

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

OTIMIZAÇÃO GEOMÉTRICA DE CAVIDADES COMPLEXAS EMPREGANDO
CONSTRUCTAL DESIGN

por
Fernanda Link Garcia

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Modelagem Computacional

Rio Grande. março de 2011

**OTIMIZAÇÃO GEOMÉTRICA DE CAVIDADES COMPLEXAS
EMPREGANDO *CONSTRUTAL DESIGN***

por

Fernanda Link Garcia

Licenciada em Matemática

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal do Rio Grande, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Modelagem Computacional

Área de Concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. PhD. Luiz Alberto Oliveira Rocha

Co-Orientador: Prof. MSc. Elizaldo Domingues dos Santos

Aprovada por:

Profª Dr. Adriane Prisco Petry (PROMEC/UFRGS)

Prof. Dr. Liércio André Isoldi (PPGMC/FURG)

Prof. Dr. Paulo Roberto de Freitas Teixeira (PPGMC/FURG)

Prof. Dr. Leonardo Emmendorfer

Coordenador do PPGMC

Rio Grande, março de 2011

“Se, na verdade, não estou no mundo para simplesmente a ele me adaptar, mas para transformá-lo; se não é possível mudá-lo sem um certo sonho ou projeto de mundo, devo usar toda possibilidade que tenha para não apenas falar de minha utopia, mas participar de práticas com ela coerentes.”

Paulo Freire

AGRADECIMENTOS

Ao meu esposo Rossano, pelo apoio incondicional aos meus estudos e por sempre acreditar nos meus sonhos.

Aos meus pais, Dalva e Werno, pelo exemplo de vida e incentivo.

Aos meus sogros pela amizade e carinho que dedicam a mim.

Aos meus irmãos, Marcelo, Márcia, Simone e Graciela que sempre que possível estavam ao meu lado com palavras de incentivo e afeto.

Aos meus sobrinhos que são muitos especiais por toda a alegria e vitalidade que eles têm quando estão comigo.

Aos meus irmãos de coração, Greice e Mário, por estarem sempre ao meu lado trazendo alegria, confiança e esperança de que tudo daria certo.

Aos meus grandes amigos, Márcio, Ivone e Viviane, por trazer diversão nos momentos mais tensos e pela amizade sincera.

Aos amigos Cristiano, Ana Carolina, Vanessa, Bruno, Gabriele e Camila por incentivarem meus sonhos e, mesmo não tão presentes, tornaram essa etapa mais divertida.

Ao meu orientador, Prof. Luiz Alberto de Oliveira Rocha, PhD por confiar na minha capacidade e, mesmo uma parte à distância, ser tão presente na construção deste trabalho.

Ao meu co-orientador, Prof. MSc. Elizaldo Domingues dos Santos, pela amizade consolidada durante este trabalho, pela dedicação e pelo auxílio na organização da construção desta pesquisa.

À Universidade Federal do Rio Grande, aos professores e funcionários (Aline) do curso de Pós-Graduação em Modelagem Computacional e a CAPES pelo suporte financeiro.

RESUMO

Na presente pesquisa, inicialmente foi realizada uma revisão bibliográfica dos temas que circundam a Teoria Constructal e *Constructal Design*, e também suas aplicações na natureza e na engenharia. Posteriormente, foi feito o estudo do estado da arte sobre a otimização em cavidades. O Projeto Constructal (do inglês *Constructal Design*) foi o método utilizado na presente dissertação. Este método possibilita o encontro da geometria ideal, ou seja, aquela que minimiza a resistência ao fluxo que aqui é o calor. Para este estudo, o método *Constructal Design* foi utilizado para obter a geometria ótima quanto à transferência de calor, de um conjunto complexo de cavidades, isto é, Conjunto na forma TY com cavidades laterais adicionais. Para a solução numérica da equação diferencial da difusão do calor e suas respectivas condições de contorno, foi utilizado o software MATLAB[®], especificamente a ferramenta PDETOOL. O objetivo deste trabalho consistiu na minimização da resistência térmica do sistema de cavidades quando a geometria deste é sujeita às seguintes constantes: o volume total, o volume da cavidade TY e o volume das cavidades laterais adicionais. A resistência térmica foi minimizada, primeiramente, para a geometria denominada de *Design 1* e posteriormente para o *Design 2*. A geometria ótima que foi obtida com o *Design 2* (para os mesmos graus de liberdade, as mesmas restrições físicas e função objetivo utilizadas para o *Design 1*) apresentou uma resistência térmica adimensional aproximadamente 17% menor do que a geometria ótima obtida com o *Design 1*. Então, para a geometria *Design 2*, que apresentou melhor performance, foi ampliada a análise dos graus de liberdade. A melhor geometria *Design 1* é cerca de 15.3% mais eficiente que a melhor geometria obtida por Lorenzini e Rocha (2009). Já a melhor geometria do *Design 2* é cerca de 140% superior a performance da melhor geometria encontrada por Lorenzini e Rocha (2009). As simulações feitas para

traçar este comparativo entre os estudos se valerem das mesmas condições térmicas e geométricas para cada caso.

Palavras Chaves: *Constructal Design*, Transferência de Calor, Cavidades, Otimização Geométrica.

ABSTRACT

In the present study, was initially conducted a literature review of the issues that surround the theory Constructal and Constructal Design, and also its applications in nature and engineering. Subsequently, was made the study of the state of the art about the optimization in cavities. The Project Constructal was the method used in this dissertation. This method enables the gathering of the ideal geometry, ie, which minimizes the resistance to flow, that here is heat. For this study, the Constructal Design method was used to obtain the optimal geometry on the transfer of heat, from a complex set of cavities, ie, Set on a TY shape, with additional side cavities. For the numerical solution of the differential equation of heat diffusion and their boundary conditions, was used the MATLAB ® software, specifically the tool PDETOOL. The objective of this study was to minimize the thermal resistance of the system of cavities, when its geometry is subject to the following constants: the total volume, the TY cavity volume and additional side cavity volume. The thermal resistance was minimized, firstly, for the geometry named of a Design 1 and, subsequently, to the Design 2. The optimal geometry obtained at the Design 2 (for the same degrees of freedom, the same physical constraints and objective-function used to Design 1) presented a dimensionless thermal resistance approximately 17% lower than the optimal geometry obtained with a Design 1. So, for the geometry Design 2, which showed better performance, was expanded the analysis of degrees of freedom. The best Design 1 geometry is a nearly 15.3% more efficient than the best the geometry obtained by Lorenzini and Rocha (2009). Already the best geometry of Design 2 is about 140% higher than the performance of the best geometry found by Lorenzini and Rocha (2009). The simulations made to draw this comparison between the studies took advantage of the same geometric and thermal conditions for each case.

Keywords: Constructal Design, Heat Transfer, cavities, Geometric Optimization

ÍNDICE

AGRADECIMENTOS	iv
RESUMO	v
ABSTRACT	vii
ÍNDICE.....	ix
LISTA DE SÍMBOLOS	xi
ÍNDICE DE FIGURAS	xiii
ÍNDICE DE TABELAS	xvi
1. INTRODUÇÃO	1
1.1. Motivação	1
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	4
2.1. Conceitos Fundamentais Sobre Teoria Constructal.	4
2.2. Estado da Arte	5
2.2.1. Cavidade em Forma de C e T	11
2.2.2. Cavidade Retangular num Sólido Trapezoidal	15
2.2.3. Cavidade em Forma de H	18
2.2.4. Cavidade em Forma Elíptica	20
2.2.5. Cavidade em Forma de Y	22
2.2.6. Cavidade em Forma de TY	24
2.3. Objetivos	27
2.3.1. Objetivo Geral	27
2.3.2. Objetivo Específico	27
3. METODOLOGIA	29
3.1. Otimização Geométrica do Problema.....	29
3.2. Modelagem Matemática do Problema	30

3.3.	Adimensionalização do Problema	33
3.4.	Condições de Contorno do Problema	36
3.4.1.	Condições de Contorno para o <i>Design 1</i>	36
3.4.2.	Condições de Contorno para o <i>Design 2</i>	39
3.5.	Modelagem Numérica do Problema	40
4.	RESULTADOS	43
4.1.	Resultados Obtidos para o <i>Design 1</i>	43
4.2.	Resultados Obtidos para o <i>Design 2</i>	47
5.	CONCLUSÕES E PROPOSTAS DE CONTINUIDADE	56
6.	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICA	60
Anexos	65
Anexo A	65
Anexo B	72

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras Romanas

a	Parâmetro adimensional
C	Calor específico a pressão constante $[J / Kg.K]$
A	Área $[m^2]$
h	Coefficiente de transferência de calor $[W m^{-2} K^{-1}]$
H	Altura $[m]$
k	Condutividade térmica da cavidade $[W m^{-1} K^{-1}]$
L	Comprimento $[m]$
q	Calor atual $[W]$
T	Temperatura $[K]$
V	Volume $[m^3]$
W	Espessura $[m]$
q'''	Fluxo de calor por convecção $[W/m^2]$

Letras Gregas

θ	Temperatura adimensional
ϕ_0	Fração da área do sólido inserido na cavidade
ϕ_c	Fração da área da cavidade
ϕ_3	Fração da área da cavidade lateral
ψ	Fração de área auxiliar
$\rho [Kg / m^3]$	Massa específica

Índices Inferiores

max	Temperatura máxima ao longo do domínio
m	Primeira otimização
mm	Segunda otimização
mmm	Terceira otimização
o	Ótimo (ideal)
oo	Duas vezes otimizado
ooo	Três vezes otimizado
∞	Temperatura do fluido circundante as cavidades
s	Superfície
0	Referente ao sólido inserido na cavidade
1	Referente ao ramo bifurcado
2	Referente a cavidade elementar
3	Referente as cavidades laterais

Índices Superiores

(~)	Variáveis adimensionais Eq.(3.15)-(3.30), (3.32)-(3.36)
-----	---

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1 Intrusão lateral isotérmica em um sólido com a geração de calor uniforme. (Biserni e Rocha, 2005)	11
Figura 2.2 Primeira construção de uma intrusão lateral em forma de T. (Biserni e Rocha, 2005)	13
Figura 2.3 Configurações ótimas da cavidade em forma de T em função de ψ	15
Figura 2.4 Intrusão lateral isotérmica trapezoidal em um corpo condutor bidimensional com geração de calor uniforme. (Rocha et al., 2005)	16
Figura 2.5 Algumas configurações ótimas quando a forma da cavidade varia	18
Figura 2.6 Intrusões isotérmicas em forma de H em um corpo condutor bidimensional com geração de calor uniforme. (Biserni et al., 2007)	19
Figura 2.7 Cavidade isotérmica num corpo condutor bidimensional com geração de calor uniforme. (Rocha et al. 2008)	21
Figura 2.8 Domínio físico da cavidade em forma de Y em um volume retangular com geração de calor (Marques et al., 2007)	23
Figura 2.9 Cavidade na forma TY e suas condições de contorno. (Lorenzini e Rocha, 2009)	25
Figura 3.1 Conjunto de Cavidades Complexas <i>Design 1</i>	29
Figura 3.2 Conjunto de Cavidades Complexas <i>Design 2</i>	30

Figura 3.3 Superfícies externas adiabática	36
Figura 3.4 Comparação gráfica entre o domínio apresentado por Lorenzini e Rocha (2009) e a presente metodologia	42
Figura 4.1 Otimização da resistência térmica global em função de H_2/L_2 para diversos valores da fração da área introduzida no sólido. ϕ_0	45
Figura 4.2 Topologias ótimas obtidas para $\phi_0 = 0.1$: a) $H_2/L_2 = 1.3$, b) $H_2/L_2 = 2.2$ (ótimo), c) $H_2/L_2 = 2.65$	45
Figura 4.3 Otimização da resistência térmica global em função de H_3/L_3 para diversos valores da fração da área das cavidades laterais.	46
Figura 4.4 O comportamento da resistência térmica global $(\theta_{\max})_m$ uma vez minimizada e seu correspondente ótimo $(H_3/L_3)_o$ para vários valores de ϕ_3	47
Figura 4.5 Topologias ótimas para vários valores de ϕ_3 obtidos a partir da Fig. 4.4: a) $\phi_3 = 0.01$ (ótimo), b) $\phi_3 = 0.03$ e c) $\phi_3 = 0.043$	47
Figura 4.6. Otimização da resistência térmica global $(\theta_{\max})_m$ em função de H_3/L_3 para diversos valores da fração da área das cavidades laterais	49
Figura 4.7 O comportamento da resistência térmica global $(\theta_{\max})_m$ uma vez minimizada e seu correspondente ótimo $(H_3/L_3)_o$ para vários valores de ϕ_3	50
Figura 4.8 Topologias do campo de temperaturas ótimas para várias relações de ϕ_3 obtidas a partir da Fig. 4.7: a) $\phi_3 = 0.01$, b) $\phi_3 = 0.012$ (ótimo) e c) $\phi_3 = 0.043$	51

Figura 4.9 Otimização de θ_{\max} em função de H_2/L_2 para diversos valores da razão de H_1/L_1	52
Figura 4.10 O efeito de H_1/L_1 sobre $(\theta_{\max})_m$ e seus correspondentes ótimos $(H_2/L_2)_o$	53
Figura 4.11 Ilustração de algumas formas ideais a partir da Figura 4.10	53
Figura 4.12: Otimização do terceiro grau de liberdade, H/L	55
Figura 4.13: Ilustração das topologias do campo de temperaturas duas vezes otimizada para as seguintes relações de H/L : a) $H/L = 1.0$. b) $H/L = 1.5$ e c) $H/L = 2.0$	55
Figura 4.14: Otimização do quarto grau de liberdade. H_0/L_0 e seus correspondentes ótimos $(H_2/L_2)_{oo}$ e $(H_1/L_1)_{oo}$	56
Figura 4.15: Ilustração das topologias do campo de temperaturas três vezes otimizada para as seguintes relações de H_0/L_0	57
Figura 4.16: Ilustração da melhor topologia do campo de temperaturas entre todas otimizadas na presente pesquisa feita para as seguintes relações $H/L = 2.0$; $(H_2/L_2)_{oo} = 5.0$; $(H_3/L_3)_{oo} = 165$	57

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1.1 Exemplos de Cavidades na Engenharia	2
Tabela 3.1: Teste de Independência de Malha	40
Tabela 3.2: Comparação entre os resultados obtidos com a presente metodologia e a de Lorenzini e Rocha (2009)	41
Tabela T.1: Valores que deram origem a Fig. 4.1 e que foram inseridos no software KaleidaGraph [®] - Otimização da resistência térmica global em função de H_2/L_2 para diversos valores da fração da área introduzida no sólido. ϕ_0	74
Tabela T.2: Valores que deram origem a Fig. 4.2 e que foram inseridos no software KaleidaGraph [®] - Otimização da resistência térmica global em função de H_3/L_3 para diversos valores da fração da área das cavidades laterais	76
Tabela T.3: Valores que deram origem a Fig. 4.4 e que foram inseridos no software KaleidaGraph [®] - O comportamento da resistência térmica global $(\theta_{\max})_m$ uma vez minimizada e seu correspondente ótimo $(H_3/L_3)_o$ para vários valores de ϕ_3	78
Tabela T.4: Valores que deram origem a Fig. 4.7 e que foram inseridos no software KaleidaGraph [®] - O comportamento da resistência térmica global $(\theta_{\max})_m$ uma vez minimizada e seu correspondente ótimo $(H_3/L_3)_o$ para vários valores de ϕ_3	78
Tabela T.5: Otimização da resistência térmica global θ_{\max} em função de H_2/L_2 para diversos valores da razão de H_1/L_1	81
Tabela T.6: O efeito de H_1/L_1 sobre a resistência térmica global uma vez minimizada $(\theta_{\max})_m$ e seus correspondentes ótimos $(H_2/L_2)_o$	84
Tabela T.7: Otimização do terceiro grau de liberdade. H/L	84

Tabela T.8: Otimização do quarto grau de liberdade. H_0/L_0 e seus correspondentes ótimos $(H_2/L_2)_{\text{oo}}$ e $(H_1/L_1)_{\text{oo}}$	86
--	----

1. INTRODUÇÃO

1.1. Motivação

A demanda por extrair uma maior quantidade de energia em um mesmo espaço (taxa de compactação) conduziu a necessidade por avaliações das geometrias de trocadores de calor. Uma forma de investigar tais geometrias é através do método *Constructal Design* (Bejan e Lorente, 2008), que tem sido aplicado a vários problemas de engenharia, por exemplo, feixes de tubos de trocadores de calor, espaços entre aletas em dispositivos de remoção de energia e distribuição de canalizações.

A busca pela extração máxima de calor em um determinado espaço (taxa de compactação) é recentemente descrita como um princípio baseado no processo *Constructal*, onde a arquitetura é gerada segundo um objetivo global. Neste princípio, não há prejuízo para as restrições globais e a configuração do fluxo é desconhecida (Lorenzini e Rocha, 2006). Assim, a configuração geométrica de um sistema tem liberdade para se modificar no intuito de distribuir melhor o fluxo ao qual o sistema está submetido.

Esta problemática está associada a uma grande classe de exemplos onde o aumento da capacidade (alta densidade de transferência de calor) são obrigatórios (Biserni e Rocha, 2004). Por exemplo, em pacotes de refrigeração de produtos eletrônicos de pequena escala (Bello-Ochende e Bejan, 2005) onde há a necessidade do aumento da capacidade de dissipação de energia dos circuitos eletrônicos e da diminuição das dimensões dos mesmos, ou seja, um aumento sensível da taxa de compactação.

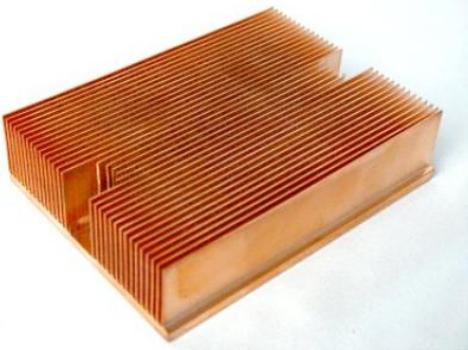
Neste sentido, o emprego de algumas arquiteturas, como aletas individuais e

conjunto de aletas, tem sido amplamente estudadas (Kraus, 1999). No que diz respeito à otimização geométrica destes dispositivos, o método *Constructal Design* tem sido aplicado com sucesso no estabelecimento de geometrias que conduzam a uma otimização dos sistemas térmicos (Bejan, 1997; Bejan, 2007; Vargas et al., 2005).

O estudo de cavidades (aletas negativas) tem sido amplamente desenvolvido no campo da engenharia e possui diversas aplicações, que vão desde sistemas de arrefecimento de motores de combustão interna até trocadores de calor. Logo, estudá-los tornou-se tão importante quanto estudar sistemas aletados. Na Tab.1.1 são apresentadas aplicações onde o estudo de cavidades é importante.

Tabela 1.1: Exemplos de Cavidades na Engenharia.

Exemplo		Descrição
		Sistemas de arrefecimento de motores de combustão,
		Espaços em feixes de tubos de geradores de vapor e trocadores de calor,

	Alvéolos Pulmonares,
	Dissipadores de calor usado em processadores de computador,

Em função da importância do estudo das cavidades e da otimização geométrica, será realizado nesta pesquisa um estudo numérico a respeito da otimização geométrica de um sistema de cavidades complexas, na forma de TY, com cavidades laterais adicionais, empregando o método *Constructal Design*. Esta geometria foi selecionada em função da mesma ser uma possível evolução geométrica da cavidade em forma de TY estudada anteriormente por Lorenzini e Rocha (2009).

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1. Conceitos Fundamentais sobre Teoria Constructal

A Teoria Constructal é baseada em um princípio de objetivos e constantes, e começou a ser desenvolvida na década de 1990. Essa teoria prima pela configuração do fluxo (geometria e desenho), fundamentada em um princípio de configuração, geração e evolução no tempo na direção do maior acesso de fluxo global em sistemas que podem variar livremente a sua geometria (Bejan, 2000a; Bejan e Lorente, 2008).

Este princípio pode ser aplicado a sistemas de qualquer escala, desde a microscópica até a macroscópica, propiciando desta forma o desenvolvimento de estruturas complexas de escoamentos em engenharia e na natureza. Exemplos onde este princípio pode ser empregado são encontrados na biofísica, geofísica e sistemas naturais nas quais as geometrias se modificam a fim de alcançar um objetivo, que é a minimização da resistência térmica global para suas correntes internas (Bejan, 2000b; Bejan et al., 2009).

A Teoria Constructal vem sendo amplamente utilizada para otimizar sistemas de fluxo em aplicações de engenharia e o método aplicado nesses tipos de sistemas é denominado de Projeto Constructal (do inglês, *Constructal Design*). A Lei Constructal consiste em permitir que a geometria do escoamento possa ser variada e deduzida a partir de um princípio de maximização do desempenho global, sujeita às restrições globais.

Então, para o fluxo de um sistema finito persistir ao longo do tempo, é necessário que a sua configuração geométrica evolua de tal forma a facilitar o acesso das correntes neste sistema. De acordo com Bejan e Lorente (2004), a Teoria

Constructal trata da geração de arquiteturas em sistemas termodinâmicos que normalmente estão em desequilíbrio, ou seja, sistemas onde existe escoamento. Porém, os sistemas estão destinados a imperfeições e, segundo Bejan (2000a), a distribuição geométrica ideal nestes sistemas pode levar à minimização de tais imperfeições.

Nesse sentido, a origem da geração da geometria está no equilíbrio do fluxo de várias resistências através do sistema, que são oriundas das irreversibilidades naturais deste, como o atrito, a expansão não-resistida, a transferência de calor entre dois meios com diferenças finitas de temperaturas, etc.

Os projetos de engenharia, conforme Bejan e Lorente (2004), caracterizam-se pela configuração, que é livre para variar fazendo com que o desempenho do sistema melhore. Assim, o esforço para melhorar o sistema é chamado pelos autores anteriormente mencionados de “distribuição ótima de imperfeição”, cuja distribuição diminui as irreversibilidades afim de minimizar a quantidade de energia útil perdida.

Conforme Kim et al.(2010), é razoável assumir que as melhores geometrias serão as mais complexas quando o tamanho do fluxo do sistema aumenta ou quando o volume disponível torna-se menor. Isto significa que quanto mais complexa for a estrutura melhor será o desempenho dela, o que vai ao encontro com o princípio da Teoria Constructal (Lorenzini et al. 2009).

Essa Teoria não se restringe à engenharia, visto que segundo ela, na natureza as estruturas são definidas de forma preditiva, ou seja, sem nenhum conhecimento prévio do problema em questão. Logo, ela é um princípio físico que permite antecipar as formas e as estruturas que ocorrem nos sistemas naturais, como árvores, secções transversais de rios, configurações geométricas de animais, clima, entre outros (Bejan, 2000b). Estes são exemplos naturais de configurações com a forma de uma árvore, que apresentam como característica importante a capacidade do sistema de persistir ao longo

do tempo no caso de um ramo ser bloqueado.

Outro aspecto importante é descrito por Bejan (2008), que afirma que cada configuração ótima é excelente apenas para o problema em estudo, ou seja, se trocarmos seus componentes, a configuração passa a não ser mais necessariamente a ótima. Então, cada problema deverá ser pesquisado particularmente para que a configuração geométrica ideal possa ser determinada.

Assim, neste trabalho serão resolvidas numericamente as configurações de duas geometrias envolvendo cavidade em forma de TY com cavidades laterais adicionais, onde uma configuração difere da outra pelo posicionamento dessas cavidades laterais adicionais. Afim de fundamentar a motivação para a presente pesquisa, são apresentados na seqüência trabalhos que abordam a otimização geométrica de cavidades utilizando o método *Constructal Design*.

2.2. Estado da Arte

A Teoria Constructal baseia-se no princípio de objetivos e constantes. Essa Teoria foi utilizada para gerar configurações geométricas de sistemas naturais e na engenharia, conforme estudo realizado por Bejan e Lorente, (2006). Dentre as configurações naturais descritas neste estudo, estão os leitos de rios, formas de animais, clima, turbulência e outros.

Quanto à aplicação na engenharia, é possível citar seu uso na configuração geométrica de sistema de células de combustíveis, rede de árvores de transporte de pessoas, bens e informação, circuitos eletrônicos e outros. Ainda no domínio da engenharia, a literatura apresenta estudos sobre a otimização da transferência de calor em cavidades e aletas (Aziz, 1992; Kraus, 1999). Estas são amplamente utilizadas em

dispositivos e equipamentos térmicos empregados na engenharia como, por exemplo, geradores de vapor, motores de combustão interna e, principalmente, trocadores de calor.

O desafio em transferência de calor está em como minimizar os custos e otimizar o desempenho térmico de tais dispositivos. Na busca pela solução desses problemas, algumas técnicas são apresentadas na literatura. Uma descrição a respeito de tais abordagens é apresentada no estudo de Dirk et al. (2005). Estas técnicas foram estudadas de forma teórica, numérica e experimental. Recentemente foram desenvolvidos pacotes e softwares que facilitaram a otimização de sistemas de transferência de calor (Bejan, 2000a).

Neste sentido, Bejan et al. (1997) estudaram a otimização geométrica de canais e micro canais, pois estes possuem grande importância nos sistemas de resfriamento de dispositivos eletrônicos devido à sua elevada taxa de compactação, e devido à possibilidade de maior remoção de energia usando troca de calor latente.

Pence (2000) desenvolveu a proposta feita por Bejan (1997), desenvolvendo um fractal, em forma de rede bifurcada, de um fluxo de calor bidimensional. Outro trabalho desenvolvido por Pence (2002) refere-se a um modelo unidimensional para prever a distribuição de pressão e temperatura em uma superfície.

Ainda dentro do estudo de componentes eletrônicos, Bello-Ochende et al. (2007a) empregou *Constructal Design* para minimizar a resistência térmica através da otimização geométrica de um coletor tridimensional para o resfriamento de dissipadores de calor por micro-canais. Outros avanços de componentes eletrônicos são apresentados na literatura também por Bello-Ochende et al. (2010).

O estudo da geração de energia usando material de alta condutividade térmica para a remoção do calor gerado foi desenvolvido por Bejan (1997) no intuito de

minimizar a resistência térmica global entre um volume de tamanho finito e um ponto.

O material de alta condutividade térmica, segundo Bejan (2000b), em um projeto ótimo, tem distribuição em forma de árvore e cada aspecto desta é determinístico. Assim, quanto mais graus de liberdade forem explorados, mais detalhada será a árvore. A partir deste estudo, foi possível concluir que a configuração ótima de qualquer geometria, tanto de ponto para volume quanto ao contrário, tem a forma de árvore. Além disso, a geração desta geometria ocorre de forma determinística.

O principal objetivo da engenharia, e desta pesquisa, é a busca pelo melhor *Design* que otimize o processo de transferência de calor em dispositivos térmicos, como nos trabalhos anteriormente citados. Nestes, emergiu a tendência dos componentes em apresentarem uma maior taxa de compactação e, por consequência, uma maior taxa de dissipação. Conseqüentemente, a capacidade de remoção de calor a partir destes dispositivos, tem se tornado um grande desafio na concepção desses componentes (Dirker, 2005).

Com relação à otimização da arquitetura do sistema de fluxo, Rocha et al. (2009) fizeram um estudo sobre árvores, cuja morfologia assemelhou-se a uma parede vascular com vários pontos de acesso sem aquecimento intenso. A vascularização do fluido foi feita sem uma direção específica, através de simulações numéricas de fluxo de calor, conjugada em três direções do fluido. Isso mostrou que foi possível determinar todas as características geométricas de vascularidade ótima com vários níveis de bifurcação.

A Teoria Constructal trata também da forma como o sistema de fluxo adquire sua arquitetura. Por exemplo, Rocha et al. (2009) apresenta arquiteturas de fluxo dendrítico derivadas da lei constructal, como estruturas de fluxo que ligam um ponto (fonte) a uma infinidade de outros pontos (curva, área ou volume). Neste trabalho foi estudado o resfriamento de uma parede vascularizada, por convecção, sob calor intenso.

Os canais foram preenchidos pelo fluido convectivo e nos intertícios é a estrutura sólida que conduz o calor para canais de fluxo, resultando na árvore.

Essa teoria também é aplicada na otimização da transferência de calor em escoamentos externos, conforme trabalho feito por Dos Santos et al. (2009) utilizando o *Constructal Design* para a otimização da taxa de transferência de calor por convecção entre o feixe de obstáculos e escoamento circundante. Este tipo de fluxo é aplicado a vários domínios da engenharia, como em trocadores de calor e embalagem de produtos eletrônicos.

Outra aplicação importante da Teoria Constructal é a otimização geométrica de aletas. A função das aletas na transferência de calor é otimizar a troca de calor em sistemas compostos a partir do aumento da superfície de contato. Então, podemos destacar o estudo realizado por Bonjour et al. (2004), que relata a relação fundamental entre a maximização do desempenho global e a arquitetura maleável (mutante) em um trocador de calor coaxial duplo tubo.

Também foram estudadas as configurações com aletas radiais ramificadas (Matos et al., 2004) através dos estudos numérico e experimental, combinados para maximizar a transferência de calor otimizando trocadores de calor em aletas, cujas formas são circulares e elípticas. Dentre os diversos tipos de aletas otimizadas por Bejan e Amogbel (2000), está o conjunto de aletas em forma de T, cujo objetivo foi a maximização da condutância térmica global com a restrição do volume total e do material da aleta.

A partir do estudo desenvolvido para aletas é que surgiu a análise de desempenho de sistemas de sólidos externos com geração de calor interno uniforme e condições de contorno adiabáticas sobre as superfícies externas, e que apresentam

cavidades isotérmicas, que são as regiões formadas entre as aletas adjacentes (Rocha et al., 2005).

Dentro desta perspectiva, o estudo das cavidades podem representar promotores essenciais de ebulição nucleada como, por exemplo, no efeito VAPOTRON (Falter, 1996; Lorenzini e Biserni, 2003), que é decorrente da interação térmica entre a superfície não- isotérmica aletada e um fluido submetido a uma alteração transitória de fase.

A otimização da forma de uma cavidade que se insere em uma parede sólida com condução, realizada por Biserni et al. (2004), é a versão da aleta condutora que será otimizada exteriormente. O objetivo deste trabalho foi minimizar a resistência térmica global entre o sólido e a cavidade.

A Teoria Constructal também pode ser empregada em outras áreas além da engenharia, como por exemplo, estudos voltados à economia (Bejan et al., 2009). Neste sentido, a Teoria Constructal foi empregada para a minimização de custos (acesso ao fluxo máximo) no transporte de mercadorias.

Também podemos citar o uso da Teoria Constructal no desenvolvimento de tratamentos para determinados tipos de câncer, como por exemplo o de pele. O objetivo aqui seria para efetuar o controle do aquecimento do tumor, de modo que a temperatura do tecido normal que o cerca, continue a ser baixa o suficiente para não sofrer danos (Wang et al., 2007).

Assim, dentre as várias aplicações da Teoria, optou-se nesta pesquisa pelo estudo das cavidades que é tão básico quanto a aleta sólida em si, pois ela é encontrada em praticamente todos os domínios onde o aumento e alta densidade da transferência de calor são necessários.

Neste sentido, serão apresentados trabalhos relacionados à otimização da

transferência de calor em cavidades, no intuito de apresentar a evolução geométrica das suas configurações, justificando a geometria proposta no presente estudo.

2.2.1. Cavidade em forma de C e T

O primeiro estudo relevante sobre cavidades foi o estudo de uma cavidade em forma de C introduzida numa parede sólida com transferência de calor por condução (Biserni e Rocha, 2005), cujo domínio está ilustrado na Fig. 2.1.

O sólido foi considerado isotrópico com a condutividade térmica (k) [$\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$] e taxa volumétrica de geração de energia, q''' [W m^{-3}], constantes. As superfícies externas do corpo gerador de calor são perfeitamente isoladas, vide superfícies hachuradas na Fig. 2.1. Enquanto isso, a cavidade é isotérmica e atua como sumidouro da energia gerada internamente no sólido.

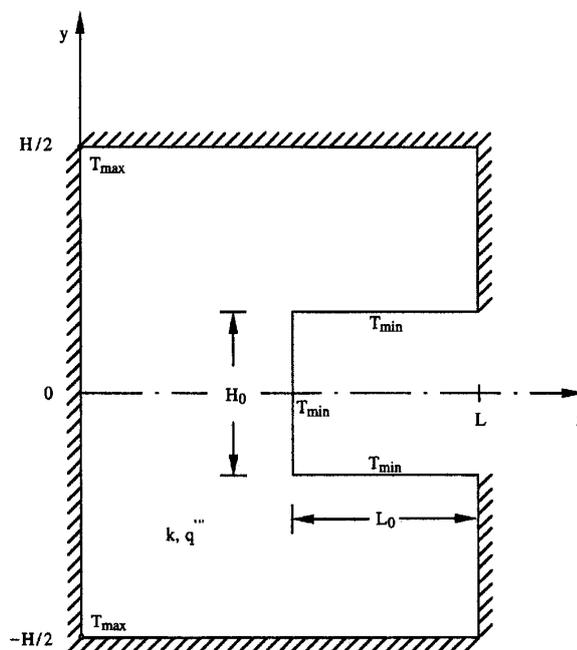


Figura 2.1: Intrusão lateral isotérmica em um sólido com a geração de calor uniforme.

Há restrições quanto ao projeto térmico, pois para que os circuitos eletrônicos

não queimem (*burnout*) foi necessário que as temperaturas não excedessem um determinado nível. Uma vez que, a temperatura máxima é uma restrição física do problema, tornou-se necessária a utilização de um índice máximo de geração de calor num volume fixo. Tal restrição ao projeto foi representada pela maximização da condutância térmica global $q'''A/(\theta_{\max} - \theta_{\min})$ ou pela minimização da resistência térmica global $(\theta_{\max} - \theta_{\min})/(q'''A)$.

O indicador de desempenho global é a resistência térmica global entre o volume de todo o sistema (cavidade e sólido) e vizinhança. O objetivo deste projeto foi minimizar a resistência térmica global entre o sólido e a cavidade. Por razões de simplicidade e clareza, a geometria foi considerada bidimensional, onde o volume global e o volume da cavidade são retângulos de proporções geométricas variáveis (Biserni e Rocha, 2005).

O problema de condutância foi resolvido variando os seguintes graus de liberdade: H/L e H_0/L_0 . Estes graus de liberdade representam as relações entre altura e largura do sólido e altura e largura da cavidade, respectivamente, conforme ilustra a Fig. 2.1. O problema também foi resolvido para várias frações entre o volume da cavidade e o volume do sólido (ϕ). Foi observado que a resistência térmica diminui quando a fração de volume ocupada pela cavidade (ϕ) aumenta. Além disso, houve uma geometria ótima que conduzia o sistema térmico a uma menor resistência térmica.

A otimização para esta estrutura foi feita apenas para um grau de liberdade, visto que a resistência térmica global minimizada para H_0/L_0 variou monotonicamente com H/L , ou seja, não existiu uma relação ótima de H/L , bem como o volume ocupado pela cavidade lateral, suficientemente pequeno, gerou uma resistência térmica global uma vez minimizada proporcional a H/L . Logo, o efeito da intrusão da cavidade desapareceu.

No intuito de testar a robustez da geometria otimizada, foram feitas análises quanto a forma ideal da cavidade em ser ou não sensível a mudanças de acordo com a forma como o corpo sólido foi aquecido, se interna ou externamente. Segundo os autores, as tendências do sistema são as mesmas e a geometria é relativamente insensível à forma como o corpo foi aquecido.

Neste mesmo estudo, Biserni e Rocha (2005) otimizaram a forma geométrica de uma cavidade em forma de T, Fig. 2.2. Vale destacar que as restrições impostas a cavidade T foram as mesmas impostas para a cavidade em C.

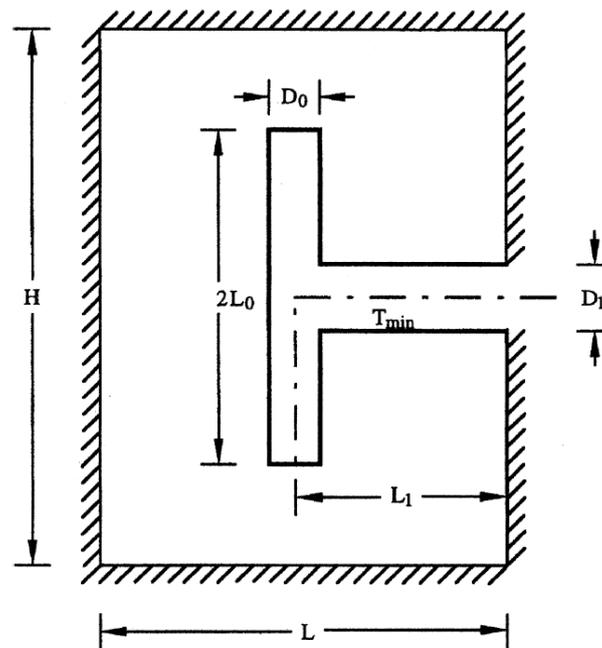


Figura 2.2: Primeira construção de uma intrusão lateral em forma de T.

A proposta para essa nova cavidade foi a de aumentar a complexidade da estrutura geométrica no intuito de melhorar o desempenho do sistema. Quando o calor gerado pelo volume é removido através de uma cavidade (porta) e quando o menor tamanho de elemento de volume é fixo, a otimização da geometria gera uma estrutura

de fluxo em forma de árvore (Bejan, 2000a).

A primeira construção mais simples é a árvore em forma de T (Bejan et al., 2002). A Figura 2.2 mostra a intrusão em forma de T constituída por um tronco de intrusão ($L_1 \times D_1$) que ramifica em duas intrusões elementares ($L_0 \times D_0$). A dimensão global da construção ($HL = A$) é fixa. O material sólido tem condutividade térmica constante (k) e taxa volumétrica de geração de energia (q'''). A superfície da cavidade isotérmica em (T_{\min}) [K] e o perímetro do retângulo HL são isolados. Nessa nova configuração geométrica, os pontos quentes de temperatura (T_{\max}) ocorrem em um ou mais pontos no sólido.

O objetivo para essa nova estrutura é o mesmo da anterior em forma de C, ou seja, minimizar a resistência térmica global e (\tilde{T}_{\max}).

A estrutura tem 3 graus de liberdade: H/L , L_0/L_1 e D_0/D_1 , que representam, respectivamente, a relação entre a altura e largura do sólido, altura e largura da cavidade e altura e largura da cavidade elementar. A fração H/L é fixa e igual a um. O problema também foi resolvido para várias frações entre o volume da cavidade e o volume do sólido (ϕ) e também, para varias frações do volume ocupado pelo território retangular definida pela estrutura em forma de T, (ψ).

Os autores observaram que a resistência global minimizada diminuiu quando a cavidade em forma de T cresceu, ou seja, à medida que (ψ) aumentou, ao mesmo tempo a proporção (L_0/L_1)_o aumentou. A cavidade lateral atingiu sua melhor forma quando penetrou o corpo quase completamente. Esta conclusão será válida para ambas as configurações, aquecimento interno e aquecimento externo.

Comparando as duas geometrias C e T, os autores concluíram que a configuração em forma de T funciona melhor do que a C para a resistência térmica global mínima, e a melhor configuração de cavidade em forma de T funciona cerca de

29% melhor do que a melhor configuração em forma de C. Na Figura 2.3 são apresentadas algumas configurações ótimas para a cavidade em forma de T em função de ψ , onde o desempenho melhora à medida que a forma da cavidade penetra quase completamente no sólido. Logo, a cavidade em forma de T é possivelmente uma evolução da cavidade em forma de C.

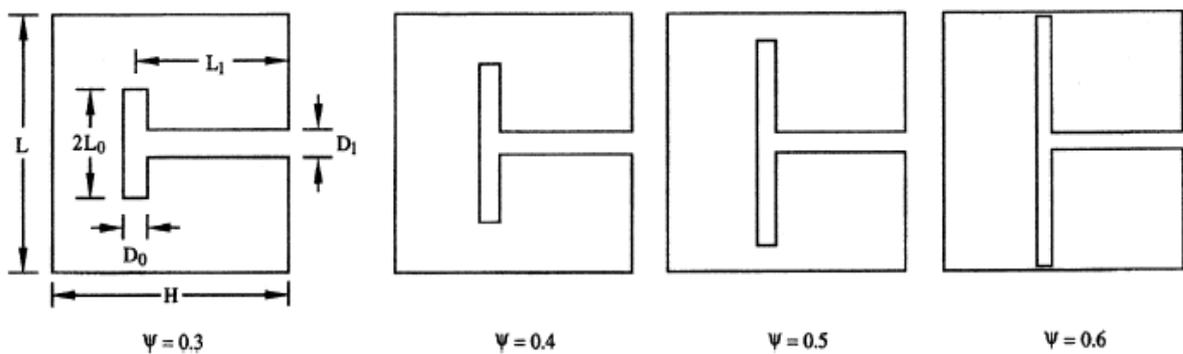


Figura 2.3: Configurações ótimas da cavidade em forma de T em função de ψ .

Nos trabalhos seguintes foram utilizadas as mesmas hipóteses simplificadoras empregadas no trabalho realizado para as cavidades em forma de C e T, ou seja, permaneceram as mesmas características de desempenho global bem como as restrições físicas e função objetivo.

2.2.2. Cavidade Retangular em um Sólido Trapezoidal

Este trabalho foi desenvolvido por Rocha et al. (2005) e foi considerado o *design constructal* de uma cavidade em forma retangular introduzida num sólido condutor trapezoidal. O domínio e as condições de contorno são ilustradas na Fig. 2.4.

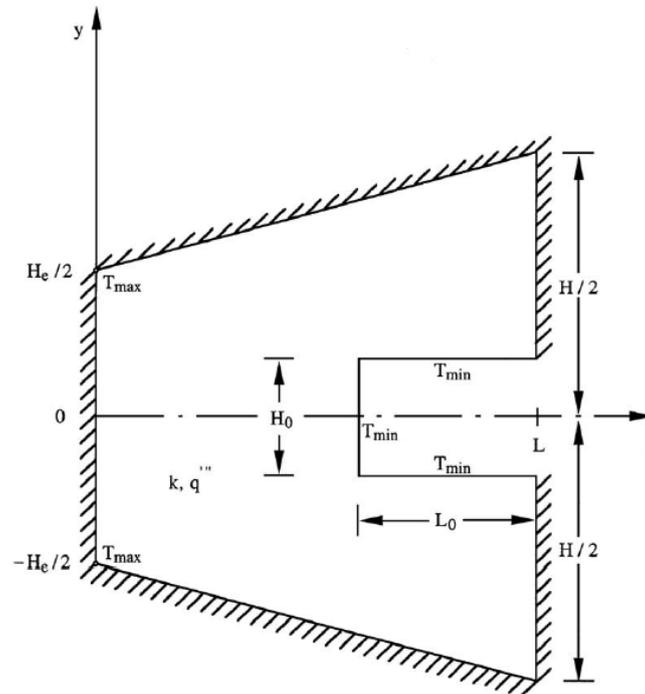


Figura 2.4: Intrusão lateral isotérmica trapezoidal em um corpo condutor bidimensional com geração de calor uniforme.

O sólido externo apresenta geração de calor interna uniforme. Quanto às condições de contorno, as superfícies externas foram mantidas adiabáticas, enquanto as superfícies das cavidades foram isotérmicas. A forma externa da cavidade é livre para mudar, conforme o método constructal, e sujeita às restrições de volume na busca do desempenho global máximo.

As simulações foram feitas para um grande número de configurações, calculando a resistência térmica global para cada uma dessas configurações com a menor resistência global. A simetria permitiu que fossem feitos os cálculos em apenas metade do domínio.

A primeira etapa desse trabalho consistiu na otimização da arquitetura do sistema, neste caso, de uma configuração básica de uma cavidade isotérmica que penetra em um corpo condutor.

Primeiramente foi avaliada a minimização da resistência térmica global, quando a forma externa do corpo gerador de calor (H/L), fração entre a altura maior e a largura do sólido, variou livremente para vários valores de (H_0/H), fração entre a base menor e a maior do sólido trapezoidal.

Isso foi feito para referenciar o caso da cavidade interna quadrada. Posteriormente, o tamanho da fração do volume ocupado pela cavidade (ϕ) foi considerado fixo e igual a 0.1. A resistência térmica surgiu como uma função dos parâmetros anteriormente mencionados e conseqüentemente isso gerou a possibilidade de minimizar duas vezes a resistência térmica global adimensional (\tilde{T}_{\max}).

No segundo nível do sistema, foram feitas otimizações numéricas para o grau de liberdade (H_0/L_0), que é a fração entre a altura e a largura da cavidade, de forma que a cavidade quadrada tornou-se apenas um caso particular. Também a resistência térmica global mínima aumentou monotonicamente para (H_0/L_0), apresentando em seguida uma diminuição lenta, ao passo que a proporção duas vezes otimizada (H/L)_{oo} só aumentou monotonicamente.

Assim, os autores concluíram que os pontos quentes ocorreram no perímetro adiabático e a investigação numérica mostrou uma dupla minimização térmica. Para os sólidos estreitos ($H/L < 1$), a cavidade ótima penetra mais no volume sólido ($H_0/L_0 < 1$), ao passo que quando o sólido vai se tornando mais largo, a cavidade penetra menos no sólido ($H_0/L_0 > 1$), conforme a Fig. 2.5. O desempenho melhora à medida que a forma da cavidade torna-se delgada ($H_0 \ll L_0$), ou seja, nesse limite, a melhor cavidade é aquela que penetra quase completamente o sólido.

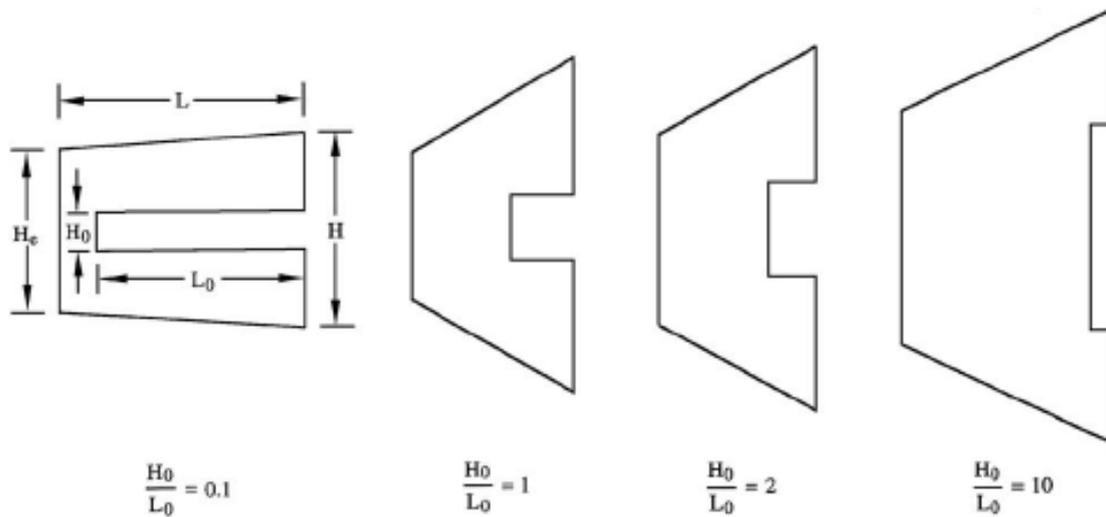


Figura 2.5: Algumas configurações ótimas quando a forma da cavidade varia.

2.2.3. Cavidade em Forma de H

A cavidade em forma de H foi desenvolvida por Biserni et al. (2007) e o seu domínio é ilustrado na Fig. 2.6, Essa configuração é possivelmente a evolução da cavidade em forma de T.

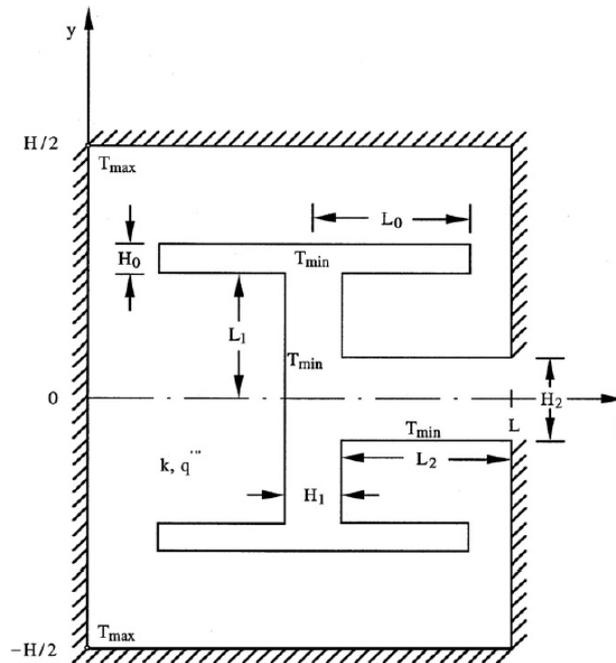


Figura 2.6: Intrusões isotérmicas em forma de H em um corpo condutor bidimensional com geração de calor uniforme.

A geração de calor interno foi distribuída de maneira uniforme em toda a superfície da parede sólida, com condições adiabáticas no exterior. Já a superfície da cavidade isotérmica e o volume total da cavidade em forma de H são fixos com a geometria da cavidade livre para variar de acordo com o princípio Constructal.

Os corpos considerados no projeto foram tomados bidimensionais por simplicidade e clareza. Neste trabalho os volumes, total e da cavidade em forma de H foram considerados fixos. No entanto, a geometria da cavidade pôde mudar livremente. Da mesma forma que nos trabalhos anteriores, o objetivo do projeto foi minimizar a resistência térmica global entre o sólido e a cavidade.

A resistência térmica foi otimizada para cinco graus de liberdade, representados pelas proporções L_0/L_2 , L_1/L_2 , H_0/H_2 , H_1/H_2 e H_2/L_2 , que consistem respectivamente na relação entre a fração da metade do comprimento da ponta da cavidade e o comprimento da haste da cavidade, metade do comprimento vertical da intrusão da construção e o

comprimento da haste da cavidade, espessura da ponta da cavidade e a espessura da haste da cavidade, espessura da intrusão vertical da construção e a espessura da haste da cavidade e, por fim, a espessura da haste da cavidade e o comprimento da haste da cavidade. A fração H/L fixa e igual a 1.

Os resultados das otimizações mostraram que a melhor arquitetura é alcançada quando a proporção H_2/L_2 tornou-se tão pequena quanto possível. Já os resultados numéricos desenvolvidos nesse estudo apontam que a configuração geométrica em forma de H tem desempenho cerca de quatro vezes superior a de uma cavidade em forma de C elementar e três vezes superior a cavidade em forma de T ótima. Ambas as comparações foram feitas sobre as mesmas condições térmicas, geração de calor uniforme e fração de volume ocupado pela cavidade.

2.2.4. Cavidade em Forma Elíptica

Este trabalho foi feito por Rocha et al. (2008) e foi desenvolvida a geometria de uma cavidade elíptica que penetra numa parede sólida condutora. A cavidade foi otimizada para dois conjuntos de condições térmicas: cavidade isotérmica e cavidade com fluxo de calor constante. Os volumes, total e da cavidade elíptica, foram tomados fixos e a geometria da cavidade é livre para mudar. O calor gerado foi removido por resfriamento da parede da cavidade e o indicador do desempenho global foi a resistência térmica global entre o sólido gerador de calor e a cavidade.

O domínio foi estudado na sua estrutura bidimensional, conforme pode ser visto na Fig. 2.7, onde as dimensões (H) e (L) variaram e a terceira dimensão (W) é perpendicular ao plano da figura.

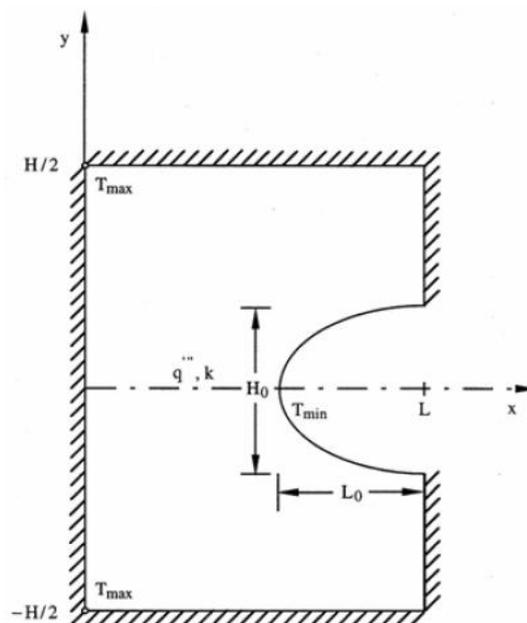


Figura 2.7: Cavidade isotérmica num corpo condutor bidimensional com geração de calor uniforme.

Segundo os autores, foi contemplada a otimização para todos os graus de liberdade. Foi observado que a menor resistência ocorreu quando a cavidade penetrou quase completamente o sólido. Além disso, a resistência térmica diminuiu à medida que a fração de volume ocupado pela cavidade (ϕ) aumentou. Essa geometria apresentou um comportamento peculiar, visto que houve apenas uma geometria ótima da cavidade para todos os valores da forma externa H/L . Este comportamento só não foi observado para $H/L=2$, pois para este valor existiram duas possibilidades para a forma interna ideal da cavidade elíptica.

Além das condições de contorno acima apresentadas, a cavidade elíptica foi otimizada submetida ao resfriamento por transferência de calor por convecção. Neste caso, o fluxo de calor por convecção teve seu coeficiente de transferência de calor por convecção (h) [$\text{Wm}^{-2}\text{k}^{-1}$] e temperatura do fluido na vizinhança (T_∞), mantidos constantes. O importante desta abordagem foi que a cavidade se mostrou praticamente

insensível as condições de contorno impostas a cavidade.

2.2.5. Cavidade em Forma de Y

Esse trabalho trata do estudo da cavidade em forma de Y inserida em uma parede condutora sólida com geração de calor, e foi desenvolvido por Marques et al. (2007). O presente trabalho aplicou o método *Constructal Design* para otimizar a troca de calor entre a parede sólida condutora com geração de calor e a cavidade em forma de Y, no intuito de remover a energia da parede sólida.

De acordo com a Figura 2.8, a aleta da cavidade elementar de espessura t_0 faz ângulo α com uma linha horizontal e duas cavidades elementares de espessura t_0 e comprimento L_0 serviram como afluentes a uma haste de espessura t_1 e comprimento L_1 . Além disso, o problema foi considerado bidimensional, com a terceira dimensão (W) suficientemente longa em comparação com as outras dimensões do domínio sólido e a aleta invertida.

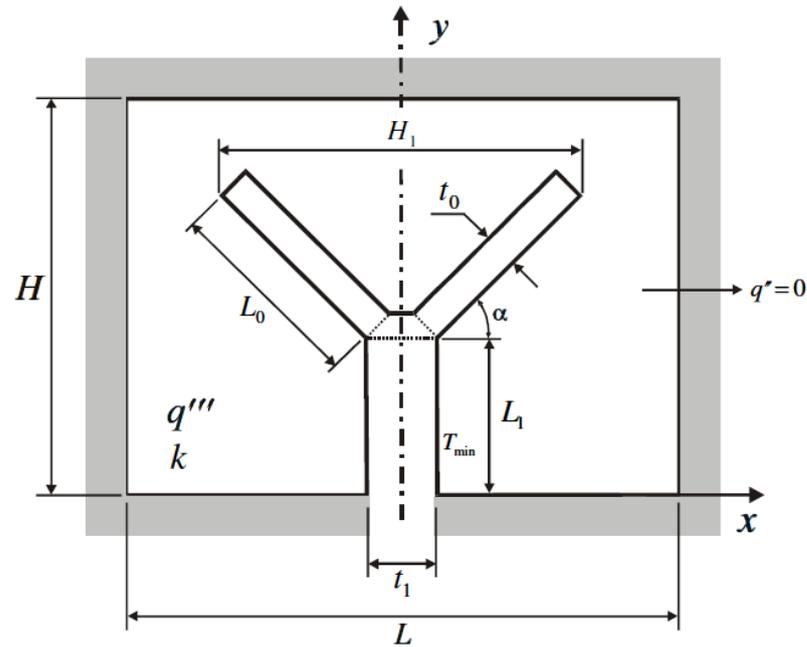


Figura 2.8: Domínio físico da cavidade em forma de Y em um volume retangular com geração de calor (Marques et al., 2007).

O sólido foi considerado isotrópico com condutividade térmica constante, k , e possui uma taxa volumétrica de geração de energia (q'''). As superfícies externas do corpo gerador de calor são perfeitamente isoladas e o calor atual gerado foi removido através das paredes da cavidade com temperatura constante.

A otimização foi realizada para o campo de temperaturas em função de todos os graus de liberdade (L_1/L_0 , t_1/t_0 , α , H/L), que correspondem, respectivamente, à fração entre o comprimento da haste e o comprimento da cavidade elementar, espessura da haste e espessura da cavidade elementar, ângulo entre a aleta da cavidade elementar e uma linha horizontal e comprimento e espessura do sólido. O problema foi submetido as seguintes restrições (A , ϕ , ψ), que correspondem, respectivamente, à área do sólido, fração da área da cavidade e área do sólido e, por fim, volume que circunscreve a aleta invertida.

A otimização foi realizada variando o ângulo entre o ramo bifurcado da aleta invertida em forma de Y e o eixo horizontal. Além disso, foram avaliados os seguintes valores da razão entre os volume da cavidade e o volume do retângulo que circunscreve a cavidade: $\psi = 0.3, 0.4$ e 0.5 . Foi observado que, para cada valor de ψ havia um ângulo específico que minimizava a resistência térmica global entre a parede sólida condutora e a cavidade. Também foi observado que o ângulo ideal foi aquele que distribuiu mais uniformemente os pontos quentes ao longo da parede condutora sólida. Esta observação vai ao encontro do princípio da distribuição das imperfeições afirmado por Bejan (2000).

Os autores compararam os resultados da cavidade em forma de Y com as obtidas em forma de C e T, e concluíram que a cavidade em Y apresentou um melhor desempenho térmico que as outras.

O ângulo ideal α_{opt} diminui com o aumento de ψ , mostrando que o sistema naturalmente redistribui sua configuração geométrica para alcançar uma distribuição do campo térmico mais uniforme, o que está de acordo com as observações de Lorenzini e Rocha (2006) em estudo de aletas em forma de Y.

2.2.6. Cavidade em Forma de TY

O estudo da cavidade na forma de TY foi desenvolvido por Lorenzini e Rocha (2009). No *Constructal Design* foi considerado que há geração de calor uniforme na parede sólida. Os volumes, total e da cavidade, são fixos, porém com os comprimentos geométricos da cavidade variáveis.

Quanto ao modelo matemático, o projeto considerou a estrutura com configuração bidimensional, onde a terceira dimensão (W) suficientemente longa em

relação à altura (H) e o comprimento (L) do volume ocupado pelo corpo. Dentre as características deste projeto, tem-se que o sólido foi considerado isotrópico com condutividade térmica (k) constante. Além disso, o sólido possui uma taxa volumétrica de geração de energia, (q'''), constante. As superfícies externas do corpo gerador de calor são perfeitamente isoladas, vide superfícies hachuradas na Fig. 2.9. O calor atual gerado ($q'''A$) foi removido por transferência de calor por convecção através das paredes da cavidade e o coeficiente de transferência de calor (h) é uniforme em todas as superfícies expostas.

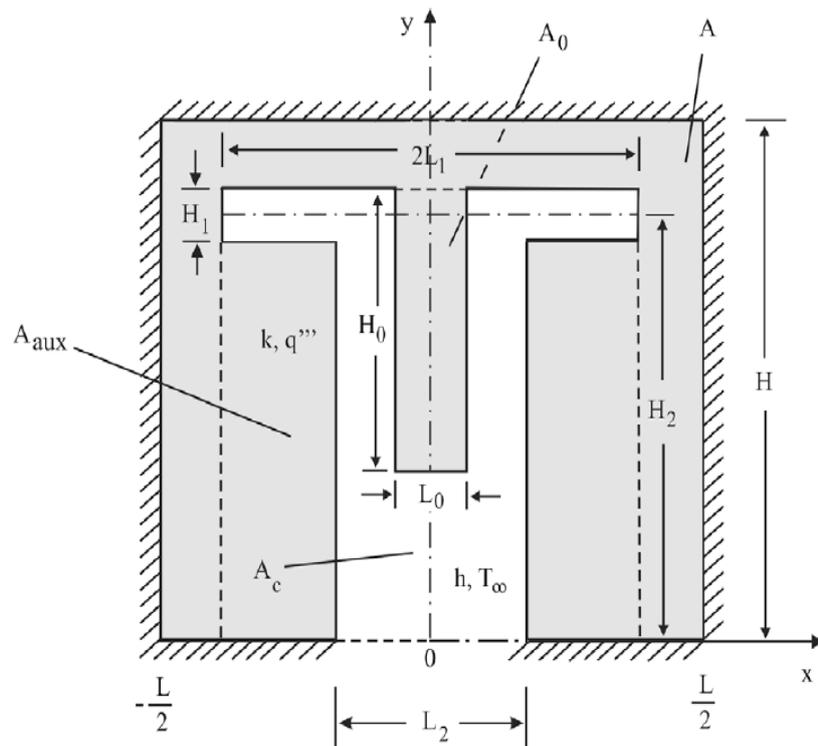


Figura 2.9: Cavidade na forma TY e suas condições de contorno.

O trabalho numérico consistiu em determinar o campo de temperaturas para configurações que apontassem relações geométricas ótimas. Para isso foi feita a otimização de três graus de liberdade H_2/L_2 , H_1/L_1 e H_0/L_0 , que representam,

respectivamente, a razão entre a altura e a largura da cavidade elementar, altura e largura do ramo bifurcado e altura e a largura do sólido introduzido na cavidade, com H/L fixo e igual a 1.

Os autores concluíram neste estudo que a temperatura máxima uma vez minimizada ($\theta_{\max,m}$) diminui quando $(H_2/L_2)_o$ aumenta. Foi observado também que a otimização de H_1/L_1 revela um segundo mínimo e o seu correspondente ótimo $(H_2/L_2)_o$ aumenta quando H_1/L_1 aumenta.

Outros resultados importantes emergem deste estudo, como o valor ótimo da razão $(H_1/L_1)_o$ aumentar e a dupla minimização de $(H_2/L_2)_{oo}$ diminuir quando a razão da área do sólido inserido na cavidade (ϕ_0) aumenta. Para o terceiro grau de liberdade H_0/L_0 , que depende apenas de (ϕ_0), foram utilizados os resultados ótimos anteriores e a dupla otimização da resistência térmica diminui quando o terceiro grau de liberdade (H_0/L_0) aumenta para todos os valores do parâmetro (ϕ_0).

O valor global da resistência térmica para o maior valor permitido para a relação H_0/L_0 ocorreu quando a área do sólido inserido na cavidade penetrou completamente na cavidade e atingiu a coordenada $y=0$. Isso indica também que há uma resistência térmica mínima global em função do parâmetro (ϕ_0), onde ocorreram a tripla minimização da resistência térmica global ($\theta_{\max,mmm}$) e suas relações ótimas correspondentes $(H_2/L_2)_{ooo}$, $(H_1/L_1)_{oo}$ e $(H_0/L_0)_o$ para valores da fração da cavidade (ϕ_0).

O fechamento deste trabalho traz uma comparação com as cavidades até então estudadas e os resultados do desempenho dessa arquitetura da cavidade em forma de TY. A cavidade ótima em forma de TY apresentou uma resistência térmica adimensional cerca de 108 % menor do que a cavidade ótima em forma de C.

Este estudo corroborou os estudos anteriores que apontavam para um melhor

desempenho do sistema quando a estrutura geométrica deste torna-se mais complexa. Estes resultados concordaram com o princípio da Teoria Constructal de complexidade geométrica que diz que quanto maior a liberdade de se transformar melhor será o desempenho do sistema (Lorenzini e Rocha 2009).

2.3 OBJETIVOS

2.3.1 Objetivo Geral

No presente trabalho é realizado um estudo a respeito da transferência de calor entre sólidos com geração uniforme de energia e cavidades na forma T-Y com cavidades laterais retangulares, conforme Fig. 3.1 e 3.2, adicionais inseridas para a remoção da energia gerada neste sólido. Essa configuração pode ser considerada uma evolução da otimização geométrica desenvolvida por Lorenzini e Rocha (2009) que consistiu na cavidade em forma de T-Y. O objetivo deste estudo é minimizar a resistência térmica global desse conjunto complexo de cavidades submetidas a restrições como a área total, área da cavidade e área lateral das cavidades. Para alcançar tal objetivo, foram variados os graus de liberdade geométricos desse sistema H/L , H_0/L_0 , H_1/L_1 , H_2/L_2 , H_3/L_3 de acordo com o Princípio Constructal.

2.3.2. Objetivos Específicos

Os objetivos específicos do presente trabalho foram:

- Avaliar numericamente diversas configurações geométricas para um conjunto complexo de cavidades na forma TY com cavidades laterais estendidas de

acordo com o princípio Constructal, verificando se a geometria proposta conduz a resultados melhores do que os propostos para um conjunto complexo de cavidades na forma TY.

- Realizar recomendações teóricas sobre o projeto térmico de cavidades introduzidas em sólidos com geração de calor, que podem ser encontrados em aplicações de engenharia como: circuitos eletrônicos ou ferramentas de usinagem.

- Verificar se o princípio da melhor distribuição das imperfeições se aplica para as geometrias otimizadas encontradas na presente pesquisa e avaliar se estão de acordo com a Teoria Constructal.

Em ambas geometrias propostas neste estudo, o sólido é isotrópico com a condutividade térmica constante (k) e taxa volumétrica uniforme de geração de energia, (q'''). As superfícies externas do sólido com geração de energia são perfeitamente isoladas e o calor gerado ($q''' A$) é removido por convecção através das paredes das cavidades. O coeficiente de transferência de calor (h) é uniforme sobre todas as superfícies expostas bem como a temperatura do fluido na vizinhança (T_∞).

Em conformidade com o *Constructal Design* (Bejan e Lorente, 2008), a otimização será submetida a três restrições: restrição de área total, restrição de área da cavidade e a restrição de área lateral das cavidades. Assim, serão analisadas e determinadas as geometrias ótimas variando os seguintes graus de liberdade: H/L , H_0/L_0 , H_1/L_1 , H_2/L_2 , H_3/L_3 . A otimização é obtida quando a menor resistência térmica global, Eq. (3.1), é alcançada.

$$R = \frac{(T - T_\infty)}{(q''' A)} \quad (3.1)$$

Há restrições ao projeto térmico, pois para que os materiais possam resistir é necessário que as temperaturas não excedam um determinado nível. Dessa forma, a temperatura máxima (T_{\max}) é uma restrição física do problema, sendo necessário a definição de um índice máximo de geração de calor no volume fixo. Na definição do problema, essa restrição ao projeto é representada pela minimização da resistência térmica global máxima:

$$R_{\max} = \frac{T_{\max} - T_\infty}{q''' A} \quad (3.2)$$

onde (T_{\max}) é a temperatura máxima, (T_{∞}) é a temperatura do fluido que envolve o conjunto, (q''') é a razão de geração de energia e A é a área.

Através da solução da equação da condução de calor em um sistema de coordenadas cartesianas. Eq. (3.3), em conjunto com as condições de contorno do problema é obtido o campo de temperaturas no interior do volume do sólido (Incropera et al., 2008).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q''' = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.3)$$

Para o problema desenvolvido nesta pesquisa, a Eq. (3.3) será resolvida para as seguintes hipóteses simplificativas:

1. Condutividade térmica (k) constante,
2. Transferência de calor em regime Permanente: $\left(\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \right)$
3. Termo fonte de energia por unidade de volume constante: $(q''' = cte)$,
4. Problema bidimensional nas direções de x e y : $\left(\frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right) = 0$

A partir das hipóteses simplificativas, a equação da difusão do calor que será resolvida neste trabalho passa a ser dada por:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{q'''}{k} = 0 \quad (3.4)$$

3.3 Adimensionalização do Problema

As áreas, que são restrições ao *Constructal Design*, são dadas por:

Área total,

$$A = HL \quad (3.5)$$

Área da cavidade,

$$A_c = 2H_1L_1 + \left(H_2 - \frac{H_1}{2}\right)L_2 - H_0L_0 + 2H_3L_3 \quad (3.6)$$

Área da cavidade lateral,

$$A_{c2} = 2H_3L_3 \quad (3.7)$$

A área do sólido introduzido na cavidade também é considerada uma restrição,

$$A_0 = H_0L_0 \quad (3.8)$$

Área auxiliar,

$$A_{aux} = 2L_1H_2 + L_1H_1 \quad (3.9)$$

A área auxiliar é uma área retangular na qual a cavidade TY está inscrita, assim esta área é definida para impedir que o conjunto complexo de aletas extrapole o domínio do volume sólido.

Podemos expressar as equações (3.3)-(3.9) como a fração área das cavidades, lembrando que a área pode ser escrita da forma $A = A^{0,5} A^{0,5}$

Fração da área cavidade,

$$\phi_c = \frac{A_c}{A} = \frac{2H_1L_1 + \left(H_2 - \frac{H_1}{2}\right)L_2 - H_0L_0 + 2H_3L_3}{A^{0,5} A^{0,5}} \quad (3.10)$$

Fração da área da cavidade lateral,

$$\phi_3 = \frac{A_{c2}}{A} = \frac{H_3L_3}{A^{0,5} A^{0,5}} \quad (3.11)$$

Fração do sólido inserido na cavidade,

$$\phi_0 = \frac{A_0}{A} = \frac{H_0L_0}{A^{0,5} A^{0,5}} \quad (3.12)$$

Fração da área auxiliar,

$$\psi = \frac{A_{aux}}{A} = \frac{2L_1H_2 + L_1H_1}{A^{0,5} A^{0,5}} \quad (3.13)$$

A resistência térmica global em função da geometria das cavidades é determinada a partir da resolução da Equação de Condução de Calor adimensional ao

longo de todo o domínio das cavidades:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + 1 = 0 \quad (3.14)$$

onde as variáveis adimensionais são:

$$\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{H}_0, \tilde{L}_0, \tilde{H}_1, \tilde{L}_1, \tilde{H}_2, \tilde{L}_2, \tilde{H}_3, \tilde{L}_3, \tilde{H}, \tilde{L} = \frac{x, y, H_0, L_0, H_1, L_1, H_2, L_2, H_3, L_3, H, L}{A^{0.5}} \quad (3.15)$$

A resistência térmica adimensional pode ser expressa por:

$$\tilde{\theta} = \frac{T - T_{\min}}{q''' A/k} \quad (3.16)$$

Ainda, a temperatura máxima adimensional também é a resistência térmica adimensional global do projeto e ela pode ser representada da forma:

$$\tilde{\theta}_{\max} = \frac{T_{\max} - T_{\min}}{q''' A/k} \quad (3.17)$$

3.4. Condições de Contorno do Problema

3.4.1. Condições de Contorno para o Design 1

Para determinar a distribuição de temperatura em um meio, é necessário resolver a forma apropriada da equação do calor (Incropera et al., 2008). Então, as superfícies externas, linha vermelha da Fig. 3.1, são adiabáticas (fluxo prescrito nulo). Enquanto que, as superfícies das cavidades, linha preta da Fig. 3.1, possuem condição de Robin ou terceira espécie. Nesta condição, é imposto um fluxo prescrito por convecção, sendo mantidos (h) e (T_∞) constantes.

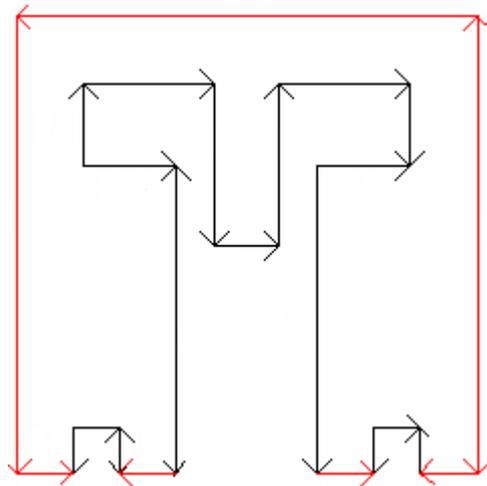


Figura 3.3: Superfícies externas adiabática.

Logo, as superfícies exteriores isoladas têm como condições de contornos adimensionais:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tilde{x}} = 0 \quad \text{em} \quad \tilde{x} = -\frac{\tilde{L}}{2} \quad \text{ou} \quad \tilde{x} = \frac{\tilde{L}}{2} \quad \text{e} \quad 0 \leq \tilde{y} \leq \tilde{H} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{y}} = 0 \quad \text{em} \quad \tilde{y} = 0 \quad \text{e} \quad -\frac{\left(\tilde{L} + \tilde{L}_2\right)}{4} + \frac{\tilde{L}_3}{2} \leq \tilde{x} \leq -\frac{\tilde{L}_2}{2} \quad \text{ou} \quad -\frac{\tilde{L}_2}{2} \leq \tilde{x} \leq -\frac{\left(\tilde{L} + \tilde{L}_2\right)}{4} + \frac{\tilde{L}_3}{2} \\ \text{ou} \quad \frac{\tilde{L}_2}{2} \leq \tilde{x} \leq \frac{\left(\tilde{L} + \tilde{L}_2\right)}{4} - \frac{\tilde{L}_3}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{\left(\tilde{L} + \tilde{L}_2\right)}{4} + \frac{\tilde{L}_3}{2} \leq \tilde{x} \leq \frac{\tilde{L}}{2} \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tilde{y}} = 0 \quad \text{em} \quad \tilde{y} = \tilde{H} \quad \text{e} \quad -\frac{\tilde{L}}{2} \leq \tilde{x} \leq \frac{\tilde{L}}{2} \quad (3.20)$$

Enquanto que, para as demais superfícies, que delimitam as cavidades, aplica-se a condição de Robin ou de terceira espécie. Pelo balanço de energia de superfície, o fluxo prescrito que chega por condução na superfície da cavidade $\left(-k \frac{dT}{dx}\right)$. Lei de Fourier, será igual ao fluxo de saída por convecção $(h(T_s - T_\infty))$. Lei do resfriamento de Newton, e é esse fluxo que é imposto na superfície das cavidades,

$$-\frac{\partial \theta}{\partial \tilde{x}} = \frac{a^2}{2} \theta \quad \text{em} \quad \tilde{x} = -\frac{\tilde{L}_0}{2} \quad \text{ou} \quad \tilde{x} = \frac{\tilde{L}_0}{2}, \quad \text{e} \quad \tilde{H}_2 + \frac{\tilde{H}_1}{2} - \tilde{H}_0 \leq \tilde{y} \leq \tilde{H}_2 + \frac{\tilde{H}_1}{2} \quad (3.21)$$

$$-\frac{\partial \theta}{\partial \tilde{x}} = \frac{a^2}{2} \theta \quad \text{em} \quad \tilde{x} = -\tilde{L}_1 \quad \text{ou} \quad \tilde{x} = \tilde{L}_1, \quad \text{e} \quad \tilde{H}_2 - \frac{\tilde{H}_1}{2} \leq \tilde{y} \leq \tilde{H}_2 + \frac{\tilde{H}_1}{2} \quad (3.22)$$

$$-\frac{\partial \theta}{\partial \tilde{x}} = \frac{a^2}{2} \theta \quad \text{em} \quad \tilde{x} = -\frac{\tilde{L}_2}{2} \quad \text{ou} \quad \tilde{x} = \frac{\tilde{L}_2}{2}, \quad \text{e} \quad 0 \leq \tilde{y} \leq \tilde{H}_2 - \frac{\tilde{H}_1}{2} \quad (3.23)$$

$$-\frac{\partial \theta}{\partial \tilde{x}} = \frac{a^2}{2} \theta \quad \text{em} \quad \tilde{x} = \frac{\left(\tilde{L} + \tilde{L}_2\right)}{4} - \frac{\tilde{L}_3}{2} \quad \text{ou} \quad \tilde{x} = -\frac{\left(\tilde{L} + \tilde{L}_2\right)}{4} + \frac{\tilde{L}_3}{2}, \quad \text{e} \quad 0 \leq \tilde{y} \leq \tilde{H}_3 \quad (3.24)$$

$$-\frac{\partial \theta}{\partial \tilde{x}} = \frac{a^2}{2} \theta \text{ em } \tilde{x} = \frac{(\tilde{L} + \tilde{L}_2)}{4} + \frac{\tilde{L}_3}{2} \text{ ou } \tilde{x} = -\frac{(\tilde{L} + \tilde{L}_2)}{4} - \frac{\tilde{L}_3}{2}, \text{ e } 0 \leq \tilde{y} \leq \tilde{H}_3 \quad (3.25)$$

$$-\frac{\partial \theta}{\partial \tilde{y}} = \frac{a^2}{2} \theta \text{ em } \tilde{y} = \tilde{H}_2 - \frac{\tilde{H}_1}{2}, \text{ e } -\tilde{L}_1 \leq \tilde{x} \leq -\frac{\tilde{L}_2}{2} \text{ ou } \frac{\tilde{L}_2}{2} \leq \tilde{x} \leq \tilde{L}_1 \quad (3.26)$$

$$-\frac{\partial \theta}{\partial \tilde{y}} = \frac{a^2}{2} \theta \text{ em } \tilde{y} = \tilde{H}_2 + \frac{\tilde{H}_1}{2}, \text{ e } -\tilde{L}_1 \leq \tilde{x} \leq -\frac{\tilde{L}_0}{2} \text{ ou } \frac{\tilde{L}_0}{2} \leq \tilde{x} \leq \tilde{L}_1 \quad (3.27)$$

$$-\frac{\partial \theta}{\partial \tilde{y}} = \frac{a^2}{2} \theta \text{ em } \tilde{y} = \tilde{H}_2 + \frac{\tilde{H}_1}{2} - \tilde{H}_0 \text{ e } -\frac{\tilde{L}_0}{2} \leq \tilde{x} \leq \frac{\tilde{L}_0}{2} \quad (3.28)$$

$$-\frac{\partial \theta}{\partial \tilde{y}} = \frac{a^2}{2} \theta \text{ em } \tilde{y} = \tilde{H}_3, \text{ e } \frac{(\tilde{L} + \tilde{L}_2)}{4} - \frac{\tilde{L}_3}{2} \leq \tilde{x} \leq \frac{(\tilde{L} + \tilde{L}_2)}{4} + \frac{\tilde{L}_3}{2} \quad (3.29)$$

$$-\frac{\partial \theta}{\partial \tilde{y}} = \frac{a^2}{2} \theta \text{ em } \tilde{y} = \tilde{H}_3, \text{ e } -\frac{(\tilde{L} + \tilde{L}_2)}{4} - \frac{\tilde{L}_3}{2} \leq \tilde{x} \leq -\frac{(\tilde{L} + \tilde{L}_2)}{4} + \frac{\tilde{L}_3}{2} \quad (3.30)$$

O parâmetro (a) que emerge das equações (3.21 - 3,30) já foi usado por Bejan e Almgöbel (2000) e é definido como

$$a = \left(\frac{2hA^{1/2}}{k} \right)^{1/2} \quad (3.31)$$

Nesta pesquisa, o valor desse parâmetro foi considerado, para ambos os projetos, $a = 0.1$, pois, segundo os autores mencionados acima, este valor é obtido para problemas do tipo por convecção forçada em aletas, logo, também nos interstícios destas. O valor do parâmetro utilizado aqui já havia sido utilizado anteriormente por Lorenzini e Rocha (2009) no estudo da cavidade me forma de TY,

3.4.2. Condições de Contorno para o *Design 2*

A geometria que define o *Design 2* difere da anterior pelo deslocamento das cavidades laterais. Assim, algumas condições de contorno foram alteradas em função desse deslocamento. A condição de contorno da superfície inferior isolada é reescrito por:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tilde{y}} = 0 \text{ em } \tilde{y} = 0 \text{ e } -\frac{(\tilde{L} + \tilde{L}_1)}{4} + \frac{\tilde{L}_3}{2} \leq \tilde{x} \leq -\frac{\tilde{L}_2}{2} \text{ ou } -\frac{\tilde{L}}{2} \leq \tilde{x} \leq -\frac{(\tilde{L} + \tilde{L}_1)}{4} - \frac{\tilde{L}_3}{2}$$

$$\text{ou } \frac{\tilde{L}_2}{2} \leq \tilde{x} \leq \frac{(\tilde{L} + \tilde{L}_1)}{4} - \frac{\tilde{L}_3}{2} \text{ ou } \frac{(\tilde{L} + \tilde{L}_1)}{4} + \frac{\tilde{L}_3}{2} \leq \tilde{x} \leq \frac{\tilde{L}}{2} \quad (3.32)$$

As condições de contorno na superfície lateral da cavidade são dadas por:

$$-\frac{\partial \theta}{\partial \tilde{x}} = \frac{a^2}{2} \theta \text{ em } \tilde{x} = \frac{(\tilde{L} + \tilde{L}_1)}{4} - \frac{\tilde{L}_3}{2} \text{ ou } \tilde{x} = -\frac{(\tilde{L} + \tilde{L}_1)}{4} + \frac{\tilde{L}_3}{2}, \text{ e } 0 \leq \tilde{y} \leq \tilde{H}_3 \quad (3.33)$$

$$-\frac{\partial \theta}{\partial \tilde{x}} = \frac{a^2}{2} \theta \text{ em } \tilde{x} = \frac{(\tilde{L} + \tilde{L}_1)}{4} + \frac{\tilde{L}_3}{2} \text{ ou } \tilde{x} = -\frac{(\tilde{L} + \tilde{L}_1)}{4} - \frac{\tilde{L}_3}{2}, \text{ e } 0 \leq \tilde{y} \leq \tilde{H}_3 \quad (3.34)$$

$$-\frac{\partial \theta}{\partial \tilde{y}} = \frac{a^2}{2} \theta \text{ em } \tilde{y} = \tilde{H}_3, \text{ e } \frac{(\tilde{L} + \tilde{L}_1)}{4} - \frac{\tilde{L}_3}{2} \leq \tilde{x} \leq \frac{(\tilde{L} + \tilde{L}_1)}{4} + \frac{\tilde{L}_3}{2} \quad (3.35)$$

$$-\frac{\partial \theta}{\partial \tilde{y}} = \frac{a^2}{2} \theta \text{ em } \tilde{y} = \tilde{H}_3 \text{ e } -\frac{(\tilde{L} + \tilde{L}_1)}{4} - \frac{\tilde{L}_3}{2} \leq \tilde{x} \leq -\frac{(\tilde{L} + \tilde{L}_1)}{4} + \frac{\tilde{L}_3}{2} \quad (3.36)$$

As outras condições de contorno são mantidas as mesmas que as apresentadas para o *Design 1*.

3.5. Modelagem Numérica do Problema

A Eq. (3.17) foi determinada numericamente através da Eq. (3.14), para o campo de temperatura em todas as configurações assumidas (H/L , H_0/L_0 , H_1/L_1 , H_2/L_2 , H_3/L_3), de modo a calcular a resistência térmica adimensional global para todas as configurações geométricas estudadas. Assim, a Eq. (3.14) foi resolvida utilizando um código de elementos finitos, com base em elementos triangulares, desenvolvida em ambiente MATLAB[®], através da ferramenta PDETOOL (do inglês *Partial Differential Equations Tool*). Esta ferramenta resolve a equação da difusão do calor, Eq. (3.4), através do método de elementos finitos. A discretização espacial da equação da energia realizada pelo método de Galerkin (Reddy e Gartling, 1994) é apresentada no ANEXO I, por simplicidade não apresentaremos nesta secção. A malha empregada é não-uniforme nas direções de \tilde{x} e \tilde{y} , e varia de uma geometria para a próxima. A determinação da malha adequada foi feita por refinamentos sucessivos, aumentando o número de elementos de quatro vezes o tamanho da malha atual para o tamanho da malha seguinte, até que o critério de independência de malha, apresentado abaixo, fosse satisfeito,

$$\left| \frac{(\theta_{\max}^j - \theta_{\max}^{j+1})}{\theta_{\max}^j} \right| < 1 \times 10^{-4} \quad (3.37)$$

onde θ_{\max}^j representa a temperatura máxima calculada utilizando à malha atual e θ_{\max}^{j+1} a malha seguinte para o número de elementos aumentado em quatro vezes.

A Tabela 3.2 apresenta um exemplo de como a independência de malha foi alcançada conforme o critério imposto. Os seguintes resultados foram realizados com um intervalo entre 300 e 22.000 elementos triangulares para os valores dos parâmetros geométricos fixos de $\phi_0 = 0.1$, $\phi_c = 0.2$, $\phi_3 = 0.01$, $\psi = 0.6$, $a = 0.1$, $H/L = 1$, $H_0/L_0 = 8.2$, $H_1/L_1 = 0.25$, $H_2/L_2 = 3$, $H_3/L_3 = 1$

Tabela 3.1: Teste de Independência de Malha

Número de elementos	θ_{\max}^j	$\left \left(\theta_{\max}^j - \theta_{\max}^{j+1} \right) / \theta_{\max}^j \right $
339	31.903122	2.000×10^{-4}
1356	31.909505	8.660×10^{-5}
5424	31.912269	3.541×10^{-5}
21696	31.913399	

Para a verificação numérica do método empregado neste trabalho, os resultados numéricos obtidos com o código utilizado, através do MATLAB[®] PDETOOL, foram comparados com os resultados numéricos obtidos por Lorenzini e Rocha (2009). O domínio era, neste último caso, uma cavidade em forma de TY sem as cavidades laterais ($\phi_3 \approx 0$).

A Tabela 3.3 apresenta a comparação entre os resultados obtidos nesta pesquisa e os encontrados por Lorenzini e Rocha (2009), para os parâmetros fixos de: $a = 0.1$, $H/L = 1$, $H_0/L_0 = 2.5$, $H_1/L_1 = 0.5$, $H_3/L_3 = 1$, $\phi_0 = 0.05$, $\phi_c = 0.3$, $\phi_3 = 0.000001$ e $\psi = 0.6$. A Tabela 3.3 mostra que os dois grupos de resultados concordam em 0.07%.

Tabela 3.2: Comparação entre os resultados obtidos com a presente metodologia e a de Lorenzini e Rocha (2009).

$\phi_3 = 0.000001$			
Lorenzini e Rocha		Presente Trabalho	
H_2/L_2	θ_{\max}	H_2/L_2	θ_{\max}
2.508	40.0430	2.50	40.0032
2.63	39.8605	2.60	39.8555
2.687	39.7693	2.70	39.7094
2.847	39.5864	2.80	39.5793
2.904	39.5864	2.90	39.5165

Na seqüência, a comparação gráfica entre o domínio apresentado por Lorenzini e Rocha (2009), que consiste na cavidade em forma de TY sem as cavidades laterais, e a presente metodologia ($\phi_3 \approx 0$) para diversos valores da fração da área do sólido introduzido na cavidade ϕ_0 (0.1, 0.15, 0.2 e 0.25).

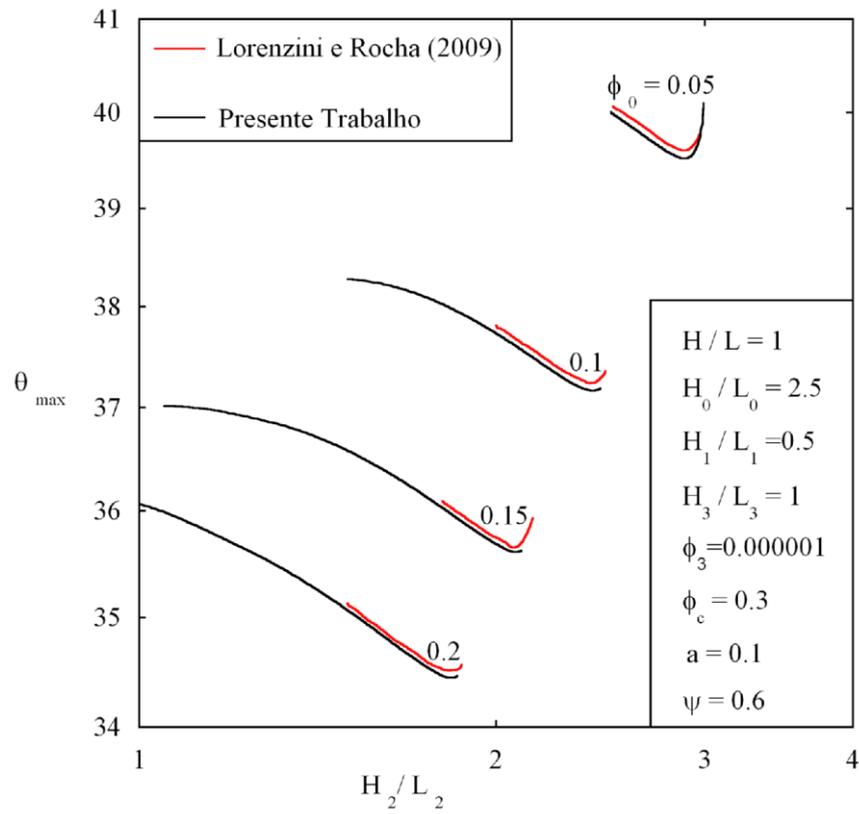


Figura 3.4: Comparação gráfica entre o domínio apresentado por Lorenzini e Rocha (2009) e a presente trabalho.

4. RESULTADOS

O presente trabalho tem por base a determinação numérica do campo de temperaturas para diversas configurações mostradas nas Fig. 3.1 e 3.2, avaliando qual geometria conduz ao melhor desempenho térmico do sistema. Inicialmente será avaliada a geometria *Design 1* e posteriormente o *Design 2*. Em ambos será investigada a variação da resistência térmica global adimensional em função dos seus respectivos graus de liberdade. Para a geometria que apresentar melhor desempenho será ampliada a análise dos graus de liberdade. Os resultados que deram origem aos gráficos são apresentados no ANEXO 2.

4.1. Resultados Obtidos para o *Design 1*

Inicialmente é investigado o comportamento da resistência térmica global adimensional em função do grau de liberdade H_2/L_2 , conforme ilustra a Fig. 4.1. Pode ser observado que para todas as simulações com ϕ_0 constante houve um ponto de ótimo. Esse comportamento foi semelhante ao obtido por Lorenzini e Rocha (2009) na simulação da cavidade TY. Ou seja, a presença das cavidades laterais não alterou o comportamento de θ_{\max} com relação a H_2/L_2 .

A Fig. 4.2 apresenta o campo de temperaturas de três topologias referentes a Fig. 4.1. Dentre elas a razão ótima de $(H_2/L_2)_o = 2.2$ que indica que a geometria ótima ocorre quando há a melhor distribuição do campo de temperaturas, conforme o princípio da minimização das imperfeições.

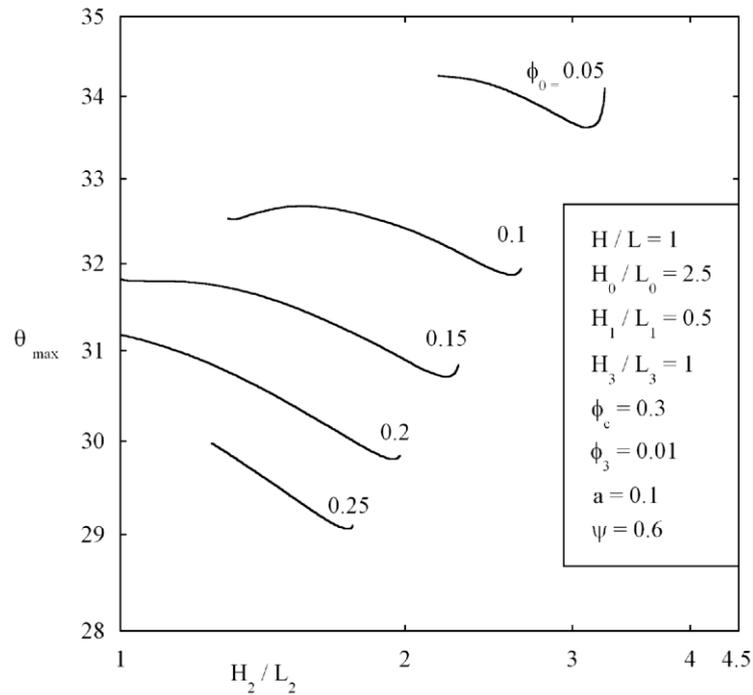


Figura 4.1: Otimização da resistência térmica global em função de H_2/L_2 para diversos valores da fração da área introduzida no sólido, ϕ_0 .

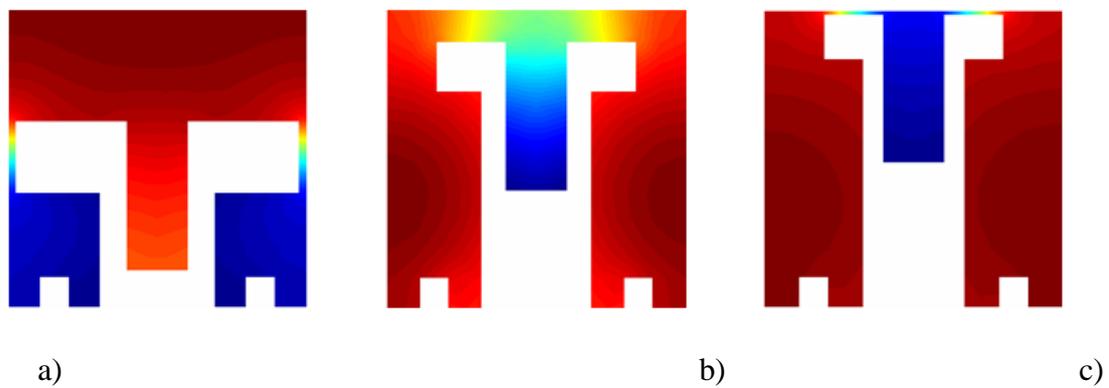


Figura 4.2: Topologias ótimas obtidas para $\phi_0 = 0.1$: a) $H_2/L_2 = 1.3$, b) $H_2/L_2 = 2.2$ (ótimo), c) $H_2/L_2 = 2.65$.

Como a inserção das cavidades laterais não alterou o comportamento de θ_{\max} com relação a H_2/L_2 , a razão ótima $(H_2/L_2)_o = 2.2$ é empregada para a avaliação do efeito da razão H_3/L_3 (altura da cavidade lateral pelo comprimento da cavidade lateral) sobre a resistência térmica adimensional. Assim, primeiramente é investigada a variação

da resistência térmica global adimensional em função do grau de liberdade H_3/L_3 para diversos valores do parâmetro ϕ_3 (relação do volume das cavidades laterais pelo volume do domínio sólido). A Fig. 4.3 mostra que existe uma relação ótima de H_3/L_3 que minimiza a resistência térmica global quando os parâmetros (ϕ_0 , ϕ_3 , ϕ_c , ψ e a) e os graus de liberdade (H/L , H_0/L_0 , H_1/L_1 e H_2/L_2) são fixos. Assim, para cada curva de ϕ_3 pode ser observado que a resistência térmica global adimensional diminui com o aumento da razão H_3/L_3 , ou seja, conforme aumenta a intrusão das cavidades laterais menor a resistência térmica do problema.

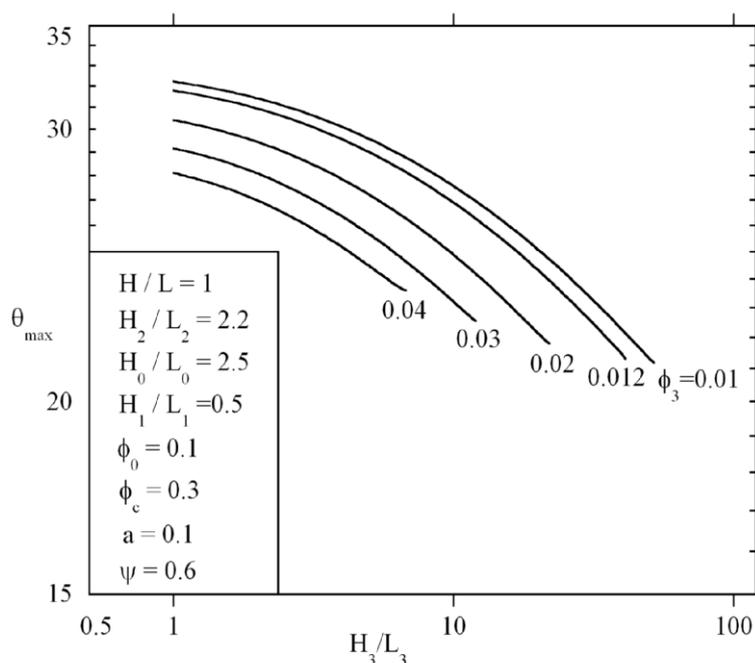


Figura 4.3: Otimização da resistência térmica global em função de H_3/L_3 para diversos valores da fração da área das cavidades laterais.

Os resultados ótimos da Fig.4.3 são apresentados na Fig.4.4, que apresenta uma vez minimizada a resistência térmica global, $(\theta_{\max})_m$ e a razão $(H_3/L_3)_o$ uma vez otimizada em função de ϕ_3 . É possível observar neste gráfico que o aumento de ϕ_3 não necessariamente conduz a melhor geometria, uma vez que a geometria ótima é alcançada para menores valores de ϕ_3 . Também pode ser observado que a geometria

ótima é alcançada para maiores valores da relação $(H_3/L_3)_o$, ou seja, quanto maior a intrusão das cavidades laterais no domínio sólido menor é a resistência térmica global adimensional. Na Figura 4.5 são apresentadas as topologias ótimas dos campos de temperaturas para $\phi_3 = 0.01, 0.03$ e 0.043 . Novamente, pode ser verificado que quando o campo de temperaturas está distribuído de forma mais homogênea obtém-se a menor resistência térmica, neste caso para $\phi_3 = 0.01$,

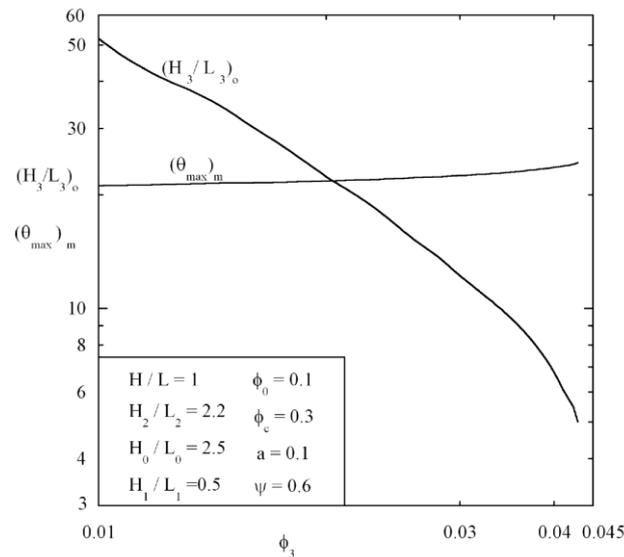


Figura 4.4: O comportamento da resistência térmica global $(\theta_{\max})_m$ uma vez minimizada e seu correspondente ótimo $(H_3/L_3)_o$ para vários valores de ϕ_3 .

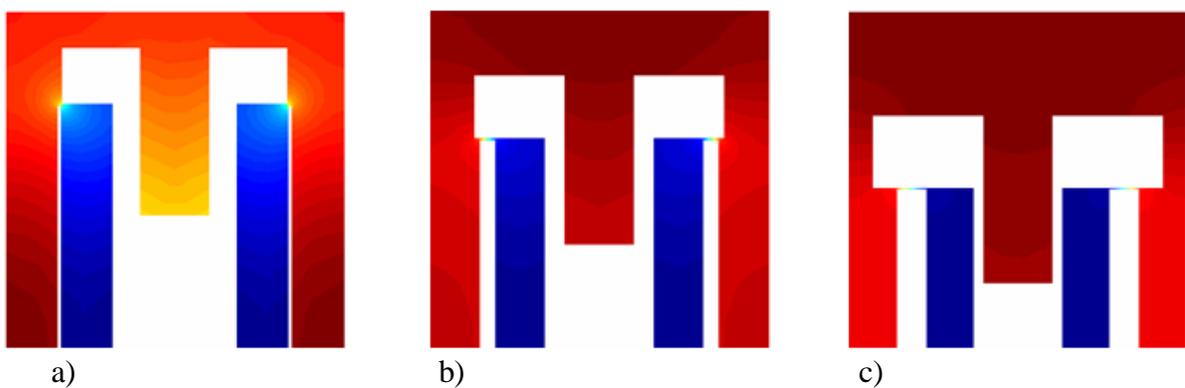


Figura 4.5: Topologias ótimas para vários valores de ϕ_3 obtidos a partir da Fig. 4.4: a) $\phi_3 = 0.01$ (ótimo), b) $\phi_3 = 0.03$ e c) $\phi_3 = 0.043$.

Também podemos observar na Fig. 4.5 que para $\phi_3 = 0.01$ ótimo ocorrem dois pontos de máxima temperatura (nos cantos inferiores do sólido) enquanto que para $\phi_3 = 0.03$ e $\phi_3 = 0.043$ há somente um ponto de máxima temperatura (no centro superior do sólido). Estes resultados mostram mais uma vez o atendimento ao princípio da minimização das imperfeições, visto que quando os pontos de máxima temperatura são melhor distribuídos ao longo do sólido (distribuição das imperfeições) menor é a resistência máxima do domínio.

4.2. Resultados Obtidos para o *Design 2*

Da mesma forma que foi feito para o *Design 1*, no *Design 2* é analisado o desempenho da variação da resistência térmica global adimensional em função do grau de liberdade H_3/L_3 para diversos valores do parâmetro ϕ_3 , conforme a Fig. 4.6. No entanto, a geometria ótima não ocorre mais para a menor relação de ϕ_3 avaliada ($\phi_3 = 0.01$). Isso significa que há uma relação ótima de ϕ_3 . Essa relação foi observada para ($\phi_3 = 0.012$). Em geral, também é possível observar que o *Design 2* conduziu a menores valores de resistência térmica adimensional do que o *Design 1*. A geometria ótima obtida com o *Design 2* possui uma resistência térmica adimensional aproximadamente 17 % menor do que a geometria ótima obtida com o *Design 1*. A explicação física para o melhor desempenho do *Design 2* em comparação com o *Design 1* está na maior intrusão das cavidades laterais no domínio sólido, ou seja, obtém-se maiores valores $(H_3/L_3)_o$ para o *Design 2*.

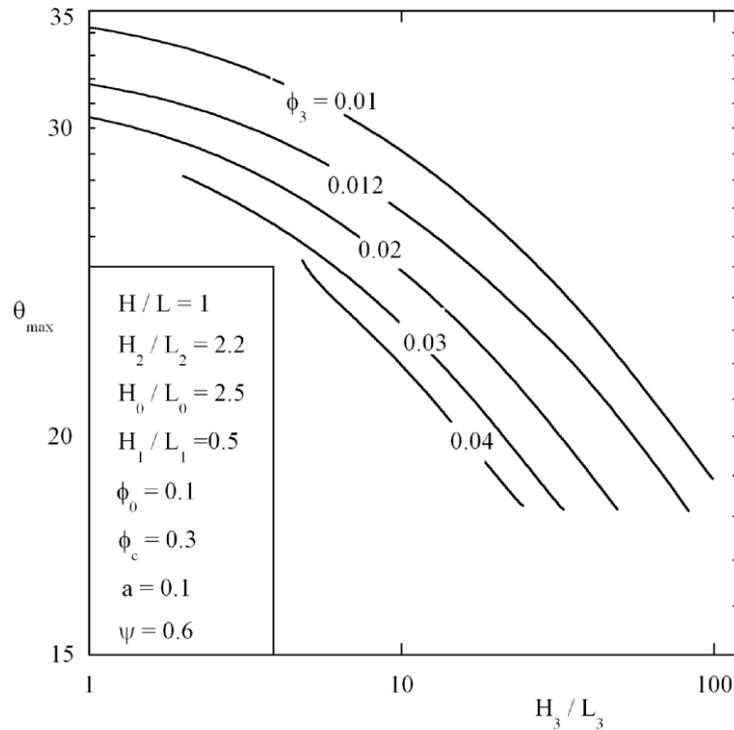


Figura 4.6: Otimização da resistência térmica global $(\theta_{\max})_m$ em função de H_3/L_3 para diversos valores da fração da área das cavidades laterais.

A Figura 4.6 indica que há uma segunda oportunidade de otimização. Estes resultados são apresentados resumidamente na Fig. 4.7 que mostra a resistência térmica global $(\theta_{\max})_m$ uma vez minimizada e a razão H_3/L_3 uma vez otimizada, $(H_3/L_3)_o$, em função de ϕ_3 . A Figura 4.7 corrobora os resultados da Fig. 4.6, ou seja, há uma razão para ϕ_3 ótima. Além disso, também pode ser observado que $(H_3/L_3)_o$ diminui conforme a razão ϕ_3 aumenta.

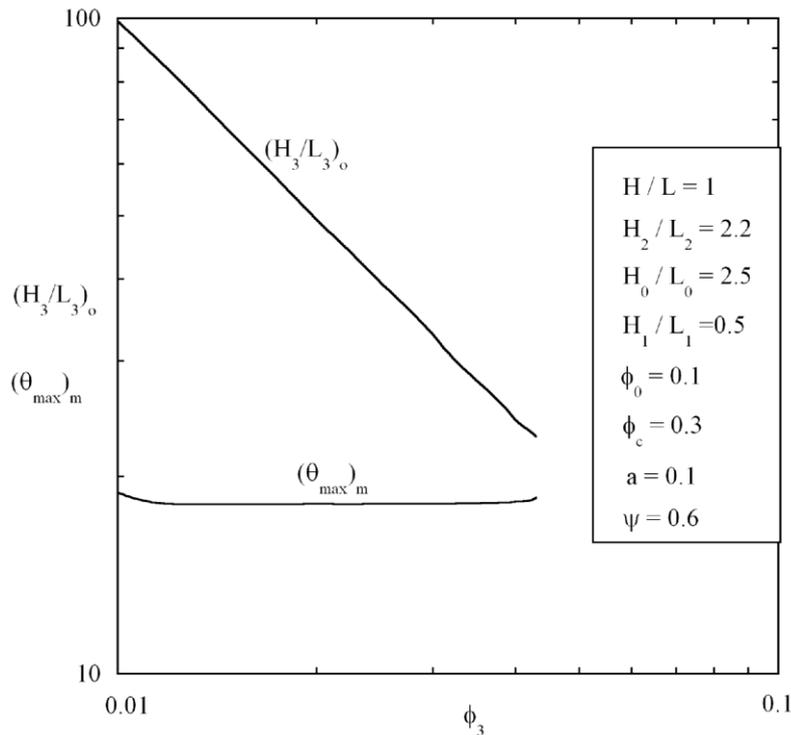


Figura 4.7: O comportamento da resistência térmica global $(\theta_{\max})_m$ uma vez minimizada e seu correspondente ótimo $(H_3/L_3)_o$ para vários valores de ϕ_3 .

Na Figura 4.8 são apresentadas algumas topologias do campo de temperaturas obtidas a partir da Fig.4.7 para várias relações de $\phi_3 = 0.01, 0.012$ e 0.043 . A maior intrusão das cavidades laterais no sólido que ocorre no *Design 2* permite que a geometria ótima tenha três pontos de máxima temperatura ao invés de dois pontos, como obtido para a geometria ótima com o *Design 1*. Pode ser observado ainda que a geometria com $\phi_3 = 0.012$ é melhor que a geometria com $\phi_3 = 0.01$ devido a distribuição do campo de temperaturas ser um pouco mais homogênea, ou seja, o terceiro ponto de máxima temperatura começa a se consolidar. Para $\phi_3 = 0.043$ é possível observar que elevadas relações de ϕ_3 impedem a maior intrusão da cavidade TY no domínio sólido levando a um aumento da resistência térmica no problema.

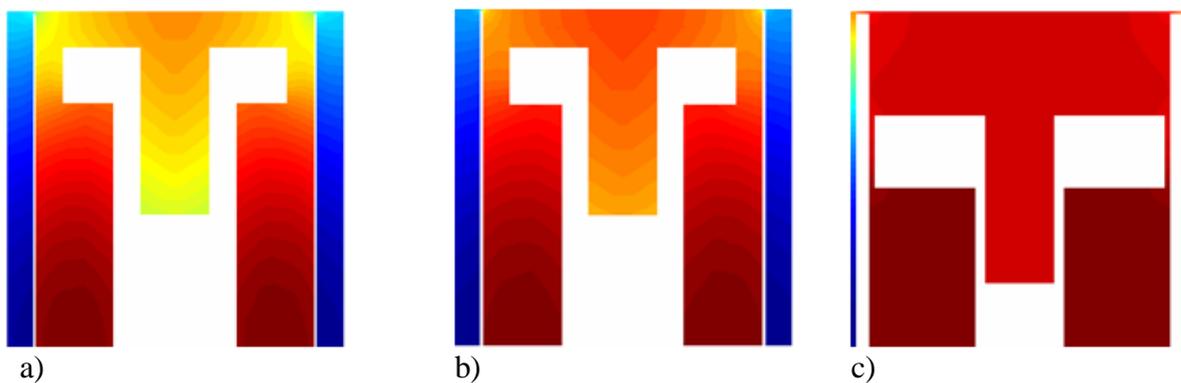


Figura 4.8: Topologias do campo de temperaturas ótimas para várias relações de ϕ_3 obtidas a partir da Fig. 4.7: a) $\phi_3 = 0.01$, b) $\phi_3 = 0.012$ (ótimo) e c) $\phi_3 = 0.043$.

Uma comparação entre as Figuras 4.7 e 4.4 permite observar que, para o *Design 2* as relações $(H_3/L_3)_o$ são muito maiores, ou seja, o *Design 2* é melhor que o *Design 1* porque esta geometria permite uma maior intrusão da cavidade lateral no domínio sólido que a possível para o *Design 1*. Como a comparação entre as geometrias foi feita para os mesmos graus de liberdade, as mesmas restrições físicas e função objetivo é possível afirmar que o *Design 2* é a melhor geometria proposta, Assim será ampliada a análise dos demais graus de liberdade apenas para o *Design 2*.

Após feita a comparação entre os *Designs 1* e *2* e constatado que o *Design 2* é a melhor entre as duas geometrias propostas é realizada uma otimização dos graus de liberdade (H_2/L_2) , (H_1/L_1) e (H/L) para a relação fixa de $\phi_3 = 0.012$ e $(H_3/L_3)_o = 83$, que foram as relações ótimas encontradas nas simulações anteriores para o *Design 2*.

A Figura 4.9 apresenta a influência do grau de liberdade H_2/L_2 na resistência térmica global adimensional θ_{\max} para vários H_1/L_1 . Primeiramente, pode ser observado que para uma mesma relação de H_1/L_1 há um ponto de ótimo. Por exemplo, para $H_1/L_1 = 1.29$ é a melhor geometria, que foi obtida para $H_2/L_2 = 3.4151$. A resistência térmica obtida neste caso foi de $\theta_{\max} = 17.70$.

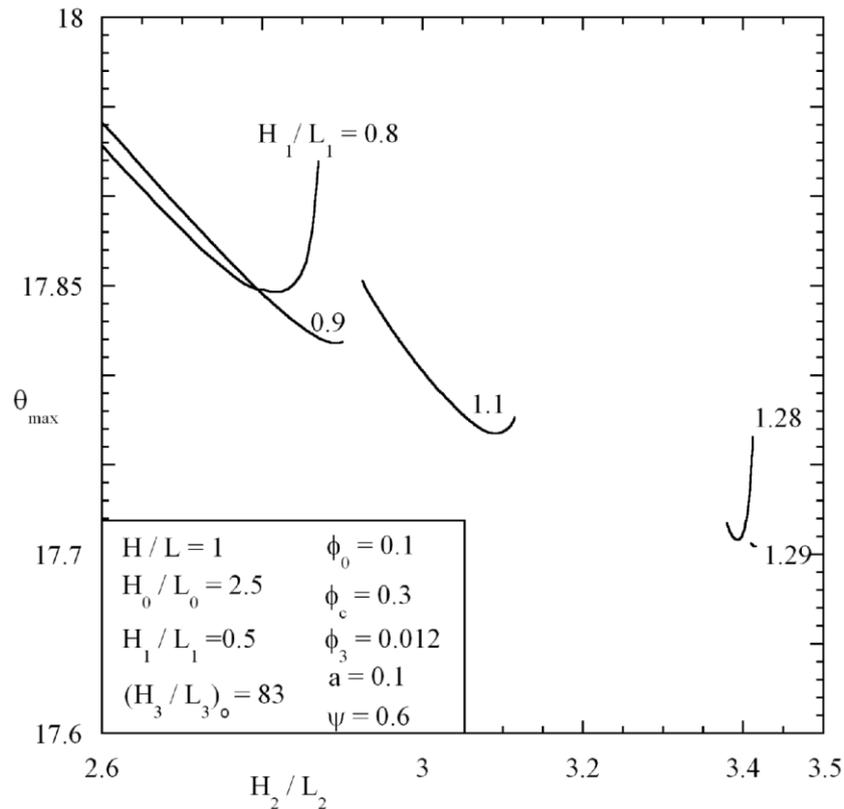


Figura 4.9: Otimização da resistência térmica global θ_{\max} em função de H_2/L_2 para diversos valores da razão de H_1/L_1 .

A Figura 4.10 apresenta o efeito de H_1/L_1 sobre $(H_2/L_2)_o$ e $(\theta_{\max})_m$. Os resultados ótimos desta figura foram obtidos da Fig. 4.9. Pode ser observado que a resistência térmica adimensional otimizada uma vez $(\theta_{\max})_m$ diminui com o aumento da razão H_1/L_1 , enquanto que o efeito oposto é observado para a relação uma vez otimizada de $(H_2/L_2)_o$. Na Fig. 4.11 são apresentadas algumas formas ideais da Fig.4.10. Na Figura 4.11 são apresentados os campos de temperaturas para as relações ótimas $(H_2/L_2)_o = 2.82$ para a fração de $H_1/L_1 = 0.8$, $(H_2/L_2)_o = 3.105$ para $H_1/L_1 = 1.1$ e $(H_2/L_2)_o = 3.4151$ para $H_1/L_1 = 1.29$ que é a relação ótima.

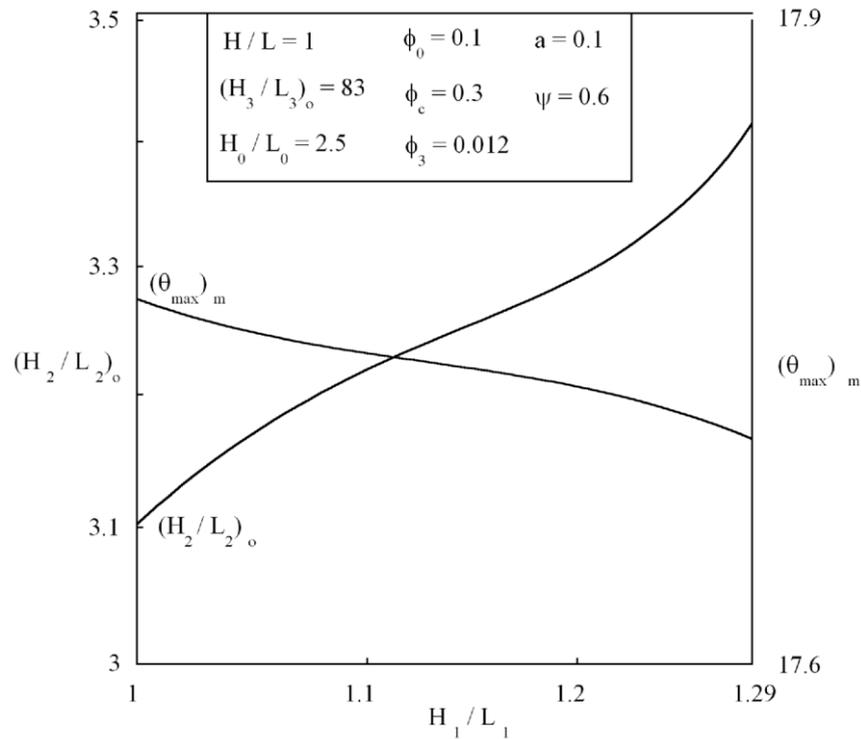


Figura 4.10: O efeito de H_1/L_1 sobre a resistência térmica global uma vez minimizada $(\theta_{\max})_m$ e seus correspondentes ótimos $(H_2/L_2)_o$.

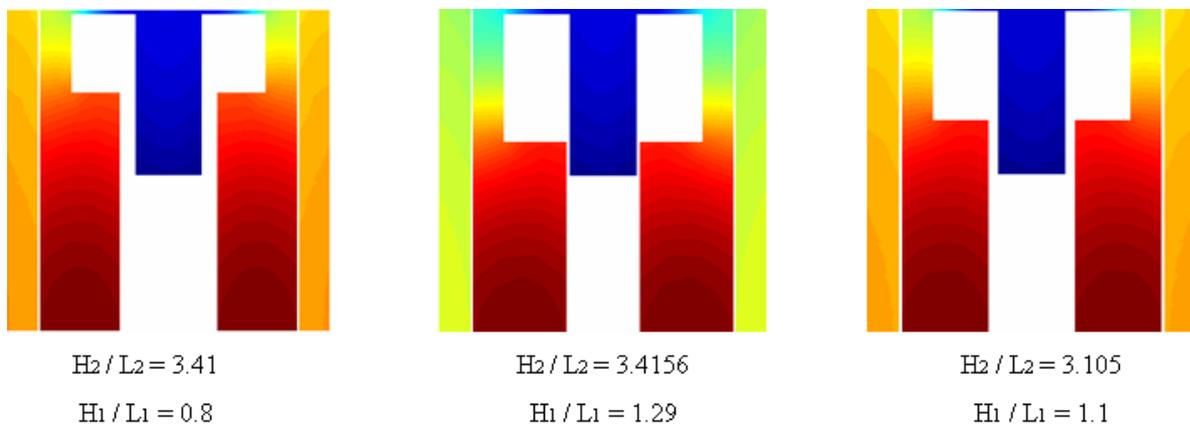


Figura 4.11: Ilustração de algumas formas ideais a partir da Figura 4.10.

Considerando as topologias apresentadas na Fig. 4.11 pode-se perceber que a geometria com as relações $(H_1/L_1 = 1.29$ e $H_2/L_2 = 3.4156)$ é a ótima devido a distribuição do campo de temperaturas ser mais homogênea. Contudo, é possível observar que a diferença na distribuição dos campos de temperaturas entre a geometria

ótima e as demais não é sensível. Essa semelhança na distribuição do campo de temperaturas é corroborada quando obtém-se a resistência térmica máxima no domínio. Para $H_1/L_1 = 1.29$ tem-se uma resistência térmica apenas 0.8% e 0.4% menor do que as geometrias com $H_1/L_1 = 0.8$ e 1.1, respectivamente.

Quanto à otimização do terceiro grau de liberdade, H/L , os resultados são apresentados na Fig.4.13. Para obtenção destes resultados foi usado o mesmo procedimento das otimizações feitas anteriormente. Os resultados desta avaliação para a faixa de $1 \leq H/L \leq 2$ apontam a existência de um ótimo quando a razão $H/L = 2$. Pode ainda ser observada na Fig. 4.12 que as razões duas vezes otimizadas $(H_2/L_2)_{oo}$ e $(H_3/L_3)_{oo}$ aumentam à medida que a resistência térmica global adimensional duas vezes minimizada $(\theta_{\max})_{\min}$ diminui, ou seja, quanto maior a intrusão das cavidades laterais e da cavidade em forma de TY no domínio sólido menor a resistência térmica do problema. Também observa-se que a razão duas vezes otimizada $(H_2/L_2)_{oo}$ é sempre menor que a $(H_3/L_3)_{oo}$. Na Fig. 4.13 são apresentadas algumas topologias do campo de temperaturas ótimas obtidas a partir da Fig. 4.12. Optou-se por três topologias que são: $H/L = 1$; $(H_2/L_2)_{oo} = 3.4151$; $(H_3/L_3)_{oo} = 83$, $H/L = 1.5$; $(H_2/L_2)_{oo} = 3,8$ e $(H_3/L_3)_{oo} = 124$ e $H/L = 2.0$; $(H_2/L_2)_{oo} = 5.0$; $(H_3/L_3)_{oo} = 165$ que correspondem, respectivamente, a relação mínima, intermediária e a ótima da relação H/L . A geometria ótima, $H/L = 2.0$, apresenta uma resistência térmica cerca de 31% e 11.8% menor do que as resistências obtidas para $H/L = 1$ e $H/L=1.5$.

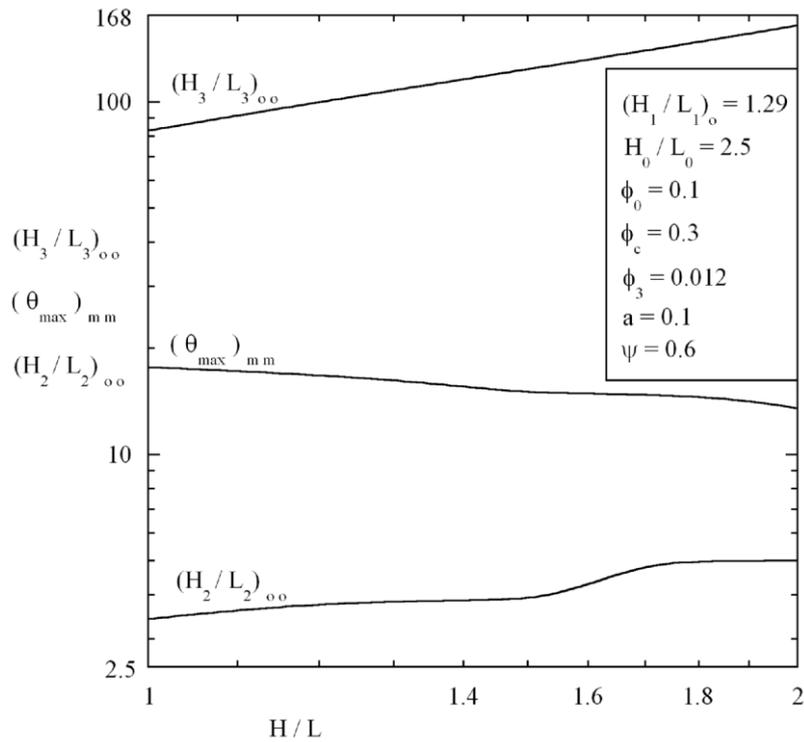


Figura 4.12: Otimização do terceiro grau de liberdade, H/L .

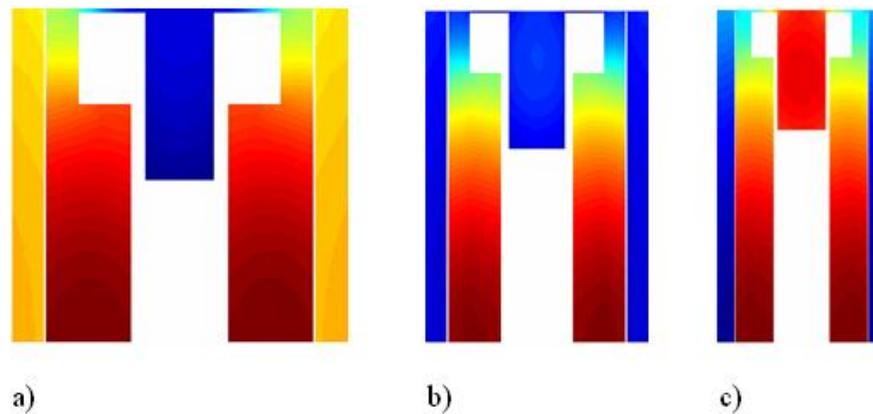


Figura 4.13: Ilustração das topologias do campo de temperaturas duas vezes otimizada para as seguintes relações de H/L : a) $H/L = 1.0$. b) $H/L = 1.5$ e c) $H/L = 2.0$.

A geometria ótima apresenta três pontos de máxima temperatura ao invés de dois pontos, como obtido para as outras duas geometrias. Pode ser observado ainda que a geometria com $H/L = 2.0$ é melhor que as geometrias com $H/L = 1$ e $H/L = 1.5$.

Novamente, esse fato está relacionado a distribuição do campo de temperaturas ser mais homogêneo para $H/L = 2.0$ (maior número de pontos de ótimo).

Também foi investigada a influência do quarto grau de liberdade H_0/L_0 . A investigação para este aponta um terceiro mínimo. É importante perceber que as razões ótimas $(H_2/L_2)_{ooo}$ e $(H_1/L_1)_o$ são quase insensíveis às mudanças de H_0/L_0 e seus valores ótimos são 1.29 e 3.41, respectivamente. A resistência global adimensional três vezes minimizada é igual a 15.99. Algumas topologias otimizadas são apresentadas na Fig.4.15, dentre elas a topologia ótima.

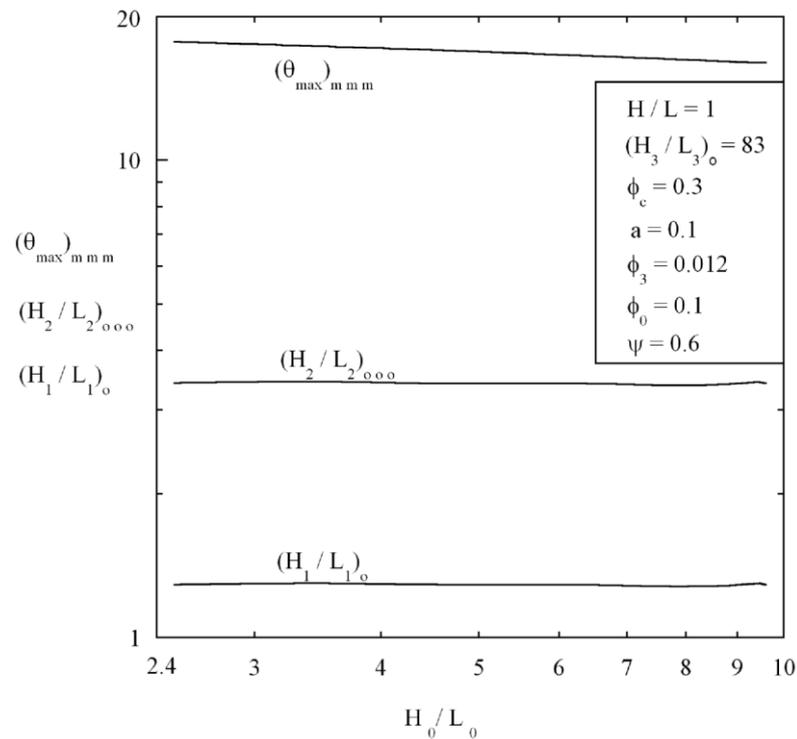


Figura 4.14: Otimização do quarto grau de liberdade, H_0/L_0 e seus correspondentes ótimos $(H_2/L_2)_{ooo}$ e $(H_1/L_1)_{oo}$.

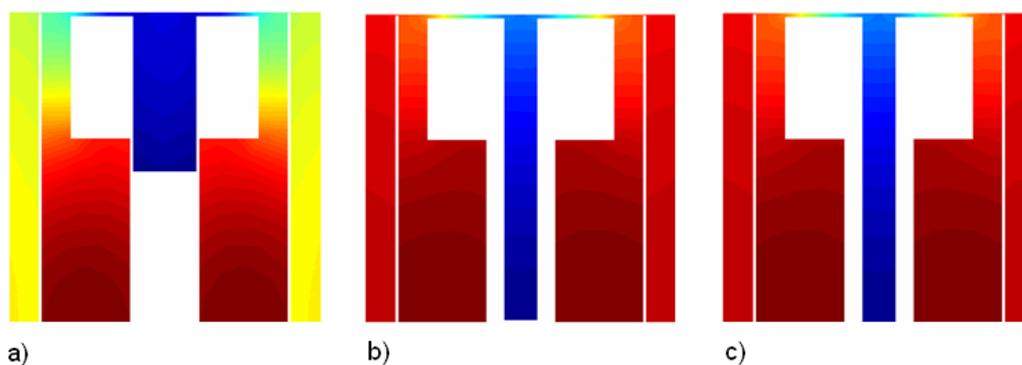


Figura 4.15: Ilustração das topologias do campo de temperaturas três vezes otimizada para as seguintes relações de H_0/L_0 : a) $H_0/L_0 = 2.5$. b) $H_0/L_0 = 9.57$ (ótimo) e c) $H_0/L_0 = 9.72$.

A melhor geometria encontrada nesta pesquisa, através das otimizações dos graus de liberdade propostos, foi o projeto apresentado na Fig. 4.13 c), pois foi a que apresentou melhor distribuição do campo de temperaturas. Esta geometria é ilustrada separadamente na Fig. 4.16.

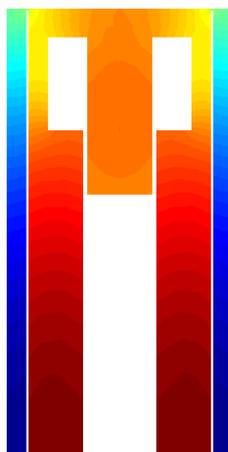


Figura 4.16: Ilustração da melhor topologia do campo de temperaturas entre todas otimizadas na presente pesquisa feita para as seguintes relações $H/L = 2.0$; $(H_2/L_2)_{oo} = 5.0$; $(H_3/L_3)_{oo} = 165$

CONCLUSÕES E PROPOSTA DE CONTINUIDADE

No presente trabalho foi realizado um estudo a respeito da transferência de calor entre sólidos com geração uniforme de energia e cavidades na forma TY com cavidades laterais retangulares adicionais inseridas para a remoção da energia gerada neste sólido. Inicialmente, foi avaliada a geometria *Design 1* e posteriormente o *Design 2*. Para isso foram variados os graus de liberdade geométricos desse sistema H/L , H_0/L_0 , H_1/L_1 , H_2/L_2 , H_3/L_3 de acordo com o Princípio Constructal, no intuito de minimizar a resistência térmica global desse conjunto complexo de cavidades submetidas a restrições como a área total, área da cavidade e área lateral das cavidades.

Para o *Design 1* foi analisada a variação do comportamento da resistência térmica global adimensional em função do grau de liberdade H_2/L_2 . Pode ser observado que para todas as simulações com ϕ_0 constante ocorreu um ponto de ótimo. Esse comportamento foi semelhante ao obtido por Lorenzini e Rocha (2009) na simulação da cavidade TY. Então, a presença das cavidades laterais não alterou o comportamento de θ_{\max} com relação ao grau de liberdade H_2/L_2 .

No estudo da variação da resistência térmica global adimensional em função do grau de liberdade H_3/L_3 para diversos valores do parâmetro ϕ_3 , no *Design 1*, pôde-se perceber que para cada curva de ϕ_3 a resistência térmica global adimensional diminuiu com o aumento da razão H_3/L_3 , ou seja, conforme aumentou-se a intrusão das cavidades laterais menor foi a resistência térmica do problema.

A partir da análise da resistência térmica global uma vez minimizada $(\theta_{\max})_m$, do valor uma vez otimizado da razão $(H_3/L_3)_o$ e de ϕ_3 pôde-se concluir que, não necessariamente o aumento ϕ_3 conduz a melhor geometria, uma vez que a geometria

ótima foi alcançada para menores valores de ϕ_3 . O oposto ocorreu para a relação ótima $(H_3/L_3)_o$, ou seja, o melhor desempenho do conjunto complexo de cavidade ocorreu quando as cavidades laterais penetraram quase completamente o sólido.

No *Design 2* houve uma relação ótima de ϕ_3 diferente da relação mínima, ao contrário do que acontece para o *Design 1*. Comparando o desempenho de ambas as geometrias propostas nesta pesquisa pode ser afirmado que o *Design 2* conduziu a menores valores da resistência térmica adimensional do que o *Design 1*.

A melhor geometria *Design 1* é cerca de 15.3% mais eficiente que a melhor geometria obtida por Lorenzini e Rocha (2009) (para os mesmos graus de liberdade, as mesmas restrições físicas e função objetivo). Para a geometria ótima que foi obtida com o *Design 2* (para os mesmos graus de liberdade, as mesmas restrições físicas e função objetivo utilizadas para o *Design 1*) apresentou uma resistência térmica adimensional aproximadamente 17% menor do que a geometria ótima obtida com o *Design 1*. Já a melhor geometria do *Design 2* é cerca de 140% superior a performance da melhor geometria encontrada por Lorenzini e Rocha(2009).

Ainda nesta análise comparativa pôde-se concluir que as relações $(H_3/L_3)_o$ para o *Design 2* são muito superiores às do *Design 1*, ou seja, para o *Design 2* ocorre uma maior intrusão da cavidade lateral no domínio sólido que a possível para o *Design 1*.

Para o segundo grau de liberdade estudado, H_1/L_1 , pôde ser observado que a resistência térmica adimensional uma vez otimizada $(\theta_{\max})_m$ diminuiu com o aumento da razão H_1/L_1 . Enquanto isso, o efeito oposto foi observado para a relação uma vez otimizada de $(H_2/L_2)_o$. Do ponto de vista da distribuição de calor a topologia de $H_1/L_1 = 1.29$ foi cerca de 0.8% mais eficiente que a de $H_1/L_1 = 0.8$ e cerca de 0.4% mais eficiente que $H_1/L_1 = 11$. A explicação física para isso esta na baixa relação de H_1/L_1

que tornou o ramo bifurcado mais estreito no domínio sólido levando a um aumento da resistência térmica no problema,

A otimização do terceiro grau de liberdade H/L foi para a faixa de $1 \leq H/L \leq 2$. Essa avaliação apontou a existência de um ótimo quando a razão $H/L = 2$. Ainda pôde ser concluído que as razões duas vezes otimizadas de $(H_2/L_2)_{oo}$ e $(H_3/L_3)_{oo}$ aumentaram a medida que a resistência térmica global adimensional duas vezes minimizada $(\theta_{\max})_{\min}$ diminuiu, ou seja, quanto maior for a intrusão das cavidades laterais e da cavidade em forma de TY no domínio sólido menor será a resistência térmica do problema. Concluiu-se que quanto a distribuição de calor a topologia ótima, $H/L = 2.0$ foi cerca de 31% mais eficiente que a de $H/L = 1$ e 11.8% que $H/L=1.5$.

Por fim, foi investigada a influência do quarto grau de liberdade H_0/L_0 . A investigação para este aponta um terceiro mínimo. A conclusão importante no estudo deste grau de liberdade é que a razão três vezes otimizada de $(H_2/L_2)_{ooo}$ e uma vez otimizada $(H_1/L_1)_o$ são quase insensíveis às mudanças de H_0/L_0 .

Também foi possível observar que a resistência térmica foi minimizada para a distribuição mais homogênea do campo de temperaturas, concordando com o princípio da minimização das imperfeições.

Para finalizar, os resultados apresentados neste trabalho mostraram que o método *Constructal Design* conduziu a obtenção das geometrias ótimas de cavidades complexas e laterais estendidas inseridas em sólidos com geração de calor uniforme.

Sugere-se como proposta de continuidade deste trabalho o uso da terceira dimensão, ou seja, a abordagem do problema de forma tridimensional. Logo, poderá ser avaliada se as mesmas observações obtidas neste trabalho quanto a otimização geométrica de um sistema complexo de cavidades em um domínio bidimensional poderão ser extrapoladas para um domínio tridimensional. Para este caso a ferramenta

PDETOOL não poderá ser mais utilizada, passando a ser empregada outra ferramenta disponível no mercado, como por exemplo, o Software *ANSYS*[®].

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aziz, A. **Optimum Dimensions of Extended Surfaces Operating en a Convective Environment**, Applied Mechanics Reviews 45 (5), 155-173, 1992.

Bejan A. **Advanced Engineering Thermodynamics**, second ed., Willey, New York, 2007.

Bejan A.; Lorente, S.; Miguel A. F.; Reis, A. H. **Constructal Human Dynamics, Security and Sustainability**, IOS Press, Amsterdam, 2009.

Bejan, A. Almogbel, M. **Constructal T-Shaped Fins**, International Journal of Heat and Mass Transfer 43, 2101-2115, 2000.

Bejan A.; Badescu V.; De Vos A. **Constructal Theory of Economics**, Appl. Energ. 67 (2000) 37–60.

Bejan A.; Lorente, S. **Constructal Theory of Generation of Configuration in Nature and Engineering**, J. Appl. Phys. 100, 041301, 2006.

Bejan A. **Constructal Theory of Pattern Formation**. Hydrology of Earth Systems Science 11, 753-768, 2008.

Bejan, A.; Errera, M.R.; Ledezma, G.A. **Constructal Tree Networks for Heat transfer**, *Departmente of Machanical Engineerring and Material Science*, Box 90300, Duke University, Durham, North Caroline, 27708-0300, 1997.

Bejan, A.; Lorente S., **Design With Constructal Theory**, Wiley, Hoboken, 2008.

Bejan A. **How Nature Takes Shape**, *Mechanical EngineeringI*; Oct 1997; 119, 10; pg. 90, ABI/INFORM.

Bejan, A., **Shape and Structure, from Engineering to Nature**, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2000a.

Bejan, A., **Shape and Structure, from Engineering to Nature**, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2000b.

Bejan A.; Lorente, S. **The Constructal Law and Thermodynamics of Flow Systems With Configuration**, International Journal of Heat and Mass Transfer 47, 3203-3214, 2004.

Bejan, A., Rocha L.A.O., Lorente S., **Thermodynamic optimization of geometry: T and Y-shaped constructs of fluid streams**, Int. J. Thermal Sci. 39 (2002) 949–960.

Bejan A.; Lorente S., **Thermodynamic optimization of geometry: T and Y-shaped constructs of fluid streams**, Int. J. Thermal Sci. 39 (2002) 949–960.

Bello-Ochende T.; Liebenberg, L.; Meyer, J.P. **Constructal Cooling Channels for Micro-Channel Heat Sinks**, Int. J. Heat Mass Transfer 50, 4141-4150, 2007a.

Bello-Ochende T.; Meyer, j.P.; Bejan A. **Constructal Mult-Scale Pin-fins**, Int. J. Heat Mass Transfer 53, (2010) 2773–2779.

Bello-Ochende T.; Bejan A. **Constructal Mult-Scale Cylinders With Natural Convection**, International Journal of Heat and Mass Transfer 48 (2005) 4300–4306.

Biserni, C.; Rocha, L.A.O.; Bejan, A. **Inverted Fins: Geometric Optimization of the Intrusion Into a Conducting Wall**, Int. J. Heat Mass Transfer 47, 2577-2586, 2004.

Biserni, C.; Rocha, L.A.O.; Bejan, A.. **Inverted fins: geometric optimization of the intrusion into a conducting wall**. International Journal of Heat and Mass Transfer 47, (2004) 2577–2586.

Biserni, C.; Rocha, L.A.O.; Stanescu, G.; Lorenzini, E. **Constructal H-shaped cavities according to Bejan's theory**, International Journal of Heat and Mass Transfer 50, (2007) 2132–2138.

Bonjour J.; Rocha, L.A.O.; Bejan A.; Meunier F. **Dendritic Fins Optimization for a Coaxial Two-Stream Heat Exchanger**, International Journal of Heat and Mass Transfer 47 (1) (2004) 111–124.

Dirker, J.; Liu, W.; Van Wyk, D.; Meyer, J.P.; Malan, A.G. **Embedded Solid State Heat Extraction in Integrated Power Electronic Modules**, IEEE Trans. Power Electron. 20 (3), 694-703, 2005.

Dos Santos, E.D.; Dall’Agnol, A.; Petry, A.P.; Rocha, L.A.O. **Heat Transfer Optimization of Cross-flow Over Assemblies of Bluff Employing Constructal Principle**, 20th International Congress of Mechanical Engineering, COBEM 2009, Gramado, 2009.

Incropera, F.P.; Dewitt, D.P., 1998. **Fundamentos de Transferência de Calor e Massa**, quarta edição, LTC editora, Rio de Janeiro, RJ.

Kim, Y.; Lorente, S.; Bejan, A. **Constructal multi-tube configuration for natural and forced convection in cross-flow**, International Journal of Heat and Mass Transfer, 53 (2010) 5121–5128.

Kraus, A.D. Developments in the of finned array, in: Q. Donal, Kern Award Lecture, National Heat Transfer Conference, Baltimore, MD, August 11, 1997, **International Journal of Transport Phenomena**, 1 (1999) 141-164.

Lange, C.F., 1992. **Simulação de Escoamentos Incompressíveis não-isotérmicos pelo Método de Elementos Finitos com Função de Penalidade**. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, (UFRGS), Porto Alegre, Brasil.

Lorenzini, G; Biserni, C.; **A Vapotron Effect Application for Electronic Equipment Cooling**, J. Electron. Packaging, 125 (2003) 475-479.

Lorenzini, G; Rocha L.A.O. **Constructal Design of T-Y-shaped assembly of fins**, International Journal of Heat Mass Transfer 49 (2006) 4552-4557.

Lorenzini, G., Rocha, L.A.O. **Geometric optimization of T-Y-shaped cavity according to Constructal design**, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 52, (2009) 4683–4688.

MATLAB®, user's guide, version 7.0.1, release 14SP1, The Mathworks Inc., 2006.

Matos R.S.; Laursen T.A., Vargas J.V.C., Bejan A., **Three-dimensional optimization of staggered finned circular and elliptic tubes in forced convection**, *Int. J. Therm. Sci.* 43 (2004) 477–487.

Marques, C. H., Dos Santos, E.D., Rocha, L.A.O. **Constructal Design Applied to the Optimization of Heat Transfer in a Solid Conducting Wall**, *Vetor*, Rio Grande, v.17, n.1, p. 5-15, 2007.

Pence, D.V. **Improved Thermal Efficiency and Temperature Uniformity Using Fractal-Like Branching Channel Networks**, proceedings of the International Conference on Heat transfer and Transport Phenomena in Microscale, Banff, Canada, Begell House, New York, pp. 142-148, 2000.

Pence, D.V. **Reduced Pumping Power and Wall Temperature in Microchannel Heat Sinks With Fractal-Like Branching Channel Networks**, *Microscale Thermophysics. Eng.*, 64, pp. 319-330, 2002.

Reddy, J.N., Gartling, D.K., 1994, **The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics**, CRC, Boca Raton, Florida, USA,

Rocha, L.A.O.; Lorente, S.; Bejan, A. **Tree-Shaped Vascular Wall Design for Localized Intense Cooling**, *Int. J. Heat and Mass Transf.*, 52, pp. 4535-4544, 2009.

Rocha, L.A.O.; Lorenzini, E.; Biserni, C. **Geometric Optimization of Shapes on the Basis of Bejan's Constructal Theory**, *Int. Commun. Heat Mass Transfer*, 32 (2005) 1281-1288.

Rocha, L.A.O. ; Lorenzini, E. ; Biserni, C. **Geometric optimization of shapes on the basis of Bejan's Constructal theory**, *International Communications in Heat and Mass Transfer* 32 (2005) 1281–1288.

Rocha, L. A. O.; Biserni, C.; Lorenzini, E. **Constructal Theory Applied to the Geometric Optimization of Elliptical Cavities Into a Solid Conducting Wall**, Thermal Engineering, Vol. 7, N° 02, December 2008, p. 81-86.

Vargas, J.V.C.; Ordóñez, J.C.; Bejan A. **Constructal PEM fuel cell stack design**, International Journal of Heat Mass Transfer 48 (2005) 4410-4427.

Wang, X.-Q., Mujumdar, A. S.; Yap, C., 2006. **Numerical Analysis of Blockage and Optimization of Heat transfer Performance of fractal-Like Microchannel Nets**, J. Electronic Packaging, Vol. 128, pp 38-45.

Wang, H, Dai, W., and Bejan, A., 2007. **Optimal temperature distribution in a 3D triple-layered skin structure embedded with artery and vein vasculature and induced by electromagnetic radiation**, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 50, pp. 1843-1854.

ANEXO A: Método de Elementos Finitos

A origem do método de elementos finitos (do inglês: *Finite Element Method*) está nos métodos variacionais clássicos e de resíduos ponderados. O Método Variacional é um método que apresenta limitações quanto a atribuição de funções de interpolação que atendam a todos as condições de contorno em todas as regiões do domínio. Com o advento do método de elementos finitos determinar funções de interpolação que atendam as condições de contorno, em nível de cada elementos discretizado, tornou-se uma tarefa mais simples e sistemática (Reddy e Gartling, 1994).

O método de Elementos Finitos é uma generalização dos métodos variacional clássico (Rayleigh-Ritz) e de resíduos (Galerkin, mínimos quadrados entre outros) que são baseados na idéia de que a solução de uma equação diferencial pode ser representada como a combinação linear de parâmetros C_j e de funções ϕ_j selecionadas apropriadamente em todo o domínio do problema (Reddy e Gartling, 1994).

Entretanto, para esse método possa ser aplicado e as condições de contorno possam ser satisfeitas o domínio é representado através de uma coleção de subdomínio de geometria simples que permitem a geração de forma sistemática de funções de aproximação necessárias para a solução do problema por um variacional ou de resíduos ponderados. A habilidade para representar domínios com geometrias irregulares faz deste método uma valiosa ferramenta prática para a solução de problema de contorno e iniciais crescentes em vários campos da engenharia.

Conforme Reddy e Gartling (1994), os principais passos na análise de elementos finitos são:

1. Pré-processamento: discretização do domínio em um conjunto de elementos finitos, geração da malha de elementos finitos (definir as coordenadas dos nós que compõem a malha e as conectividades que definem os elementos, sem sobreposição dos domínios dos elementos);
2. Formulação de resíduos ponderados ou forma fraca das equações diferenciais a serem analisadas;
3. Desenvolvimento das equações de elementos finitos do problema a partir da formulação de resíduos ponderados ou forma do problema;
4. Montagem (*assembly*) das equações à nível de elemento para obter o sistema global de equações algébricas (sobre todo o domínio);
5. Imposição das condições de contorno;
6. Solução das equações;
7. Pós-processamento dos resultados;

Na presente pesquisa será analisado os passos 2 e 3, ou seja, a formulação de resíduos ponderados do problema e a dedução do modelo de elementos finitos para a equação da energia. A equação empregada neste estudo, escrita em notação indicial, é dada por:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\alpha \frac{\partial T}{\partial x_j} \right] + \dot{q} \quad j = 1,2,3 \text{ em } tx\Omega \quad (\text{A.1})$$

a.1) Formulação Variacional

A forma fraca de uma equação diferencial é uma expressão, na forma integro-diferencial, equivalente as equações governantes e as condições de contorno do problema na forma forte. A equação diferencial na forma fraca significa que as exigências de continuidade das variáveis primárias (velocidade, pressão e temperatura) são enfraquecidas (Lange, 1992).

Para obtenção da fórmula variacional seguem-se três passos fundamentais para o seu desenvolvimento:

- O primeiro passo consiste em colocar todos os termos das equações governantes no mesmo lado da igualdade na equação, multiplicar essa equação por uma função peso e, por fim, integrar a equação sobre todo o domínio Ω , a equação governantes do problema fica com a seguinte configuração –equação da conservação da energia–.

$$\int_{\Omega} T^* \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega - \int_{\Omega} T^* \left[\alpha \frac{\partial T^*}{\partial x_j} \right] d\Omega - \int_{\Omega} T^* \dot{q} = 0 \quad (\text{A.2})$$

Onde,

T^* – Função peso para a temperatura, com valor arbitrário no domínio do elemento, exceto no contorno;

T^h – Subespaço funcional do campo de temperatura;

Ω – Domínio do elementos;

Para cada escolha de uma função peso em uma determinada equação obtém-se uma equação algébrica para a equação diferencial entre os valores nodais da variável em questão. Para n valores independentes da função peso, obtém-se n equações algébricas linearmente independentes.

- O segundo passo para a obtenção da formulação de resíduos ponderados das equações de conservação de massa, quantidade de movimento e energia consiste em distribuir a diferenciação igualmente entre a função peso e a variável em cada equação de conservação (neste caso somente de conservação de movimento e energia, pois apresentam termos de segunda ordem) para tanto a função peso quanto a variável sejam diferenciáveis uma vez com respeito às coordenadas;

- O terceiro passo consiste em substituir as equações com as condições de contorno de segunda espécie Eq. (A,3), conforme segue:

$$\left(\alpha \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) n_j + q_c + q_r = q \quad \text{em } \Gamma_N \quad (\text{A.3})$$

Realizando o tratamento dos termos difusivos, segundo termo da Eq. A62:

$$-\int_{\Omega} T^* \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\alpha \frac{\partial T}{\partial x_i} \right] d\Omega = \int_{\Omega} (\alpha) \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_i} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[T^* \alpha \frac{\partial T}{\partial x_i} \right] d\Omega \quad (\text{A.4})$$

Aplicando o Teorema de Green-Gauss ao segundo termo do lado direito da equação (A,2) transforma-se a integral no domínio em uma integral de superfície Γ :

$$\int_{\Omega} (\alpha) \frac{\partial}{\partial x_j} \left[T^* \frac{\partial T}{\partial x_i} \right] d\Omega = \int_{\Gamma} (\alpha) T^* \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (\text{A.5})$$

Substituindo a Eq.(A,5) na Eq. (A,4) e substituindo a Eq. (A,2) com a condição de contorno de fluxo de calor, têm-se a equação final de resíduos ponderados para a equação da conservação de energia:

$$\int_{\Omega} T^* \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} (\alpha) \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_i} d\Omega - \int_{\Omega} T^* \dot{q} d\Omega = \int_{\Gamma} (\alpha) T^* \frac{\partial T}{\partial x_i} d\Gamma \quad (\text{A.6})$$

a,2) Equação de Elementos Finitos do Problema:

Com a formulação de resíduos ponderados do problema através da Eq. (A,6) obtida, segue-se para formulação de elementos finitos do problema. Foi utilizada a técnica clássica de Galerkin (Reddy e Gartling, 1994). O método de Galerkin consiste em utilizar as mesmas funções de aproximação para a função peso e para as variáveis do problema.

As funções peso e as variáveis do problema, dentro do domínio analisado, são substituídas por aproximações, onde estas são a combinação linear das funções de interpolação do elemento multiplicadas pelas variáveis a serem aproximadas nos nós do elemento. As funções aproximadas ficam da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \bar{T} = (x, y, z) &= \underset{\sim}{\theta}(x, y, z) \bar{T} \\ \mathbf{T}^*(x, y, z) &= \underset{\sim}{\theta}(x, y, z) \mathbf{T}^* \quad \text{em } t \times \Omega \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Onde:

$\underset{\sim}{\theta}$ - Vetor de funções de interpolação para a temperatura;

\bar{T} - Vetor de valores nodais para a temperatura;

T^* - Vetor de valores nodais da função peso de temperatura;

Então, através da substituição das aproximações dadas pela Eq. (A,7) nas equações de resíduos (A,6) da energia, é possível obter as equações em nível de elemento –equação da conservação da energia-

$$\int_{\Omega} \theta^T T^* \frac{\partial(\theta \bar{T})}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial(\theta^T \bar{T})}{\partial x_j} \left[\alpha \frac{\partial(\theta \bar{T})}{\partial x_j} \right] d\Omega - \int_{\Omega} \theta^T T^* \dot{q} d\Omega = \int_{\Gamma^e} \theta^T T^* q d\Gamma \quad (\text{A.8})$$

Onde,

$$\int_{\Gamma} \theta^T T^* q d\Gamma = \int_{\Gamma} \theta^T T^* \left[\alpha \frac{\partial(\theta \bar{T})}{\partial x_j} \right] n_j d\Gamma$$

Isolando-se as funções de aproximação, têm-se –equação da conservação de energia-

$$\int_{\Omega} (\theta^T \theta) d\Omega \bar{T} + \alpha \int_{\Omega} \frac{\partial \theta^T}{\partial x_i} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} d\Omega \bar{T} = \int_{\Omega} \theta \dot{q} d\Omega + \int_{\Gamma} \theta q d\Gamma \quad (\text{A.9})$$

A equação da energia na forma de elementos finitos pode ser em uma forma matricial mais compacta -equação da conservação de energia-

$$M_T \bar{T} + D_{jT} \bar{T} = F_T \quad (\text{A.10})$$

Onde as matrizes presentes na equação de energia são expressas na Eq. (A.11):

$$\begin{aligned}
 M_T &= \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{\theta}^T \tilde{\theta} d\Omega \\
 D_{jT} &= \int_{\tilde{\Omega}} \alpha \frac{\partial \tilde{\theta}^T}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x_j} d\Omega \\
 F_T &= \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{\theta} \dot{q} d\Omega + \int_{\tilde{\Gamma}} \tilde{\theta} q d\Gamma
 \end{aligned} \tag{A.11}$$

Com base nas hipóteses simplificativas, a matriz M_T não será computada nos cálculos do presente trabalho.

ANEXO B: Coordenadas Utilizadas para Gerar os Gráficos

Os gráficos apresentados ao longo desta pesquisa foram gerados com pontos correlacionados e a apresentação destes pontos objetiva a oportunidade de um estudo mais detalhado bem como o esclarecimento da origem destes. Para a plotagem dos gráficos optou-se pelo software KaleidaGraph[®] que permite que sejam inseridos os valores a serem trabalhados bem como a formatação das figuras dentre outras funções.

A Tabelas T.1. a T.8 apresentam os valores fixos que foram utilizados nas otimizações desenvolvidas nesta pesquisa.

Tabela T.1: Valores que deram origem a Fig. 4.1 e que foram inseridos no software KaleidaGraph[®] - Otimização da resistência térmica global em função de H_2/L_2 para diversos valores da fração da área introduzida no sólido. ϕ_0 .

Valores Fixos									
a = 0.1 H/L = 1.0 H ₀ /L ₀ = 2.5 H ₁ /L ₁ = 0.5 H ₃ /L ₃ = 1.0 $\phi_3 = 0.01$ $\phi_c = 0.3$ $\psi = 0.6$									
$\phi_0 = 0.05$		$\phi_0 = 0.1$		$\phi_0 = 0.15$		$\phi_0 = 0.2$		$\phi_0 = 0.25$	
H_2/L_2	θ_{max}	H_2/L_2	θ_{max}	H_2/L_2	θ_{max}	H_2/L_2	θ_{max}	H_2/L_2	θ_{max}
2.170	34.259	1.300	32.527	1.000	31.820	1.000	31.186	1.250	29.975
2.195	34.255	1.325	32.509	1.025	31.800	1.025	31.158	1.265	29.942
2.220	34.248	1.350	32.539	1.050	31.796	1.050	31.130	1.280	29.909
2.245	34.241	1.375	32.574	1.075	31.796	1.075	31.100	1.295	29.876
2.270	34.237	1.400	32.604	1.100	31.797	1.100	31.068	1.310	29.843
2.295	34.232	1.425	32.627	1.125	31.797	1.125	31.035	1.325	29.809
2.320	34.224	1.450	32.646	1.150	31.794	1.150	31.000	1.340	29.776
2.345	34.215	1.475	32.660	1.175	31.789	1.175	30.964	1.355	29.742
2.370	34.204	1.500	32.671	1.200	31.782	1.200	30.926	1.370	29.709
2.395	34.191	1.525	32.676	1.225	31.770	1.225	30.888	1.385	29.677

2.420	34.178	1.550	32.678	1.250	31.757	1.250	30.848	1.400	29.645
2.445	34.163	1.575	32.678	1.275	31.742	1.275	30.807	1.415	29.613
2.470	34.147	1.600	32.675	1.300	31.723	1.300	30.765	1.430	29.582
2.500	34.126	1.625	33.558	1.325	31.704	1.325	30.723	1.445	29.551
2.525	34.108	1.650	32.660	1.350	31.683	1.350	30.682	1.460	29.520
2.550	34.089	1.675	32.650	1.375	31.660	1.375	30.641	1.475	29.489
2.575	34.069	1.700	32.638	1.400	31.637	1.400	30.599	1.490	29.458
2.600	34.048	1.725	32.624	1.425	31.613	1.425	30.557	1.505	29.427
2.625	34.027	1.750	32.608	1.450	31.587	1.450	30.514	1.520	29.397
2.650	34.005	1.775	32.591	1.475	31.559	1.475	30.471	1.535	29.366
2.675	33.983	1.800	32.572	1.500	31.531	1.500	30.428	1.550	29.336
2.700	33.960	1.825	32.552	1.525	31.501	1.525	30.385	1.565	29.308
2.725	33.936	1.850	32.531	1.550	31.471	1.550	30.341	1.580	29.280
2.750	33.913	1.875	32.514	1.575	31.440	1.575	30.298	1.595	29.252
2.775	33.889	1.900	32.496	1.600	31.408	1.600	30.257	1.610	29.225
2.800	33.865	1.925	32.477	1.625	31.375	1.625	30.217	1.625	29.198
2.825	33.841	1.950	32.457	1.650	31.342	1.650	30.177	1.640	29.172
2.850	33.817	1.975	32.436	1.675	31.310	1.675	30.138	1.655	29.147
2.875	33.792	2.000	32.415	1.700	31.281	1.700	30.098	1.670	29.122
2.900	33.769	2.025	32.392	1.725	31.251	1.725	30.059	1.685	29.100
2.925	33.745	2.050	32.369	1.750	31.220	1.750	30.020	1.700	29.082
2.950	33.722	2.075	32.344	1.775	31.188	1.775	29.982	1.715	29.065
2.975	33.699	2.100	32.320	1.800	31.157	1.800	29.944	1.730	29.055
3.000	33.678	2.125	32.294	1.825	31.125	1.825	29.908	1.745	29.057
3.025	33.657	2.150	32.268	1.850	31.093	1.850	29.874	1.760	29.091
3.050	33.637	2.175	32.242	1.875	31.060	1.875	29.842		
3.075	33.621	2.200	32.215	1.900	31.027	1.900	29.814		
3.100	33.607	2.225	32.187	1.925	30.994	1.925	29.800		
3.125	33.598	2.250	32.160	1.950	30.962	1.950	29.799		
3.150	33.600	2.275	32.133	1.975	30.929	1.975	29.843		
3.175	33.615	2.300	32.105	2.000	30.896				
3.200	33.655	2.325	32.078	2.025	30.864				
3.225	33.763	2.350	32.051	2.050	30.833				
3.250	34.101	2.375	32.024	2.075	30.802				
		2.400	31.997	2.100	30.774				
		2.425	31.971	2.125	30.746				
		2.450	31.947	2.150	30.722				
		2.475	31.923	2.175	30.702				
		2.500	31.900	2.200	30.686				
		2.525	31.880	2.225	30.695				
		2.550	31.865	2.250	30.724				
		2.575	31.856	2.275	30.836				
		2.600	31.858						

2.625	31.878
2.650	31.937

Tabela T.2: Valores que deram origem a Fig. 4.2 e que foram inseridos no software KaleidaGraph[®] - Otimização da resistência térmica global em função de H_3/L_3 para diversos valores da fração da área das cavidades laterais.

Valores Fixos							
a=0.1 H/L = 1.0 H ₀ /L ₀ = 2.5 H ₁ /L ₁ = 0.5 H ₂ /L ₂ = 2.2 Ø ₀ = 0.1 Ø ₃ = 0.01 Ø _c = 0.3 ψ = 0.6							
Ø ₃ =0.01		Ø ₃ =0.012		Ø ₃ =0.02		Ø ₃ =0.03	
H ₃ /L ₃	θ _{max}	H ₃ /L ₃	θ _{max}	H ₃ /L ₃	θ _{max}	H ₃ /L ₃	θ _{max}
1	32.215	1	31.788	1	30.426	1	29.168
2	31.436	2	30.959	2	29.454	1.5	28.625
3	30.735	3	30.216	3	28.598	2	28.095
4	30.126	4	29.573	4	27.866	2.5	27.604
5	29.591	5	29.009	5	27.229	3	27.153
6	29.113	6	28.506	6	26.665	3.5	26.737
7	28.679	7	28.052	7	26.159	4	26.353
8	28.283	8	27.639	8	25.701	4.5	25.997
9	27.919	9	27.258	9	25.281	5	25.664
10	27.580	10	26.905	10	24.894	5.5	25.353
11	27.264	11	26.576	11	24.536	6	25.060
12	26.968	12	26.269	12	24.201	6.5	24.784
13	26.689	13	25.981	13	23.888	7	24.522
14	26.425	14	25.709	14	23.594	7.5	24.274
15	26.177	15	25.451	15	23.317	8	24.039
16	25.940	16	25.207	16	23.054	8.5	23.814
17	25.715	17	24.975	17	22.807	9	23.601
18	25.499	18	24.753	18	22.573	9.5	23.397
19	25.293	19	24.541	19	22.352	10	23.203
20	25.096	20	24.338	20	22.143	10.5	23.017
21	24.905	21	24.143	21	21.950	11	22.844
22	24.722	22	23.956	22	21.793	11.5	22.685
23	24.546	23	23.776			12	22.550
24	24.376	24	23.602				

25	24.212	25	23.434
26	24.053	26	23.272
27	23.900	27	23.116
28	23.751	28	22.964
29	23.606	29	22.817
30	23.466	30	22.675
31	23.329	31	22.537
32	23.197	32	22.403
33	23.068	33	22.273
34	22.942	34	22.147
35	22.820	35	22.024
36	22.701	36	21.906
37	22.585	37	21.791
38	22.472	38	21.679
39	22.361	39	21.572
40	22.254	40	21.470
41	22.148	41	21.304
42	22.046		
43	21.946		
44	21.848		
45	21.752		
46	21.659		
47	21.569		
48	21.481		
49	21.396		
50	21.315		
51	21.241		
52	21.184		

Tabela T.3: Valores que deram origem a Fig. 4.4 e que foram inseridos no software

KaleidaGraph[®] - O comportamento da resistência térmica global $(\theta_{max})_m$ uma vezminimizada e seu correspondente ótimo $(H_3/L_3)_o$ para vários valores de ϕ_3 .

$(H_3dL_3)_o$ e $(\theta_{max})_m$		
$(H_3dL_3)_o$	$(\theta_{max})_m$	ϕ_3
52.00	21.183	0.010
22.00	21.793	0.020
12.00	22.549	0.030
6.75	23.599	0.040
6.00	23.843	0.041
5.75	24.010	0.042
5.00	24.405	0.043

Tabela T.4: Valores que deram origem a Fig. 4.7 e que foram inseridos no software

KaleidaGraph[®] - O comportamento da resistência térmica global $(\theta_{max})_m$ uma vezminimizada e seu correspondente ótimo $(H_3/L_3)_o$ para vários valores de ϕ_3 .

Valores Fixos									
a=0.1 H/L = 1.0 H ₀ /L ₀ = 2.5 H ₁ /L ₁ = 0.5 H ₂ /L ₂ = 2.2 $\phi_0 = 0.1$ $\phi_3 = 0.01$ $\phi_c = 0.3$ $\psi = 0.6$									
$\phi_3=0.01$		$\phi_3=0.012$		$\phi_3=0.02$		$\phi_3=0.03$		$\phi_3=0.04$	
H_3/L_3	θ_{max}	H_3/L_3	θ_{max}	H_3/L_3	θ_{max}	H_3/L_3	θ_{max}	H_3/L_3	θ_{max}
1	34.256	1	31.786	1	30.440	1	ERRO	1	ERRO
2	33.388	2	30.957	2	29.455	2	28.176	2	ERRO
3	32.610	3	30.213	3	28.598	3	27.173	3	ERRO
4	31.936	4	29.569	4	27.865	4	26.366	4.8	25.208
5	31.343	5	29.004	5	27.227	5	25.674	5	24.919
6	30.815	6	28.502	6	26.663	6	25.067	5.2	24.670
7	30.338	7	28.048	7	26.157	7	24.525	5.5	24.391
8	29.902	8	27.633	8	25.697	8	24.036	5.8	24.157
9	29.501	9	27.252	9	25.277	9	23.590	6	24.016

10	29.129	10	26.899	10	24.889	10	23.180	6.5	23.694
11	28.782	11	26.571	11	24.529	11	22.800	7	23.401
12	28.456	12	26.264	12	24.193	12	22.446	7.5	23.129
13	28.150	13	25.975	13	23.878	13	22.116	8	22.873
14	27.861	14	25.703	14	23.582	14	21.805	8.5	22.629
15	27.587	15	25.445	15	23.301	15	21.511	9	22.397
16	27.327	16	25.199	16	23.036	16	21.233	9.5	22.175
17	27.078	17	24.965	17	22.785	17	20.969	10	21.962
18	26.841	18	24.742	18	22.545	18	20.718	10.5	21.757
19	26.614	19	24.528	19	22.317	19	20.479	11	21.561
20	26.396	20	24.322	20	22.099	20	20.250	11.5	21.371
21	26.187	21	24.125	21	21.890	21	20.032	12	21.188
22	25.985	22	23.936	22	21.689	22	19.821	12.5	21.011
23	25.791	23	23.753	23	21.495	23	19.632	13	20.839
24	25.603	24	23.577	24	21.309	24	19.451	13.5	20.672
25	25.421	25	23.406	25	21.129	25	19.277	14	20.510
26	25.246	26	23.242	26	20.955	26	19.110	14.5	20.353
27	25.076	27	23.082	27	20.788	27	18.950	15	20.201
28	24.911	28	22.927	28	20.625	28	18.795	15.5	20.053
29	24.751	29	22.777	29	20.468	29	18.646	16	19.910
30	24.595	30	22.777	30	20.315	30	18.503	16.5	19.786
31	24.444	31	22.631	31	20.167	31	18.366	17	19.667
32	24.296	32	22.489	32	20.023	32	18.240	17.5	19.550
33	24.153	33	22.351	33	19.884	33	18.162	18	19.437
34	24.013	34	22.217	34	19.753			18.5	19.324
35	23.877	35	22.086	35	19.626			19	19.219
36	23.743	36	21.958	36	19.502			19.5	19.112
37	23.613	37	21.834	37	19.381			20	19.012
38	23.486	38	21.712	38	19.264			20.5	18.914
39	23.361	39	21.594	39	19.150			21	18.815
40	23.240	40	21.478	40	19.038			21.5	18.720
41	23.121	41	21.364	41	18.930			22	18.629
42	23.005	42	21.253	42	18.824			22.5	18.542
43	22.891	43	21.145	43	18.721			23	18.455
44	22.779	44	21.039	44	18.620			23.5	18.375
45	22.670	45	20.934	45	18.522			24	18.303
46	22.562	46	20.833	46	18.426			24.5	18.253
47	22.457	47	20.733	47	18.334				
48	22.354	48	20.636	48	18.245				
49	22.252	49	20.541	49	18.164				
50	22.152	50	20.448						
51	22.054	51	20.358						
52	21.958	52	20.269						

53	21.863	53	20.182
54	21.771	54	20.097
55	21.679	55	20.014
56	21.589	56	19.932
57	21.501	57	19.851
58	21.414	58	19.771
59	21.329	59	19.693
60	21.246	60	19.616
61	21.167	61	19.541
62	21.090	62	19.467
63	21.014	63	19.394
64	20.939	64	19.322
65	20.865	65	19.251
66	20.793	66	19.182
67	20.721	67	19.113
68	20.651	68	19.046
69	20.582	69	18.980
70	20.513	70	18.914
71	20.446	71	18.850
72	20.379	72	18.786
73	20.314	73	18.724
74	20.249	74	18.661
75	20.185	75	18.601
76	20.122	76	18.541
77	20.060	77	18.482
78	19.999	78	18.367
79	19.939	79	18.310
80	19.879	80	18.255
81	19.820	81	18.202
82	19.762	82	18.151
83	19.706	83	18.119
84	19.650		
85	19.594		
86	19.538		
87	19.484		
88	19.429		
89	19.377		
90	19.324		
91	19.273		
92	19.222		
93	19.173		
94	19.124		
95	19.076		
96	19.029		

97	18.984
98	18.941
99	18.910

Tabela T.5: Otimização da resistência térmica global θ_{\max} em função de H_2/L_2 para diversos valores da razão de H_1/L_1 .

Valores Fixos									
a=0.1 H/L = 1.0 H ₀ /L ₀ = 2.5 H ₃ /L ₃ = 83 $\varnothing_0 = 0.1$ $\varnothing_3 = 0.012$ $\varnothing_c = 0.3$ $\psi = 0.6$									
H ₁ /L ₁ = 0.8		H ₁ /L ₁ = 0.9		H ₁ /L ₁ = 1.1		H ₁ /L ₁ = 1.28		H ₁ /L ₁ = 1.29	
H ₂ /L ₂	θ_{\max}	H ₂ /L ₂	θ_{\max}	H ₂ /L ₂	θ_{\max}	H ₂ /L ₂	θ_{\max}	H ₂ /L ₂	θ_{\max}
2.12	18.139	2.400	18.039	2.925	17.853	3.380	17.718	3.41	17.706
2.15	18.130	2.405	18.038	2.930	17.848	3.381	17.716	3.411	17.706
2.17	18.121	2.410	18.035	2.935	17.844	3.382	17.714	3.412	17.705
2.20	18.113	2.415	18.032	2.940	17.840	3.383	17.713	3.413	17.705
2.22	18.104	2.420	18.030	2.945	17.837	3.384	17.712	3.414	17.705
2.25	18.093	2.425	18.027	2.950	17.833	3.385	17.711	3.415	17.704
2.27	18.082	2.430	18.024	2.955	17.830	3.386	17.711	3.416	17.705
2.30	18.071	2.435	18.023	2.960	17.827	3.387	17.710	3.417	17.705
2.32	18.059	2.440	18.020	2.965	17.823	3.388	17.709	3.418	17.705
2.35	18.048	2.445	18.018	2.970	17.820	3.389	17.709	3.419	17.706
2.37	18.036	2.450	18.016	2.975	17.817	3.390	17.709	3.42	17.707
2.40	18.025	2.455	18.013	2.980	17.814	3.391	17.708	3.421	17.708
2.42	18.013	2.460	18.011	2.985	17.811	3.392	17.708	3.422	17.709
2.45	18.001	2.465	18.008	2.990	17.808	3.393	17.708	3.423	17.710
2.47	17.989	2.470	18.006	2.995	17.805	3.394	17.708	3.424	17.713
2.50	17.979	2.475	18.004	3.000	17.802	3.395	17.708	3.425	17.715
2.52	17.965	2.480	18.001	3.005	17.800	3.396	17.709	3.426	17.719
2.55	17.953	2.485	17.998	3.010	17.797	3.397	17.709	3.427	17.723
2.57	17.941	2.490	17.996	3.015	17.794	3.398	17.709	3.428	17.727
2.60	17.929	2.495	17.993	3.020	17.791	3.399	17.710	3.429	17.733
2.62	17.917	2.500	17.991	3.025	17.790	3.400	17.711	3.43	17.740
2.65	17.905	2.505	17.988	3.030	17.787	3.401	17.713		
2.67	17.894	2.510	17.986	3.035	17.785	3.402	17.715		
2.70	17.882	2.515	17.983	3.040	17.783	3.403	17.717		
2.72	17.871	2.520	17.980	3.045	17.780	3.404	17.719		
2.75	17.861	2.525	17.978	3.050	17.778				

2.77	17.852	2.530	17.975	3.055	17.776
2.80	17.844	2.535	17.972	3.060	17.774
2.82	17.840	2.540	17.970	3.065	17.772
2.85	17.848	2.545	17.968	3.070	17.771
2.87	17.919	2.550	17.966	3.075	17.769
		2.555	17.963	3.080	17.768
		2.560	17.961	3.085	17.767
		2.565	17.958	3.090	17.767
		2.570	17.956	3.095	17.767
		2.575	17.953	3.100	17.768
		2.580	17.951	3.105	17.769
		2.585	17.949	3.110	17.772
		2.590	17.946	3.115	17.777
		2.595	17.944		
		2.600	17.941		
		2.605	17.938		
		2.610	17.937		
		2.615	17.935		
		2.620	17.932		
		2.625	17.930		
		2.630	17.926		
		2.635	17.924		
		2.640	17.921		
		2.645	17.919		
		2.650	17.916		
		2.655	17.914		
		2.660	17.911		
		2.665	17.909		
		2.670	17.906		
		2.675	17.904		
		2.680	17.902		
		2.685	17.899		
		2.690	17.897		
		2.695	17.894		
		2.700	17.892		
		2.705	17.889		
		2.710	17.887		
		2.715	17.885		
		2.720	17.882		
		2.725	17.880		
		2.730	17.877		
		2.735	17.875		
		2.740	17.873		
		2.745	17.870		

2.750	17.868
2.755	17.866
2.760	17.863
2.765	17.861
2.770	17.859
2.775	17.857
2.780	17.854
2.785	17.852
2.790	17.850
2.795	17.847
2.800	17.845
2.805	17.843
2.810	17.841
2.815	17.839
2.820	17.837
2.825	17.835
2.830	17.833
2.835	17.831
2.840	17.829
2.845	17.828
2.850	17.826
2.855	17.825
2.860	17.823
2.865	17.821
2.870	17.820
2.875	17.819
2.880	17.818
2.885	17.818
2.890	17.818
2.895	17.818
2.900	17.819

Tabela T.6: O efeito de H_1/L_1 sobre a resistência térmica global uma vez minimizada $(\theta_{\max})_m$ e seus correspondentes ótimos $(H_2/L_2)_o$.

H ₁ /L ₁ para $\varnothing_3=0.012$ H ₃ /L ₃ =83 H ₀ /L ₀ =2.5		
H ₁ /L ₁	(H ₂ /L ₂) _o	(θ_{\max}) _m
0.50	2.68	17.897
0.60	2.72	17.880
0.70	2.76	17.861
0.80	2.80	17.843
0.90	2.89	17.818
1.10	3.09	17.767
1.28	3.39	17.709
1.29	3.41	17.705
1.30	3.44	17.701

Tabela T.7: Otimização do terceiro grau de liberdade. H/L .

Valores Fixos									
a=0.1 H ₀ /L ₀ = 2.5 H ₁ /L ₁ = 1.29 $\varnothing_0 = 0.1$ $\varnothing_3 = 0.012$ $\varnothing_c = 0.3$ $\psi = 0.6$									
H/L = 1 H ₃ /L ₃ =83		H/L = 1.25 H ₃ /L ₃ =104		H/L = 1.5 H ₃ /L ₃ =104		H/L = 1.75 H ₃ /L ₃ =104		H/L = 2.0 H ₃ /L ₃ =104	
H ₂ /L ₂	θ_{\max}	H ₂ /L ₂	θ_{\max}	H ₂ /L ₂	θ_{\max}	H ₂ /L ₂	θ_{\max}	H ₂ /L ₂	θ_{\max}
3.41	17.70	3.42	16.791	3	15.46	3.42	15.47	3	14.59
3.41	17.70	3.43	16.776	3.03	15.44	3.44	15.44	3.1	14.47
3.41	17.70	3.44	16.763	3.06	15.42	3.46	15.42	3.2	14.38
3.41	17.70	3.45	16.752	3.09	15.41	3.48	15.40	3.3	14.30
3.41	17.70	3.46	16.742	3.12	15.39	3.50	15.38	3.4	14.23
3.41	17.70	3.47	16.732	3.15	15.37	3.52	15.36	3.5	14.16
3.41	17.70	3.48	16.722	3.18	15.36	3.54	15.34	3.6	14.10
3.41	17.70	3.49	16.713	3.21	15.34	3.56	15.33	3.7	14.05
3.41	17.70	3.50	16.705	3.24	15.33	3.58	15.32	3.8	14.00
3.41	17.70	3.51	16.696	3.27	15.31	3.60	15.30	3.9	13.94
3.41	17.70	3.52	16.688	3.3	15.30	3.62	15.29	4	13.90
3.41	17.70	3.53	16.680	3.33	15.28	3.64	15.28	4.1	13.85
3.41	17.70	3.54	16.673	3.36	15.27	3.66	15.27	4.2	13.81
3.41	17.70	3.55	16.665	3.39	15.25	3.68	15.25	4.3	13.77
3.41	17.70	3.56	16.658	3.42	15.24	3.70	15.24	4.4	13.74
3.41	17.70	3.57	16.650	3.45	15.23	3.72	15.23	4.5	13.70

3.41	17.70	3.58	16.643	3.48	15.21	3.74	15.22	4.6	13.67
3.41	17.70	3.59	16.636	3.51	15.20	3.76	15.21	4.7	13.63
3.41	17.70	3.60	16.629	3.54	15.19	3.78	15.20	4.8	13.60
3.41	17.70	3.61	16.623	3.57	15.17	3.80	15.19	4.9	13.56
3.41	17.70	3.62	16.616	3.6	15.16	3.82	15.18	5	13.53
3.41	17.70	3.63	16.609	3.63	15.14	3.84	15.17	5.1	13.55
3.41	17.70	3.64	16.603	3.66	15.13	3.86	15.16		
3.41	17.70	3.65	16.596	3.69	15.12	3.88	15.15		
3.41	17.70	3.66	16.590	3.72	15.10	3.90	15.14		
3.41	17.70	3.67	16.583	3.75	15.09	3.92	15.13		
3.41	17.70	3.68	16.577	3.78	15.08	3.94	15.12		
3.41	17.70	3.69	16.571	3.81	15.07	3.96	15.11		
3.41	17.70	3.70	16.565	3.84	15.05	3.98	15.10		
3.41	17.70	3.71	16.560	3.87	15.04	4.00	15.09		
3.41	17.70	3.72	16.555	3.9	15.03	4.02	15.08		
3.41	17.70	3.73	16.549			4.04	15.07		
3.41	17.70	3.74	16.544			4.06	15.06		
3.41	17.70	3.75	16.538			4.08	15.05		
3.41	17.70	3.76	16.533			4.10	15.04		
3.41	17.70	3.77	16.529			4.12	15.04		
3.41	17.70	3.78	16.525			4.14	15.03		
3.41	17.70	3.79	16.522			4.16	15.02		
3.41	17.70	3.80	16.520			4.18	15.01		
3.41	17.70	3.81	16.522			4.20	15.00		
3.41	17.70	3.82	16.534			4.22	14.99		
3.41	17.70					4.24	14.99		
3.41	17.70					4.26	14.98		
3.41	17.70					4.28	14.97		
3.41	17.70					4.30	14.96		
3.41	17.70					4.32	14.95		
3.41	17.70					4.34	14.94		
3.41	17.70					4.36	14.93		
3.41	17.70					4.38	14.93		
3.41	17.70					4.40	14.92		
3.41	17.70					4.42	14.91		
3.41	17.70					4.44	14.90		
3.41	17.70					4.46	14.89		
3.41	17.70					4.48	14.89		
3.41	17.70					4.50	14.88		
3.41	17.70					4.52	14.87		
3.41	17.70					4.54	14.86		
						4.56	14.86		
						4.58	14.85		

4.60	14.84
4.62	14.83
4.64	14.82
4.66	14.82
4.68	14.81
4.70	14.80
4.72	14.79
4.74	14.78
4.76	14.78
4.78	14.77
4.80	14.76
4.82	14.75
4.84	14.75
4.86	14.74
4.88	14.73
4.90	14.72
4.92	14.72
4.94	14.71
4.96	14.70

Tabela T.8: Otimização do quarto grau de liberdade. H_0/L_0 e seus correspondentes ótimos $(H_2/L_2)_{oo}$ e $(H_1/L_1)_{oo}$.

Valores Fixos			
a=0.1 $(H_3/L_3)_o = 83$ $\emptyset_0 = 0.1$ $\emptyset_3 = 0.012$ $\emptyset_c = 0.3$ $\psi = 0.6$			
H_0/L_0	$(H_1/L_1)_o$	$(H_2/L_2)_{oo}$	$(\Theta_{max})_{mmmm}$
2.50	1.30	3.44	17.701
3.50	1.29	3.41	17.335
4.50	1.29	3.41	17.032
5.50	1.28	3.38	16.772
6.50	1.28	3.38	16.544
7.50	1.28	3.38	16.340
8.50	1.28	3.38	16.157
9.50	1.29	3.41	16.010
9.57	1.29	3.41	15.999
9.72	1.30	3.44	16.023