve-se ressaltar que a maior dificuldade em sua aplicação

está relacionada à determinação da função original no cômputo da transformação inversa. Isso se justifica pelo fato de que muitos problemas cujas soluções podem ser expressas em termos da Transformada de Laplace assumem elevado grau de complexidade de resolução [26] quando há a necessidade de aplicar as técnicas analíticas de inversão que serão discutidas no Capítulo 3.

## 2.3 Definição, Existência e Unicidade

Nesta seção será exposta a definição da Transformada de Laplace e as condições que garantem a sua existência e unicidade.

**Definição 2.1.** *Seja  $f(t)$  uma função definida para todo  $t \geq 0$ , então, a sua Transformada de Laplace correspondente, denotada por  $\mathcal{L}\{f(t)\}$ , será expressa por*

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (2.1)$$

desde que a integral imprópria (2.1) convirja para algum valor de  $s$  [27].

Usualmente, as notações  $\mathcal{L}\{f(t)\}$  e  $F(s)$ , indicam a transformação de  $f(t)$  para o domínio de Laplace, e o termo  $s = c + iT$  é um parâmetro pertencente ao plano complexo.

Deve-se ressaltar que para a existência da transformada de uma determinada função é suficiente que  $f(t)$  satisfaça a restrição de crescimento, na qual, para todo  $t \geq 0$  e considerando as constantes positivas  $M$  e  $k$ , tem-se

$$|f(t)| \leq Me^{kt}, \quad (2.2)$$

e, ainda,  $f(t)$  deve ser contínua por partes no intervalo  $[0, \infty)$ .

Assim, se  $f(t)$  for seccionalmente contínua em qualquer intervalo finito do semieixo positivo e a condição (2.2) for satisfeita, segundo Kreyszig [27], a existência da transformada  $\mathcal{L}\{f(t)\}$  é assegurada para todo  $s \geq k$ . Em especial, as

funções que satisfazem a restrição de crescimento (2.2) são denominadas de ordem exponencial.

Outro importante aspecto relacionado à existência da Transformada de Laplace refere-se à unicidade da função resultante da transformação no domínio  $s$ , ou seja, se  $\mathcal{L}\{f(t)\}$  e  $\mathcal{L}\{g(t)\}$  são as respectivas transformadas das funções  $f(t)$  e  $g(t)$ , tais que,  $\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{g(t)\}$  para  $s > s_0$ , então  $f(t) = g(t)$ , exceto possivelmente nos pontos de descontinuidade [23]. Isso significa que se duas funções contínuas tiverem a mesma transformada, elas são completamente idênticas [27].

Em alguns casos, a transformada  $\mathcal{L}\{f(t)\}$  pode tornar-se mais simples de ser avaliada que a própria  $f(t)$ . Contudo, o procedimento para obter a transformada de funções menos elementares, através da integral (2.1), requer o entendimento de propriedades operacionais que facilitam o emprego desta técnica, conforme será exposto na Seção 2.4.

## 2.4 Propriedades Operacionais

Nesta seção serão apresentadas algumas propriedades muito úteis, particularmente, no tratamento de funções singulares, tais como o degrau unitário e Delta de Dirac.

### 2.4.1 Linearidade

A Transformada de Laplace é um operador pertencente à família das integrais [33]. Essa característica indica que a transformação preserva a linearidade nas operações quando aplicada a uma combinação linear de duas ou mais funções e, neste caso, pode-se escrever

$$\int_0^{\infty} e^{-st} [\alpha f(t) + \beta g(t)] dt = \alpha \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt + \beta \int_0^{\infty} e^{-st} g(t) dt, \quad (2.3)$$

desde que as integrais do lado direito da equação (2.3) convirjam.

### 2.4.2 Translação sobre o eixo $s$

A expressão (2.1) tem muita utilidade quando aplicada a um conjunto de funções que dispensa esforço algébrico para o cálculo da integral de transformação. Entretanto, segundo Zill [58], nem sempre é possível determinar a Transformada de Laplace diretamente usando apenas a sua definição. Em geral, se a Transformada de Laplace de uma função  $f(t)$  for conhecida, é possível determinar a transformada de um múltiplo exponencial de  $f$  efetuando o deslocamento de  $\mathcal{L}\{f(t)\}$  sobre o eixo  $s$ , ou seja, se  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ , para algum número real  $a$  qualquer, tem-se

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s - a). \quad (2.4)$$

### 2.4.3 Translação sobre o eixo $t$ e a função degrau unitário

Algumas das aplicações mais interessantes desse método de transformação, podem ser observadas na resolução de equações diferenciais lineares envolvendo funções descontínuas, que representam forças externas (forças motrizes mecânicas ou elétricas) atuando sobre determinados sistemas físicos [12]. Funções com descontinuidade de salto ocorrem com frequência na análise do fluxo de corrente em circuitos elétricos com interruptores, ou nas vibrações de sistemas mecânicos e, por isso, torna-se conveniente o uso da função degrau unitário ou função de Heaviside, definida por

$$\mathcal{U}(t - a) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a \\ 1, & t \geq a. \end{cases} \quad (2.5)$$

Observa-se que, na equação (2.5),  $\mathcal{U}(t - a)$  é definida somente para o intervalo  $[0, \infty)$ , pois, essa é a parte do domínio que nos interessa nos estudos da Transformada de Laplace [58].

Assim como é possível transladar a transformada  $F(s)$  para  $F(s - a)$  sobre o eixo  $s$ , conforme exposto na Seção 2.4.2, a função degrau unitário auxilia nas transformações quando é necessário efetuar o deslocamento de  $f(t)$  para  $f(t - a)$ . Isso é justificável devido a relação existente entre  $\mathcal{L}\{f(t)\}$  e a translação  $\mathcal{U}(t - a)f(t - a)$ , dada por

$$\mathcal{L}\{f(t - a)\mathcal{U}(t - a)\} = e^{-as}F(s). \quad (2.6)$$

A relação (2.6), de acordo com Boyce e DiPrima [12], diz que o deslocamento de  $f(t)$  por uma distância  $a$  sobre o eixo positivo  $t$ , corresponde à multiplicação de  $F(s)$  por uma função exponencial  $e^{-as}$ , para todo  $a > 0$ .

#### 2.4.4 Convolução

A propriedade da convolução está relacionada à transformação do produto de duas funções. Diferente do que ocorre com a adição, em que a transformada da soma de duas funções  $f$  e  $g$  é equivalente a soma de suas respectivas transformadas, para determinar a transformada do produto de duas funções é conveniente utilizar o teorema da convolução enunciado a seguir.

**Teorema 2.1** (Teorema da Convolução). *Se as funções  $f$  e  $g$  forem seccionalmente contínuas em um intervalo  $[0, \infty)$  e satisfazem a restrição de crescimento (2.2), então o produto, denotado por  $f * g$ , de acordo com Zill [58], é definido pela integral*

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau. \quad (2.7)$$

Nesse caso, a Transformada de Laplace do produto pode ser expressa em termos da convolução  $f * g$  definida em (2.7), para a qual define



$$\mathcal{L}\{f * g\}(t) = \mathcal{L}\{f(t)\} \mathcal{L}\{g(t)\}. \quad (2.8)$$

### 2.4.5 Função Delta de Dirac

Nos sistemas mecânicos e elétricos podem ser observadas a ação de forças ou tensões que agem em curtos períodos de tempo. De modo geral, problemas envolvendo fenômenos de natureza impulsiva podem ser modelados pela função delta de Dirac<sup>1</sup> [27], ou impulso unitário,  $\delta(t - t_0)$ , caracterizada pelas seguintes propriedades

$$(a) \delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty, & t = t_0 \\ 0, & t \neq t_0 \end{cases}, \quad (2.9)$$

$$(b) \int_0^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1. \quad (2.10)$$

Apesar da função Delta de Dirac não satisfazer as condições de existência discutidas na seção 2.2, é possível determinar a sua Transformada de Laplace de tal maneira que, para  $t_0 > 0$ , define-se

$$\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\} = e^{-st_0}. \quad (2.11)$$

### 2.4.6 Transformada de uma derivada

Uma das principais propriedades da Transformada de Laplace refere-se à sua capacidade de eliminar derivadas e, neste caso, a aplicação desse método às equações diferenciais torna-o muito mais conveniente do que os métodos clássicos

---

<sup>1</sup>Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984) - físico inglês que fez grandes contribuições para o desenvolvimento da mecânica quântica e eletrodinâmica.

encontrados na literatura, como pode ser verificado em Spiegel [48], Kreyszig [27], Boyce e DiPrima [12], Felício [22], Nagle et al. [40] e Zill [58].

De modo geral, se  $f^{(n)}(t)$  denota a  $n$ -ésima derivada de  $f(t)$ , de acordo com Zill [58], a transformada de uma derivada é assim definida:

**Teorema 2.2** (Transformada de uma derivada). *Se  $f, f', \dots, f^{(n-1)}$  são contínuas para todo  $t > 0$ , e se  $f^{(n)}$  é contínua por partes e de ordem exponencial em  $[0, \infty)$ , segundo Zill [58], tem-se*

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^{(n)}F(s) - s^{(n-1)}f(0) - s^{(n-2)}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0). \quad (2.12)$$

O enunciado do Teorema 2.2 evidencia que  $\mathcal{L}\{d^n y/dt^n\}$  depende de  $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$  e das  $n - 1$  derivadas de  $y(t)$  calculadas em  $t = 0$ . Segundo Zill [58], essa propriedade torna a Transformada de Laplace idealmente adequada para a resolução de problemas lineares de valor inicial nos quais a equação diferencial tem coeficientes constantes. Dessa forma, as equações diferenciais são expressas em termos da combinação linear de  $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ , tal que

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = g(t), \quad (2.13)$$

com  $y(0) = y_0, y'(0) = y'_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}$ , onde  $a_i, i = 0, 1, \dots, n$  e  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$  são constantes.

A propriedade de linearidade garante que a Transformada de Laplace da combinação linear em (2.13) possa ser escrita como

$$a_n \mathcal{L}\left\{\frac{d^n y}{dt^n}\right\} + a_{n-1} \mathcal{L}\left\{\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}\right\} + \dots + a_0 \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{g(t)\}. \quad (2.14)$$

Considerando o  $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$  e  $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$ , o Teorema 2.2 aplicado a equação (2.14) fornece

$$\begin{aligned}
a_n [s^n Y(s) - \dots - y^{n-1}(0)] + a_{n-1} [s^{n-1} Y(s) - \dots - y^{n-2}(0)] + \dots \\
+ a_0 Y(s) = G(s). \quad (2.15)
\end{aligned}$$

A característica mais importante da Transformada de Laplace, de acordo com Zill [58], está relacionada com essa propriedade, pois, ao aplicá-la, a transformada de uma equação diferencial linear com coeficientes constantes torna-se uma equação algébrica em  $Y(s)$ , como pode ser observado em (2.15). A solução da equação geral (2.15) resultante da transformação permite determinar  $Y(s)$ , tal que, sendo  $P(s)Y(s) = Q(s) + G(s)$ , escreve-se

$$Y(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} + \frac{G(s)}{P(s)}, \quad (2.16)$$

onde  $P(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0$ ,  $Q(s)$  é um polinômio em  $s$  de grau menor ou igual a  $n - 1$ , que consiste nos vários produtos dos coeficientes  $a_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  e das condições iniciais  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ , e  $G(s)$  resulta da aplicação da Transformada de Laplace na função  $g(t)$ . A solução do problema de valor inicial somente é conhecida em seu domínio original, se for possível determinar  $y(t)$  a partir da equação (2.16) de tal maneira que  $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$ . Neste caso, utilizam-se técnicas apropriadas para determinar a transformada inversa  $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$  conforme será discutido no Capítulo 3.

### 3 A TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

Usualmente, os problemas que se valem da Transformada de Laplace para solucionar as equações diferenciais envolvidas nos modelos matemáticos, precisam recorrer a algum dos recursos de inversão que serão definidos neste capítulo. Os métodos apresentados a seguir são muito úteis quando se deseja inverter a Transformada de Laplace de funções ditas elementares, devido ao fácil manejo algébrico pelo qual é possível efetuar a operação inversa de  $\mathcal{L}\{f(t)\}$ . Assim, segundo Spiegel [48], define-se

**Definição 3.1.** *Se a Transformada de Laplace de uma função  $f(t)$  é denotada por  $F(s)$ , isto é, se  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ , então  $f(t)$  é chamada transformada inversa de Laplace de  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$  onde  $\mathcal{L}^{-1}$  é denominado operador da transformada inversa de Laplace.*

Existem várias alternativas para inversão analítica da Transformada de Laplace. Neste capítulo serão listados alguns dos métodos mais usuais.

#### 3.1 Método das Frações Parciais

Consideremos, inicialmente, a função racional  $F(s) = \frac{G(s)}{H(s)}$  com as características seguintes:

- i)  $G(s)$  e  $H(s)$  são polinômios, e  $H(s) \neq 0$ ;
- ii)  $\text{grau}(G) < \text{grau}(H)$ .

O método das frações parciais, segundo Spiegel [48], diz que qualquer função racional  $F(s)$  que satisfaça as condições (i) e (ii), pode ser decomposta em uma soma de funções racionais, também conhecidas como frações parciais, tendo a forma  $\frac{A}{(as+b)^n}$ ,  $\frac{As+B}{(as^2+bs+c)^n}$ , onde  $n \in \mathbb{N}^*$ . Nesse sentido, pode-se encontrar

$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ , determinando-se a transformada inversa de cada uma das frações parciais.

### 3.2 Método das Séries

No método das séries, Spiegel [48] menciona que se  $F(s)$  possui um desenvolvimento de potências negativas de  $s$ , ou seja, se

$$F(s) = a_0s + a_1s^{-1} + a_2s^{-3} + a_3s^{-4} + \dots \quad (3.1)$$

então, sob condições adequadas, pode-se inverter termo a termo na equação (3.1) para obter

$$f(t) = a_0 + a_1t + \frac{a_2t^2}{2!} + \frac{a_3t^3}{3!} + \dots \quad (3.2)$$

### 3.3 Inversão por Convolução

Na Seção 2.4.4, definimos a Convolução para obter a transformada do produto entre duas funções. Procedendo de forma conveniente, essa propriedade também pode ser utilizada para determinar a transformada inversa [48].

**Teorema 3.1** (Teorema da Convolução). *Se  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$  e  $\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = g(t)$ , então*

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = f * g. \quad (3.3)$$

### 3.4 Fórmula de Desenvolvimento de Heaviside

De acordo com Spiegel [48], o método proposto por Heaviside (1850 - 1925) permite inverter a função  $F(s)$ , através de uma expansão em frações parciais para uma função racional. Esse resultado, conhecido como Teorema da Expansão, constitui uma das bases fundamentais para o estudo de problemas que envolvem a utilização da Transformada de Laplace.

**Teorema 3.2** (Teorema da Expansão). *Seja  $F(s) = \frac{G(s)}{H(s)}$  uma função racional que satisfaz as condições*

*i)  $G(s)$  e  $H(s)$  são polinômios, e  $H(s) \neq 0$ ;*

*ii)  $\text{grau}(G) < \text{grau}(H)$ ;*

*se são conhecidas todas as raízes  $s_k$ ,  $k = 1, 2, 3 \dots N$ , do polinômio  $H(s)$ , então, define-se*

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{H(s)} \right\} = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k t}, \quad (3.4)$$

*onde,  $A_k = \lim_{s \rightarrow s_k} (s - s_k) F(s) = \frac{G(s_k)}{H'(s_k)}$ , e  $H'(s_k)$  denota a derivada de  $H(s)$  calculada na sua  $k$ -ésima raiz.*

A vantagem da aplicação do Teorema 3.2 é que as operações geralmente tornam-se menos dispendiosas se comparado aos outros métodos de inversão que, muitas vezes, exigem a deformação do contorno de integrais de linha ou expansões assintóticas em séries de potências [51].

### 3.5 A Integral Complexa de Inversão

A fórmula complexa de inversão, segundo Moya [38], é um método direto para determinar a transformada inversa de Laplace e possui embasamento na teoria das variáveis complexas onde, para algum número real  $c$ , tem-se

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) e^{st} ds, \quad t \geq 0. \quad (3.5)$$

A integração é efetuada ao longo de uma reta  $s = c$ , situada dentro da região de convergência e do arco  $\Gamma$  de uma circunferência de raio  $R$ , centrada na origem passando por BCDEA, conforme mostra a Figura 3.1.



$$f(t) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\beta} F(s) e^{st} ds. \quad (3.8)$$

Por fim, na equação (3.8), a transformada inversa de Laplace de uma função  $F(s)$  é obtida com o auxílio do Teorema dos resíduos<sup>2</sup> [41].

**Teorema 3.3** (Teorema dos Resíduos). *Seja  $F(s)$  uma função analítica na região interna ao contorno do caminho fechado e simples  $\beta$  bem como sobre  $\beta$ , exceto para um número finito de pontos singulares  $s_1, s_2, s_3, \dots, s_k$ , dentro de  $\beta$ . Então, segundo Oliveira e Rodrigues [41], escreve-se*

$$\oint_{\beta} F(s) ds = 2\pi i \sum_{n=1}^k \text{Res} \{F(s_k)\}. \quad (3.9)$$

O Teorema dos resíduos é uma forma generalizada para a fórmula de Cauchy<sup>3</sup> e possibilita o cálculo de integrais de funções analíticas ao longo de caminhos fechados simples, o que justifica a sua aplicação à expressão (3.9) para determinar a transformada inversa de Laplace que, formalmente, é definida pelo Teorema 3.4.

**Teorema 3.4** (Teorema de Inversão). *Se  $F(s)$  corresponde à Transformada de Laplace de  $f(t)$ , então a transformada inversa, denotada por  $\mathcal{L}^{-1} \{F(s)\}$ , será dada por*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) e^{st} ds, \quad t \geq 0, \quad (3.10)$$

onde  $s = c + iT$  é um parâmetro do plano complexo, com  $c = \text{Re} \{s\}$  e  $T = \text{Im} \{s\}$ .

Os métodos descritos neste capítulo têm grande utilidade em situações práticas onde se deseja inverter funções elementares transformadas pela técnica de

---

<sup>2</sup>Em Oliveira e Rodrigues Jr.(2006, p. 112), encontra-se uma demonstração para este teorema.

<sup>3</sup>Ver Moya (2008, p.80)



Laplace, no entanto, são aplicáveis a conjunto de funções conhecidas cujo tratamento algébrico é de fácil análise. Para os casos em que a Transformada de Laplace é aplicada a equações diferenciais ou a problemas de valores iniciais surgem algumas dificuldades, pois, as funções resultantes da transformação nem sempre possibilitam a inversão através dos métodos diretos.

Uma alternativa para solucionar problemas em que se verifica a necessidade de ser aplicada a inversão da Transformada de Laplace, tem como base a análise numérica, na qual métodos numéricos podem fornecer subsídios para calcular a transformada inversa escolhendo técnicas específicas. No capítulo 4 serão apresentados alguns desses recursos nos quais a transformada inversa é obtida como uma expansão em série de potências de termos exponenciais decrescentes, ou se obtém a inversa por meio da discretização da integral complexa de Bromwich.

## 4 INVERSÃO NUMÉRICA DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Os problemas decritos na Seção 2.2 geralmente envolvem a resolução de equações diferenciais parciais ou ordinárias. A aplicação da Transformada de Laplace nessas equações tem como principal finalidade obter meios fáceis para avaliar as funções presentes nos modelos matemáticos levando as transformações para o domínio de Laplace. Uma das maiores dificuldades, no entanto, é executar os procedimentos para retornar a função transformada ao seu domínio de origem, isso porque nem sempre é possível determinar a operação inversa fazendo uso apenas dos mecanismos algébricos conhecidos.

Nesse contexto, a grande utilidade da Transformada de Laplace nas diversas áreas da Ciência têm motivado alguns estudiosos a desenvolver métodos que possibilitam o cálculo da transformada inversa, com o auxílio de recursos computacionais. Com o advento dos computadores e o surgimento de ferramentas direcionadas à análise numérica, as possibilidades para inversão da Transformada de Laplace foram ampliadas, de forma que, os métodos numéricos existentes costumam produzir resultados cada vez mais precisos.

No século XX surgiram várias propostas com a perspectiva de avaliar problemas envolvendo transformações inversas sem precisar necessariamente utilizar técnicas analíticas. Dessa forma, foram desenvolvidos modelos numéricos para aproximação da função original com formulações alicerçadas na expansão em Série de Fourier [21] e Série de Potências [17], ou na discretização da integral de Bromwich [1, 24, 35, 45].

Nas Seções 4.1, 4.2 e 4.3 deste capítulo, serão expostas três técnicas de inversão numérica da Transformada de Laplace que têm suporte teórico na formulação da Expansão em Séries de Potências [17] e na aproximação da integral complexa utilizando a Quadratura Gaussiana [24, 45] e o método de Talbot [1].

## 4.1 Expansão em Série de Potências

Uma alternativa proposta por Chung e Sun [17], fornece um método para encontrar  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$  ao estabelecer uma aproximação para  $f(t)$  através de uma série de potências de múltiplas exponenciais. Dessa forma, a transformação inversa ocorre quando

$$f(t) = \sum_{i=0}^M \alpha_i g_i(x), \quad (4.1)$$

onde, para cada índice  $i = 1, 2, \dots, M$ , existe um termo exponencial correspondente dado por  $g_i(t) = e^{-\frac{it}{k}}$ ,  $k$  é um parâmetro experimental e os coeficientes  $\alpha_i$  são “pesos” que auxiliam no processo de inversão da função transformada.

Observa-se que, na equação (4.1), é necessário conhecer as constantes  $\alpha_i$  e, neste caso, o parâmetro  $s$  na definição (2.1) é substituído por  $(\frac{j+1}{k})$  [18], fazendo

$$F\left(\frac{j+1}{k}\right) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(\frac{j+1}{k})t} dt. \quad (4.2)$$

O termo  $e^{-(\frac{j+1}{k})t}$  na equação (4.2) pode ser reescrito como um produto de duas funções exponenciais. Definindo  $p_j(t) = e^{-\frac{jt}{k}}$  e  $h(t) = e^{-\frac{t}{k}}$ , escreve-se

$$F\left(\frac{j+1}{k}\right) = \int_0^{\infty} f(t) p_j(t) h(t) dt. \quad (4.3)$$

Substituindo  $f(t)$  dada pela expressão (4.1) na equação (4.3) segue que, para  $j = 0, 1, 2, 3, \dots, M$ , será obtido um sistema de equações lineares cuja solução fornecerá os valores  $\alpha_i$ , dados por

$$\begin{bmatrix} k & \frac{k}{2} & \frac{k}{3} & \cdots & \frac{k}{(M+1)} \\ \frac{k}{2} & \frac{k}{3} & \frac{k}{4} & \cdots & \frac{k}{(M+2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{k}{(M+1)} & \frac{k}{(M+2)} & \frac{k}{(M+3)} & \cdots & \frac{k}{(2M+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F\left(\frac{1}{k}\right) \\ F\left(\frac{2}{k}\right) \\ \vdots \\ F\left(\frac{M+1}{k}\right) \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Um aspecto inerente ao sistema de equações resultante da equação (4.3) refere-se ao desempenho numérico e computacional proporcionado pelo método da Série de Potências devido à uma característica peculiar da matriz de Hilbert que aparece nesse sistema. Dessa forma, faremos uma breve avaliação dessa matriz com ordem 3, cujo condicionamento será dado por

$$\text{Cond}[H] = \| H \| \cdot \| H^{-1} \| \quad (4.5)$$

onde,  $H$  e  $H^{-1}$  representam, respectivamente, a matriz de Hilbert e sua inversa.

Em outras palavras, a expressão (4.5) diz que o número de condicionamento será dado pelo produto da norma uniforme<sup>1</sup> da matriz  $H$  pela norma uniforme de sua inversa. Calculando esses valores, tem-se  $\| H \| = 2,35$ ,  $\| H^{-1} \| = 192$  e  $\text{Cond}[H] = 451,2$ . Segundo Chapra e Canale [16], o fato de o número de condicionamento da matriz de Hilbert ser muito maior do que uma unidade sugere que o sistema (4.4) seja mal condicionado.

Do ponto de vista prático, a dificuldade na implementação do método da Série de Potências consiste no esforço computacional requerido para determinar os valores  $\alpha_i$  a partir da resolução do sistema (4.4).

---

<sup>1</sup>Uma definição para a norma uniforme da matriz ou norma da soma das linhas pode ser encontrada em Chapra e Canale (2011, p. 240).

## 4.2 Quadratura Gaussiana

A quadratura Gaussiana é um método de integração numérica que permite estimar a solução de uma integral definida, ao escolher pontos específicos do domínio de integração atribuindo pesos à cada ponto em que a função é avaliada. Assim, ao fazer uso deste método, realiza-se uma aproximação para a integral através de um somatório onde os pesos (ou coeficientes de ponderação) e os pontos de quadratura estão diretamente relacionados entre si [14].

Na regra da quadratura Gaussiana considera-se que se  $f(x)$  e  $w(x)$  são funções conhecidas e estão definidas em um intervalo  $[a, b]$  e no conjunto de pontos  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ , então, a integração numérica por aproximação pode ser definida como

$$I(f) = \int_a^b f(x)w(x) dx = \sum_{k=1}^n w_k f(x_k), \quad (4.6)$$

onde,  $w_k$  e  $x_k$  são os pesos e seus respectivos pontos.

O cálculo da transformada inversa empregando esta regra tem o mesmo princípio básico, no qual a integral complexa de inversão pode ser expressa em termos da soma de suas partes. De modo convencional, as fórmulas de Gauss para a integração numérica de (3.5) pressupõem que a função  $F(s)$  deve ser aproximada por uma classe de polinômios ortogonais arbitrários de grau  $\leq 2n - 1$ . Assim, muitas formas polinomiais, tais como as de Laguerre, Legendre, Chebyshev, entre outras, para as quais é verificada a propriedade de ortogonalidade, são frequentemente utilizadas para substituir  $F(s)$ , possibilitando uma aproximação satisfatória para o cômputo da transformada inversa.

Seguindo essa conjectura, em [24, 42, 45] podem ser encontradas diferentes alternativas para expressar a fórmula complexa de inversão por uma fórmula de quadratura adequada de forma que seja possível escrever  $f(t) = \mathcal{L}^{-1} \{F(s)\}$  como

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s) ds \approx \sum_{k=1}^M w_k F(s_k). \quad (4.7)$$

No método apresentado por Heydarian et al. [24], a integral em (4.7) é calculada tal que, para  $x = st$  e considerando a relação  $Q(x) = \frac{x}{t} F\left(\frac{x}{t}\right)$ , tem-se

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^x \frac{Q(x)}{x} dx = \sum_{k=1}^M w_k Q(x_k), \quad (4.8)$$

onde as abscissas (ou pontos  $x_k$ ) são obtidas calculando as raízes do polinômio dado por

$$a(M, 0)p^M - a(M, 1)p^{M-1} + a(M, 2)p^{M-2} - a(M, 3)p^{M-3} + \dots + a(M, M)p^0, \quad (4.9)$$

cujos coeficientes  $a(M, r)$  são fornecidos por

$$a(M, r) = \frac{(-1)^{(M-r)} M [(M+r-1)!]}{r!(M-r)!}. \quad (4.10)$$

Os pesos  $w_k$  têm correspondência com as raízes do polinômio (4.9) e são determinados a partir da resolução do sistema

$$\sum_{k=1}^M \frac{w_k}{x_k^r} = \frac{1}{r!}, \quad 0 \leq r \leq (M-1). \quad (4.11)$$

Em geral, a regra de quadratura fundamenta-se na escolha acertada dos pesos  $w_k$  e abscissas  $x_k$  visando minimizar o erro no cálculo da transformada inversa. Isso significa que o método pode oferecer maior exatidão nos resultados aumentando o grau  $M$  do polinômio (4.9) o suficiente para que o somatório (4.8) forneça valores com melhor precisão para  $f(t)$ .

### 4.3 O Método de Talbot

De acordo com Cohen [18], o método de Talbot tem como princípio fundamental a avaliação da fórmula complexa de inversão e a análise criteriosa do contorno de Bromwich mostrado na Figura 3.1. Nesta abordagem, para calcular numericamente a transformada inversa de Laplace avalia-se a integral dada por

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{st} ds = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\beta} F(s)e^{st} ds, \quad (4.12)$$

onde o contorno  $\beta$ , é uma linha vertical definida por  $s = c + i\omega$ , em  $(c - i\infty, c + i\infty)$ ,  $c$  tem um valor fixo escolhido de tal maneira que todas as singularidades da transformação estão à esquerda da reta  $s = c$  paralela ao eixo imaginário.

Segundo Abate e Valkó [1], a convergência da integral (4.12) seria muito maior se  $s$  pudesse assumir valores com uma componente real suficientemente grande, porém, negativa. Para isso, no método de Talbot [49], considera-se que seja possível deformar o contorno  $\beta$  em qualquer caminho aberto em torno do eixo real negativo, desde que nenhuma singularidade de  $F(s)$  seja atravessada pela deformação de  $\beta$ , sendo que, a ideia de modificar o contorno de Bromwich, tem como propósito reduzir a magnitude do fator exponencial  $e^{st}$  no integrando.

Em sentido amplo, a linha  $\beta$  em  $(c - i\infty, c + i\infty)$  é substituída por um contorno equivalente  $\beta'$ , começando e terminando no semiplano esquerdo do plano complexo tal que  $Re \{s\} \rightarrow -\infty$ . Para isso, de acordo com Murli e Rizzard [39], é necessário que a função transformada  $F(s)$  satisfaça as seguintes condições

- i) Todas as singularidades  $s_i$  devem ser conhecidas tais que,  $|Im \{s_i\}| < \gamma$ , onde  $\gamma$  é um número conhecido;
- ii)  $|F(s)|$  tende a zero uniformemente em  $Re \{s\} < \gamma$  quando  $|s| \rightarrow \infty$ .

A dificuldade, no entanto, reside no fato de que não é possível garantir a validade da condição (i) para uma função  $F(s)$  conhecida no novo contorno  $\beta'$ .

Isso pode ser contornado, segundo [18], considerando a função modificada  $F(\lambda s + \sigma)$  pela escolha adequada do parâmetro  $\lambda$  e do parâmetro de deslocamento  $\sigma$ , de forma que, se  $F(s)$  tem singularidade  $s_0$ ,  $F(\lambda s + \sigma)$  tem uma  $s_0^*$  correspondente, tal que

$$s_0^* = \frac{(s_0 - \sigma)}{\lambda}, \quad (4.13)$$

e a equação (4.12) pode ser substituída por

$$f(t) = \frac{\lambda e^{\sigma t}}{2\pi i} \int_{\beta'} F(\lambda s + \sigma) e^{\lambda s t} ds, \quad t > 0, \quad (4.14)$$

onde os parâmetros  $\lambda$  e  $\sigma$  são mostrados na Figura 4.1.

A segunda condição é válida para quase todas as funções possíveis de se determinar a transformada inversa, exceto para aquelas que apresentam uma infinidade de singularidades no eixo imaginário [18].

Fonte: Murli e Rizzardi (1990).

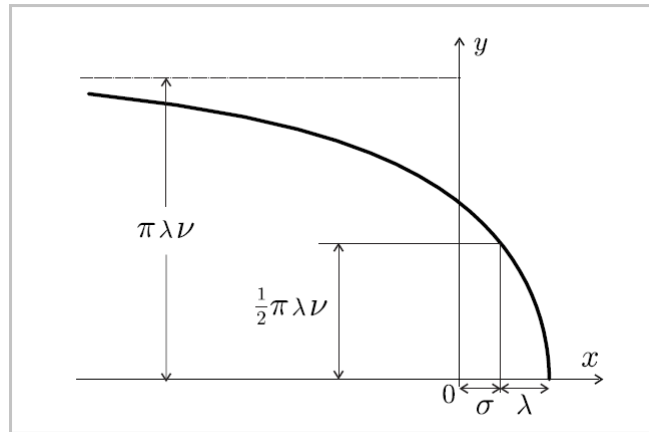


Figura 4.1: O contorno de Talbot.

Para que as singularidades de  $F(s)$  não sejam atravessadas pela deformação do contorno de Bromwich, Talbot estabeleceu uma função de varredura da região do novo contorno para mapear as singularidades  $s_i$  definindo

$$s(z) = \frac{z}{1 - e^{-z}} + z \frac{\nu - 1}{2}, \quad (4.15)$$



onde  $\nu$  é um parâmetro positivo arbitrário e  $z \in (-2\pi i, 2\pi i)$ .

Abate e Valkó [1], basearam-se nessa premissa para estabelecer uma parametrização do contorno de Talbot, para o qual a equação (4.15) é expressa como

$$s(\theta) = r\theta(\cot\theta + i), \quad -\pi < \theta < \pi, \quad (4.16)$$

onde  $r$  é um parâmetro.

Usando (4.16) a fórmula complexa de inversão (4.12) pode ser escrita, em termos de  $\theta$ , como

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ts(\theta)} F(s(\theta)) s'(\theta) d\theta, \quad (4.17)$$

na qual o termo  $s'(\theta)$  denota a derivada de (4.16) em relação a  $\theta$ . Ainda, escrevendo

$$s'(\theta) = ir(1 + i\sigma(\theta)), \quad \sigma(\theta) = \theta + (\theta\cot\theta - 1)\cot\theta, \quad (4.18)$$

conforme [1], a parametrização do contorno proposto por Talbot permite escrever (4.12) como

$$f(t) = \frac{r}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{Re} [e^{ts(\theta)} F(s(\theta))(1 + i\sigma(\theta))] d\theta. \quad (4.19)$$

No método de integração descrito por Abate e Valkó [1] considera-se uma aproximação para a integral (4.19) recorrendo à regra trapezoidal com passo de tamanho  $\pi/M$  e  $\theta_k = k\pi/M$ , resultando na fórmula geral para obtenção da transformação inversa dada por

$$f(t, M) = \frac{r}{M} \left\{ \frac{1}{2} F(r) e^{rt} + \sum_{k=1}^{M-1} \operatorname{Re} [e^{ts(\theta_k)} F(s(\theta_k))(1 + i\sigma(\theta_k))] \right\}. \quad (4.20)$$

Essa estratégia para inversão numérica da Transformada de Laplace permite estipular uma aproximação avaliando apenas a variação do parâmetro  $r$  para o qual Abate e Valkó [1] estabeleceram de forma experimental que  $r = \frac{2M}{5t}$ .

Esta abordagem mais recente, conhecida como multi precisão computacional<sup>2</sup>, permite inverter a Transformada de Laplace efetuando a variação da quantidade de termos  $M$  do somatório da equação (4.20), no qual a aproximação da função original  $f(t)$  depende exclusivamente do parâmetro  $r$ . Na ideia inicial proposta por Talbot, a integração numérica da fórmula complexa de inversão dependia da avaliação de dois parâmetros.

É importante salientar que existem muitos métodos numéricos pelos quais a inversão da Transformada de Laplace é factível, porém, há um consenso entre os autores de que nenhum desses recursos é completamente satisfatório para inverter um conjunto amplo de funções transformadas. No referencial teórico, tem sido verificado que para determinados tipos de formulações, alguns desses métodos manifestam melhor comportamento para aproximação da função  $f(t) = \mathcal{L}^{-1} \{F(s)\}$ .

De acordo com Barichello [5], as melhores alternativas para inversão da Transformada de Laplace têm embasamento na integração numérica da fórmula de Bromwich (3.5) ou na expansão da função original em uma série de funções ortogonais. Nessa perspectiva, optou-se por analisar o desempenho das técnicas discutidas neste capítulo empregando-as, inicialmente, a um conjunto de funções elementares e em seguida a um problema de transporte de nêutrons. Os resultados desta investigação estão expostos através de comparativos apresentados no Capítulo 6.

---

<sup>2</sup>Abate e Valkó (2004), descrevem esta formulação com base na parametrização do contorno de Talbot mostrado na Figura 4.1.

# 5 APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE À EQUAÇÃO DE TRANSPORTE UNIDIMENSIONAL

## 5.1 Introdução

Ao longo da história, muitos estudiosos mostraram-se empenhados em entender as características relacionadas à estrutura do átomo quanto à sua forma, além de desenvolver mecanismos para analisar as interações dos núcleos atômicos, dando origem a muitas teorias.

No início do século XX, a existência de partículas subatômicas, tais como os prótons e elétrons, já era uma ideia amplamente consolidada de tal forma que algumas propriedades sobre a constituição física do átomo estavam bem definidas e aceitas pelos cientistas daquela época. Ainda nesse mesmo período, uma hipótese proposta por Rutherford (1871-1937), que se referia à possibilidade de existir uma partícula neutra (nêutron) resultante da ligação entre as outras duas, foi comprovada através de experimentos realizados por James Chadwick (1891-1974). Poucos anos depois, a descoberta de Chadwick contribuiu para a realização de novos experimentos demonstrando que os nêutrons eram mais adequados para produzir isótopos radioativos do que as partículas alfas utilizadas até então para esta finalidade [30].

Os trabalhos que deram prosseguimento às experiências com partículas neutras serviram de subsídios para o surgimento da fissão nuclear, um processo que divide o núcleo de um átomo instável em átomos menores pelo bombardeamento de nêutrons, formando isótopos resultantes da divisão e liberando uma certa quantidade de energia.

Os isótopos radioativos têm grande utilidade na medicina para o diagnóstico e cura de doenças por meio de tratamentos terapêuticos [44], como a radioterapia, e também são aplicados para esterilização de materiais cirúrgicos elimi-

nando bactérias por meio de radiação. Na agricultura, os radioisótopos são usados em pesquisas que buscam determinar o potencial de absorção de nutrientes pelas plantas [30].

Com a descoberta do nêutron e do processo de fissão nuclear controlada também tornou-se possível a produção de energia em grande quantidade através das usinas nucleares que são muito viáveis quando não há disponibilidade de recursos naturais suficientes para geração de energia elétrica.

Apesar das muitas aplicações, o uso de tecnologias envolvendo radiações ionizantes oferece alto risco ao organismo humano e isso requer o entendimento dos processos de interação da radiação com os átomos e as moléculas das células expostas [44], sendo necessário quantificar o nível de energia radioativa aceitável para a exposição da matéria viva e, por isso, são estabelecidos parâmetros e grandezas que permitem prever a distribuição do fluxo de radiação em diferentes meios materiais.

No desenvolvimento de reatores nucleares, por exemplo, é fundamental conhecer o comportamento da distribuição neutrônica visando garantir maior segurança nas operações dos sistemas envolvidos e evitar a contaminação do ambiente externo onde os reatores são instalados.

Nesse sentido, o comportamento migratório ou a distribuição do fluxo de partículas neutras em determinado meio é modelado pela Equação de Transporte. Esta equação pode assumir a forma íntegro-diferencial e fornece uma descrição qualitativa das distribuições espacial, direcional, energética e temporal [43], caracterizando o balanço matemático entre a produção e perda de nêutrons no interior de um meio hospedeiro.

Os sistemas físicos que se baseiam na Equação de Transporte, geralmente, apresentam alto grau de complexidade de análise devido aos fatores inerentes ao arranjo geométrico que são de difícil representação matemática, a quantidade de isótopos com propriedades distintas, cujas concentrações variam espacial e temporalmente [32], além de outros aspectos relacionados à distribuição da população

neutrônica. Dessa forma, uma solução analítica para a Equação de Transporte é factível somente se o sistema for simplificado ou idealizado de tal maneira que se obtenha uma formulação matemática explícita [31].

De acordo com Maiorino [32], a teoria de transporte originou-se no final do século XIX a partir de investigações relacionadas à difusividade da luz na atmosfera, sendo que, em 1921, Milne propôs uma formulação para o estudo da distribuição angular da radiação emitida por uma estrela. Desde o surgimento da Equação de Transporte, muitas pesquisas [5, 31, 32, 44, 46, 47, 15, 54, 57] voltadas para área de transferência radiativa têm demonstrado o esforço para obtenção de sua solução com base nos modelos matemáticos existentes e também com o auxílio de modelos computacionais. Dessa forma, a simulação do fenômeno de transporte de nêutrons pode seguir duas abordagens distintas: a primeira faz alusão aos modelos estocásticos (Métodos de Monte Carlo) que visam conjecturar uma solução tratando diretamente o problema físico [44]. A outra abordagem se refere aos modelos determinísticos cujo objetivo é resolver de forma exata um problema aproximado [28].

Na abordagem determinística, existem várias vertentes com as quais é possível determinar a solução da Equação de Transporte, dentre elas, destacam-se as que se baseiam nas aproximações por expansão em harmônicos esféricos  $P_N$  e por ordenadas discretas  $S_N$  [44].

Para este trabalho, objetivando verificar a utilidade da Transformada de Laplace para solucionar o problema proposto, seguiu-se a linha na qual uma solução da Equação de Transporte é obtida utilizando a aproximação por ordenadas discretas. Este método consiste em aproximar o termo integral da equação integro-diferencial por uma fórmula de quadratura de Gauss-Legendre de ordem  $N$ , efetuando a discretização da variável angular. Como resultado deste procedimento, obtém-se um sistema de equações diferenciais ordinárias lineares para as  $N$  direções consideradas [50].

Na literatura, podem-se encontrar diferentes alternativas para determinar a solução analítica da Equação de Transporte com base na aproximação  $S_N$ . Entretanto, interessa-nos abordar um procedimento que permite resolver analiticamente a equação em ordenadas discretas utilizando a Transformada de Laplace [54], denominada  $LTS_N$ .

O método  $LTS_N$ , proposto por Vilhena e Barichello [54], consiste em estabelecer uma solução analítica para o conjunto de equações diferenciais resultantes da aproximação de ordenadas discretas  $S_N$ , da equação de transporte unidimensional em geometria Cartesiana [9]. Este mecanismo tem como premissa a aplicação da Transformada de Laplace na variável espacial convertendo o sistema de equações diferenciais em um sistema algébrico que permite determinar os fluxos angulares após utilizar uma técnica de inversão [44].

Desde o seu desenvolvimento, o método  $LTS_N$  tem sido empregado de forma intensiva para resolver problemas de transporte de partículas, sendo que, conforme mencionado, ao utilizar a Transformada de Laplace é necessário buscar subsídios nos procedimentos para inversão da função transformada. Contudo, observa-se que para os problemas que demonstram maior grau de complexidade, devido à quantidade de variáveis envolvidas nas equações, os recursos numéricos tornam-se indispensáveis para análise dos modelos matemáticos que os descrevem.

Diante do exposto, neste capítulo apresenta-se um problema de transporte de partículas neutras unidimensional em geometria Cartesiana, com espalhamento anisotrópico, cuja solução é obtida através do método  $LTS_N$ . Também serão expostas as formulações para inverter a Transformada de Laplace de forma analítica (pela fórmula de expansão de Heaviside) e numérica (pelos métodos discutidos no Capítulo 4).

## 5.2 Formulação Matemática para o Problema de Transporte de Partículas Neutras

O método das ordenadas discretas  $S_N$  tem como ponto inicial a discretização da variável angular do termo integral da equação de transporte de nêutrons. Para o caso de um problema em geometria Cartesiana unidimensional, monoenergética e estacionária, tem-se

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, \mu) + \sigma_t \psi(x, \mu) = \int_{-1}^1 \sigma_s(x, \mu' \rightarrow \mu) \psi(x, \mu') d\mu' + Q(x, \mu), \quad (5.1)$$

onde  $\psi(x, \mu)$  refere-se ao fluxo angular de partículas neutras na direção  $\mu$ ,  $\sigma_t$  é a seção de choque total,  $\sigma_s(x, \mu' \rightarrow \mu)$  é a seção de choque diferencial de espalhamento e  $Q(x, \mu)$  é a fonte interna.

De maneira geral, o conjunto de equações  $S_N$  é obtido após estabelecer uma aproximação para a integral da equação (5.1) recorrendo a fórmula de quadratura de Gauss-Legendre para discretizar a variável angular  $\mu$ . Assim, segundo Vilhena e Barichello [54] a versão em ordenadas discretas de um problema que considera ainda um espalhamento linearmente anisotrópico será da forma

$$\mu_m \frac{d}{dx} \psi_m(x) + \sigma_t \psi_m(x) = \frac{1}{2} \left[ \sigma_{s0} \sum_{k=1}^N \psi_k(x) \omega_k + 3\mu_m \sigma_{s1} \sum_{k=1}^N \mu_k \psi_k(x) \omega_k + Q(x) \right], \quad (5.2)$$

sendo que  $m = 1, \dots, N$  e a variável espacial  $x$  pertence ao intervalo  $[0, a]$ .

Neste caso, tem-se um problema de ordenadas discretas em um domínio unidimensional homogêneo de comprimento  $a$ , com espalhamento linearmente anisotrópico, sob as condições de contorno

$$\begin{cases} \psi_m(0) = f_m, & \mu_m > 0; \\ \psi_m(a) = g_m, & \mu_m < 0 \end{cases},$$

onde  $m = 1, \dots, N$ ,  $0 \leq x \leq a$ , os termos  $f_m$  e  $g_m$  são os fluxos incidentes sobre os limites da fronteira do domínio em  $[0, a]$ .

Na equação (5.2), o fluxo angular  $\psi(x, \mu_m)$  na direção  $\mu_m$  está denotado por  $\psi_m(x)$ ,  $\sigma_t$  é a seção de choque total,  $\sigma_{s0}$  e  $\sigma_{s1}$  são as seções de choque macroscópicas de espalhamento isotrópico e anisotrópico e os termos  $\omega_k$  são os pesos da Quadratura de Gauss-Legendre correspondentes às direções  $\mu_k$ , raízes do polinômio de grau  $N$ , ordenadas de forma decrescente no intervalo  $[-1, 1]$ , ou seja,

$$-1 < \mu_N < \dots < \mu_{\frac{N}{2}+1} < 0 < \dots < \mu_2 < \mu_1 < 1.$$

Para facilitar a resolução da equação diferencial (5.2), pode-se efetuar a divisão de ambos os lados pelo termo  $\mu_m$ , definindo os parâmetros  $\alpha_m = \mu_m/\sigma_t$ ,  $c_m = \sigma_{s0}/2\mu_m$ ,  $\eta_m = \mu_m\omega_m$ ,  $b = 3\sigma_{s1}/2$ ,  $d_m = (1/\alpha_m) - c_m\omega_m - b\eta_m$ , e considera-se ainda que o problema não possui fonte interna, isto é,  $Q(x) = 0$ . Então obtém-se

$$\frac{d}{dx}\psi_m(x) + \psi_m(x)\frac{1}{\alpha_m} - c_m\sum_{k=1}^N\psi_k(x)\omega_k - b\sum_{k=1}^N\psi_k(x)\eta_k = 0 \quad (5.3)$$

Pelo método  $LTS_N$ , na equação (5.3), deve-se aplicar a Transformada de Laplace na variável espacial  $x$ . Considerando esse fato, a propriedade da transformada de uma derivada apresentada na seção 2.4.6 torna-se muito útil, pois, permite-nos escrever o sistema na forma algébrica como

$$(s\overline{\psi}_m(s) - \psi_m(0)) + \frac{1}{\alpha_m}\overline{\psi}_m(s) - c_m\sum_{k=1}^N\overline{\psi}_m(s)\omega_k - b\sum_{k=1}^N\overline{\psi}_m(s)\eta_k = 0, \quad (5.4)$$

o qual pode ser reescrito organizando os termos semelhantes e, neste caso, tem-se

$$\overline{\psi}_m(s) \left( s + \frac{1}{\alpha_m} \right) - \psi_m(0) - c_m\sum_{k=1}^N\overline{\psi}_m(s)\omega_k - b\sum_{k=1}^N\overline{\psi}_m(s)\eta_k = 0, \quad (5.5)$$

onde  $\overline{\psi}_m(s)$  indica a transformação do fluxo angular para o domínio de Laplace.



Buscando estabelecer uma comparação com os resultados expostos por Vilhena e Barichello [54], que utilizaram o método  $LTS_N$  para resolver o problema de transporte de partículas neutras unidimensional com  $N = 2$ , o sistema linear da equação (5.5) pode ser expresso na forma matricial por

$$\begin{bmatrix} s + d_1 & -\gamma_{12} \\ -\gamma_{21} & s + d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\psi}_1(s) \\ \bar{\psi}_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1(0) \\ \psi_2(0) \end{bmatrix}, \quad (5.6)$$

na qual  $\gamma_{12} = c_1\omega_2 + b\eta_2$  e  $\gamma_{21} = c_2\omega_1 + b\eta_1$ .

Posto isso, considerando  $A_{2 \times 2}$  como sendo a matriz associada ao sistema (5.6),  $\bar{I}_2(s)$  o vetor de 2 componentes do fluxo angular transformado pela técnica de Laplace e  $I_2(0)$  o vetor de 2 componentes do fluxo angular em  $x = 0$ , pode-se escrever

$$A_{2 \times 2} \cdot \bar{I}_2(s) = \times I_2(0), \quad (5.7)$$

de forma que a resolução do sistema (5.7) é dada por

$$\bar{I}_2(s) = \left( \frac{1}{\det(A)} \right) \text{adj}(A) \times I_2(0), \quad (5.8)$$

onde  $\text{adj}(A)$  é a matriz adjunta de  $A$  e a equação (5.8), permite-nos obter

$$\bar{\psi}_m(s) = \frac{\psi_m(0)(s + d_j) + \psi_j(0)\gamma_{mj}}{s^2 + (d_1 + d_2)s + (d_1d_2 - \gamma_{12}\gamma_{21})}, \quad (5.9)$$

sendo  $m = 1, 2$ ,  $j = 1, 2$ , com  $j \neq m$ .

Note que ao empregar a Transformada de Laplace para resolver a equação (5.3), o fluxo angular é transformado para o domínio “ $s$ ”, no entanto, deseja-se determiná-lo em seu domínio de origem em  $0 \leq x \leq a$ . Isso só é possível se forem utilizados métodos analíticos ou numéricos desenvolvidos exclusivamente para esta

finalidade. Neste caso, optou-se pelo uso da fórmula de Expansão de Heaviside para efetuar a inversão analítica e por aplicar as técnicas numéricas por Expansão em Séries de Potências, Quadratura Gaussiana e Talbot.

### 5.2.1 Solução Analítica pela Fórmula de Expansão de Heaviside

O Teorema de Heaviside nos permite determinar o fluxo angular aplicando o procedimento de inversão na equação (5.9) tal que

$$\psi_i(x) = \mathcal{L}^{-1} \{ \overline{\psi_m}(s) \} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{H(s)} \right\} = \sum_{k=1}^N A_{ik} e^{s_k x}, \quad i = 1, 2, \quad (5.10)$$

de maneira que são definidos os polinômios

$$G_{mj}(s) = \psi_m(0)(s + d_k) + \psi_j(0)\gamma_{mj}, \quad (5.11)$$

para  $m = 1, 2, j = 1, 2, j \neq m$  e

$$H(s) = s^2 + (d_1 + d_2)s + (d_1d_2 - \gamma_{12}\gamma_{21}), \quad (5.12)$$

para os quais  $A_{ik} = \frac{G(s_k)}{H'(s_k)}$ , onde  $H'(s_k)$  corresponde à primeira derivada de  $H(s)$  calculada na sua raiz  $s_k$ , então

$$A_{1k} = \frac{\psi_1(0)(s_k + d_2) + \psi_2(0)\gamma_{12}}{2s_k + (d_1 + d_2)}, \quad m = 1, j = 2; \quad (5.13)$$

$$A_{2k} = \frac{\psi_2(0)(s_k + d_1) + \psi_1(0)\gamma_{21}}{2s_k + (d_1 + d_2)}, \quad m = 2, j = 1; \quad (5.14)$$

e

$$s_k = \frac{-(d_1 + d_2) \pm \sqrt{(d_1 + d_2)^2 - 4(d_1d_2 - \gamma_{12}\gamma_{21})}}{2}, \quad k = 1, 2. \quad (5.15)$$

Nas expressões (5.13) e (5.14) é conhecido apenas o valor inicial  $\psi_m(0)$  para  $\mu_m > 0$  e, neste caso, aplicam-se as condições de contorno para determinar  $\psi_2(0)$  a partir da equação (5.10). Assim sendo, tem-se

$$\psi_2(a) = A_{21}e^{s_1a} + A_{22}e^{s_2a}, \quad (5.16)$$

considerando a condição de contorno do limite de fronteira direito onde  $\psi_2(a) = g_m$  para  $\mu_m < 0$ , onde  $a$  e  $g_m$  são conhecidos. A equação (5.16) permite-nos obter

$$\psi_2(0) = \frac{\psi_2(a) - [\psi_1(0)\gamma_{21}(p_1(a) - p_2(a))]}{p_1(a)(s_1 + d_1) + p_2(s_2 + d_1)}, \quad (5.17)$$

para  $p_1$  e  $p_2$  definidos como

$$p_1(a) = \frac{e^{s_1a}}{2s_1 + (d_1 + d_2)}, \quad (5.18)$$

e

$$p_2(a) = \frac{e^{s_2a}}{2s_2 + (d_1 + d_2)}. \quad (5.19)$$

Para resolver o problema de transporte de nêutrons em geometria Cartesiana unidimensional descrito pela equação (5.2), considerou-se a ausência do termo fonte, para o qual  $Q(x) = 0$ , uma placa homogênea de comprimento  $a = 100$  cm, os parâmetros de seção de choque estabelecidos inicialmente são  $\sigma_t = 1.0$  ( $\text{cm}^{-1}$ ),  $\sigma_{s0} = 0.99$  ( $\text{cm}^{-1}$ ) e  $\sigma_{s1} = 0.80$  ( $\text{cm}^{-1}$ ). As condições de contorno são delimitadas por  $\psi_m(0) = 1.0$  para  $\mu_m > 0$ ,  $\psi_m(a) = 0$  para  $\mu_m < 0$  e  $a = 100$ . Calcula-se, então, o fluxo escalar por meio da expressão

$$\Phi(x) = \int_{-1}^1 \psi(x, \mu) d\mu = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \omega_k \psi_k(x), \quad (5.20)$$

na qual  $w_k$  são os pesos da quadratura angular e  $\psi_k(x)$  são os fluxos angulares de partículas obtidos pela equação (5.10).

### 5.2.2 Solução por Série de Potências

O método da Expansão em Série de Potência possibilita a inversão numérica do fluxo angular transformado expresso por (5.9), ao utilizar equação (4.1), estabelecendo

$$\psi_m(x) = \sum_{n=0}^M \alpha_n e^{\frac{-nx}{k}}, \quad m = 1, 2, \quad (5.21)$$

onde o termo exponencial é uma função peso e os coeficientes de ponderação  $\alpha_n$  são determinados ao resolver o sistema

$$k \cdot H_{ij} \cdot \alpha_n = \bar{I}_\theta, \quad (5.22)$$

para o qual  $i, j = 1, 2, \dots, M + 1$ ;  $n = 0, 1, \dots, M$ ;  $\theta = 1, 2, \dots, M + 1$ ;  $k$  é o parâmetro experimental do função peso da série,  $H_{ij}$  é a matriz de Hilbert de ordem  $(M + 1) \times (M + 1)$  e o termo  $\bar{I}_\theta$  é o vetor com as componentes  $\bar{\psi}_m(s)$  do fluxo angular transformado no qual  $m = 1, 2$ . Posto isso, tem-se que  $H_{ij}$  e  $\bar{I}_\theta$  são expressos por

$$H_{ij} = \frac{1}{i + j - 1}, \quad \bar{I}_\theta = \begin{bmatrix} \bar{\psi}_m\left(\frac{1}{k}\right) \\ \bar{\psi}_m\left(\frac{2}{k}\right) \\ \vdots \\ \bar{\psi}_m\left(\frac{\theta}{k}\right) \end{bmatrix}, \quad (5.23)$$

onde,

$$\bar{\psi}_m\left(\frac{\theta}{k}\right) = k \left[ \frac{\psi_m(0)(\theta + kd_r) + k\psi_r(0)\gamma_{mr}}{\theta^2 + (d_1 + d_2)\theta k + (d_1d_2 - \gamma_{12}\gamma_{21})k^2} \right], \quad (5.24)$$

com  $m = 1, 2$ ,  $r = 1, 2$  e  $r \neq m$ .

Da mesma forma que ocorre no procedimento analítico, torna-se necessário aplicar as condições de contorno para determinar o valor do fluxo angular  $\psi_2(0)$ . Para isso, utiliza-se a Expansão em Série de Potências dada pela equação (5.21) e, portanto, tem-se

$$\psi_2(a) = \sum_{n=0}^M \alpha_n e^{\frac{-na}{k}}, \quad (5.25)$$

com os  $\alpha_n$ ,  $n = 0, 1, \dots, M$ , obtidos através da resolução do sistema (5.22) e representados por

$$\alpha_n = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{M+1} h_{ij} \overline{\psi_m} \left( \frac{j}{k} \right), \quad i = 1, 2, \dots, M + 1, \quad (5.26)$$

de maneira que os termos  $h_{ij}$  referem-se aos elementos da matriz de Hilbert inversa. Em seguida, substitui-se (5.26) em (5.25) e considerando o fluxo angular transformado dado por (5.23), pode-se obter  $\psi_2(0)$  através da relação

$$\psi_2(a) = \frac{1}{k} \sum_{n=0}^M \sum_{j=1}^{M+1} h_{ij} \overline{\psi_m} \left( \frac{j}{k} \right) \left( e^{\frac{-na}{k}} \right), \quad i = 1, 2, \dots, M + 1, \quad (5.27)$$

pela qual determina-se

$$\psi_2(0) = \frac{\psi_2(a) - k\psi_1(0)\gamma_{21}\beta_1}{\beta_2}, \quad (5.28)$$

para  $\beta_1$  e  $\beta_2$  definidos por

$$\beta_1 = \sum_{n=0}^M \sum_{j=1}^{M+1} \frac{(h_{ij}) e^{\frac{-na}{k}}}{j^2 + (d_1 + d_2)jk + (d_1d_2 - \gamma_{12}\gamma_{21})k^2}, \quad (5.29)$$

$$\beta_2 = \sum_{n=0}^M \sum_{j=1}^{M+1} \frac{(h_{ij}) (j + kd_1) e^{\frac{-na}{k}}}{j^2 + (d_1 + d_2)jk + (d_1d_2 - \gamma_{12}\gamma_{21})k^2}, \quad (5.30)$$

onde  $k$  é o parâmetro experimental do método de inversão por Séries de Potências.

### 5.2.3 Solução por Quadratura Gaussiana

O procedimento de inversão por Quadratura Gaussiana é aplicado à equação (5.9) para determinar o fluxo angular para o qual pode-se escrever

$$\psi_m(x) = \sum_{k=1}^M A_k \cdot \left(\frac{P_k}{x}\right) \cdot \overline{\psi}_m\left(\frac{P_k}{x}\right), \quad (5.31)$$

onde  $A_k$  e  $P_k$  são, respectivamente, os pesos e pontos da quadratura e o fluxo angular transformado, neste caso, é calculado em cada  $\frac{P_k}{x}$  de tal forma que

$$\overline{\psi}_m\left(\frac{P_k}{x}\right) = x \left[ \frac{\psi_m(0)(P_k + x d_j) + x \psi_j(0) \gamma_{mj}}{P_k^2 + (d_1 + d_2) x P_k + (d_1 d_2 - \gamma_{12} \gamma_{21}) x^2} \right], \quad (5.32)$$

com  $m = 1, 2, j = 1, 2$  e  $m \neq j$ .

Aqui, a condição de contorno do limite de fronteira direito é empregada para determinar  $\psi_2(0)$  através das expressões (5.31) e (5.32) que fornecem

$$\psi_2(a) = \sum_{k=1}^M A_k \cdot \left(\frac{P_k}{a}\right) \cdot a \left[ \frac{\psi_2(0) (P_k + a d_1) + a \psi_1(0) \gamma_{21}}{P_k^2 + (d_1 + d_2) a P_k + (d_1 d_2 - \gamma_{12} \gamma_{21}) a^2} \right]. \quad (5.33)$$

Por fim, efetuando as devidas simplificações e organizando os termos do somatório pode-se escrever

$$\psi_2(0) = \frac{\psi_2(a) - a \psi_1(0) \gamma_{21} h_{1k}(a)}{h_{2k}(a)}, \quad (5.34)$$

sendo que  $h_{1k}(a)$  e  $h_{2k}(a)$  foram definidos da seguinte forma

$$h_{1k}(a) = \sum_{k=1}^M \frac{A_k \cdot P_k}{P_k^2 + (d_1 + d_2) a P_k + (d_1 d_2 - \gamma_{12} \gamma_{21}) a^2}, \quad (5.35)$$

$$h_{2k}(a) = \sum_{k=1}^M \frac{(A_k \cdot P_k) \cdot (P_k + a d_1)}{P_k^2 + (d_1 + d_2) a P_k + (d_1 d_2 - \gamma_{12} \gamma_{21}) a^2}, \quad (5.36)$$

Aqui os termos  $A_k$  e  $P_k$  são os respectivos pesos e pontos da Quadratura Gaussiana com a qual o fluxo angular é calculado.

#### 5.2.4 Solução pelo Método de Talbot

Para inverter numericamente a expressão (5.9) que fornece o fluxo angular recorrendo ao método de Talbot, utiliza-se (4.20) para escrever

$$\psi_m(x) = \frac{r}{M} \left\{ \overline{\psi}_m(r) \frac{e^{rx}}{2} + \sum_{k=1}^{M-1} \operatorname{Re} \left[ e^{xs(\theta_k)} \overline{\psi}_m(s(\theta_k)) (1 + i\sigma(\theta_k)) \right] \right\}, \quad (5.37)$$

onde os termos

$$r = \frac{2M}{5x}; \quad \theta_k = \frac{k\pi}{M}; \quad s(\theta_k) = r\theta_k(\cot \theta_k + i) \text{ e } \sigma(\theta_k) = \theta_k + (\theta_k \cot \theta_k - 1) \cot \theta_k,$$

são parâmetros inerentes ao método e os fluxos angulares transformados calculados em  $r$  e  $s(\theta_k)$  são dados por

$$\overline{\psi}_m(r) = 5x \cdot \left[ \frac{\psi_m(0)(2M + 5xd_j) + 5x\psi_j(0)\gamma_{mj}}{4M^2 + (d_1 + d_2)10xM + (d_1d_2 - \gamma_{12}\gamma_{21})25x^2} \right], \quad (5.38)$$

$$\overline{\psi}_m(s(\theta_k)) = 5x \cdot \left[ \frac{\psi_m(0)(2Ms_k + 5xd_j) + 5x\psi_j(0)\gamma_{mj}}{4M^2s_k^2 + (d_1 + d_2)10xMs_k + (d_1d_2 - \gamma_{12}\gamma_{21})25x^2} \right], \quad (5.39)$$

sendo  $m = 1, 2, j = 1, 2, j \neq m$  e visando facilitar o cálculo de  $\overline{\psi}_m(s(\theta_k))$ , considerou-se  $s_k = \theta_k(\cot \theta_k + i)$ .

A condição de contorno do limite de fronteira direito é, então, aplicada à expressão (5.37) para obter o fluxo angular desconhecido  $\psi_2(0)$  e, sendo assim, tem-se

$$\psi_2(a) = \varphi(a)h(a) + 2 \sum_{k=1}^{M+1} \operatorname{Re} [\varphi_k(a)h_k(a)], \quad (5.40)$$

para a qual foram definidos

$$\varphi(a) = [\psi_2(0)(2M + 5ad_1) + 5a\psi_1(0)\gamma_{21}], \quad (5.41)$$

$$\varphi_k(a) = [\psi_2(0)(2Ms_k + 5ad_1) + 5a\psi_1(0)\gamma_{21}], \quad (5.42)$$

$$h(a) = \frac{e^{\frac{2M}{5}}}{4M^2 + (d_1 + d_2)10aM + (d_1d_2 - \gamma_{12}\gamma_{21})25a^2}, \quad (5.43)$$

e

$$h_k(a) = \frac{(1 + i\sigma(\theta_k)) e^{s_k \frac{2M}{5}}}{4M^2 s_k^2 + (d_1 + d_2)10aM s_k + (d_1d_2 - \gamma_{12}\gamma_{21})25a^2}. \quad (5.44)$$

O desenvolvimento do somatório presente na equação (5.40), onde foi utilizada a condição de contorno, fornece o fluxo angular  $\psi_2(0)$  dado por

$$\psi_2(0) = \frac{\psi_2(a) - (5a \psi_1(0)\gamma_{21}) \left[ h(a) + 2 \sum_{k=1}^{M-1} \text{Re}(h_k(a)) \right]}{(2M + 5a d_1)h(a) + 2 \sum_{k=1}^{M-1} \text{Re}[h_k(a) (2Ms_k + 5a d_1)]}, \quad (5.45)$$

onde  $M = 1, 2, 3, \dots$ , é um parâmetro intrínseco ao método de Talbot.

Em vista dos aspectos discutidos neste capítulo e considerando as diferentes alternativas propostas para solução do problema de ordenadas discretas, no Capítulo 6, serão apresentados os resultados numéricos para cada formulação utilizada no cálculo do fluxo angular de partículas neutras. Assim sendo, estabeleceram-se comparações com os resultados apresentados por Vilhena e Barrichello [54], para solução da equação de transporte de nêutrons unidimensional através do método  $LTS_N$ , com  $N = 2$ , e por Barros e Larsen [7], que resolveram o mesmo problema utilizando a técnica  $SGF S_2$  (*Spectral Green's Function*).



## 6 RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo, são apresentados os resultados fornecidos após a implementação dos algoritmos usados para a inversão numérica da Transformada de Laplace, tendo como premissa as formulações descritas no Capítulo 4. Inicialmente, realizaram-se testes para funções simples, expostas na Tabela 6.1, com o objetivo de avaliar o desempenho numérico das três técnicas investigadas. Em um segundo momento, fez-se um estudo utilizando os mesmos procedimentos para investigar o potencial de resolução desses recursos, quando aplicados a um problema de transporte de partículas neutras, comparando os resultados obtidos com a solução analítica.

### 6.1 Comparativos para funções elementares

Nesta seção são apresentados os resultados numéricos para inversão da transformada de funções elementares. O critério para escolha de tais funções tem como justificativa a intenção de verificar se as técnicas enfatizadas neste trabalho possuem desempenho equivalente a aquelas descritas no referencial teórico para inverter algumas das transformadas expostas na Tabela 6.1.

Tabela 6.1: Transformada de Laplace para funções elementares

	$f(t)$	$F(s)$		$f(t)$	$F(s)$
$F_1$	$t$	$\frac{1}{s^2}$	$F_6$	$\text{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$F_2$	$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$	$F_7$	$t \cos(at)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
$F_3$	$\frac{e^{-\frac{1}{4t}}}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{e^{-\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$	$F_8$	$e^{-2t}(e^t - 1)$	$\frac{1}{(s+1)(s+2)}$
$F_4$	$te^{-t}$	$\frac{1}{(s+1)^2}$	$F_9$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}e^{-0.5t}\text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$	$\frac{1}{(s^2+s+1)}$
$F_5$	$\frac{e^{-\frac{1}{4t}}}{2\sqrt{\pi t^3}}$	$e^{-\sqrt{s}}$			

### 6.1.1 Comparativo 1

Na Figura 6.1, apresenta-se um comparativo entre a solução exata e a inversão da Transformada de Laplace utilizando os métodos numéricos e na Tabela 6.2, mostra-se o erro absoluto para inversão numérica de  $F_1(s) = \frac{1}{s^2}$ , cuja transformada inversa é  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} = t$ .

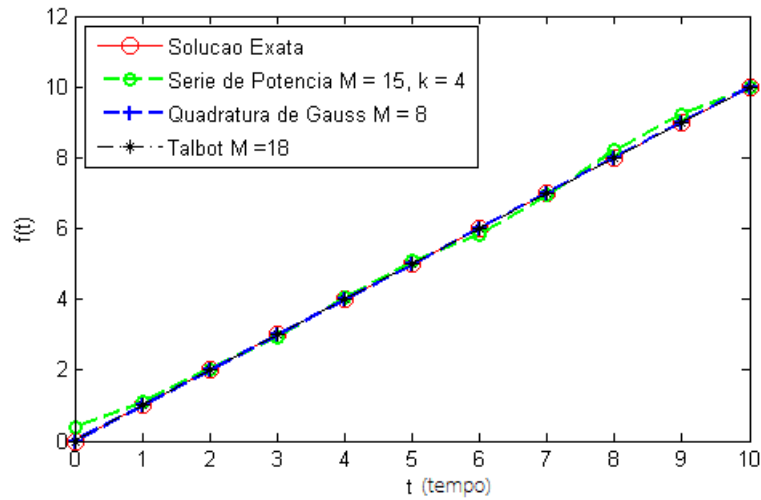


Figura 6.1: Comparativo dos métodos de inversão numérica para  $F_1(s)$ .

Tabela 6.2: Erro absoluto para inversão numérica de  $F_1(s)$ .

t	Série de Potências	Quadratura Gaussiana	Talbot
0	$3.7486831191 \times 10^{-1}$	0.0000000000000000	0.0000000000000000
1	$9.8791153279 \times 10^{-2}$	$1.7763568394 \times 10^{-14}$	$4.8849813083 \times 10^{-14}$
2	$2.0379445767 \times 10^{-2}$	$3.5527136788 \times 10^{-14}$	$9.7699626167 \times 10^{-14}$
3	$6.5560522285 \times 10^{-2}$	$7.1054273576 \times 10^{-14}$	$1.4743761767 \times 10^{-13}$
4	$3.1230791252 \times 10^{-2}$	$7.1054273576 \times 10^{-14}$	$1.9539925233 \times 10^{-13}$
5	$8.9702454385 \times 10^{-2}$	$1.5631940186 \times 10^{-13}$	$2.4868995751 \times 10^{-13}$
6	$1.6344454674 \times 10^{-1}$	$1.4210854715 \times 10^{-13}$	$2.9487523534 \times 10^{-13}$
7	$6.5636107962 \times 10^{-2}$	$1.1368683772 \times 10^{-13}$	$3.5882408155 \times 10^{-13}$
8	$2.0671493158 \times 10^{-1}$	$1.4210854715 \times 10^{-13}$	$3.0798504668 \times 10^{-13}$
9	$2.2867549391 \times 10^{-1}$	$1.4210854715 \times 10^{-13}$	$4.2632564145 \times 10^{-13}$
10	$3.0553213793 \times 10^{-2}$	$3.1263880373 \times 10^{-13}$	$4.9737991503 \times 10^{-13}$

Analisando a Figura 6.1 e considerando o erro absoluto exposto na Tabela 6.2, observa-se que o método de Expansão em Série de Potências não produz bons resultados para inversão de funções da mesma classe que  $F_1(s)$ .

Em virtude dos testes realizados para inverter funções da forma  $F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ , para a qual a sua transformada inversa correspondente é dada por  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = t^n$ , pôde-se notar um desempenho insatisfatório demonstrado pela técnica de inversão por Expansão em Série de Potências, tendo em vista que o aumento do número de iterações e os experimentos com diferentes valores para o parâmetro  $k$ , não possibilitaram uma precisão numérica aceitável. Em contrapartida, os testes realizados para inverter a função  $F_1(s)$  utilizando os métodos da Quadratura Gaussiana e Talbot, apresentaram excelentes resultados no que diz respeito à precisão.

A inversão da função  $F_1(s)$  também foi enfatizada por Junqueira [26] ao resolver o problema inverso da condução do calor para calcular o fluxo de difusividade térmica, a partir de medidas de temperatura, em um ponto interior de um sólido. Para isso, o autor utilizou três métodos de inversão distintos (Crump, Stehfest e Piessens), e os resultados numéricos estão expostos na Tabela 6.3.

Conforme mostra a Tabela 6.3, com uma quantidade menor de iterações, os métodos de inversão por Quadratura Gaussiana e Talbot, abordados neste trabalho, demonstraram melhor precisão numérica que os métodos de Crump e Stehfest, empregados por Junqueira, para inverter  $F_1(s)$ .

Tabela 6.3: Comparativo da inversão numérica de  $F_1(s)$  com os métodos empregados por Junqueira (1990).

$t$	Solução Exata $f(t)$	Crump Junqueira [26] $N = 21$	Stehfest Junqueira [26] $N = 18$	Piessens Junqueira [26] $N = 10$	Série de Potências $M = 12$ $k = 0.4$	Quadratura Gaussiana $M = 8$	Talbot $M = 10$
0.1	0.1000000	0.1000002	0.0999999	0.1000000	0.0999283	0.1000000	0.1000000
0.2	0.2000000	0.2000004	0.1999999	0.2000000	0.2094543	0.2000000	0.2000000
0.3	0.3000000	0.3000010	0.2999999	0.3000000	0.2892611	0.3000000	0.3000000
0.4	0.4000000	0.4000009	0.3999999	0.4000000	0.4101505	0.4000000	0.4000000
0.5	0.5000000	0.5000017	0.4999999	0.5000000	0.5011504	0.5000000	0.5000000
0.6	0.6000000	0.6000021	0.5999999	0.6000000	0.5829567	0.6000000	0.6000000
0.7	0.7000000	0.7000009	0.6999999	0.7000000	0.7010922	0.7000000	0.7000000
0.8	0.8000000	0.8000018	0.7999999	0.8000000	0.8236379	0.8000000	0.8000000
0.9	0.9000000	0.9000050	0.8999999	0.9000000	0.9177220	0.9000000	0.9000000
1.0	1.0000000	1.0000034	0.9999999	1.0000000	0.9891312	1.0000000	1.0000000

### 6.1.2 Comparativo 2

Na Figura 6.2, apresenta-se um comparativo entre a solução exata e a inversão da Transformada de Laplace utilizando os métodos numéricos e na Tabela 6.4, mostra-se o erro absoluto para inversão numérica de  $F_2(s) = \frac{1}{s+2}$ , cuja transformada inversa é  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\} = e^{-2t}$ .

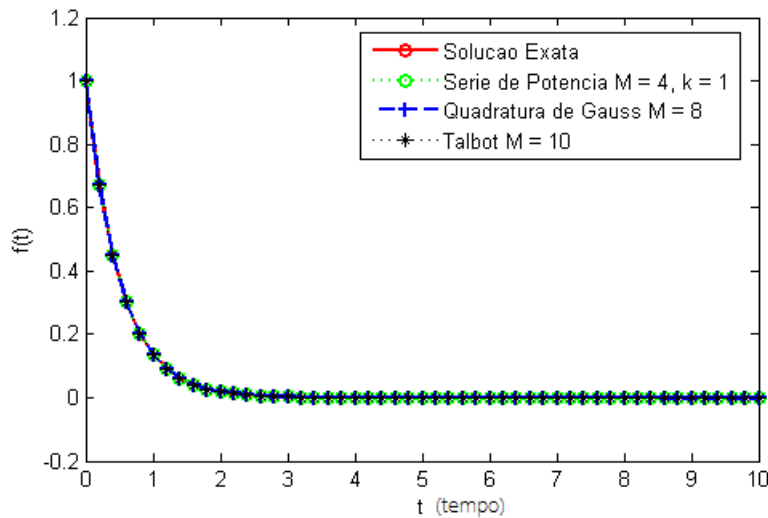


Figura 6.2: Comparativo dos métodos de inversão numérica de  $F_2(s)$  com  $a = 2$ .

Tabela 6.4: Erro absoluto para inversão numérica de  $F_2(s)$  com  $a = 2$ .

t	Série de Potências	Quadratura Gaussiana	Talbot
0	$2.2204460492 \times 10^{-16}$	0.0000000000000000	$1.5877327785 \times 10^{-07}$
1	$8.3266726846 \times 10^{-17}$	$4.8294701571 \times 10^{-14}$	$1.6287828963 \times 10^{-07}$
2	$1.3877787807 \times 10^{-17}$	$5.8583977946 \times 10^{-10}$	$1.6811437304 \times 10^{-07}$
3	$1.4268100589 \times 10^{-16}$	$6.2859280984 \times 10^{-08}$	$1.9766942891 \times 10^{-07}$
4	$2.2551405187 \times 10^{-16}$	$1.1532566764 \times 10^{-06}$	$1.2473691989 \times 10^{-07}$
5	$2.5959865767 \times 10^{-16}$	$8.4178011141 \times 10^{-06}$	$1.0891973833 \times 10^{-07}$
6	$2.7262348330 \times 10^{-16}$	$3.5434652890 \times 10^{-05}$	$1.3941531483 \times 10^{-07}$
7	$2.7748407599 \times 10^{-16}$	$1.0443807567 \times 10^{-04}$	$1.4399088632 \times 10^{-07}$
8	$2.7928178430 \times 10^{-16}$	$2.4120431355 \times 10^{-04}$	$1.3551922071 \times 10^{-07}$
9	$2.7994436921 \times 10^{-16}$	$4.6824529051 \times 10^{-04}$	$1.2681280711 \times 10^{-07}$
10	$2.8018828906 \times 10^{-16}$	$8.0004135497 \times 10^{-04}$	$1.1923020108 \times 10^{-07}$

Na Figura 6.3, apresenta-se um comparativo entre a solução exata e a inversão da Transformada de Laplace utilizando os métodos numéricos e na Tabela 6.5, mostra-se o erro absoluto para inversão numérica de  $F_2(s) = \frac{1}{s+0.5}$ , cuja transformada inversa é  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\} = e^{-0.5t}$ .

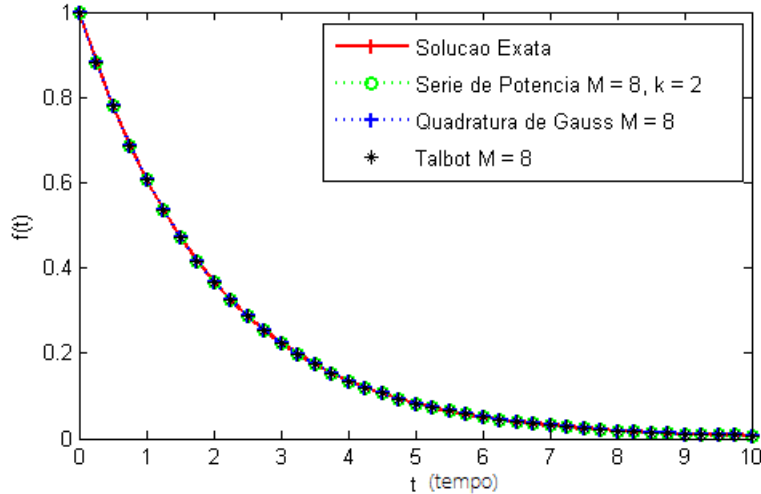


Figura 6.3: Comparativo dos métodos de inversão numérica de  $F_2(s)$  com  $a = 0.5$ .

Tabela 6.5: Erro absoluto para inversão numérica de  $F_2(s)$  com  $a = 0.5$ .

t	Série de Potências	Quadratura Gaussiana	Talbot
0	$1.6765477894 \times 10^{-12}$	0.0000000000000000	$1.4837612172 \times 10^{-06}$
1	$5.5522253461 \times 10^{-13}$	$1.1102230246 \times 10^{-15}$	$1.5328946502 \times 10^{-06}$
2	$5.1308957083 \times 10^{-13}$	$4.5741188614 \times 10^{-14}$	$1.5791230156 \times 10^{-06}$
3	$6.3779537207 \times 10^{-13}$	$8.0491169285 \times 10^{-16}$	$1.6270977531 \times 10^{-06}$
4	$6.9333427887 \times 10^{-14}$	$4.8294701571 \times 10^{-14}$	$1.6874289934 \times 10^{-06}$
5	$7.4913686365 \times 10^{-13}$	$1.4073880949 \times 10^{-12}$	$1.7250554700 \times 10^{-06}$
6	$7.4405065442 \times 10^{-13}$	$1.5292093979 \times 10^{-11}$	$1.6285115209 \times 10^{-06}$
7	$2.0997439897 \times 10^{-13}$	$1.1097203017 \times 10^{-10}$	$1.3269210856 \times 10^{-06}$
8	$4.2503500718 \times 10^{-13}$	$5.8583977946 \times 10^{-10}$	$9.2144966053 \times 10^{-07}$
9	$9.5683357070 \times 10^{-13}$	$2.4238762507 \times 10^{-09}$	$6.4557721328 \times 10^{-07}$
10	$1.3414833480 \times 10^{-12}$	$8.2849184093 \times 10^{-09}$	$6.9788107281 \times 10^{-07}$

Na Figura 6.4, apresenta-se um comparativo entre a solução exata e a inversão da Transformada de Laplace utilizando os métodos numéricos e na Tabela 6.6, mostra-se o erro absoluto para inversão numérica de  $F_2(s) = \frac{1}{s+50}$ , cuja transformada inversa é  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\} = e^{-50t}$ .

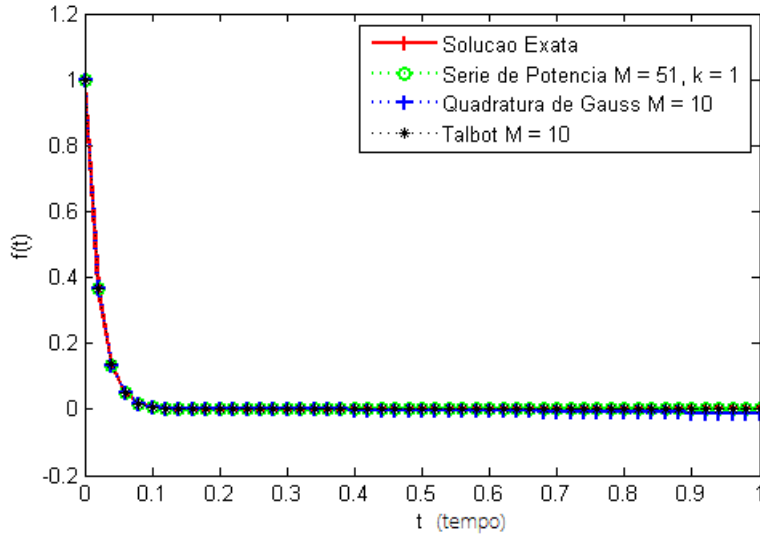


Figura 6.4: Comparativo dos métodos de inversão numérica de  $F_2(s)$  com  $a = 50$ .

Tabela 6.6: Erro absoluto para inversão numérica de  $F_2(s)$  com  $a = 50$ .

t	Série de Potências	Quadratura Gaussiana	Talbot
0	$6.6743277571 \times 10^{-11}$	$2.2737367544 \times 10^{-13}$	$1.5877327785 \times 10^{-07}$
1	$7.3936880923 \times 10^{-12}$	$4.3954753031 \times 10^{-12}$	$1.8838634595 \times 10^{-07}$
2	$1.5459896004 \times 10^{-12}$	$4.2287796591 \times 10^{-08}$	$1.0891973833 \times 10^{-07}$
3	$1.2932859991 \times 10^{-13}$	$3.2176717771 \times 10^{-06}$	$1.4016616692 \times 10^{-07}$
4	$8.0859496270 \times 10^{-12}$	$3.7030905116 \times 10^{-05}$	$1.1923020108 \times 10^{-07}$
5	$1.0548730338 \times 10^{-11}$	$1.7271381297 \times 10^{-04}$	$1.0234234681 \times 10^{-07}$
6	$7.7200603031 \times 10^{-12}$	$4.9002083810 \times 10^{-04}$	$8.7777829933 \times 10^{-08}$
7	$3.3980715689 \times 10^{-11}$	$1.0303717484 \times 10^{-03}$	$7.5632864768 \times 10^{-08}$
8	$3.1713986356 \times 10^{-12}$	$1.7866366200 \times 10^{-03}$	$6.5668545661 \times 10^{-08}$
9	$4.7642081602 \times 10^{-11}$	$2.7189891275 \times 10^{-03}$	$5.7520934210 \times 10^{-08}$
10	$1.6901089822 \times 10^{-11}$	$3.7745551875 \times 10^{-03}$	$5.0835672754 \times 10^{-08}$

Nos testes realizados para inversão da transformada de  $F_2(s)$ , com  $a = 2$ , conforme Figura 6.2 e Tabela 6.4, observou-se melhor desempenho da técnica de Expansão em Série de Potências. O aumento do número de pesos e pontos da

Quadratura Gaussiana não se mostrou suficiente para que se tenha um ganho de precisão significativo. O método de Talbot pode proporcionar melhores resultados ao elevar a quantidade de termos do somatório, mas mesmo assim não possibilitou precisão equivalente à Expansão em Série de Potências.

Para inverter  $F_2(s)$ , com  $a = 0.5$ , as três técnicas tiveram desempenho satisfatório, porém, a inversão por Expansão em Série de Potências apresentou maior estabilidade, quanto à precisão, em todos os pontos do intervalo em que a função foi avaliada, como pode ser observado na Figura 6.3 e Tabela 6.5.

As simulações para inversão de funções exponenciais para elevados valores do coeficiente  $a$ , revelam certa dificuldade dos métodos para estabelecer razoáveis aproximações em todos os pontos do intervalo no qual se deseja computar a transformada inversa. Para o caso em que  $a = 50$ , o aumento da quantidade de iterações, em ambos os métodos, não possibilitou melhores resultados.

Com base na Figura 6.4 e Tabela 6.6, pode-se notar que a técnica de Quadratura não proporcionou uma aproximação regular para inverter  $F_2(s)$ , com  $a = 50$ , em todo o intervalo de integração. Neste caso, a inversão por Talbot apresentou resultados com precisão razoável, mas não houve forte correspondência, em termos de ganho de dígitos, ao ser comparado com a técnica de Expansão em Série de Potências. Apesar disso, o método de Talbot propiciou um erro absoluto aceitável, com uma menor quantidade de iterações.

Uma limitação da inversão por Expansão em Série de Potências, refere-se à resolução do sistema que fornece as constantes de ponderação  $\alpha_i$ . A alternativa encontrada foi utilizar um pacote do OCTAVE que permite resolver o sistema por decomposição da matriz associada, em valores singulares (SVD). Posto isso, para um sistema  $Ax = B$ , utilizou-se o recurso  $x = A \setminus B$ , com a finalidade de obter os termos  $\alpha_i$ .



### 6.1.3 Comparativo 3

Na Figura 6.5, apresenta-se um comparativo entre a solução exata e a inversão da Transformada de Laplace utilizando os métodos numéricos e na Tabela 6.7, mostra-se o erro absoluto para inversão numérica de  $F_3(s) = \frac{e^{-\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$ , cuja transformada inversa é  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_3(s)\} = \frac{e^{-\frac{1}{4t}}}{\sqrt{\pi t}}$ .

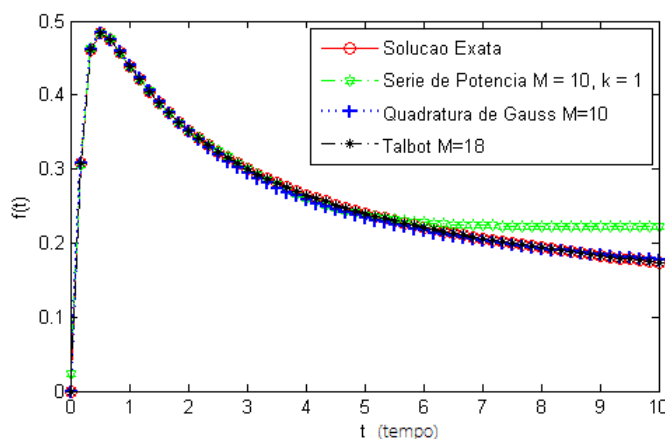


Figura 6.5: Comparativo dos métodos de inversão numérica de  $F_3(s)$ .

Tabela 6.7: Erro absoluto para inversão numérica de  $F_3(s)$ .

t	Série de Potências	Quadratura Gaussiana	Talbot
$0^+$	$2.2944841096 \times 10^{-02}$	0.0000000000000000	0.0000000000000000
1	$3.9981395309 \times 10^{-04}$	$1.7578238039 \times 10^{-03}$	$2.3092638912 \times 10^{-14}$
2	$7.6233433805 \times 10^{-04}$	$1.0909409327 \times 10^{-03}$	$4.0545344859 \times 10^{-13}$
3	$1.1100368167 \times 10^{-03}$	$5.3801387869 \times 10^{-03}$	$6.2783112042 \times 10^{-13}$
4	$4.2497810472 \times 10^{-03}$	$6.7586398348 \times 10^{-03}$	$6.7490457666 \times 10^{-13}$
5	$2.1713105885 \times 10^{-03}$	$6.1456433420 \times 10^{-03}$	$6.2763683139 \times 10^{-13}$
6	$6.8761824135 \times 10^{-03}$	$4.5558646207 \times 10^{-03}$	$5.2491344604 \times 10^{-13}$
7	$1.8106273160 \times 10^{-02}$	$2.5893729211 \times 10^{-03}$	$4.4436676560 \times 10^{-13}$
8	$2.9050816022 \times 10^{-02}$	$5.5969483894 \times 10^{-04}$	$3.4772185131 \times 10^{-13}$
9	$3.8923158896 \times 10^{-02}$	$1.3798632582 \times 10^{-03}$	$2.6245672302 \times 10^{-13}$
10	$4.7623653187 \times 10^{-02}$	$3.1610718207 \times 10^{-03}$	$1.8143819779 \times 10^{-13}$

Através da Figura 6.5 e Tabela 6.7, observa-se que para inverter  $F_3(s)$  o método de Talbot demonstrou melhor desempenho, tendo em vista a ótima precisão dos resultados obtidos.

### 6.1.4 Comparativo 4

Na Figura 6.6, apresenta-se um comparativo entre a solução exata e a inversão da Transformada de Laplace utilizando os métodos numéricos e na Tabela 6.8, mostra-se o erro absoluto para inversão numérica de  $F_4(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$ , cuja transformada inversa é  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_4(s)\} = te^{-t}$ .

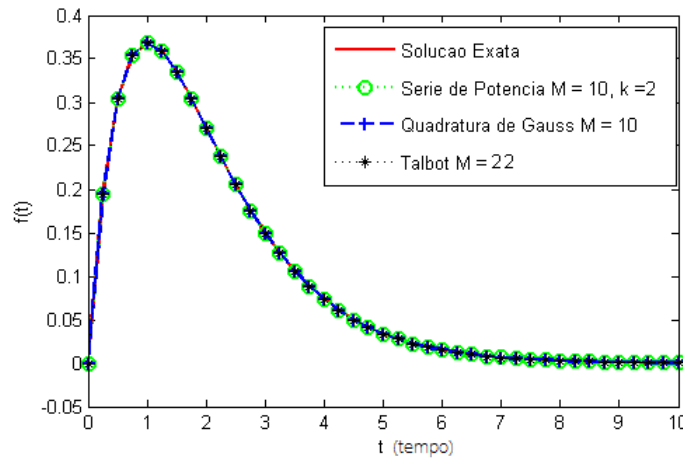


Figura 6.6: Comparativo dos métodos de inversão numérica de  $F_4(s)$ .

Tabela 6.8: Erro absoluto para inversão numérica de  $F_4(s)$ .

t	Série de Potências	Quadratura Gaussiana	Talbot
0	$8.4112071240 \times 10^{-05}$	0.0000000000000000	0.0000000000000000
1	$2.4310116955 \times 10^{-05}$	$1.4610535004 \times 10^{-13}$	$1.8207657603 \times 10^{-14}$
2	$1.9924227962 \times 10^{-05}$	$3.5815794774 \times 10^{-13}$	$2.4202861936 \times 10^{-14}$
3	$3.1396930054 \times 10^{-05}$	$9.5840002600 \times 10^{-14}$	$3.5443870061 \times 10^{-14}$
4	$5.6837093098 \times 10^{-06}$	$2.0713986081 \times 10^{-12}$	$3.9246383920 \times 10^{-14}$
5	$6.8073629721 \times 10^{-05}$	$4.7677126135 \times 10^{-11}$	$5.6551985316 \times 10^{-14}$
6	$2.1462150159 \times 10^{-05}$	$6.8607197527 \times 10^{-10}$	$2.8753041614 \times 10^{-14}$
7	$1.1415120750 \times 10^{-04}$	$5.8436836784 \times 10^{-09}$	$3.1005580047 \times 10^{-14}$
8	$1.1210273751 \times 10^{-04}$	$3.3794687084 \times 10^{-08}$	$3.1122240201 \times 10^{-14}$
9	$3.2673549437 \times 10^{-05}$	$1.4608674631 \times 10^{-07}$	$1.9601291076 \times 10^{-14}$
10	$7.4698869155 \times 10^{-05}$	$5.0418103964 \times 10^{-07}$	$4.4023812373 \times 10^{-14}$

Entre as três técnicas avaliadas, a inversão de  $F_4(s)$  por Quadratura Gaussiana e Talbot mostrou um desempenho superior à Expansão em Série de Potências.

### 6.1.5 Comparativo 5

Na Figura 6.7, apresenta-se um comparativo entre a solução exata e a inversão da Transformada de Laplace utilizando os métodos numéricos e na Tabela 6.9, mostra-se o erro absoluto para inversão numérica de  $F_5(s) = e^{-\sqrt{s}}$ , cuja transformada inversa é  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_5(s)\} = \frac{e^{-\frac{1}{4t}}}{2\sqrt{\pi t^3}}$ .

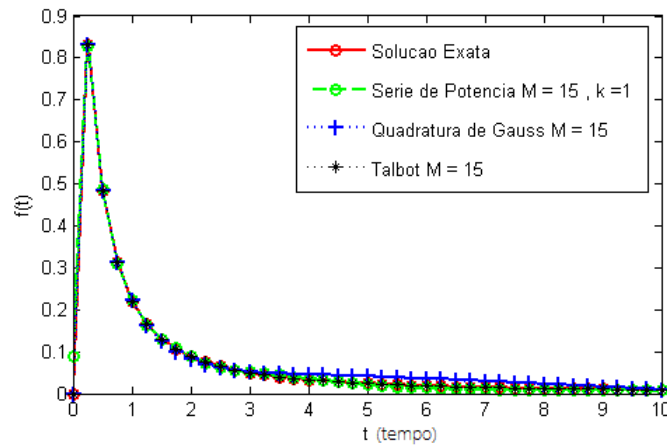


Figura 6.7: Comparativo dos métodos de inversão numérica de  $F_5(s)$ .

Tabela 6.9: Erro absoluto para inversão numérica de  $F_5(s)$ .

t	Série de Potências	Quadratura Gaussiana	Talbot
$0^+$	$8.8805440753 \times 10^{-02}$	0.0000000000000000	0.0000000000000000
1	$2.5472363872 \times 10^{-03}$	$1.4478482540 \times 10^{-03}$	$4.3351155998 \times 10^{-12}$
2	$9.3170600647 \times 10^{-04}$	$6.7581157447 \times 10^{-03}$	$1.3697280809 \times 10^{-10}$
3	$8.4354882594 \times 10^{-04}$	$2.4805941808 \times 10^{-03}$	$1.5500997013 \times 10^{-10}$
4	$2.2408998526 \times 10^{-03}$	$1.2269563486 \times 10^{-02}$	$1.3622408756 \times 10^{-10}$
5	$2.8956953825 \times 10^{-03}$	$1.6691309225 \times 10^{-02}$	$1.1084165876 \times 10^{-10}$
6	$4.9653710184 \times 10^{-03}$	$1.6663817938 \times 10^{-02}$	$8.7089151862 \times 10^{-11}$
7	$4.4856911601 \times 10^{-03}$	$1.3979042667 \times 10^{-02}$	$6.6791319003 \times 10^{-11}$
8	$3.1227803526 \times 10^{-03}$	$9.9872862624 \times 10^{-03}$	$4.9948094271 \times 10^{-11}$
9	$1.6699166426 \times 10^{-03}$	$5.5308114594 \times 10^{-03}$	$3.6091312230 \times 10^{-11}$
10	$3.8218803674 \times 10^{-04}$	$1.0909905628 \times 10^{-03}$	$2.4700096135 \times 10^{-11}$

Em vista dos testes realizados para inverter a transformada de  $F_5(s)$ , constatou-se que o método de Talbot proporcionou melhores resultados, comparado às outras técnicas.

### 6.1.6 Comparativo 6

Na Figura 6.8, apresenta-se um comparativo entre a solução exata e a inversão da Transformada de Laplace utilizando os métodos numéricos e na Tabela 6.10, mostra-se o erro absoluto para inversão numérica de  $F_6(s) = \frac{1}{s^2+1}$ , cuja transformada inversa é  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_6(s)\} = \text{sen}(t)$ .

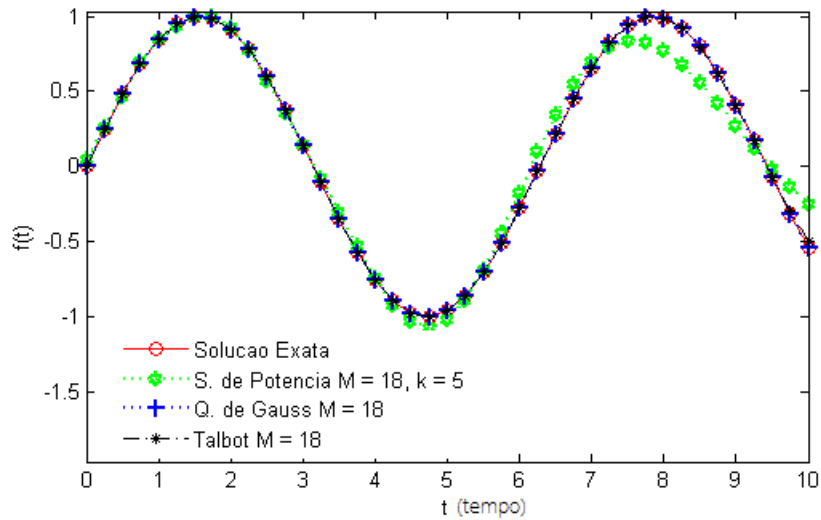


Figura 6.8: Comparativo dos métodos de inversão numérica para  $F_6(s)$  com  $a = 1$ .

Tabela 6.10: Erro absoluto para inversão numérica de  $F_6(s)$  com  $a = 1$ .

t	Série de Potências	Quadratura Gaussiana	Talbot
0	$4.7131729312 \times 10^{-02}$	0.0000000000000000	0.0000000000000000
1	$2.5147688498 \times 10^{-03}$	$6.3264082861 \times 10^{-10}$	$4.9515946898 \times 10^{-14}$
2	$1.5287051288 \times 10^{-02}$	$2.1994914778 \times 10^{-09}$	$1.0014211682 \times 10^{-13}$
3	$1.6038197712 \times 10^{-03}$	$4.3240408198 \times 10^{-09}$	$1.4818701821 \times 10^{-13}$
4	$1.0709515424 \times 10^{-02}$	$6.7238568046 \times 10^{-09}$	$3.0271340989 \times 10^{-12}$
5	$6.4229498052 \times 10^{-02}$	$1.2810039584 \times 10^{-08}$	$7.7077755289 \times 10^{-10}$
6	$1.0570612960 \times 10^{-01}$	$8.0931776835 \times 10^{-09}$	$6.6723050196 \times 10^{-08}$
7	$4.2880150245 \times 10^{-02}$	$3.0871603051 \times 10^{-08}$	$1.8932539260 \times 10^{-06}$
8	$2.2080115440 \times 10^{-01}$	$2.4848774260 \times 10^{-08}$	$1.2667763308 \times 10^{-05}$
9	$1.4308495754 \times 10^{-01}$	$1.7650797212 \times 10^{-08}$	$1.7861889753 \times 10^{-03}$
10	$2.9551860756 \times 10^{-01}$	$2.4122053909 \times 10^{-08}$	$4.0894542489 \times 10^{-02}$

Na Figura 6.9, apresenta-se um comparativo entre a solução exata e a inversão da Transformada de Laplace utilizando os métodos numéricos e na Tabela 6.11, mostra-se o erro absoluto para inversão numérica de  $F_6(s) = \frac{0.5}{s^2+0.25}$ , cuja transformada inversa é  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_6(s)\} = \text{sen}(\frac{t}{2})$ .

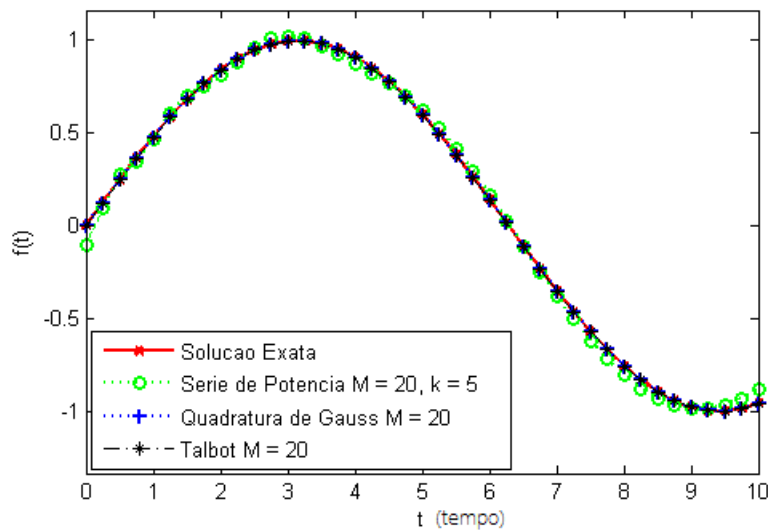


Figura 6.9: Comparativo dos métodos de inversão numérica de  $F_6(s)$  com  $a = 0.5$ .

Tabela 6.11: Erro absoluto para inversão numérica de  $F_6(s)$  com  $a = 0.5$ .

t	Série de Potências	Quadratura Gaussiana	Talbot
0	$1.0135613474 \times 10^{-01}$	0.000000000000000000	0.000000000000000000
1	$1.5793128081 \times 10^{-02}$	$5.3150026602 \times 10^{-09}$	$8.8817841970 \times 10^{-15}$
2	$2.8412304811 \times 10^{-02}$	$1.2972664942 \times 10^{-08}$	$1.9317880628 \times 10^{-14}$
3	$2.6507557855 \times 10^{-02}$	$2.3891131406 \times 10^{-08}$	$2.6090241078 \times 10^{-14}$
4	$3.1036958559 \times 10^{-02}$	$5.9247817763 \times 10^{-09}$	$2.5535129566 \times 10^{-14}$
5	$2.0777544850 \times 10^{-02}$	$2.6427793287 \times 10^{-08}$	$3.7303493627 \times 10^{-14}$
6	$2.4700498592 \times 10^{-02}$	$5.3218475987 \times 10^{-08}$	$4.8711035205 \times 10^{-14}$
7	$2.9372473702 \times 10^{-02}$	$9.5672961053 \times 10^{-08}$	$4.8017145815 \times 10^{-14}$
8	$5.0719688616 \times 10^{-02}$	$4.0717130778 \times 10^{-08}$	$6.5947247662 \times 10^{-14}$
9	$4.6036397612 \times 10^{-03}$	$4.1381866822 \times 10^{-09}$	$2.2382096176 \times 10^{-13}$
10	$7.4461476398 \times 10^{-02}$	$8.5453200404 \times 10^{-08}$	$2.7015056858 \times 10^{-12}$

Na Figura 6.10, apresenta-se um comparativo entre a solução exata e a inversão da Transformada de Laplace utilizando os métodos numéricos e na Tabela 6.12, mostra-se o erro absoluto para inversão numérica de  $F_6(s) = \frac{2}{s^2+4}$ , cuja transformada inversa é  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_6(s)\} = \text{sen}(2t)$ .

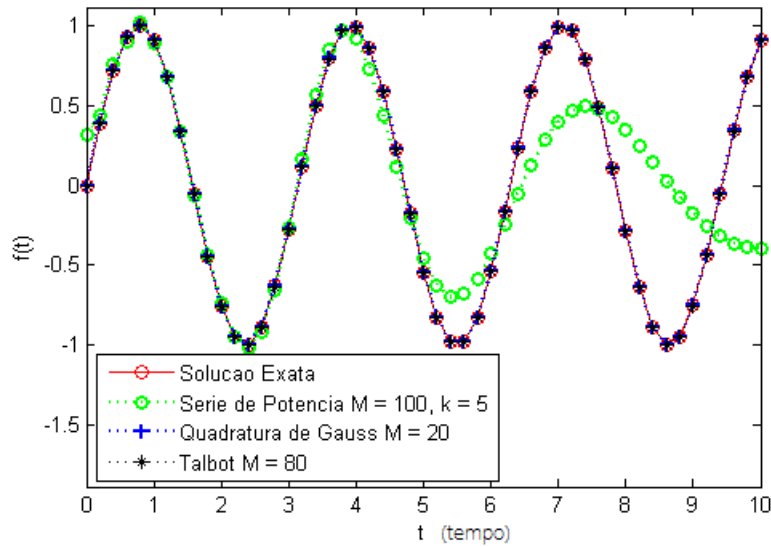


Figura 6.10: Comparativo dos métodos de inversão numérica para  $F_6(s)$  com  $a = 2$ .

Tabela 6.12: Erro absoluto para inversão numérica de  $F_6(s)$  com  $a = 2$ .

t	Série de Potências	Quadratura Gaussiana	Talbot
0	$3.1900883093 \times 10^{-01}$	0.0000000000000000	0.0000000000000000
1	$1.6629842325 \times 10^{-02}$	$5.9247817763 \times 10^{-09}$	$2.4362433544 \times 10^{-04}$
2	$1.7998462500 \times 10^{-02}$	$4.0717130778 \times 10^{-08}$	$5.0646465300 \times 10^{-04}$
3	$1.2795395889 \times 10^{-02}$	$1.3661569298 \times 10^{-07}$	$7.5112777763 \times 10^{-04}$
4	$7.0044599521 \times 10^{-02}$	$1.4604225939 \times 10^{-08}$	$8.6337357650 \times 10^{-04}$
5	$8.7007469154 \times 10^{-02}$	$8.5589343834 \times 10^{-07}$	$1.0838695793 \times 10^{-03}$
6	$1.0680649658 \times 10^{-01}$	$2.2322199255 \times 10^{-07}$	$1.3604316089 \times 10^{-03}$
7	$5.9226205404 \times 10^{-01}$	$3.5299768030 \times 10^{-07}$	$1.3495431948 \times 10^{-03}$
8	$6.3633019463 \times 10^{-01}$	$7.6706372498 \times 10^{-07}$	$1.4948766943 \times 10^{-03}$
9	$5.7900117588 \times 10^{-01}$	$3.8890639714 \times 10^{-06}$	$1.5762297908 \times 10^{-03}$
10	$1.3045352644 \times 10^0$	$1.7632983233 \times 10^{-05}$	$1.8124382276 \times 10^{-03}$

Como se pode observar através da Figura 6.8 e Tabela 6.10, a inversão de  $F_6(s)$ , com  $a = 1$ , por Expansão em Série de Potências não proporcionou bons resultados, de forma que, os ajustes no parâmetro  $k$  não foram suficientes para minimizar o erro na aproximação da solução exata. Em termos de precisão numérica, o método de Quadratura Gaussiana demonstrou maior regularidade para aproximação de  $f(t) = \mathcal{L}^{-1} \{F_6(s)\}$ , em todo o intervalo em que a função foi analisada.

Os testes realizados para inverter a transformada  $F_6(s)$ , com  $a = 0.5$ , demonstraram que os métodos da Quadratura Gaussiana e Talbot podem proporcionar maior precisão ao elevar o número de iterações. Contudo, a inversão por Talbot apresentou melhores resultados, considerando que neste caso, utilizou-se a mesma quantidade de iterações para as três técnicas investigadas, como mostrado na Figura 6.9 e Tabela 6.11.

Para o caso em que se avaliou a inversão da função  $F_6(s)$ , com  $a = 2$ , analisando a Figura 6.10 e Tabela 6.12, fica evidente que a técnica de Expansão em Série de Potências não é uma alternativa viável para o tratamento de funções dessa classe. O fato de não se conhecer um parâmetro  $k$  ótimo, dificulta o processo de determinação da transformada inversa e, mesmo efetuando o ajuste de forma empírica, não foi possível obter razoáveis aproximações. Os métodos de Quadratura Gaussiana e Talbot forneceram bons resultados, sendo que, observou-se regularidade em todos os pontos do intervalo em que a função foi avaliada. Apesar disso, a Quadratura Gaussiana apresentou resultados com menor erro, com um número reduzido de iterações.

### 6.1.7 Comparativo 7

Na Figura 6.11, apresenta-se um comparativo entre a solução exata e a inversão da Transformada de Laplace utilizando os métodos numéricos e na Tabela 6.13, mostra-se o erro absoluto para inversão numérica de  $F_7(s) = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$ , cuja transformada inversa é  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_7(s)\} = t\cos(t)$ .

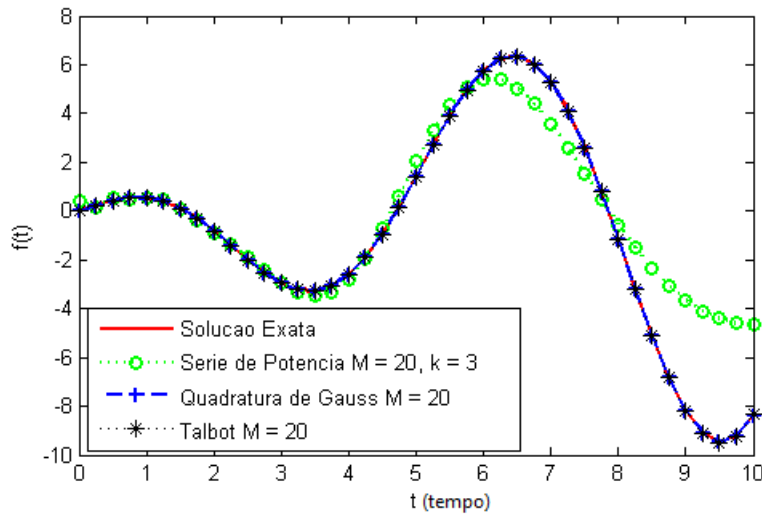


Figura 6.11: Comparativo dos métodos de inversão numérica para  $F_7(s)$  com  $a = 1$ .

Tabela 6.13: Erro absoluto para inversão numérica de  $F_7(s)$  com  $a = 1$ .

t	Série de Potências	Quadratura Gaussiana	Talbot
0	$3.9435768499 \times 10^{-01}$	0.0000000000000000	0.0000000000000000
1	$1.1450365029 \times 10^{-02}$	$7.8363924238 \times 10^{-09}$	$1.1990408665 \times 10^{-14}$
2	$5.9885587854 \times 10^{-02}$	$6.8434354849 \times 10^{-09}$	$4.0301095793 \times 10^{-14}$
3	$4.9803820089 \times 10^{-02}$	$5.2956651508 \times 10^{-08}$	$2.9309887850 \times 10^{-14}$
4	$2.1051029458 \times 10^{-01}$	$1.5973824485 \times 10^{-08}$	$2.0872192862 \times 10^{-14}$
5	$6.1919588477 \times 10^{-01}$	$1.1371034580 \times 10^{-07}$	$3.2389868565 \times 10^{-11}$
6	$3.6030841524 \times 10^{-01}$	$2.8282961750 \times 10^{-08}$	$1.1866995386 \times 10^{-08}$
7	$1.7108475386 \times 10^0$	$5.9721951828 \times 10^{-08}$	$1.4951621896 \times 10^{-06}$
8	$6.0700224112 \times 10^{-01}$	$2.7520376200 \times 10^{-08}$	$8.4819956972 \times 10^{-05}$
9	$4.5431510386 \times 10^0$	$1.1145962020 \times 10^{-07}$	$2.4289229531 \times 10^{-03}$
10	$3.7373656612 \times 10^0$	$3.3245439645 \times 10^{-07}$	$3.3318837847 \times 10^{-02}$



Na Figura 6.12, apresenta-se um comparativo entre a solução exata e a inversão da Transformada de Laplace utilizando os métodos numéricos e na Tabela 6.14, mostra-se o erro absoluto para inversão numérica de  $F_7(s) = \frac{s^2-0.25}{(s^2+0.25)^2}$ , cuja transformada inversa é  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_7(s)\} = t\cos(\frac{t}{2})$ .

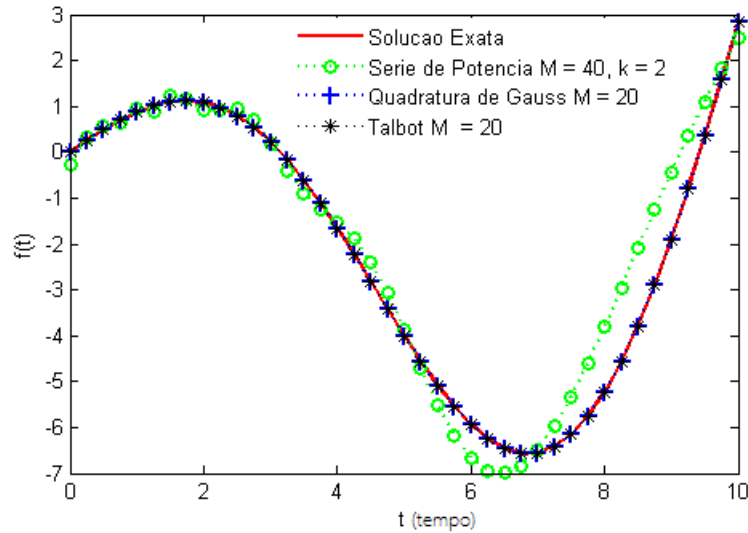


Figura 6.12: Comparativo dos métodos de inversão numérica de  $F_7(s)$  com  $a = 0.5$ .

Tabela 6.14: Erro absoluto para inversão numérica de  $F_7(s)$  com  $a = 0.5$ .

t	Série de Potências	Quadratura Gaussiana	Talbot
0	$2.6212574634 \times 10^{-01}$	0.0000000000000000	0.0000000000000000
1	$6.8660002256 \times 10^{-02}$	$3.7303493627 \times 10^{-14}$	$1.6294521287 \times 10^{-11}$
2	$1.7677937121 \times 10^{-01}$	$6.1284310959 \times 10^{-14}$	$3.1294966618 \times 10^{-11}$
3	$2.8326089099 \times 10^{-02}$	$1.5970558209 \times 10^{-13}$	$5.6321003416 \times 10^{-11}$
4	$1.3302593449 \times 10^{-01}$	$1.1232570429 \times 10^{-11}$	$5.5364379747 \times 10^{-11}$
5	$1.2527842065 \times 10^{-01}$	$1.5649881390 \times 10^{-10}$	$7.4765083013 \times 10^{-11}$
6	$7.2818108518 \times 10^{-01}$	$2.1839721142 \times 10^{-09}$	$1.0632739133 \times 10^{-10}$
7	$7.0176682653 \times 10^{-02}$	$7.2327330791 \times 10^{-08}$	$8.2065021445 \times 10^{-11}$
8	$1.4361840543 \times 10^0$	$7.7950265353 \times 10^{-07}$	$1.1533440869 \times 10^{-10}$
9	$1.4630149516 \times 10^0$	$4.5407326092 \times 10^{-06}$	$8.3384188442 \times 10^{-11}$
10	$3.5706919226 \times 10^{-01}$	$1.4309023832 \times 10^{-05}$	$1.0522382964 \times 10^{-10}$

Na Figura 6.13, apresenta-se um comparativo entre a solução exata e a inversão da Transformada de Laplace utilizando os métodos numéricos e na Tabela 6.15, mostra-se o erro absoluto para inversão numérica de  $F_7(s) = \frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}$ , cuja transformada inversa é  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_7(s)\} = t\cos(2t)$ .

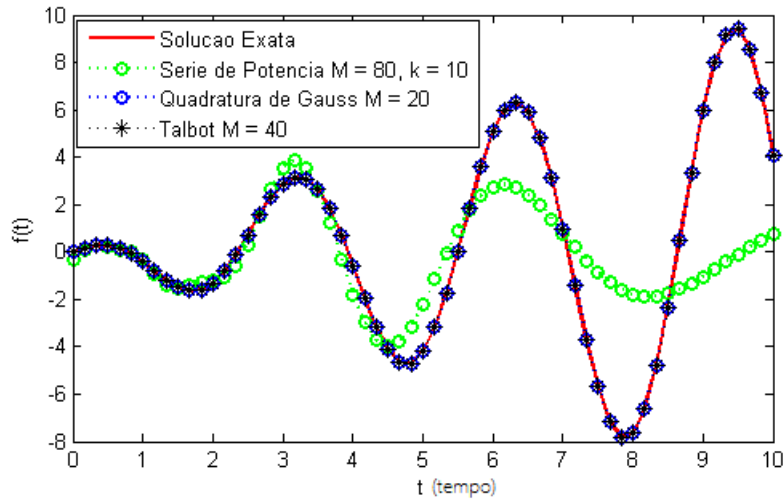


Figura 6.13: Comparativo dos métodos de inversão numérica de  $F_7(s)$  com  $a = 2$ .

Tabela 6.15: Erro absoluto para inversão numérica de  $F_7(s)$  com  $a = 2$ .

t	Série de Potências	Quadratura Gaussiana	Talbot
0	$3.4772053360 \times 10^{-01}$	0.000000000000000000	0.000000000000000000
1	$8.9357324306 \times 10^{-02}$	$3.4217177424 \times 10^{-09}$	$1.3841094936 \times 10^{-11}$
2	$8.3507795200 \times 10^{-02}$	$7.9869122426 \times 10^{-09}$	$2.8833602172 \times 10^{-11}$
3	$6.8755073826 \times 10^{-01}$	$1.4141480875 \times 10^{-08}$	$1.7532642004 \times 10^{-11}$
4	$1.2061447554 \times 10^0$	$1.3760188100 \times 10^{-08}$	$5.9237059701 \times 10^{-12}$
5	$1.9698671219 \times 10^0$	$1.6622719822 \times 10^{-07}$	$4.7863935037 \times 10^{-12}$
6	$2.3285227766 \times 10^0$	$4.9392022916 \times 10^{-08}$	$1.4457768315 \times 10^{-11}$
7	$1.6169256884 \times 10^{-01}$	$6.6553257116 \times 10^{-07}$	$3.0194624578 \times 10^{-11}$
8	$5.8811356109 \times 10^0$	$7.7249607208 \times 10^{-06}$	$1.0709388931 \times 10^{-10}$
9	$6.9777269152 \times 10^0$	$8.5314261450 \times 10^{-06}$	$1.8173136773 \times 10^{-07}$
10	$3.3477758468 \times 10^0$	$3.5409821949 \times 10^{-04}$	$4.3322837620 \times 10^{-05}$

Considerando as simulações realizadas para o cálculo da transformada inversa de  $F_7(s)$ , com  $a = 1$ , através da Figura 6.11 e Tabela 6.13, pode-se verificar que as técnicas de Quadratura Gaussiana e Talbot demonstraram bom desempenho no que diz respeito à precisão numérica. A inversão por Expansão em Série de Potências não apresentou resultados satisfatórios, mesmo nos testes em que se avaliou a influência exercida pelo parâmetro  $k$ .

Para o cômputo da transformada inversa de  $F_7(s)$ , com  $a = 0.5$ , a inversão por Talbot demonstrou maior regularidade nos pontos do intervalo em que a função foi avaliada. Isso significa que o método tem maior estabilidade para inverter funções dessa classe, uma vez que, a precisão se mantém praticamente a mesma para todo o intervalo analisado. Nos testes realizados utilizando a Quadratura Gaussiana, verificou-se um bom desempenho, mas notou-se certa instabilidade do método por não proporcionar a mesma regularidade de precisão observada nos resultados obtidos por Talbot, conforme exposto na Figura 6.12 e Tabela 6.14.

No que concerne a avaliação feita para o caso  $a = 2$ , analisando a Figura 6.13 e Tabela 6.15, observa-se que os métodos de inversão por Quadratura Gaussiana e Talbot também forneceram resultados satisfatórios e com boa precisão. No entanto, notou-se que a técnica de Talbot exige maior número de iterações para que se tenha um ganho significativo de dígitos.

O objetivo de avaliar a mesma função mudando os coeficientes do argumento é verificar se as técnicas enfatizadas, mantêm a sua eficiência para inverter formulações com características comuns e pertencentes à mesma classe. Dessa forma, constatou-se que os métodos de Quadratura Gaussiana e Talbot mostraram certa regularidade para o cálculo da transformada inversa de funções do tipo  $F_7(s)$ , como se pode verificar através das Figuras 6.11, 6.12 e 6.13. Em contrapartida, a técnica de Expansão em Série de Potências não se mostrou útil para inverter a transformada de funções que envolvem termos trigonométricos.

### 6.1.8 Comparativo 8

Na Figura 6.14, apresenta-se um comparativo entre a solução exata e a inversão da Transformada de Laplace utilizando os métodos numéricos e na Tabela 6.16, mostra-se o erro absoluto para inversão numérica de  $F_8(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$ , cuja transformada inversa é  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_8(s)\} = e^{-2t}(e^t - 1)$ .

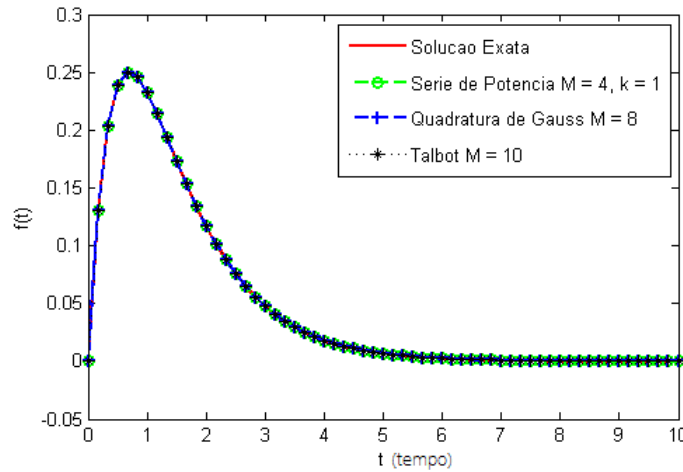


Figura 6.14: Comparativo dos métodos de inversão numérica de  $F_8(s)$ .

Tabela 6.16: Erro absoluto para inversão numérica de  $F_8(s)$ .

t	Série de Potências	Quadratura Gaussiana	Talbot
0	$1.3322676295 \times 10^{-15}$	0.0000000000000000	0.0000000000000000
1	$3.0531133177 \times 10^{-16}$	$2.4980018054 \times 10^{-15}$	$1.7814918984 \times 10^{-09}$
2	$3.1918911957 \times 10^{-16}$	$5.8579149864 \times 10^{-10}$	$5.2360834279 \times 10^{-09}$
3	$5.5511151231 \times 10^{-17}$	$6.2843988887 \times 10^{-08}$	$3.4382487731 \times 10^{-08}$
4	$2.8796409701 \times 10^{-16}$	$1.1526708367 \times 10^{-06}$	$4.3377453150 \times 10^{-08}$
5	$3.8510861166 \times 10^{-16}$	$8.4095161957 \times 10^{-06}$	$7.9466607735 \times 10^{-08}$
6	$4.2240516640 \times 10^{-16}$	$3.5371793609 \times 10^{-05}$	$5.8254114084 \times 10^{-08}$
7	$4.3606611377 \times 10^{-16}$	$1.0412506917 \times 10^{-04}$	$2.4416031572 \times 10^{-08}$
8	$4.4105344376 \times 10^{-16}$	$2.4005105687 \times 10^{-04}$	$1.0782300819 \times 10^{-08}$
9	$4.4297790262 \times 10^{-16}$	$4.6484968155 \times 10^{-04}$	$2.3749007475 \times 10^{-08}$
10	$4.4367585777 \times 10^{-16}$	$7.9162355386 \times 10^{-04}$	$1.0310462864 \times 10^{-08}$

Pelo exposto na Figura 6.14 e Tabela 6.16, verifica-se que o método da Expansão em Série de Potências possibilita melhores aproximações para a inversão

numérica de funções exponenciais decrescentes. Apesar das técnicas de Quadratura Gaussiana e Talbot apresentarem precisão numérica regular, não foi possível obter resultados semelhantes aos obtidos por Expansão em Série, mesmo aumentando o número de iterações.

A inversão da função transformada  $F_8(s)$  também foi enfatizada por Marques [34], ao efetuar uma abordagem numérica para inverter a Transformada de Laplace através de polinômios de Laguerre, em que o autor se refere à utilização do método de Brochet. Assim sendo, na Tabela 6.17, mostra-se um comparativo com os resultados apresentados por Marques [34], ao empregar o método de Brochet para inverter  $F_8(s)$ .

Tabela 6.17: Comparativo para inversão numérica de  $F_8(s)$  com o método de Brochet.

t	Solução Exata	Brochet Marques [34]	Série de Potências $M = 4$ $k = 1$	Quadratura Gaussiana $M = 8$	Talbot $M = 10$
0	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
1	0.2325441579	0.2325441579	0.2325441579	0.2325441579	0.2325441597
2	0.1170196443	0.1170196443	0.1170196443	0.1170196449	0.1170196495
3	0.0473083161	0.0473083161	0.0473083161	0.0473083790	0.0473083505
4	0.0179801762	0.0179801762	0.0179801762	0.0179813289	0.0179801328
5	0.0066925470	0.0066925470	0.0066925470	0.0067009565	0.0066924676
6	0.0024726079	0.0024726079	0.0024726079	0.0025079797	0.0024725497
7	0.0009110504	0.0009110504	0.0009110504	0.0010151755	0.0009110260
8	0.0003353500	0.0003353500	0.0003353500	0.0005754011	0.0003353608
9	0.0001233945	0.0001233945	0.0001233945	0.0005882442	0.0001234183
10	0.0000453978	0.0000453978	0.0000453978	0.0008370214	0.0000454081

Conforme verificado na Tabela 6.17 a inversão da função  $F_8(s)$  por Expansão por Séries de Potências demonstrou melhor desempenho que os outros métodos utilizados nesta análise. Ao comparar os resultados numéricos com o algoritmo de Brochet, utilizado por Marques [34], observou-se uma concordância de até doze dígitos com a técnica de inversão por Expansão em Série de Potências e a solução exata. Apesar disso, convém destacar que para obter melhor precisão

numérica por meio do método de Brochet, segundo Marques [34], consideram-se quatro fatores de aproximação: o grau Laguerre, que se refere a ordem da soma parcial da série de funções de Laguerre; o grau Fourier, que fornece o número de pontos para o cálculo dos coeficientes da função geradora; o parâmetro  $\alpha$  que exerce influência sobre o erro de aproximação e o parâmetro  $\rho$  que interfere no cálculo dos valores da função geradora. Assim, o comparativo foi estabelecido com base nos resultados gerados pelo método Brochet com grau Laguerre = 50, grau Fourier = 200,  $\alpha = 2.5$  e  $\rho = 0.999$ . Enquanto isso, para inversão por Expansão em Série de Potências, avalia-se apenas quantidade de termos  $M$  da série para gerar os coeficientes de ponderação  $\alpha_n$  e a influência exercida pelo parâmetro  $k$  para aproximação de  $f(t) = \mathcal{L}^{-1} \{F(s)\}$ .

### 6.1.9 Comparativo 9

Na Figura 6.15, apresenta-se um comparativo entre a solução exata e a inversão da Transformada de Laplace utilizando os métodos numéricos e na Tabela 6.18, mostra-se o erro absoluto para inversão numérica de  $F_9(s) = \frac{1}{(s^2+s+1)}$ , cuja transformada inversa é  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_9(s)\} = \frac{2\sqrt{3}}{3}e^{-0.5t}\text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$ .

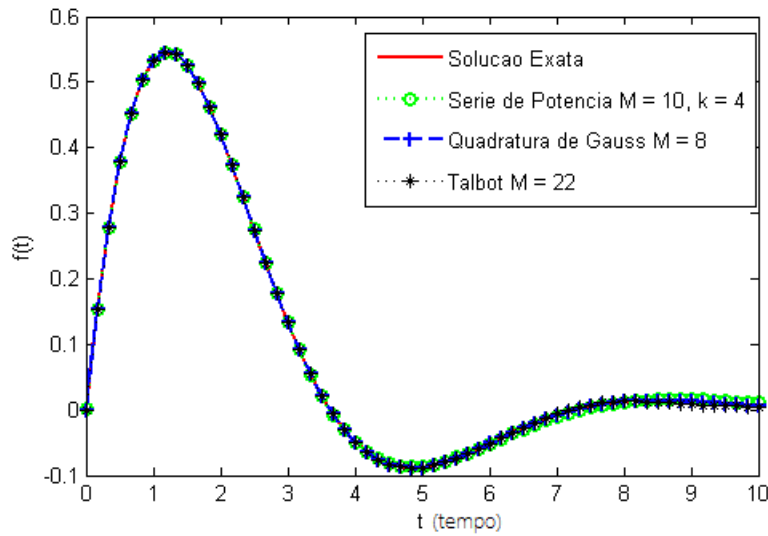


Figura 6.15: Comparativo dos métodos de inversão numérica de  $F_9(s)$ .

Tabela 6.18: Erro absoluto para inversão numérica de  $F_9(s)$ .

t	Série de Potências	Quadratura Gaussiana	Talbot
0	$1.0446720717 \times 10^{-03}$	0.0000000000000000	0.0000000000000000
1	$2.9546343638 \times 10^{-04}$	$1.3766765505 \times 10^{-14}$	$1.9095836023 \times 10^{-14}$
2	$6.7416857321 \times 10^{-04}$	$1.3772316620 \times 10^{-13}$	$3.4694469519 \times 10^{-14}$
3	$7.1854637298 \times 10^{-04}$	$6.9837968741 \times 10^{-11}$	$4.8461235024 \times 10^{-14}$
4	$1.4306034119 \times 10^{-04}$	$2.5751669616 \times 10^{-09}$	$5.3505810893 \times 10^{-14}$
5	$1.7068463851 \times 10^{-03}$	$4.9324623691 \times 10^{-09}$	$7.3788197774 \times 10^{-14}$
6	$4.2411915574 \times 10^{-04}$	$5.5204642621 \times 10^{-07}$	$4.8100412541 \times 10^{-14}$
7	$2.8147025831 \times 10^{-03}$	$4.6752836620 \times 10^{-06}$	$1.8195514539 \times 10^{-14}$
8	$1.1772556121 \times 10^{-03}$	$1.5936098213 \times 10^{-05}$	$5.0133334983 \times 10^{-13}$
9	$2.7957774565 \times 10^{-03}$	$1.4707033002 \times 10^{-05}$	$7.7387055097 \times 10^{-13}$
10	$4.8510845693 \times 10^{-03}$	$7.9721812575 \times 10^{-05}$	$7.6038937299 \times 10^{-11}$

Para calcular a transformada inversa de  $F_9(s)$ , verificou-se um melhor desempenho da técnica de inversão por Talbot, considerando que este método de-

monstrou maior precisão e regularidade nos resultados numéricos em todo o intervalo em que a função foi avaliada. A Quadratura Gaussiana forneceu boa precisão, mas pôde-se notar certa instabilidade do método ao aumentar, de forma expressiva, o número de iterações. Analisando a Figura 6.15, a Expansão em Série de Potências possibilitou uma boa aproximação comparada com a solução exata, mas em termos numéricos isso não se verifica como mostra a Tabela 6.18.

A função  $F_9(s)$  também foi abordada por Marques [34] para determinação de sua transformada inversa utilizando o método de Brochet. Na Tabela 6.19, apresenta-se um comparativo com os resultados obtidos por Marques [34], ao empregar o método de Brochet para inverter  $F_9(s)$ .

Tabela 6.19: Comparativo da inversão numérica de  $F_9(s)$  com o método de Brochet.

t	Solução Exata	Brochet Marques [34]	Série de Potências $M = 10$ $k = 4$	Quadratura Gaussiana $M = 8$	Talbot $M = 22$
0	0.000000000	0.000000000	0.001044672	0.000000000	0.000000000
1	0.533507195	0.533507195	0.533211731	0.533507195	0.533507195
2	0.419279629	0.419279629	0.419953798	0.419279629	0.419279629
3	0.133242644	0.133242644	0.132524097	0.133242644	0.133242644
4	-0.04952987	-0.04952987	-0.04967294	-0.04952987	-0.04952987
5	-0.08794242	-0.08794242	-0.08623557	-0.08794242	-0.08794242
6	-0.05089231	-0.05089231	-0.05131643	-0.05089287	-0.05089231
7	-0.00764371	-0.00764371	-0.01045841	-0.00764838	-0.00764371
8	0.012715095	0.012715095	0.011537840	0.012699159	0.012715095
9	0.012804671	0.012804671	0.015600448	0.012789964	0.012804671
10	0.005385480	0.005385480	0.010236565	0.005465202	0.005385480

Os resultados mostrados na Tabela 6.19 indicam uma melhor aproximação de  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_9(s)\}$  utilizando o método de Talbot. A Quadratura Gaussiana demonstrou razoável estimativa para a função avaliada, e a técnica de inversão por Expansão em Série de Potências não forneceu uma precisão satisfatória. Para a inversão numérica dessa função pelo método de Brochet, Marques [34] considerou o grau Laguerre = 50, grau Fourier = 200,  $\alpha = 1$  e  $\rho = 0.999$ . Ao estabelecer



comparação entre os resultados obtidos por Talbot com o método empregado por Marques [34] e a solução exata, pôde-se constatar a concordância de até onze dígitos.

#### 6.1.10 Discussão dos resultados

No primeiro comparativo, observa-se que as técnicas de inversão por Talbot e Quadratura Gaussiana apresentaram excelente precisão para o tratamento da função  $F_1(s) = 1/s^2$ . Ao confrontar os resultados com aqueles mostrados por Junqueira [26], pôde-se notar que esses dois recursos possibilitaram melhores aproximações que os métodos de Crump e Stehfest, considerando a quantidade de termos utilizada no cômputo da transformada inversa de  $f(t)$  e a precisão numérica proporcionada. Observou-se que a técnica de Expansão em Série de Potências demonstra alta instabilidade para inverter funções desse tipo, uma vez que, mesmo com aumento da quantidade de termos da série e efetuando ajustes no parâmetro experimental  $k$ , não foi possível obter uma aproximação regular.

Nota-se melhor desempenho da técnica de Expansão em Séries de Potências quando aplicada para inverter transformadas de funções exponenciais decrescentes. No entanto, verificou-se algumas restrições para os casos em que o termo exponencial é multiplicado por funções de outras classes, como por exemplo,  $F_3(s)$ ,  $F_5(s)$  e  $F_9(s)$ . Nos testes realizados para inverter a transformada de funções que têm comportamento oscilatório como  $F_6(s)$ ,  $F_7(s)$  e  $F_9(s)$ , o método de inversão por Expansão em Série de Potências não se mostra viável devido a inconsistência dos resultados numéricos fornecidos. Os experimentos realizados utilizando diferentes valores do parâmetro  $k$  e um número maior de constantes de ponderação  $\alpha_n$  não possibilitaram aproximações regulares.

O método da Quadratura Gaussiana revelou certa fragilidade para determinar a transformada de algumas funções com termos exponenciais decrescentes, como pode ser constatado analisando as Tabelas 6.4, 6.6 e 6.9. A dificuldade observada tem relação com a quantidade de pesos e pontos de quadratura necessária para que seja possível estabelecer uma estimativa aceitável para a solução desejada. Ao

contrário do que se espera, esse recurso numérico não manifesta boa convergência quando se aumenta o número de pesos e pontos. No comparativo realizado por Tomaszewski [50], a autora menciona que a Quadratura Gaussiana não proporcionou resultados precisos para um número de termos superior a oito ao avaliar as funções  $F_2(s)$ , com  $a = 1$ ,  $F_3(s)$ ,  $F_5(s)$  e  $F_6(s)$ , com  $a = 1$ . Na análise efetuada neste trabalho verificou-se que o número de pesos e pontos ideais para a aproximação numérica por esse método depende da função que se deseja conhecer a sua forma inversa. Observa-se que em alguns casos, a Quadratura Gaussiana pode apresentar maior desempenho utilizando oito termos, mas isso não é verificado, por exemplo, quando esse método é empregado para inverter a transformada das funções trigonométricas  $F_6(s)$  e  $F_7(s)$  assumindo diferentes valores para o coeficiente  $a$ .

Entre as três técnicas avaliadas, a inversão por Talbot demonstrou maior regularidade na aproximação para todos os pontos do domínio de integração das transformadas analisadas, com exceção das formas exponenciais do tipo  $F_2(s)$ . Neste caso, o aumento do número de termos do somatório não se mostrou suficiente para o refinamento dos resultados. Para as formas trigonométricas o método manifestou boa convergência em todos os testes realizados, porém, requer uma quantidade considerável de termos. No comparativo para o cálculo da transformada da função  $F_9(s)$ , os resultados foram confrontados com aqueles fornecidos pelo método de Brochet empregado por Marques [34], para o qual verificou-se uma concordância de até onze dígitos.

Uma vantagem em utilizar a alternativa porposta por Talbot é que o cálculo da transformada inversa não envolve a resolução de sistemas lineares para determinar pesos ou constantes ponderadas como ocorre na Quadratura Gaussiana e na Expansão em Série de Potências. Contudo, não se pode afirmar que esta técnica é mais adequada que as outras, tendo em vista que o seu desempenho numérico para inverter algumas das funções avaliadas não foi vantajoso em relação aos outros métodos.

De maneira geral, observa-se que cada técnica possui algumas particularidades intrínsecas às formulações resultantes da Transformada Inversa de Laplace. Esse fato comprova a concepção de Barichello [5], na qual considera que a resolução de determinados problemas envolvendo a inversão numérica da Transformada de Laplace, pode ser facilitada pela escolha de um método específico.

Em vista dos resultados expostos e comparações realizadas com aqueles encontrados na literatura, pode-se considerar que as técnicas numéricas de inversão da Transformada de Laplace enfatizadas neste trabalho, apresentaram desempenho satisfatório e atenderam aos objetivos propostos inicialmente.

## 6.2 Comparativos para Solução da Equação de Transporte de Nêutrons Utilizando o Método $LTS_N$

Os resultados apresentados nesta seção referem-se à aplicação das técnicas de inversão da Transformada de Laplace ao problema de transporte de nêutrons em geometria Cartesiana unidimensional descrito pela equação (5.2). Para isso, considerou-se uma placa homogênea de comprimento  $a = 100$  cm, com os parâmetros de seções de choque  $\sigma_t = 1.0$  ( $\text{cm}^{-1}$ ),  $\sigma_{s0} = 0.99$  ( $\text{cm}^{-1}$ ),  $\sigma_{s1} = 0.80$  ( $\text{cm}^{-1}$ ), com grau anisotrópico igual a um e condições de contorno delimitadas por  $\psi_m(0) = 1.0$  para  $\mu_m > 0$  e  $\psi_m(a) = 0$  para  $\mu_m < 0$ . Os fluxos angulares obtidos com o auxílio da Transformada inversa de Laplace são utilizados para o cálculo do fluxo escalar dado pela equação (5.20).

Com o objetivo de se obter melhor precisão numérica nos resultados proporcionados pelos métodos de inversão da Transformada de Laplace, procurou-se verificar a quantidade de termos necessária para que se tenha uma convergência satisfatória e, além disso, alguns testes foram efetuados visando avaliar a influência do parâmetro experimental  $k$ .

Em uma análise preliminar, avaliou-se o desempenho da técnica de inversão por Expansão em Série de Potências ao aplicá-la a um conjunto de funções elementares onde constatou-se que o parâmetro  $k$  pode auxiliar a convergência do método. Nesse sentido, ao utilizar esse recurso para solucionar a equação de transporte, observou-se que mesmo aumentando a quantidade de termos da série, a solução numérica não apresentou uma razoável aproximação para a solução analítica como mostra a Figura 6.16. Nesta análise inicial, fixou-se  $k = 1$  e foram realizadas simulações para diferentes valores de  $M$  na equação (5.21).

Para investigar a capacidade de resolução do problema proposto utilizando o método de Expansão em Série de Potências, em um segundo momento, foram efetuadas comparações considerando valores distintos para o parâmetro  $k$  com

a quantidade de termos da série fixa de maneira que se pôde notar melhor desempenho para  $k = 13$  e  $M = 10$ , como mostra a Figura 6.17.

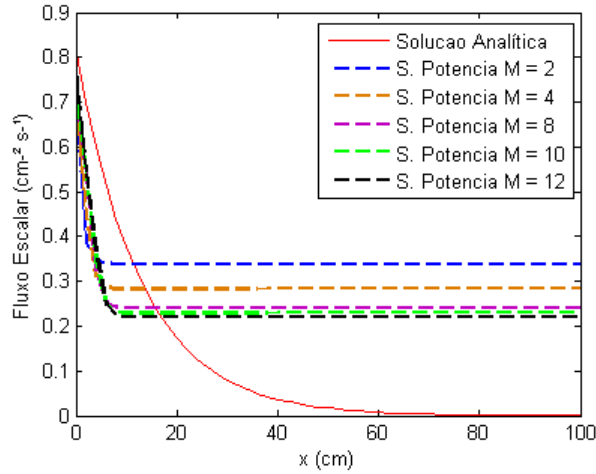


Figura 6.16: Convergência da solução por Série de Potências com  $k$  fixo.

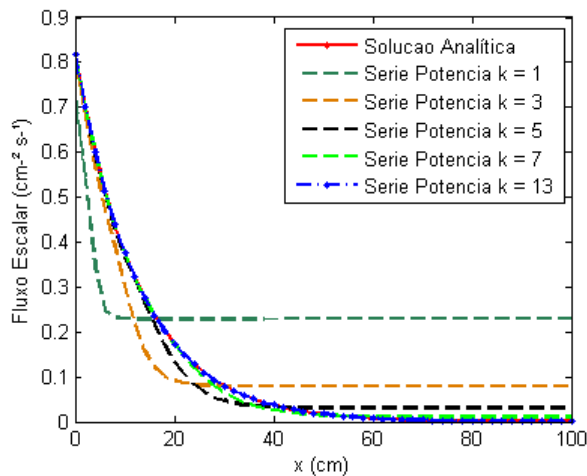


Figura 6.17: Convergência da solução por Série de Potências para diferentes valores de  $k$ .

De forma particular, deve-se ressaltar que a inversão da Transformada de Laplace por Expansão em Série de Potências tem como característica a instabilidade do método devido à forma da matriz de Hilbert, cujo processo de inversão é mal condicionado. Sendo assim, torna-se inviável o aumento significativo na quantidade de termos da série para garantir maior precisão numérica. Contudo, observa-se que em alguns casos, a convergência dessa técnica depende da escolha adequada do

parâmetro  $k$ . Este aspecto pode propiciar certa aversão à sua aplicação a problemas mais elaborados, uma vez que, a escolha desse parâmetro é feita de modo empírico.

Como a inversão numérica através da Quadratura Gaussiana e Talbot não envolve a escolha de parâmetros secundários, nas Figuras 6.18 e 6.19 apresentam-se os comparativos para a aproximação da solução analítica, considerando-se apenas o número de termos necessários para convergência dos resultados.

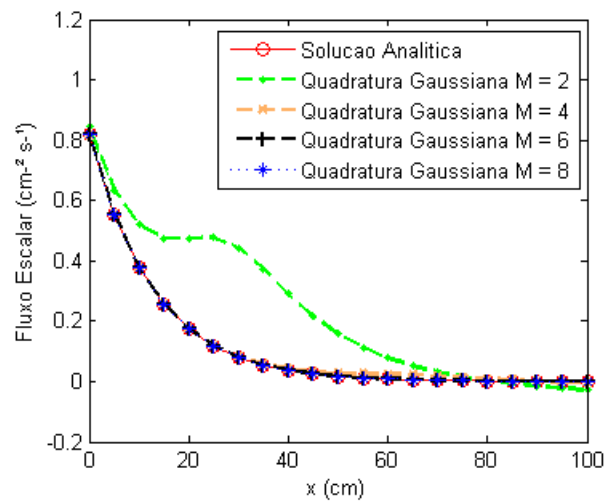


Figura 6.18: Convergência da solução por Quadratura Gaussiana.

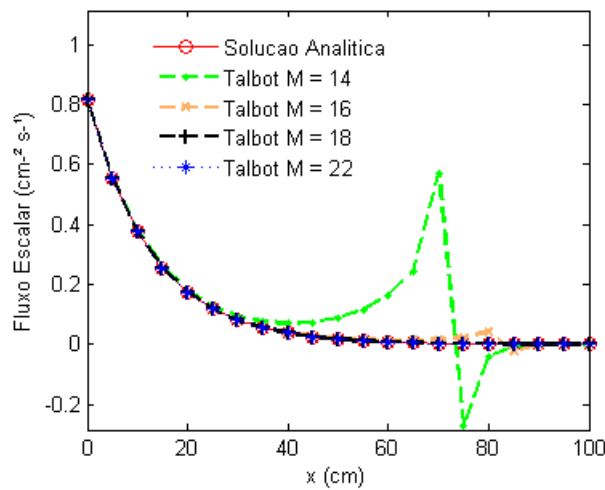


Figura 6.19: Convergência da solução por Talbot.

Levando em conta que as três técnicas de inversão da Transformada de Laplace demonstraram boa convergência para aproximação da solução analítica do problema de transporte de nêutrons, estabeleceu-se então um comparativo para o cálculo do fluxo escalar de partículas conforme exposto na Figura 6.20 e Tabela 6.20.

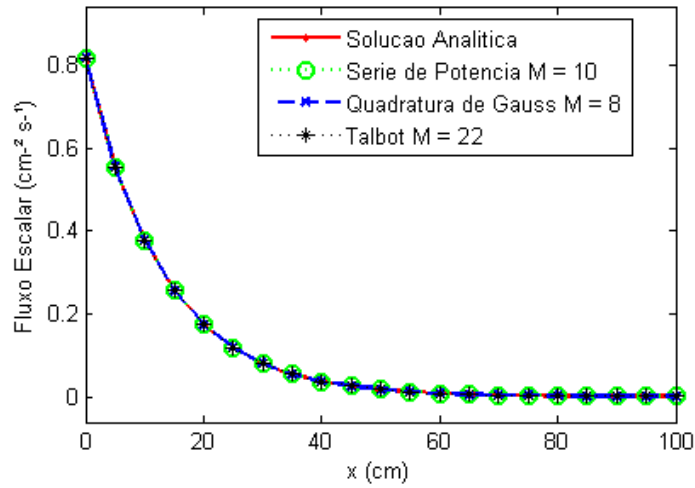


Figura 6.20: Comparativo entre as soluções numéricas e analítica.

Tabela 6.20: Comparativo entre as soluções numéricas e analítica.

$x(cm)$	Solução Analítica	Série de Potências	Quadratura Gaussiana	Talbot
0	$8.172559 \times 10^{-1}$	$8.172066 \times 10^{-1}$	$8.172559 \times 10^{-1}$	$8.172559 \times 10^{-1}$
10	$3.766646 \times 10^{-1}$	$3.766628 \times 10^{-1}$	$3.766646 \times 10^{-1}$	$3.766646 \times 10^{-1}$
20	$1.736004 \times 10^{-1}$	$1.736013 \times 10^{-1}$	$1.736004 \times 10^{-1}$	$1.736004 \times 10^{-1}$
30	$8.000987 \times 10^{-2}$	$8.002258 \times 10^{-2}$	$8.000987 \times 10^{-2}$	$8.000987 \times 10^{-2}$
40	$3.687402 \times 10^{-2}$	$3.689986 \times 10^{-2}$	$3.687402 \times 10^{-2}$	$3.687403 \times 10^{-2}$
50	$1.699118 \times 10^{-2}$	$1.696131 \times 10^{-2}$	$1.699117 \times 10^{-2}$	$1.699118 \times 10^{-2}$
60	$7.823091 \times 10^{-3}$	$7.724432 \times 10^{-3}$	$7.823057 \times 10^{-3}$	$7.823095 \times 10^{-3}$
70	$3.588289 \times 10^{-3}$	$3.443479 \times 10^{-3}$	$3.588206 \times 10^{-3}$	$3.588299 \times 10^{-3}$
80	$1.616285 \times 10^{-3}$	$1.459467 \times 10^{-3}$	$1.616073 \times 10^{-3}$	$1.616307 \times 10^{-3}$
90	$6.635228 \times 10^{-4}$	$5.400430 \times 10^{-4}$	$6.630420 \times 10^{-4}$	$6.635691 \times 10^{-4}$
100	$1.291816 \times 10^{-4}$	$1.139880 \times 10^{-4}$	$1.289283 \times 10^{-4}$	$1.291816 \times 10^{-4}$

Nos testes realizados para gerar os resultados exibidos na Tabela 6.20, avaliou-se a quantidade de termos necessária para que se tenha uma precisão numérica aceitável. Como foi observado nos experimentos efetuados com as funções elemen-

tares, o aumento expressivo do número de termos não garante maior eficiência dos métodos.

Tabela 6.21: Erro absoluto para a solução numérica da equação de transporte

$x(cm)$	Série de Potências	Quadratura Gaussiana	Talbot
0	$4.9357223098 \times 10^{-05}$	$1.0730705213 \times 10^{-10}$	$1.5978773859 \times 10^{-11}$
10	$1.8016843231 \times 10^{-06}$	$5.5105048302 \times 10^{-10}$	$8.2440831938 \times 10^{-11}$
20	$9.1426803908 \times 10^{-07}$	$134190270006 \times 10^{-09}$	$2.0100526798 \times 10^{-10}$
30	$1.2714104167 \times 10^{-05}$	$2.9797178613 \times 10^{-09}$	$4.4645523389 \times 10^{-10}$
40	$2.5838159856 \times 10^{-55}$	$6.5143885771 \times 10^{-09}$	$9.7326102038 \times 10^{-10}$
50	$2.9870317781 \times 10^{-05}$	$1.4429101836 \times 10^{-08}$	$2.1136830757 \times 10^{-09}$
60	$9.8658762919 \times 10^{-05}$	$3.3507474168 \times 10^{-08}$	$4.5871697117 \times 10^{-09}$
70	$1.4480934596 \times 10^{-04}$	$8.3171767428 \times 10^{-08}$	$9.9533774989 \times 10^{-09}$
80	$1.5681863294 \times 10^{-04}$	$2.1219631786 \times 10^{-07}$	$2.1594439550 \times 10^{-08}$
90	$1.2347980244 \times 10^{-04}$	$4.8079630963 \times 10^{-07}$	$4.6348535469 \times 10^{-08}$
100	$1.5193564605 \times 10^{-05}$	$2.5328051218 \times 10^{-07}$	$4.3586878897 \times 10^{-14}$

Como se pode observar nas Tabelas 6.20 e 6.21 os métodos numéricos investigados neste trabalho produziram resultados satisfatórios para o tratamento do problema de transporte de nêutrons. Entretanto, convém ressaltar que no referencial teórico não foram encontradas relatos a respeito da utilização das técnicas de inversão por Expansão em Séries de Potências e Talbot direcionadas à solução de problemas desse tipo. Uma possível justificativa para esse fato pode estar atrelada à viabilidade de programação desses dois métodos e por estar amplamente difundida a concepção de que a Quadratura Gaussiana proporciona bons resultados.

Visando validar os resultados do método  $LTS_N$ , com  $N = 2$ , para solução da equação de transporte de nêutrons unidimensional, Vilhena e Barichello [54] utilizaram a técnica da Quadratura Gaussiana para inverter numericamente o fluxo angular transformado e, em seguida, calcularam o fluxo escalar de partículas para o qual apresentou-se um comparativo em relação aos resultados obtidos por Barros e Larsen [7] que resolveram o mesmo problema utilizando o método  $SGF S_2$ . Posto isso, na Tabela 6.22 são exibidos esses resultados e estabeleceu-se uma comparação com aqueles expostos na Tabela 6.20.



Tabela 6.22: Comparação dos métodos numéricos com a solução apresentada no referencial teórico

$x(cm)$	Solução Analítica	$SGF S_2$ Barros e Larsen[7]	$LTS_2$ Vilhena e Barichello [54]	Série de Potências	Quadratura Gaussiana	Talbot
0	$8.172559 \times 10^{-1}$	$8.1726 \times 10^{-1}$	$8.1727 \times 10^{-1}$	$8.172066 \times 10^{-1}$	$8.172559 \times 10^{-1}$	$8.172559 \times 10^{-1}$
10	$3.766646 \times 10^{-1}$	-	-	$3.766628 \times 10^{-1}$	$3.766646 \times 10^{-1}$	$3.766646 \times 10^{-1}$
20	$1.736004 \times 10^{-1}$	-	-	$1.736013 \times 10^{-1}$	$1.736004 \times 10^{-1}$	$1.736004 \times 10^{-1}$
30	$8.000987 \times 10^{-2}$	-	-	$8.002258 \times 10^{-2}$	$8.000987 \times 10^{-2}$	$8.000987 \times 10^{-2}$
40	$3.687402 \times 10^{-2}$	-	-	$3.689986 \times 10^{-2}$	$3.687402 \times 10^{-2}$	$3.687403 \times 10^{-2}$
50	$1.699118 \times 10^{-2}$	$1.6991 \times 10^{-2}$	$1.6981 \times 10^{-2}$	$1.696131 \times 10^{-2}$	$1.699117 \times 10^{-2}$	$1.699118 \times 10^{-2}$
60	$7.823091 \times 10^{-3}$	-	-	$7.724432 \times 10^{-3}$	$7.823057 \times 10^{-3}$	$7.823095 \times 10^{-3}$
70	$3.588289 \times 10^{-3}$	-	-	$3.443479 \times 10^{-3}$	$3.588206 \times 10^{-3}$	$3.588299 \times 10^{-3}$
80	$1.616285 \times 10^{-3}$	-	-	$1.459467 \times 10^{-3}$	$1.616073 \times 10^{-3}$	$1.616307 \times 10^{-3}$
90	$6.635228 \times 10^{-4}$	-	-	$5.400430 \times 10^{-4}$	$6.630420 \times 10^{-4}$	$6.635691 \times 10^{-4}$
100	$1.291816 \times 10^{-4}$	$1.2918 \times 10^{-4}$	$1.3605 \times 10^{-4}$	$1.139880 \times 10^{-4}$	$1.289283 \times 10^{-4}$	$1.291816 \times 10^{-4}$

Analisando os resultados obtidos neste trabalho, exibidos na Tabela 6.22, para a solução da equação de transporte unidimensional, utilizando o método  $LTS_N$ , com  $N = 2$ , observa-se que a solução numérica por Talbot demonstra maior correspondência com os resultados apresentados por Barros e Larsen [7], ao resolverem a mesma equação empregando o método  $SGF_2$ . Estabelendo comparação com a solução exata, pôde-se verificar que a Quadratura Gaussiana, empregada neste estudo, forneceu resultados mais precisos que os que foram obtidos por Vilhena e Barichello [54], ao utilizarem esse mesmo método.

Para o problema de transporte de partículas, a técnica de Expansão em Série de Potências não forneceu uma precisão numérica muito significativa. Esse fato pode ser decorrente do mal condicionamento do sistema que permite determinar as constantes  $\alpha_i$ , para inversão numérica do fluxo angular transformado.

As três técnicas de inversão da Transformada de Laplace enfatizadas neste trabalho, podem ser utilizadas como recurso numérico para auxiliar na solução da equação de transporte de partículas unidimensional. Contudo, como se pode notar através da Tabela 6.21, não parece ser viável o emprego da Expansão em Série de Potências, considerando que esse método não demonstrou um desempenho numérico muito vantajoso, comparada à inversão seguindo a Quadratura Gaussiana e por Talbot. Embora o método de Talbot tenha proporcionado bons resultados, deve-se ainda verificar se este recurso, mostra-se eficiente para o tratamento do problema de transporte com ordem de quadratura angular superior a 2, levando em conta aspectos tais como o esforço computacional e dificuldade de implementação. Dessa forma, pode-se comparar o desempenho dessa técnica com os resultados expostos por Barichello [6], a qual empregou a inversão por Quadratura Gaussiana para solucionar o problema de transporte utilizando o método  $LTS_N$ , com  $N = 2$ ,  $N = 4$  e  $N = 8$ .

## 7 CONCLUSÃO

Para enfatizar a relevância a respeito da utilização da Transformada de Laplace, apresentou-se neste trabalho um levantamento bibliográfico no qual se pôde notar a variedade de situações em que esta ferramenta mostra-se vantajosa. No entanto, mesmo com todas as vantagens que ela oferece, observa-se que a principal dificuldade ao lidar com esse instrumento matemático na resolução de problemas físicos, está associada com o procedimento inverso para calcular as soluções das equações, em termos da variável transformada, retornando-a ao seu domínio de origem.

As técnicas analíticas usuais para inverter a Transformada de Laplace são aplicáveis a formulações que possuem uma quantidade reduzida de variáveis e podem proporcionar soluções exatas. Contudo, com o surgimento de problemas cada vez mais complexos onde os recursos analíticos não se mostram suficientes para calcular a transformada inversa das funções envolvidas nos modelos matemáticos, os métodos de inversão numérica têm se tornado uma alternativa muito comum para analisar esses problemas.

Diante desses aspectos, no estudo comparativo exposto neste trabalho propôs-se investigar o desempenho numérico de três técnicas utilizadas no cálculo da transformada inversa de Laplace. Inicialmente, procurou-se verificar no referencial teórico os métodos frequentemente empregados para resolver problemas cujas soluções são determinadas em termos da Transformada de Laplace. Em virtude disso, o que se tem percebido é que não existe um recurso numérico completamente satisfatório para inverter uma classe geral de funções transformadas, porém, em alguns casos, o processo de inversão pode ser facilitado pela escolha de um método específico. Isso pode justificar, por exemplo, o fato de ter sido encontrado na literatura a resolução de muitos problemas referentes à transferência radiativa para os quais se utilizou a Quadratura Gaussiana, e outros envolvendo a concentração de poluentes atmosféricos onde foi empregado o método de Talbot.

Pelo fato de não terem sido encontrados relatos sobre o emprego da técnica de inversão por Série de Potências a problemas físicos, nesta análise optou-se por incluir este método na investigação, além dos outros dois já citados, com a finalidade de verificar a precisão numérica ao aplicá-los a um conjunto de funções elementares e um problema de transporte de nêutrons.

Para a efetivação do objetivo deste trabalho, realizaram-se simulações utilizando o *software* livre GNU OCTAVE 4.0 com o qual foram efetuados testes preliminares para computar a transformada inversa de funções exponenciais, trigonométricas e linear. Em um segundo momento, os instrumentos de inversão foram comparados ao efetuar o cálculo do fluxo angular de partículas neutras, transformado pela técnica de Laplace.

Posto isso, os testes realizados para inversão da Transformada de Laplace utilizando a técnica da Expansão em Série de Potências, indicam que este recurso pode ser empregado para inverter as transformadas de funções exponenciais decrescentes, de maneira que se pôde verificar excelente precisão para os casos em que o argumento do termo exponencial não assume valores significativamente altos. Uma desvantagem do método está associada ao condicionamento da matriz de Hilbert presente no sistema que fornece as constantes  $\alpha_n$ , pois, mesmo aumentando de maneira expressiva a quantidade de termos da série, para inversão de algumas funções, o método manifestou instabilidade. Outro aspecto que pode tornar esta técnica inviável para a resolução de problemas com elevado grau de complexidade, deve-se ao fato de não se conhecer o melhor valor do parâmetro  $k$ . Neste contexto, a inversão numérica procede de forma empírica, efetuando ajustes no parâmetro para que se possa obter resultados mais precisos.

Nos testes estabelecidos para a inversão por Quadratura Gaussiana, pôde-se verificar que este método proporciona boas aproximações, mas com algumas ressalvas. Para inverter as transformadas de funções exponenciais decrescentes o método exige maior quantidade de termos no somatório, no entanto, isso não é suficiente para que se tenha um aumento significativo na precisão dos resultados.

Os experimentos efetuados para inverter funções transformadas através do método de Talbot demonstraram resultados satisfatórios para todas as funções elementares, porém, exige maior esforço computacional que as outras técnicas analisadas.

Ao confrontar os valores obtidos neste trabalho com os que foram apresentados no referencial teórico, a respeito da solução da equação de transporte de nêutrons utilizando os métodos  $SGF S_2$  (Barros e Larsen, 1990) e  $LTS_2$  (Vilhena e Barichello, 1991), verificou-se uma concordância de até três dígitos para a solução numérica por Expansão em Série de Potências, quatro dígitos para a Quadratura Gaussiana e houve considerável concordância de resultados entre os métodos  $SGF S_2$  e  $LTS_2$  com inversão numérica do fluxo angular transformado, utilizando o algoritmo de Talbot.

Deve-se ressaltar que ao tratar do problema de transporte de nêutrons unidimensional, optou-se por utilizar dois termos de quadratura angular, sendo que, o método  $LTS_N$ , com  $N = 2$ , nos fornece um sistema onde o vetor do fluxo angular transformado é obtido facilmente, sendo conhecida a expressão que se deseja aplicar a transformada inversa. Dessa forma, não se sabe se as técnicas de inversão por Série de Potências e Talbot são aplicáveis para os casos em que  $N > 2$ . Outras possibilidades surgem ao investigar a aplicabilidade destas técnicas a problemas de transporte de partículas bidimensionais em meios heterogêneos, estabelecendo comparativos com os resultados apresentados na literatura onde se utilizou a Quadratura Gaussiana.

Diante do exposto, considera-se que os objetivos deste trabalho foram atingidos, tendo em vista que, através dos comparativos estabelecidos, pôde-se verificar a que tipo de formulação os métodos numéricos analisados podem propiciar melhor desempenho para computar a Transformada inversa de Laplace. Em trabalhos futuros, esta análise pode contribuir para a escolha do método mais adequado para resolver problemas que necessitam da utilização de recursos numéricos para inverter a Transformada de Laplace.

## Referências Bibliográficas

- [1] ABATE, J.; VALKÓ, P. P. Multi-precision Laplace Transform Inversion. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 60 (2004), p. 979 – 993.
- [2] AIRAPETYAN, R. G.; RAMM, A. G. Numerical Inversion of the Laplace Transform from the real axis. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 248 (2000), p. 572 – 587.
- [3] ASEKA, I. B. *Solução da Equação de Condução de Calor bidimensional, em meio multicompostos, pelos métodos nodal, com parâmetros concentrados, e a técnica da Transformada de Laplace*. Tese (Doutorado), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2003. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Minas, Metalúrgica e Materiais, Escola de Engenharia.
- [4] AWAIS, M. Applications of the numerical inversion of the Laplace transform to unsteady problems of the third grade fluid. *Applied Mathematics and Computation*, n. 250 (2015), p. 228 – 234.
- [5] BARICHELLO, L. B. *Inversão numérica da transformada de Laplace por polinômios trigonométricos e de Laguerre*. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1988. Programa de Pós-Graduação em Matemática, Instituto de Matemática.
- [6] BARICHELLO, L. B. *Formulação Analítica para o Problema de Ordenadas Discretas Unidimensional*. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1992. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.
- [7] BARROS, R.C.; LARSEN, E. W. A numerical method for one-group slab geometry discrete ordiates problems with no spatial truncation error. *Nuclear Science and Engineering*, vol. 104 (1990), p. 199 – 208.

- [8] BASSANEZI, R. C. *Equações diferenciais ordinárias : um curso introdutório*, vol. 1 of *Coleção BC&T - UFABC - Textos didáticos*. Santo André, 2000.
- [9] BONENBERGER, N. H. *Método  $LTS_N$  para  $N$  inteiro*. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2005. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Instituto de Matemática.
- [10] BORGES, V.; DERIVI, A. G. Determination of the criticality parameters in heterogeneous slab by the  $LTS_N$  method. *Proceedings of the 2nd International Conference on Computational Heat and Mass Transfer*, (2001).
- [11] BORGES, V.; VILHENA, M. T., AND CHIES, R. P. Cálculo de espessura de blindagem pela combinação dos métodos  $LTS_N$  e decomposição. *Anais XI ENFIR - Encontro de Física de Reatores e Termohidráulica* (1997), p. 202 – 206.
- [12] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valor e de Contorno*, 9 ed. Rio De Janeiro, 2010. Tradução de Valéria de Magalhães Iório.
- [13] BULIGON, L. *Solução da Equação de Difusão Unidimensional Transiente para o estudo da dispersão de poluentes na Camada Limite Planetária*. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2004. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Instituto de Matemática.
- [14] BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. *Numerical Analysis*, 9 ed. Boston, 2011.
- [15] CAMPOS VELHO, H. F. *Resolução do problema de Milne por Transformada de Laplace com inversão numérica*. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1987. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

- [16] CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. *Métodos Numéricos para Engenharia*, 5 ed. Porto Alegre, 2011. Tradução de Helena Castro.
- [17] CHUNG, H.Y.; SUN, Y. Taylor series approach to functional approximation for inversion of Laplace Transforms. *Electronics Letters*, vol. 22, n. 22 (1986), p.1219 – 1221.
- [18] COHEN, A. *Numerical methods for Laplace Transform Inversion*. New York, 2007.
- [19] COSTA, C. P.; VILHENA, M. T., AND TIRABASSI, T. Semi-analytical solution of the steady three-dimensional advection-diffusion equation in the planetary boundary layer. *Atmospheric Environment*, vol. 40 (2006), p. 5659 – 5669.
- [20] CRUMP, K. S. Numerical inversion of Laplace Transforms using a Fourier series approximation. *Journal of the Association for Computing Machinery*, vol. 26 (1976), p. 89 – 96.
- [21] DUBNER, H.; ABATE, J. Numerical inversion of Laplace Transforms by relating them to the finite Fourier cosine transform. *Journal of the Association for Computing Machinery*, vol. 15, n. 1 (1968), p. 115 – 123.
- [22] FELÍCIO, L. *Modelagem da dinâmica de sistemas e estudo da resposta*, 2 ed. São Carlos, 2010.
- [23] FIGUEIREDO, D. G.; NEVES, A. F. *Equações diferenciais aplicadas*, 3 ed. Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro, 2008.
- [24] HEYDARIAN, M.; MULLINEUX, N., AND REED, J. R. Solution of parabolic partial differential equations. *Applied Math Modelling*, vol. 5 (1981), p. 448 – 449.
- [25] HONIG, G.; HIRDES, U. A method for the numerical inversion transforms. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 10 (1984), p. 113 – 132.



- [26] JUNQUEIRA, S. L. M. *Aplicação da Transformada de Laplace ao problema inverso da condução de calor*. Dissertação (Mestrado), Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1990. Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, Departamento de Energia.
- [27] KREYSZIG, E. *Matemática Superior para Engenharia*, 9 ed., vol. 1. 2009.
- [28] LEAL, A. L. C. *Método analítico de aproximação polinomial para problemas de ordenadas discretas em geometria Cartesiana unidimensional*. Dissertação (Mestrado), Instituto de Engenharia Nuclear, Rio de Janeiro, 2008.
- [29] LEITE, M. D. F. S. *Estudo comparativo entre coeficientes de difusão verticais na simulação da dispersão de poluentes em uma camada limite convectiva*. Tese (Doutorado), Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2014. Programa de Pós-graduação em Engenharia Ambiental, Centro Tecnológico.
- [30] LUNELLI, R. *Solução da Equação de Transporte de Fótons para uma placa heterogênea, modelo de multigrupo com núcleo de espalhamento de Klein-Nishina*. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2002. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Instituto de Matemática.
- [31] MAIA, C. R. M. *Cálculos em teoria de transporte no modelo de um grupo para célula de três regiões*. Dissertação (Mestrado), Instituto de Energia Atômica, São Paulo, 1979.
- [32] MAIORINO, J. R. *Teoria de transporte de neutrons em meios adjacentes no modelo de dois grupos e espalhamento isotrópico*. Dissertação (Mestrado), Instituto de Energia Atômica, São Paulo, 1977.
- [33] MARON, C. A. A. *Comparação do desempenho computacional da técnica de superposição modal avançada com técnicas da Transformada de Laplace*. Dissertação (Mestrado), Pontifícia Universidade Católica do Rio de

Janeiro, Rio de Janeiro, 2008. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Departamento de Engenharia Civil.

- [34] MARQUES, J. D. F. *Inversão numérica da Transformada de Laplace à custa dos polinômios de Laguerre*. Dissertação (Mestrado), Universidade do Porto, Porto, 1998. Programa de Pós Graduação em Matemática Aplicada, Departamento de Matemática Aplicada.
- [35] MILOVANOVIC, G. V.; CVETKOVIC, A. S. Numerical Inversion of the Laplace Transform. *Electronic Engineering*, vol. 20 (2005), p. 295 – 310.
- [36] MONTELLA, C., MICHEL, R., AND DIARD, J. Numerical inversion of Laplace transforms: a useful tool for evaluation of chemical diffusion coefficients in ion-insertion electrodes investigated by PITT. *Journal of Electroanalytical Chemistry*, n. 608 (2007), p. 37 – 46.
- [37] MOREIRA, D. M., GOULART, A. G., AND MORAES, M. R. A model employing integral transform method to simulate pollutant dispersion in atmosphere. *Revista Brasileira de Meteorologia*, vol. 28, n. 4 (2013), p. 373 – 381.
- [38] MOYA, P. A. *Senales y Sistemas: Fundamentos Matemáticos*. Cartago, Costa Rica, 2008. Centro de Desarrollo de Material Bibliográfico.
- [39] MURLI, A.; RIZZARDI, M. Algorithm 682: Talbot’s Method for the Laplace Inversion Problem. *ACM Transactions on Mathematical Software*, vol. 16, 2 (1990), p. 158 – 168.
- [40] NAGLE, R. K., SAFF, E. B., AND SNIDER, A. D. *Fundamentals of differential equations and boundary value problems*, 6 ed. 2012.
- [41] OLIVEIRA, E. C., AND RODRIGUES JR., W. A. *Funções analíticas com aplicações*. São Paulo, 2006.

- [42] PIESSENS, R. Gaussian Quadrature formulas for the numerical integration of Bromwich's Integral and the inversion of the Laplace Transform. *Journal of Engineering Mathematics*, vol. 5, p. 1 - 9 (1971).
- [43] PROLO FILHO, J. F. *A Equação de Boltzmann e a modelagem de fluidos em micro e macroescalas*. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Instituto de Matemática.
- [44] RODRIGUEZ, B. D. A. *Metodologia para obtenção da solução da equação de transporte de Boltzmann considerando espalhamento compton simulado por Klein-Nishina*. Tese (Doutorado), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007. Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, Escola de Engenharia.
- [45] SALZER, H. Orthogonal polynomials arising in the numerical evaluation of inverse Laplace Transforms. *M.T.A.C.*, vol. 9 (1955), p. 164 – 177.
- [46] SAUER, L. Z. *Solução da Equação de Transporte multigrupo com núcleo de espalhamento de Klein-Nishina: uma aplicação ao cálculo de dose*. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1997. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Instituto de Matemática.
- [47] SEGATTO, C. F. *Formulação  $LTS_N$  para problemas de transporte sem simetria azimutal e problemas dependentes do tempo*. Tese (Doutorado), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1995. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Escola de Engenharia.
- [48] SPIEGEL, M. R. *Transformadas de Laplace*. São Paulo, 1981. Tradução de Roberto Ribeiro Baldino.
- [49] TALBOT, A. The Accurate Numerical Inversion of Laplace Transforms. *J. Inst. Math. Appl.* vol. 23, n. 1 (1976), 97 – 120.

- [50] TOMASCHEWSKI, F. K. *Solução da Equação Multigrupo de Transporte dependente do tempo em meio heterogêneo*. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Instituto de Matemática.
- [51] TONIDANDEL, D. A. V.; ARAÚJO, A. E. A. Transformada de Laplace: uma obra de engenharia. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 34, n. 2 (2012).
- [52] TONIDANDEL, D. A. V. *Entre o Real e o Complexo: uma visão unificada do conceito de Transformada*. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2011. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Escola de Engenharia.
- [53] VENZKE, C. S. *Simulação da dispersão de poluentes em escoamento do tipo contragradiente*. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2015. Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática.
- [54] VILHENA, M. T.; BARICHELLO, L. B. A new analytical approach to solve the neutron transport equation. *Kerntechinik*, n. 56 (1991), p. 334 – 336.
- [55] WANG, Q.; ZHAN, H. On different numerical inverse Laplace methods solve transport problems. *Advances in Water Resources*, n. 75 (2015), p. 80 – 92.
- [56] WIDER, D. What is the laplace transform. *Mathematical Association of America vol. 52*, n. 8 (1945), p. 419 – 425.
- [57] ZABADAL, J. R. S., VILHENA, M. T., AND BARICHELLO, L. B. Solução da Equação de Transporte bidimensional com dependência angular contínua pelo método  $LTS_N$ . *Anais do XI Encontro Nacional de Física de Reatores e Termohidráulica*. (1997).

- [58] ZILL, D. G. *Equações diferenciais com aplicações em modelagem*, 2 ed. São Paulo, 2012.