

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL  
CURSO DE MESTRADO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

Dissertação de Mestrado

**MODELAGEM DO RITMO CIRCADIANO COM  
DERIVADAS FRACIONÁRIAS**

Nitiele Medeiros Contessa

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal do Rio Grande, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Modelagem Computacional

Orientador: Prof. Dr. Adriano De Cezaro

Rio Grande, 2017

Dados de catalogação na fonte:

colocar NOME DO BIBLIOTECÁRIO – CRB-colocar número do crb do bibliotecário  
Biblioteca Central – FURG

A999a Contessa, Nitiele Medeiros

MODELAGEM DO RITMO CIRCADIANO COM DERIVADAS FRACIONÁRIAS / Nitiele Medeiros Contessa. – Rio Grande, 2017. – 89 f: gráf. – Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional. Universidade Federal do Rio Grande. Instituto de Matemática, Estatística e Física. Rio Grande, 2017. – Orientador Adriano De Cezaro.

1. Ritmo circadiano. 2. Ciclos. 3. Memória. 4. Derivadas fracionárias. I. Cezaro, Adriano De. II. Título.

CDD: 999.9

**Banca examinadora:**

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Celene Buriol

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Diana Francisca Adamatti

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente, agradeço a Deus por ter me proporcionado essa experiência incrível, me iluminando em toda a caminhada.

Aos meus pais, irmãs, sobrinhos e todos familiares e amigos pela compreensão da ausência e pelo apoio incansável.

Aos meus colegas do mestrado e as meninas que moraram comigo, Ana, Gabi, Luti e Mari, muito obrigada pela paciência e compreensão.

Ao meu orientador, Adriano pelo incentivo, paciência e orientação.

A Universidade Federal do Rio Grande e ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional pelo espaço.

A Comissão de Aperfeiçoamento de Pessoal do Nível Superior (Capes) pela bolsa de estudos.

Muito Obrigada!

*A matemática é um mundo de infinitas possibilidades.*  
—LENILSON XAVIER

## RESUMO

CONTESSA, Nitiele Medeiros. **MODELAGEM DO RITMO CIRCADIANO COM DERIVADAS FRACIONÁRIAS**. 2017. 89 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional. Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande.

O ritmo circadiano é responsável por diversas atividades fundamentais do organismo dos seres vivos, como produção de hormônios, atividades do sistema digestivo, a sensação de fome, de sono, etc., que funcionam de forma sincrônica. Sendo assim, é de suma importância entender os mecanismos que regem o ritmo circadiano, bem como efeitos externos que possam degradar ou acelerar processo de sincronização do ritmo circadiano.

O foco do nosso trabalho é caracterizar algumas propriedades do ritmo circadiano, levando em consideração o ciclo sono-vigília e o ciclo de temperatura corporal, bem como outros efeitos externos que possam influenciar a dinâmica do ritmo circadiano. Diferentemente do que existe na literatura, onde a modelagem da dinâmica do ciclo sono-vigília em relação a temperatura corporal é feita usando derivadas de ordem inteira, neste trabalho propomos reescrever este modelo usando cálculo de ordem fracionário. Como tal ferramenta possui propriedades que podem ser interpretadas como memória, prevemos obter um modelo que seja fidedigno a realidade, e sirva como um guia para determinar mecanismos que minimizem as alterações indesejadas causadas por interferência externas. Do ponto de vista teórico, provaremos resultados de boa colocação do modelo proposto. Apresentaremos alguns resultados numéricos que mostram o comportamento do efeito memória na dinâmica em comparação com o modelo conhecido na literatura.

**Palavras-chave:** Ritmo circadiano, Ciclos, Memória, Derivadas fracionárias.

## **ABSTRACT**

CONTESSA, Nitiele Medeiros. **MODELING OF CIRCADIAN RHYTHM WITH FRACTIONAL DERIVATIVES**. 2017. 89 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional. Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande.

The circadian rhythm is responsible for several fundamental activities of the organism of living being such as the production of hormones, activities of the digestive system, the sensation of hunger, sleep, among other. Such actions works synchronously. Therefore, it is extremely important to understand the mechanisms that govern the circadian rhythm as well as external effects that may degrade or accelerate the synchronization process of such rhythm.

The focus of our work is to characterize some properties of the circadian rhythm, taking into account the sleep-wake cycle and the body temperature cycle, as well as other external effects that may influence circadian rhythm dynamics. Differently from what exists in the literature, where the modelling of the dynamics of the sleep-wake cycle in relation to body temperature is done using integer-order derivatives, in this work we propose to rewrite this model using a fractional order calculus. Since such a tool have properties that can be interpreted as memory, we expect to obtain a model that is reliable to reality and can be used as a guide to determine mechanisms that minimize unwanted changes caused by external interference. From the theoretical point of view, we will prove well-posedness results of the proposed model. We also provide some numerical results that show the behavior of the memory effect in the dynamics in comparison to the model known in the literature.

**Keywords:** Circadian Rhythm, Cycle, Memory, Fractional Derivative.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Estrutura do modelo de fase de Strogatz . . . . .	50
Figura 2	Caso de Strogatz $n = 1$ . . . . .	65
Figura 3	Caso de Strogatz Generalizado $n = 0,9$ . . . . .	65
Figura 4	Caso de Strogatz Generalizado $n = 0,7$ . . . . .	66
Figura 5	Caso de Strogatz Generalizado $n = 0,5$ . . . . .	66
Figura 6	Caso de Strogatz $n = 1$ . . . . .	67
Figura 7	Caso de Strogatz Generalizado $n = 0,9$ . . . . .	67
Figura 8	Caso de Strogatz Generalizado $n = 0,7$ . . . . .	68
Figura 9	Caso de Strogatz Generalizado $n = 0,5$ . . . . .	68
Figura 10	Caso de Strogatz $n = 1$ . . . . .	69
Figura 11	Caso de Strogatz Generalizado $n = 0,9$ . . . . .	69
Figura 12	Caso de Strogatz Generalizado $n = 0,7$ . . . . .	70
Figura 13	Caso de Strogatz Generalizado $n = 0,5$ . . . . .	70
Figura 14	Caso dessincronizado Strogatz $n = 1$ . . . . .	71
Figura 15	Caso dessincronizado de Strogatz Generalizado $n = 0,9$ . . . . .	71
Figura 16	Caso dessincronizado de Strogatz Generalizado $n = 0,7$ . . . . .	72
Figura 17	Caso dessincronizado de Strogatz Generalizado $n = 0,5$ . . . . .	72
Figura 18	Caso dessincronizado de Strogatz $n = 1$ . . . . .	73
Figura 19	Caso dessincronizado de Strogatz Generalizado $n = 0,9$ . . . . .	73
Figura 20	Caso dessincronizado de Strogatz Generalizado $n = 0,7$ . . . . .	74
Figura 21	Caso dessincronizado de Strogatz Generalizado $n = 0,5$ . . . . .	74
Figura 22	Caso dessincronizado de Strogatz $n = 1$ . . . . .	75
Figura 23	Caso dessincronizado de Strogatz Generalizado $n = 0,9$ . . . . .	75
Figura 24	Caso dessincronizado de Strogatz Generalizado $n = 0,7$ . . . . .	76
Figura 25	Caso dessincronizado de Strogatz Generalizado $n = 0,5$ . . . . .	76

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Tabela de valores da função gama . . . . .	85
----------	--	----

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

EPET	Efeitos Permanentes de Estímulo Temporário
FFT	Tansformada de Fourier rápida
LMMs	Métodos Lineares do tipo Multi-passos
PVI	Problema de Valor Inicial

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	13
<b>2</b>	<b>CRONOBIOLOGIA</b>	16
<b>2.1</b>	<b>Ritmo circadiano</b>	16
2.1.1	Ciclo sono-vigília	17
2.1.2	Ciclo temperatura corporal	17
2.1.3	Sincronização e dessincronização	18
<b>2.2</b>	<b>Memória</b>	19
<b>3</b>	<b>CÁLCULO DE ORDEM FRACIONÁRIA</b>	20
<b>3.1</b>	<b>Derivadas Fracionárias Segundo Riemann-Liouville</b>	21
<b>3.2</b>	<b>Derivadas Fracionárias Segundo Caputo</b>	28
<b>3.3</b>	<b>Análise do método de Riemann-Liouville e Caputo</b>	32
<b>3.4</b>	<b>Sistemas de Equação Diferenciais Fracionárias - Resultados de Boa Colocação</b>	36
3.4.1	Resultados de existência, unicidade e dependência contínua dos dados iniciais para EDO's com derivadas de ordem fracionária	37
<b>4</b>	<b>MODELO DE STROGATZ</b>	49
<b>4.1</b>	<b>Estrutura do modelo de Strogatz</b>	49
<b>4.2</b>	<b>Sincronização e Dessincronização</b>	50
4.2.1	Sincronização	51
4.2.2	Dessincronização	53
<b>5</b>	<b>MODELO DE STROGATZ GENERALIZADO</b>	59
<b>5.1</b>	<b>Estrutura</b>	59
<b>5.2</b>	<b>Resultados de boa colocação do modelo proposto</b>	60
<b>5.3</b>	<b>Efeitos de Memória no Sistema de Strogatz Generalizado</b>	62
<b>6</b>	<b>RESULTADOS NUMÉRICOS</b>	63
<b>6.1</b>	<b>Simulação Numérica e Análise dos Modelos</b>	63
6.1.1	Sincronização	64
6.1.2	Dessincronização	69
<b>7</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	77
7.0.1	Trabalhos Futuros	77
	<b>REFERÊNCIAS</b>	79

<b>APÊNDICE APÊNDICE PROBLEMAS FUNDAMENTAIS</b>	82
<b>A.1 Função Gama</b>	82
<b>A.2 Função Mittag-Leffler</b>	84
<b>A.3 Teoremas do ponto fixo e teorema do valor médio</b>	86
<b>A.4 Função de Borel e Lebesgue mensuráveis</b>	87
<b>A.5 Cálculo Jacobiano</b>	88

# 1 INTRODUÇÃO

Processos rítmicos são inerentes ao nosso cotidiano e formam boa parte dos processos indispensáveis para a vida. Dentro de tais processos rítmicos, o processo que é conhecido como ritmo circadiano desempenha um papel de destaque.

Este pode ser caracterizado por qualquer processo biológico que apresenta um ritmo oscilatório endógeno e ajustável em torno de 24 horas. Este comportamento já é amplamente conhecido por atuar em diversos seres vivos, não só em animais, mas também em plantas, bactérias, fungos, etc [29].

O estudo formal do ritmo circadiano ou ciclo circadiano faz parte da cronobiologia, área das ciências biológicas que tem por objetivo estudar os relógios biológicos que geram esses ritmos e que são responsáveis por atividades do organismo dos seres vivos. Em especial, é sabido que tais ritmos estão associados a funções vitais como a produção de hormônios, atividades do sistema digestivo e a sensação de fome e sono, que repete suas funções aproximadamente a cada 24 (vinte e quatro) horas [2].

A existência do ritmo circadiano em organismos possibilitam a antecipação e o preparo para mudanças regulares no meio ambiente, o que confere a estes organismos grandes vantagens evolucionárias com relação aos que não possuem tal regulador [9]. A antecipação de fenômenos que ocorrem periodicamente pode ser considerada como um processo de memória, a qual é um dos pontos-chaves deste trabalho.

Desta forma, estudar e prever a dinâmica e funcionamento do ritmo circadiano é fundamental para a cronobiologia. Há essencialmente duas formas de fazer isso. Uma é observar uma enorme quantidade de casos e propor uma teoria que seja compatível com as observações ou então propor um modelo matemático que descreva de maneira fidedigna um conjunto de dados. No primeiro caso faz-se necessário a observação de uma quantidade suficiente de ocorrências idênticas para que a estatística seja completa, ou suficiente. No segundo caso podemos nos restringir a um conjunto menor de ocorrências e "acreditar" que o modelo proposto descreva de maneira fidedigna o comportamento do fenômeno estudado.

Porém, no caso da modelagem matemática ainda esbarramos na complexidade do modelo necessária para descrever fenômenos biológicos reais. Assim, por vezes, faz-

se necessário uma abordagem mais simples do fenômeno que ainda assim, descrevam informações relevantes.

Nestes termos, o matemático Steven Henry Strogatz propôs uma modelagem para o ciclo de sono-vigília influenciado pelo ciclo da temperatura corporal utilizando o princípio que estes dois ciclos sejam osciladores (oscilador do ciclo temperatura corporal e oscilador do ciclo sono-vigília). A interação desses osciladores é determinada por forças de acoplamento, as quais são responsáveis pela sincronia ou dessincronia dos mesmo [27].

Descreveremos o estudo proposto por Strogatz em detalhes no Capítulo 4. O qual propõe para modelagem da dinâmica dos dois osciladores um sistema não linear de equações diferenciais ordinárias e portanto, utilizando derivadas de ordem inteira. Como é bem sabido da teoria de diferenciação clássica [30], derivadas de ordem inteira reproduzem somente efeitos locais e não carregam contribuições de memória. Efeitos de memória são sempre esperados em processos envolvendo ritmos biológicos, pela própria natureza destes processos [19].

O objetivo deste trabalho é apresentar um modelo simplificado para o ritmo circadiano que leve em conta o processo de memória. A novidade de nossa abordagem com relação ao modelo proposto por Strogatz é que utilizaremos derivadas de ordem fracionária para modelar a dinâmica dos ciclo de sono-vigília influenciado pelo ciclo da temperatura corporal. A motivação para o uso de derivadas de ordem fracionária em contrapartida as de ordem inteira é que as primeiras tem como uma de suas características efeitos de memória [6]. Na literatura encontramos diversos trabalhos aplicando derivadas de ordem fracionária, tais como em Oxley [22], Camargo [3] e Rossato [24].

Além da modelagem do ritmo circadiano utilizando o oscilador temperatura corporal e oscilador ciclo sono-vigília, mostraremos resultados de boa colocação, existência, unicidade e dependência contínua para o modelo proposto e determinaremos pontos de sincronia e a dessincronia para tal modelo. Faremos isso no Capítulo 5

Mostraremos que os possíveis pontos de sincronia e dessincronia para o modelo proposto apresentam um atraso, o qual julgamos ser o efeito da memória. Esta verificação será feita de maneira teórica no Capítulo 5 e comprovada numericamente no Capítulo 6.

O restante do trabalho se dispõe da seguinte maneira: No Capítulo 2 apresentaremos de forma detalhada a cronobiologia, que é a ciência que estuda o ritmo circadiano, tal capítulo ainda trás como Subseção 2.1 que aborda o ritmo circadiano de forma aprofundada e detalhada, tratando separadamente os ciclos, sono-vigília e temperatura corporal. A Subseção 2.2 destina-se a fazermos uma análise do comportamento do corpo humano, observando os efeitos de memória que o mesmo apresenta.

No Capítulo 3 introduziremos o cálculo de ordem fracionária, sua história e as definições de derivadas de ordem fracionária segundo Riemann-Liouville e Caputo. Analisaremos os dois métodos, mostrando porque Caputo é o que melhor se enquadra para a modelagem do problema proposto. Enunciaremos ainda neste capítulo as hipóteses

suficientes para garantir resultados de existência, unicidade e dependência contínua dos dados iniciais e da ordem da derivada para sistemas de equações a derivadas de ordem fracionária segundo Caputo.

Para finalizar, o Capítulo 7 apresenta as considerações finais, assim como propostas para trabalhos futuros, visto que ainda temos muito para estudar a fim de obter um modelo que represente os dados reais de forma fidedigna.

## 2 CRONOBIOLOGIA

Cronobiologia (crono = tempo, bio = vida, logia = estudo), tem como objetivo estudar o relógio biológico dos seres vivos.

Ao final do século XIX iniciou-se inúmeros estudos sobre ritmos biológicos, mas foi somente no século XX que a cronobiologia tornou-se aceita internacionalmente, sendo uma ciência que estuda os fenômenos biológicos, aspectos biológicos da ritmicidade, descrição e quantificação dos ritmos [2].

Esses fenômenos são chamados de ritmos biológicos e podem ter diferentes frequências, os que ocorrem com uma periodicidade próxima a 24 (vinte e quatro) horas são chamados de circadianos, os com período maior que 28 (vinte e oito) horas são chamados de infradianos e os menores que 20 (vinte) horas recebem o nome de ultradianos [19].

É possível descrever exemplos para cada frequência do ritmo biológico. Por exemplo ritmo circadiano é dito: a temperatura corporal, o rendimento mental e o ciclo sono-vigília, já os infradianos são: hibernação de alguns animais e o ciclo menstrual. Os exemplos mais comuns e de fácil percepção, são os ultradianos, ou seja: secreção pulsátil de muitos hormônios, frequência cardíaca, movimentos respiratórios entre outros [19].

### 2.1 Ritmo circadiano

Ritmo circadiano é todo o ritmo, tal que, sua natureza seja endógena. Embora os ritmos circadianos sejam endógenos (auto-sustentados) eles são ajustados (arrastados) para o ambiente local por meio de sinais externos que incluem ciclos de luz e temperatura.

O ritmo circadiano se dá através de um marca-passo interno que se encontra no cérebro, localizado no hipotálamo, que é o núcleo supraquiasmático, essa estrutura gera e regula os ritmos, materiais e psicológicos do ser humano, tem influência na renovação das células e na digestão em vigília, dentre outras funções [1, 11].

Funções como a produção de hormônios, sensação de fome e sono, atividades do sistema digestivo, tais como, atividades dos rins e do intestino, são ministradas pelo ritmo circadiano (circa = por volta de, radical latino "dies"= dia) ou seja, que repete suas funções

aproximadamente a cada 24 (vinte e quatro) horas [2].

A ritmicidade circadiana está presente nos padrões de sono e alimentação dos animais, incluindo os seres humanos. Existem também padrões claros de temperatura corporal central, atividade das ondas cerebrais, produção de hormônio, regeneração celular e outras atividades biológicas. Além disso, o fotoperiodismo, a reação fisiológica dos organismos à duração do dia ou da noite, é vital para plantas e animais, e o sistema circadiano desempenha um papel na medição e interpretação da duração do dia.

Evidenciamos a sincronização do ritmo circadiano através do meio ambiente e por ordem temporal interna, os quais apontam a necessidade do mesmo para a expressão fisiológica e comportamental normal de um organismo. Problemas de saúde podem ser causados por perturbações de ordem temporal interna ou externa, devido a transtornos na sincronização do ritmo circadiano, o que pode também ser chamado de dessincronização do ritmo [18].

Dissincronose ou também conhecida por jet lag, é um distúrbio que provoca diversos efeitos indesejáveis e prejudiciais a saúde, tais como, sonolência, cansaço, queda do rendimento físico e mental, entre outros. De uma maneira simplificada, pode-se dizer que a memória do relógio biológico é afetada por distúrbios desta natureza, geralmente associada a efeitos externos do tipo, trabalho noturno, voos transmeridianos, doenças e dores crônicas, etc [27].

### **2.1.1 Ciclo sono-vigília**

Ciclo sono-vigília é denominado o período em que dormimos ou ficamos acordados diariamente, sendo um ciclo periódico, influenciado por fatores externos de ordem temporal [11]. Tal ciclo pode sofrer mudanças bruscas por decorrência de vários fatores, alguns exemplos são, trabalho noturno, voos transmeridianos, ou jornada de trabalho excessiva, esses são responsáveis pela jet lag (ou dissincronose), um distúrbio que provoca sonolência fora de hora, cansaço, alterações de humor e até mesmo queda do rendimento físico e mental [27].

Segundo Chiese [5], uma boa noite de sono é de tamanha importância para o bem estar em vigília. O corpo humano recebe sinais através do hormônio da melatonina informando o início da noite e sua duração, e com isso, inicia uma cascata de eventos fisiológicos, para assim, preparar o organismo para o repouso. Porém, alguns aspectos podem causar alterações no seu período de sono-vigília, sendo esses, a claridade do dia/noite, e a irregularidade das refeições, o que também influencia no jet lag [11].

### **2.1.2 Ciclo temperatura corporal**

A temperatura corporal apresenta uma variação cíclica no decorrer das 24 (vinte e quatro) horas diárias, sendo controlada endogenamente, com uma variação térmica diária que geralmente não ultrapassa os  $0.6^{\circ}\text{C}$  ( $1^{\circ}\text{F}$ ), sendo que, variações acima dessa escala

são consideradas situações de urgência pelos especialistas [11].

Um ciclo periódico é gerado pela temperatura corporal, se mostrando da seguinte forma, menor pela manhã, aumenta ao longo do dia e tem seu pico de temperatura no início da noite [19].

Minati [17] diz que, algumas características são assumidas pela temperatura, através da sua mensuração durante o período sono-vigília. Segundo [16], um grupo de células localizadas na porção anterior do hipotálamo, regulam a temperatura corporal e detectam mudanças na temperatura sanguínea.

Entender as mudanças que o ciclo sono-vigília introduzem na temperatura corporal, e vice-versa, são importantes para diagnosticar alterações no funcionamento de certas funções vitais do organismo [20].

Strogatz [27] modela o sistema circadiano humano, levando em consideração a temperatura corporal e o ciclo sono-vigília, em modelos de equações diferenciais simples, o qual será apresentado no Capítulo 4.

### 2.1.3 Sincronização e dessincronização

É dito sincronizado ou dessincronizado, a relação entre dois ou mais ciclos, onde neste caso será verificado a iteração do ciclo sono-vigília e do ciclo temperatura corporal. Sabendo que a definição de sincronização é o ato ou efeito de sincronizar, ou seja, tornar sincrônico, combinar movimentos para que se dêem ao mesmo tempo.

Por definição, a relação entre dois ciclos é dita dessincronizada quando os mesmos perdem a sincronia ou simultaneidade, logo estes ciclos não estão perfeitamente interados.

Pode-se analisar a sincronização e a dessincronização na forma matemática, considerando os ciclos sono-vigília e ciclo temperatura corporal descritos por osciladores não lineares, os quais apresentam uma frequência intrínseca, que é a regularidade do ciclo e uma força de acoplamento, que determina o quanto um ciclo influencia no outro. Observa-se então dois casos [11]:

1. Temos um sistema sincronizado, se a soma das forças de acoplamento for maior que o módulo da diferença das frequências intrínsecas, então a relação entre estes osciladores é sincronizada. Tal acontecimento se dá pelo fato das forças de acoplamento terem maior influência no sistema.
2. Já em um sistema dessincronizado, a soma das forças de acoplamento será menor que o módulo da diferença das frequências intrínsecas, logo a relação entre estes osciladores é dita dessincronizada. Devido ao fato das forças de acoplamento não terem tanta influência no sistema e conseqüentemente a frequência intrínseca de cada oscilador permanecerá sem alteração alguma (ou quase nenhuma) a dessincronização acaba acontecendo.

Logo, matematicamente falando, para o caso de ter um ritmo circadiano sincronizado, precisa-se obter sincronizado todos os ciclos utilizados para a modelagem do ritmo circadiano, caso isso não ocorra o ritmo circadiano está dessincronizado.

## 2.2 Memória

Quando citamos memória, logo levamos em consideração o armazenamento de fatores do dia a dia, recordações de situações acontecidas tempos atrás. Mas, a memória tratada nesse trabalho é o manifesto de sensações do corpo humano que em fase sincronizada acontecem aproximadamente no mesmo horário [18].

A memória, entre outras coisas, possibilita a previsão do futuro com base em experiências vivenciadas em determinado tempo. Um efeito da memória é que os estímulos temporários podem causar efeitos permanentes sobre o comportamento humano ou animal [23]. Exemplos de Efeitos Permanentes de Estímulo Temporário (EPET) podemos perceber no nosso dia a dia, como a sensação de fome e sono, as quais acontece aproximadamente no mesmo horário, por um certo período, mesmo alterando as condições do meio [16, 17].

Uma forma de modelarmos efeitos de memória é utilizando o cálculo de ordem fracionária [3, 7], o qual será apresentado na próxima seção. Tal método é de grande valia para a modelagem do ritmo circadiano, pois efeitos de memória são esperados não somente neste caso, mas em qualquer processo que envolve ritmos biológicos.

O objetivo deste trabalho é apresentar um modelo simplificado para o ritmo circadiano que leve em conta o processo de memória. Para tal modelaremos a dinâmica utilizando derivadas de ordem fracionária pois, estas diferenciam-se das derivadas de ordens inteiras por não serem operações pontuais [7]. A dinâmicas que usam estas ferramentas matemáticas para a modelagem carregam os efeitos de memória de longo prazo, que são encontrados no ritmo circadiano.

### 3 CÁLCULO DE ORDEM FRACIONÁRIA

O desenvolvimento do cálculo fracionário é quase tão antigo quanto o do cálculo inteiro. Segundo [15], em 1695 Leibniz começou uma discussão sobre o assunto, quando introduziu o símbolo  $D^n y(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$ , denotado a derivada enésima de  $y$ , onde  $n$  é um inteiro positivo. Debnath [6] diz que, na mesma época L'Hospital escreveu uma carta a Leibniz questionando a possibilidade de  $n$  ser uma fração, ou seja,  $n$  fosse igual a  $\frac{1}{2}$ . Em resposta Leibniz apresentou que se  $y(x) = x$ , então temos  $D^{\frac{1}{2}} y(x) = x \sqrt{\frac{dx}{x}}$ . Assim, podemos dizer que a partir dessa resposta originou-se o cálculo fracionário. Este conceito chamou a atenção de diversos matemáticos famosos como Euler (1738), Laplace (1820), Fourier (1822), além de Riemann, Liouville e Caputo.

Apresentaremos neste capítulo as definições de derivada de ordem fracionária segundo Riemann-Liouville e Caputo, já que estas definições estão interrelacionadas. O objetivo é mostrar que a escolha específica da derivada de ordem fracionária segundo Caputo na Seção 3.2 é a mais adequada para descrever a modelagem do ritmo circadiano [7]. Outras definições para as derivadas de ordem fracionária podem ser encontrados em [24, 7].

Para introduzir e motivar o assunto de cálculo fracionário, iniciaremos esta seção relembrando um dos resultados fundamentais do cálculo clássico: O Teorema Fundamental do Cálculo [13].

**Teorema 3.0.1.** *(Teorema Fundamental do Cálculo) Seja  $\theta : [b, c] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e seja  $\Theta : [b, c] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por*

$$\Theta(t) = \int_b^t \theta(s) ds, \quad (1)$$

então  $\Theta$  é diferenciável e  $\Theta' = \theta$ .

**Demonstração:** *A demonstração é de conhecimento geral e pode ser encontrada em [13].*

Compreende-se com o Teorema Fundamental do Cálculo a relação entre os operadores de diferenciação, aqui denotado por  $D$ , e o operador de integração denotado por  $J$ , definidos em espaços de funções adequadas.

**Definição 3.0.1.** Denotamos por  $D$  o operador que mapeia uma função diferenciável em sua derivada, de forma que  $D\theta(t) = \theta'(t)$ .

Definiremos o operador  $J_b$  com uma função integrável num conjunto compacto em sua primitiva centrada em  $b$ , de forma que  $J_b\theta(t) = \int_b^t \theta(s)ds$ , para  $b \leq t \leq c$ . Para  $n \in \mathbb{N}$ , usaremos o símbolo  $D^n$  e  $J_b^n$  para denotar  $n$ -ésima iterada de  $D$  e  $J_b$ , respectivamente. Assim,  $D^n := DD^{n-1}$ , com  $D^1 = D$  e  $J_b^n = J_b J_b^{n-1}$ , com  $J_b^1 = J_b$  e  $D^0 = J_b^0 = I$ .

Alguns resultados que seguem diretamente das definições dos operadores de derivação e de integração e não serão demonstrado, são os seguintes:

**Lema 3.0.2.** Seja  $\theta$  uma função integrável em  $[b, c]$ . Então, para qualquer  $b \leq t \leq c$  temos que

$$J_b^n \theta(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_b^t (t-s)^{n-1} \theta(s) ds. \quad (2)$$

Sejam  $m > n$ , com  $m, n \in \mathbb{N}$ . Para qualquer função  $\theta$  que possui  $n$ -ésima derivada contínua em  $[b, c]$  vale que

$$D^n \theta = D^m J_b^{m-n} \theta. \quad (3)$$

A introdução do cálculo de ordem fracionária passa pelo desafio de generalizar o resultado acima, para  $n \notin \mathbb{N}$ . Ao observar a equação (2) no Lema 3.0.2, nota-se a necessidade de generalizar a noção de fatorial. Isso é feito com a função Gamma de Euler definida como a seguir:

**Definição 3.0.2.** A função  $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , conhecida como função Gamma de Euler [7], é definida por

$$\Gamma(t) := \int_0^\infty s^{t-1} e^{-s} ds. \quad (4)$$

No Apêndice A.1 apresentaremos resultados relevantes e necessários para este trabalho com relação a função Gamma de Euler.

A partir da próxima seção apresentaremos algumas definições de derivadas de ordem fracionária a saber, segundo Riemann-Liouville e Caputo. Tais definições vão ser utilizadas no decorrer desse trabalho.

### 3.1 Derivadas Fracionárias Segundo Riemann-Liouville

A definição segundo Riemann-Liouville para derivadas de ordem fracionária é usada na resolução de diversos problemas físicos [7].

Porém, para uma melhor introdução do conteúdo pode-se dizer que a definição está baseada no fato que a derivada é a operação inversa da integral, como sugere o Teorema

Fundamental do Cálculo apresentado anteriormente. Como veremos adiante, podemos considerar que a derivada de ordem fracionária segundo Riemann-Liouville, nada mais é que a derivada de ordem inteira de uma determinada integral de ordem fracionária [7].

### Definição de integral segundo Riemann-Liouville

Antes de seguirmos apresentaremos duas definições e um teorema, que utilizaremos posteriormete no decorrer da dissertação.

**Definição 3.1.1.** *Seja  $1 \leq p < \infty$ . Denotaremos por  $L_p[b, c]$  o espaço das funções  $p$  integráveis segundo Lebesgue:  $L_p[b, c] := \{ f : [b, c] \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é mensurável em } [b, c] \text{ e } \int_b^c |f(t)|^p dt < \infty \}$ .*

**Teorema 3.1.1.** *(Teorema fundamental do espaço de Lebesgue) Seja  $\theta \in L_1[b, c]$ , então  $J_b\theta$  é diferenciável em quase toda a parte em  $[b, c]$  e  $DJ_b\theta = \theta$  também em quase toda a parte em  $[b, c]$ .*

**Demonstração:** *Detalhes dessa demonstração podem ser encontrada em [7, Teorema 1B, pag 10].*

**Definição 3.1.2.** *Seja  $B^n$  ou  $B^n[b, c]$  o conjunto de funções com  $(n - 1)$ -ésima derivada absolutamente contínua em  $[b, c]$ , ou seja, as funções  $\theta$  para que exista (quase em todos os lugares) a função  $g \in L_1[b, c]$  tal que*

$$\theta^{(n-1)}(t) = \theta^{(n-1)}(b) + \int_b^t g(s)ds.$$

*Neste caso chamamos  $g$   $n$ -ésima derivada "generalizada" de  $\theta$  e escrevermos  $g = \theta^{(n)}$ .*

Colocado os resultados e definições acima, passaremos a motivação da definição da integral fracionária, que surgiu através do seguinte conceito: Seja  $\theta : I \rightarrow R$  uma função contínua por partes no intervalo  $I := [0, \infty)$  e integrável em todo subintervalo de  $[0, \infty)$ . Denotamos por  $J\theta(t)$  o seguinte operador integral.

$$J\theta(t) = \int_0^t \theta(s)ds, \quad (5)$$

e por

$$J^k\theta(t) = J(J^{k-1}\theta(t)),$$

a composição do operador  $J$  em  $k$  vezes.

Observamos que

$$J^2\theta(t) = JJ\theta(t) = \int_0^t J\theta(s)ds = \int_0^t \int_0^s \theta(v)dvds.$$

Pelo Teorema de Fubini [26], temos:

$$J^2\theta = \int_0^t \int_0^s \theta(v)dvds = \int_0^t \left( \int_v^t \theta(v)ds \right) dv = \int_0^t \theta(v)(t-v)dv.$$

Analogamente,

$$J^3\theta = \int_0^t \int_0^s \theta(\rho)(s-\rho)d\rho ds = \int_0^t \int_\rho^t \theta(\rho)(s-\rho)dsd\rho = \int_0^t \theta(\rho) \frac{(t-\rho)^2}{2} d\rho.$$

Usando esse procedimento sucessivamente obtemos a seguinte expressão para integral com o operador  $J^n\theta$ :

$$J^n\theta = \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} \theta(s)ds. \quad (6)$$

Agora, utilizando a definição da função  $\Gamma(n)$  e suas propriedades, as quais apresentamos no Apêndice A.1, podemos escrever a integral (6) como:

$$J^n\theta = \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{\Gamma(n)} \theta(s)ds = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t (t-s)^{n-1} \theta(s)ds. \quad (7)$$

Note que da equação (7), podemos concluir que é contínua e está bem definida para  $n \in R_+$ . Da observação deste fato podemos creditar a motivação do surgimento da integral fracionária segundo Riemann-Liouville.

**Definição 3.1.3.** (*Integral de ordem fracionária segundo Riemann- Liouville*) Dado  $n \in R_+$  e  $\theta(t) \in L_1[b, c]$ , o operador da integral fracionária segundo Riemann-Liouville, denotado por  $J_c^n$ , é dado por

$$J_c^n\theta(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_c^t (t-s)^{(n-1)} \theta(s)ds \quad (8)$$

onde  $b \leq t \leq c$ .

**Exemplo 3.1.2.** Seja o monômio  $\theta(t) = t^\mu$ , com  $t > 0$  e  $-1 < \mu < 0$ . A integral de  $t^\mu$  é dada por

$$J^n t^\mu = \frac{t^{n+\mu} \Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+n+1)} \quad n \in R_+. \quad (9)$$

**Demonstração:** De fato, fazendo uma mudança de variáveis  $u = \frac{s}{t}$ , obtemos

$$\begin{aligned} J^n t^\mu &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t (t-s)^{n-1} s^\mu ds = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t t^{n-1} \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-1} s^\mu ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t t^{n-1} (1-u)^{n-1} (tu)^\mu t du = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^1 t^n (1-u)^{n-1} t^\mu u^\mu du \\ &= \frac{t^{n+\mu}}{\Gamma(n)} \int_0^1 (1-u)^{n-1} u^\mu du. \end{aligned}$$

Reescrevendo a última integral utilizando as propriedades da função Gamma (Apêndice A.1), obtemos:

$$J^n t^\mu = \frac{t^{n+\mu}}{\Gamma(n)} \beta(\mu+1, n) = \frac{t^{n+\mu}}{\Gamma(n)} \frac{\Gamma(\mu+1)\Gamma(n)}{\Gamma(\mu+1+n)} = \frac{t^{n+\mu}\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+n+1)}.$$

onde  $\beta(.,.)$  significa a função Beta tal que  $\beta(n, m) = \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)}$ . Definindo a função  $\Phi_n = \frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}$ , para  $t > 0$  e fazendo o produto convolução entre as funções  $\theta$  e  $\phi$ , temos:

$$(\phi_n * \theta)(t) = \int_0^t \phi_n(t-s)\theta(s)ds = \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{\Gamma(n)}\theta(s)ds = J^n \theta(t). \quad (10)$$

Portanto, a definição da integral pode ser interpretada como o produto de convolução entre as funções  $\phi_n$  e  $\theta$ .

**Teorema 3.1.3.** Sejam  $n, m \geq 0$ , então temos que  $J^n J^m = J^{(n+m)}$ . Em particular vale propriedade comutativa  $J^n J^m = J^m J^n$ .

**Demonstração:** Seja  $f$  uma função suficientemente suave. Pela equação (10) temos:

$$(J^n \theta)(t) = \phi_n(t) * \theta(t). \quad (11)$$

Vamos verificar que

$$\phi_n(t) * \phi_m(t) = \phi_{n+m}(t)$$

$$\phi_n(t) * \phi_m(t) = \int_0^t \frac{(t-y)^{(n-1)}}{\Gamma(n)} \frac{y^{m-1}}{\Gamma(m)} dy = \int_0^t \frac{t^{n-1} \left(1 - \frac{y}{t}\right)^{(n-1)}}{\Gamma(n)} \frac{y^{m-1}}{\Gamma(m)} dy.$$

Seja  $u = \frac{y}{t}$ , temos:

$$\begin{aligned} \phi_n(t) * \phi_m(t) &= \frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)\Gamma(m)} \int_0^1 (1-u)^{n-1} (ut)^{m-1} t du \\ &= \frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)\Gamma(m)} \int_0^1 (1-u)^{n-1} u^{m-1} t^m du \end{aligned}$$

$$= \frac{t^{n+m-1}}{\Gamma(n)\Gamma(m)} \int_0^1 (1-u)^{n-1} u^{m-1} du.$$

Fazendo a mudança de variável  $\theta = 1 - u$ , obtemos

$$\phi_n(t) * \phi_m(t) = \frac{t^{n+m-1}}{\Gamma(n)\Gamma(m)} \int_0^1 \theta^{(n-1)} (1-\theta)^{m-1} d\theta.$$

Multiplicando e dividindo por  $\Gamma(n+m)$ , obtemos:

$$\phi_n(t) * \phi_m(t) = \frac{t^{(n+m-1)}\Gamma(n+m)}{\Gamma(n+m)\Gamma(n)\Gamma(m)} \int_0^1 \theta^{(n-1)} (1-\theta)^{m-1} d\theta. \quad (12)$$

Considerando a função  $\beta$  definida como  $\beta(n, m) = \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)} = \int_0^1 \theta^{(n-1)} (1-\theta)^{m-1} d\theta$  e relacionando as funções  $\beta$  e  $\Gamma$  (ver apêndice A.1), substituindo na equação (12), temos:

$$\phi_n(t) * \phi_m(t) = \frac{t^{(n+m-1)}}{\Gamma(n+m)B(n, m)} B(n, m) = \frac{t^{(n+m-1)}}{\Gamma(n+m)} = \phi_{n+m}(t) \quad (13)$$

Portanto, juntando as equações (11) e (13), obtemos:

$$(J^n J^m \theta)(t) = \phi_n(t) * J^m \theta(t) = \phi_n(t) * \phi_m(t) * \theta(t) = \phi_{n+m}(t) * \theta(t) = (J^{n+m} \theta)(t).$$

Abaixo apresentamos outro exemplo sobre integral fracionária o qual servirá como base para resolver derivada fracionária.

**Exemplo 3.1.4.** Seja  $\theta(t) = t$ . Então a integral fracionária de ordem  $\frac{1}{2}$  de  $\theta$  é:

$$J^{\frac{1}{2}} t = \frac{t^{(\frac{1}{2}+1)}\Gamma(1+1)}{\Gamma(1+\frac{1}{2}+1)} = \frac{t^{\frac{3}{2}}\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{5}{2})}.$$

Sabendo que  $\Gamma(2) = 1$  e  $\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$ , temos:

$$J^{\frac{1}{2}} t = \frac{4t^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{\pi}}.$$

Uma vez definido o operador integral de ordem fracionária, passaremos a definição de derivada de ordem fracionária segundo Riemann-Liouville.

**Definição 3.1.4.** Seja  $n \in \mathbb{R}_+$ ,  $\theta \in B^1[a, b]$  e  $m = [n]$ . Definimos o operador derivada fracionária segundo Riemann-Liouville de ordem  $n \in \mathbb{R}_+$ , denotado por  $D_b^n$ , como

$$D_b^n \theta = D^m J_b^{m-n} \theta. \quad (14)$$

O próximo resultado garante sob quais condições a derivada de ordem fracionária

segundo Riemann-Liouville está bem definida.

**Lema 3.1.5.** *Seja  $\theta \in B^1[b, c]$  e  $0 < n < 1$ , então  $D_b^n \theta$  existe em quase toda parte em  $[b, c]$ . Além disso  $D_b^n \theta \in L_p[b, c]$  para  $1 \leq p \leq \frac{1}{n}$  e*

$$D_b^n \theta(t) = \frac{1}{\Gamma(1-n)} \left( \frac{\theta(b)}{(t-b)^n} + \int_b^t \theta'(s)(t-s)^{-n} ds \right).$$

**Demonstração:** *Usando a definição da derivada fracionária segundo Riemann-Liouville e  $\theta \in B^1$  temos*

$$\begin{aligned} D_b^n \theta(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-n)} \frac{d}{dt} \int_b^t \theta(s)(t-s)^{-n} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-n)} \frac{d}{dt} \int_b^t \left( \theta(b) + \int_b^s (\theta'(u) du) \right) (t-s)^{-n} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-n)} \frac{d}{dt} \left( \theta(b) \int_b^t \frac{ds}{(t-s)^n} + \int_b^t \int_b^s \theta'(u)(t-s)^{-n} du ds \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-n)} \left( \frac{\theta(b)}{(t-b)^n} + \frac{d}{dt} \int_b^t \int_b^s \theta'(u)(t-s)^{-n} du ds \right). \end{aligned}$$

*Utilizando o teorema de Fubini [7] chegamos no seguinte resultado*

$$D_b^n \theta(t) = \frac{1}{\Gamma(1-n)} \left( \frac{\theta(b)}{(t-b)^n} + \frac{d}{dt} \int_b^t \theta'(u) \frac{(t-u)^{1-n}}{1-n} du \right).$$

A declaração de integrabilidade é uma consequência imediata dessa representação utilizando os resultados clássicos da teoria da integração de Lebesgue [25].

**Teorema 3.1.6.** *Sejam  $n_1, n_2 \geq 0$ ,  $\varphi \in L_1[b, c]$  e  $\theta = J_b^{n_1+n_2} \varphi$ . Então, temos que*

$$D_b^{n_1} D_b^{n_2} \theta = D_b^{n_1+n_2} \theta. \quad (15)$$

**Demonstração:** *O resultado segue os seguintes argumentos: Primeiro,*

$$D_b^{n_1} D_b^{n_2} \theta = D_b^{n_1} D_b^{n_2} J_b^{n_1+n_2} \varphi = D^{[n_1]} J_b^{[n_1]-n_1} D^{[n_2]} J_b^{[n_2]-n_2} J_b^{n_1+n_2} \varphi.$$

*Considerando as propriedades do operador integral, obtidas no Teorema 3.1.3, temos que*

$$D_b^{n_1} D_b^{n_2} \theta = D^{[n_1]} J_b^{[n_1]-n_1} D^{[n_2]} J_b^{[n_2]+n_1} \varphi = D^{[n_1]} J_b^{[n_1]-n_1} D^{[n_2]} J_b^{[n_2]-n_2} J_b^{n_1} \varphi.$$

*Segundo [7] esse resultado é equivalente a:*

$$D_b^{n_1} D_b^{n_2} \theta = D^{[n_1]} J_b^{[n_1]-n_1} J_b^{n_1} \varphi = D^{[n_1]} J_b^{[n_1]} \varphi.$$

Utilizando as propriedades do operador integral, temos

$$D_b^{n_1} D_b^{n_2} \theta = \varphi,$$

o que implica na demonstração de que  $D_b^{n_1+n_2} \theta = \varphi$ .

O próximo resultado mostra que a derivada de ordem fracionária é o operador inverso à esquerda do operador de ordem fracionária.

**Teorema 3.1.7.** *Seja  $n \in \mathbb{R}$  e  $n \geq 0$ . Para cada  $\theta \in L_1[b, c]$ , temos*

$$D_b^n J_b^n \theta = \theta.$$

**Demonstração:** *Usando propriedades de integração e o Teorema 3.1.3, temos:*

$$D_b^n J_b^n \theta(t) = D^m J^{m-n} J_b^n \theta(t) = D^m J_b^m \theta(t) = \theta(t).$$

Apesar da complexidade da definição, o operador de ordem fracionária compartilha de algumas propriedades importantes dos operadores de derivação de ordem inteira.

**Teorema 3.1.8.** *O operador de diferenciação fracionária é linear. Em outras palavras, sejam  $\theta_1$  e  $\theta_2$  funções em  $B^1[a, b]$  e  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  então*

$$D_b^n (c_1 \theta_1 + c_2 \theta_2) = (c_1 D_b^n \theta_1 + c_2 D_b^n \theta_2).$$

**Demonstração:** *Segue como consequência da definição de  $D_b^n$ .*

Apresentaremos agora alguns exemplos simples de derivada fracionária segundo Riemann-Liouville, as quais servirão de motivador para a escolha do tipo de derivada de ordem fracionária que utilizaremos em nosso problema. Em particular o próximo exemplo mostra que a derivada fracionária segundo Riemann-Liouville de uma constante não é nula, conforme o esperado.

**Exemplo 3.1.9.** *Seja  $\theta(t) = 2$  (função constante), então a derivada fracionária segundo Riemann-Liouville de ordem  $\frac{1}{2}$  é:*

$$D_t^{\frac{1}{2}}(2) = D^1[J^{\frac{1}{2}}(2)] = D \left[ \frac{\Gamma(0+1)}{\Gamma(0+\frac{1}{2}+1)} t^{\frac{1}{2}+0} \right].$$

Como,  $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  e  $\Gamma(1) = 1$ , temos:

$$D_t^{\frac{1}{2}}(2) = D \left[ \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{3}{2})} t^{\frac{1}{2}+0} \right] = D \left[ \frac{(1)t^{\frac{1}{2}}}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \right] = D \left[ \frac{2t^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \neq 0.$$

**Observação 3.1.1.** *Pode-se observar que a derivada de ordem fracionária segundo Riemann-Liouville de uma constante não é nula, isso implica que essa derivada não pode ser considerada como uma taxa de variação, no sentido usual. Além disso, na modelagem de problemas de valor inicial, as condições iniciais não necessariamente possuem uma interpretação do ponto de vista biológico. Sendo esses alguns dos fatos que motivam a não utilização desse método na modelagem do problema proposto.*

**Exemplo 3.1.10.** *Seja  $\theta(t) = t^2$ , então a derivada fracionária segundo Riemann-Liouville de ordem  $\frac{1}{2}$  é:*

$$D_t^{\frac{1}{2}}t^2 = D^1[J^{\frac{1}{2}}(t^2)] = D \left[ \frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(2+\frac{1}{2}+1)}t^{\frac{1}{2}+0} \right] = D \left[ \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{7}{2})}t^{\frac{1}{2}} \right].$$

Como,  $\Gamma(3) = 2$  e  $\Gamma(\frac{7}{2}) = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}$ , temos:

$$D_t^{\frac{1}{2}}t^2 = D \left[ \frac{(2)t^{\frac{1}{2}}}{\frac{15\sqrt{\pi}}{8}} \right] = D \left[ \frac{16t^{\frac{1}{2}}}{15\sqrt{\pi}} \right] = \frac{8}{15\sqrt{\pi t}}.$$

### 3.2 Derivadas Fracionárias Segundo Caputo

Na seção anterior, apresentamos a definição da derivada de ordem fracionária segundo Riemann-Liouville. A grosso modo, podemos considerar que a derivada de ordem fracionária nada mais é que, a derivada de ordem inteira de uma integral de ordem fracionária. Nesta seção apresentaremos a definição da derivada de ordem fracionária segundo Caputo. Esta é similar a de Riemann-Liouville, porém invertendo a ordem de integração fracionária com ordem da derivação, como será mostrado a seguir:

**Definição 3.2.1.** *(Derivada de ordem fracionária segundo Caputo)*

Seja  $n \in \mathbb{R}_+$ ,  $\theta \in B^1[b, c]$  e  $m = \lceil n \rceil$ . O operador  $\hat{D}_b^n$ , é definido por

$$\hat{D}_{*b}^n \theta = J_b^{m-n} D^m \theta, \quad (16)$$

para qualquer  $D^m \theta \in L_1[b, c]$  em que  $D^m$  denota o operador da derivada fracionária segundo Caputo de ordem  $n \in \mathbb{R}_+$ .

Os próximos resultados garante sob quais condições a derivada de ordem fracionária segundo Caputo está bem definida.

**Teorema 3.2.1.** *Sejam  $n \geq 0$ ,  $m = \lceil n \rceil$  e  $\theta \in B^m[b, c]$ . Então*

$$\hat{D}_{*b}^n \theta = D_b^n (\theta - T_{m-1}[\theta; b]),$$

onde  $T_{m-1}[\theta; b]$  é o polinômio de Taylor de grau  $(m-1)$  para  $\theta$ .

**Observação 3.2.1.** Observe que a expressão no lado direito da equação existe se,  $D_b^n \theta$  existe e  $\theta$  possui  $m - 1$  derivadas em  $b$ , esta última condição assegura que o polinômio de Taylor existe. Podemos verificar que esta condição é mais fraca do que a condição anterior que diz que  $\theta \in B^m$ . Isso ocorre pois,  $\theta \in B^m$  implica:

- $\theta \in C^{m-1}$  e, portanto, a existência do requerido polinômio de Taylor e seu derivado de Riemann-Liouville;
- a existência de  $D_b^n \theta$  em quase todos os lugares, como pode ser visto por uma aplicação usada na prova do Lema 3.1.5.

Portanto a partir de agora usaremos a ultima expressão. Uma formalização é dada como se segue.

**Teorema 3.2.2.** Sejam  $n \geq 0$  e  $m = \lceil n \rceil$  e  $\theta \in B^m[b, c]$ . Então,

$$D_{*b}^n \theta = D_b^n (\theta - T_{m-1}[\theta; b]). \quad (17)$$

O operador  $D_{*b}^n$  é chamado de operador diferencial de Caputo de ordem  $n$ .

**Demonstração:** Observe que, para o caso de  $n \in \mathbb{N}$  a afirmação é trivial. Logo temos que analisar o caso  $n \notin \mathbb{N}$ . Neste caso, consideramos  $m$  como o primeiro inteiro tal que  $m > n$ . Assim, temos

$$\begin{aligned} D_b^n (\theta - T_{m-1}[\theta; b]) &= D_b^m J_b^{m-n} (\theta - T_{m-1}[\theta; b])(t) \\ &= \frac{d^m}{ds^m} \int_b^s \frac{(s-t)^{m-n-1}}{\Gamma(m-n)} (\theta(t) - T_{m-1}[\theta; b](t)) dt. \end{aligned}$$

Primeiramente, faremos a integração, a qual resulta em

$$\begin{aligned} &\int_b^s \frac{1}{\Gamma(m-n)} (\theta(t) - T_{m-1}[\theta; b](t)) (s-t)^{m-n-1} dt = \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(m-n+1)} [(\theta(t) - T_{m-1}[\theta; b](t)) (s-t)^{m-n}]_{t=b}^{t=s} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(m-n+1)} \int_b^s (D(\theta(t)) - D(T_{m-1}[\theta; b](t))) (s-t)^{m-n} dt. \end{aligned} \quad (18)$$

O termo fora da integral na Equação 18 é zero (o primeiro fator desaparece no limite inferior, o segundo desaparece no limite superior). Assim

$$J_b^{m-n} (\theta - T_{m-1}[\theta; b]) = J_b^{m-n+1} D(\theta - T_{m-1}[\theta; b])$$

Repetindo este processo um número total de  $m$  vezes resulta em

$$J_b^{m-n} (\theta - T_{m-1}[\theta; b]) = J_b^{2m-n} D^m (\theta - T_{m-1}[\theta; b]) = J_b^m J_b^{m-n} D^m (\theta - T_{m-1}[\theta; b]).$$

Observe que  $D^m T_{m-1}[\theta; b] \equiv 0$  porque  $T_{m-1}[\theta; b]$  é um polinômio de grau  $m - 1$ . Logo

$$J_b^{m-n} (\theta - T_{m-1}[\theta; b]) = J_b^m J_b^{m-n} D^m \theta.$$

Segue do Teorema 3.2.1 que

$$D_b^n (\theta - T_{m-1}[\theta; b]) = D^m J_b^m J_b^{m-n} D^m \theta = J_b^{m-n} D \theta = \hat{D}_b^n \theta.$$

O próximo resultado estabelece uma relação entre as derivadas de ordem fracionária de Riemann-Liouville e Caputo.

**Lema 3.2.3.** *Sejam  $n \geq 0$  e  $m = \lceil n \rceil$ . Supondo que  $\theta$  seja uma função de tal modo que ambos  $D_{*b}^n \theta$  e  $D_b^n \theta$  existam. Então,*

$$D_{*b}^n \theta(t) = D_b^n \theta - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{D^k \theta(b)}{\Gamma(k - n + 1)}.$$

**Demonstração:**

$$\begin{aligned} D_{*b}^n \theta(t) &= D_b^n \theta - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{D^k \theta(b)}{k!} D_b^n ((\cdot - b)^k)(t) \\ &= D_b^n \theta(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{D^k \theta(b)}{\Gamma(k - n + 1)(t - b)^{k-n}}. \end{aligned}$$

Para uma melhor compreensão da demonstração acima, podemos verificar que a igualdade segue do Teorema 3.2.2, e a identidade é encontrada através da derivada de uma função do tipo  $x^k$ .

O próximo resultado estabelece a relação entre a derivada de ordem fracionária de Riemann-Liouville e de Caputo.

**Lema 3.2.4.** *Assumindo as mesmas hipóteses do lema anterior, temos:*

$$D_b^n \theta = D_{*b}^n \theta$$

se e somente se  $\theta$  possui  $m$  derivadas nulas em um dado ponto  $b$  e  $D^k \theta(b) = \theta(0)$  se  $k = 0, 1, \dots, m - 1$ .

**Demonstração:** Segue de uma adaptação simples das contas feitas no Lema 3.2.3.

O próximo resultado mostra que o operador de ordem fracionária de Caputo é a inversa a esquerda de um operador de integração de ordem fracionária.

**Teorema 3.2.5.** *Se  $\theta$  for contínua e  $n \geq 0$ , então*

$$D_{*b}^n J_b^n \theta = \theta.$$

**Demonstração:** *Assumindo que  $\varphi = J_b^n \theta$  e utilizando o Teorema 3.1.3, temos  $D^k \varphi(b) = 0$  para  $k = 0, 1, \dots, m - 1$ . Considerando agora o lema anterior e o Teorema 3.1.6, temos que,*

$$D_{*b}^n J_b^n \theta = D_{*b}^n \varphi = D_b^n \varphi = D_b^n J_b^n \theta = \theta.$$

**Lema 3.2.6.** *Seja  $\theta \in C^k[b, c]$ ,  $b < c$  e  $k \in \mathbb{N}$ . Sejam  $n, \varepsilon > 0$  tal que existe  $l \in \mathbb{N}$  com  $l \leq k$  e  $n, n + \varepsilon \in [l - 1, l]$ , então*

$$D_{*b}^\varepsilon D_{*b}^n \theta = D_{*b}^{n+\varepsilon} \theta.$$

**Demonstração:** *Para detalhes da demonstração veja [6, Lema 3.13, pág 57].*

A seguir provaremos que, como a derivada de ordem fracionária de Riemann-Liouville, a derivada de ordem fracionária segundo Caputo é um operador linear.

**Teorema 3.2.7.** *Sejam as funções  $\theta_1, \theta_2 : [b, c] \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $D_{*b}^n \theta_1$  e  $D_{*b}^n \theta_2$  existem em quase toda parte e  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , então*

$$D_{*b}^n (c_1 \theta_1 + c_2 \theta_2) = c_1 D_{*b}^n \theta_1 + c_2 D_{*b}^n \theta_2.$$

**Demonstração:** *Tal propriedade e a linearidade do operador diferencial fracionário são consequências imediata da definição de  $D_{*b}^n$ .*

Apresentaremos a seguir alguns exemplos de derivadas de ordem fracionária segundo Caputo.

**Exemplo 3.2.8.** *Seja  $\theta(t) = 1$  (função constante), então a derivada fracionária segundo Caputo de ordem  $\frac{1}{2}$  é:*

$$D_{*b}^{\frac{1}{2}}(1) = J^{\frac{1}{2}}(D^1(1)) = J^{\frac{1}{2}}(0) = 0.$$

**Observação 3.2.2.** *A derivada de ordem fracionária, segundo Caputo, de uma constante é nula. Logo, esse método faz mais sentido para modelar a dinâmica de valores iniciais. Por isso o método de Caputo foi o escolhido para ser utilizado na modelagem do problema.*

**Exemplo 3.2.9.** Seja  $\theta(t) = t^2$ , então a derivada fracionária segundo Caputo de ordem  $\frac{3}{2}$  é:

$$D_{*t}^{\frac{3}{2}}t^2 = [J^{\frac{1}{2}}(D^2(t^2))] = J^{\frac{1}{2}}(2) = \frac{2t^{0+\frac{1}{2}}\Gamma(0+1)}{\Gamma(0+\frac{1}{2}+1)} = \frac{2t^{\frac{1}{2}}\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{3}{2})}.$$

Como,  $\Gamma(1) = 1$  e  $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ , temos:

$$D_{*t}^{\frac{3}{2}}t^2 = \frac{2t^{\frac{1}{2}}}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = \frac{4\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}.$$

### 3.3 Análise do método de Riemann-Liouville e Caputo

O objetivo desta seção é verificar qual derivada de ordem fracionária melhor se aplica no nosso sistema, através da análise do problema de valor inicial com derivadas arbitrárias segundo Riemann-Liouville e Caputo. Nesta seção, não apresentaremos as demonstrações dos resultados, porém serão usados as consequências destes como argumento básico da escolha da derivada de ordem fracionária segundo Caputo para a modelagem do problema de interesse. Tal análise é baseada nos seguintes resultados:

**Teorema 3.3.1.** Sejam  $n > 0, n \notin N, m = [n], k > 0, h^* > 0$  e  $c_1, \dots, c_m \in R$ . Seja  $G := \left\{ (t, \theta) \in R^{s+1} : 0 \leq t \leq h^*, \theta \in R^s \text{ se } t = 0 \text{ e } \left| t^{m-n}\theta - \sum_{k=1}^m \frac{c_k t^{m-k}}{\Gamma(n-k+1)} \right| < k \text{ caso contrário} \right\}$ . Supondo que a função  $f : G \rightarrow R$  é contínua, limitada e Lipschitziana em relação a segunda variável, ou seja, existe uma constante  $L > 0$  tal que, para todo  $(t, \theta_1), (t, \theta_2) \in G$ , temos

$$|f(t, \theta_1(t)) - f(t, \theta_2(t))| < L |\theta_1(t) - \theta_2(t)|. \quad (19)$$

Então a equação diferencial

$$D_0^n \theta(t) = f(t, \theta(t)), \quad (20)$$

com condições iniciais

$$D_0^{n-k} \theta(0) = b_k \quad (k = 1, 2, \dots, m-1), \quad \lim_{z \rightarrow 0^+} J_0^{m-n} \theta(z) = b_m, \quad (21)$$

possui uma única solução  $\theta$  que é uma função contínua definida em  $(0, h]$  com

$$h := \min \left\{ h^*, \tilde{h}, \left( \frac{\Gamma(n+1)k}{M} \right)^{\frac{1}{m}} \right\},$$

onde  $M := \sup_{(t,z) \in G} |f(t,z)|$  e  $\tilde{h}$  é um número positivo arbitrário que satisfa a seguinte

restrição

$$\tilde{h} < \left( \frac{\Gamma(2n - m + 1)}{\Gamma(n - m + 1)L} \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (22)$$

A prova desse teorema é similar a demonstração de existência e unicidade para EDO's de ordem inteira. Para detalhes veja ([7], Capítulo 5). Assim como no caso clássico, a demonstração do teorema 3.3.1 passa por transformar problemas na forma integral como enunciado no próximo lema.

**Lema 3.3.2.** *Suponha  $h > 0$  e as hipóteses enunciadas no Teorema 3.3.1. Então  $\theta \in C(0, h]$  é uma solução das equações diferenciais (20) e (21) se e somente se é uma solução da equação integral de Volterra*

$$\theta(t) = \sum_{k=1}^m \frac{c_k t^{n-k}}{\Gamma(n-k+1)} + \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t (t-s)^{n-1} f(s, \theta(s)) ds. \quad (23)$$

Agora será argumentado através de uma observação, por que o uso de derivadas de ordem fracionária segundo Rimann-Liouville não é o mais adequado para a modelagem do sistema.

**Observação 3.3.1.** *De fato, ao observar a equação da integral percebemos porque a solução  $\theta$  é contínua no intervalo semi-aberto  $(0, h]$  e não no intervalo fechado  $[0, h]$ . Se  $\theta$  fosse contínuo ao longo de  $[0, h]$ , então, como  $f$  é contínuo, o lado direito da equação (23) também deveria ser contínuo em  $[0, h]$ . Tendo em consideração a definição de  $m$ , podemos facilmente ver que as parcelas de  $\sum_{k=1}^m \frac{c_k t^{n-k}}{\Gamma(n-k+1)}$  são de fato contínuas em  $[0, h]$  para  $k = 1, 2, \dots, m-1$ . No entanto, o termo ( $k = m$ ) é limitado quando  $\theta \rightarrow 0$ , haja visto que  $m > n$ , com  $n \notin \mathbb{N}$  a menos que  $c_m = 0$ .*

Através de teoremas e lemas fundamentais, será apresentado a partir de agora a existência de solução para o problema de valor inicial com derivadas de ordem fracionária segundo Caputo.

**Definição 3.3.1.** *O problema de valor inicial com derivadas de ordem fracionária segundo Caputo é escrito da seguinte maneira:*

$$D_{*0}^n \theta(t) = f(t, \theta(t)), \quad (24)$$

com as condições iniciais

$$D^k \theta(0) = \theta_0^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1 \quad (25)$$

onde o operador diferencial de ordem fracionária segundo Caputo é  $D_{*0}^n$  como definido na Seção 3.2.1.

**Teorema 3.3.3.** *Sejam  $0 < n$  e  $m = \lceil n \rceil$ ,  $(\theta_0^0, \dots, \theta_0^{m-1}) \in \mathbb{R}^n$ ,  $k > 0$  e  $h^* > 0$ . Seja  $G := \left\{ (t, \theta) : t \in [0, h^*], \left| \theta - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k \theta_0^k}{k!} \right| \leq k \right\}$ . Consideramos a função  $f := G \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua,  $M := \sup_{(t,z) \in G} |f(t, z)|$  e*

$$h := \begin{cases} h^*, & \text{se } M = 0, \\ \min \left\{ h^*, \frac{(k\Gamma(n+1))^{\frac{1}{n}}}{M} \right\}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (26)$$

Então, existe uma função  $\theta \in C[0, h]$  solução para o problema de valor inicial definido nas equações (24) e (25).

**Lema 3.3.4.** *Nas mesmas hipóteses do Teorema 3.3.3 temos que  $\theta \in C[0, h]$  é uma solução do problema de valor inicial equação (24) e (25) se e somente se é uma solução da equação integral de Volterra não-linear do segundo tipo*

$$\theta(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} \theta_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t (t-s)^{n-1} f(s, \theta(s)) ds \quad (27)$$

onde  $m = \lceil n \rceil$ .

**Observação 3.3.2.** *Usando a observação 3.3.1 e os Lemas 3.3.2 e 3.3.4, podemos comparar o comportamento das soluções de equação diferenciais fracionárias segundo Caputo com as de Riemann-Liouville. Ao fazer isso descobrimos que o problema de continuidade na origem encontrado para Riemann-Liouville não ocorre para Caputo. Pelo contrário, verificamos que a continuidade da função  $f$  implica na continuidade da solução  $\theta$  durante todo intervalo fechado  $[0, h]$ .*

**Observação 3.3.3.** *Olhando para a equação (27) para algum  $n \in (0, 1]$  e para dois valores diferentes de  $t$ , digamos  $t_1$  e  $t_2$  com  $t_1 < t_2$ , se subtrairmos a segunda destas equações pela primeira, obtemos que:*

$$\begin{aligned} \theta(t_2) - \theta(t_1) &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{n-1} f(s, \theta(s)) ds \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{n-1} f(s, \theta(s)) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{t_1} [(t_2 - s)^{n-1} - (t_1 - s)^{n-1}] f(s, \theta(s)) ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(n)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{n-1} f(s, \theta(s)) ds. \end{aligned} \quad (28)$$

Considerando o caso (não-fracionário) onde  $n = 1$ . Se for analisado o lado direito da equação (28) será obtido zero e, portanto, toda a integral desaparece. Então esta equação implica que  $\theta(t_1)$  é a solução do problema de valor inicial dado nas equações (24) e (25)

no ponto  $\theta(t_1)$  e, em seguida, pode-se calcular a solução em  $t_2$  com  $t_2 > t_1$  exclusivamente com base em  $\theta(t_1)$  e a função  $f$ . Não será preciso usar qualquer informação em  $\theta(t)$  para  $t \in [0, t_1)$ . Esta observação é apenas outra maneira de expressar a localidade de ordem inteira do operador diferencial. Esta é a base de quase todos os métodos numéricos clássicos da solução de equação diferenciais de primeira ordem. Também é fundamental para a modelagem matemática de muitos sistemas da física, engenharia e outras ciências porque ele afirma que isso é suficiente para analisar o estado da primeira ordem de um sistema em um ponto arbitrário na hora de calcular o seu comportamento no futuro.

Quando for analisado o caso fracionário  $0 < n < 1$  a situação é fundamentalmente diferente. Nesse caso a primeira integral do lado direito da equação (28) não desaparece. Logo, sempre que se quer calcular a solução  $\theta(t_2)$ , em algum momento  $t_2$ , é necessário considerar o que acontece no ponto inicial 0 e levar em conta toda a informação até o ponto de interesse  $t_2$ . Isso reflete a não-localidade dos operadores diferenciais segundo Caputo. Obviamente, essa observação tem uma influência substancial sobre a construção de métodos numéricos para tais equações. Além disso, para a modelagem de um sistema de ordem fracionária, com fenômenos reais, interpretar o termo que não se anula como um termo que descreve sistemas com memória. Sem mais, é sabido que as derivadas segundo Riemann-Liouville são não locais também.

**Observação 3.3.4.** Como foi afirmado na observação anterior, a equação (28) tem grande impacto sobre a base teórica dos métodos numéricos para equações diferenciais fracionárias. O método padrão geralmente funciona corretamente mas, muitas vezes, não faz uso de todo o poder desta equação, pois o mesmo termo entre parênteses no lado direito da equação (28) não é nulo, ele vai ser muito pequeno em magnitude para determinadas situações (por exemplo se  $t_1$  e  $t_2$  são suficientemente grandes em comparação com  $(t_2 - t_1)$ ).

Quando for analisado o problema de valor inicial com derivadas de ordem fracionária percebe-se que o método de Caputo é mais adequado para aplicação em sistemas biológicos que o método de Riemann-Liouville, visto que para o primeiro a derivada de um constante é nula. Além disso, as condições iniciais em sistemas de EDO's fracionárias dependem de condições que são fisicamente interpretáveis. Mesmo que derivadas de ordem fracionária segundo Riemann-Liouville seja bem posto (existência e unicidade de solução), depende de condições iniciais que não necessariamente possuem uma interpretação do ponto de vista biológico [7]. Portanto, para a modelagem usaremos derivadas de ordem fracionária segundo Caputo com o objetivo de obter um modelo fidedigno ao bem estar do corpo humano.

### 3.4 Sistemas de Equação Diferenciais Fracionárias - Resultados de Boa Colocação

Apresentaremos nesta seção resultados de Existência, Unicidade e Dependência contínua dos dados iniciais (boa colocação segundo Hadamard) para sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias, EDO's de ordem fracionárias, bem como os efeitos de memória característicos da modelagem com derivadas de ordem fracionária.

Para termos uma melhor análise dos resultados, será mostrado resultados de Existência, Unicidade e Dependência contínua para EDO's com derivadas de ordem inteira, os quais serão apresentado a seguir. Para maiores informações consultar [7]. A principal ideia é fazer um paralelo com o problema envolvendo derivadas de ordem  $n$  não inteiras que será apresentadas posteriormente. Em particular, para  $n = 1$  temos:

**Definição 3.4.1.** (*Problema de Valor Inicial ou Problema de Cauchy*) Seja  $U$  contido em  $I \times E$  onde  $I$  é um intervalo não degenerado da reta e  $E$  é um espaço vetorial normado completo. Seja a função  $f : U \rightarrow E$  uma aplicação pelo menos contínua. Fixado um par  $(t_0, \theta_0) \in U$  chamamos de problema de valor inicial (PVI) para a equação diferencial ordinária dada por  $f$  ou problema de Cauchy associado a  $f$  com valor inicial  $(t_0, \theta_0)$  ao problema definido formalmente por:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\theta(t) = f(t, \theta(t)), \\ \theta(t_0) = \theta_0. \end{cases} \quad (29)$$

Definiremos a seguir o que se entende por uma solução do problema de Cauchy da equação(29).

**Definição 3.4.2.** Uma função  $\phi : I \rightarrow E$  (onde  $I$  é intervalo não degenerado da reta contendo  $t_0$ ) é uma solução do problema de Cauchy dado por  $f$  com valor inicial  $(t_0, \theta_0)$  se  $\phi$  satisfaz a equação (29) e  $\phi(t_0) = \theta_0$ .

A seguir será apresentado uma condição suficiente para garantir resultados de existência e unicidade do problema de Cauchy apresentado na definição 3.4.1.

**Definição 3.4.3.** (*Condição de Lipschitz*) Seja  $f : U \rightarrow E$  uma função definida em um conjunto aberto  $U \subset I \times E$ , onde  $I$  e  $E$  são como na definição 3.4.1.

Dizemos que  $f$  satisfaz a condição de Lipschitz com relação a segunda variável, se existir um constante  $L > 0$  tal que  $|f(t, y) - f(t, z)| \leq L|y - z|$  para quaisquer  $(t, y), (t, z) \in U$ .

Se  $f$  for Lipschitziana em relação a segunda variável, então o sistema de EDO's possui solução única, o que mencionamos no próprio teorema.

**Teorema 3.4.1.** Seja  $f : U \rightarrow R^n$  uma aplicação contínua no aberto  $U \subseteq R^{n+1}$ . Se  $[b, c] \times R^n \subseteq U$  e  $f$  é Lipschitziana em  $[b, c] \times R^n$ . Então, para quaisquer  $t_0 \in [b, c]$

e  $\theta_0 \in R^n$ , existe uma única solução do problema de valor inicial definida no intervalo  $[b, c]$ .

**Demonstração:** Se conhece essa demonstração da teoria de EDO's e a maneira clássica de provar este resultado é escrever o problema como uma equação de Volterra e provar que o operador associado possui um único ponto fixo [8, Teorema 10.2, pág. 382].

**Lema 3.4.2.** (Dependência contínua dos dados iniciais) Seja  $f_j : U \rightarrow R^n$  uma sequência de aplicações contínuas definidas em  $U \subset R \times R^n$ , com  $f_j \rightarrow f_0$  uniformemente em subconjuntos compactos de  $U$ . Dada uma sequência  $(t_j, \theta_j)$ , com  $(t_j, \theta_j) \rightarrow (t_0, \theta_0)$ , se o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = f_k(t, \theta) \\ \theta(t_k) = \theta_k \quad k \geq 0, \end{cases} \quad (30)$$

possui solução maximal única  $\phi_k$  em  $J_k$ , então  $\forall [b, c] \subset J_0$ , existe  $k_0(b, c) \geq 1$  tal que  $j \geq k_0 \rightarrow J_j \supset [b, c]$  e  $\phi_j[b, c] \rightarrow \phi_0[b, c]$  uniformemente.

**Demonstração:** A demonstração pode ser encontrada com detalhes [4, Lema 3.11 pág. 58].

### 3.4.1 Resultados de existência, unicidade e dependência contínua dos dados iniciais para EDO's com derivadas de ordem fracionária

Agora apresentaremos as condições necessárias e suficientes para obter resultados de boa colocação para sistemas de equações com derivadas de ordem fracionárias segundo Caputo. Os resultados obtidos aqui servirão como base teórica para o modelo de Strogatz modificado que apresentaremos na Seção 5. Antes disso introduziremos o tipo de sistema de equações a derivadas de ordem fracionária que estamos interessados neste trabalho.

**Definição 3.4.4.** (Problema de valor inicial segundo Caputo) Consideraremos como um problema de valor inicial de ordem fracionária segundo Caputo um sistema de equações com condições iniciais dado da seguinte forma:

$$\begin{cases} D_{*0}^n \theta(t) = f(t, \theta(t)) \\ D^k \theta(0) = \theta_0^k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \end{cases} \quad (31)$$

onde  $m = \lceil n \rceil$  e  $D_{*0}^n$  é operador diferencial de ordem fracionária segundo Caputo conforme definido na Seção 3.2.1 e  $D^k \theta(0)$  são as condições iniciais, que aqui supomos centradas em zero. Já  $f : D(f) \subset R^{N+1} \rightarrow R^N$  é uma função suficientemente regular.

O resultado desta seção vai em direção a provar existência de solução do PVI 31. Antes disso vamos formalizar o que entendemos por solução do PVI 31.

**Definição 3.4.5.** *Qualquer função  $\theta$  para a qual está bem definida a derivada de ordem fracionária  $D_{*0}^n$ , isto é, que satisfaz as hipóteses do Teorema 3.3.3 e também satisfaz o PVI 31 é dita uma solução.*

O próximo Lema garante que se existe uma solução para o PVI 31, então esta mesma solução deve satisfazer uma equação integral, a qual é base para alguns dos métodos numéricos para resolver PVI's fracionários.

**Lema 3.4.3.** *Dados as mesmas hipóteses do Teorema 3.3.3. Então,  $\theta \in C[0, h]$  é uma solução do problema de valor inicial (31) se e somente se essa solução é solução da equação integral de Volterra não-linear do segundo tipo*

$$\theta(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} \theta_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t (t-s)^{n-1} f(s, \theta(s)) ds, \quad (32)$$

onde  $m = \lceil n \rceil$ .

**Demonstração:** *Primeiramente definimos  $z(t) := f(t, \theta(t))$ . Notamos que dadas as hipóteses sobre  $\theta$  e  $f$  temos que  $z \in C[0, h]$ . Em seguida, usamos a definição do operador diferencial do Caputo reescrevemos a equação:*

$$\begin{aligned} z(t) &= f(t, \theta(t)) = D_{*0}^n \theta(t) = D_0^n (\theta - T_{m-1}[\theta; 0])(t) \\ &= D^m J_0^{m-n} (\theta - T_{m-1}[\theta; 0])(t). \end{aligned}$$

Uma vez que estamos lidando com funções contínuas, podemos aplicar o operador  $J_0^m$  em ambos os lados e encontrar

$$J_0^m z(t) = J_0^{m-n} (\theta - T_{m-1}[\theta; 0])(t) + q(t)$$

com  $q$  um polinômio de grau não superior a  $(m-1)$ . Como  $z$  é contínua, a função  $J_0^m z$  no lado esquerdo da equação acima tem um zero de ordem  $m$  na origem. Além disso, a diferença  $\theta - T_{m-1}[\theta; 0]$  tem a mesma propriedade por construção e, portanto, a função  $J_0^{m-n} (\theta - T_{m-1}[\theta; 0])$  no lado direito da nossa equação tem um zero de ordem  $m$  na origem também. Assim, resta que o polinômio  $q$  tem a mesma propriedade e pode-se então deduzir imediatamente (desde que seu grau não seja superior a  $(m-1)$ ) que:

$$J_0^m z(t) = J_0^{m-n} (\theta - T_{m-1}[\theta; 0])(t)$$

Agora aplicando o operador de Riemann-Liouville  $D_0^{m-n}$  para esta equação observe-se que

$$\begin{aligned} \theta(t) - T_{m-1}[\theta; 0](t) &= D_0^{m-n} J_0^m z(t) = D^1 J_0^{1+n-m} J_0^m z(t) \\ &= D J_0^{1+n} z(t) = J_0^n z(t). \end{aligned}$$

Recordando as definições em que  $T_{m-1}$  é o polinômio de Taylor em  $[\theta; 0]$ , obtemos que é uma condição necessária para  $\theta$  ser solução do problema (31) satisfazer a equação integral de Volterra.

Abaixo será apresentado uma adaptação do clássico Teorema de Peano [4] para sistemas de EDO's de ordem inteira. Seguiremos os passos apresentados em [7, Teorema 6.1 pág.86].

**Teorema 3.4.4. (Existência)** *Sejam,  $0 < n$ ,  $m = \lceil n \rceil$ . Além disso temos  $\theta_0^0, \dots, \theta_0^{(m-1)} \in R$ ,  $k > 0$ ,  $h^* > 0$  e  $G := \left\{ (t, \theta) : t \in [0, h^*], \left| \theta - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k \theta_0^k}{k!} \right| \leq k \right\}$ , e seja a função  $f : G \rightarrow R$  contínua,  $M := \sup_{(t,z) \in G} |f(x, z)|$  e*

$$h := \begin{cases} h^*, & \text{se } M = 0, \\ \min \left[ h^*, \left( \frac{k\Gamma(n+1)}{M} \right)^{\frac{1}{n}} \right] & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (33)$$

Então, existe uma função  $\theta \in C[0, h]$  que resolve o problema de valor inicial definido no PVI 31.

**Demonstração:** No caso em que  $M = 0$ , temos que  $f(t, \theta) = 0$  para todos  $(t, \theta) \in G$ . Portanto, a função  $\theta : [0, h] \rightarrow R$  definida por  $\theta(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\theta_0^{(k)} t^{(k)}}{k!}$  é solução do PVI 31. Assim, apresentamos o polinômio  $T$  que satisfaz as condições iniciais, tal que

$$T(t) := \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} \theta_0^{(k)}, \quad (34)$$

e o conjunto  $U := \{\theta \in C[0, h] : \|\theta - T\|_\infty \leq K\}$ . É evidente que  $U$  é um subconjunto fechado e convexo do espaço de Banach de todas as funções contínuas em  $[0, h]$ , com a norma de Chebyshev. Portanto,  $U$  também é um espaço de Banach ([7]). Como o polinômio  $T$  é um elemento de  $U$ , vemos também que  $U$  é não vazio. Sobre este conjunto  $U$ , definimos o operador  $B$  por

$$B\theta(t) := T(t) + \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t (t-s)^{n-1} f(s, \theta(s)) ds \quad (35)$$

Usando esse operador, a equação cuja solvabilidade precisamos provar que pode ser reescrita como  $\theta = B\theta$ . E assim, a fim de provar o nosso resultado desejado de existência, temos de mostrar que o operador  $B$  possui um ponto fixo. Portanto, o próximo passo é investigar as propriedades do operador  $B$  mais de perto.

**Indicação 1:**  $B\theta \in U$  para qualquer  $\theta \in U$ . De fato, seja  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq h$ , então:

$$|B\theta(t_1) - B\theta(t_2)| = \frac{1}{\Gamma(n)} \left| \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{n-1} f(s, \theta(s)) ds - \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{n-1} f(s, \theta(s)) ds \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(n)} \left| \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{n-1} - (t_2 - s)^{n-1} f(s, \theta(s)) ds \right. \\
&+ \left. \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{n-1} f(s, \theta(s)) ds \right| \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(n)} \left( \int_0^{t_1} |(t_1 - s)^{n-1} - (t_2 - s)^{n-1}| ds + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{n-1} ds \right).
\end{aligned}$$

Note que a segunda integral no lado direito da equação acima tem o valor  $\frac{(t_2 - t_1)^n}{n}$ . Para a primeira integral, olhamos para os três casos  $n = 1$ ,  $n < 1$  e  $n > 1$ , separadamente. Para  $n = 1$ , o integrando é identicamente nulo, e, portanto, a integral tem o valor zero. Para  $n < 1$ , temos  $n - 1 < 0$  e, portanto,  $(t_1 - s)^{n-1} \geq (t_2 - s)^{n-1}$ . Assim,

$$\begin{aligned}
\int_0^{t_1} |(t_1 - s)^{n-1} - (t_2 - s)^{n-1}| ds &= \int_0^{t_1} ((t_1 - s)^{n-1} - (t_2 - s)^{n-1}) ds \\
&= \frac{1}{n} (t_1^n - t_2^n + (t_2 - t_1)^n) \\
&\leq \frac{1}{n} (t_2 - t_1)^n.
\end{aligned}$$

Finalmente, se  $n > 1$  então  $(t_1 - s)^{n-1} \leq (t_2 - s)^{n-1}$  e, portanto,

$$\begin{aligned}
\int_0^{t_1} |(t_1 - s)^{n-1} - (t_2 - s)^{n-1}| ds &= \int_0^{t_1} ((t_2 - s)^{n-1} - (t_1 - s)^{n-1}) ds \\
&= \frac{1}{n} (-t_1^n + t_2^n - (t_2 - t_1)^n) \\
&\leq \frac{1}{n} (t_2^n - t_1^n).
\end{aligned}$$

Da combinação destes resultados, obtemos:

$$|B\theta(t_1) - B\theta(t_2)| \leq \begin{cases} \frac{2M}{\Gamma(n+1)} (t_2 - t_1)^n & \text{se } n \leq 1, \\ \frac{2M}{\Gamma(n+1)} ((t_2 - t_1)^n + t_2^n - t_1^n), & \text{se } n > 1. \end{cases} \quad (36)$$

Em ambos os casos, a expressão do lado direito da equação (36) converge para 0 quando  $t_2 \rightarrow t_1$ . Isso é suficiente para provar que  $B\theta$  é uma função contínua. Além disso, para  $\theta \in U$  e  $t \in [0, h]$  vale que

$$\begin{aligned}
|(B\theta)(t) - T(t)| &= \frac{1}{\Gamma(n)} \left| \int_0^t (t - s)^{n-1} f(s, \theta(s)) ds \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(n+1)} M t^n \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(n+1)} M h^n \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(n+1)} M \frac{k\Gamma(n+1)}{M}
\end{aligned}$$

$$= K.$$

Assim, acabamos de mostrar que  $B\theta \in U$  para todo  $\theta \in U$ . A principal intensão é aplicar o teorema do ponto fixo de Schauder, ver no Apêndice A.3.2, o que resta agora é mostrar que  $B(U) := \{Bu : u \in U\}$  é um conjunto relativamente compacto. Isto pode ser feito por meio do Teorema de Arzela-Ascoli definido no Apêndice A.3.3. Agora vamos a demonstração deste fato. Para cada  $z \in B(U)$ , temos que, para todos  $t \in [0, h]$ ,

$$\begin{aligned} |z(t)| &= |(B\theta)(t)| \\ &\leq \|T\|_\infty + \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t (t-s)^{n-1} |f(s, \theta(s))| ds \\ &\leq \|T\|_\infty + \frac{1}{\Gamma(n+1)} Mh^n \\ &\leq \|T\|_\infty + K, \end{aligned}$$

desta forma esta provado a limitação do conjunto  $B(U)$ . Para provar a continuidade do conjunto  $B(U)$ , vamos considerar novamente os três casos. Claro que para  $n \in \mathbb{N}$ , o resultado segue diretamente pelo Teorema de Existência para EDO's clássico. Se for especificado,  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq h$ , encontra-se o caso  $n \leq 1$  que

$$|(B\theta)(t_1) - (B\theta)(t_2)| \leq \frac{2M}{\Gamma(n+1)} (t_2 - t_1)^n.$$

Assim, para  $|t_2 - t_1| < \delta$ , temos

$$|(B\theta)(t_1) - (B\theta)(t_2)| \leq 2 \frac{M}{\Gamma(n+1)} \delta^n.$$

Observando que a expressão sobre o lado direito é independente de  $\theta, t_1$  e  $t_2$ , vemos que o conjunto  $B(U)$  é contínuo. Para o caso em que  $n > 1$ , podemos usar o Teorema do Valor Intermediário (ver Apêndice A.3.4) para obter que

$$\begin{aligned} |(B\theta)(t_1) - (B\theta)(t_2)| &\leq \frac{M}{\Gamma(n+1)} ((t_2 - t_1)^n + t_2^n - t_1^n) \\ &= \frac{M}{\Gamma(n+1)} ((t_2 - t_1)^n + n(t_2 - t_1)\xi^{n+1}) \\ &= \frac{M}{\Gamma(n+1)} ((t_2 - t_1)^n + n(t_2 - t_1)h^{n+1}), \end{aligned}$$

para algum  $\xi \in [t_1, t_2] \subseteq [0, h]$ . Portanto, mais uma vez, se  $|t_2 - t_1| < \delta$ , então

$$|(B\theta)(t_1) - (B\theta)(t_2)| \leq \frac{M}{\Gamma(n+1)} (\delta^n + n\delta h^{n+1}). \quad (37)$$

Novamente, o lado direito é independente de  $\theta, t_1$  e  $t_2$ , provando assim a continuidade

do conjunto  $B(U)$ . Usando o Teorema de Ascoli-Arzelá (Apêndice A.3.3), em qualquer um dos casos, concluímos que  $B(U)$  é relativamente compacto. Portanto, pelo Teorema de Ponto Fixo de Schauder [7], obtemos que o operador  $B$  tem um ponto fixo. Por construção, um ponto fixo de  $B$  é uma solução de nosso problema do valor inicial (31).

Notam-se que, se  $0 < n \leq 1$ , então o conjunto  $G$  definido no Teorema 3.4.4 é o retângulo (hiper-retângulo)  $G = [0, h^*] \times [\theta^{(0)} - K, x^{(0)} + K]$ .

Agora iremos fazer alguns exemplos de derivadas fracionárias segundo Caputo com a função (34) e após faremos uma observação sobre essa função.

**Exemplo 3.4.5.** Seja  $\theta(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \theta_0^{(k)} \frac{t^k}{k!}$ . Então a derivada de ordem fracionária segundo Caputo de ordem  $n = \frac{1}{2}$  é zero?

De fato se  $n = \frac{1}{2}$  então  $m = 1$ . Se substituirmos o valor de  $m$  em  $\theta(t)$ , obtemos:

$$\theta(t) = \sum_{k=0}^{1-1} \theta_0^{(k)} \frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^0 \theta_0^{(k)} \frac{t^k}{k!} = 0.$$

Logo, fazendo a derivada de ordem fracionária segundo Caputo:

$$D_{*a}^{\frac{1}{2}}(0) = J^{\frac{1}{2}}(D^1(0)) = 0.$$

**Exemplo 3.4.6.** Seja  $\theta(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \theta_0^{(k)} \frac{t^k}{k!}$ . Então a derivada de ordem fracionária segundo Caputo de ordem  $n = \frac{3}{2}$  é zero?

Se  $n = \frac{3}{2}$  então  $m = 2$ . Se substituirmos o valor de  $m$  em  $\theta(t)$ , obtemos:

$$\theta(t) = \sum_{k=0}^{2-1} \theta_0^{(k)} \frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^1 \theta_0^{(k)} \frac{t^k}{k!}.$$

Logo, fazendo a derivada de ordem fracionária segundo Caputo:

$$D_{*a}^{\frac{3}{2}} \sum_{k=0}^1 \theta_0^{(k)} \frac{t^k}{k!} = J^{\frac{3}{2}} \left( D^2 \sum_{k=0}^1 \theta_0^{(k)} \frac{t^k}{k!} \right) = J^{\frac{3}{2}}(0) = 0.$$

**Observação 3.4.1.** Percebe-se através desses exemplos que a derivada de ordem fracionária segundo Caputo de ordem  $n$  da função  $\theta(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \theta_0^{(k)} \frac{t^k}{k!}$  é sempre nula.

No próximo resultado estudaremos a unicidade de solução para PVI (31). A demonstração é muito parecida com a demonstração do caso de derivadas de ordem inteiras.

**Teorema 3.4.7.** (Unicidade) Seja  $0 < n$  e  $m = \lceil n \rceil$ ,  $\theta_0^{(0)}, \dots, \theta_0^{(m-1)} \in \mathbb{R}$ ,  $k > 0$  e  $h^* > 0$ . Definido  $G$  como no Teorema 3.4.4 e a função  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo a condição de Lipschitz em relação a segunda variável dada no Teorema 3.3.1 com a constante  $L > 0$  independente de  $t, \theta_1$  e  $\theta_2$ . Para  $h$  como no Teorema 3.4.4, existe uma única função  $\theta \in C[0, h]$  solução do problema de valor inicial (31).

**Demonstração:** Considere o polinômio  $T$  definido na equação (34) e o operador  $B$  definido em (35). Ainda, recordamos que o conjunto  $U = \{\theta \in C[0, h] : \|\theta - T\|_\infty \leq K\}$  é não-vazio, convexo e fechado. Agora temos que provar que  $B$  tem um único ponto fixo. A fim de fazermos isso, primeiramente provaremos que para cada  $j \in N_0$ , para todo  $t \in [0, h]$  e para todo  $\theta, \tilde{\theta} \in U$ , vale que

$$\|B^j\theta - B^j\tilde{\theta}\|_{L_\infty[0,t]} \leq \frac{(Lt^n)^j}{\Gamma(1+nj)} \|\theta - \tilde{\theta}\|_{L_\infty[0,t]}. \quad (38)$$

Agora usaremos o método de indução para obter o resultado. No caso  $j = 0$ , a afirmação é trivialmente verdadeira. Se utilizarmos esse método para  $(j-1) \rightarrow j$ , obtemos

$$\begin{aligned} \|B^j\theta - B^j\tilde{\theta}\|_{L_\infty[0,t]} &= \|B(B^{j-1}\theta) - B(B^{j-1}\tilde{\theta})\|_{L_\infty[0,t]} \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)} \sup_{0 \leq \omega \leq t} \left| \int_0^\omega (\omega - s)^{n-1} \left[ f(s, B^{j-1}\theta(s)) - f(s, B^{j-1}\tilde{\theta}(s)) \right] ds \right|. \end{aligned}$$

Usando agora que  $f$  é Lipschitz contínua com relação a segunda variável e a hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned} \|B^j\theta - B^j\tilde{\theta}\|_{L_\infty[0,t]} &\leq \frac{L}{\Gamma(n)} \sup_{0 \leq \omega \leq t} \int_0^\omega (\omega - s)^{n-1} \left| B^{j-1}\theta(s) - B^{j-1}\tilde{\theta}(s) \right| dt \\ &\leq \frac{L}{\Gamma(n)} \int_0^t (t - s)^{n-1} \sup_{0 \leq \omega \leq s} \left| B^{j-1}\theta(\omega) - B^{j-1}\tilde{\theta}(\omega) \right| ds. \\ &\leq \frac{L^j}{\Gamma(n)\Gamma(1+n(j-1))} \int_0^t (t - s)^{n-1} t^{n(j-1)} \sup_{0 \leq \omega \leq s} \left\| \theta(\omega) - \tilde{\theta}(\omega) \right\| ds. \\ &\leq \frac{L^j}{\Gamma(n)\Gamma(1+n(j-1))} \sup_{0 \leq \omega \leq t} \left\| \theta(\omega) - \tilde{\theta}(\omega) \right\| \int_0^s (t - s)^{n-1} t^{n(j-1)} ds \\ &= \frac{L^j}{\Gamma(n)\Gamma(1+n(j-1))} \|\theta - \tilde{\theta}\|_{L_\infty[0,t]} \frac{\Gamma(n)\Gamma(1+n(j-1))}{\Gamma(1+nj)} t^{nj}. \end{aligned}$$

Como  $t \in [0, h]$ , podemos reformular a estimativa acima em todo o intervalo  $[0, h]$ , obtendo

$$\|B^j\theta - B^j\tilde{\theta}\|_\infty \leq \frac{(Lh^n)^j}{\Gamma(1+nj)} \|\theta - \tilde{\theta}\|_\infty.$$

Definindo  $\alpha_j = \frac{(Lh^n)^j}{\Gamma(1+nj)}$  temos que a série  $\sum_{j=0}^\infty \alpha_j$  é a representação em série de potências da função de Mittag-Leffler  $E_N(Lh^n)$  (ver o Apêndice A.2 para maiores detalhes). Portanto, converge uniformemente. Assim, o operador  $B$  satisfaz as hipóteses do Teorema de Ponto Fixo de Weissingr's (Apêndice A.3.1) com  $\alpha_j$  definido acima. Logo, existe uma única solução do PVI (31).

Apresentaremos a seguir o estudo da dependência contínua dos dados iniciais para o PVI com derivadas de ordem fracionária. Para tal, assumiremos durante toda esta seção

que  $\theta$  é a única solução do PVI 31.

**Lema 3.4.8.** *Sejam  $n, T, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in R_+$  e  $\delta : [0, T] \rightarrow R$  uma função contínua que satisfaz a seguinte desigualdade*

$$|\delta(t)| \leq \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2}{\Gamma(n)} \int_0^t (t-s)^{n-1} |\delta(s)| ds,$$

para todo  $t \in [0, T]$ . Então

$$|\delta(t)| \leq \varepsilon_1 E_n(\varepsilon_2 t^n),$$

para  $t \in [0, T]$ . Onde,  $E_n$  denotada como a função Mittag-Leffler de ordem  $n$  (ver o Apêndice A.2 na definição).

**Demonstração:** *Sejam  $\varepsilon > 0$  e a função definida como  $\Phi(t) := (\varepsilon_1 + \varepsilon_3)E_n(\varepsilon_2 t^n)$ , onde  $E_n$  é a função de Mittag-Leffler de ordem  $n$ , como no (Apêndice A.2.3). Usando a linearidade da derivada de ordem fracionária segundo Caputo aplicada a função  $\Phi$ , obtemos o seguinte problema de valor inicial*

$$D_{*0}^n \Phi(t) = \varepsilon_2 \Phi(t),$$

onde  $\Phi(0) = \varepsilon_1 + \varepsilon_3$  e  $D^k \Phi(0) = 0$  para  $k = 1, 2, \dots, [n] - 1$ . Pelo Lema 3.4.3 podemos deduzir que  $\Phi$  satisfaz a equação integral

$$\Phi(t) = \varepsilon_1 + \varepsilon_3 + \frac{\varepsilon_2}{\Gamma(n)} \int_0^t (t-s)^{n-1} \Phi(s) ds.$$

Pela suposição sobre a função  $\delta$ , descobrimos que  $|\delta(0)| \leq \varepsilon_1 < \varepsilon_1 + \varepsilon_3 = \Phi(0)$ . Pela continuidade das funções envolvidas podemos deduzir que  $|\delta(t)| < \Phi(t)$  para todo  $t \in [0, \eta]$  com  $\eta > 0$ . Para provar que a desigualdade se mantém ao longo de todo o intervalo  $[0, T]$ , denotamos  $t_0$  como o menor número positivo com a propriedade que  $|\delta(t_0)| = \Phi(t_0)$ . Então, para  $0 \leq t \leq t_0$  temos  $|\delta(t)| \leq \Phi(t)$  e portanto,

$$\begin{aligned} |\delta(t_0)| &\leq \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2}{\Gamma(n)} \int_0^{t_0} (t_0-s)^{n-1} |\delta(s)| ds \\ &\leq \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2}{\Gamma(n)} \int_0^{t_0} (t_0-s)^{n-1} \Phi(s) ds \\ &< \varepsilon_1 + \varepsilon_3 + \frac{\varepsilon_2}{\Gamma(n)} \int_0^{t_0} (t_0-s)^{n-1} |\Phi(s)| ds \\ &= \Phi(t_0). \end{aligned}$$

Note que a igualdade não pode ser verdade, tendo em conta a escolha de  $t_0$ . Assim, a

suposição deve ser falsa. Portanto, descobrimos que na verdade

$$|\delta(t)| < \Phi(t) = (\varepsilon_1 + \varepsilon_3)E_n(\varepsilon_2 t^n),$$

para  $t \in [0, T]$  e  $\varepsilon_3 > 0$ , o que chega no resultado desejado.

**Teorema 3.4.9.** *Seja  $\theta$  a solução do problema de valor inicial (31) e  $z$  a solução do problema de valor inicial*

$$D_{*0}^n z(t) = f(t, z(t)), \quad (39)$$

$$D^k z(0) = z_0^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (40)$$

Se  $\varepsilon := \max_{k=0,1,\dots,m-1} |\theta_0^{(k)} - z_0^{(k)}|$  é suficientemente pequeno, então existe algum  $h > 0$  tal que tanto as funções  $\theta$  e  $z$  estão bem definidas no intervalo  $[0, h]$ , e

$$\sup_{0 \leq t \leq h} |\theta(t) - z(t)| = O\left(\max_{\{k=0,1,\dots,m-1\}} |\theta_0^{(k)} - z_0^{(k)}|\right). \quad (41)$$

**Demonstração:** Definindo  $\delta(t) := \theta(t) - z(t)$ , deduzimos que  $\delta$  é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} D_{*0}^n \delta(t) = f(t, \theta(t)) - f(t, z(t)), \\ D^k \delta(0) = \theta_0^{(k)} - z_0^{(k)}, \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (42)$$

pois o PVI acima satisfaz as hipóteses do Teorema 3.4.4. Considerando o Lema 3.4.3, o problema de valor inicial é equivalente à equação

$$\delta(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} (\theta_0^{(k)} - z_0^{(k)}) + \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t (t-s)^{n-1} (f(s, \theta(s)) - f(s, z(s))) ds.$$

Usando desigualdade de Hölder e a condição de Lipchitz de  $f$ , encontramos que:

$$\delta(t) \leq \varepsilon \sum_{k=0}^{m-1} \frac{h^k}{k!} + \frac{L}{\Gamma(n)} \int_0^t (t-s)^{n-1} |\delta(s)| ds,$$

onde  $L$  é a constante de Lipschitz. Pelo Lema 3.4.8, obtemos:

$$|\delta(t)| \leq O(\varepsilon)E_n(Lh^n) = O(\varepsilon)$$

como o desejado.

**Teorema 3.4.10.** *Seja  $\theta$  a solução do problema de valor inicial (31) e  $z$  a solução do*

problema de valor inicial

$$D_{*0}^n z(t) = \tilde{f}(t, z(t)), \quad (43)$$

$$D^k z(0) = z_0^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (44)$$

onde  $\tilde{f}$  deve satisfazer as mesmas hipóteses de  $f$  e

$$\varepsilon := \max_{(t_1, t_2) \in G} \left| f(t_1, t_2) - \tilde{f}(t_1, t_2) \right|. \quad (45)$$

Se  $\varepsilon$  é suficientemente pequeno, então existe  $h > 0$  tal que tanto as funções  $\theta$  e  $z$  estão bem definidas em  $[0, h]$  e

$$\sup_{0 \leq t \leq h} |\theta(t) - z(t)| = O \left( \max_{(t_1, t_2) \in G} \left| f(t_1, t_2) - \tilde{f}(t_1, t_2) \right| \right).$$

**Demonstração:** Definindo primeiramente  $\delta(t) := \theta(t) - z(t)$ , onde  $\delta$  é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} D_{*0}^n \delta(t) = f(t, \theta(t)) - \tilde{f}(t, z(t)), \\ D^k \delta(0) = 0, \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (46)$$

Isso é equivalente à equação

$$\delta(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t (t-s)^{n-1} \left( f(s, \theta(s)) - \tilde{f}(s, z(s)) \right) ds.$$

Usando a hipótese de Lipschitz continuidade de  $f$  e  $\tilde{f}$ , podemos deduzir que

$$\begin{aligned} \delta(t) &\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{\Gamma(n)} \left( |f(s, \theta(s)) - f(s, z(s))| |f(s, z(s)) - \tilde{f}(s, z(s))| \right) ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t (t-s)^{n-1} |\delta(s)| ds + \varepsilon \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t (t-s)^{n-1} ds \\ &\leq \frac{L}{\Gamma(n)} \int_0^t (t-s) |\delta(s)| ds + \varepsilon \frac{h^n}{\Gamma(n+1)}. \end{aligned}$$

Podemos agora aplicar o Lema 3.4.8 para encontrarmos novamente

$$|\delta(t)| \leq O(\varepsilon) E_n(Lh^n) = O(\varepsilon).$$

**Teorema 3.4.11.** *Seja  $\theta$  a solução do PVI (31) e  $z$  a solução de valor inicial*

$$\begin{cases} D_{*0}^{\tilde{n}} z(t) = f(t, z(t)), \\ D^k z(0) = \theta_0^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, \tilde{m} - 1. \end{cases} \quad (47)$$

onde  $\tilde{n} > n$ ,  $\tilde{m} := [\tilde{n}]$ ,  $\varepsilon := \tilde{n} - n$  e

$$\varepsilon^* := \begin{cases} 0, & \text{se } m = \tilde{m}, \\ \max \{ |\theta_0^k| : m \leq k \leq \tilde{m} - 1 \} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Se  $\varepsilon$  e  $\varepsilon^*$  são suficientemente pequenos, então existe  $h > 0$  tal que, tanto  $z$  como  $\theta$  são funções definidas em  $[0, h]$  e

$$\sup_{0 \leq t \leq h} |\theta(t) - z(t)| = O(\tilde{n} - n) + O \left\{ \max \left[ 0, \max \left( |\theta_0^{(k)}| : m \leq k \leq \tilde{m} - 1 \right) \right] \right\}.$$

**Demonstração:** *Seja*

$$\begin{aligned} \delta(t) &:= \theta(t) - z(t) \\ &= - \sum_{k=m}^{\tilde{m}-1} \frac{t^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t (t-s)^{n-1} f(s, \theta(s)) ds \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(\tilde{n})} \int_0^t (t-s)^{\tilde{n}-1} f(s, z(s)) ds \\ &= - \sum_{k=m}^{\tilde{m}-1} \frac{t^k}{k!} \theta_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t (t-s)^{n-1} (f(s, \theta(s)) - f(s, z(s))) ds \\ &\quad + \int_0^t \left( \frac{(t-s)^{n-1}}{\Gamma(n)} - \frac{(t-s)^{\tilde{n}-1}}{\Gamma(\tilde{n})} \right) f(s, z(s)) ds. \end{aligned}$$

Obviamente a soma é  $O(\varepsilon^*)$ . Logo,

$$\begin{aligned} \int_0^t \left| \frac{(t-s)^{n-1}}{\Gamma(n)} - \frac{(t-s)^{\tilde{n}-1}}{\Gamma(\tilde{n})} \right| ds &= \int_0^t \left| \frac{u^{n-1}}{\Gamma(n)} - \frac{u^{\tilde{n}-1}}{\Gamma(\tilde{n})} \right| ds \\ &\leq \int_0^h \left| \frac{u^{n-1}}{\Gamma(n)} - \frac{u^{\tilde{n}-1}}{\Gamma(\tilde{n})} \right| ds \\ &= O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Podemos calcular a integral explicitamente, entretando, primeiro temos que achar o zero da integração que está localizado em  $\left( \frac{\Gamma(\tilde{n})}{\Gamma(n)} \right)^{\frac{1}{\tilde{n}-n}}$  (uma quantidade que converge para  $\exp(\psi(n))$  e  $\tilde{n} \rightarrow n$  onde  $\psi = \frac{\Gamma'}{\Gamma}$ ). Se  $h$  é o menor do que esse valor, então o integrando não tem nenhuma mudança de sinal. Caso contrário devemos dividir o intervalo de integração neste ponto. Em qualquer caso, podemos dizer que a expressão resultante

é delimitada por  $O(\tilde{n} - n) = O(\varepsilon)$ . Então

$$|\delta(t)| \leq O(\varepsilon) + O(\varepsilon^*) + \frac{L}{\Gamma(n)} \int_0^t (t-s)^{n-1} |\delta(s)| ds,$$

se utilizarmos o Lema 3.4.8 produzindo o resultado desejado.

**Corolário 3.4.12.** *Assumindo as hipóteses do Teorema 3.4.11 e  $\tilde{m} = m$ , então*

$$\sup_{0 \leq t \leq h} |\theta(t) - z(t)| = O(\tilde{n} - n)$$

**Corolário 3.4.13.** *Assumindo as hipóteses do Teorema 3.4.11 e sejam  $\tilde{m} > m$  e  $\theta_0^{(k)} = 0$  para  $k = m, m+1, \dots, \tilde{m}-1$  então*

$$\sup_{0 \leq t \leq h} |\theta(t) - z(t)| = O(\tilde{n} - n).$$

## 4 MODELO DE STROGATZ

Nesse capítulo apresentaremos o modelo proposto por Strogatz [27], sendo um dos mais simples modelos de equação diferencial do sistema circadiano humano. Tal modelo baseia-se em dois osciladores acoplados de maneira não-lineares, sendo um manifestado pelo ritmo circadiano da temperatura do corpo e a outra pelo ciclo sono-vigília. Esses marcapassos são escolhidos para ser acoplados de tal modo que cada um acelera ou retarda o outro. Além disso, pela sua simplicidade, esse modelo ignora variáveis tais como a amplitude.

### 4.1 Estrutura do modelo de Strogatz

As fases dos dois osciladores são denotados  $\theta_1(t)$  e  $\theta_2(t)$ . As equações do modelo de fase são:

$$\theta_1'(t) = \omega_1 - A_1 \cos [2\pi (\theta_2(t) - \theta_1(t))] \quad (48)$$

$$\theta_2'(t) = \omega_2 + A_2 \cos [2\pi (\theta_1(t) - \theta_2(t))] \quad (49)$$

onde  $\omega_1$  e  $\omega_2$  são frequência intrínsecas,  $A_1$  e  $A_2$  são forças de acoplamento, ou seja, o que determina o quanto um oscilador influencia no outro e  $(')$  representa a derivada. Todos os parâmetros são considerados não-negativos, sendo assim, positivos ou zero.

A FIGURA 1 é uma reprodução do modelo de Strogatz.

Temos que o oscilador  $\theta_1$  representa a temperatura corporal e o oscilador  $\theta_2$  representa o ciclo sono-vigília. Sendo que a forma do acoplamento em que se encontram é tal que o primeiro oscilador diminui e o segundo acelera quando estão em fase.

Observamos que os sinais que antecedem as forças de acoplamento no modelo 48-49 são diferentes, sendo uma equação positiva e outra negativa. Tais sinais são determinados pela posição dos osciladores, uma vez que quando a força de acoplamento do oscilador  $\theta_2(t)$  é contrária ao movimento do oscilador  $\theta_1(t)$  o oscilador movem-se no sentido anti-horário. Portanto, o sinal é negativo, sendo que o que faz o sinal ser positivo, é a força de acoplamento do oscilador  $\theta_1(t)$  coincidir com o sentido do oscilador  $\theta_2(t)$  [11]. Veja Figura 1 para um melhor entendimento.

O sono é definido por uma fração  $v_2$  do ciclo  $\theta_2(t)$ . Strogatz [27] supôs que o sono do

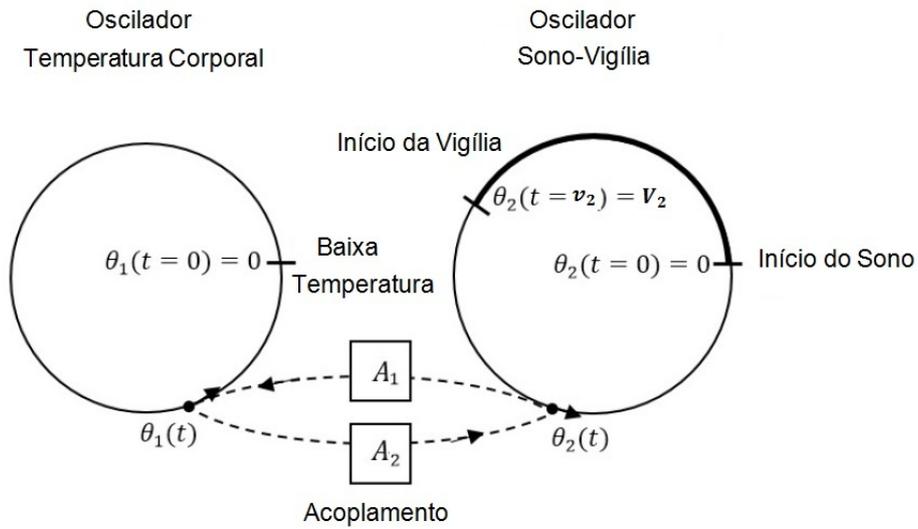


Figura 1: Estrutura do modelo de fase de Strogatz

ser humano perdura por todo o período  $[0, v_2]$ . Assim, temos que

$$\theta_2(t_0 = 0) = 0 \quad (50)$$

e ainda para qualquer  $0 \leq t \leq v_2$ , temos  $\theta_2(t) = 0$ .

No início da atividade, ou seja, quando começa a vigília, temos:

$$\theta_2(t = v_2) = V_2 \quad (51)$$

Observamos que Strogatz considerou na figura acima que a temperatura assume seu menor pico, ao início do sono, ou seja, significa que o ponto no oscilador  $\theta_1(t)$  está na fase "zero". Logo, sendo o ponto mínimo no ciclo da temperatura endógena (interior). Matematicamente temos:

$$\theta_1(t_0 = 0) = 0 \quad (52)$$

## 4.2 Sincronização e Dessincronização

Por tratarmos de dois osciladores é preciso analisar a sincronização e dessincronização dos mesmos. É sabido que, a sincronização acontece quando dois ou mais osciladores interagem em perfeita conexão e ao mesmo tempo, já a dessincronização acontece quando o tempo não coincide entre duas ou mais coisas, sendo assim, acontece um desajustamento temporal.

Iniciaremos o estudo da sincronização e a dessincronização entre os osciladores con-

siderando a diferença de fase:

$$\psi(t) = \theta_1(t) - \theta_2(t) \quad (53)$$

Derivando a equação (53) em relação a  $t$ , das equações (48) de (49), obtêm-se:

$$\psi'(t) = \Omega - A \cos(2\pi\psi(t)) \quad (54)$$

onde

$$\begin{aligned} \Omega &= \omega_1 - \omega_2 \\ A &= A_1 + A_2 \end{aligned}$$

Observamos aqui que  $\Omega$  é a diferença das frequências intrínsecas dos dois osciladores e  $A$  é o acoplamento total do sistema.

#### 4.2.1 Sincronização

Tornar algo sincrônico é combinar movimentos para que se dêem ao mesmo tempo. Para isso, consideramos a diferença de fase dada pela equação (54).

Fazemos uso da definição de sincronização apresentada na seção 2.1.3, temos que a sincronização ocorre quando  $A > |\Omega|$ . Considerando nessa seção somente o caso sincronizado, temos:

$$k = \left| \frac{A}{\Omega} \right| > 1. \quad (55)$$

Em seguida, a relação de fase sincronizada internamente chamada de  $\psi(t)$ , é obtida da resolução (54) para  $\psi'(t) = 0$  temos:

$$\begin{aligned} \Omega - A \cos(2\pi\psi(t)) = 0 &\iff \cos(2\pi\psi(t)) = \frac{\Omega}{A} \\ \iff 2\pi\psi(t) = \cos^{-1}\left(\frac{\Omega}{A}\right) &\iff \psi(t) = \pm \frac{1}{2\pi} \cos^{-1}\left(\frac{\Omega}{A}\right). \end{aligned} \quad (56)$$

Estas são duas soluções implícitas em (56), onde a solução estável é aquela que  $\frac{d\psi'}{d\psi} < 0$  [27]. Sendo que o intervalo tomado para  $\cos^{-1}$  é  $[0, \pi]$ , temos:

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi} \cos^{-1}\left(\frac{\Omega}{A}\right), \quad (57)$$

é a solução estável.

Da equação (57) podemos encontrar a frequência de "compromissos"  $\omega^*$  adotada pelo sistema sincronizado. Durante a sincronia interna, obtemos através da substituição da

equação (57) no sistema (48)-(49), que:

$$\theta'_1(t) = \omega_1 - A_1 \left( \frac{\Omega}{A} \right) = \omega_1 - A_1 \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{A_2 + A_1} \right) \quad (58)$$

$$\theta'_2(t) = \omega_2 - A_2 \left( \frac{\Omega}{A} \right) = \omega_2 - A_2 \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{A_2 + A_1} \right). \quad (59)$$

Sendo  $\theta'_1(t) = \theta'_2(t) = \omega^*$  durante a sincronização, qualquer uma destas duas expressões resulta em :

$$\omega^* = \frac{A_1\omega_2 + A_2\omega_1}{A_1 + A_2} \quad (60)$$

Esta frequência é diferente da frequência intrínseca  $\omega_1$  e  $\omega_2$  por valores  $\Delta\omega_1$  e  $\Delta\omega_2$ , em que:

$$\Delta\omega_1 = \omega^* - \omega_1 = \frac{A_1\omega_2 + A_2\omega_1}{A_1 + A_2} - \omega_1 = \frac{-A_1(\omega_1 - \omega_2)}{A_1 + A_2} = \frac{-A_1\Omega}{A} \quad (61)$$

e

$$\Delta\omega_2 = \omega^* - \omega_2 = \frac{A_1\omega_2 + A_2\omega_1}{A_1 + A_2} - \omega_2 = \frac{A_2(\omega_1 - \omega_2)}{A_1 + A_2} = \frac{A_2\Omega}{A} \quad (62)$$

Notamos que as frequências durante a sincronia dos osciladores são deslocadas de seus valores intrínsecos na proporção das forças de acoplamento, no caso:

$$\left| \frac{\Delta\omega_1}{\Delta\omega_2} \right| = \left| \frac{A_1}{A_2} \right| \quad (63)$$

Podemos encontrar  $\theta_1(t)$  e  $\theta_2(t)$  pela interação da equação (60) em relação a  $t$ , assim temos

$$\int_0^{v_2} \theta'_1(t) dt = \int_0^{v_2} \theta'_2(t) dt. \quad (64)$$

Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo a equação (64), temos que

$$\theta_1(v_2) - \theta_1(0) = \theta_2(v_2) - \theta_2(0) + const.$$

É sabido das condições iniciais dadas pela equação (50),(51) e por (52), temos:

$$const = \theta_1(v_2) - V_2. \quad (65)$$

Portanto, a solução do sistema (48)-(49), para o caso sincronizado, levando em

consideração as condições iniciais (50) e (52) é dada analiticamente por

$$\theta_1(t) = \left( \frac{A_2\omega_1 + A_1\omega_2}{A_2 + A_1} \right) t \quad (66)$$

$$\theta_2(t) = \left( \frac{A_2\omega_1 + A_1\omega_2}{A_2 + A_1} \right) t + \left( \frac{A_2\omega_1 + A_1\omega_2}{A_2 + A_1} \right) v_2 - V_2. \quad (67)$$

#### 4.2.2 Dessincronização

Algo é dito dessincronizado quando duas ou mais coisas perdem a sincronização, ou seja, seus movimentos não são simultâneos. Utilizando a definição de dessincronização apresentada na seção 2.1.3, temos que a dessincronização ocorre quando  $A < |\Omega|$ , sendo assim, para caso dessincronizado assumimos que [11]:

$$k = \left| \frac{A}{\Omega} \right| < 1.$$

O tempo está dimensionado de modo que

$$\psi'(t) = \frac{d\psi(t)}{dt}. \quad (68)$$

Denominamos  $\alpha$  o batimento de frequência entre os osciladores  $\theta_1(t)$  e  $\theta_2(t)$ , ou seja, o tempo em que a diferença de fase leva para completar um ciclo. Então, temos

$$\frac{1}{\alpha} = \int_0^{\frac{1}{\alpha}} dt = \int_0^1 \frac{d\psi(t)}{\psi'(t)} \psi'(t) \int_0^1 \frac{d\psi(t)}{\Omega - A \cos(2\pi\psi(t))}. \quad (69)$$

Podemos observar que a função cosseno com frequência  $2\pi$  é simétrica no intervalo  $[0, 1]$ . Assim, reescrevemos a equação (69) como

$$\frac{1}{\alpha} = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{d\psi(t)}{\Omega - A \cos(2\pi\psi(t))}. \quad (70)$$

Consideramos a seguinte mudança de variável

$$\rho(t) = \tan(\pi\psi(t)). \quad (71)$$

Então,

$$\cos(2\pi\psi(t)) = \frac{1 - \rho(t)^2}{1 + \rho(t)^2}, \quad (72)$$

e

$$d\psi(t) = \frac{d\rho(t)}{\pi(1 + \rho(t)^2)}. \quad (73)$$

Como

$$\psi(0) = 0 \quad e \quad \psi(1) = \frac{1}{2}, \quad (74)$$

temos que

$$\rho(0) = 0 \quad e \quad \rho\left(\frac{1}{2}\right) = \tan \frac{\pi}{2} = +\infty. \quad (75)$$

Reescrevemos a equação (70), pelas equações (71)-(75), como sendo

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{\frac{d\rho(t)}{\pi(1+\rho(t)^2)}}{\Omega - A \left( \frac{1-\rho(t)^2}{1+\rho(t)^2} \right)} \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{\pi(1 + \rho(t)^2)} \right) \cdot \left( \frac{1 + \rho(t)^2}{\Omega + \Omega\rho(t)^2 - A + A\rho(t)^2} \right) d\rho(t) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{d\rho(t)}{(\Omega - A) + (\Omega + A)\rho(t)^2} \\ &= \frac{2}{\pi(\Omega + A)} \int_0^{+\infty} \frac{d\rho(t)}{\left( \sqrt{\frac{\Omega-A}{\Omega+A}} \right)^2 + \rho(t)^2}. \end{aligned} \quad (76)$$

Integrando indefinidamente a equação (76) em relação a  $t$ , logo

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} &= \left( \frac{2}{\pi(\Omega + A)} \right) \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{\frac{\Omega-A}{\Omega+A}}} \right) \cdot \left( \arctan \left( \frac{\rho(t)}{\sqrt{\frac{\Omega-A}{\Omega+A}}} \right) \right) \\ &= \left( \frac{2}{\pi(\Omega + A)} \right) \cdot \left( \frac{\sqrt{\Omega + A}}{\sqrt{\Omega - A}} \right) \cdot \left( \arctan \left( \frac{\rho(t)\sqrt{\Omega + A}}{\sqrt{\Omega - A}} \right) \right). \end{aligned} \quad (77)$$

Como  $A < |\Omega|$ , temos  $\rho(t) \rightarrow +\infty$  e, assim

$$\arctan\left(\frac{\rho(t)\sqrt{\Omega + A}}{\sqrt{\Omega - A}}\right) \cong \frac{\pi}{2}.$$

Portanto, a equação (77) tem a seguinte forma,

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{(\sqrt{\Omega + A}) \cdot (\sqrt{\Omega - A})} = \frac{1}{\sqrt{\Omega^2 - A^2}}.$$

E a frequência de batimento satisfaz

$$\alpha = (\Omega^2 - A^2)^{\frac{1}{2}} = \Omega \left(1 - \frac{A^2}{\Omega^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (78)$$

Temos dois casos especiais:

- (i) Para  $A = 0$ , a frequência de batimento se reduz a  $\alpha = \Omega = \omega_1 - \omega_2$ , isto é, a frequência de batimentos não interativos. Em outras palavras, não há interação entre os osciladores, as forças de acoplamento são nulas, dadas que não podem ser negativas.
- (ii) Segue da equação 78 que  $A \rightarrow |\Omega|$ . Neste caso o sistema aproxima-se do acoplamento crítico, ou seja, é o momento em que o sistema passa de dessincronizado para sincronizado e assim o batimento de frequência é nulo.

Outro parâmetro importante na dessincronização, além da frequência de batimento  $\alpha$ , é o período do ciclo sono-vigília denominado  $T_{sv}$ . Como a função  $\cos(2\pi\psi(t))$  assume os valores extremos  $+1$  ou  $-1$ , segue da equação (49) que o tempo  $T_{sv}$  necessário para que  $\theta_2(t)$  completar um ciclo dado por:

$$\frac{1}{\omega_2 + A_2} \leq T_{sv} \leq \frac{1}{\omega_2 - A_2}. \quad (79)$$

A equação (79), pressupôs limites brutos em  $T_{sv}$ . Estimativas mais satisfatórias podem ser obtidas encontrando a solução exata de (48)-(49) no caso dessincronizado.

Um caso especial do modelo é aquele em que  $A_1 = 0$ , ou seja, não há parecer para o marcapasso circadiano, ou seja, não há força de acoplamento saindo do oscilador 2. Tendo assim uma aproximação razoável para o valor  $T_{sv}$ .

Da condição inicial dada pela equação (52), temos que  $\theta_1(0) = 0$ . Em seguida, dimensionando o tempo, de modo que

$$\omega_1 = \lambda,$$

segue, da equação (48) que

$$\theta_1(t) = \lambda t. \quad (80)$$

No caso em que  $A_1 = 0$ , as equações (48) e (49) são simplificadas como :

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \lambda, \\ \dot{\theta}_2 &= \omega_2 + A_2 \cos(2\pi(\theta_1(t) - \theta_2(t))). \end{aligned} \quad (81)$$

Da derivada da equação (53) em relação a  $t$ , temos:

$$\dot{\psi}(t) = \dot{\theta}_1(t) - \dot{\theta}_2(t) = \Omega - A \cos(2\pi\psi(t)), \quad (82)$$

com

$$\begin{aligned} \Omega &= \omega_1 - \omega_2 = \lambda_1 - \omega_2 \quad \text{e} \\ A &= A_2 + A_1 = A_2 \end{aligned}$$

Redimensionando o tempo mais uma vez, temos:

$$T(t) = \Omega t \quad (83)$$

e deixando

$$\dot{\psi}(T) = \frac{d\psi(T)}{dT} \quad (84)$$

Utilizando 83 e 84 a equação (82) toma a forma:

$$\dot{\psi}(T) = 1 - \frac{A}{\Omega} \cos(2\pi\psi(T)) = 1 - k \cos(2\pi\psi(T)). \quad (85)$$

Podemos resolver por separação de variáveis a equação (85) seguido de integração. Assim temos que

$$T(t) + const = \int \frac{d\psi(T)}{1 - k \cos(2\pi\psi(T))}. \quad (86)$$

Consideramos a seguinte mudança de variável

$$z(T) = \tan(\pi\psi(T)). \quad (87)$$

Então

$$\cos(2\pi\psi(T)) = \frac{1 - z(T)^2}{1 + z(T)^2} \quad (88)$$

e

$$d\psi(T) = \frac{dz(T)}{\pi(1 + z(T)^2)}. \quad (89)$$

Portanto, com as equações (88)-(89), reescrevemos (86) como sendo

$$\begin{aligned} T(t) + const &= \int \frac{\frac{dz(T)}{\pi(1+z(T)^2)}}{1 - k \left( \frac{1-z(T)^2}{1+z(T)^2} \right)} \\ &= \int \left( \frac{dz(T)}{\pi(1 + z(T)^2)} \right) \cdot \left( \frac{1 + z(T)^2}{1 - k + z(T)^2 + kz(T)^2} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int \frac{dz(T)}{(1 - k) + (1 + k)z(T)^2} = \frac{1}{\pi(1 + k)} \int \frac{dz(T)}{\left( \sqrt{\frac{1-k}{1+k}} \right)^2 + z(T)^2}. \end{aligned} \quad (90)$$

Calculando a integral na equação (90), temos que

$$\begin{aligned} T(t) + const &= \left( \frac{1}{\pi(1 + k)} \right) \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{\frac{1-k}{1+k}}} \right) \cdot \left( \arctan \left( \frac{z(T)}{\sqrt{\frac{1-k}{1+k}}} \right) \right) \\ \iff (T(t) + const) \left( \pi\sqrt{1 - k^2} \right) &= \arctan \left( \frac{z(T)}{\sqrt{\frac{1-k}{1+k}}} \right) \\ \iff \tan \left( (T(t) + const) \left( \pi\sqrt{1 - k^2} \right) \right) &= \frac{z(T)}{\sqrt{\frac{1-k}{1+k}}} \\ \iff \left( \sqrt{\frac{1 - k}{1 + k}} \right) \tan \left( (T(t) + const) \left( \pi\sqrt{1 - k^2} \right) \right) &= z(T). \end{aligned} \quad (91)$$

Voltando pra variável  $\psi(T)$ , obtemos

$$\begin{aligned} \tan(\pi\psi(T)) &= \left( \sqrt{\frac{1 - k}{1 + k}} \right) \tan \left( (T(t) + const) \left( \pi\sqrt{1 - k^2} \right) \right) \\ \iff \psi(T) &= \frac{1}{\pi} \arctan \left( \left( \sqrt{\frac{1 - k}{1 + k}} \right) \tan \left( (T(t) + const) \left( \pi\sqrt{1 - k^2} \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (92)$$

Da equação (83), temos que

$$\psi(t) = \frac{1}{\pi} \arctan \left( \left( \sqrt{\frac{1 - k}{1 + k}} \right) \tan \left( (\Omega t + A(0)) \left( \pi\sqrt{1 - k^2} \right) \right) \right)$$

sendo

$$A(0) = \arctan\left(\frac{1}{\pi} \tan(\pi\psi(0))\right)$$

$$k = \frac{A}{\lambda - \omega_2}.$$

Assim, pela diferença de fase, equação (53), obtemos que

$$\theta_2(t) = \theta_1(t) - \psi(t).$$

Portanto, temos no caso dessincronizado e com  $A_1 = 0$  a solução do sistema (48)-(49), com condições iniciais dadas pelas equações (50) e (52) é dada por

$$\theta_1(t) = \lambda t \tag{93}$$

$$\theta_2(t) = \lambda - \frac{1}{\pi} \arctan\left(\left(\sqrt{\frac{1-k}{1+k}}\right) \tan\left((\Omega t + A(0))\left(\pi\sqrt{1-k^2}\right)\right)\right). \tag{94}$$

## 5 MODELO DE STROGATZ GENERALIZADO

Neste capítulo apresentaremos o novo modelo denominado Modelo de Strogatz Generalizado. Tal modelo consiste em substituir as derivadas de ordem 1 no modelo de Strogatz apresentado no Capítulo 4 por um modelo cuja dinâmica é regida por derivadas de ordem fracionária segundo Caputo. A escolha das derivadas fracionárias segundo Caputo deve-se ao fato que estas são as que melhor se adequam para a modelagem do problemas de valor inicial, como foi apresentado na seção 3.3.

Para além da apresentação do modelo, neste capítulo também serão apresentados resultados de boa colocação do modelo, provando existência, unicidade e dependência contínua do mesmo. Tais resultados incluem o modelo se Strogatz como um caso particular.

Ainda, reservamos uma das seções para apresentar de maneira teórica a relação entre o modelo e os efeitos de memória que este representa. Tais efeitos também serão percebidos nos testes numéricos realizados no próximo capítulo.

### 5.1 Estrutura

A fim de modelar a dinâmica do ritmo circadiano e incluir neste efeitos de memória, denominamos Modelo de Strogatz Generalizado ao modelo que toma a seguinte forma:

$$D_*^n(\theta_1) = \omega_1 - A_1 \cos(2\pi(\theta_2(t) - \theta_1(t))), \quad (95)$$

$$D_*^n(\theta_2) = \omega_2 + A_2 \cos(2\pi(\theta_1(t) - \theta_2(t))), \quad (96)$$

sendo  $D_*^n$  a derivada de ordem  $n$  segundo Caputo, com  $0 < n < 1$ . Consideraremos neste trabalho que os parâmetros e as condições iniciais são os mesmos do modelo de Strogatz do Capítulo 4. Em particular, quando  $n = 1$  temos o modelo de Strogatz apresentado no Capítulo 4.

Na próxima seção apresentaremos resultados de boa colocação para o modelo de Strogatz generalizado.

## 5.2 Resultados de boa colocação do modelo proposto

Nesta seção estudaremos resultados de existência, unicidade e dependência contínua dos dados iniciais (boa colocação segundo Hadamard) para sistemas de Strogatz generalizado (95)-(96). Em outras palavras, apresentaremos as condições necessárias e suficientes para obter resultado de boa colocação para o modelo de Strogatz generalizado (95)-(96).

Primeiramente reescreveremos o sistema (95)-(96) na forma de sistemas de ordem fracionária apresentados no Capítulo 3. A ideia é utilizar os resultados para sistemas de EDO's fracionárias provados no referido capítulo. Ou seja, olharemos para o sistema de EDO's fracionárias (95)-(96) escrita da forma

$$\begin{cases} D_*^n u(t) = f(t, u(t)), \\ D^k u(0) = u_0, \end{cases} \quad (97)$$

onde  $f : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\neq}$  é dada por

$$f(t, u(t)) = (\omega_1 - A_1 \sin(2\pi(\theta_1 - \theta_2)), \omega_2 - A_2 \sin(2\pi(\theta_2 - \theta_1))), \quad (98)$$

com  $u(t) = (\theta_1(t), \theta_2(t))$ .  $u_0 = (\theta_1(0), \theta_2(0))$  pertencente ao subconjunto  $U$  representa os dados iniciais e  $D_*^n u(t)$  representa a derivada de ordem fracionária  $n$  segundo Caputo definida na seção 3.2.

Considere subconjunto  $\mathcal{W}$  do  $\mathbb{R}^3$  definido da seguinte forma

$$\mathcal{W} = \{(t, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2; |u - u_0| \leq r|t - t_0| \leq \varrho, \text{ com } r, \varrho > 0\} \quad (99)$$

Um resultado auxiliar de nosso interesse para o futuro é o seguinte:

**Lema 5.2.1.** *O conjunto  $\mathcal{W}$  definido acima pela equação 99, é um subconjunto compacto do  $\mathbb{R}^{\neq}$ .*

**Demonstração:** *Como  $u(t) = (\theta_1(t), \theta_2(t))$  é a solução do PVI fracionário, temos do Lema 3.4.3 que  $u$  é uma função contínua em  $|t - t_0| \leq \varrho$ , esta é, assim, limitada. Portanto,  $\mathcal{W}$  é um subconjunto fechado e limitado do  $\mathbb{R}^{\neq}$ , portanto, compacto.*

O próximo resultado é fundamental para obtermos resultados de boa colocação para o problema estudado.

**Teorema 5.2.2.** *A função  $f(t, u(t))$  definida em (98) é contínua com relação a  $t \in [0, T]$  onde  $(t, u(t)) \in \mathcal{W} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\neq}$ . Ainda,  $f(t, u(t))$  é Lipschitziana com relação a segunda variável, ou seja  $Sf \in Lip_u(\mathcal{W})$ .*

**Demonstração:** *Como toda função Lipschitziana é contínua, nos limitaremos a provar que  $f$  é Lipschitz contínua com relação a segunda variável. Para tal observamos*

que da definição de  $f$  em (98), existem as derivadas parciais de  $f$  com relação ambas as variáveis. Portanto, dadas quaisquer funções contínuas  $u, y \in \mathcal{W}$ , segue do Teorema do Valor Médio (veja Apêndice A.3.4), que existe  $\Theta \in ]0, 1[$  tal que,

$$f(t, u(t)) - f(t, y(t)) = Jf(t, u(t) + \Theta(y(t) - u(t)))(u(t) - y(t))$$

onde  $Jf(t, u(t) + \Theta(y(t) - u(t)))$  representa o Jacobiano de  $f$ . Segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$\|f(t, u(t)) - f(t, y(t))\| \leq \|Jf(t, u(t) + \Theta(y(t) - u(t)))\| \|u(t) - y(t)\|$$

Desta forma, para provar o resultado enunciado, basta mostrar que  $\|Jf(t, u(t) + \Theta(y(t) - u(t)))\|$  é uniformemente limitado em  $W$ . Como as derivadas parciais de  $f$  com relação a cada uma de suas entradas são contínuas (ver detalhes no Apêndice A.5) e  $[0, T]$  é compacto, segue que a aplicação Jacobiana é uniformemente limitada em  $\mathcal{W}$  (haja visto que  $W$  é compacto como provado no Lema 5.2.1). Em outras palavras  $L := \max \|Jf(t, u(t) + \Theta(y(t) - u(t)))\|$ . Logo, concluímos que  $f$  é Lipschitz contínua com constante de Lipschitz ( $L$ ). Em particular  $L = \max\{A_1, A_2\}$ .

**Corolário 5.2.3.** A função  $f(t, u(t))$  definida pela equação (98) é Lebesgue mensurável em  $t \in [0, T]$ .

**Demonstração:** Segue diretamente do fato de que cada coordenada de  $f$  é contínua com relação a  $t$ , como provado no Teorema 5.2.2.

A partir de agora, vamos verificar que o PVI de ordem fracionária (95)-(96) é bem posto no sentido de Hadamard. Isto é, vamos garantir resultados de existência, unicidade e dependência contínua para o sistema de Strogatz generalizado

**Teorema 5.2.4. (Existência)** Existe uma única solução  $u \in C([0, h], \mathbb{R}^{\#})$  do PVI (95)-(96), onde  $h = h(L)$ , para  $L$  a constante de Lipschitz, é dado como no Teorema 3.4.4. Além disso o PVI depende continuamente dos dados iniciais, bem como, da ordem fracionária da derivada  $n$  e do lado direito  $f$ .

**Demonstração:** Como  $f$  definida no lado direito do problema (95)-(96) é Lipschitziana com relação a segunda variável, como provado no Teorema 5.2.2, segue que as hipóteses dos Teoremas 3.4.4, 3.4.7, 3.4.9, 3.4.10 e 3.4.11 são satisfeitas e, portanto, o teorema está provado.

Em particular, os resultados dos Teoremas acima se aplicam para  $n = 1$ , garantindo assim que o modelo de Strogatz é bem posto no sentido de Hadamard.

**Corolário 5.2.5.** A solução  $u \in C[0, h]$  do problema (98) satisfaz a equação integral de Volterra não-linear do segundo tipo

$$u(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} u_0^k + \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t (t-s)^{n-1} f(s, u(s)) ds$$

onde  $m = \lceil n \rceil$ .

**Demonstração:** De fato, como as hipóteses do Teorema 3.4.4 são satisfeitas, então também são satisfeitas as hipóteses do lema 3.4.3. O resultado do Corolário acima é importante para definir estratégias numéricas para a solução do PVI (95)-(96) no próximo capítulo.

### 5.3 Efeitos de Memória no Sistema de Strogatz Generalizado

Nesta seção apresentaremos alguns resultados que evidenciam os efeitos de memória no sistema de Strogatz generalizado e como esperamos que estes efeitos sejam vistos nos resultados de sincronização e dessincronização. Como não foi possível, até o presente momento calcular de forma explícita os pontos de sincronização e dessincronização, neste trabalho nos deteremos a mostrar que a utilização das derivadas de ordem fracionária implicam em efeitos de atrasos nos referidos pontos, comparados com o modelos de Strogatz com derivadas inteiras. Em particular, estes mesmos efeitos serão observados nos resultados numéricos no próximo capítulo.

Iniciaremos com a hipótese que  $0 < n < 1$ . Portanto, do Lema 3.2.6 e da definição de derivada de ordem fracionária segundo Caputo, temos que

$$\psi'(t) = D_*^{1-n} D_*^n(\psi(t)) = \frac{1}{\Gamma(1-n)} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^n} \frac{d}{ds} (D^n(\psi(s))) ds$$

Usando a definição de  $D^n\psi(t)$  e a seguinte mudança de variáveis  $\tau = t - s$ , temos que

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= \frac{2\pi}{\Gamma(1-n)} \int_0^t \frac{1}{\tau^n} A \sin(2\pi\psi(t-\tau)) \psi'(t-\tau) d\tau \\ &= \frac{2\pi}{\Gamma(1-n)(1-n)} \int_0^t A \sin(2\pi\psi(t-\tau)) \psi'(t-\tau) d\tau^{1-n} \end{aligned} \quad (100)$$

Portanto,  $\psi'(t^*) = 0$  no modelo de Strogatz equivale a integral em (100) avaliada em  $t^*$  se anular.

Uma das possibilidades é que, na nova medida  $d\tau^{1-n}$  tenhamos o efeito de atraso  $\psi'(t^* - \tau) = 0$ . A mudança de medida  $ds \rightarrow d\tau^{1-n}$  pode ser interpretado o peso do efeito da memória no sistema.

Veremos no próximo capítulo com o auxílio dos resultados numéricos como tais efeitos se manifestam de maneira mais clara.

## 6 RESULTADOS NUMÉRICOS

Apresentaremos nesse capítulo resultados numéricos para o sistema de equações diferenciais fracionárias (98) para alguns valores de  $n \in ]0, 1]$ , ou melhor, para ser mais específico, trabalharemos com  $n = \{0, 9; 0, 7; 0, 5\}$ , sendo as condições iniciais  $\theta_1(t = 0) = 0$  e  $\theta_2(t = 0) = 0$ , temos para o caso de  $n = 1$  sendo exatamente o modelo de Strogatz.

Para a simulação numérica utilizamos os códigos *fde12.m* e o *flmm.m* em linguagem Matlab adaptados de [10].

O método *fde12* utiliza uma combinação de algumas regras de integração para integrandos do tipo produto, como o que aparece na equação de Volterra de segunda espécie, equação (23), conhecidas como método de Adams-Bashforth-Moulton. Detalhes de convergência, estabilidade e especificações do método podem ser encontradas em [10].

O código *flmm* usa diferentes versões fracionárias de métodos lineares do tipo multi-passos (LMMs) de segunda ordem descritos em [10]. Tais métodos podem ser vistos como uma generalização da regra do Trapézio (conhecida como método Tustin), que é de fato uma generalização da fórmula de Newton-Gregory ou ainda, uma generalização do método de diferenciação para a frente.

Ambos os métodos estão baseados na regra de quadratura discreta para convoluções. A regra da quadratura para a convolução é avaliada utilizando a Transformada de Fourier rápida (FFT), reduzindo o custo computacional de  $N^2$  para  $N(\log(N))^2$ , onde  $N$  é o número de pontos de integração no tempo em  $[0, T]$ .

### 6.1 Simulação Numérica e Análise dos Modelos

Nessa seção apresentaremos simulações numéricas para valores de  $n = \{0, 9; 0, 7; 0, 5\}$ . Utilizaremos ainda o modelo de Strogatz, ou seja, para  $n = 1$  como objeto de comparação, uma vez que não conseguimos dados reais. Estabeleceremos alguns valores para os parâmetros dos casos estudados, a fim de analisar o comportamento do ritmo circadiano com efeitos de memória o qual encontramos nas derivadas de ordem fracionária.

Para as simulações nos deteremos a analisar os casos em que o valor dado para cada frequência equivale ao número de vezes que o ciclo sofreu grandes alterações em um dia. Em outras palavras, consideraremos  $\omega_1$ , que é a frequência do ciclo da temperatura corporal, como sendo a quantidade que representa o número de vezes que a temperatura sofreu mudança. Como já foi dito anteriormente, a temperatura aumenta gradativamente durante o dia, sendo que temos o maior pico de temperatura durante a noite. Já,  $\omega_2$  representa a frequência do ciclo da atividade-reposo. Em nossas simulações utilizaremos  $\omega_2$  como sendo a quantidade de vezes que uma pessoa mudou do estado de sono (dormindo) para o estado de movimento ou vigília (acordado).

Notamos que existem uma vasta quantia de possibilidades para as escolhas de  $\omega_1$  e  $\omega_2$  mas, apenas algumas escolhas foram consideradas nas simulações. Uma forma fidedigna de escolher o par  $\omega_1, \omega_2$  poderia ser feita a partir de dados reais. Como não conhecemos dados reais para o modelo estudado, esta escolha será feita de forma sintética.

Deixamos claro que os gráficos geram uma característica do ritmo circadiano e não o ritmo circadiano em si. Tais características serão o fruto de uma análise particular para cada caso. Notemos também que cada dia está definido pelo intervalo  $i < t < i + 1$  com  $i \in \mathbb{Z}$ .

### 6.1.1 Sincronização

Para essa subseção apresentaremos simulações, levando em consideração os parâmetros descritos por Strogatz [27] e apresentados nesse trabalho na seção 4.2. Lembrando que a sincronização acontece quando temos:

$$\left| \frac{A}{\Omega} \right| > 1$$

#### Primeiro exemplo numérico - Caso Sincronizado

Para os primeiros exemplos numéricos utilizaremos os valores das frequências como  $\omega_1 = 10$  e  $\omega_2 = 2$  e para as forças de acoplamento os valores de  $A_1 = 5$  e  $A_2 = 4$ .

Gostaríamos de lembrar o leitor que, utilizando o sistema de equações (95) e (96) com  $n = 1$  obtemos o modelo de Strogatz e, para os valores de  $n = 0,9; 0,7; 0,5$  estamos no modelo de Strogatz generalizado.

As próximas figuras apresentam o resultado numérico com as escolhas de parâmetros acima, para os diferentes valores da ordem fracionária da derivada.

Observamos pelos gráficos apresentados na Figura 2, que após um certo ponto obtemos duas retas paralelas. A interpretação de tal resultado é a seguinte: Mesmo com a mudança dos dias o sistema permanece com as mesmas características o que sugere que o sistema está sincronizado a partir de um dado ponto no tempo.

As Figuras 3, 4, 5 representam a solução do modelo de Strogatz generalizado para  $n = 0,9; 0,7$  e  $0,5$ , respectivamente. Notamos que a diferença entre o gráfico da solução

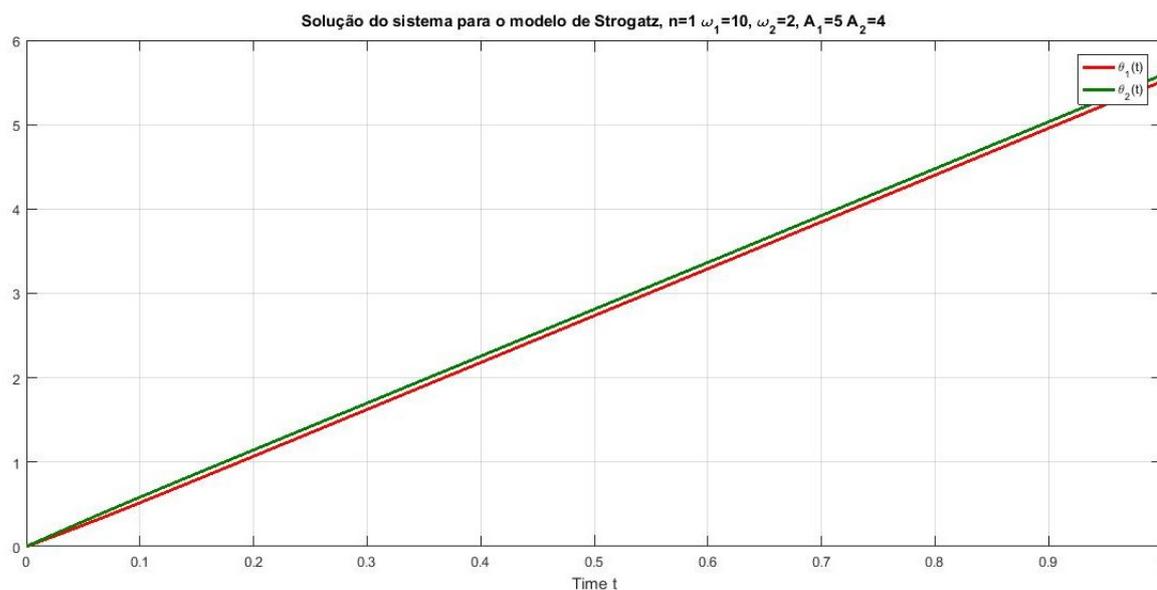


Figura 2: Caso de Strogatz  $n = 1$

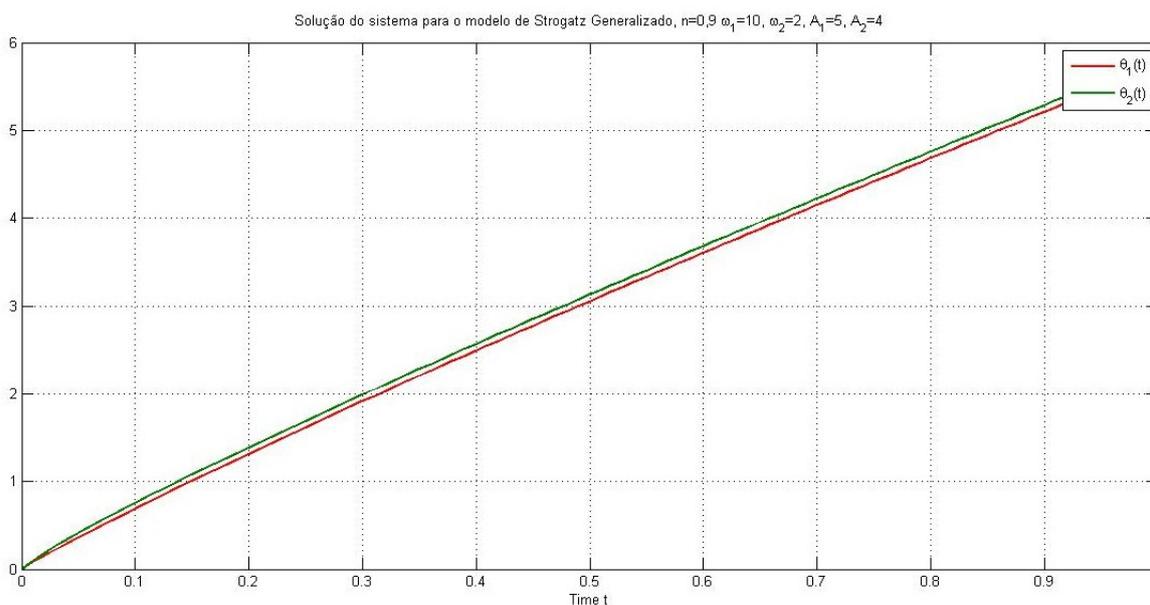


Figura 3: Caso de Strogatz Generalizado  $n = 0,9$

do modelo de Strogatz e do modelo de Strogatz generalizado para  $n = 0,9$  apresenta poucas diferenças. Este resultado já é esperado, haja visto o resultado de dependência contínua do índice das derivadas dado pelo Teorema 5.2.2. No entanto podemos observar que há uma pequena inclinação do gráfico próximo a origem, fazendo com que o ponto em que, a partir dele, os gráficos se tornam retas praticamente paralelas, fique mais próxima da origem. Suspeitamos que tal ponto seja o ponto de sincronização do modelo, embora não tenhamos evidências teóricas para garantir tal suposição. Observamos que este efeito é cada vez mais evidente, quanto menor o valor da derivada fracionária  $n$ , como é possível

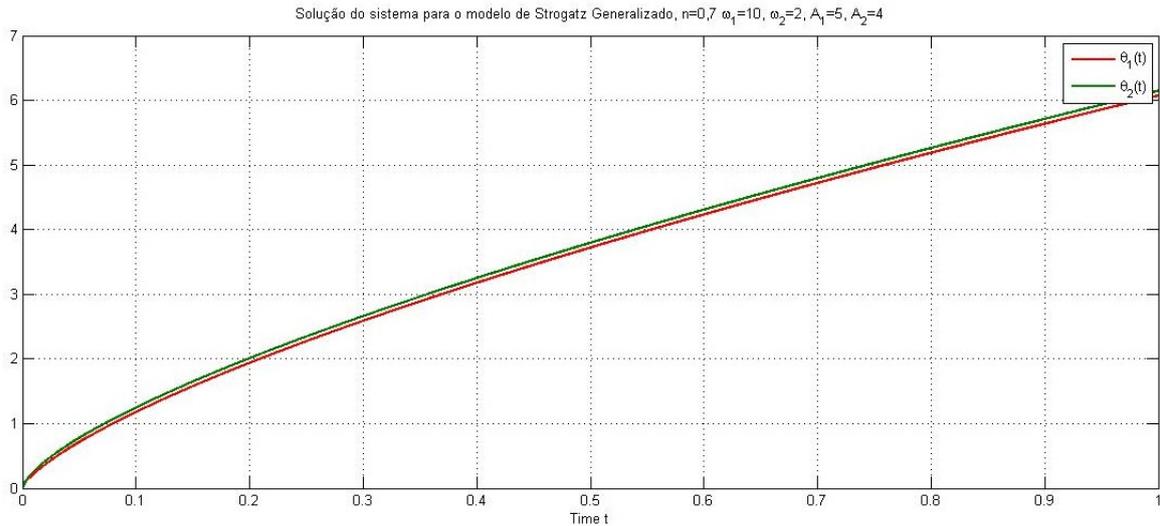


Figura 4: Caso de Strogatz Generalizado  $n = 0,7$

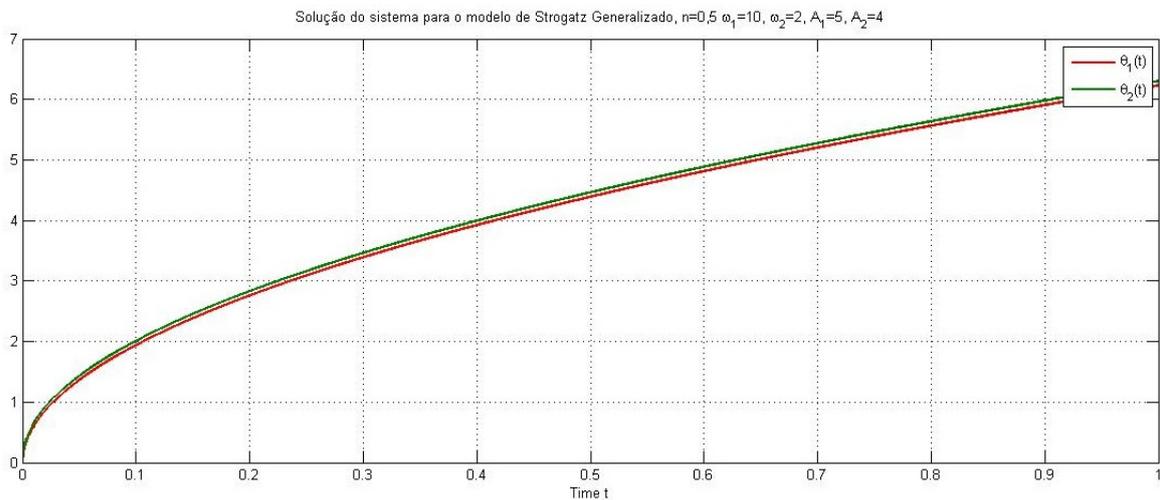


Figura 5: Caso de Strogatz Generalizado  $n = 0,5$

observar nas Figuras 4 e 5. Tais efeitos são compatíveis com os processos de memória para os quais o modelo de Strogatz generalizado é proposto. Em outras palavras, o adiantamento visualizado nos gráficos é compatível com modelos que utilizam memória tanto do ponto de vista teórico e também é o observado na prática, dando assim o suporte ao modelo proposto.

### Segundo exemplo numérico - Caso Sincronizado

Usamos os seguintes parâmetros para os segundos exemplos numéricos,  $\omega_1 = 3$ ,  $\omega_2 = 1$  e  $A_1 = 3$ ,  $A_2 = 1$ . A ordem de derivada aplicada foi  $n = 1; 0,9; 0,7$  e  $0,5$ , segue figuras 6, 7, 8 e 9 referentes a esses parâmetros.

Observamos a Figura 6 onde o  $n = 1$  temos a solução para o modelo de Strogatz, onde percebemos sincronização a partir de determinado ponto visto no gráfico. As Figuras 7, 8 e 9 representam a solução do modelo de Strogatz generalizado para  $n = 0,9; 0,7$  e  $0,5$ , respectivamente. Notamos que, para os parâmetros analisados neste momento, o modelo

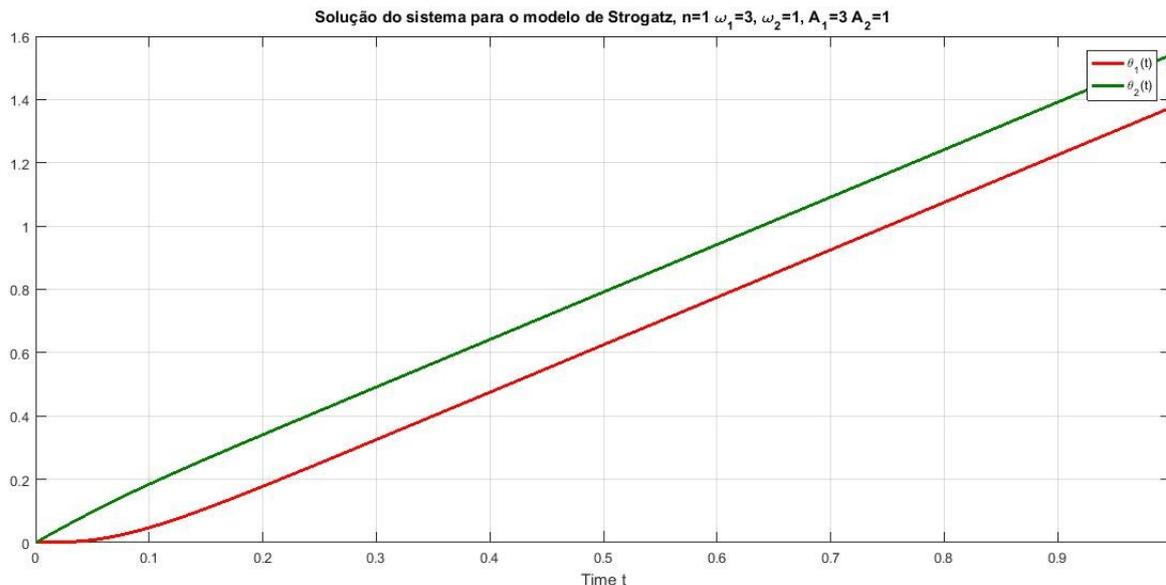


Figura 6: Caso de Strogatz  $n = 1$

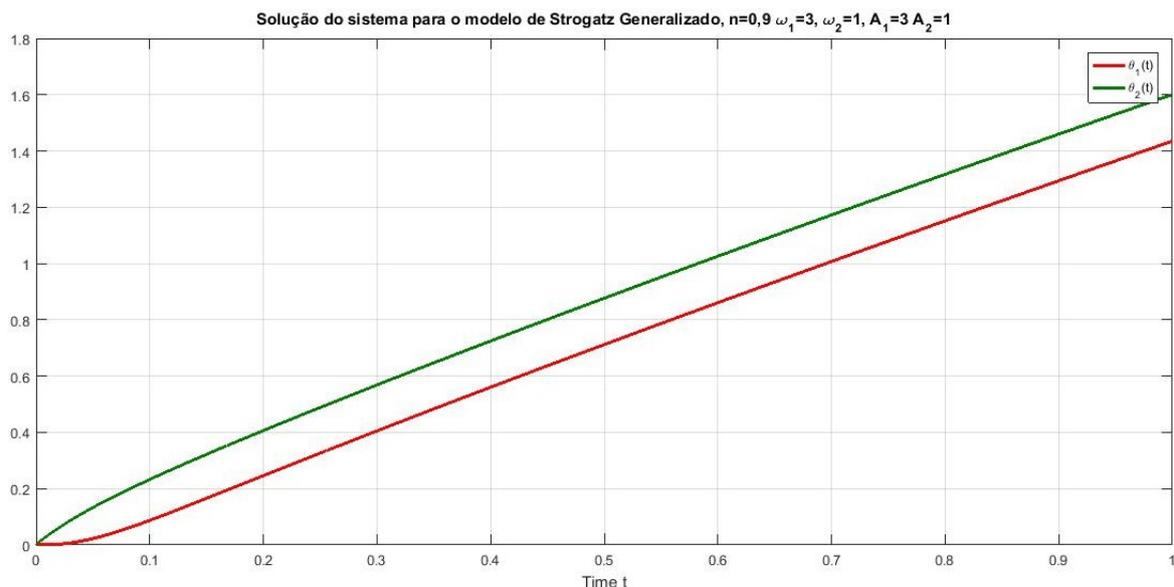


Figura 7: Caso de Strogatz Generalizado  $n = 0,9$

de Strogatz generalizado com  $n = 0,9$  apresenta uma pequena diferença em relação ao modelo de Strogatz, ou seja,  $n = 1$ . Observamos uma mudança considerável no comportamento dos osciladores, onde  $\theta_1$  e  $\theta_2$  já começam a apresentar uma pequena inclinação do gráfico próximo a origem, o que podemos visualizar com mais facilidade nas Figuras 8 e 9. Entendemos que o fato dos gráficos apresentarem inclinação próximo a origem representa o efeito de memória que está presente no modelo de Strogatz generalizado. Apresentando suporte ao modelo proposto.

### Terceiro exemplo numérico - Caso Sincronizado

Analisaremos os exemplos a seguir para os valores de parâmetros  $\omega_1 = 2$  e  $\omega_2 = 1$ , sendo a frequência intrínsecas e,  $A_1 = 10$  e  $A_2 = 2$  sendo as forças de acoplamento.

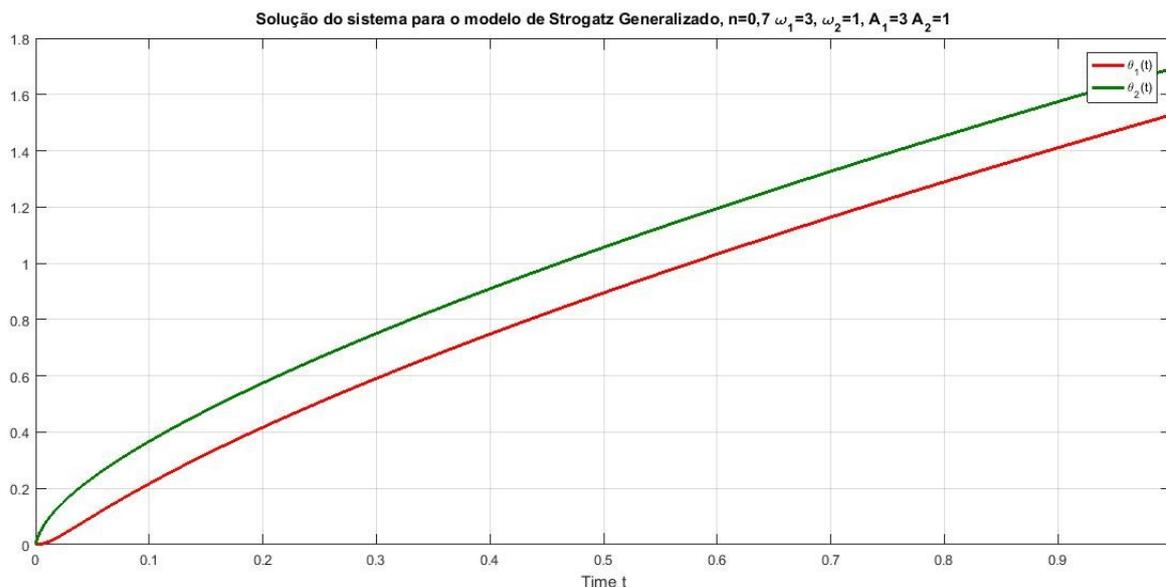


Figura 8: Caso de Strogatz Generalizado  $n = 0,7$

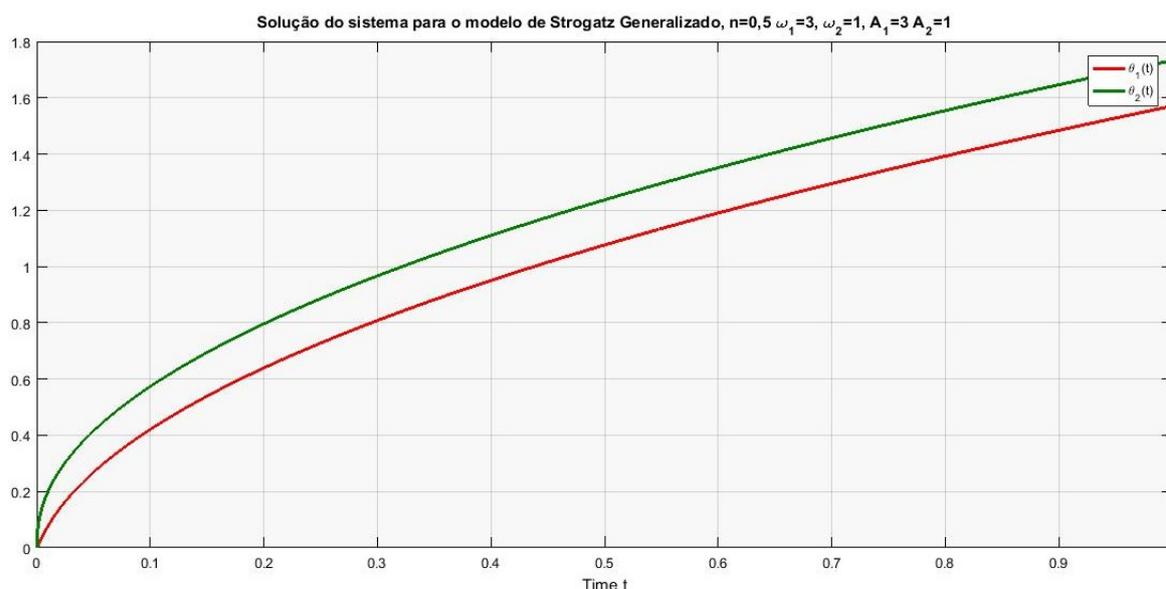


Figura 9: Caso de Strogatz Generalizado  $n = 0,5$

As próximas figuras apresentam o resultado numérico com as escolhas de parâmetros acima, para os diferentes valores da ordem fracionária da derivada.

Observamos nas Figura 10, 11, 12 e 13 que o oscilador  $\theta_1$  (oscilador da temperatura corporal), apresenta-se num primeiro momento negativo. Porém, Strogatz determina no Capítulo 4, equação (52), que no início do sono a temperatura corporal é igual a zero. Logo, lembre que estamos usando a temperatura base como zero, mas na verdade é  $36^\circ\text{C}$ , assim os gráficos devem ser transladados desta quantidade e a temperatura de fato não é negativa. Verificamos nas Figuras 12 e 13, para  $n = 0,7$  e  $n = 0,5$  mais uma vez a presença da inclinação próximo da origem, o que nos dá o suporte para constatar que o

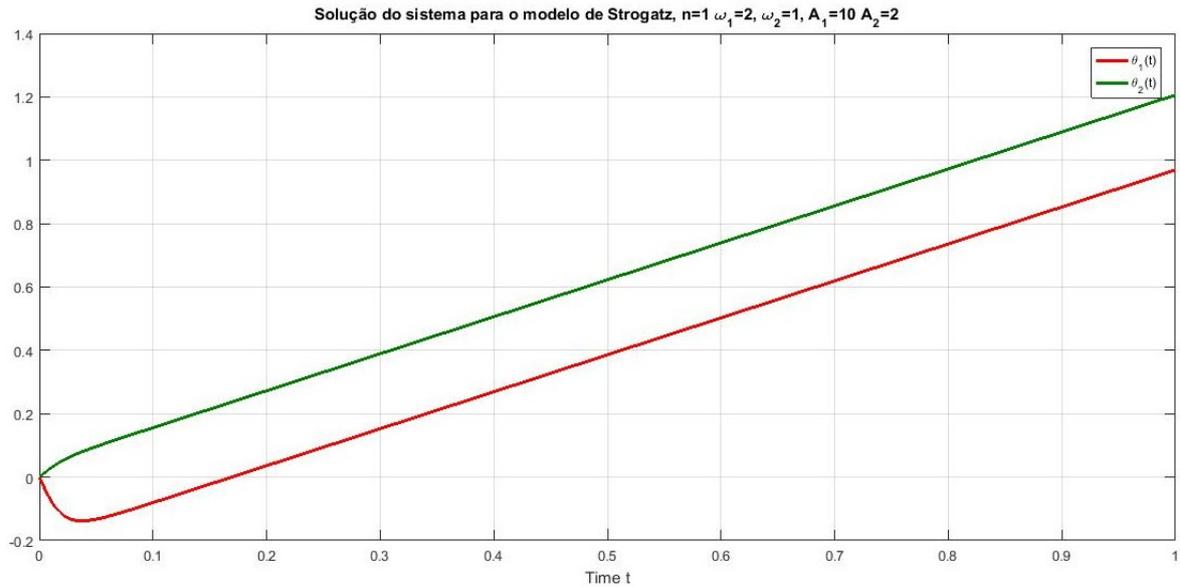


Figura 10: Caso de Strogatz  $n = 1$

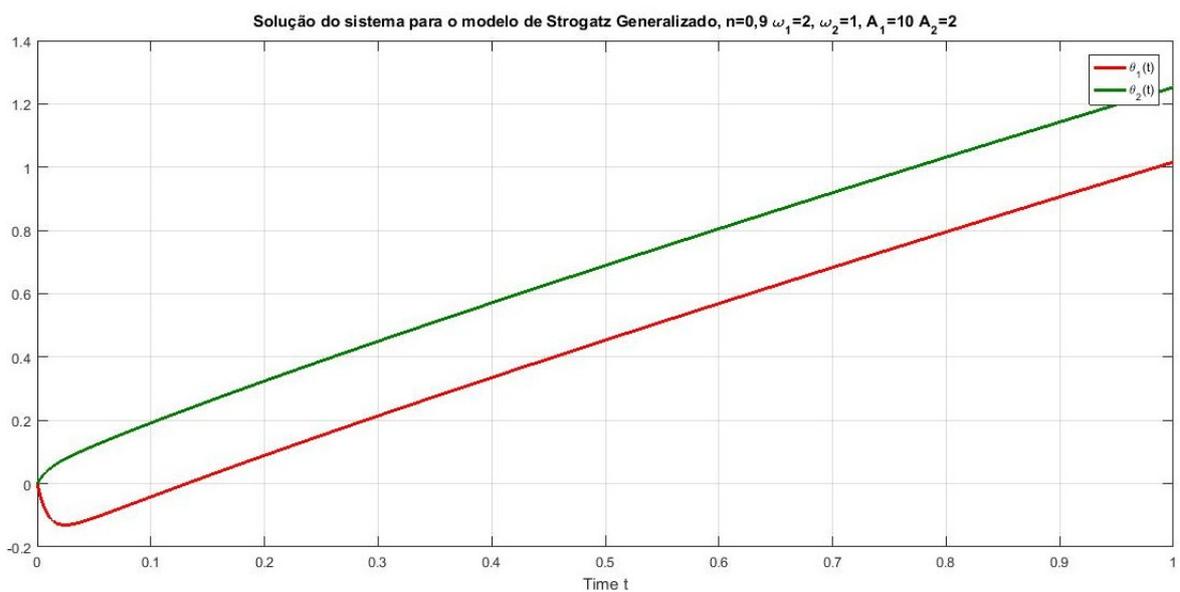


Figura 11: Caso de Strogatz Generalizado  $n = 0,9$

modelo proposto, ou seja, o modelo de Strogatz generalizado tem grande possibilidade de obter melhores resultados para dados reais, comparado ao modelo de Strogatz.

### 6.1.2 Dessincronização

Para essa subseção apresentaremos simulações, levando em consideração os parâmetros descritos por Strogatz [27] e apresentados nesse trabalho na seção 4.2. Lembrando que para obter dessincronização do ritmo circadiano temos:

$$\left| \frac{A}{\Omega} \right| < 1$$

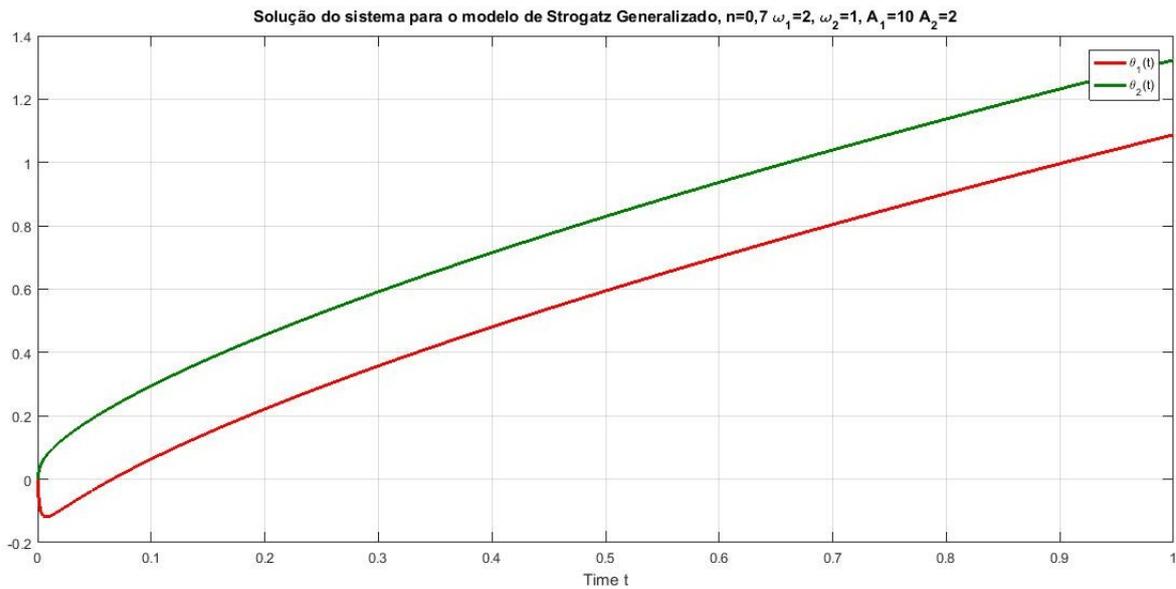


Figura 12: Caso de Strogatz Generalizado  $n = 0,7$

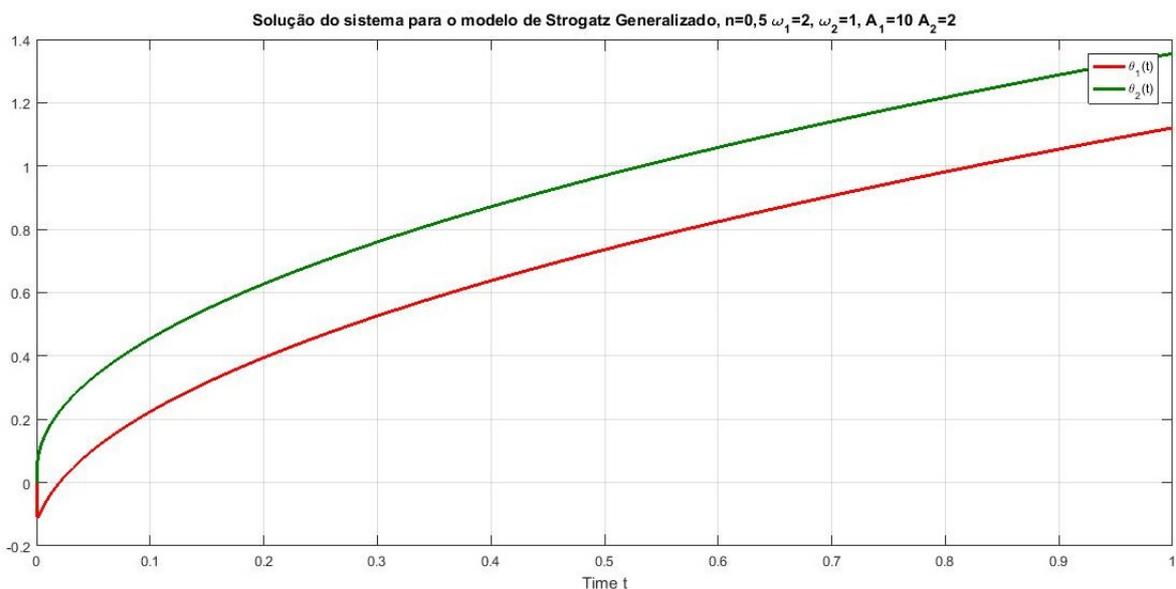


Figura 13: Caso de Strogatz Generalizado  $n = 0,5$

### Primeiro exemplo numérico - Caso Dessincronizado

Definimos os seguintes parâmetros  $\omega_1 = 10$  e  $\omega_2 = 1$ , sendo as frequências, e para as forças de acoplamento  $A_1 = 2$  e  $A_2 = 6$ .

Utilizando o sistema de equações (95) e (96) obtemos os primeiros exemplos numéricos para o caso dessincronização, onde  $n = 1$  obtemos o modelo de Strogatz e, para os valores de  $n = 0,9; 0,7; 0,5$  recaímos no modelo de Strogatz generalizado.

As próximas figuras apresentam o resultado numérico com as escolhas de parâmetros acima, para os diferentes valores da ordem fracionária da derivada.

Observamos pelos gráficos apresentados na Figura 14, que desde a origem, o gráfico

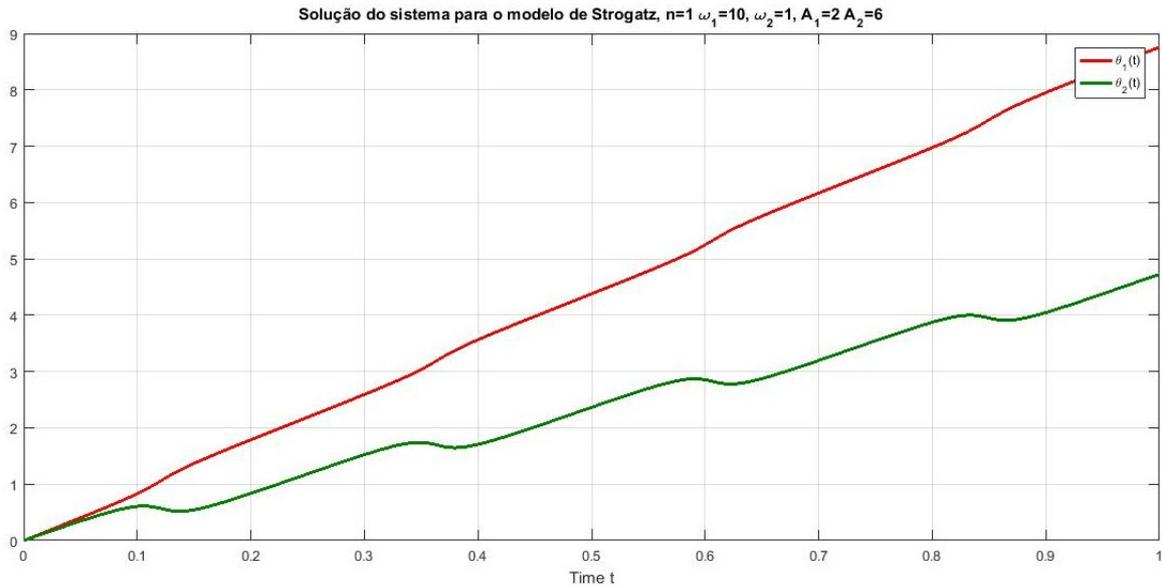


Figura 14: Caso dessincronizado Strogatz  $n = 1$

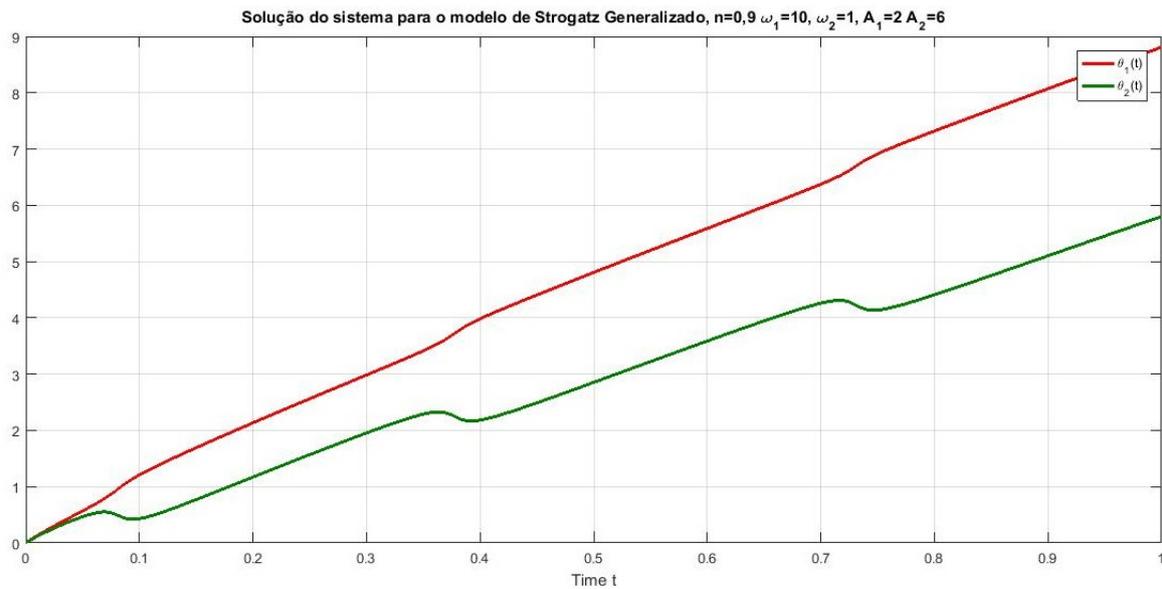


Figura 15: Caso dessincronizado de Strogatz Generalizado  $n = 0,9$

apresenta dessincronização. A interpretação de tal resultado é a seguinte: O comportamento dos osciladores não segue um padrão, este são diferentes, o que sugere que o sistema está dessincronizado interna.

As Figuras 15, 16, 17 representam a solução do modelo de Strogatz generalizado para  $n = 0,9$ ;  $0,7$  e  $0,5$ , respectivamente. Notamos que a diferença entre o gráfico da solução do modelo de Strogatz e do modelo de Strogatz generalizado para  $n = 0,9$  apresenta diferença considerável, onde os osciladores parecem procurar um padrão em determinado período. Observamos que este efeito é cada vez mais evidente, quanto menor o valor da derivada fracionária  $n$ , como é possível observar nas Figuras 16 e 17. Tais efeitos são

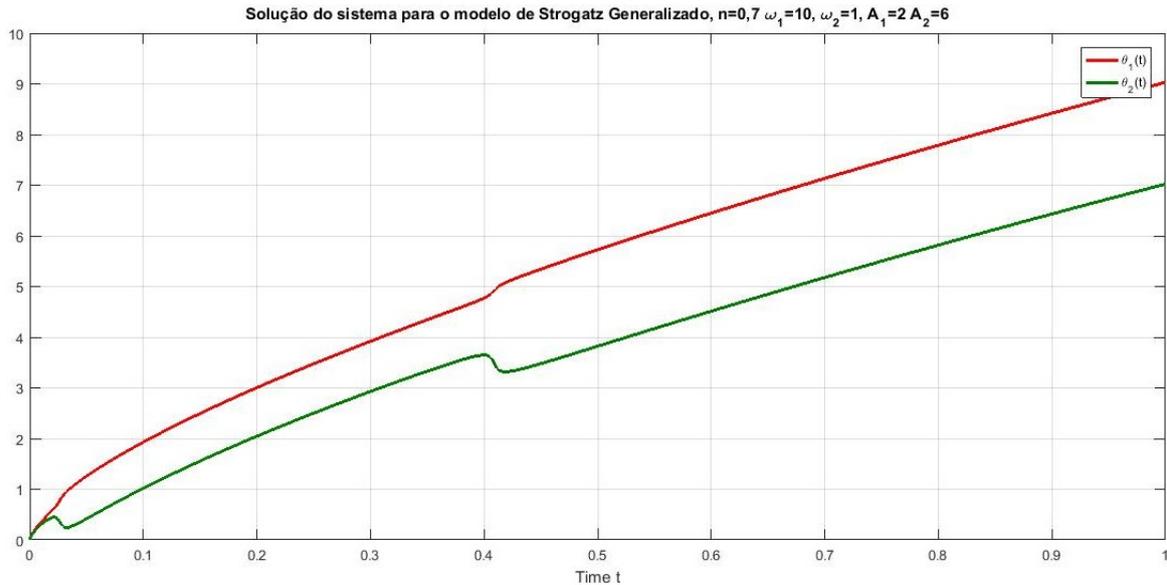


Figura 16: Caso dessincronizado de Strogatz Generalizado  $n = 0,7$

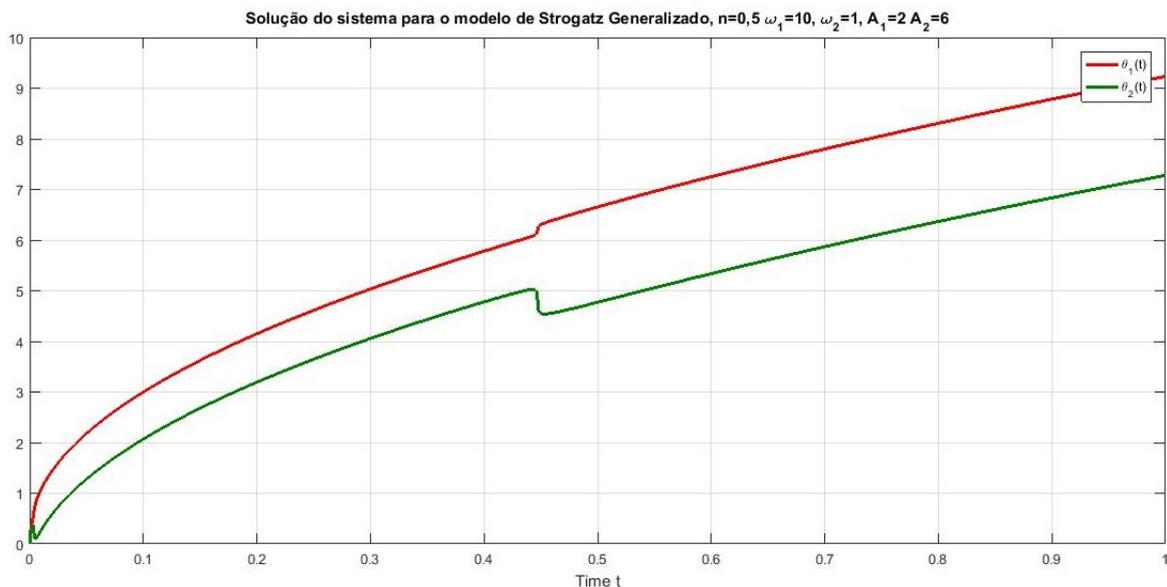


Figura 17: Caso dessincronizado de Strogatz Generalizado  $n = 0,5$

compatíveis com os processos de memória para os quais o modelo de Strogatz generalizado é proposto. Em outras palavras, esse padrão visualizado nos gráficos é compatível com modelos que utilizam memória tanto do ponto de vista teórico e também é o observado na prática, dando assim o suporte ao modelo proposto.

### Segundo exemplo numérico - Caso Dessincronizado

Para os exemplos numéricos a seguir, utilizaremos os valores das frequências como  $\omega_1 = 1$  e  $\omega_2 = 12$  e para as forças de acoplamento os valores de  $A_1 = 3$  e  $A_2 = 6$ . A ordem de derivada aplicada foi  $n = 1; 0,9; 0,7$  e  $0,5$ , segue figuras 6, 7, 8 e 9 referentes a esses parâmetros.

Observamos que para esses gráficos temos  $\omega_1 < \omega_2$ ,  $\theta_1$  e  $\theta_2$  trocam de posição. Ob-

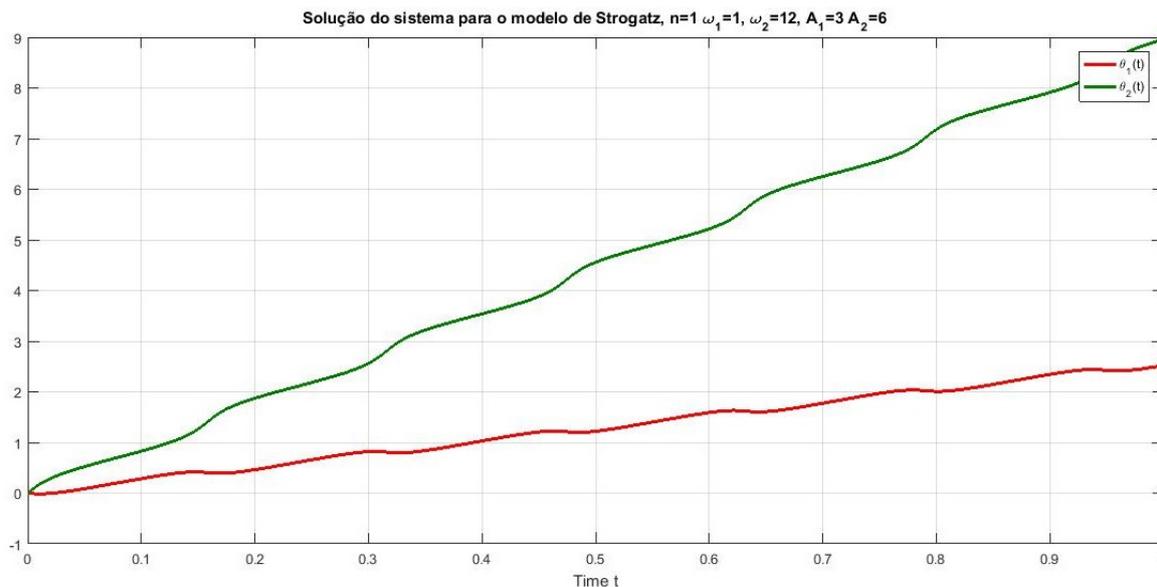


Figura 18: Caso dessincronizado de Strogatz  $n = 1$

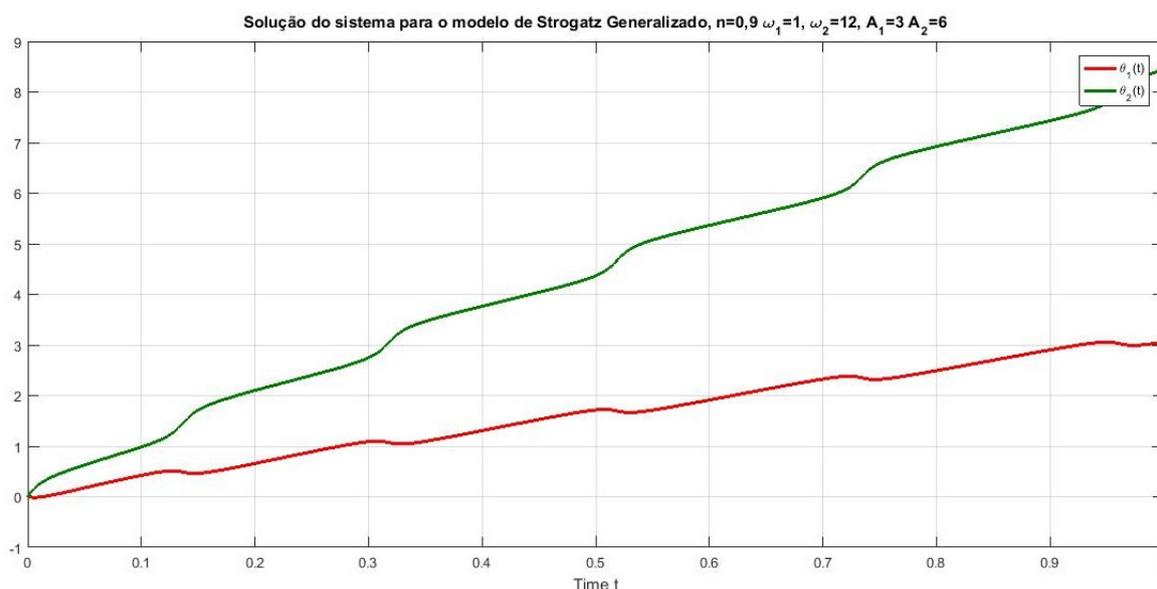


Figura 19: Caso dessincronizado de Strogatz Generalizado  $n = 0,9$

servamos tal troca nas Figuras 18, 19, 20 e 21, sendo que a dessincronização também se faz presente.

Comparando os gráficos das Figuras 18 e 19 notamos uma mudança no comportamento dos osciladores, para  $n = 0,9$  temos oscilações mais pontuais, o que não ocorre para  $n = 1$ .

As Figuras 20 e 21, nos chama a atenção pois, observamos que de tempo em tempo os gráficos apresentam procurar um padrão para sincronizar. No dia a dia percebemos que isso também acontece. Tal fato entendemos ser o manifesto dos efeitos da memória que o modelo de Strogatz generalizado apresenta.

### Terceiro exemplo numérico - Caso Dessincronizado

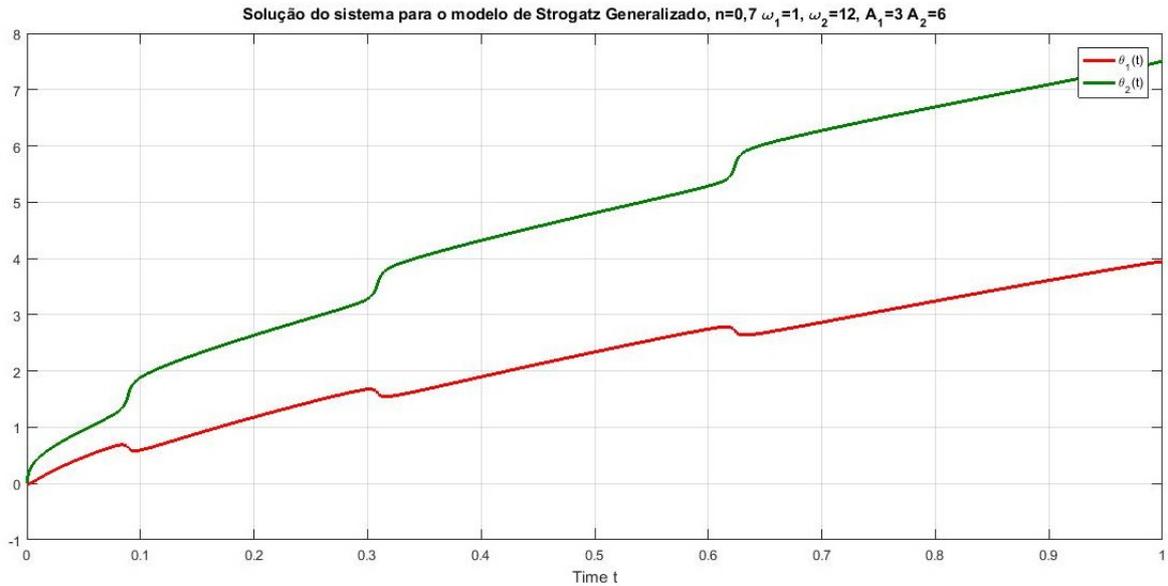


Figura 20: Caso dessincronizado de Strogatz Generalizado  $n = 0,7$

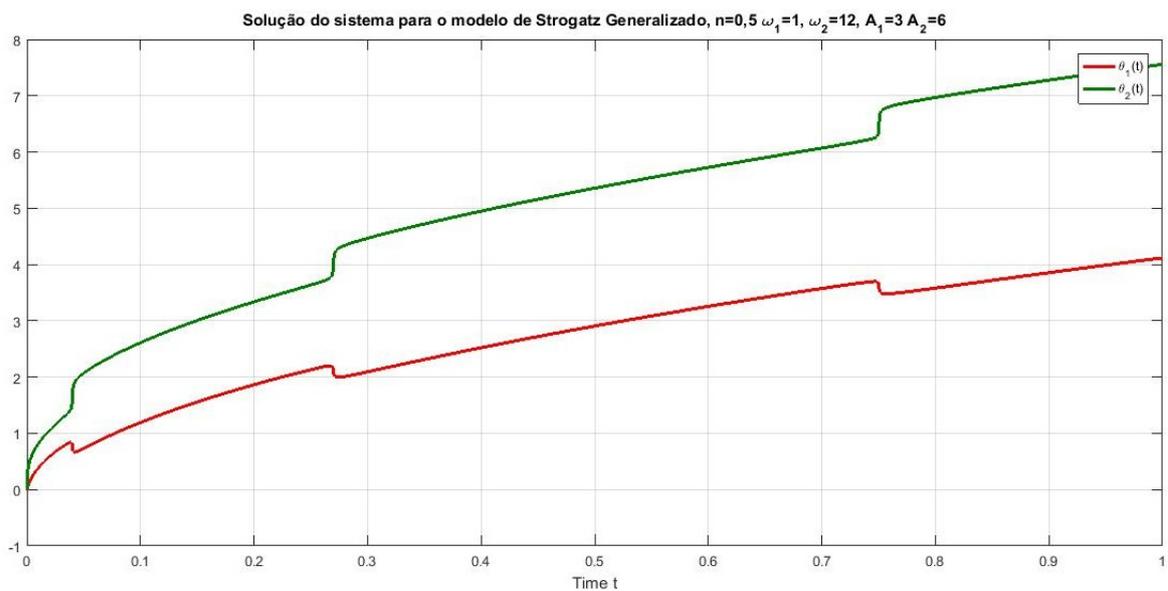


Figura 21: Caso dessincronizado de Strogatz Generalizado  $n = 0,5$

Analisaremos os exemplos a seguir para os valores de parâmetros  $\omega_1 = 5$  e  $\omega_2 = 1$ , sendo a frequência intrínsecas e,  $A_1 = 2$  e  $A_2 = 1$  sendo as forças de acoplamento. Lembramos o leitor que as análises são feitas para,  $n = 1$  modelo de Strogatz e  $n = 0,9$ ;  $0,7$  e  $0,5$ .

As próximas figuras apresentam o resultado numérico com as escolhas de parâmetros acima, para os diferentes valores da ordem fracionária da derivada.

As Figuras 23, 24 e 25 representam a solução do modelo de Strogatz generalizado para  $n = 0,9$ ;  $0,7$  e  $0,5$ , respectivamente. Notamos que a diferença entre o gráfico da solução do modelo de Strogatz  $n = 1$  mostrado através da Figura 22, e do modelo de Strogatz generalizado para  $n = 0,9$ , apresenta diferença considerável. Na Figura 23 os

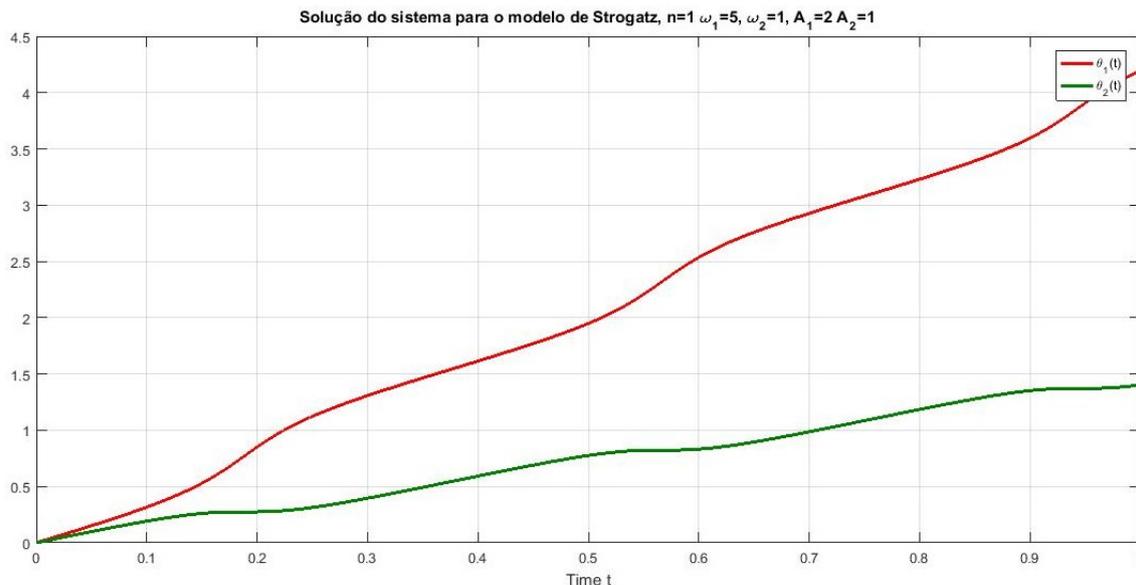


Figura 22: Caso dessincronizado de Strogatz  $n = 1$

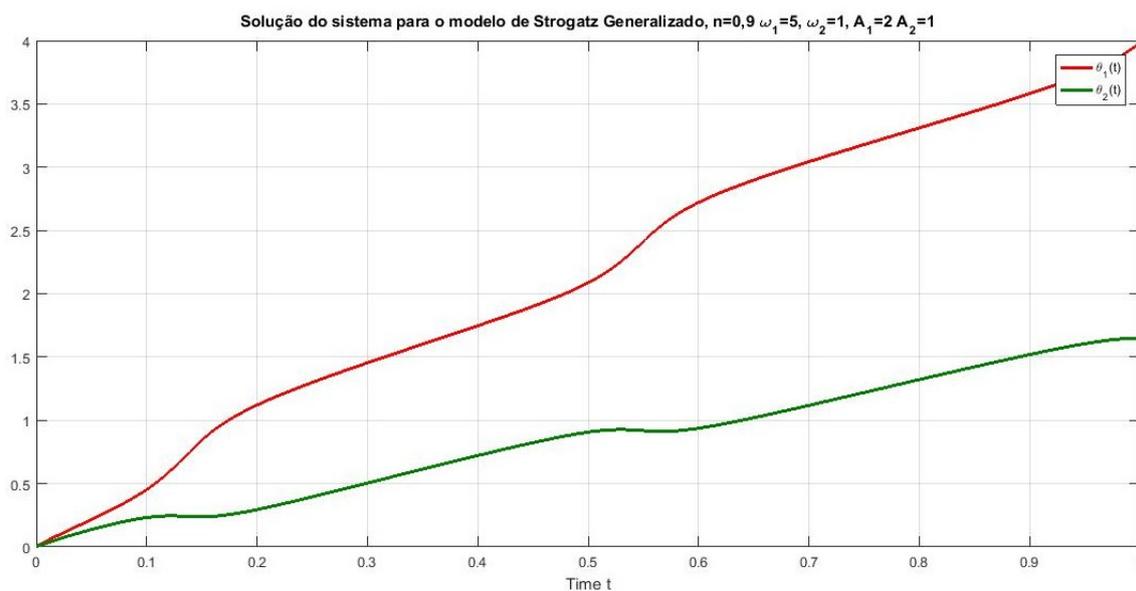


Figura 23: Caso dessincronizado de Strogatz Generalizado  $n = 0,9$

osciladores parecem procurar um padrão em determinado período. Observamos que este efeito é cada vez mais evidente, quanto menor o valor da derivada fracionária  $n$ , como é possível observar nas Figuras 24 e 25. Tais efeitos são compatíveis com os processos de memória para os quais o modelo de Strogatz generalizado é proposto. Em outras palavras, esse padrão visualizado nos gráficos é compatível com modelos que utilizam memória tanto do ponto de vista teórico e também é o observado na prática, dando assim o suporte ao modelo proposto.

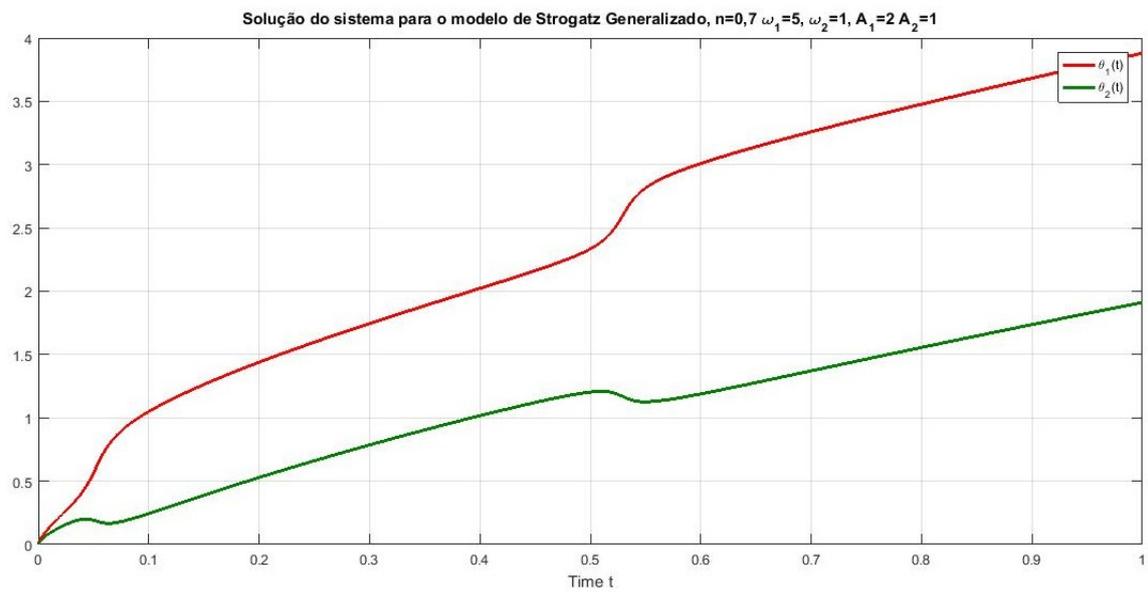


Figura 24: Caso dessincronizado de Strogatz Generalizado  $n = 0,7$

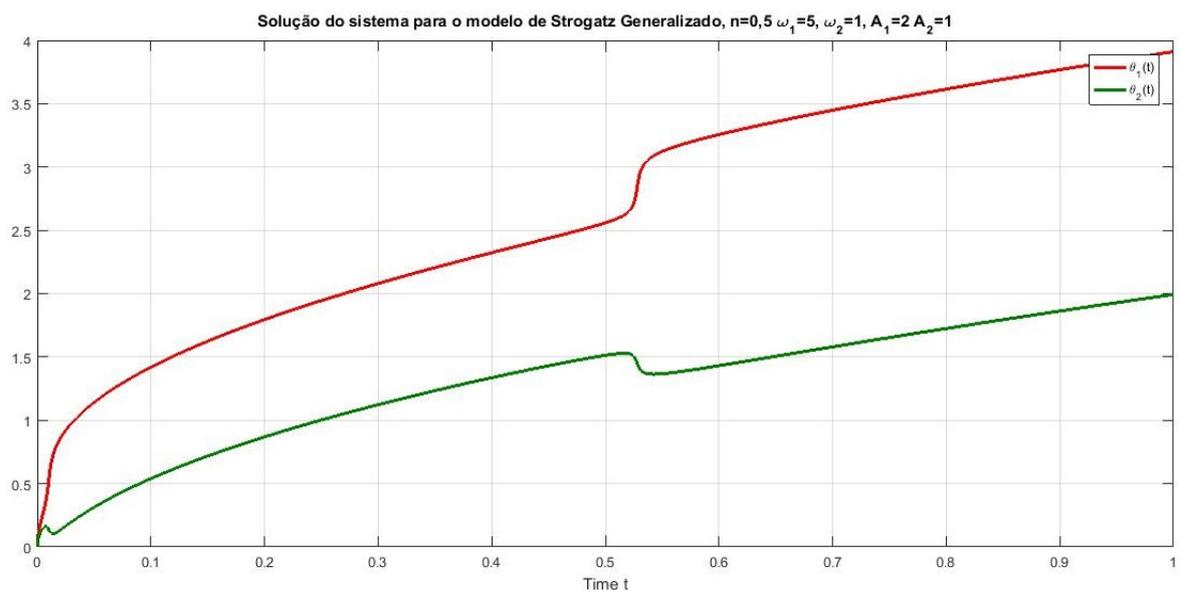


Figura 25: Caso dessincronizado de Strogatz Generalizado  $n = 0,5$

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho apresentamos um modelo bastante simples para o entendimento da dinâmica do ritmo circadiano, para o qual introduzimos as derivadas de ordem fracionária como uma alternativa para descrever efeitos de memória no sistema. A este modelo denominamos de Modelo de Strogatz Generalizado.

Embora tenhamos conseguido garantir resultados de boa colocação para o Modelo de Strogatz Generalizado, não foi possível, neste trabalho, obter de forma explícita a solução do sistema, nem mesmo os pontos de sincronização do modelo, em contraste ao modelo de Strogatz [27]. Tal fato deve-se em partes pelas complicações impostas pela definição de derivadas de ordem fracionária. Por outro lado, apresentamos resultados numéricos que descrevem de maneira bastante precisa a solução do problema (garantido pelos resultados de precisão do método numérico). Também percebemos que os resultados numéricos reproduzem os efeitos de memória esperados, fazendo com que os pontos de sincronização do modelos sejam sentidos de maneira adiantada quando comparados com os resultados do modelo de Strogatz.

### 7.0.1 Trabalhos Futuros

Para este trabalho ser considerado completo temos que contemplar diversos passos, como o fato de que há muito a ser entendido com relação ao modelo proposto, bem como em termos de comparação com dados reais. Destacamos abaixo os principais resultados a serem seguidos:

1. Obter resultados analíticos para a sincronização e dessincronização. O caminho que consideramos possível de ser percorrido é considerar o modelo como um modelo de Kuramoto e seguindo a mudança de variável feita em [14] com a utilização da função de Mittag-Leffler em substituição a função exponencial apresentada no problema referido trabalho.
2. Provar de maneira definitiva que a introdução de derivadas de ordem fracionária no modelo de Strogatz reproduz um modelo que é mais fidedigno aos dados observados. Este objetivo, por sua vez, depende de conseguirmos dados reais para fazer a

comparação. Uma maneira de conseguir tais dados é obter as mesmas fontes que as analisadas por [27].

3. Estudar o que acontece com o modelo se utilizarmos ordens das derivadas (fracionárias) diferentes para cada variável do sistema. Desta forma, podemos caracterizar, em princípio, diferentes efeitos de memória para cada uma das componentes do ritmo circadiano analisado.
4. Colaborar com pesquisadores da área da saúde no sentido de aprimorar o sistema, bem como para ter dados reais para a comparação dos efeitos desejados.

## REFERÊNCIAS

- [1] K.M. Almondes and J.F. Araújo. Padrão do ciclo sono-vigília e sua relação com a ansiedade em estudantes universitários. *Estudos de Psicologia*, 8:37–43, 2003.
- [2] M.H.V. Bruna. Relógios biológicos. <http://drauziovarella.com.br/drauzio/relogios-biologicos/>, Ago. 2013. Abril 05, 2013.
- [3] R.F. Camargo. *Cálculo Fracionário e Aplicações*. PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Abr. 2009.
- [4] A. A. Castro Junior. Curso de equações diferenciais ordinárias. *Instituto de Matemática Pura e Aplicada*, 2009.
- [5] J.J. Chiese. *Patrones del Ritmo de Atividade Motora como Expresión de la Plasticidad del Sistema Circadiano*. PhD thesis, Universitat de Barcelona, Barceona, Oct. 2005.
- [6] L. Debnath and D. Bhatta. *Integral Transforms and Their Applications*. Taylor e Francis Group, New York, 2007.
- [7] K. Diethelm. *The Analysis of Fractional Differential Equations*, volume 2004. Springer, Braunschweig, 2010.
- [8] C. I. Doering and A. O Lopes. *Equações Diferenciais Ordinárias*, volume 1. IMPA, Rio de Janeiro, 2008.
- [9] J. Fahey. How your brain tells time. *Forbes*, 2009.
- [10] R. Garrappa. Short tutorial: Solving fractional differential equations by matlab codes. *Department of Mathematics*, 2014.
- [11] S.S. Glaeser. Modelagem de sistemas biológicos: Ritmo circadiano. Master's thesis, Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, Mar. 2016.
- [12] A.V. Gomes. Transformadas integrais, modelagem fracionária e o sistema de lotka-volterra. Master's thesis, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, São Paulo, Fev. 2014.

- [13] H. L. Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo*, volume 1. LTC, São Paulo, 5 edição edition, 2001.
- [14] C. A.; Pilato S. F.; Moore-Ede M. C. Kronauer, R. E.; Czeisler and E. D. Weitzman. Mathematical model of the human circadian system with two interacting oscillators. *American Journal of Physiology*, 1982.
- [15] C. F. Lorenzo and T. T. Hartley. Initialization, conceptualization, and application in the generalized fractional calculus. *National Aeronautics and Space Administration*, 1998.
- [16] Boscolo R. A. Esteves A. M. Mello, M. T. and S. Tufik. O exercício físico e os aspectos psicológicos. *Revista Brasileira de Medicina do Esporte*, 11:203–207, 2005.
- [17] Santana M.G. Minati, A. and M. T. Mello. A influência dos ritmos circadianos no desempenho físico. *Revista Brasileira de Ciência de Movimento*, 14:75–86, 2006.
- [18] M.C. Moore-Ede and G.S. Richardson. Medical implications of shift-work. *Annual review of Medicine*, 36:607–617, 1985.
- [19] C.A. Moraes. Avaliação do acoplamento entre ritmos atividade-reposo e temperatura cutânea em uma amostra de pacientes deprimidos. Master's thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Jul. 2011.
- [20] M.J.C. Mugeiro. Qualidade do sono nos idosos. Master's thesis, Instituto Superior Politécnico de Viseu, Viseu, 2011.
- [21] K. B. Oldham and J. Spanier. *The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*. dover ed, Academic Press, 2 edition edition, 2006.
- [22] E. S. Oxley. Modelagem da bioconversão de glicerol em 1,3-propanodiol através de derivadas fracionárias. Master's thesis, Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, Mar. 2016.
- [23] T. C. Pimenv, A.; Kelly and A. Korobeinikov. Memory effects in population dynamics: Spread of infectious disease as a case study. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 7:206–226, 2012.
- [24] R Rossato. *Extensões da Equação de Difusão: Soluções*. PhD thesis, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, Dez 2011.
- [25] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*, volume 1. third edition, Madison, 3ª edition edition, 1976.

- [26] Cardoso A. Ferreira E. C. Franco-J. C. Santos, J. P. C. and J. C Souza Jr. Cálculo de ordem fracionária e aplicações. *Sigmae*, 1:18–32, 2012.
- [27] S. H. Strogatz. Human sleep and circadian rhythms: a simple model based on two coupled oscillators. *Journal of Mathematical Biology*, 25:327–347, 1987.
- [28] N. Varalta. Das transformadas integrais ao cálculo fracionário aplicado a equação logística. Master's thesis, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, São Paulo, Fev. 2014.
- [29] Takahashi J. S. Vitaterna, M. S. and F. W. Turek. Overview of circadian rhythms. *Alcohol Research and Health*, 25:85–93, 2001.
- [30] D. G. Zill and M. R. Cullen. *Equações Diferenciais*, volume 1. Pearson Education, São Paulo, 3<sup>a</sup> edição edition, 2000.

## ApêndiceA TEOREMAS FUNDAMENTAIS

O apêndice servirá para descrever definições, teoremas e alguns cálculos encontrados, sendo que primeiro será definido a função gama, função de Mittag-Leffler, teoremas do ponto fixo e o teorema do valor intermediário. Logo após será descrito a Função de Borel e Lebesgue mensuráveis e o cálculo do operador Jacobiano para problema estudado.

### A.1 Função Gama

Função gama ou integral de Euler do segundo tipo, aqui denotado por  $\Gamma(\theta)$ , segundo [28], é indiscutivelmente a função básica do cálculo fracionário, considerado uma generalização do conceito do fatorial.

**Definição A.1.1.** A função  $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow R$ , é definida por

$$\Gamma(\theta) := \int_0^{\infty} t^{\theta-1} e^{-t} dt. \quad (101)$$

**Exemplo A.1.1.** Considerando  $\theta = 1$ , obtêm-se:

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \lim_{z \rightarrow \infty} \int_0^z e^{-t} dt = \lim_{z \rightarrow \infty} [-e^{-t}]_0^z = \lim_{z \rightarrow \infty} (1 - e^{-z}) = 1. \quad (102)$$

**Teorema A.1.2.** Se  $\theta \in N$ , então,  $\theta\Gamma(\theta) = \Gamma(\theta + 1)$ .

**Demonstração:** A prova usa indução matemática. Onde  $(\theta = 1)$  temos  $\Gamma(1) = 0! = 1$ , que é verdade por A.1.1. Usando a equação funcional e a hipótese de indução:

$$\Gamma(\theta + 1) = \theta\Gamma(\theta) = \theta(\theta - 1)! = \theta!$$

Agora será definido alguns valores da função gama, usando a Definição A.1.1 e Teorema A.1.2. É sabido que  $\Gamma(1) = 1$ , consegue-se assim calcular o  $\Gamma(2)$  e  $\Gamma(3)$  utilizando a primeira propriedade, temos:

$$\Gamma(2) = \Gamma(1 + 1) = 1\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(3) = \Gamma(2 + 1) = 2\Gamma(2) = 2$$

$$\Gamma(4) = \Gamma(3 + 1) = 3\Gamma(3) = 3$$

$$\Gamma(5) = \Gamma(4 + 1) = 4\Gamma(4) = 4$$

$$\Gamma(6) = \Gamma(5 + 1) = 5\Gamma(5) = 5$$

E assim sucessivamente para os próximos valores.

Para encontrar valores fracionários, vamos primeiro calcular  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$  onde segundo [12] obtemo da seguinte forma:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\left(\frac{1}{2}-1\right)} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt.$$

Substituindo

$$t = \theta^2 \rightarrow dt = 2\theta d\theta$$

temos:

$$\int_0^{\infty} e^{-\theta^2} \theta^{-1} 2\theta d\theta = 2 \int_0^{\infty} e^{-\theta^2} d\theta$$

$$\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-\theta^2} d\theta.$$

Seja,

$$I = \int_0^{\infty} e^{-\vartheta^2} d\vartheta = \int_0^{\infty} e^{-\theta^2} d\theta$$

então

$$I^2 = \int_0^{\infty} e^{-\vartheta^2} d\vartheta = \int_0^{\infty} e^{-\theta^2} d\theta = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\vartheta^2} e^{-\theta^2} d\theta d\vartheta = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(\vartheta^2+\theta^2)} d\theta d\vartheta.$$

Utilizando coordenadas polares definimos que

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(y^2+x^2)} d\theta d\vartheta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr d\alpha.$$

Substituindo  $u = r^2$  derivando temos  $du = 2r dr$ , então

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} \frac{1}{2} e^{-u} du d\alpha &= \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( -\frac{1}{2} e^{-u} \right) \Big|_0^{\infty} d\alpha &= \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{2} \right) d\alpha &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Sabe-se que  $I^2 = \frac{\pi}{4}$ , podemos concluir que  $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  e que  $\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ , então

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ . Apartir desse resultado podemos encontrar outros valores da função gama, como:

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \\ \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{5}{2} + 1\right) = \frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}\end{aligned}$$

Para encontrar outros valores fracionários da função gama, será apresentado outro método segundo [21].

Temos para  $\theta > 0$ :

$$\left(\frac{1}{2} + n\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!} \quad (103)$$

Para  $\theta < 0$ , temos:

$$\left(\frac{1}{2} - n\right) = \frac{(-4)^n n! \sqrt{\pi}}{(2n)!} \quad (104)$$

Utilizando a fórmula que foi enunciada logo acima, obtemos os seguintes valores:

$$\begin{aligned}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{[-4]^1 \cdot 1! \sqrt{\pi}}{(2 \cdot 1)!} = -2\sqrt{\pi}; \\ \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{1}{2} - 2\right) = \frac{[-4]^2 \cdot 2! \sqrt{\pi}}{(2 \cdot 2)!} = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}; \\ \Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{1}{2} - 3\right) = \frac{[-4]^3 \cdot 3! \sqrt{\pi}}{(2 \cdot 3)!} = \frac{-8\sqrt{\pi}}{15}; \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{1}{2} + 0\right) = \frac{2 \cdot (0)! \sqrt{\pi}}{(4^0)0!} = \sqrt{\pi}; \\ \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{2 \cdot (1)! \sqrt{\pi}}{(4^1)1!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2};\end{aligned}$$

## A.2 Função Mittag-Leffler

Para o contexto do conteúdo dessa dissertação, a função Mittag-Leffler que será apresentada através de conceitos e definições, é de fundamental importância.

Tabela 1: Tabela de valores da função gama

$\theta$ é número inteiro	$\theta$ é número fracionário
$\Gamma(-1) = \infty$	$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}$
$\Gamma(0) = \infty$	$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$
$\Gamma(1) = 1$	$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
$\Gamma(2) = 1$	$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$
$\Gamma(3) = 2$	$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$
$\Gamma(4) = 6$	$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}$

**Definição A.2.1.** Seja  $n > 0$ , a função  $E_n$  definido como

$$E_n(z) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(jn + 1)}$$

sempre que a série converge é chamada função de Mittag-Leffler com ordem  $n$ .

**Definição A.2.2.** Seja  $n_1, n_2 > 0$ , a função  $E_{n_1, n_2}$  é definida

$$E_{n_1, n_2}(z) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(jn_1 + n_2)}$$

sempre que a série converge é chamada função de Mittag-Leffler com dois parâmetros  $n_1$  e  $n_2$ .

**Teorema A.2.1.** Sejam  $n_1, n_2 > 0$  e  $\theta \in C$ . Então,

$$E_{n_1, n_2}(\theta) = \theta E_{n_1, n_1 + n_2}(\theta) + \frac{1}{\Gamma(n_2)}.$$

**Demonstração:** Para maior detalhes podem consultar ([7], teorema 4.2 pág. 69).

**Teorema A.2.2.** Sejam  $n > 0$ ,  $\lambda = 0 \in R$  e  $\theta(t) := E_n(\lambda t^n)$ ,  $t \geq 0$ . Então,

$$D_{*0}^n \theta(t) = \lambda \theta(t).$$

**Demonstração:** Se for considerado  $\lambda = 0$ , note que  $\theta(t) = E_n(0) = 1$ . Portanto  $D_{*0}^n \theta(t) = 0 = \lambda \theta(t)$  conforme o necessário. Por outro lado  $p_k(\theta) := \theta k$ :

$$\begin{aligned} D_{*0}^n \theta(t) &= D_{*0}^n \left[ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda p_n)^j}{\Gamma(1 + jn)} \right] (t) \\ &= J_0^{m-n} D^m \left[ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j p_{nj}}{\Gamma(1 + jn)} \right] (t) = J_0^{m-n} \left[ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j D^m p_{nj}}{\Gamma(1 + jn)} \right] (t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= J_0^{m-n} \left[ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j D^m p_{nj}}{\Gamma(1+jn)} \right] (t) = J_0^{m-n} \left[ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j p_{nj-n}}{\Gamma(1+jn-m)} \right] (t) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j J_0^{m-n} p_{nj-m}}{\Gamma(1+jn-m)} (t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j p_{nj-n}}{\Gamma(1+jn-n)} (t) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j t^{nj-n}}{\Gamma(1+jn-n)} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j t^{nj}}{\Gamma(1+jn)} \\
&= \lambda \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda t^n)^j}{\Gamma(1+jn)} = \lambda \theta(t).
\end{aligned}$$

**Teorema A.2.3.** *Sejam  $n > 0$ ,  $m = \lceil n \rceil$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ . A solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} D_{*0}^n \theta(t) = \lambda \theta(t), \\ \theta(0) = \theta_0, \quad \theta^{(k)}(0) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, m-1). \end{cases} \quad (105)$$

é dado por

$$\theta(t) = \theta_0 E_n(\lambda t^n), \quad t \geq 0.$$

**Demonstração:** *Para maiores informações, pode ser consultado a demonstração em ([7], teorema 6.11 pág. 101).*

### A.3 Teoremas do ponto fixo e teorema do valor médio

Neste espaço será apresentado os Teoremas e suas demonstrações.

**Teorema A.3.1.** *(Teorema do ponto fixo Weissinger) Seja  $(U, d)$  um espaço métrico não-vazio e  $\alpha_j \geq 0$ , para todo  $j \in \mathbb{N}_0$ , tal que  $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j$  converge. Se  $B : U \rightarrow U$  satisfaz a desigualdade*

$$d(B^j u, B_v^j) \leq \alpha_j d(u, v) \quad (106)$$

onde  $j \in \mathbb{N}$  e  $u, v \in U$ . Então,  $B$  está no ponto fixo  $u^*$ . Além disso, para qualquer  $u_0 \in U$  a sequência  $(B^j u_0)_j^{\infty} = 1$  converge para o ponto fixo  $u^*$ .

**Teorema A.3.2.** *(Teorema de ponto fixo Schauder's) Seja  $(E, d)$  um espaço métrico,  $U$  um subconjunto convexo, fechado em  $E$  e  $B : U \rightarrow U$  tal que o conjunto  $\{Bu : u \in U\}$  é relativamente compacta em  $E$ . Então  $B$  tem pelo menos um ponto fixo.*

A partir deste contexto, recorda-se da seguinte definição:

**Definição A.3.1.** *Seja  $(E, d)$  um espaço métrico e  $F \subseteq E$ . O subconjunto  $F$  é relativamente compacto em  $E$  se o subconjunto  $F$  é fechado.*

**Teorema A.3.3.** (Arzelá-Ascoli) *Seja  $F \subseteq A[a, b]$  para  $c > b$  e assumindo a definição da norma de Chebyshev, então temos que  $F$  é relativamente compacto em  $A([a, b])$ . Para cada  $\varepsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$  tal que para todo  $f \in F$  e  $\theta, \theta^* \in [a, b]$  com  $|\theta - \theta^*| < \delta$  temos  $|f(\theta) - f(\theta^*)| < \varepsilon$  e é uniformemente limitada, ou seja,  $\|f\|_\infty \leq A$  ta que  $f \in F$ .*

**Teorema A.3.4.** (Teorema do valor médio) *Seja  $f$  uma função contínua definida num intervalo fechado  $[b, c]$  e diferenciável em  $[b, c]$  existe algum ponto  $a$  em  $[b, c]$  tal que:*

$$f'(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

**Demonstração:** *Para maiores informações, consultar([13], teorema 4.6 pág. 69).*

## A.4 Função de Borel e Lebesgue mensuráveis

**Definição A.4.1.** (Função mensurável) *Seja  $F : \Theta \rightarrow \Xi$  uma função, onde  $(\Theta, \Upsilon)$  e  $(\Xi, \Pi)$  são espaços mensuráveis. Uma função é dita  $(\Upsilon, \Pi)$ -mensurável se  $f^{-1}(E) \in \Upsilon$ ,  $\forall E \in \Pi$ , isto é, se a pré-imagem de todo conjunto  $\Pi$ -mensurável é  $\Upsilon$ -mensurável.*

**Função de Borel** Observa-se um importante caso particular para definição acima acontece quando  $\Pi$  é tomado como sendo a álgebra de Borel, neste caso (se for definido como a menor  $\sigma$ -álgebra contendo a topologia), a seguinte definição é equivalente: Seja  $f : \Theta \rightarrow \Xi$ , uma função onde,  $(\Theta, \Upsilon)$ , é um espaço mensurável e  $(\Xi, \Pi)$ , é um espaço topológico. Uma função é dita Borel- $\Upsilon$ -mensurável se:

$$f^{-1}(O) \in \Upsilon, \forall O \in \Pi.$$

**Função Borel-Lebesgue mensurável** Uma função é dita Borel-Lebesgue mensurável quando  $\Upsilon = \Lambda$ , a  $\sigma$ -álgebra de Lebesgue e  $\Pi = \Psi$ , a álgebra de Borel. Diversas vezes, uma função Borel-Lebesgue mensurável é dita apenas Lebesgue-mensurável ou simplesmente mensurável. **Função reais Borel-Lebesgue mensurável** Costuma-se representar uma função  $f : D \subset R^m \rightarrow R^n$ , pelas suas componente no contra-domínio:

$$f(\theta) = (f^1(\theta), f^2(\theta), \dots, f^n(\theta)).$$

Pode-se mostrar que  $f : D \rightarrow R^n$ , é Borel-Lebesgue-mensurável se e somente se cada uma das  $f^k : D \rightarrow R$ , é Borel-Lebesgue -mensurável.

**Observação A.4.1.** *Todas as funções contínuas são funções de Borel, mas nem todas as funções de Borel são funções contínuas.*

**Observação A.4.2.** *Todas funções contínuas, funções monótonas, funções semicontínuas, funções integráveis de Riemann e funções de variação limitada são funções de Lebesgue mensuráveis.*

**Propriedade** Seja  $f : D \rightarrow R^n$  e  $g : D \rightarrow R^n$ , função Borel-Lebesgue-mensuráveis onde  $D$  é um conjunto mensurável de  $R^m$ , e  $\alpha$  e  $\beta$  reais, então:

- $\alpha f(\theta) + \beta g(\theta)$ , é mensurável;
- $f(\theta)g(\theta) := (f^1(\theta)g^1(\theta), f^2(\theta)g^2(\theta), \dots, f^n(\theta)g^n(\theta))$  é mensurável;
- $f(\theta + \lambda)$ , é mensurável para todo  $\lambda \in R^m$ ;
- Se  $h : D \rightarrow R^n$  e  $\mu\{f(\theta) = h(x)\}$ , então  $h$ , é mensurável;
- Se  $f_n : D \rightarrow R$  são mensuráveis e convergem quase-sempre então o limite é uma função mensurável.

## A.5 Cálculo Jacobiano

Neste apêndice utilizaremos o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que a função  $f$  definida pela equação 98 é localmente Lipschitz contínua em  $\mathcal{W}$  com relação a  $u$ , conforme foi usado no Teorema 5.2.2, e garantir a existência de  $\Theta \in ]0, 1[$  tal que  $\|f(t, u_1) - f(t, u_2)\| \leq \|J(u_2 - \Theta(u_1 - u_2))\| \|u_1 - u_2\| \forall u_1, u_2 \in C([0, T], R^2)$ .

Completando a demonstração do Teorema 5.2.2, mostraremos que o operador Jacobiano é limitado em  $\mathcal{W}$ . Assim, obtemos o Jacobiano da seguinte forma:

$$Jf(t, u_1(t) + \Theta(u_2(t) - u_1(t))) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial f}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial \theta_2} \end{bmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial \theta_1} &= -2\pi A_1 \sin(2\pi(\theta_2 - \theta_1)) \\ \frac{\partial f}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial \theta_2} &= -2\pi A_1 \sin(2\pi(\theta_2 - \theta_1)) \\ \frac{\partial f}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial \theta_1} &= 2\pi A_2 \sin(2\pi(\theta_1 - \theta_2)) \\ \frac{\partial f}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial \theta_2} &= 2\pi A_2 \sin(2\pi(\theta_1 - \theta_2)) \end{aligned}$$

Se observarmos cada coordenada do operador Jacobiano percebemos que cada coordenada é contínua. Como  $\mathcal{W} \subset R^2$  é compacto, segue que o operador Jacobiano é limitado. Portanto é possível mostrarmos que existe  $L = \max_{u \in \mathcal{W}} \|Jf(u_1(t, v) + \Theta(u_2(t, v)))\|$ .

Em particular

$$\begin{aligned} \max_{u \in \mathcal{W}} \|Jf\| &= \max\{|-2\pi A_1 \sin(2\pi(\theta_2 - \theta_1))|, |2\pi A_2 \sin(2\pi(\theta_1 - \theta_2))|\} \\ &\leq 2\pi \max\{|A_1 \sin(2\pi(\theta_2 - \theta_1))|, |A_2 \sin(2\pi(\theta_1 - \theta_2))|\} \end{aligned}$$

como  $|\sin(x)| \leq 1$  então:

$$\max_{u \in \mathcal{W}} \leq 2\pi \max\{|A_1|, |A_2|\}$$

ainda podemos dizer que, conforme [27] no apêndice A, temos  $A_1 < A_2$ , logo:

$$\max_{u \in \mathcal{W}} = 2\pi |A_2| = L$$