

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

**ANÁLISE COMPARATIVA DO DESEMPENHO NUMÉRICO DE TÉCNICAS DE  
INVERSÃO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE APLICADOS A UM PROBLEMA DE  
TRANSPORTE DE SOLUTO EM MEIO POROSO**

por

Cristiana Pilatti

Dissertação para obtenção do Título de  
Mestre em Modelagem Computacional

Profa. Dra. Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez  
Orientadora

Prof. Dr. João Francisco Prolo Filho  
Coorientador

Rio Grande, fevereiro de 2019.

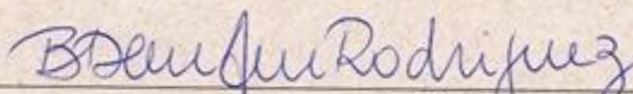
Cristiana Pilatti

“ Análise comparativa do desempenho numérico de técnicas de inversão da transformada de Laplace aplicados a um problema de transporte de soluto em meio poroso ”

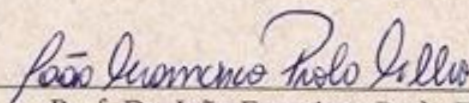
Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal do Rio Grande - FURG, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre. Área concentração: Modelagem Computacional.

Aprovada em

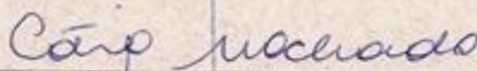
BANCA EXAMINADORA



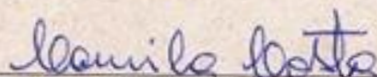
Profª. Drª. Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez  
Orientadora – FURG



Prof. Dr. João Francisco Prolo Filho  
Coorientador – FURG



Profª. Drª. Catia Maria dos Santos Machado  
FURG



Profª. Drª. Camila Pinto da Costa  
UFPEL

Rio Grande - RS  
2019

### Ficha catalográfica

P637a Pilatti, Cristiana.

Análise comparativa do desempenho numérico de técnicas de inversão da transformada de *Laplace* aplicados a um problema de transporte de soluto em meio poroso / Cristiana Pilatti. – 2019.  
87 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, Rio Grande/RS, 2019.

Orientadora: Dra. Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez.

Coorientador: Dr. João Francisco Prolo Filho.

1. Transformada de *Laplace* 2. Inversão Numérica 3. Transporte de Contaminante 4. Equação de Advecção-difusão I. Rodriguez, Bárbara Denicol do Amaral II. Prolo Filho, João Francisco III. Título.

CDU 004:656

## AGRADECIMENTOS

Agradeço à Deus.

Aos meus pais Claudino e Ana e à minha irmã Claudiana, pelo incentivo, apoio e força em todos os momentos.

À professora Bárbara, pelos ensinamentos, pela prestatividade, pelo exemplo de profissional, apaixonada pela profissão, justa, comprometida e competente.

Ao professor João, pelas contribuições no desenvolvimento deste trabalho e pelo incentivo.

A todos os professores que me marcaram e inspiram.

Às pessoas que conheci na minha estadia em Rio Grande e se tornaram grandes amigos, em especial, às amigas Ana Paula e Luana, que conheceram e respeitaram minhas dores e angústias, e ensinaram grandes lições. Agradeço pelas conversas e reflexões, pelas boas risadas, por todos os momentos.

Aos amigos que fiz durante o curso de graduação, que, mesmo que de longe, vibraram a cada passo meu adiante e que não deixaram que eu perdesse a confiança em mim mesma.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul (FAPERGS) pelo apoio financeiro, ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional (PPGMC) e à Universidade Federal do Rio Grande (FURG).

Enfim, a todos que, de alguma forma, contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

## RESUMO

Os métodos para inversão numérica da transformada de Laplace apresentam-se como uma alternativa às técnicas usuais de inversão analítica, sendo tal geralmente de difícil execução, por conta do formato das soluções no domínio de Laplace. Neste trabalho, analisa-se o desempenho dos métodos de Stehfest, Expansão em Séries de Potência, Expansão em termos de Polinômios de Legendre e Mínimos Quadrados para Aproximação Racional. Primeiramente, os métodos citados são testados a um conjunto de funções elementares, com a finalidade de avaliar o seu desempenho para a inversão de diferentes classes de funções. Após isso, são estendidos à inversão numérica da solução transformada da equação unidimensional de advecção-difusão, usada para descrever processos de transporte de soluto em meios porosos, com o enfoque em transporte de um contaminante em aquíferos. São considerados os casos de transporte difusivo dominante e transporte advectivo dominante, sob condição de fluxo linear, caracterizados pelo número de Péclet ( $Pe$ ). Ao contrário de apontar um melhor método para inversão numérica, objetiva-se aqui apresentar recomendações para o emprego dos métodos, reconhecendo as particularidades de cada um deles.

Palavras-chaves: Transformada de Laplace, Inversão numérica, Transporte de contaminante, Equação de advecção-difusão.

## ABSTRACT

The methods for numerical inversion of Laplace transforms are presented as an alternative to the usual techniques of analytical inversion, which is generally difficult to perform due to the format of solutions in Laplace domain. In this study, we analyze the performance of Stehfest, Power Series Expansion, Expansion in terms of Legendre Polynomials and Least Squares for Rational Approximation methods. First, these methods are tested for inverting a set of elementary functions, in order to evaluate their performance for the inversion of different classes of functions. Then, they are extended to numerical inversion of the Laplace transform solution of the one-dimensional advection-diffusion equation, which is used to describe solute transport processes in porous media, the focus being on transport of a contaminant in aquifers. Cases of diffusion-dominated transport and advection-dominated transport are considered, under linear flow condition, and are characterized by the Péclet number ( $Pe$ ). As opposed to indicating a better method for numerical inversion, we aim here to present recommendations for the use of methods, being recognized the particularities of each one of them.

Keywords: Laplace transform, Numerical inversion, Transport of contaminants, Advection-diffusion equation.



# ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO .....	13
2. OBJETIVOS .....	18
3. TRANSFORMADA DE LAPLACE .....	19
3.1. Definição.....	19
3.2. Existência e Unicidade.....	19
3.3. Algumas Propriedades.....	20
3.4. Métodos para inversão analítica.....	22
4. MÉTODOS PARA INVERSÃO NUMÉRICA.....	25
4.1. Método de Stehfest.....	25
4.2. Método de Expansão em Série de Potências.....	26
4.3. Método de Expansão em termos de Polinômios de Legendre .....	27
4.4. Método de Mínimos Quadrados para Aproximação Racional .....	29
5. TESTES USANDO FUNÇÕES ELEMENTARES .....	32
5.1. Inversão de $F_1(s)$ .....	33
5.2. Inversão de $F_2(s)$ .....	36
5.3. Inversão de $F_3(s)$ .....	42
5.4. Inversão de $F_4(s)$ .....	49
5.5. Inversão de $F_5(s)$ .....	52
5.6. Inversão de $F_6(s)$ .....	54
5.7. Inversão de $F_7(s)$ .....	57
5.8. Inversão de $F_8(s)$ .....	59
5.9. Inversão de $F_9(s)$ .....	62
5.10. Discussão do resultado dos testes .....	64
6. PROBLEMA DE TRANSPORTE DE SOLUTO EM MEIO POROSO .....	66
6.1. Descrição e solução analítica do problema .....	68
7. RESULTADOS .....	73
7.1. Caso $Pe = 10$ .....	73
7.2. Caso $Pe = 1000$ .....	78
8. CONCLUSÕES .....	83
9. REFERÊNCIAS.....	85

## LISTA DE FIGURAS

Figura 5.1. Comparativo dos métodos para $F_1(s)$ . .....	34
Figura 5.2. Comparativo dos métodos para $F_2(s)$ , com $a = 0,5$ . .....	36
Figura 5.3. Comparativo dos métodos para $F_2(s)$ , com $a = 2$ . .....	38
Figura 5.4. Comparativo dos métodos para $F_2(s)$ , com $a = 50$ . .....	40
Figura 5.5. Comparativo dos métodos para $F_3(s)$ , com $a = 1$ . .....	43
Figura 5.6. Comparativo dos métodos para $F_3(s)$ , com $a = 0,5$ . .....	45
Figura 5.7. Comparativo dos métodos para $F_3(s)$ , com $a = 2$ . .....	47
Figura 5.8. Comparativo dos métodos para $F_4(s)$ . .....	50
Figura 5.9. Comparativo dos métodos para $F_5(s)$ . .....	52
Figura 5.10. Comparativo dos métodos para $F_6(s)$ . .....	55
Figura 5.11. Comparativo dos métodos para $F_7(s)$ . .....	57
Figura 5.12. Comparativo dos métodos para $F_8(s)$ . .....	60
Figura 5.13. Comparativo dos métodos para $F_9(s)$ . .....	62
Figura 7.1. Soluções analítica e numérica através dos métodos de Stehfest, Expansão em Série de Potências e Expansão em termos de Polinômios de Legendre, quando $Pe = 10$ . .....	76
Figura 7.2. Variação dos valores dos parâmetros livres do método de Expansão em Série de Potências, quando $Pe = 10$ . .....	77
Figura 7.3. Variação dos valores dos parâmetros livres do método de Expansão em termos de Polinômios de Legendre, quando $Pe = 10$ . .....	78
Figura 7.4. Soluções analítica e numérica, através dos métodos de Stehfest, Expansão em Série de Potências e Expansão em termos de Polinômios de Legendre, quando $Pe = 1000$ . .....	80
Figura 7.5. Variação dos valores dos parâmetros livres do método de Expansão em Série de Potências, quando $Pe = 1000$ . .....	81
Figura 7.6. Variação dos valores dos parâmetros livres do método de Expansão em termos de Polinômios de Legendre, quando $Pe = 1000$ . .....	82



## LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1. Funções consideradas e sua respectiva transformada inversa. ....	32
Tabela 5.2. Erros absoluto e relativo da inversão de $F_1(s)$ . ....	35
Tabela 5.3. Erros absoluto e relativo da inversão de $F_2(s)$ , com $a = 0,5$ . ....	37
Tabela 5.4. Erros absoluto e relativo da inversão de $F_2(s)$ , com $a = 2$ . ....	39
Tabela 5.5. Erros absoluto e relativo da inversão de $F_2(s)$ , com $a = 50$ . ....	41
Tabela 5.6. Erros absoluto e relativo da inversão de $F_3(s)$ , com $a = 1$ . ....	44
Tabela 5.7. Erros absoluto e relativo da inversão de $F_3(s)$ , com $a = 0,5$ . ....	46
Tabela 5.8. Erros absoluto e relativo da inversão de $F_3(s)$ , com $a = 2$ . ....	48
Tabela 5.9. Erros absoluto e relativo da inversão de $F_4(s)$ . ....	51
Tabela 5.10. Erros absoluto e relativo da inversão de $F_5(s)$ . ....	53
Tabela 5.11. Erros absoluto e relativo da inversão de $F_6(s)$ . ....	56
Tabela 5.12. Erros absoluto e relativo da inversão de $F_7(s)$ . ....	58
Tabela 5.13. Erros absoluto e relativo da inversão de $F_8(s)$ . ....	61
Tabela 5.14. Erros absoluto e relativo da inversão de $F_9(s)$ . ....	63
Tabela 7.1. Erro absoluto da inversão da solução do problema pelo método de Stehfest, quando $Pe = 10, N = 22$ . ....	74
Tabela 7.2. Erro absoluto da inversão da solução do problema pelo método de Expansão em Série de Potências, quando $Pe = 10, N = 16, k = 5$ . ....	74
Tabela 7.3. Erro absoluto da inversão da solução do problema pelo método de Expansão em termos de Polinômios de Legendre, quando $Pe = 10, k = 19, \sigma = 0,1$ . ....	75
Tabela 7.4. Erro absoluto da inversão da solução do problema pelo método de Stehfest, quando $Pe = 1000, N = 20$ . ....	78
Tabela 7.5. Erro absoluto da inversão da solução do problema pelo método de Expansão em Série de Potências, quando $Pe = 1000, N = 150, k = 0,1$ . ....	79
Tabela 7.6. Erro absoluto da inversão da solução do problema pelo método de Expansão em termos de Polinômios de Legendre, quando $Pe = 1000, k = 20, \sigma = 7$ . ....	79

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\{A_r\}$	coeficientes dos termos da expansão do método de Mínimos Quadrados para Aproximação Racional
$B$	espessura (vertical) do aquífero [ $m$ ]
$C$	concentração do soluto no fluido [ $Kg/m^3$ ]
$D$	coeficiente de difusão ou difusividade de massa [ $m^2/s$ ]
$D_{hd}$	coeficiente de dispersão hidrodinâmica [ $m^2/s$ ]
$erfc( )$	função erro complementar
$F$	função no domínio de Laplace
$F^{(n)}$	enésima derivada de $F$
$f$	função no domínio real
$f^{(n)}$	enésima derivada de $f$
$J_d$	fluxo difusivo de massa
$k$	parâmetro livre do método de Expansão por Série de Potências
$K$	permeabilidade do meio [ $m^2$ ]
$\mathcal{L}$	operador Transformada de Laplace
$\mathcal{L}^{-1}$	operador Transformada Inversa de Laplace
$p$	pressão [Pa]
$P_n(x)$	polinômio de Legendre de grau $n$
$Pe$	número de Péclet
$s$	parâmetro na transformação de Laplace
$t$	tempo [s]
$u$	velocidade média do fluido [ $m/s$ ]
$v$	velocidade de Darcy [ $m/s$ ]
$w$	parâmetro livre do método de Mínimos Quadrados para Aproximação Racional
$x$	coordenada paralela ao fluxo [ $m$ ]

## Símbolos gregos

$\{\alpha_i\}$	coeficientes dos termos da expansão do método de Expansão em Série de Potências
$\{\alpha_k\}$	coeficientes dos termos da expansão do método de Expansão em termos de Polinômios de Legendre
$\{\alpha_r\}$	coeficientes dos expoentes dos termos da expansão do método de Mínimos Quadrados para Aproximação Racional
$\varepsilon$	porosidade do meio
$\mu$	viscosidade do fluido [Pa · s]
$\sigma$	parâmetro livre do método de Expansão em termos de Polinômios de Legendre

## LISTA DE ABREVIATURAS

ADMM	<i>Advection-Diffusion Multilayer Model</i>
ED	Equação Diferencial
EDO	Equação Diferencial Ordinária
EDP	Equação Diferencial Parcial
GIADMT	<i>Generalized Integral Advection Diffusion Multilayer Technique</i>
GITT	<i>Generalized Integral Transform Technique</i>
PVI	Problema de Valor Inicial
PVC	Problema de Valor no Contorno
RMN	Ressonância Magnética Nuclear

# 1. INTRODUÇÃO

A Transformada de Laplace trata-se de uma importante ferramenta, muito utilizada na resolução de equações diferenciais ordinárias (EDO), equações diferenciais parciais (EDP), e seus correspondentes problemas de valor inicial (PVI) e problemas de valor no contorno (PVC). Equações estas que modelam problemas em diversos campos de estudo, tais como propagação de ondas, geofísica, transferência de calor, viscoelasticidade, engenharia sísmica, dinâmica do solo, eletroquímica e hidrologia. Outra aplicação se dá na análise de fármacos através da espectroscopia por Ressonância Magnética Nuclear (RMN) e na qual, a Transformada de Laplace descreve o decaimento exponencial do sinal de RMN (Raofian-Naeeni et al., 2015).

A importância que se atribui à referida técnica está relacionada ao fato de que, com a sua aplicação, além de os problemas serem reescritos de forma mais simples (no caso de uma EDO, obtém-se uma equação algébrica), os mesmos são resolvidos mais diretamente. Como destacado por Kreyszig (2009), devido às condições iniciais serem “incorporadas” ao próprio método, não é preciso determinar uma solução geral nos PVI's, além de ser possível resolver uma EDO não-homogênea sem ter que resolver antes sua EDO homogênea correspondente.

O método de resolução de uma equação diferencial (ED) por Transformada de Laplace consiste em: (i) tomar a Transformada de Laplace de ambos os lados da equação; (ii) resolver a equação transformada (equação subsidiária) obtida na etapa anterior; (iii) reverter a transformação da solução da equação subsidiária (Kreyszig, 2009).

Porém, pode-se encontrar dificuldades na etapa (iii), etapa de inversão, pois, dependendo do formato dessa solução, sua inversão não é possível através das técnicas usuais de decomposição em frações parciais ou das propriedades da Transformada de Laplace em conjunto com tabelas de transformadas de funções elementares e especiais, bem como através da fórmula complexa de inversão. Tais métodos de inversão são detalhados em Spiegel (1965).

Uma vez que a inversão das soluções do domínio de Laplace para o domínio real (domínio do tempo) é, geralmente, de difícil execução analítica, o desenvolvimento e aplicação de métodos para o cálculo da transformada inversa numérica de Laplace tem ganho destaque, a julgar pela abundância de pesquisas e de algoritmos disponíveis. Abate e Valkó (2004) estimam que existam mais de cem métodos para inversão numérica da Transformada de Laplace, sendo eles baseados na aproximação da integral complexa de inversão (Dubner e Abate, 1968; Simon, Stroot e Weiss, 1972; Durbin, 1974; Crump, 1976; de Hoog, Knight e Stokes, 1982; Honig e Hirdes, 1984; D'Amore et al., 2012; Piessens, 1971), na expansão da função original em uma série de funções invertíveis analiticamente (Chung e

Sun, 1986; Weeks, 1966; Lyness e Giunta, 1986; Giunta, Lacetti e Rizzardi, 1989), na fórmula de Post-Widder (Gaver Jr., 1966; Zakian, 1969; Stehfest, 1970a; Stehfest, 1970b; Valkó e Abate, 2004); ou na deformação do contorno de integração de Bromwich (Talbot, 1979; Abate e Valkó, 2004).

O fato de não haver um método “universal” tem justificado diversos estudos, nos quais diferentes métodos são avaliados quanto a precisão numérica, dificuldade de programação, tempo de processamento, entre outros critérios, confirmando que nenhum deles é superior em todas as situações, para todas as classes de funções (Barichello, 1988). A metodologia padrão de teste de um método é empregar uma função transformada cuja inversa é conhecida exatamente (Duffy, 1993).

Entre os trabalhos mais amplos e reconhecidos está o de Davies e Martin (1979), no qual os autores providenciam a avaliação de uma amostra representativa dos métodos para inversão numérica da Transformada de Laplace existentes, apresentando resultados para diversas funções de teste. Essas funções foram selecionadas para abranger uma variedade de comportamentos conhecidos de funções, e por terem soluções analíticas “simples”.

Mais recente, o trabalho de Cohen (2007) reúne os vários métodos desenvolvidos para a inversão numérica da Transformada de Laplace e apresenta as conclusões de estudos anteriores sobre a eficácia desses métodos.

Além desses, encontram-se trabalhos que utilizam a Transformada de Laplace em conjunto com métodos para inversão numérica no estudo de aplicações diversas. Pode-se mencionar estudos de Barichello (1988), Duffy (1993), Hassanzadeh e Pooladi-Darvish (2007), Machado (2012), Raoofian-Naeni et al. (2015), Wanga e Zhan (2015), Amaral (2016), Adamek, Vales e Cerv (2017), Da Costa, Rui e Pérez-Fernández (2018).

Barichello (1988) realiza um estudo dos métodos para inversão numérica da Transformada de Laplace usando funções de Laguerre (método de Lanczos e suas variantes de Piessens e Branders e de Lyness e Giunta) e do método baseado na aproximação através de Séries de Fourier (método de Durbin) o qual é aplicado a um problema de fluxo de nêutrons dependente do tempo em um reator nuclear leito-fluidizado.

Em Duffy (1993), três métodos muito conhecidos: integração direta, Weeks e Talbot, são testados para a inversão de cinco transformadas encontradas na literatura e que representam soluções de problemas aplicados em teoria dos circuitos, no estudo do impacto longitudinal de um corpo rígido em uma barra, em mecânica de fluidos viscoelásticos e na teoria das vigas.

No trabalho de Hassanzadeh e Pooladi-Darvish (2007), os métodos de Stehfest, Zakian, Séries de Fourier e Schapery são avaliados para a inversão de um conjunto de funções frequentemente usadas e de soluções de problemas em engenharia. Entre esses problemas, um modelo de mistura em



vasos agitados e modelos de processos em reservatórios de petróleo naturalmente fraturados.

No estudo de Machado (2012), são utilizados os métodos de Schapery, Dubner e Abate, Zakian e Stehfest para obter as soluções de influxo adimensional de água de aquíferos conectados a reservatórios de petróleo, considerando modelos de aquífero radial e linear, com diferentes condições de contorno. Para cada caso, os resultados obtidos através de cada um dos métodos são comparados entre si, e, se houver, com a inversa analítica.

Funções transformadas relacionadas a problemas transientes em engenharia são consideradas no estudo de Raoofian-Naeeni et al. (2015), para teste de métodos para avaliação da transformada inversa numérica de Laplace e de Hankel-Laplace, sendo os quais: métodos de Piessens, integração direta, Talbot Fixo, Durbin, Crump, D'Amore, Weeks, Lyness e Giunta, Gaver-Stehfest e Gaver-Whyn-Rho.

Wanga e Zhan (2015) aplicam os métodos de: Stehfest, de Hoog, Honig-Hirdes, Talbot, Weeks, Simon e Zakian, para inverter as soluções no domínio de Laplace de problemas de transporte difusivo dominante e advectivo dominante, sob condições de fluxo linear e radial.

Em Amaral (2016), apresenta-se uma análise comparativa dos métodos para a transformada inversa numérica de Laplace de Expansão em Série de Potências, Quadratura Gaussiana e Talbot ao serem aplicados a um conjunto de funções elementares e a um problema de transporte de nêutrons, na versão em ordenadas discretas, em geometria cartesiana unidimensional.

Adamek, Vales e Cerv (2017) analisam quatro métodos: Gaver aliado ao Somatório de Salzer, Gaver aliado ao Algoritmo Rho de Wynn, Talbot Fixo, Transformada rápida de Fourier aliado ao Algoritmo Epsilon de Wynn, a fim de encontrar um método adequado e eficaz para a inversão numérica das soluções de problemas unidimensional e bidimensional de propagação de onda em sólidos: ondas longitudinais em uma haste elástica fina, ondas de flexão em uma viga viscoelástica fina simplesmente apoiada e ondas planas em uma faixa viscoelástica fina.

O trabalho de Da Costa, Rui e Pérez-Fernández (2018) apresenta uma solução da equação de advecção-difusão tridimensional estacionária através da técnica GIADMT (*Generalized Integral Advection Diffusion Multilayer Technique*), que combina os métodos ADMM (*Advection-Diffusion Multilayer Model*) e GITT (*Generalized Integral Transform Technique*), considerando o fechamento não-local linear para o fluxo turbulento. Os autores utilizam os três métodos para inversão numérica da solução do problema: Talbot fixo, Quadratura de Gauss e Séries de Fourier, a fim de determinar o mais preciso neste caso.

Os estudos, cuja proposta é a avaliação de métodos existentes, fornecem subsídios para uma escolha racional do método a ser utilizado em determinados casos, tendo em vista aqueles em que se

conhece a forma da solução procurada. Além disso, conforme Davies e Martin (1979), há muitos problemas para os quais inverter numericamente a Transformada de Laplace requer ou pode ser facilitado pelo uso de um método específico como, por exemplo, problemas com transformadas na forma de frações racionais.

Diante do que foi exposto, nesta dissertação, propõe-se realizar o teste e a avaliação de métodos para inversão numérica da Transformada de Laplace. Aplicam-se os métodos de Stehfest, de Expansão em Série de Potências e de Expansão em termos de Polinômios de Legendre à inversão numérica da solução transformada de Laplace da equação unidimensional de advecção-difusão e compara-se seu desempenho. Essa equação é usada para descrever processos de transporte de soluto em meios porosos como, por exemplo, o transporte de contaminantes em águas subterrâneas de aquíferos. Primeiramente, testam-se os três métodos citados mais a abordagem de Mínimos Quadrados para Aproximação Racional a um conjunto de funções elementares, com a finalidade de avaliar o seu desempenho para a inversão de diferentes classes de funções e validar os algoritmos implementados.

A escolha do método de Stehfest está relacionada a sua utilidade, tendo em vista a menção em diversos trabalhos disponíveis na literatura. Estudos recentes em diversos campos empregam o algoritmo de Stehfest para a inversão de funções transformadas, tendo destaque problemas no campo da engenharia de petróleo e gás (Zhang et al., 2019; Ren et al., 2018; Zongxiao et al., 2017), problemas de transferência radioativa (Segatto et al., 2017; Tavares et al., 2017) e problemas em hidrologia subterrânea (Wanga e Zhan, 2015; Wen et al., 2017).

Em relação a Expansão em Série de Potências, não foram encontradas referências além de Amaral (2016), ao seu emprego para inversão numérica de soluções de problemas físicos. Também foi escolhido para teste por ser simples e de fácil implementação.

O método que envolve o uso de Polinômios deslocados de Legendre é empregado por Wendt (1968) na solução de problemas inversos em condução de calor transiente, por Aral e Gülçat (1977) na solução da equação de onda com condições de contorno dependentes do tempo. No entanto, tratando-se da abordagem de Papoulis (1956) considerada neste estudo, parece não ter sido utilizada para a inversão de funções relacionadas a problemas aplicados, assim como a abordagem de Mínimos Quadrados para Aproximação Racional.

Sendo assim, a contribuição principal deste trabalho diz respeito ao teste dos métodos de Expansão em Série de Potências e Expansão em termos de Polinômios de Legendre para inversão da solução do problema de transporte de soluto em meios porosos. Enfatiza-se que apresentar métodos para inversão numérica como uma alternativa à inversão analítica, que representa a principal

dificuldade no método de resolução por Transformada de Laplace, acaba favorecendo também a aplicabilidade da Transformada na resolução de ED's.

Este trabalho está assim estruturado: no Capítulo dois, apresentam-se os objetivos geral e específicos do trabalho; no Capítulo três, apresentam-se algumas definições e propriedades básicas da Transformada de Laplace; o Capítulo quatro dedica-se à apresentação dos métodos testados, à sua formulação; no Capítulo cinco estão os resultados obtidos através de cada um dos métodos na inversão de nove classes de funções, cuja transformada inversa envolve funções do tipo polinomial, exponencial e/ou trigonométrica; os Capítulos seis e sete apresentam a descrição, solução analítica e inversão numérica da solução do problema de transporte de soluto em meio poroso e seus casos considerados, onde uma discussão dos resultados é feita.

Cabe mencionar que resultados preliminares deste trabalho foram publicados (Pilatti, Rodriguez e Prolo Filho, 2017; Pilatti, Rodriguez e Prolo Filho, 2018).

## 2. OBJETIVOS

O trabalho tem por objetivo geral, realizar testes de análise de desempenho utilizando quatro métodos para inversão numérica da transformada de Laplace. E considera como objetivos específicos a presente relação:

- Fazer uma revisão bibliográfica para selecionar quais técnicas devem ser testadas;
- Mostrar os fundamentos matemáticos que estruturam os métodos selecionados;
- Avaliar o desempenho dos métodos de Stehfest, Expansão em Série de Potências, Expansão em termos de Polinômios de Legendre e Mínimos Quadrados para Aproximação Racional à inversão numérica da transformada de Laplace de um conjunto de funções elementares, comparando a transformada inversa analítica e a transformada inversa numérica através de cada um dos métodos;
- Avaliar o desempenho dos métodos de Stehfest, Expansão em Série de Potências e Expansão em termos de Polinômios de Legendre à inversão numérica da solução transformada de Laplace da equação unidimensional de advecção-difusão;
- Validar os algoritmos implementados;
- Apontar particularidades dos métodos;
- Recomendar a utilização dos métodos.

### 3. TRANSFORMADA DE LAPLACE

Neste capítulo, apresentam-se algumas definições, propriedades importantes e métodos para inversão analítica da Transformada de Laplace, conforme Spiegel (1965), Schiff (1999), Cohen (2007), Kreyszig (2009), Boyce e DiPrima (2010).

#### 3.1. Definição

**Definição 3.1.** *Suponha que  $f(t)$  é uma função definida para  $t \geq 0$  então a Transformada de Laplace de  $f$ , denotada por  $\mathcal{L}\{f(t)\}$ , é definida por*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (3.1)$$

*sempre que essa integral imprópria convergir.*

O resultado dessa operação é uma função de  $s$ , um parâmetro real ou complexo. Sendo assim, a dependência temporal é substituída, e  $F(s)$  é a função correspondente a  $f(t)$  no domínio de Laplace. A função  $f(t)$  é chamada de transformada inversa de  $F(s)$ , escreve-se simbolicamente  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ .

#### 3.2. Existência e Unicidade

Nesta seção, enunciam-se as condições suficientes sob as quais a Transformada de Laplace existe. Primeiramente, definir-se-ão alguns termos importantes.

**Definição 3.2.** *Uma função é dita **seccionalmente contínua** ou **contínua por partes** em um intervalo  $\alpha \leq t \leq \beta$  se o intervalo puder ser subdividido num número finito de intervalos em cada um dos quais a função é contínua e tem limites, à direita e à esquerda, finitos*

**Definição 3.3.** *Se existem constantes reais  $M > 0$  e  $\gamma$  tais que, para todo  $t \geq N$ ,*

$$|f(t)| \leq M e^{\gamma t} \quad (3.2)$$

*diz-se que  $f(t)$  é uma **função de ordem exponencial**  $\gamma$  quando  $t \rightarrow \infty$  ou que é de **ordem exponencial***

**Teorema 3.1. Existência.** *Se  $f(t)$  é seccionalmente contínua em todo intervalo finito  $0 \leq t \leq N$  e de ordem exponencial  $\gamma$  para  $t > N$ , então sua transformada de Laplace existe para todo  $s > \gamma$  (ou  $\text{Re}(s) > \gamma$ , se  $s$  é complexo)*

**Unicidade.** *Se a Transformada de Laplace de uma determinada função existir, ela é determinada de maneira única. Inversamente, se duas funções (ambas definidas no eixo real positivo) tiverem a mesma Transformada, então essas funções não podem se diferir num intervalo de largura positiva, embora possam diferir-se em pontos isolados. Logo, pode-se dizer que a inversa de uma dada Transformada é essencialmente única*

### 3.3. Algumas Propriedades

Nesta seção, apresentam-se algumas propriedades importantes da Transformada de Laplace. Supõe-se que todas as funções satisfaçam as condições do Teorema 3.1, de modo que suas Transformadas de Laplace existam.

**Teorema 3.2. Linearidade.** *Se  $c_1$  e  $c_2$  são constantes quaisquer enquanto  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$  são funções com transformadas de Laplace  $F_1(s)$  e  $F_2(s)$ , respectivamente, então*

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\} = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s). \quad (3.3)$$

Diz-se então que a Transformada de Laplace é uma operação linear.

**Teorema 3.3. Desvio  $s$ .** *Se  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$  (onde  $s > k$  para algum  $k$ ) e  $a$  é uma constante, então*

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s - a) \quad (\text{onde } s - a > k) \quad (3.4)$$

ou, se invertermos ambos os lados,

$$e^{at} f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s - a)\}. \quad (3.5)$$

**Teorema 3.4. Desvio  $t$ .** *Se  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ ,  $g(t) = \begin{cases} f(t - a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$  e  $a$  é uma constante positiva, então*



$$\mathcal{L}\{g(t)\} = e^{-as}F(s). \quad (3.6)$$

**Teorema 3.5. Mudança de escala.** Se  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ , então

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right). \quad (3.7)$$

**Teorema 3.6. Transformada de Laplace de derivadas.** Se  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ , então

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0) \quad (3.8a)$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \quad (3.8b)$$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \quad (3.8c)$$

Se  $f(t), f'(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$  são contínuas para  $0 \leq t \leq N$  e de ordem exponencial para  $t > N$ , enquanto  $f^{(n)}(t)$  é seccionalmente contínua para  $0 \leq t \leq N$ .

**Teorema 3.7. Transformada de Laplace de integrais.** Se  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ , então

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{1}{s}F(s). \quad (3.9)$$

**Teorema 3.8. Multiplicação por  $t^n$ .** Se  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ , então

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s). \quad (3.10)$$

**Teorema 3.9. Divisão por  $t$ .** Se  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ , então

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u)du, \quad (3.11)$$

contanto que  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t}$  exista

**Teorema 3.10. Teorema do valor inicial.** *Se os limites indicados existem, então*

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s). \quad (3.12)$$

**Teorema 3.11. Teorema do valor final.** *Se os limites indicados existem, então*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s). \quad (3.13)$$

### 3.4. Métodos para inversão analítica

A transformada inversa de Laplace pode ser determinada diretamente da **fórmula integral de Bromwich**, que a define,

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{st} F(s) ds, \quad (3.14)$$

onde  $\sigma > 0$  é uma constante real, maior que as partes reais de todas as singularidades de  $F(s)$ .

No entanto, o método envolve a teoria das variáveis complexas, tornando um processo difícil.

Outra maneira de representar a transformada inversa de Laplace é através da fórmula de Post-Widder. A vantagem dessa fórmula refere-se ao fato de que  $f$  é expresso em termos do valor de  $F$  e de suas derivadas  $F^{(n)}$  no eixo real. Por outro lado, a convergência para  $f(t)$  é muito lenta.

**Teorema 3.12. Fórmula de Post-Widder para inversão.** *Se a integral em (3.1) converge para todo  $s > \gamma$ , então*

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{t}\right)^{n+1} F^{(n)}\left(\frac{n}{t}\right) \quad (3.15)$$

para todo ponto  $t (> 0)$  da continuidade de  $f(t)$

Para a inversão de funções mais “simples”, descreve-se a seguir os métodos usuais, de acordo com Spiegel (1965).

**Método das Frações Parciais.** Qualquer função racional  $\frac{P(s)}{Q(s)}$ , onde  $P(s)$  e  $Q(s)$  são polinômios, com o grau de  $P(s)$  menor do que o de  $Q(s)$ , pode ser escrita como soma de funções racionais, as frações parciais.

i) A cada fator linear da forma  $(as + b)$  de  $Q(s)$ , corresponde uma fração parcial da forma  $\frac{A}{as+b}$ ,  $A$  constante.

ii) A cada fator linear repetido da forma  $(as + b)^n$ , corresponde uma fração parcial da forma  $\frac{A_1}{as+b} + \frac{A_2}{(as+b)^2} + \dots + \frac{A_n}{(as+b)^n}$ ,  $A_1, A_2, \dots, A_n$  constantes.

iii) A cada fator quadrático da forma  $(as^2 + bs + c)$ , corresponde uma fração parcial da forma  $\frac{As+B}{as^2+bs+c}$ ,  $A$  e  $B$  constantes.

iv) A cada fator quadrático repetido da forma  $(as^2 + bs + c)^n$ , corresponde uma fração parcial da forma  $\frac{A_1s+B_1}{as^2+bs+c} + \frac{A_2s+B_2}{(as^2+bs+c)^2} + \dots + \frac{A_ns+B_n}{(as^2+bs+c)^n}$ ,  $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n$ , constantes.

Encontrando a transformada inversa de Laplace de cada uma das frações parciais, pode-se encontrar  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\}$ .

**Método das séries.** Se  $F(s)$  tem um desenvolvimento em série de potências negativas de  $s$  dado por

$$F(s) = \frac{\alpha_0}{s} + \frac{\alpha_1}{s^2} + \frac{\alpha_2}{s^3} + \frac{\alpha_3}{s^4} + \dots \quad (3.16)$$

então, sob condições adequadas, pode-se inverter termo a termo para obter

$$f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \frac{\alpha_2 t^2}{2!} + \frac{\alpha_3 t^3}{3!} + \dots \quad (3.17)$$

**Fórmula de desenvolvimento de Heaviside.** Sejam  $P(s)$  e  $Q(s)$  polinômios, onde  $P(s)$  tem grau menor do que o de  $Q(s)$ . Suponha que  $Q(s)$  tenha  $n$  zeros distintos  $\alpha_k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ . Então

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\} = \sum_{k=1}^n \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} e^{\alpha_k t}, \quad (3.18)$$

sendo  $Q'(\alpha_k)$  a derivada de  $Q(s)$  avaliada na sua  $k$ -ésima raiz.

**Teorema da Convolução.** A convolução de duas funções,  $f(t)$  e  $g(t)$ , é dada pela integral

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du. \quad (3.19)$$

Se  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$  e  $\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = g(t)$ , então

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f * g. \quad (3.20)$$

A convolução é uma das propriedades mais importantes da transformada de Laplace e possui as propriedades básicas:

- i) Comutatividade.  $f * g = g * f$ .
- ii)  $c(f * g) = cf * g = f * cg$ ,  $c$  constante.
- iii) Associatividade.  $f * (g * h) = (f * g) * h$ .
- iv) Distributividade em relação à adição.  $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$ .

## 4. MÉTODOS PARA INVERSÃO NUMÉRICA

Nas seções 4.1-4.4, apresentam-se os métodos para inversão numérica da Transformada de Laplace: Stehfest, Expansão em Série de Potências, Expansão em termos de Polinômios de Legendre e Mínimos Quadrados para Aproximação Racional, respectivamente; trabalhos de referência e sua fundamentação.

### 4.1. Método de Stehfest

Em seu estudo, Davies e Martin (1979) consideram “métodos que calculam uma amostra”, apresentando a fórmula

$$I_n(t) = \int_0^{\infty} \delta_n(t, u) f(u) du, \quad (4.1)$$

onde as funções  $\delta_n(t, u)$  formam uma sequência convergente, de modo que  $I_n(t)$  tende a  $f(t)$  a medida que  $n$  aumenta.

A fórmula de Post-Widder para inversão pode ser pensada como sendo obtida das funções

$$\delta_n(t, u) = \frac{\left(\frac{nu}{t}\right)^n e^{-\frac{nu}{t}}}{(n-1)!}. \quad (4.2)$$

Gaver (1966) sugeriu o uso das funções

$$\delta_n(t, u) = \frac{(2n)!}{n!(n-1)!} a(1 - e^{-au})^n e^{-nau}, \quad (4.3)$$

onde  $a = \frac{\ln 2}{t}$ .

A convergência de  $I_n(t)$  para  $f(t)$  é lenta. Contudo, pode-se acelerar a convergência pela aplicação de técnicas de extrapolação. Uma fórmula de extrapolação muito útil é o algoritmo desenvolvido por Stehfest (1970a;1970b),

$$f(t) \approx a \sum_{n=1}^N K_n F(na),$$

$$K_n = (-1)^{n+\frac{N}{2}} \sum_{k=\frac{n+1}{2}}^{\min(n, \frac{N}{2})} \frac{k^{\frac{N}{2}} 2k!}{\left(\frac{N}{2} - k\right)! k! (k-1)! (n-k)! (2k-n)!},$$
(4.4)

onde  $N$  é par. Assim, os coeficientes  $K_n$  dependem apenas de  $N$ , que é o número de termos usados no somatório.

A transformada inversa numérica tornar-se-ia mais precisa com um aumento no valor de  $N$ . No entanto, erros de arredondamento limitam o valor de  $N$  que pode ser usado (Moench e Ogata, 1981).

## 4.2. Método de Expansão em Série de Potências

O método proposto por Chung e Sun (1986) para a obtenção da transformada inversa assume que a função  $f(t)$  pode ser escrita como uma série

$$f(t) = \sum_{i=0}^N \alpha_i g_i(t),$$
(4.5)

onde  $g_i(t) = e^{\frac{-it}{k}}$ ,  $k$  é um parâmetro experimental e  $\alpha_i$  são constantes, para  $i = 0, 1, \dots, N$ . Isso equivale a escrever

$$f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots + \alpha_N z^N,$$
(4.6)

onde  $z = g_1(t)$ . Assim,  $f(t)$  é aproximada por uma série de potências de termos funções exponenciais decrescentes.

Substituindo o parâmetro  $s$  na Definição 3.1, Eq. (3.1), por  $s = (j+1)/k$ , tem-se

$$F\left(\frac{j+1}{k}\right) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(\frac{j+1}{k})t} dt.$$
(4.7)

Reescrevendo  $e^{-(\frac{j+1}{k})t}$  na forma do produto  $e^{\frac{-t}{k}} e^{\frac{-jt}{k}}$ ,



$$F\left(\frac{j+1}{k}\right) = \int_0^{\infty} f(t)e^{\frac{-t}{k}} g_j(t) dt. \quad (4.8)$$

Da substituição de  $f(t)$  de Eq. (4.5) em Eq. (4.8) para  $j = 0, 1, \dots, N$ , obtém-se um sistema de  $N + 1$  equações, cuja solução fornece as constantes  $\alpha_i$ ,

$$\begin{bmatrix} k & \frac{k}{2} & \frac{k}{3} & \cdots & \frac{k}{N+1} \\ \frac{k}{2} & \frac{k}{3} & \frac{k}{4} & \cdots & \frac{k}{N+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k & \frac{k}{2} & \frac{k}{3} & \cdots & \frac{k}{N+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F\left(\frac{1}{k}\right) \\ F\left(\frac{2}{k}\right) \\ \vdots \\ F\left(\frac{N+1}{k}\right) \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

A matriz na Eq. (4.9) é a conhecida matriz de Hilbert, que sabe-se ser mal condicionada e que representa o principal obstáculo dessa proposta. Assim, exceto no caso em que se obtém boa aproximação para  $f(t)$  usando um valor pequeno de  $N$ , é improvável que os resultados para as constantes  $\alpha_i$  (e, portanto, para a inversa numérica) sejam muito confiáveis (Cohen, 2007). Além disso, não há um método de determinação do valor ótimo do parâmetro  $k$ .

Sendo assim, o processo consiste em encontrar os valores das constantes  $\alpha_i$ , pela resolução do sistema descrito na Eq. (4.9) e avaliar cada  $f(t)$  representada pela Eq. (4.5).

### 4.3. Método de Expansão em termos de Polinômios de Legendre

O método de aproximação que envolve polinômios de Legendre é adotado em estudos de Papoulis (1956), Bellman, Kalaba e Shiffman (1963), entre outros. Fazendo a troca de variável  $x = e^{-\sigma t} \Rightarrow t = -\frac{1}{\sigma} \ln x$ ,  $dt = -\frac{1}{\sigma} \frac{dx}{x}$ , onde  $\sigma$  é uma constante positiva. Obtém-se da Definição 3.1, Eq. (3.1), que

$$F(s) = \frac{1}{\sigma} \int_0^1 x^{\frac{s}{\sigma}-1} f\left(\frac{-1}{\sigma} \ln x\right) dx. \quad (4.10)$$

Definindo  $f\left(\frac{-1}{\sigma} \ln x\right) = g(x)$ ,

$$F(s) = \frac{1}{\sigma} \int_0^1 x^{\frac{s}{\sigma}-1} g(x) dx. \quad (4.11)$$

Usando  $s = (2r + 1)\sigma$ , então

$$F((2r + 1)\sigma) = \frac{1}{\sigma} \int_0^1 x^{2r} g(x) dx. \quad (4.12)$$

Define-se  $g(x)$  em  $[-1,0]$  por  $g(-x) = g(x)$ . Então  $g(x)$  é uma função par e pode ser expressa como uma série de polinômios pares de Legendre,

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k P_{2k}(x), \quad (4.13)$$

ou, equivalentemente,

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k P_{2k}(e^{-\sigma t}), \quad (4.14)$$

onde  $P_{2k}(e^{-\sigma t})$  é o polinômio de Legendre de grau  $2k$  em  $e^{-\sigma t}$ .

A fim de determinar os coeficientes  $\alpha_k$ , considera-se a Transformada de Laplace de  $f(t)$ , a partir da Eq. (4.14),

$$F(s) = \frac{\alpha_0}{s} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \frac{(s - \sigma) \dots [s - (2k - 1)\sigma]}{s(s + 2\sigma) \dots (s + 2k\sigma)}, \quad (4.15)$$

para  $s = \sigma, 3\sigma, \dots, (2k - 1)\sigma$ , de onde tem-se o sistema triangular de equações,

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3\sigma} & \frac{2}{3 \cdot 5\sigma} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5\sigma} & \frac{4}{5 \cdot 7\sigma} & \frac{8}{5 \cdot 7 \cdot 9\sigma} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2k & \dots & \frac{(2k-2)(2k-4) \dots 2k}{(2k-1)(2k+1) \dots (4k-1)\sigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{k-1} \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} F(\sigma) \\ F(3\sigma) \\ F(5\sigma) \\ \vdots \\ F((2k-1)\sigma) \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Os coeficientes da expansão,  $\alpha_k$ , diminuem lentamente. Isso porque a função  $g(x) = f\left(-\frac{1}{\sigma} \ln x\right)$  é definida e expandida no intervalo  $[-1,1]$ , mas tem uma singularidade em  $x = 0$ , nesse intervalo. Então, de modo geral, a série converge lentamente. Além disso, como os coeficientes na diagonal diminuem rapidamente, é possível que haja instabilidade numérica na determinação de  $\alpha_k$ , conforme se aumenta  $k$  (Cohen, 2007).

Assim como o método apresentado na seção 4.2, resolve-se um sistema indicado pela Eq. (4.16), para a obtenção dos coeficientes da expansão e avalia-se  $f(t)$  como apresentada na Eq. (4.14).

#### 4.4. Método de Mínimos Quadrados para Aproximação Racional

A abordagem de Longman (1974), assumindo que pode-se aproximar a função  $f(t)$  por  $g(t)$ , onde

$$g(t) = \sum_{r=1}^n A_r e^{-\alpha_r t}, \tag{4.17}$$

baseia-se em determinar  $\{A_r\}$  e  $\{\alpha_r\}$ ,  $r = 1, \dots, n$ , de modo que a função  $I$  definida por

$$I = \int_0^{\infty} e^{-wt} [f(t) - g(t)]^2 dt \tag{4.18}$$

seja minimizada, onde  $w (\geq 0)$  é uma constante e a função peso  $e^{-wt}$  é necessária para garantir a

convergência da integral.

Tomando a Eq. (4.18) e desenvolvendo o quadrado, resulta em

$$I = \int_0^{\infty} e^{-wt} [f(t)]^2 dt - 2 \int_0^{\infty} e^{-wt} [f(t)g(t)] dt + \int_0^{\infty} e^{-wt} [g(t)]^2 dt. \quad (4.19)$$

Utilizando a Eq. (4.17), tem-se

$$I = \int_0^{\infty} e^{-wt} [f(t)]^2 dt - 2 \sum_{r=1}^n A_r \int_0^{\infty} e^{-(w+\alpha_r)t} f(t) dt + \sum_{r=1}^n \sum_{k=1}^n A_r A_k \int_0^{\infty} e^{-(w+\alpha_r)t} e^{-\alpha_k t} dt. \quad (4.20)$$

A Equação (4.20) pode ser escrita como

$$I = \int_0^{\infty} e^{-wt} [f(t)]^2 dt - 2 \sum_{r=1}^n A_r F(w + \alpha_r) + \sum_{r=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{A_r A_k}{w + \alpha_r + \alpha_k}, \quad (4.21)$$

onde  $F(w + \alpha_r)$  denota a transformada de  $f(t)$ , para  $s = w + \alpha_r$ .

As condições necessárias para  $I$ , Eq. (4.21), ser um mínimo são:

$$\frac{\partial I}{\partial A_r} = 0 \quad r = 1, \dots, n. \quad (4.22a)$$

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha_r} = 0 \quad r = 1, \dots, n. \quad (4.22b)$$

Da Eq. (4.22a), obtém-se

$$\sum_{k=1}^n \frac{A_k}{w + \alpha_r + \alpha_k} = F(w + \alpha_r) \quad r = 1, \dots, n. \quad (4.23)$$

A condição dada pela Eq. (4.22b) produz

$$\sum_{k=1}^n \frac{A_k}{(w + \alpha_r + \alpha_k)^2} = -F'(w + \alpha_r) \quad r = 1, \dots, n. \quad (4.24)$$

Portanto, precisa-se resolver as Eqs. (4.23) e (4.24), um sistema de  $2n$  equações para  $n$   $A$ 's e  $n$   $\alpha$ 's. Soluções complexas são permitidas, desde que  $\alpha$ 's complexos ocorram em pares conjugados e que os correspondentes  $A$ 's sejam também conjugados um ao outro. Cohen (2007) escreve

$$\begin{array}{ll} A_1 = x_1 + ix_2 & \alpha_1 = x_{n+1} + ix_{n+2} \\ A_2 = x_1 - ix_2 & \alpha_2 = x_{n+1} - ix_{n+2} \\ \vdots & \vdots \\ A_{n-1} = x_{n-1} + ix_n & \alpha_{n-1} = x_{2n-1} + ix_{2n} \\ A_n = x_{n-1} - ix_n & \alpha_n = x_{2n-1} - ix_{2n} \end{array}, \quad (4.25)$$

se  $n$  é par. Enquanto que, se  $n$  é ímpar,

$$\begin{array}{ll} A_1 = x_1 + ix_2 & \alpha_1 = x_{n+1} + ix_{n+2} \\ A_2 = x_1 - ix_2 & \alpha_2 = x_{n+1} - ix_{n+2}, \\ \vdots & \vdots \\ A_n = x_n & \alpha_n = x_{2n} \end{array}, \quad (4.26)$$

considerando equações com incógnitas  $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$ .

## 5. TESTES USANDO FUNÇÕES ELEMENTARES

Neste capítulo, apresentam-se os resultados obtidos da inversão de funções elementares, expostas na Tab. 5.1, através dos métodos de Stehfest, de Expansão em Série de Potências, de Expansão em termos de Polinômios de Legendre e de Mínimos Quadrados para Aproximação Racional, detalhados no capítulo 4. Estes testes têm como finalidade a avaliação do desempenho dos métodos para a inversão de diferentes classes de funções e validação dos algoritmos implementados. As tabelas neste capítulo apresentam os erros absoluto e relativo e os valores de parâmetros utilizados. Os resultados também são representados graficamente, comparando-se transformada inversa analítica e transformada inversa numérica a partir de cada método. Para estes testes, utilizou-se o *software* livre Octave v. 4.4.1, em um computador com sistema operacional Windows 10 Home Single Language, memória (RAM) de 4.0GB e processador Intel Core i3-2375M de 1.50GHz.

Tabela 5.1. Funções consideradas e sua respectiva transformada inversa.

$F(s)$	$f(t)$
$F_1(s) = \frac{1}{s^2}$	$f(t) = t$
$F_2(s) = \frac{1}{s+a}$	$f(t) = e^{-at}$
$F_3(s) = \frac{a}{s^2+a^2}$	$f(t) = \text{sen}(at)$
$F_4(s) = \frac{s^2-1}{(s 2+1)^2}$	$f(t) = t\text{cos}(t)$
$F_5(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$	$f(t) = te^{-t}$
$F_6(s) = \frac{e^{-\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$	$f(t) = \frac{e^{-\frac{1}{4t}}}{\sqrt{\pi t}}$
$F_7(s) = e^{-\sqrt{s}}$	$f(t) = \frac{e^{-\frac{1}{4t}}}{2\sqrt{\pi t^3}}$
$F_8(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$	$f(t) = e^{-2t}(e^t - 1)$
$F_9(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$	$f(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3}e^{-0.5t}\text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$

Com respeito aos valores dos parâmetros de cada método, o melhor valor de  $N$ , do método de Stehfest, que representa o número de termos do somatório para aproximação de  $f(t)$ , em cada caso, foi determinado experimentalmente. Assim como os valores de  $\sigma$  e os números de termos do somatório,  $k$ , correspondentes ao método de Expansão em termos de Polinômios de Legendre.

Foram feitos diversos testes para cada função, usando diferentes valores desses parâmetros. A partir de tais testes, foram escolhidos os valores dos parâmetros, para os quais a inversão forneceu resultados mais precisos, que são apresentados neste capítulo.

Os valores do parâmetro  $k$ , referente ao método de Expansão em Série de Potências, e os números de termos usados no somatório,  $N$ , são os recomendados por Amaral (2016).

Para o teste do método de Mínimos Quadrados para Aproximação Racional, os valores iniciais das variáveis  $A$ 's e  $\alpha$ 's foram gerados randomicamente (pelo uso do comando *rand*, que gera números aleatórios uniformemente distribuídos no intervalo  $[0, 1]$ ), atentando apenas para o número de termos usados no somatório,  $n$ , e o valor do parâmetro  $w$ . E então, determinou-se  $n$  e  $w$  de maneira a, independentemente do chute inicial para as variáveis, se obter resultados iguais ou muito próximos, em várias execuções do programa. Além disso, para a inversão de algumas funções, foi conveniente utilizar valores complexos, por conta de aumentar a estabilidade e precisão dos resultados.

### 5.1. Inversão de $F_1(s)$

A Tabela 5.2 mostra os erros absoluto e relativo da inversão de  $F_1(s) = \frac{1}{s^2}$ , cuja transformada inversa é  $\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} = f(t) = t$ , através dos métodos citados, e a Figura 5.1 apresenta um comparativo entre a transformada inversa analítica e a transformada inversa numérica desta função a partir de cada método.

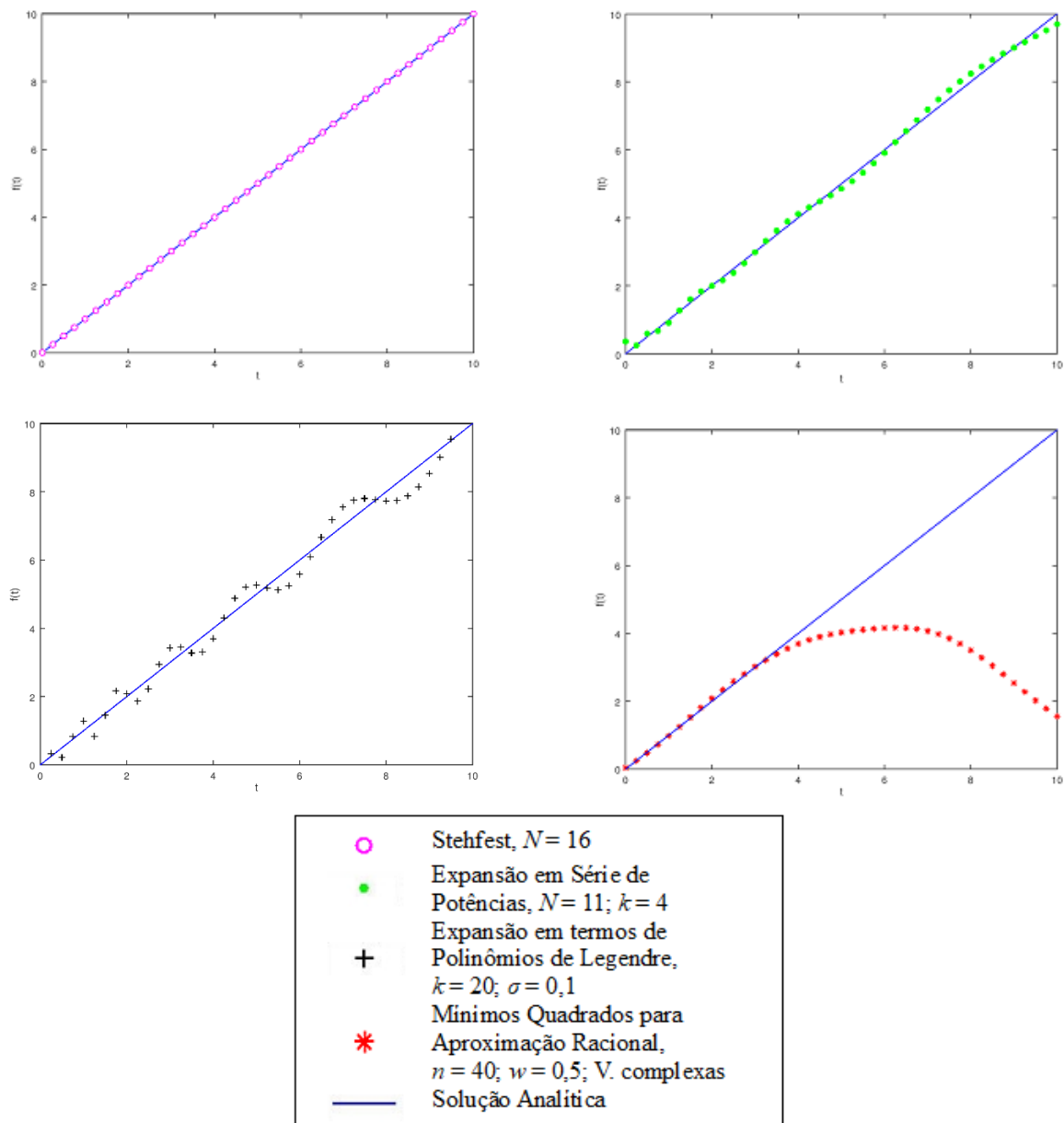


Figura 5.1. Comparativo dos métodos para  $F_1(s)$ .

Como mostram a Tabela 5.2 e Figura 5.1, para a inversão de funções  $F_1(s)$ , o método de Stehfest mostrou-se o mais adequado, tendo em vista a precisão - erros absolutos da ordem de  $10^{-07}$  - dos resultados obtidos.

A inversão numérica por Expansão em termos de Polinômios de Legendre demonstrou grande instabilidade, evidente no gráfico comparativo das soluções analítica e numérica, na Fig. 5.1. Apesar de se obter erros absolutos menores com a inversão usando o método de Expansão em Série de Potências, também pôde-se perceber certa instabilidade.

Por sua vez, a inversão através da abordagem de Mínimos Quadrados forneceu resultados aceitáveis apenas para os instantes do intervalo  $t = [0,4]$ .



Tabela 5.2. Erros absoluto e relativo da inversão de  $F_1(s)$ .

Método	Stehfest		Expansão em Série de Potências		Expansão em termos de Polinômios de Legendre		Mínimos Quadrados para Aproximação Racional	
Parâmetros	$N = 16$		$N = 11; k = 4$		$k = 20; \sigma = 0,1$		$F_1'(s) = -2/s^3;$ $n = 40; w = 0,5; V. \text{ complexas}$	
$t$	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo
0	$4,46579 \times 10^{-10}$	-	$3,62167 \times 10^{-01}$	-	$2,07292 \times 10^{+00}$	-	$4,13367 \times 10^{-02}$	-
1	$3,19898 \times 10^{-08}$	$3,19898 \times 10^{-08}$	$8,96167 \times 10^{-02}$	$8,96167 \times 10^{-02}$	$2,85576 \times 10^{-01}$	$2,85576 \times 10^{-01}$	$1,73914 \times 10^{-02}$	$1,73914 \times 10^{-02}$
2	$6,39797 \times 10^{-08}$	$3,19898 \times 10^{-08}$	$5,39091 \times 10^{-03}$	$2,69546 \times 10^{-03}$	$8,03092 \times 10^{-02}$	$4,01546 \times 10^{-02}$	$8,22194 \times 10^{-02}$	$4,11097 \times 10^{-02}$
3	$1,58076 \times 10^{-07}$	$5,26921 \times 10^{-08}$	$1,30588 \times 10^{-02}$	$4,35292 \times 10^{-03}$	$4,27823 \times 10^{-01}$	$1,42608 \times 10^{-01}$	$1,66795 \times 10^{-02}$	$5,55984 \times 10^{-03}$
4	$1,27959 \times 10^{-07}$	$3,19898 \times 10^{-08}$	$1,12882 \times 10^{-01}$	$2,82204 \times 10^{-02}$	$3,01853 \times 10^{-01}$	$7,54633 \times 10^{-02}$	$3,05854 \times 10^{-01}$	$7,64636 \times 10^{-02}$
5	$2,24003 \times 10^{-07}$	$4,48006 \times 10^{-08}$	$1,45509 \times 10^{-01}$	$2,91019 \times 10^{-02}$	$2,68763 \times 10^{-01}$	$5,37527 \times 10^{-02}$	$9,73587 \times 10^{-01}$	$1,94717 \times 10^{-01}$
6	$3,16152 \times 10^{-07}$	$5,26921 \times 10^{-08}$	$9,20614 \times 10^{-02}$	$1,53436 \times 10^{-02}$	$4,13614 \times 10^{-01}$	$6,89357 \times 10^{-02}$	$1,83904 \times 10^{+00}$	$3,06506 \times 10^{-01}$
7	$3,45395 \times 10^{-07}$	$4,93421 \times 10^{-08}$	$1,84219 \times 10^{-01}$	$2,63170 \times 10^{-02}$	$5,51544 \times 10^{-01}$	$7,87920 \times 10^{-02}$	$2,92733 \times 10^{+00}$	$4,18191 \times 10^{-01}$
8	$2,55919 \times 10^{-07}$	$3,19898 \times 10^{-08}$	$2,40333 \times 10^{-01}$	$3,00416 \times 10^{-02}$	$2,72639 \times 10^{-01}$	$3,40798 \times 10^{-02}$	$4,49597 \times 10^{+00}$	$5,61996 \times 10^{-01}$
9	$4,12507 \times 10^{-07}$	$4,58342 \times 10^{-08}$	$2,35487 \times 10^{-03}$	$2,61653 \times 10^{-04}$	$4,67104 \times 10^{-01}$	$5,19004 \times 10^{-02}$	$6,46235 \times 10^{+00}$	$7,18039 \times 10^{-01}$
10	$4,48006 \times 10^{-07}$	$4,48006 \times 10^{-08}$	$3,06130 \times 10^{-01}$	$3,06130 \times 10^{-02}$	$5,47228 \times 10^{-01}$	$5,47228 \times 10^{-02}$	$8,44271 \times 10^{+00}$	$8,44271 \times 10^{-01}$

## 5.2. Inversão de $F_2(s)$

Para a inversão de  $F_2(s) = \frac{1}{s+a}$ , considerou-se diferentes valores do coeficiente  $a$ ,  $a = 0,5$ ,  $a = 2$  e  $a = 50$ , com o objetivo de verificar se as técnicas mantêm sua eficiência para inverter transformadas de funções com características comuns e pertencentes à mesma classe.

A Tabela 5.3 mostra os erros absoluto e relativo da inversão de  $F_2(s) = \frac{1}{s+0,5}$ , cuja transformada inversa é  $\mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\} = f(t) = e^{-0,5t}$ , através dos métodos citados, e a Figura 5.2 apresenta um comparativo entre a transformada inversa analítica e a transformada inversa numérica desta função, a partir de cada método.

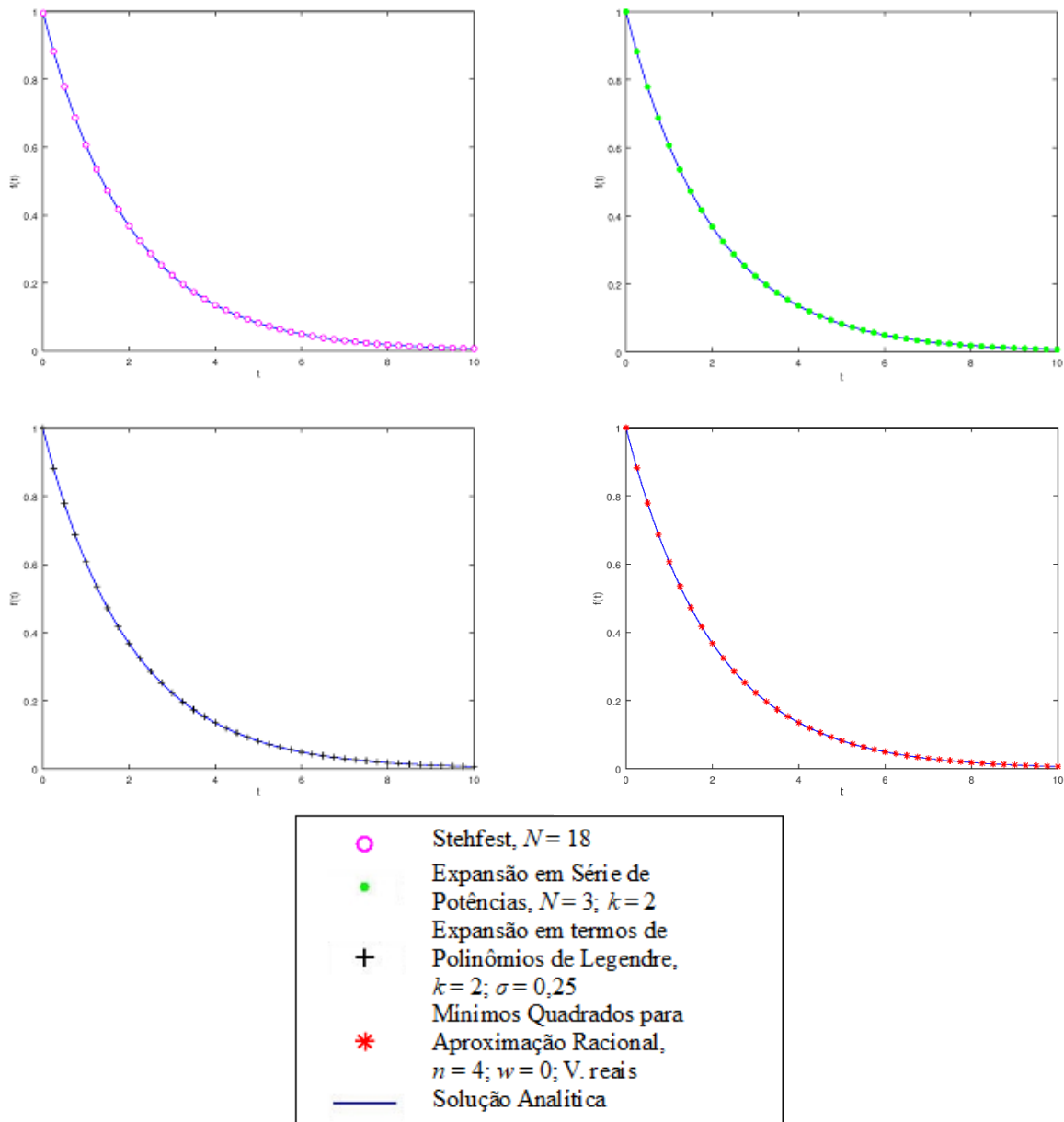


Figura 5.2. Comparativo dos métodos para  $F_2(s)$ , com  $a = 0,5$ .

Tabela 5.3. Erros absoluto e relativo da inversão de  $F_2(s)$ , com  $a = 0,5$ .

<b>Método</b>	<b>Stehfest</b>		<b>Expansão em Série de Potências</b>		<b>Expansão em termos de Polinômios de Legendre</b>		<b>Mínimos Quadrados para Aproximação Racional</b>	
<b>Parâmetros</b>	$N = 18$		$N = 3; k = 2$		$k = 2; \sigma = 0,25$		$F_2'(s) = -1/(s + 0,5)^2;$ $n = 4; w = 0; V. \text{ reais}$	
$t$	<b>Erro absoluto</b>	<b>Erro relativo</b>	<b>Erro absoluto</b>	<b>Erro relativo</b>	<b>Erro absoluto</b>	<b>Erro relativo</b>	<b>Erro absoluto</b>	<b>Erro relativo</b>
0	$1,21652 \times 10^{-07}$	$1,22262 \times 10^{-07}$	0,0000000000*	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	$2,65851 \times 10^{-08}$	$2,65851 \times 10^{-08}$
1	$5,54036 \times 10^{-07}$	$9,13451 \times 10^{-07}$	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	$2,72848 \times 10^{-08}$	$4,49850 \times 10^{-08}$
2	$4,01595 \times 10^{-08}$	$1,09165 \times 10^{-07}$	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	$1,95569 \times 10^{-08}$	$5,31611 \times 10^{-08}$
3	$1,32108 \times 10^{-06}$	$5,92065 \times 10^{-06}$	$5,55112 \times 10^{-17}$	$2,48784 \times 10^{-16}$	$5,55112 \times 10^{-17}$	$2,48784 \times 10^{-16}$	$3,47323 \times 10^{-09}$	$1,55659 \times 10^{-08}$
4	$4,00327 \times 10^{-07}$	$2,95804 \times 10^{-06}$	$5,55112 \times 10^{-17}$	$4,10175 \times 10^{-16}$	$2,77556 \times 10^{-17}$	$2,05088 \times 10^{-16}$	$3,13952 \times 10^{-08}$	$2,31981 \times 10^{-07}$
5	$3,15656 \times 10^{-07}$	$3,84548 \times 10^{-06}$	$6,93889 \times 10^{-17}$	$8,45330 \times 10^{-16}$	$6,93889 \times 10^{-17}$	$8,45330 \times 10^{-16}$	$5,33457 \times 10^{-08}$	$6,49883 \times 10^{-07}$
6	$3,79369 \times 10^{-07}$	$7,61984 \times 10^{-06}$	$6,93889 \times 10^{-17}$	$1,39371 \times 10^{-15}$	$4,85723 \times 10^{-17}$	$9,75600 \times 10^{-16}$	$6,47953 \times 10^{-08}$	$1,30145 \times 10^{-06}$
7	$1,70670 \times 10^{-06}$	$5,65182 \times 10^{-05}$	$7,63278 \times 10^{-17}$	$2,52763 \times 10^{-15}$	$2,08167 \times 10^{-17}$	$6,89354 \times 10^{-16}$	$6,64199 \times 10^{-08}$	$2,19952 \times 10^{-06}$
8	$2,36695 \times 10^{-06}$	$1,29231 \times 10^{-04}$	$7,63278 \times 10^{-17}$	$4,16736 \times 10^{-15}$	$6,93889 \times 10^{-17}$	$3,78851 \times 10^{-15}$	$6,12138 \times 10^{-08}$	$3,34216 \times 10^{-06}$
9	$3,85602 \times 10^{-06}$	$3,47108 \times 10^{-04}$	$7,63278 \times 10^{-17}$	$6,87081 \times 10^{-15}$	$3,98986 \times 10^{-17}$	$3,59156 \times 10^{-15}$	$5,24045 \times 10^{-08}$	$4,71730 \times 10^{-06}$
10	$3,92932 \times 10^{-06}$	$5,83163 \times 10^{-04}$	$7,80626 \times 10^{-17}$	$1,15855 \times 10^{-14}$	$4,68375 \times 10^{-17}$	$6,95131 \times 10^{-15}$	$4,24943 \times 10^{-08}$	$6,30672 \times 10^{-06}$

\* Considerou-se 0,0 todos os erros menores que  $10^{-17}$ .

A Tabela 5.4 mostra os erros absoluto e relativo da inversão de  $F_2(s) = \frac{1}{s+2}$ , cuja transformada inversa é  $\mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\} = f(t) = e^{-2t}$ , através dos métodos citados, e a Figura 5.3 apresenta um comparativo entre a transformada inversa analítica e a transformada inversa numérica desta função, a partir de cada método.

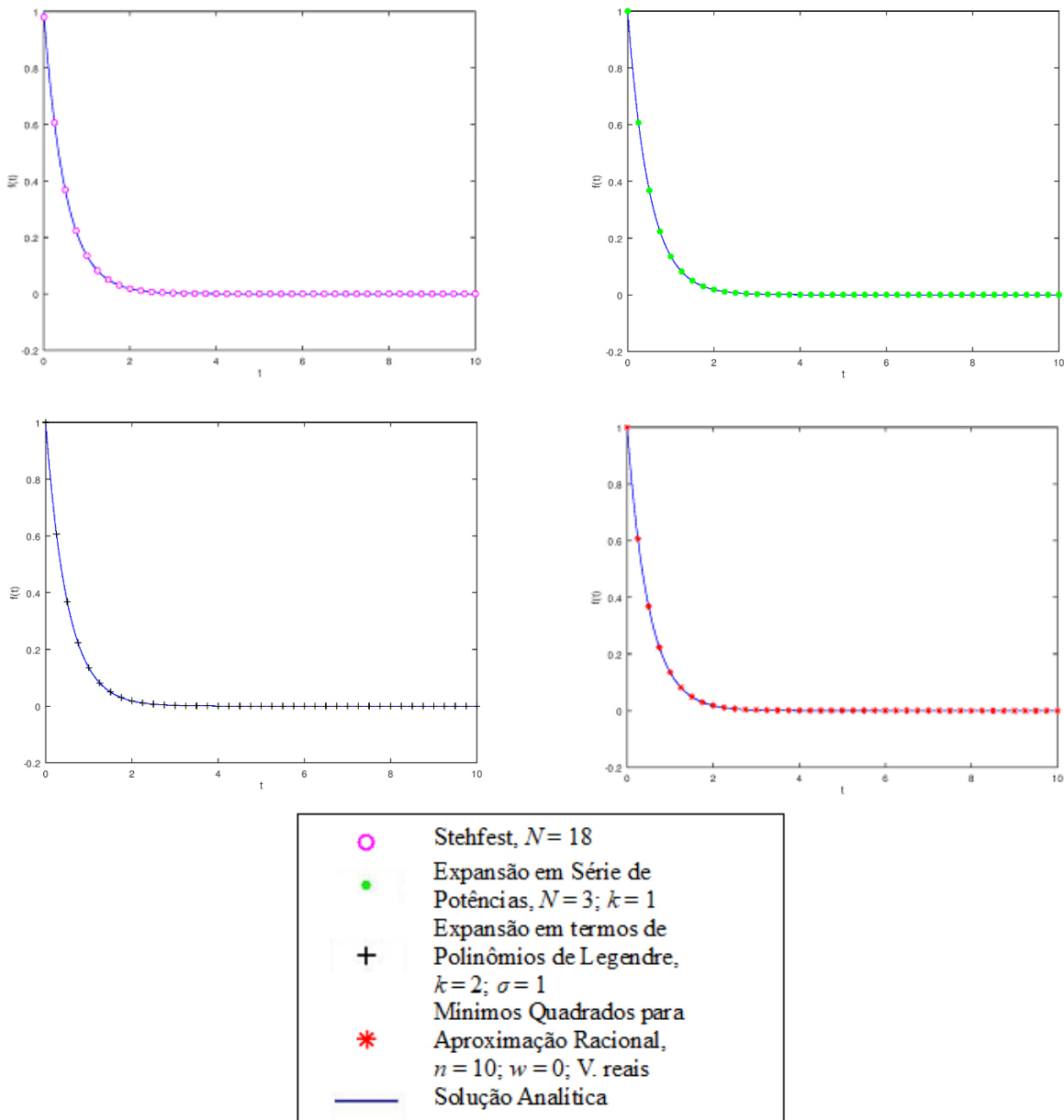


Figura 5.3. Comparativo dos métodos para  $F_2(s)$ , com  $a = 2$ .

Tabela 5.4. Erros absoluto e relativo da inversão de  $F_2(s)$ , com  $a = 2$ .

<b>Método</b>	<b>Stehfest</b>		<b>Expansão em Série de Potências</b>		<b>Expansão em termos de Polinômios de Legendre</b>		<b>Mínimos Quadrados para Aproximação Racional</b>	
<b>Parâmetros</b>	$N = 18$		$N = 3; k = 1$		$k = 2; \sigma = 1$		$F_2'(s) = -1/(s + 2)^2;$ $n = 10; w = 0; V. \text{ reais}$	
$t$	<b>Erro absoluto</b>	<b>Erro relativo</b>	<b>Erro absoluto</b>	<b>Erro relativo</b>	<b>Erro absoluto</b>	<b>Erro relativo</b>	<b>Erro absoluto</b>	<b>Erro relativo</b>
0	$7,26773 \times 10^{-07}$	$7,41455 \times 10^{-07}$	$4,44089 \times 10^{-16}$	$4,44089 \times 10^{-16}$	0,0000000000*	0,0000000000	$5,15911 \times 10^{-04}$	$5,15911 \times 10^{-04}$
1	$4,00327 \times 10^{-07}$	$2,95804 \times 10^{-06}$	$1,66533 \times 10^{-16}$	$1,23053 \times 10^{-15}$	$2,77556 \times 10^{-17}$	$2,05088 \times 10^{-16}$	$2,86112 \times 10^{-04}$	$2,11409 \times 10^{-03}$
2	$2,36695 \times 10^{-06}$	$1,29231 \times 10^{-04}$	$1,07553 \times 10^{-16}$	$5,87219 \times 10^{-15}$	$6,93889 \times 10^{-17}$	$3,78851 \times 10^{-15}$	$7,27092 \times 10^{-05}$	$3,96979 \times 10^{-03}$
3	$2,08978 \times 10^{-07}$	$8,43078 \times 10^{-05}$	$2,67581 \times 10^{-16}$	$1,07950 \times 10^{-13}$	$3,72966 \times 10^{-17}$	$1,50465 \times 10^{-14}$	$1,42112 \times 10^{-04}$	$5,73319 \times 10^{-02}$
4	$5,39215 \times 10^{-06}$	$1,60738 \times 10^{-02}$	$3,35127 \times 10^{-16}$	$9,98999 \times 10^{-13}$	$5,10117 \times 10^{-17}$	$1,52064 \times 10^{-13}$	$4,53076 \times 10^{-04}$	$1,35060 \times 10^{+00}$
5	$3,20073 \times 10^{-06}$	$7,05007 \times 10^{-02}$	$3,61182 \times 10^{-16}$	$7,95555 \times 10^{-12}$	$4,96226 \times 10^{-17}$	$1,09301 \times 10^{-12}$	$5,26796 \times 10^{-04}$	$1,16035 \times 10^{+01}$
6	$1,52384 \times 10^{-06}$	$2,48013 \times 10^{-01}$	$3,70916 \times 10^{-16}$	$6,03683 \times 10^{-11}$	$4,08837 \times 10^{-17}$	$6,65402 \times 10^{-12}$	$3,31216 \times 10^{-04}$	$5,39070 \times 10^{+01}$
7	$4,40378 \times 10^{-06}$	$5,29601 \times 10^{+00}$	$3,74519 \times 10^{-16}$	$4,50398 \times 10^{-10}$	$5,61094 \times 10^{-17}$	$6,74774 \times 10^{-11}$	$6,54944 \times 10^{-05}$	$7,87639 \times 10^{+01}$
8	$5,24719 \times 10^{-06}$	$4,66271 \times 10^{+01}$	$3,75848 \times 10^{-16}$	$3,33982 \times 10^{-09}$	$4,03519 \times 10^{-17}$	$3,58572 \times 10^{-10}$	$1,24395 \times 10^{-04}$	$1,10539 \times 10^{+03}$
9	$3,86439 \times 10^{-06}$	$2,53736 \times 10^{+02}$	$3,76337 \times 10^{-16}$	$2,47103 \times 10^{-08}$	$2,29035 \times 10^{-17}$	$1,50384 \times 10^{-09}$	$2,06441 \times 10^{-04}$	$1,35549 \times 10^{+04}$
10	$1,99343 \times 10^{-06}$	$9,67145 \times 10^{+02}$	$3,76517 \times 10^{-16}$	$1,82673 \times 10^{-07}$	$4,12931 \times 10^{-17}$	$2,00340 \times 10^{-08}$	$2,10014 \times 10^{-04}$	$1,01891 \times 10^{+05}$

\* Considerou-se 0,0 todos os erros menores que  $10^{-17}$ .

A Tabela 5.5 mostra os erros absoluto e relativo da inversão de  $F_2(s) = \frac{1}{s+50}$ , cuja transformada inversa é  $L^{-1}\{F_2(s)\} = f(t) = e^{-50t}$ , através dos métodos citados, e a Figura 5.4 apresenta um comparativo entre a transformada inversa analítica e a transformada inversa numérica desta função, a partir de cada método.

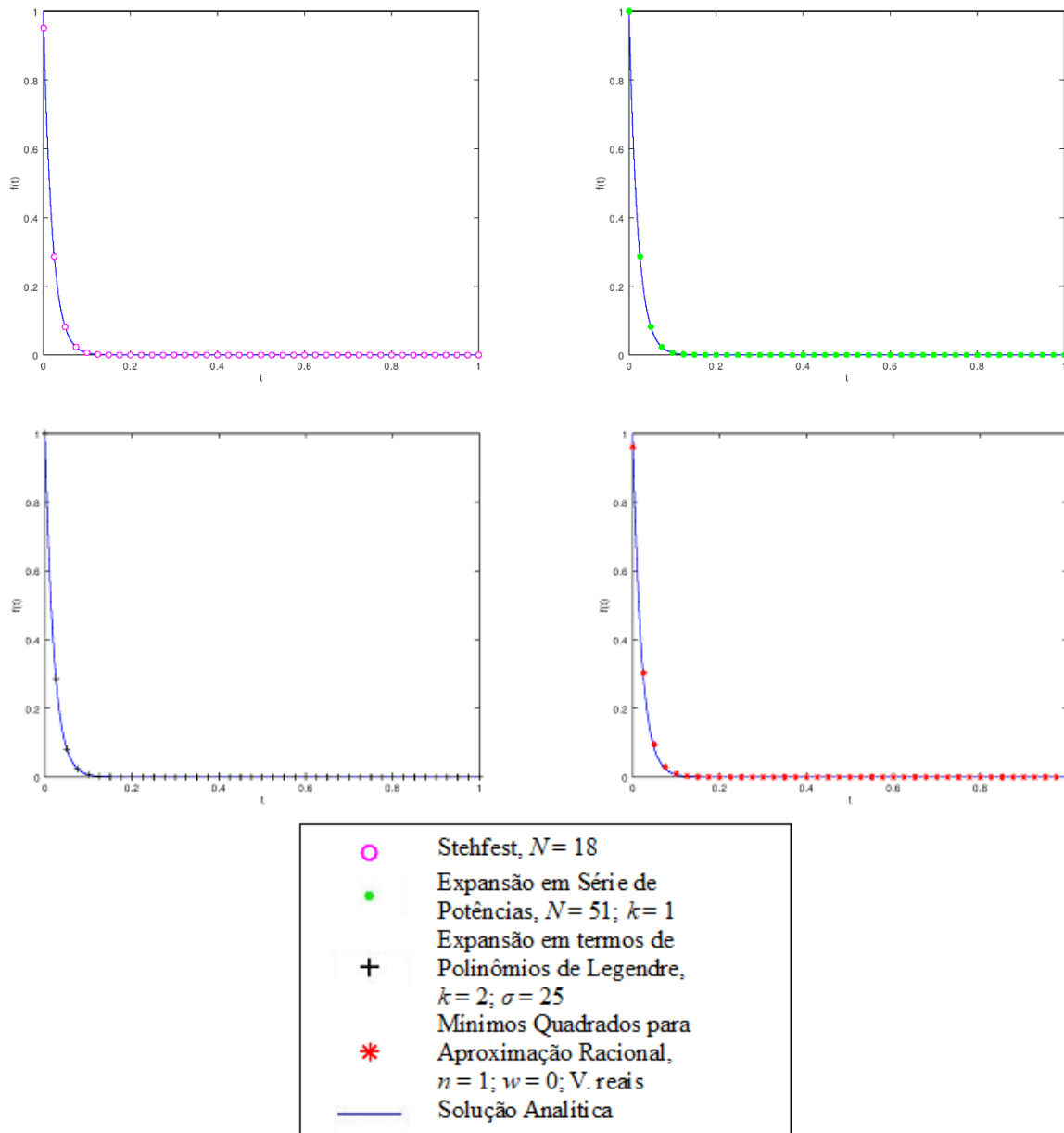


Figura 5.4. Comparativo dos métodos para  $F_2(s)$ , com  $a = 50$ .

Tabela 5.5. Erros absoluto e relativo da inversão de  $F_2(s)$ , com  $a = 50$ .

<b>Método</b>	<b>Stehfest</b>		<b>Expansão em Série de Potências</b>		<b>Expansão em termos de Polinômios de Legendre</b>		<b>Mínimos Quadrados para Aproximação Racional</b>	
<b>Parâmetros</b>	$N = 18$		$N = 51; k = 1$		$k = 2; \sigma = 25$		$F_2'(s) = -1/(s + 50)^2;$ $n = 1; w = 0; V. \text{ reais}$	
$t$	<b>Erro absoluto</b>	<b>Erro relativo</b>	<b>Erro absoluto</b>	<b>Erro relativo</b>	<b>Erro absoluto</b>	<b>Erro relativo</b>	<b>Erro absoluto</b>	<b>Erro relativo</b>
0	$3,87687 \times 10^{-07}$	$4,07564 \times 10^{-07}$	$2,25483 \times 10^{-08}$	$2,25483 \times 10^{-08}$	$2,22045 \times 10^{-16}$	$2,22045 \times 10^{-16}$	$3,86979 \times 10^{-02}$	$3,86979 \times 10^{-02}$
0,1	$2,32876 \times 10^{-06}$	$3,45619 \times 10^{-04}$	$1,97958 \times 10^{-09}$	$2,93796 \times 10^{-07}$	$1,75207 \times 10^{-16}$	$2,60030 \times 10^{-14}$	$2,69721 \times 10^{-03}$	$4,00302 \times 10^{-01}$
0,2	$3,66623 \times 10^{-06}$	$8,07540 \times 10^{-02}$	$7,74543 \times 10^{-10}$	$1,70604 \times 10^{-05}$	$1,72422 \times 10^{-16}$	$3,79785 \times 10^{-12}$	$4,72060 \times 10^{-05}$	$1,03978 \times 10^{+00}$
0,3	$5,37342 \times 10^{-06}$	$1,75658 \times 10^{+01}$	$2,00860 \times 10^{-09}$	$6,56614 \times 10^{-03}$	$1,94558 \times 10^{-16}$	$6,36012 \times 10^{-10}$	$6,03022 \times 10^{-07}$	$1,97129 \times 10^{+00}$
0,4	$2,50838 \times 10^{-06}$	$1,21698 \times 10^{+03}$	$1,47864 \times 10^{-09}$	$7,17384 \times 10^{-01}$	$1,80751 \times 10^{-16}$	$8,76943 \times 10^{-08}$	$6,85992 \times 10^{-09}$	$3,32820 \times 10^{+00}$
0,5	$1,52218 \times 10^{-06}$	$1,09604 \times 10^{+05}$	$8,32108 \times 10^{-10}$	$5,99158 \times 10^{+01}$	$1,69017 \times 10^{-16}$	$1,21701 \times 10^{-05}$	$7,36722 \times 10^{-11}$	$5,30476 \times 10^{+00}$
0,6	$1,80860 \times 10^{-06}$	$1,93275 \times 10^{+07}$	$3,02782 \times 10^{-09}$	$3,23567 \times 10^{+04}$	$1,82105 \times 10^{-16}$	$1,94606 \times 10^{-03}$	$7,65825 \times 10^{-13}$	$8,18397 \times 10^{+00}$
0,7	$9,77537 \times 10^{-07}$	$1,55039 \times 10^{+09}$	$1,07582 \times 10^{-09}$	$1,70626 \times 10^{+06}$	$1,46644 \times 10^{-16}$	$2,32580 \times 10^{-01}$	$7,80449 \times 10^{-15}$	$1,23780 \times 10^{+01}$
0,8	$4,73668 \times 10^{-07}$	$1,11494 \times 10^{+11}$	$2,76884 \times 10^{-09}$	$6,51743 \times 10^{+08}$	$1,62285 \times 10^{-16}$	$3,81995 \times 10^{+01}$	$7,85410 \times 10^{-17}$	$1,84874 \times 10^{+01}$
0,9	$3,50745 \times 10^{-07}$	$1,22530 \times 10^{+13}$	$2,24084 \times 10^{-10}$	$7,82820 \times 10^{+09}$	$1,66505 \times 10^{-16}$	$5,81672 \times 10^{+03}$	$7,83951 \times 10^{-19}$	$2,73867 \times 10^{+01}$
1	$1,77524 \times 10^{-07}$	$9,20412 \times 10^{+14}$	$2,68983 \times 10^{-09}$	$1,39460 \times 10^{+13}$	$1,66533 \times 10^{-16}$	$8,63426 \times 10^{+05}$	$7,78254 \times 10^{-21}$	$4,03502 \times 10^{+01}$

Na inversão de funções da classe de  $F_2(s)$ , observa-se que a técnica de Expansão em termos de Polinômios de Legendre produziu os resultados mais precisos, para todos os valores de  $a$  considerados, conforme Figs. 5.2-5.4 e Tabs. 5.3-5.5.

A inversão por Expansão em Série de Potências de funções dessa mesma classe também possibilitou excelentes resultados, especialmente para  $a = 0,5$  e  $a = 2$ , porém, tal método apresentou certa dificuldade para grandes valores de  $a$ , exigindo um maior número de termos no somatório.

O método de Stehfest comportou-se de maneira semelhante para qualquer valor de  $a$  - os resultados apresentam erros absolutos das ordens de  $10^{-06}$  e  $10^{-07}$ .

Por sua vez, o método de Mínimos Quadrados para Aproximação Racional apresentou melhor desempenho na inversão de  $F_2(s)$  com  $a = 0,5$  e  $a = 2$ , nessa ordem.

### 5.3. Inversão de $F_3(s)$

Para a inversão de  $F_3(s) = \frac{a}{s^2+a^2}$ , considerou-se diferentes valores do coeficiente  $a$ ,  $a = 0,5$ ,  $a = 1$  e  $a = 2$ .

A Tabela 5.6 mostra os erros absoluto e relativo da inversão de  $F_3(s) = \frac{1}{s^2+1}$ , cuja transformada inversa é  $\mathcal{L}^{-1}\{F_3(s)\} = f(t) = \text{sen}(t)$ , através dos métodos citados, e a Figura 5.5 apresenta um comparativo entre a transformada inversa analítica e a transformada inversa numérica desta função, a partir de cada método.



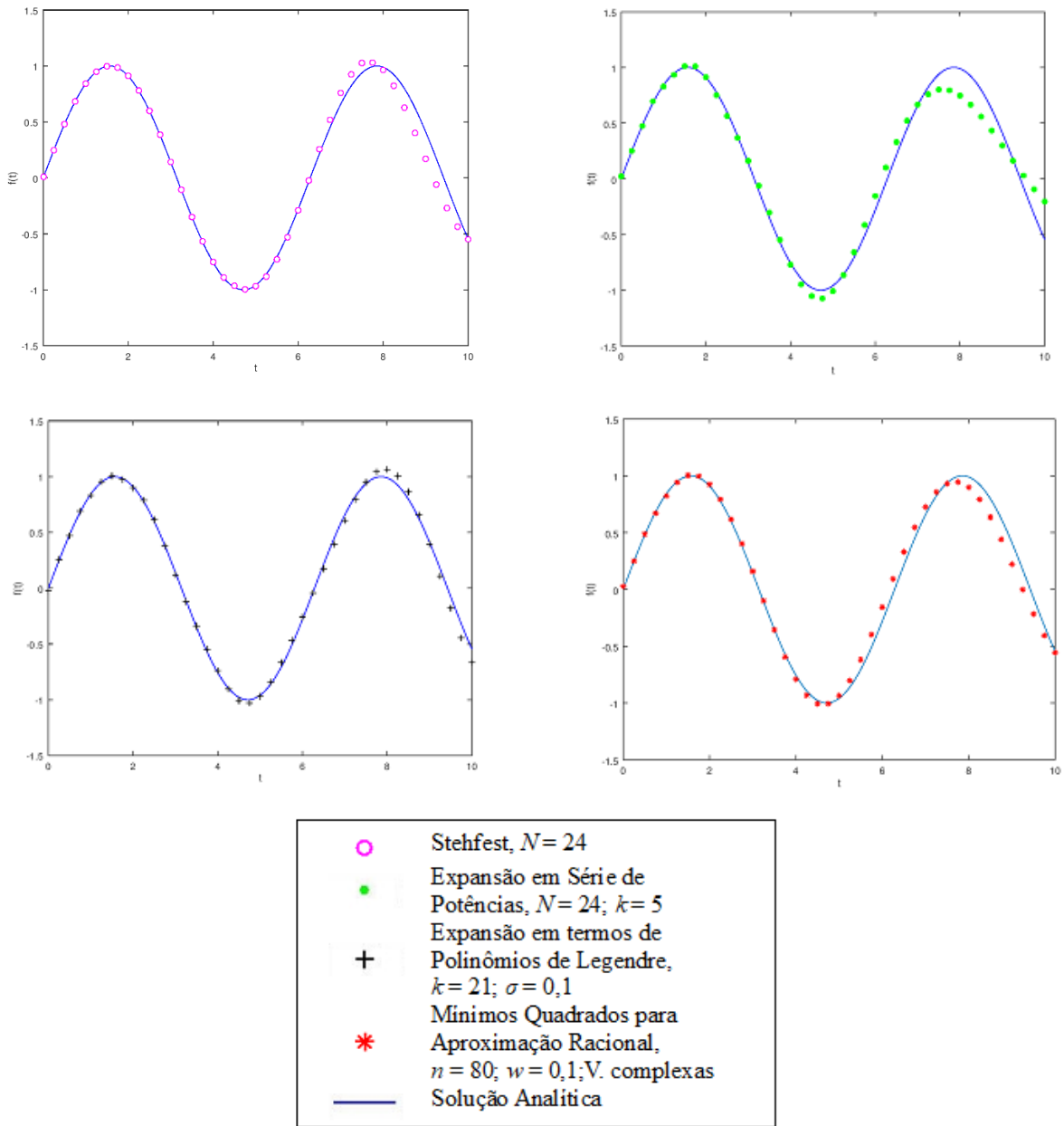


Figura 5.5. Comparativo dos métodos para  $F_3(s)$ , com  $a = 1$ .

Tabela 5.6. Erros absoluto e relativo da inversão de  $F_3(s)$ , com  $a = 1$ .

<b>Método</b>	<b>Stehfest</b>		<b>Expansão em Série de Potências</b>		<b>Expansão em termos de Polinômios de Legendre</b>		<b>Mínimos Quadrados para Aproximação Racional</b>	
<b>Parâmetros</b>	$N = 24$		$N = 24; k = 5$		$k = 21; \sigma = 0,1$		$F_3'(s) = -2s/(s^2 + 1)^2;$ $n = 80; w = 0,1; V. \text{ complexas}$	
$t$	<b>Erro absoluto</b>	<b>Erro relativo</b>	<b>Erro absoluto</b>	<b>Erro relativo</b>	<b>Erro absoluto</b>	<b>Erro relativo</b>	<b>Erro absoluto</b>	<b>Erro relativo</b>
0	$1,06418 \times 10^{-05}$	-	$2,34997 \times 10^{-02}$	-	$2,31142 \times 10^{-02}$	-	$2,68614 \times 10^{-02}$	-
1	$1,24929 \times 10^{-03}$	$1,48465 \times 10^{-03}$	$1,29592 \times 10^{-02}$	$1,54006 \times 10^{-02}$	$1,10794 \times 10^{-02}$	$1,31667 \times 10^{-02}$	$1,74330 \times 10^{-02}$	$2,07173 \times 10^{-02}$
2	$2,94375 \times 10^{-03}$	$3,23738 \times 10^{-03}$	$3,53175 \times 10^{-03}$	$3,88404 \times 10^{-03}$	$1,02986 \times 10^{-02}$	$1,13259 \times 10^{-02}$	$1,46918 \times 10^{-02}$	$1,61573 \times 10^{-02}$
3	$1,13861 \times 10^{-03}$	$8,06836 \times 10^{-03}$	$2,07566 \times 10^{-02}$	$1,47085 \times 10^{-01}$	$2,06503 \times 10^{-02}$	$1,46331 \times 10^{-01}$	$1,77629 \times 10^{-02}$	$1,25871 \times 10^{-01}$
4	$5,42988 \times 10^{-03}$	$7,17477 \times 10^{-03}$	$1,43633 \times 10^{-02}$	$1,89790 \times 10^{-02}$	$1,69514 \times 10^{-02}$	$2,23987 \times 10^{-02}$	$3,52488 \times 10^{-02}$	$4,65759 \times 10^{-02}$
5	$8,27919 \times 10^{-03}$	$8,63383 \times 10^{-03}$	$4,93686 \times 10^{-02}$	$5,14833 \times 10^{-02}$	$1,08196 \times 10^{-02}$	$1,12830 \times 10^{-02}$	$2,29906 \times 10^{-02}$	$2,39754 \times 10^{-02}$
6	$9,86649 \times 10^{-03}$	$3,53112 \times 10^{-02}$	$1,25183 \times 10^{-01}$	$4,48018 \times 10^{-01}$	$2,07008 \times 10^{-02}$	$7,40862 \times 10^{-02}$	$1,23123 \times 10^{-01}$	$4,40645 \times 10^{-01}$
7	$1,02594 \times 10^{-01}$	$1,56158 \times 10^{-01}$	$9,26618 \times 10^{-03}$	$1,41041 \times 10^{-02}$	$5,12161 \times 10^{-02}$	$7,79560 \times 10^{-02}$	$6,80338 \times 10^{-02}$	$1,03554 \times 10^{-01}$
8	$2,52045 \times 10^{-02}$	$2,54756 \times 10^{-02}$	$2,42054 \times 10^{-01}$	$2,44658 \times 10^{-01}$	$7,55483 \times 10^{-02}$	$7,63609 \times 10^{-02}$	$9,12257 \times 10^{-02}$	$9,22069 \times 10^{-02}$
9	$2,41915 \times 10^{-01}$	$5,87004 \times 10^{-01}$	$1,13279 \times 10^{-01}$	$2,74870 \times 10^{-01}$	$1,71101 \times 10^{-02}$	$4,15174 \times 10^{-02}$	$1,89298 \times 10^{-01}$	$4,59329 \times 10^{-01}$
10	$5,14277 \times 10^{-03}$	$9,45325 \times 10^{-03}$	$3,40358 \times 10^{-01}$	$6,25634 \times 10^{-01}$	$1,22240 \times 10^{-01}$	$2,24697 \times 10^{-01}$	$1,38571 \times 10^{-02}$	$2,54716 \times 10^{-02}$

A Tabela 5.7 mostra os erros absoluto e relativo da inversão de  $F_3(s) = \frac{0,5}{s^2+0,25}$ , cuja transformada inversa é  $\mathcal{L}^{-1}\{F_3(s)\} = f(t) = \text{sen}(0,5t)$ , através dos métodos citados, e a Figura 5.6 apresenta um comparativo entre a transformada inversa analítica e a transformada inversa numérica desta função, a partir de cada método.

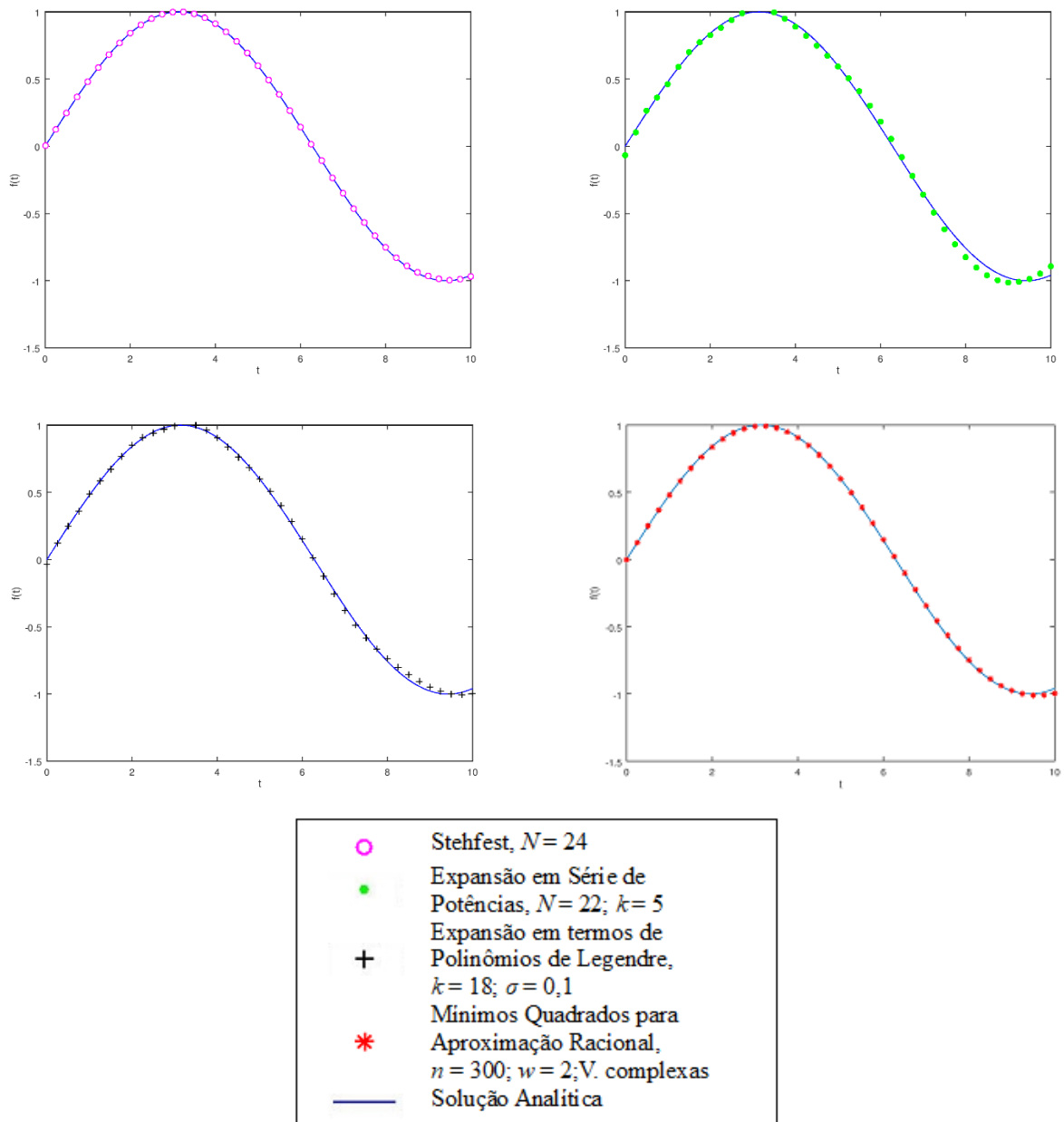


Figura 5.6. Comparativo dos métodos para  $F_3(s)$ , com  $a = 0,5$ .

Tabela 5.7. Erros absoluto e relativo da inversão de  $F_3(s)$ , com  $a = 0,5$ .

<b>Método</b>	<b>Stehfest</b>		<b>Expansão em Série de Potências</b>		<b>Expansão em termos de Polinômios de Legendre</b>		<b>Mínimos Quadrados para Aproximação Racional</b>	
<b>Parâmetros</b>	$N = 24$		$N = 22; k = 5$		$k = 18; \sigma = 0,1$		$F'_3(s) = -s/(s^2 + 0,25)^2;$ $n = 300; w = 2; V. \text{ complexas}$	
$t$	<b>Erro absoluto</b>	<b>Erro relativo</b>	<b>Erro absoluto</b>	<b>Erro relativo</b>	<b>Erro absoluto</b>	<b>Erro relativo</b>	<b>Erro absoluto</b>	<b>Erro relativo</b>
0	$6,34170 \times 10^{-06}$	-	$6,66839 \times 10^{-02}$	-	$3,31333 \times 10^{-02}$	-	$1,49943 \times 10^{-03}$	-
1	$8,88163 \times 10^{-04}$	$1,85256 \times 10^{-03}$	$1,70205 \times 10^{-02}$	$3,55019 \times 10^{-02}$	$8,91779 \times 10^{-03}$	$1,86010 \times 10^{-02}$	$6,60661 \times 10^{-04}$	$1,37803 \times 10^{-03}$
2	$1,24929 \times 10^{-03}$	$1,48465 \times 10^{-03}$	$1,37570 \times 10^{-02}$	$1,63487 \times 10^{-02}$	$1,02446 \times 10^{-02}$	$1,21746 \times 10^{-02}$	$7,24164 \times 10^{-03}$	$8,60593 \times 10^{-03}$
3	$7,36479 \times 10^{-04}$	$7,38329 \times 10^{-04}$	$2,15511 \times 10^{-02}$	$2,16052 \times 10^{-02}$	$3,85655 \times 10^{-03}$	$3,86623 \times 10^{-03}$	$8,36696 \times 10^{-03}$	$8,38797 \times 10^{-03}$
4	$2,94375 \times 10^{-03}$	$3,23738 \times 10^{-03}$	$1,97982 \times 10^{-02}$	$2,17731 \times 10^{-02}$	$2,89796 \times 10^{-03}$	$3,18703 \times 10^{-03}$	$3,91547 \times 10^{-03}$	$4,30604 \times 10^{-03}$
5	$9,34749 \times 10^{-04}$	$1,56189 \times 10^{-03}$	$4,90016 \times 10^{-03}$	$8,18779 \times 10^{-03}$	$1,58707 \times 10^{-03}$	$2,65186 \times 10^{-03}$	$2,07103 \times 10^{-03}$	$3,46052 \times 10^{-03}$
6	$1,13861 \times 10^{-03}$	$8,06836 \times 10^{-03}$	$4,25720 \times 10^{-02}$	$3,01673 \times 10^{-01}$	$1,02884 \times 10^{-02}$	$7,29053 \times 10^{-02}$	$6,06059 \times 10^{-03}$	$4,29464 \times 10^{-02}$
7	$1,82688 \times 10^{-03}$	$5,20801 \times 10^{-03}$	$7,89724 \times 10^{-03}$	$2,25132 \times 10^{-02}$	$2,75713 \times 10^{-02}$	$7,85992 \times 10^{-02}$	$7,34407 \times 10^{-03}$	$2,09362 \times 10^{-02}$
8	$5,42988 \times 10^{-03}$	$7,17477 \times 10^{-03}$	$6,79299 \times 10^{-02}$	$8,97591 \times 10^{-02}$	$1,99179 \times 10^{-02}$	$2,63184 \times 10^{-02}$	$8,11563 \times 10^{-03}$	$1,07236 \times 10^{-02}$
9	$1,34366 \times 10^{-02}$	$1,37455 \times 10^{-02}$	$3,50089 \times 10^{-02}$	$3,58137 \times 10^{-02}$	$3,04217 \times 10^{-02}$	$3,11209 \times 10^{-02}$	$1,97004 \times 10^{-03}$	$2,01533 \times 10^{-03}$
10	$8,27919 \times 10^{-03}$	$8,63383 \times 10^{-03}$	$6,64344 \times 10^{-02}$	$6,92801 \times 10^{-02}$	$3,68829 \times 10^{-02}$	$3,84627 \times 10^{-02}$	$3,79149 \times 10^{-02}$	$3,95390 \times 10^{-02}$

A Tabela 5.8 mostra os erros absoluto e relativo da inversão de  $F_3(s) = \frac{2}{s^2+4}$ , cuja transformada inversa é  $\mathcal{L}^{-1}\{F_3(s)\} = f(t) = \text{sen}(2t)$ , através dos métodos citados, e a Figura 5.7 apresenta um comparativo entre a transformada inversa analítica e a transformada inversa numérica desta função, a partir de cada método.

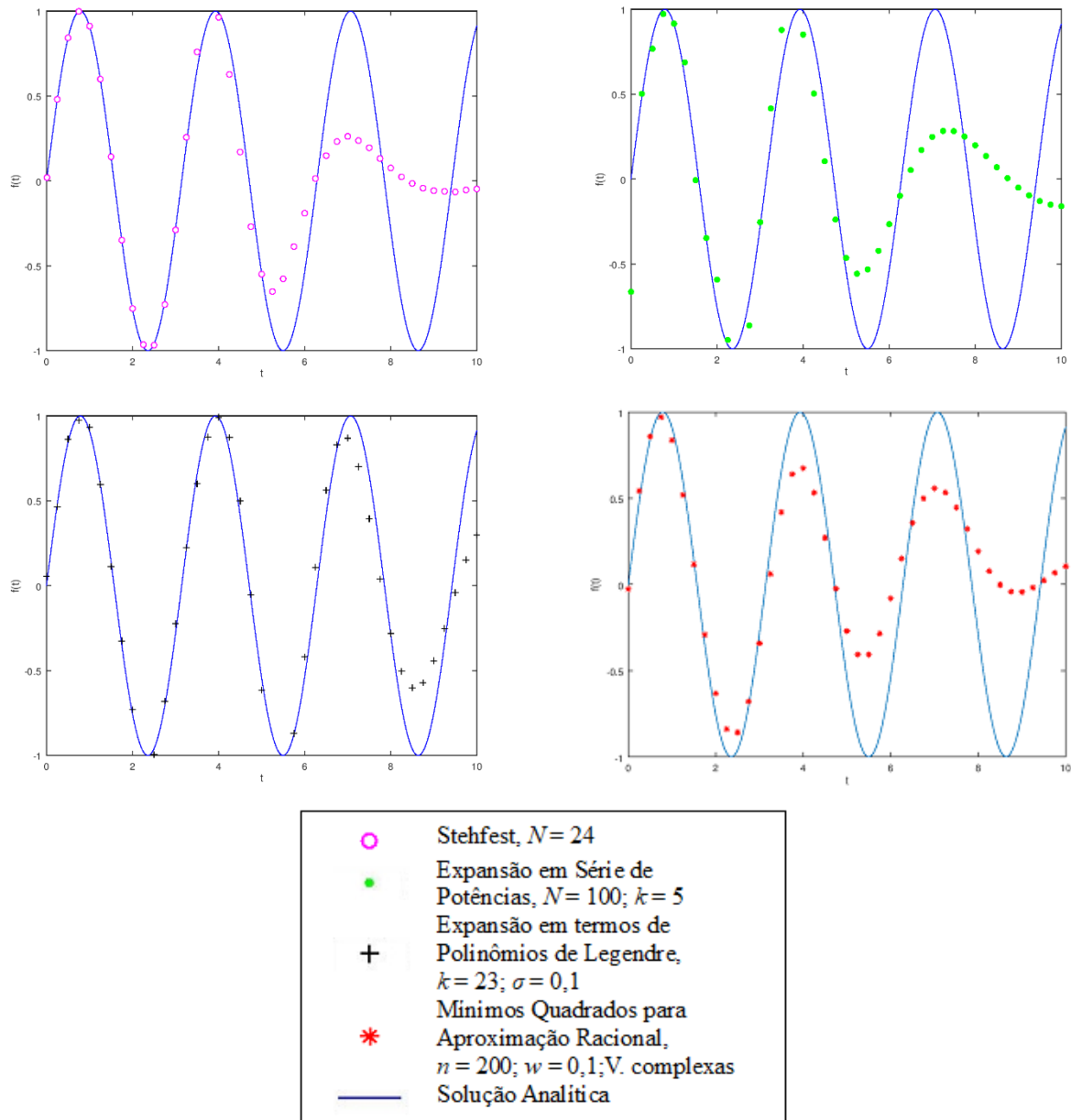


Figura 5.7. Comparativo dos métodos para  $F_3(s)$ , com  $a = 2$ .

Tabela 5.8. Erros absoluto e relativo da inversão de  $F_3(s)$ , com  $a = 2$ .

Método	Stehfest		Expansão em Série de Potências		Expansão em termos de Polinômios de Legendre		Mínimos Quadrados para Aproximação Racional	
Parâmetros	$N = 24$		$N = 100; k = 5$		$k = 23; \sigma = 0,1$		$F_3'(s) = -4s/(s^2 + 4)^2$ $n = 200; w = 0,1;$ <b>V. complexas</b>	
$t$	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo
0	$1,87936 \times 10^{-05}$	-	$6,63839 \times 10^{-01}$	-	$5,45072 \times 10^{-02}$	-	$2,70206 \times 10^{-02}$	-
1	$2,94375 \times 10^{-03}$	$3,23738 \times 10^{-03}$	$5,91113 \times 10^{-03}$	$6,50077 \times 10^{-03}$	$2,27634 \times 10^{-02}$	$2,50341 \times 10^{-02}$	$7,28248 \times 10^{-02}$	$8,00891 \times 10^{-02}$
2	$5,42988 \times 10^{-03}$	$7,17477 \times 10^{-03}$	$1,64410 \times 10^{-01}$	$2,17243 \times 10^{-01}$	$2,62414 \times 10^{-02}$	$3,46740 \times 10^{-02}$	$1,24534 \times 10^{-01}$	$1,64553 \times 10^{-01}$
3	$9,86649 \times 10^{-03}$	$3,53112 \times 10^{-02}$	$2,56144 \times 10^{-02}$	$9,16712 \times 10^{-02}$	$5,55927 \times 10^{-02}$	$1,98961 \times 10^{-01}$	$6,18677 \times 10^{-02}$	$2,21418 \times 10^{-01}$
4	$2,52045 \times 10^{-02}$	$2,54756 \times 10^{-02}$	$1,38357 \times 10^{-01}$	$1,39845 \times 10^{-01}$	$2,32278 \times 10^{-03}$	$2,34777 \times 10^{-03}$	$3,14809 \times 10^{-01}$	$3,18195 \times 10^{-01}$
5	$5,14277 \times 10^{-03}$	$9,45325 \times 10^{-03}$	$7,93789 \times 10^{-02}$	$1,45911 \times 10^{-01}$	$7,12755 \times 10^{-02}$	$1,31016 \times 10^{-01}$	$2,73598 \times 10^{-01}$	$5,02917 \times 10^{-01}$
6	$3,45715 \times 10^{-01}$	$6,44302 \times 10^{-01}$	$2,70708 \times 10^{-01}$	$5,04512 \times 10^{-01}$	$1,16457 \times 10^{-01}$	$2,17038 \times 10^{-01}$	$4,55830 \times 10^{-01}$	$8,49520 \times 10^{-01}$
7	$7,28888 \times 10^{-01}$	$7,35799 \times 10^{-01}$	$7,42386 \times 10^{-01}$	$7,49425 \times 10^{-01}$	$1,21445 \times 10^{-01}$	$1,22597 \times 10^{-01}$	$4,33505 \times 10^{-01}$	$4,37615 \times 10^{-01}$
8	$3,63727 \times 10^{-01}$	$1,26336 \times 10^{+00}$	$4,86991 \times 10^{-01}$	$1,69151 \times 10^{+00}$	$6,41753 \times 10^{-03}$	$2,22906 \times 10^{-02}$	$4,79559 \times 10^{-01}$	$1,66570 \times 10^{+00}$
9	$6,93491 \times 10^{-01}$	$9,23439 \times 10^{-01}$	$7,00296 \times 10^{-01}$	$9,32500 \times 10^{-01}$	$3,08061 \times 10^{-01}$	$4,10208 \times 10^{-01}$	$7,07070 \times 10^{-01}$	$9,41520 \times 10^{-01}$
10	$9,60364 \times 10^{-01}$	$1,05194 \times 10^{+00}$	$1,07323 \times 10^{+00}$	$1,17557 \times 10^{+00}$	$6,15026 \times 10^{-01}$	$6,73673 \times 10^{-01}$	$8,07234 \times 10^{-01}$	$8,84208 \times 10^{-01}$

Os métodos apresentam seu pior desempenho na inversão de funções desta classe, de  $F_3(s)$ , mesmo ao aumentar o número de termos usados no somatório ou realizar ajustes em seus parâmetros (como mostrado nas Tabs. 5.6-5.8 e Figs. 5.5-5.7). De modo geral, o que se observa é grande instabilidade numérica e melhor aproximação para os primeiros instantes, especialmente quando  $a = 1$  e  $a = 2$ .

Na inversão de  $F_3(s)$  com  $a = 0,5$ , Stehfest sobressaiu aos demais métodos, apresentando erros absolutos que variam, das ordens de  $10^{-03}$  e  $10^{-04}$ . Em seguida, o método de Mínimos Quadrados para Aproximação Racional. No entanto, tiveram de ser usados muitos termos no somatório para aproximação de  $f(t)$ , sendo gasto um tempo computacional considerável (horas para retorno do programa). Os piores desempenhos foram obtidos pelos métodos de Expansão em termos de Polinômios de Legendre e Expansão em Série de Potências.

Para os valores de  $a = 1$  e  $a = 2$ , o método de Stehfest também apresentou melhor desempenho, avaliando-se a precisão dos resultados, sendo que os erros absolutos produzidos são menores na primeira metade do intervalo de tempo considerado. Além disso, pode-se observar que a inversão de  $F_3(s)$  com  $a = 1$ , através do método de Expansão em termos de Polinômios de Legendre, demonstrou maior regularidade na precisão - erros absolutos da ordem de  $10^{-02}$ , exceto para o último instante.

#### 5.4. Inversão de $F_4(s)$

A Tabela 5.9 mostra os erros absoluto e relativo da inversão de  $F_4(s) = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$ , cuja transformada inversa é  $\mathcal{L}^{-1}\{F_4(s)\} = f(t) = t\cos(t)$ , através dos métodos citados, e a Figura 5.8 apresenta um comparativo entre a transformada inversa analítica e a transformada inversa numérica desta função, a partir de cada método.

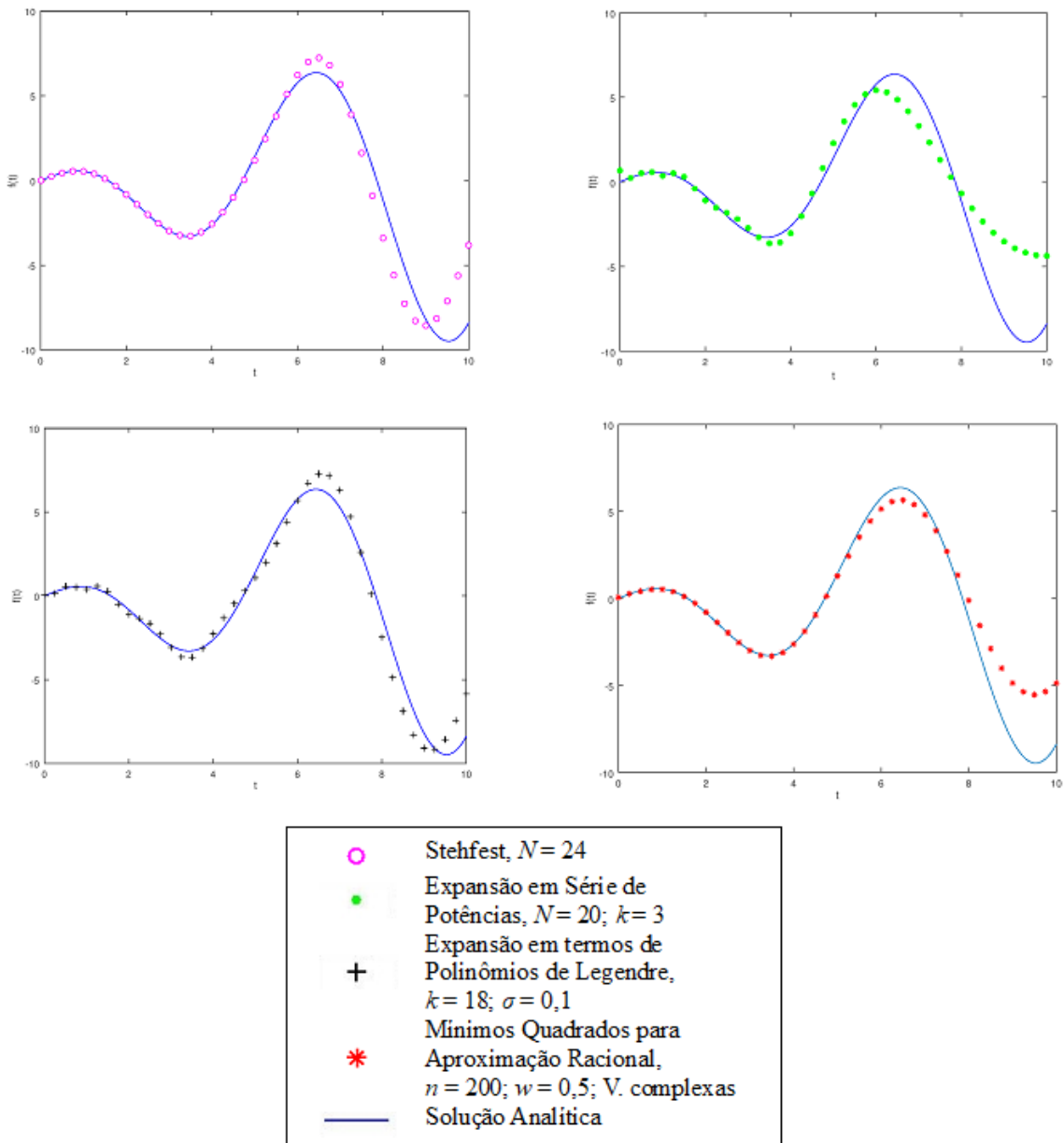


Figura 5.8. Comparativo dos métodos para  $F_4(s)$ .

Em análise a transformada inversa numérica de funções tais como  $F_4(s)$  (Tab. 5.9 e Fig. 5.8), confirma-se que os métodos apresentam dificuldades para a inversão de funções com comportamento oscilatório.

A inversão através do método de Stehfest produz os menores erros absolutos, das ordens de  $10^{-06}$ ,  $10^{-04}$  e  $10^{-03}$ , para os primeiros instantes; no entanto, eles tornam-se maiores conforme  $t$  aumenta. De modo semelhante, o método de Mínimos Quadrados para Aproximação Racional resulta em erros absolutos de  $10^{-02}$  para os instantes iniciais ( $t = [0,4]$ ) e de  $10^{-01}$  e  $10^{+00}$  para os instantes seguintes. Os erros absolutos da inversão usando Expansão em Série de Potências e Expansão em termos de Polinômios de Legendre são, em maioria, da ordem de  $10^{-01}$  para os instantes do intervalo  $t = [0,6]$ , e de  $10^{+00}$  para os instantes seguintes.



Tabela 5.9. Erros absoluto e relativo da inversão de  $F_4(s)$ .

<b>Método</b>	<b>Stehfest</b>		<b>Expansão em Série de Potências</b>		<b>Expansão em termos de Polinômios de Legendre</b>		<b>Mínimos Quadrados para Aproximação Racional</b>	
<b>Parâmetros</b>	$N = 24$		$N = 20; k = 3$		$k = 18; \sigma = 0,1$		$F_4'(s) = \frac{2s}{(s^2+1)^2} - \frac{4(s^2-1)s}{(s^2+1)^3};$ $n = 200; w = 0,5;$ <b>V. complexas</b>	
$t$	<b>Erro absoluto</b>	<b>Erro relativo</b>	<b>Erro absoluto</b>	<b>Erro relativo</b>	<b>Erro absoluto</b>	<b>Erro relativo</b>	<b>Erro absoluto</b>	<b>Erro relativo</b>
0	$5,21970 \times 10^{-06}$	-	$6,67967 \times 10^{-01}$	-	$3,19694 \times 10^{-02}$	-	$4,69706 \times 10^{-02}$	-
1	$6,99024 \times 10^{-04}$	$1,29376 \times 10^{-03}$	$1,84293 \times 10^{-01}$	$3,41092 \times 10^{-01}$	$1,58704 \times 10^{-01}$	$2,93731 \times 10^{-01}$	$2,17645 \times 10^{-02}$	$4,02820 \times 10^{-02}$
2	$1,61914 \times 10^{-03}$	$1,94539 \times 10^{-03}$	$2,61328 \times 10^{-01}$	$3,13986 \times 10^{-01}$	$2,58618 \times 10^{-01}$	$3,10729 \times 10^{-01}$	$3,16156 \times 10^{-02}$	$3,79861 \times 10^{-02}$
3	$5,64644 \times 10^{-03}$	$1,90117 \times 10^{-03}$	$2,37838 \times 10^{-01}$	$8,00809 \times 10^{-02}$	$1,11565 \times 10^{-01}$	$3,75641 \times 10^{-02}$	$2,85873 \times 10^{-02}$	$9,62541 \times 10^{-03}$
4	$4,71967 \times 10^{-02}$	$1,80514 \times 10^{-02}$	$4,25077 \times 10^{-01}$	$1,62580 \times 10^{-01}$	$3,45058 \times 10^{-01}$	$1,31975 \times 10^{-01}$	$2,01508 \times 10^{-02}$	$7,70710 \times 10^{-03}$
5	$2,21039 \times 10^{-01}$	$1,55847 \times 10^{-01}$	$8,60936 \times 10^{-01}$	$6,07015 \times 10^{-01}$	$3,52822 \times 10^{-01}$	$2,48762 \times 10^{-01}$	$1,38687 \times 10^{-01}$	$9,77830 \times 10^{-02}$
6	$4,60297 \times 10^{-01}$	$7,98984 \times 10^{-02}$	$3,50841 \times 10^{-01}$	$6,08990 \times 10^{-02}$	$7,11387 \times 10^{-02}$	$1,23483 \times 10^{-02}$	$6,24634 \times 10^{-01}$	$1,08424 \times 10^{-01}$
7	$3,92625 \times 10^{-01}$	$7,43985 \times 10^{-02}$	$1,97225 \times 10^{+00}$	$3,73723 \times 10^{-01}$	$1,02340 \times 10^{+00}$	$1,93924 \times 10^{-01}$	$4,86452 \times 10^{-01}$	$9,21779 \times 10^{-02}$
8	$2,23134 \times 10^{+00}$	$1,91696 \times 10^{+00}$	$4,78259 \times 10^{-01}$	$4,10875 \times 10^{-01}$	$1,30609 \times 10^{+00}$	$1,12207 \times 10^{+00}$	$1,04378 \times 10^{+00}$	$8,96718 \times 10^{-01}$
9	$3,58238 \times 10^{-01}$	$4,36867 \times 10^{-02}$	$4,67455 \times 10^{+00}$	$5,70055 \times 10^{-01}$	$8,86073 \times 10^{-01}$	$1,08055 \times 10^{-01}$	$3,33163 \times 10^{+00}$	$4,06287 \times 10^{-01}$
10	$4,57249 \times 10^{+00}$	$5,44946 \times 10^{-01}$	$4,01758 \times 10^{+00}$	$4,78812 \times 10^{-01}$	$2,54144 \times 10^{+00}$	$3,02887 \times 10^{-01}$	$3,51903 \times 10^{+00}$	$4,19396 \times 10^{-01}$

## 5.5. Inversão de $F_5(s)$

A Tabela 5.10 mostra os erros absoluto e relativo da inversão de  $F_5(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$ , cuja transformada inversa é  $\mathcal{L}^{-1}\{F_5(s)\} = f(t) = te^{-t}$ , através dos métodos citados, e a Figura 5.9 apresenta um comparativo entre a transformada inversa analítica e a transformada inversa numérica desta função, a partir de cada método.

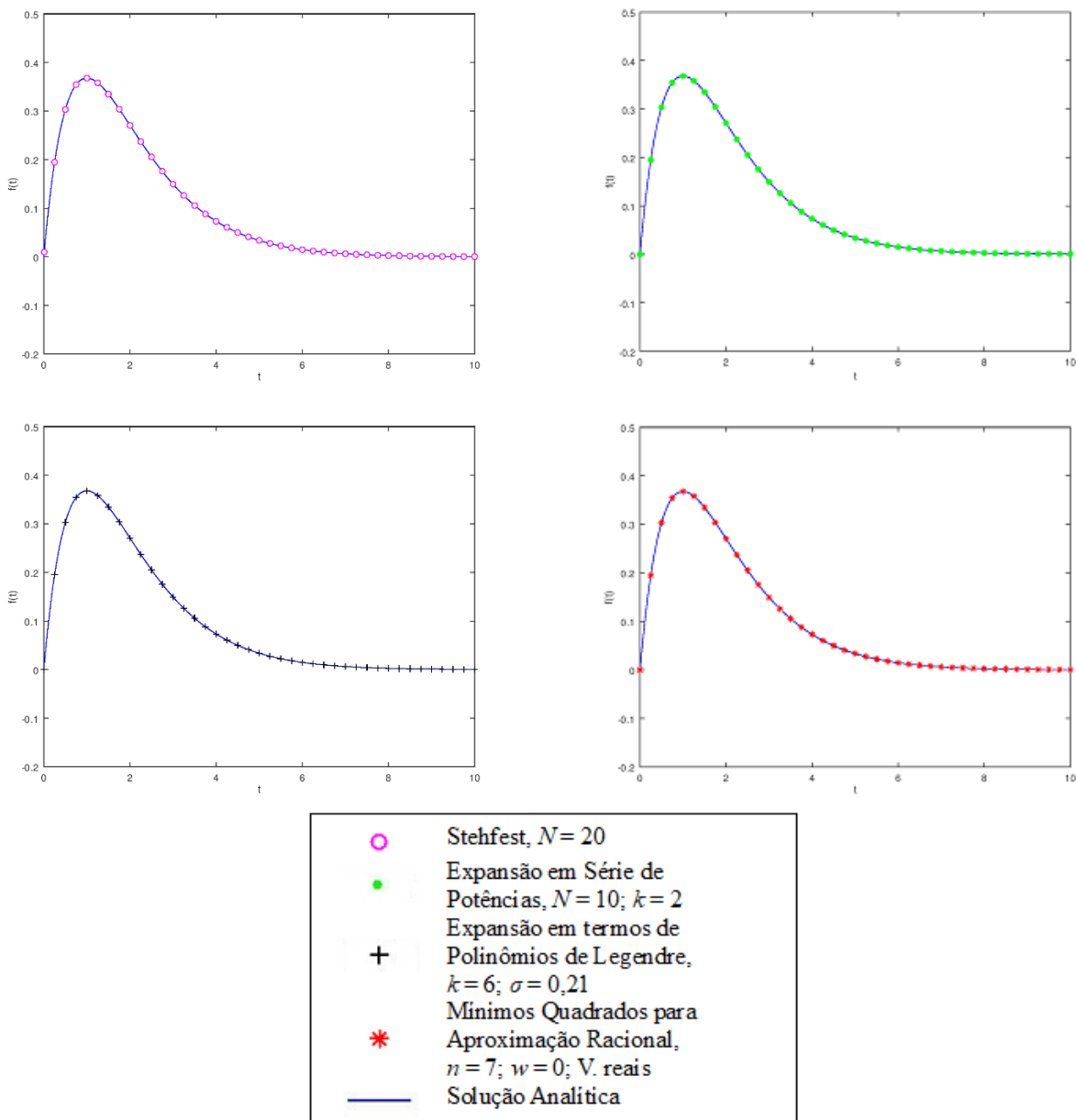


Figura 5.9. Comparativo dos métodos para  $F_5(s)$ .

Tabela 5.10. Erros absoluto e relativo da inversão de  $F_5(s)$ .

<b>Método</b>	<b>Stehfest</b>		<b>Expansão em Série de Potências</b>		<b>Expansão em termos de Polinômios de Legendre</b>		<b>Mínimos Quadrados para Aproximação Racional</b>	
<b>Parâmetros</b>	$N = 20$		$N = 10; k = 2$		$k = 6; \sigma = 0,21$		$F'_5(s) = -2/(s + 1)^3;$ $n = 7; w = 0; V. \text{ reais}$	
<b>t</b>	<b>Erro absoluto</b>	<b>Erro relativo</b>	<b>Erro absoluto</b>	<b>Erro relativo</b>	<b>Erro absoluto</b>	<b>Erro relativo</b>	<b>Erro absoluto</b>	<b>Erro relativo</b>
0	$2,94886 \times 10^{-08}$	-	$8,41398 \times 10^{-05}$	-	$4,39115 \times 10^{-05}$	-	$2,15643 \times 10^{-05}$	-
1	$8,86841 \times 10^{-07}$	$2,41068 \times 10^{-06}$	$2,43181 \times 10^{-05}$	$6,61034 \times 10^{-05}$	$2,60056 \times 10^{-05}$	$7,06905 \times 10^{-05}$	$3,95203 \times 10^{-06}$	$1,07427 \times 10^{-05}$
2	$9,27776 \times 10^{-08}$	$3,42770 \times 10^{-07}$	$1,99208 \times 10^{-05}$	$7,35979 \times 10^{-05}$	$2,88325 \times 10^{-05}$	$1,06522 \times 10^{-04}$	$1,94259 \times 10^{-06}$	$7,17697 \times 10^{-06}$
3	$1,35799 \times 10^{-06}$	$9,09201 \times 10^{-06}$	$3,13918 \times 10^{-05}$	$2,10174 \times 10^{-04}$	$9,73327 \times 10^{-06}$	$6,51660 \times 10^{-05}$	$5,94332 \times 10^{-06}$	$3,97916 \times 10^{-05}$
4	$2,73037 \times 10^{-06}$	$3,72683 \times 10^{-05}$	$5,67149 \times 10^{-06}$	$7,74132 \times 10^{-05}$	$5,19664 \times 10^{-05}$	$7,09318 \times 10^{-04}$	$2,90230 \times 10^{-06}$	$3,96151 \times 10^{-05}$
5	$3,67019 \times 10^{-06}$	$1,08941 \times 10^{-04}$	$6,80754 \times 10^{-05}$	$2,02066 \times 10^{-03}$	$4,18392 \times 10^{-05}$	$1,24190 \times 10^{-03}$	$1,01589 \times 10^{-05}$	$3,01544 \times 10^{-04}$
6	$1,16170 \times 10^{-05}$	$7,81105 \times 10^{-04}$	$2,14465 \times 10^{-05}$	$1,44202 \times 10^{-03}$	$1,95163 \times 10^{-05}$	$1,31224 \times 10^{-03}$	$1,10608 \times 10^{-05}$	$7,43709 \times 10^{-04}$
7	$2,39893 \times 10^{-05}$	$3,75820 \times 10^{-03}$	$1,14138 \times 10^{-04}$	$1,78810 \times 10^{-02}$	$7,42429 \times 10^{-05}$	$1,16310 \times 10^{-02}$	$8,49978 \times 10^{-06}$	$1,33159 \times 10^{-03}$
8	$3,88813 \times 10^{-06}$	$1,44880 \times 10^{-03}$	$1,12100 \times 10^{-04}$	$4,17708 \times 10^{-02}$	$9,43275 \times 10^{-05}$	$3,51483 \times 10^{-02}$	$5,86286 \times 10^{-06}$	$2,18462 \times 10^{-03}$
9	$1,19081 \times 10^{-05}$	$1,07214 \times 10^{-02}$	$3,26839 \times 10^{-05}$	$2,94267 \times 10^{-02}$	$8,16684 \times 10^{-05}$	$7,35295 \times 10^{-02}$	$4,55266 \times 10^{-06}$	$4,09896 \times 10^{-03}$
10	$1,51797 \times 10^{-05}$	$3,34356 \times 10^{-02}$	$7,46781 \times 10^{-05}$	$1,64489 \times 10^{-01}$	$4,98816 \times 10^{-05}$	$1,09872 \times 10^{-01}$	$4,44493 \times 10^{-06}$	$9,79062 \times 10^{-03}$

Quanto a inversão de funções da classe de  $F_5(s)$ , como pode ser visto na Tab. 5.10 e Fig. 5.9, os métodos de Stehfest e de Mínimos Quadrados para Aproximação Racional forneceram os melhores resultados, chegando a erros absolutos das ordens de  $10^{-05}$  e  $10^{-06}$ . Em particular, a inversão através do primeiro desses métodos, os erros são ainda menores nos primeiros instantes. Os métodos de Expansão em termos de Polinômios de Legendre e Expansão em Série de Potências possibilitaram resultados pouco menos precisos que os obtidos através dos métodos anteriores.

## 5.6. Inversão de $F_6(s)$

A Tabela 5.11 mostra os erros absoluto e relativo da inversão de  $F_6(s) = \frac{e^{-\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$ , cuja transformada inversa é  $\mathcal{L}^{-1}\{F_6(s)\} = f(t) = \frac{e^{-\frac{1}{4t}}}{\sqrt{\pi t}}$ , através dos métodos citados, e a Figura 5.10 apresenta um comparativo entre a transformada inversa analítica e a transformada inversa numérica desta função, a partir de cada método.

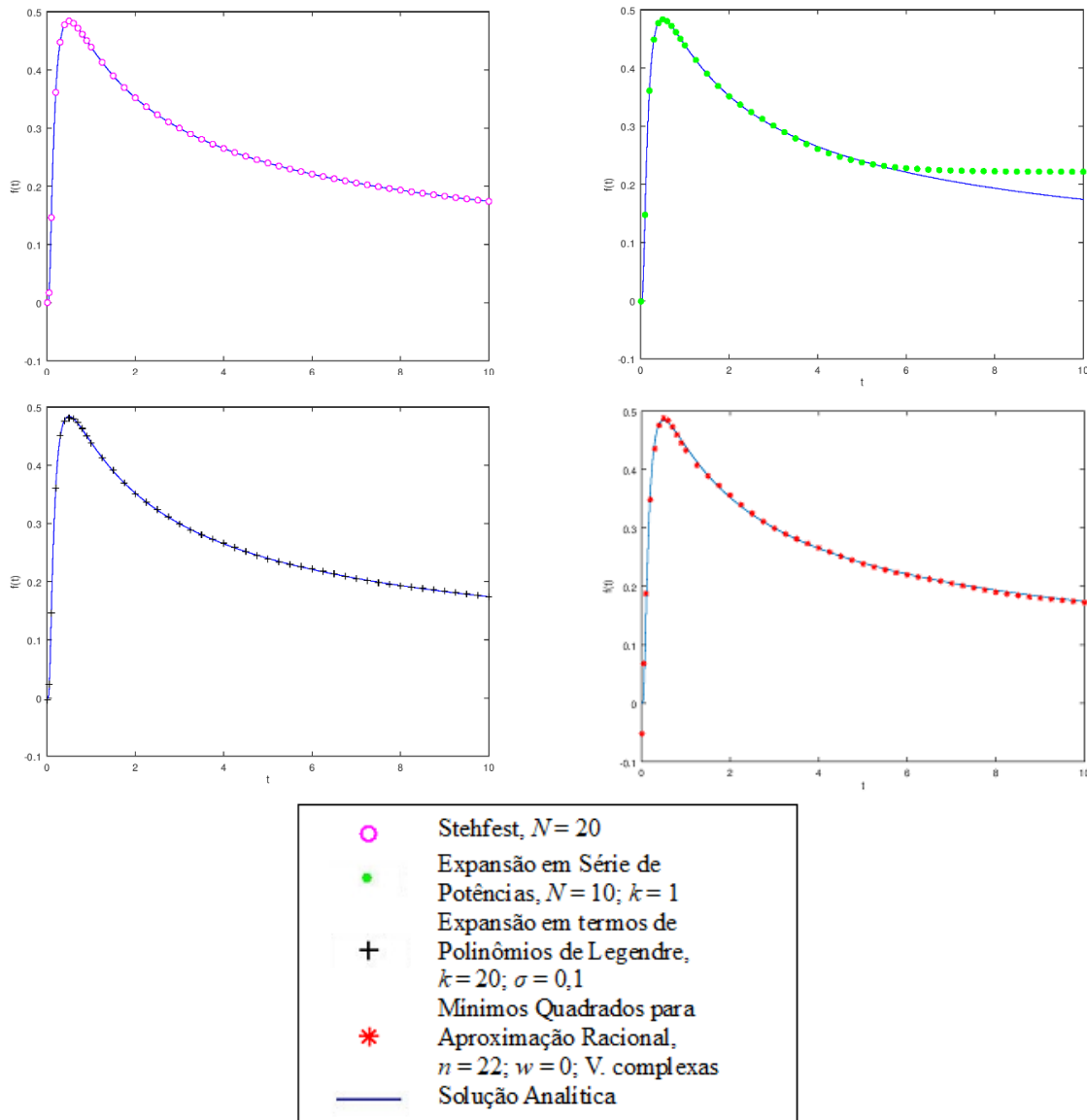


Figura 5.10. Comparativo dos métodos para  $F_6(s)$ .

Pode-se observar, de acordo com a Tab. 5.11 e Fig. 5.10, que o método de Stehfest, entre os métodos testados, melhor aproxima a transformada inversa de funções da classe de  $F_6(s)$ , apresentando erros absolutos, em maioria, da ordem de  $10^{-06}$ . Os resultados da inversão por Expansão em termos de Polinômios de Legendre apresentam erros absolutos das ordens de  $10^{-03}$  e  $10^{-04}$ . O método de Expansão em Série de Potências produz resultados tão precisos quanto, para os instantes do intervalo  $t = [0,6]$ ; para os instantes finais, os erros absolutos tornam-se maiores de uma ordem de magnitude. A abordagem por Mínimos Quadrados para Aproximação Racional apresenta boas aproximações para a inversa de  $F_6(s)$  conforme o chute inicial para as variáveis. Observou-se que em alguns testes, usando outros valores iniciais das variáveis, gerados aleatoriamente, como mencionado na introdução deste capítulo, os resultados afastavam-se consideravelmente da solução analítica para os instantes intermediários e finais do intervalo.

Tabela 5.11. Erros absoluto e relativo da inversão de  $F_6(s)$ .

Método	Stehfest		Expansão em Série de Potências		Expansão em termos de Polinômios de Legendre		Mínimos Quadrados para Aproximação Racional	
Parâmetros	$N = 20$		$N = 10; k = 1$		$k = 20; \sigma = 0,1$		$F'_6(s) = \frac{-1}{2} \frac{e^{-\sqrt{s}}}{s} - \frac{1}{2} \frac{e^{-\sqrt{s}}}{s^{3/2}}$ $n = 22; w = 0; V. \text{ complexas}$	
$t$	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo
0,01	$5,78453 \times 10^{-08}$	-	$1,09739 \times 10^{-03}$	-	$3,76838 \times 10^{-03}$	-	$5,23423 \times 10^{-02}$	-
0,1	$3,78527 \times 10^{-06}$	$2,58469 \times 10^{-05}$	$1,28099 \times 10^{-03}$	$8,74698 \times 10^{-03}$	$5,97793 \times 10^{-04}$	$4,08190 \times 10^{-03}$	$4,12795 \times 10^{-02}$	$2,81868 \times 10^{-01}$
0,5	$1,41889 \times 10^{-06}$	$2,93194 \times 10^{-06}$	$5,08194 \times 10^{-04}$	$1,05012 \times 10^{-03}$	$2,58013 \times 10^{-03}$	$5,33150 \times 10^{-03}$	$3,68901 \times 10^{-03}$	$7,62284 \times 10^{-03}$
1	$9,52595 \times 10^{-06}$	$2,16799 \times 10^{-05}$	$3,99953 \times 10^{-04}$	$9,10244 \times 10^{-04}$	$1,38713 \times 10^{-03}$	$3,15695 \times 10^{-03}$	$6,88735 \times 10^{-03}$	$1,56748 \times 10^{-02}$
2	$2,65566 \times 10^{-06}$	$7,54309 \times 10^{-06}$	$7,62875 \times 10^{-04}$	$2,16686 \times 10^{-03}$	$1,29143 \times 10^{-03}$	$3,66815 \times 10^{-03}$	$4,21397 \times 10^{-03}$	$1,19693 \times 10^{-02}$
3	$1,25893 \times 10^{-06}$	$4,20076 \times 10^{-06}$	$1,11074 \times 10^{-03}$	$3,70628 \times 10^{-03}$	$5,06849 \times 10^{-04}$	$1,69124 \times 10^{-03}$	$3,93681 \times 10^{-04}$	$1,31363 \times 10^{-03}$
4	$1,35028 \times 10^{-05}$	$5,09531 \times 10^{-05}$	$4,24969 \times 10^{-03}$	$1,60363 \times 10^{-02}$	$1,04410 \times 10^{-03}$	$3,93994 \times 10^{-03}$	$9,03083 \times 10^{-04}$	$3,40782 \times 10^{-03}$
5	$2,84503 \times 10^{-06}$	$1,18539 \times 10^{-05}$	$2,17224 \times 10^{-03}$	$9,05072 \times 10^{-03}$	$1,04012 \times 10^{-03}$	$4,33368 \times 10^{-03}$	$1,55744 \times 10^{-03}$	$6,48914 \times 10^{-03}$
6	$1,52974 \times 10^{-05}$	$6,92409 \times 10^{-05}$	$6,87469 \times 10^{-03}$	$3,11171 \times 10^{-02}$	$9,78513 \times 10^{-04}$	$4,42907 \times 10^{-03}$	$1,29609 \times 10^{-03}$	$5,86655 \times 10^{-03}$
7	$2,40677 \times 10^{-06}$	$1,16969 \times 10^{-05}$	$1,81046 \times 10^{-02}$	$8,79878 \times 10^{-02}$	$5,68902 \times 10^{-04}$	$2,76485 \times 10^{-03}$	$8,00918 \times 10^{-04}$	$3,89245 \times 10^{-03}$
8	$4,77782 \times 10^{-06}$	$2,47128 \times 10^{-05}$	$2,90490 \times 10^{-02}$	$1,50253 \times 10^{-01}$	$3,96930 \times 10^{-04}$	$2,05308 \times 10^{-03}$	$3,11966 \times 10^{-03}$	$1,61361 \times 10^{-02}$
9	$6,51695 \times 10^{-06}$	$3,56290 \times 10^{-05}$	$3,89213 \times 10^{-02}$	$2,12788 \times 10^{-01}$	$1,06298 \times 10^{-03}$	$5,81147 \times 10^{-03}$	$3,07234 \times 10^{-03}$	$1,67969 \times 10^{-02}$
10	$6,40979 \times 10^{-06}$	$3,68363 \times 10^{-05}$	$4,76218 \times 10^{-02}$	$2,73677 \times 10^{-01}$	$1,01012 \times 10^{-04}$	$5,80506 \times 10^{-04}$	$1,85544 \times 10^{-03}$	$1,06630 \times 10^{-02}$

## 5.7. Inversão de $F_7(s)$

A Tabela 5.12 mostra os erros absoluto e relativo da inversão de  $F_7(s) = e^{-\sqrt{s}}$ , cuja transformada inversa é  $\mathcal{L}^{-1}\{F_7(s)\} = f(t) = \frac{e^{-4t}}{2\sqrt{\pi t^3}}$ , através dos métodos citados, e a Figura 5.11 apresenta um comparativo entre a transformada inversa analítica e a transformada inversa numérica desta função, a partir de cada método.

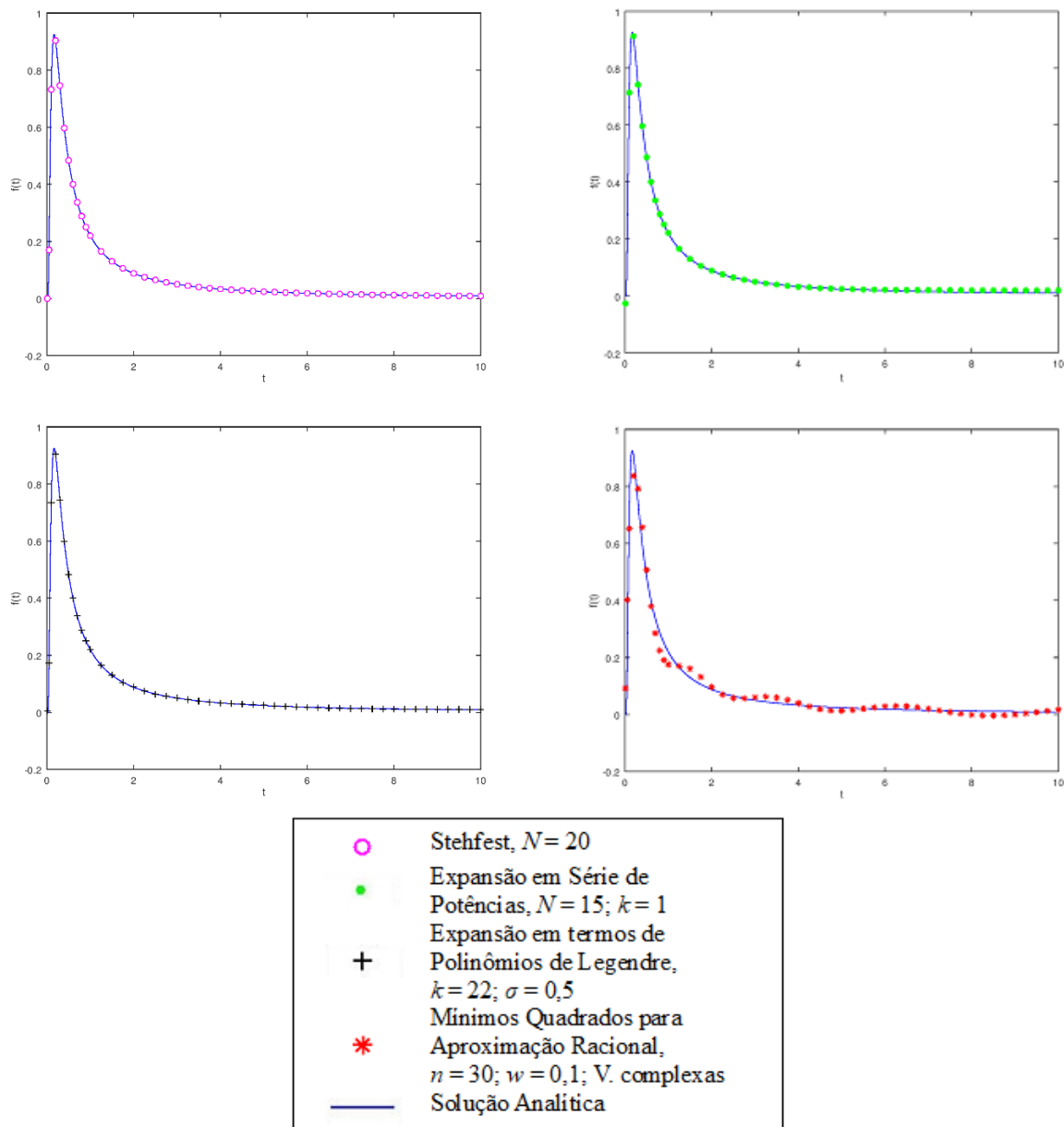


Figura 5.11. Comparativo dos métodos para  $F_7(s)$ .

Tabela 5.12. Erros absoluto e relativo da inversão de  $F_7(s)$ .

Método	Stehfest		Expansão em Série de Potências		Expansão em termos de Polinômios de Legendre		Mínimos Quadrados para Aproximação Racional	
Parâmetros	$N = 20$		$N = 15; k = 1$		$k = 22; \sigma = 0,5$		$F_7'(s) = \frac{-1}{2} \frac{e^{-\sqrt{s}}}{\sqrt{s}};$ $n = 30; w = 0,1; V. \text{ complexas}$	
$t$	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo
0,01	$5,29746 \times 10^{-07}$	-	$2,66991 \times 10^{-02}$	-	$4,88951 \times 10^{-03}$	-	$9,21961 \times 10^{-02}$	-
0,1	$2,04672 \times 10^{-05}$	$2,79511 \times 10^{-05}$	$1,83245 \times 10^{-02}$	$2,50250 \times 10^{-02}$	$1,81706 \times 10^{-03}$	$2,48148 \times 10^{-03}$	$8,04995 \times 10^{-02}$	$1,09935 \times 10^{-01}$
0,5	$1,45389 \times 10^{-05}$	$3,00427 \times 10^{-05}$	$2,90563 \times 10^{-03}$	$6,00409 \times 10^{-03}$	$1,32012 \times 10^{-03}$	$2,72786 \times 10^{-03}$	$2,30217 \times 10^{-02}$	$4,75712 \times 10^{-02}$
1	$1,55694 \times 10^{-05}$	$7,08679 \times 10^{-05}$	$1,22565 \times 10^{-03}$	$5,57887 \times 10^{-03}$	$1,10090 \times 10^{-03}$	$5,01104 \times 10^{-03}$	$4,40472 \times 10^{-02}$	$2,00492 \times 10^{-01}$
2	$5,91030 \times 10^{-06}$	$6,71500 \times 10^{-05}$	$5,34771 \times 10^{-04}$	$6,07582 \times 10^{-03}$	$1,13993 \times 10^{-03}$	$1,29513 \times 10^{-02}$	$8,64203 \times 10^{-03}$	$9,81866 \times 10^{-02}$
3	$1,33782 \times 10^{-05}$	$2,67839 \times 10^{-04}$	$3,80399 \times 10^{-04}$	$7,61584 \times 10^{-03}$	$1,13581 \times 10^{-03}$	$2,27397 \times 10^{-02}$	$1,05055 \times 10^{-02}$	$2,10327 \times 10^{-01}$
4	$1,01367 \times 10^{-05}$	$3,06010 \times 10^{-04}$	$1,09543 \times 10^{-03}$	$3,30692 \times 10^{-02}$	$5,89152 \times 10^{-04}$	$1,77855 \times 10^{-02}$	$6,57198 \times 10^{-03}$	$1,98397 \times 10^{-01}$
5	$6,05701 \times 10^{-06}$	$2,52367 \times 10^{-04}$	$2,48142 \times 10^{-04}$	$1,03389 \times 10^{-02}$	$1,08927 \times 10^{-03}$	$4,53847 \times 10^{-02}$	$1,04843 \times 10^{-02}$	$4,36833 \times 10^{-01}$
6	$3,15690 \times 10^{-06}$	$1,71470 \times 10^{-04}$	$2,68451 \times 10^{-03}$	$1,45812 \times 10^{-01}$	$8,03082 \times 10^{-04}$	$4,36202 \times 10^{-02}$	$1,02612 \times 10^{-02}$	$5,57349 \times 10^{-01}$
7	$3,99245 \times 10^{-06}$	$2,71645 \times 10^{-04}$	$5,19064 \times 10^{-03}$	$3,53170 \times 10^{-01}$	$1,53865 \times 10^{-03}$	$1,04689 \times 10^{-01}$	$5,75728 \times 10^{-03}$	$3,91724 \times 10^{-01}$
8	$2,14810 \times 10^{-06}$	$1,77773 \times 10^{-04}$	$7,35356 \times 10^{-03}$	$6,08568 \times 10^{-01}$	$8,80039 \times 10^{-04}$	$7,28305 \times 10^{-02}$	$1,27860 \times 10^{-02}$	$1,05815 \times 10^{+00}$
9	$7,38455 \times 10^{-06}$	$7,26702 \times 10^{-04}$	$9,10835 \times 10^{-03}$	$8,96339 \times 10^{-01}$	$2,73819 \times 10^{-04}$	$2,69461 \times 10^{-02}$	$9,89666 \times 10^{-03}$	$9,73915 \times 10^{-01}$
10	$3,56618 \times 10^{-06}$	$4,09888 \times 10^{-04}$	$1,05082 \times 10^{-02}$	$1,20779 \times 10^{+00}$	$1,44588 \times 10^{-03}$	$1,66185 \times 10^{-01}$	$8,20380 \times 10^{-03}$	$9,42925 \times 10^{-01}$



Como é mostrado na Tab. 5.12, o método de Stehfest forneceu os resultados mais precisos para a inversão de  $F_7(s)$ , tendo em conta os erros absolutos das ordens de  $10^{-05}$  e  $10^{-06}$ , enquanto que a inversão usando Expansão em termos de Polinômios de Legendre apresentou erros absolutos das ordens de  $10^{-03}$  e  $10^{-04}$ , e, da inversão através de Expansão em Série de Potências, os erros absolutos variam, das ordens de  $10^{-02}$ ,  $10^{-03}$  e  $10^{-04}$ , sendo maiores no início e no final do intervalo de tempo considerado.

A solução obtida da inversão através de Mínimos Quadrados para Aproximação Racional oscila a partir de  $t = 1$ , como pode ser visto na Fig. 5.11.

### 5.8. Inversão de $F_8(s)$

A Tabela 5.13 mostra os erros absoluto e relativo da inversão de  $F_8(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$ , cuja transformada inversa é  $\mathcal{L}^{-1}\{F_8(s)\} = f(t) = e^{-2t}(e^t - 1)$ , através dos métodos citados, e a Figura 5.12 apresenta um comparativo entre a transformada inversa analítica e a transformada inversa numérica desta função, a partir de cada método.

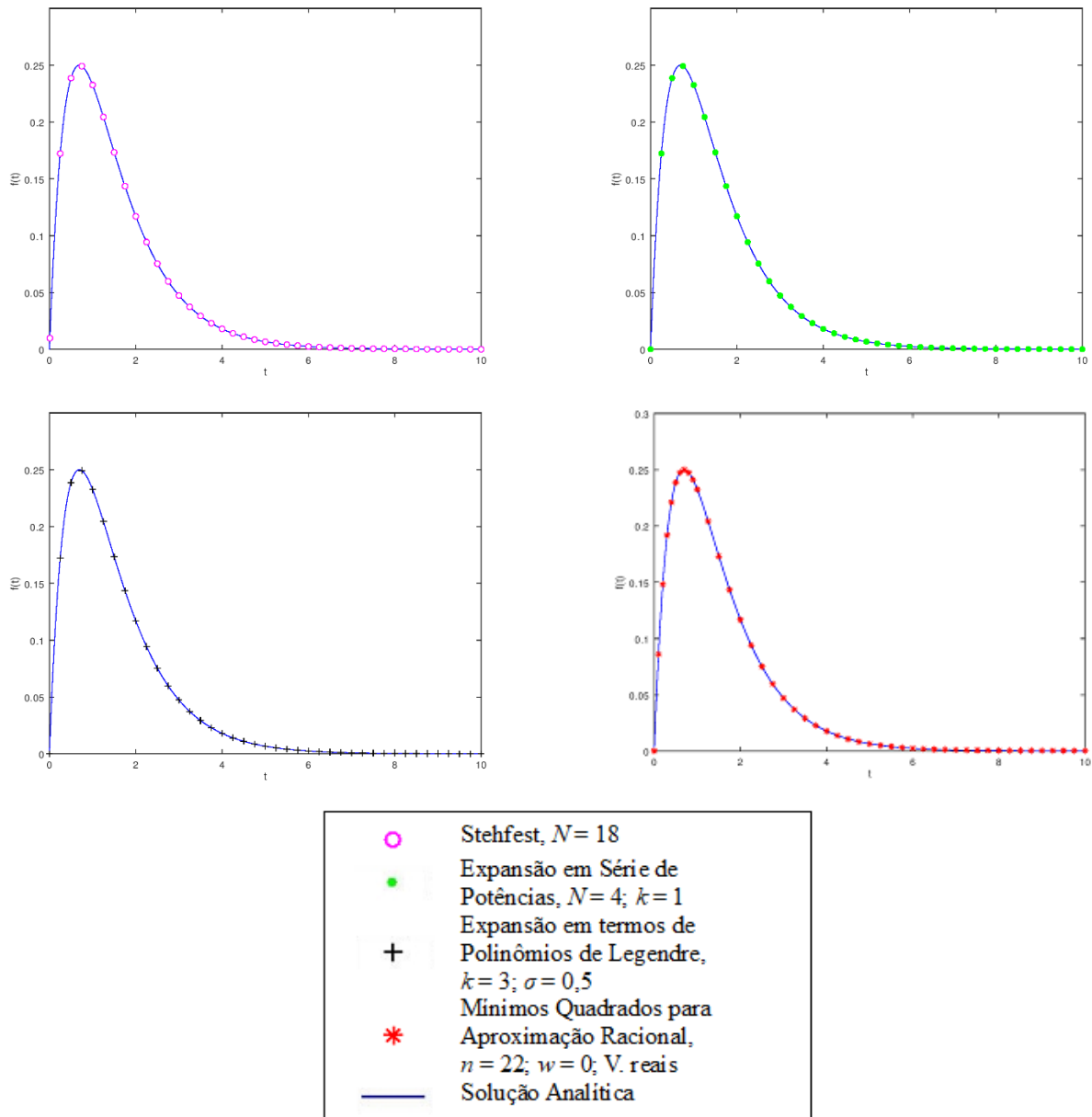


Figura 5.12. Comparativo dos métodos para  $F_8(s)$ .

Um ótimo desempenho dos métodos de Expansão em termos de Polinômios de Legendre e Expansão em Série de Potências se verifica na inversão de funções da classe de  $F_8(s)$ , apresentando erros absolutos não superiores a  $10^{-16}$  e  $10^{-15}$ , respectivamente (Tab. 5.13 e Fig. 5.12).

Através do método de Stehfest, obteve-se uma melhor aproximação para os instantes do intervalo  $t = [0,1]$ , alcançando um erro absoluto da ordem de  $10^{-09}$  para  $t \rightarrow 0^+$ , e para os instantes seguintes a esse intervalo, erros absolutos da ordem de  $10^{-06}$ .

O método de Mínimos Quadrados produziu os resultados menos precisos - erros absolutos das ordens de  $10^{-04}$  e  $10^{-05}$ .

Tabela 5.13. Erros absoluto e relativo da inversão de  $F_8(s)$ .

Método	Stehfest		Expansão em Série de Potências		Expansão em termos de Polinômios de Legendre		Mínimos Quadrados para Aproximação Racional	
Parâmetros	$N = 18$		$N = 4; k = 1$		$k = 3; \sigma = 0,5$		$F'_8(s) = -\frac{1}{(s+1)^2(s+2)} - \frac{1}{(s+1)(s+2)^2};$ $n = 22; w = 0; \text{V. reais}$	
$t$	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo	Erro absoluto	Erro relativo
0	$2,35324 \times 10^{-09}$	-	$1,33227 \times 10^{-15}$	-	$3,33067 \times 10^{-16}$	-	$2,60328 \times 10^{-04}$	-
0,5	$2,04721 \times 10^{-08}$	$8,57824 \times 10^{-08}$	$4,71845 \times 10^{-16}$	$1,97713 \times 10^{-15}$	$8,32667 \times 10^{-17}$	$3,48906 \times 10^{-16}$	$7,00678 \times 10^{-06}$	$2,93599 \times 10^{-05}$
1	$2,93948 \times 10^{-07}$	$1,26405 \times 10^{-06}$	$2,49800 \times 10^{-16}$	$1,07421 \times 10^{-15}$	$1,66533 \times 10^{-16}$	$7,16137 \times 10^{-16}$	$6,56485 \times 10^{-05}$	$2,82305 \times 10^{-04}$
2	$2,09011 \times 10^{-06}$	$1,78612 \times 10^{-05}$	$3,19189 \times 10^{-16}$	$2,72765 \times 10^{-15}$	$2,77556 \times 10^{-17}$	$2,37187 \times 10^{-16}$	$2,38615 \times 10^{-04}$	$2,03910 \times 10^{-03}$
3	$1,07852 \times 10^{-06}$	$2,27977 \times 10^{-05}$	$5,55112 \times 10^{-17}$	$1,17339 \times 10^{-15}$	$6,93889 \times 10^{-17}$	$1,46674 \times 10^{-15}$	$1,35607 \times 10^{-04}$	$2,86646 \times 10^{-03}$
4	$7,21491 \times 10^{-06}$	$4,01270 \times 10^{-04}$	$2,87964 \times 10^{-16}$	$1,60156 \times 10^{-14}$	$1,31839 \times 10^{-16}$	$7,33246 \times 10^{-15}$	$1,55385 \times 10^{-04}$	$8,64204 \times 10^{-03}$
5	$6,97873 \times 10^{-06}$	$1,04276 \times 10^{-03}$	$3,84241 \times 10^{-16}$	$5,74133 \times 10^{-14}$	$1,36176 \times 10^{-16}$	$2,03474 \times 10^{-14}$	$9,11496 \times 10^{-05}$	$1,36196 \times 10^{-02}$
6	$1,30712 \times 10^{-06}$	$5,28639 \times 10^{-04}$	$4,22405 \times 10^{-16}$	$1,70834 \times 10^{-13}$	$1,34875 \times 10^{-16}$	$5,45476 \times 10^{-14}$	$7,13663 \times 10^{-05}$	$2,88628 \times 10^{-02}$
7	$8,10998 \times 10^{-06}$	$8,90179 \times 10^{-03}$	$4,36066 \times 10^{-16}$	$4,78641 \times 10^{-13}$	$1,53523 \times 10^{-16}$	$1,68512 \times 10^{-13}$	$2,26036 \times 10^{-04}$	$2,48105 \times 10^{-01}$
8	$1,03914 \times 10^{-05}$	$3,09869 \times 10^{-02}$	$4,41053 \times 10^{-16}$	$1,31520 \times 10^{-12}$	$1,49457 \times 10^{-16}$	$4,45675 \times 10^{-13}$	$3,27194 \times 10^{-04}$	$9,75678 \times 10^{-01}$
9	$9,04056 \times 10^{-06}$	$7,32655 \times 10^{-02}$	$4,42978 \times 10^{-16}$	$3,58993 \times 10^{-12}$	$1,32191 \times 10^{-16}$	$1,07129 \times 10^{-12}$	$3,87047 \times 10^{-04}$	$3,13666 \times 10^{+00}$
10	$5,11101 \times 10^{-06}$	$1,12583 \times 10^{-01}$	$4,43683 \times 10^{-16}$	$9,77320 \times 10^{-12}$	$1,60984 \times 10^{-16}$	$3,54606 \times 10^{-12}$	$4,26297 \times 10^{-04}$	$9,39024 \times 10^{+00}$

## 5.9. Inversão de $F_9(s)$

A Tabela 5.14 mostra os erros absoluto e relativo da inversão de  $F_9(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$ , cuja transformada inversa é  $\mathcal{L}^{-1}\{F_9(s)\} = f(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3}e^{-0.5t}\text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$ , através dos métodos citados, e a Figura 5.13 apresenta um comparativo entre a transformada inversa analítica e a transformada inversa numérica desta função, a partir de cada método.

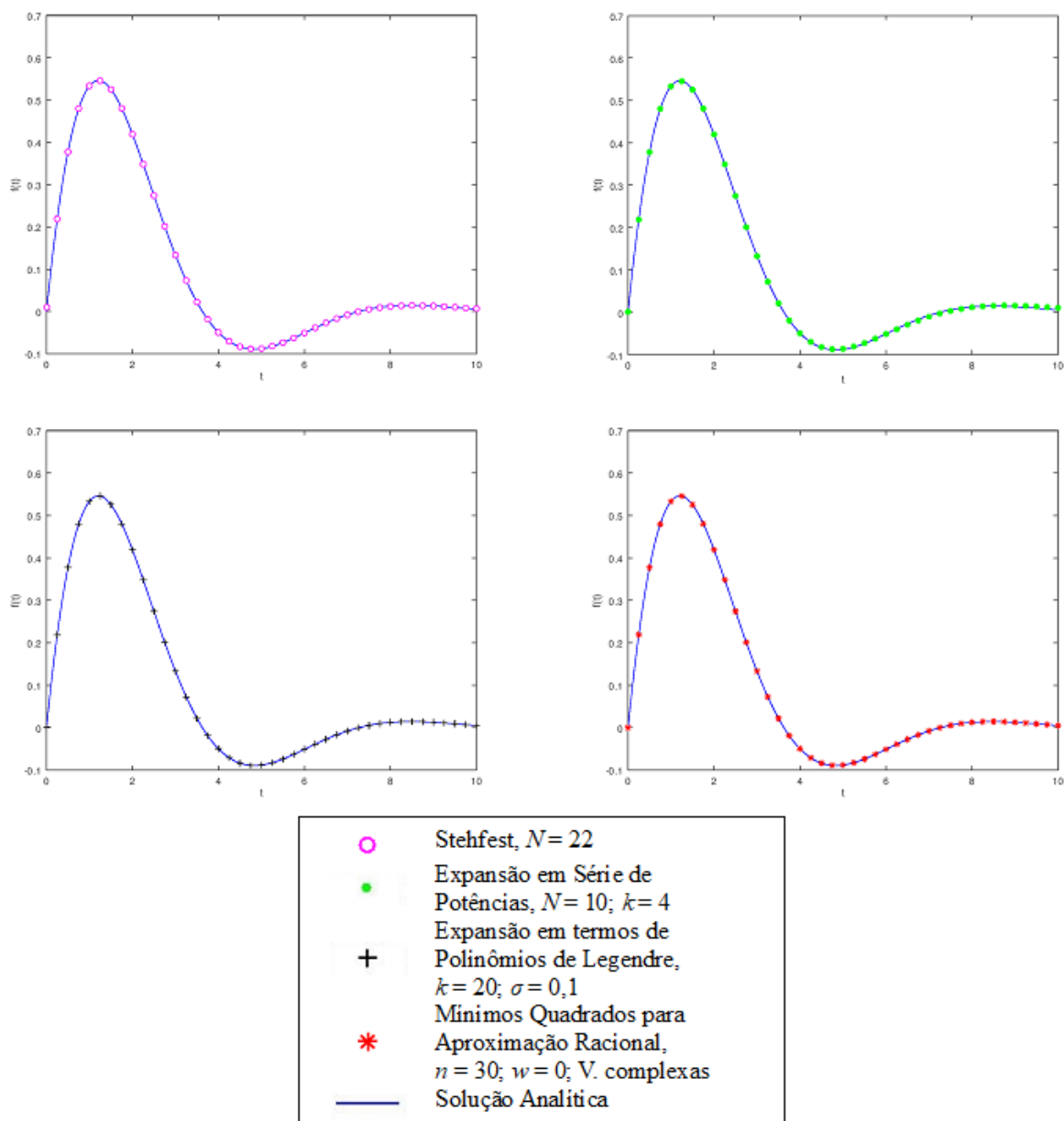


Figura 5.13. Comparativo dos métodos para  $F_9(s)$ .

Tabela 5.14. Erros absoluto e relativo da inversão de  $F_9(s)$ .

<b>Método</b>	<b>Stehfest</b>		<b>Expansão em Série de Potências</b>		<b>Expansão em termos de Polinômios de Legendre</b>		<b>Mínimos Quadrados para Aproximação Racional</b>	
<b>Parâmetros</b>	$N = 22$		$N = 10; k = 4$		$k = 20; \sigma = 0,1$		$F_9'(s) = \frac{-2s+1}{(s^2+s+1)^2};$ $n = 30; w = 0; V. \text{ complexas}$	
$t$	<b>Erro absoluto</b>	<b>Erro relativo</b>	<b>Erro absoluto</b>	<b>Erro relativo</b>	<b>Erro absoluto</b>	<b>Erro relativo</b>	<b>Erro absoluto</b>	<b>Erro relativo</b>
0	$4,75465 \times 10^{-07}$	-	$1,04333 \times 10^{-03}$	-	$1,44798 \times 10^{-03}$	-	$4,71161 \times 10^{-06}$	-
0,5	$1,08814 \times 10^{-05}$	$2,88369 \times 10^{-05}$	$3,99264 \times 10^{-04}$	$1,05809 \times 10^{-03}$	$1,45089 \times 10^{-04}$	$3,84500 \times 10^{-04}$	$2,12919 \times 10^{-06}$	$5,64255 \times 10^{-06}$
1	$1,71839 \times 10^{-05}$	$3,22094 \times 10^{-05}$	$2,95163 \times 10^{-04}$	$5,53251 \times 10^{-04}$	$2,36272 \times 10^{-04}$	$4,42865 \times 10^{-04}$	$4,47294 \times 10^{-07}$	$8,38404 \times 10^{-07}$
2	$9,09537 \times 10^{-05}$	$2,16929 \times 10^{-04}$	$6,73779 \times 10^{-04}$	$1,60699 \times 10^{-03}$	$1,29324 \times 10^{-04}$	$3,08442 \times 10^{-04}$	$8,85815 \times 10^{-07}$	$2,11271 \times 10^{-06}$
3	$2,17243 \times 10^{-04}$	$1,63043 \times 10^{-03}$	$7,18257 \times 10^{-04}$	$5,39060 \times 10^{-03}$	$2,37128 \times 10^{-04}$	$1,77967 \times 10^{-03}$	$1,62748 \times 10^{-06}$	$1,22144 \times 10^{-05}$
4	$3,75690 \times 10^{-05}$	$7,58511 \times 10^{-04}$	$1,42897 \times 10^{-04}$	$2,88506 \times 10^{-03}$	$2,28047 \times 10^{-04}$	$4,60422 \times 10^{-03}$	$2,22553 \times 10^{-06}$	$4,49331 \times 10^{-05}$
5	$4,38089 \times 10^{-04}$	$4,98154 \times 10^{-03}$	$1,70638 \times 10^{-03}$	$1,94034 \times 10^{-02}$	$2,13999 \times 10^{-04}$	$2,43340 \times 10^{-03}$	$4,87147 \times 10^{-06}$	$5,53939 \times 10^{-05}$
6	$3,12327 \times 10^{-04}$	$6,13701 \times 10^{-03}$	$4,24368 \times 10^{-04}$	$8,33855 \times 10^{-03}$	$2,34441 \times 10^{-04}$	$4,60661 \times 10^{-03}$	$3,02332 \times 10^{-06}$	$5,94063 \times 10^{-05}$
7	$3,39532 \times 10^{-04}$	$4,44197 \times 10^{-02}$	$2,81435 \times 10^{-03}$	$3,68192 \times 10^{-01}$	$1,82249 \times 10^{-04}$	$2,38430 \times 10^{-02}$	$6,77122 \times 10^{-07}$	$8,85854 \times 10^{-05}$
8	$6,64315 \times 10^{-04}$	$5,22461 \times 10^{-02}$	$1,17665 \times 10^{-03}$	$9,25399 \times 10^{-02}$	$2,68798 \times 10^{-05}$	$2,11400 \times 10^{-03}$	$1,37891 \times 10^{-06}$	$1,08447 \times 10^{-04}$
9	$2,70487 \times 10^{-04}$	$2,11241 \times 10^{-02}$	$2,79615 \times 10^{-03}$	$2,18370 \times 10^{-01}$	$2,08044 \times 10^{-04}$	$1,62475 \times 10^{-02}$	$2,58526 \times 10^{-06}$	$2,01900 \times 10^{-04}$
10	$1,28398 \times 10^{-03}$	$2,38416 \times 10^{-01}$	$4,85099 \times 10^{-03}$	$9,00753 \times 10^{-01}$	$4,70058 \times 10^{-05}$	$8,72824 \times 10^{-03}$	$1,66271 \times 10^{-06}$	$3,08740 \times 10^{-04}$

O método de Mínimos Quadrados para Aproximação Racional (admitindo-se coeficientes complexos dos termos do somatório para aproximação da transformada inversa) foi o mais preciso na inversão de funções da classe de  $F_9(s)$ , apresentando erros absolutos das ordens de  $10^{-06}$  e  $10^{-07}$ , conforme Tab. 5.14 e Fig. 5.13.

A inversão usando o método de Stehfest produziu erros absolutos das ordens de  $10^{-04}$  e  $10^{-05}$ . Por sua vez, usando Expansão em termos de Polinômios de Legendre, tem-se um erro absoluto da ordem de  $10^{-04}$  para a inversa de  $F_9(s)$  em praticamente todos os instantes. E, da inversão através de Expansão em Série de Potências, os erros absolutos são das ordens de  $10^{-03}$  (para o instante inicial e instantes finais do intervalo) e de  $10^{-04}$ .

## 5.10. Discussão do resultado dos testes

Com base nos resultados obtidos, conclui-se que os métodos Expansão em Série de Potências, Expansão em termos de Polinômios de Legendre e Mínimos Quadrados para Aproximação Racional são mais adequados para os casos em que a transformada inversa é uma função exponencial ( $F_2$  e  $F_8$ ), sobretudo os dois primeiros métodos; ou uma função exponencial decrescente multiplicada por uma função polinomial ou função trigonométrica ( $F_5$  e  $F_9$ ), no caso do último método mencionado. O método de Stehfest funciona bem e de modo similar na inversão da maioria das funções consideradas, com exceção de transformadas de funções trigonométricas, funções com comportamento oscilatório ( $F_3$  e  $F_4$ ).

Em síntese, o trabalho com os métodos de inversão numérica envolve: a avaliação da função transformada, a determinação do valor dos parâmetros do método e a avaliação da transformada inversa. Um aspecto desfavorável ao emprego dos métodos de Expansão em Série de Potências e Expansão em termos de Polinômios de Legendre refere-se a escolha dos parâmetros  $k$  e  $\sigma$ , feita de forma experimental. Quanto ao método dos Mínimos Quadrados para Aproximação Racional, por sua vez, além de se determinar o valor do parâmetro  $w$ , se faz uso da primeira derivada da função transformada, o que também pode ser um empecilho. Se comparado aos demais métodos estudados, gasta um tempo muito maior de processamento, que varia de acordo com, entre outros fatores, o chute inicial para as variáveis. Além disso, a convergência à solução exata também está relacionada aos valores iniciais das variáveis. Então, o ideal é que se compare os resultados para diversos conjuntos de  $A$ 's e  $\alpha$ 's iniciais.

A inversão através dos métodos de Expansão em Série de Potências e Expansão em termos de Polinômios de Legendre envolve a resolução dos sistemas de equações lineares das Eqs. (4.9) e (4.16), respectivamente, nos quais se apresentam matrizes muito mal condicionadas: a conhecida matriz de

Hilbert na Eq. (4.9) e, com o aumento do número de termos usados no somatório, para  $k \geq 23$ , a matriz triangular na Eq. (4.16).

A resolução desses sistemas no *software* Octave, usando-se o operador \ (*backslash*), envolve a decomposição dessas matrizes em termos de seus valores singulares. No entanto, outro método de resolução poderia ser mais adequado e levar a melhores resultados para a inversão numérica, o que encorajaria a investigação/utilização de outras fatorações para a resolução destes sistemas.

Além de serem testados para a inversão de funções elementares, os métodos são aplicados à inversão numérica da solução transformada de Laplace da equação unidimensional de advecção-difusão, usada para descrever processos de transporte de soluto em meios porosos. Nos capítulos a seguir, estão a descrição do problema e sua solução empregando a transformada de Laplace, bem como os resultados da inversão numérica através dos métodos de Stehfest, Expansão em Série de Potências e Expansão em termos de Polinômios de Legendre.

## 6. PROBLEMA DE TRANSPORTE DE SOLUTO EM MEIO POROSO

O termo “meio poroso” é usado para referir-se a uma fase sólida total (a matriz sólida) contendo “vazios” (os poros), que são preenchidos por uma ou mais fases fluidas. Considera-se o espaço de poros interconectados, assim, o fluxo de fluido pode ocorrer através dele. São exemplos de meios porosos o solo e as rochas de aquíferos. Estes tratam-se de formações geológicas subterrâneas que contêm água e permitem a circulação dela através de seus espaços vazios.

Um aquífero é reabastecido da precipitação sobre a região que o cobre (ou sobre sua região de entrada, se o aquífero for confinado). Nesse caso, o excesso de água da chuva que infiltrou-se, move-se para baixo através da zona insaturada do solo (zona de aeração ou vadosa, na qual os poros contêm tanto gases quanto água) para o lençol freático e depois lateralmente na direção do gradiente hidráulico na zona saturada (todos os poros estão completamente cheios de água) (Bear, 1979).

Constata-se que o atual ciclo da água fornece um volume baixo para recarga de aquíferos (Vrba e Verhagen, 2011). Quando o reabastecimento é intermitente, especialmente, usam-se técnicas de recarga artificial através de poços de injeção e, desse modo, o aquífero (além de uma fonte de água) serve como um reservatório de armazenamento.

Em um meio poroso, tal como um aquífero, o fluxo de um fluido ocorre à velocidade de Darcy (Das, Mukherjee e Muralidhar, 2018)

$$v = -\frac{K}{\mu} \nabla p, \quad (6.1)$$

onde  $p$  é a pressão ( $Pa$ ),  $K$  é a permeabilidade do meio ( $m^2$ ) e  $\mu$  é a viscosidade do fluido ( $Pa \cdot s$ ) Lei formulada com base em resultados de experimentos.

Os processos em um aquífero relacionam-se a diversos processos físicos e químicos. Quando, por exemplo, um aquífero é recarregado com águas superficiais contendo sedimentos suspensos, por conta da capacidade de adsorção da matriz sólida, o aquífero serve como um filtro e purificador. Adsorção é o processo no qual espécies em um fluido se aderem a superfície sólida, devido a forças químicas ou físicas. Às vezes, produtos químicos podem ser removidos ou neutralizados por reações químicas. Minerais são adicionados à água, considerando-se a “mistura” da água injetada com a água nativa do aquífero, para redução do teor de matéria orgânica, remoção do sabor ou bactérias e vírus (Bear, 1979).



Apesar de as águas de lagos e rios serem mais suscetíveis à poluição provocada pelo homem, as águas subterrâneas podem também ser gravemente afetadas por solutos poluentes, como o chumbo de aterros, carregado com a água da superfície do solo. Sendo, portanto, além de um recurso limitado em quantidade, também em qualidade.

Diante disso, modelos matemáticos fazem-se úteis no gerenciamento de um aquífero e proteção de recursos, por, entre outras razões, facilitar a previsão do comportamento futuro de um sistema ou o transporte de uma espécie química em um sistema. Por exemplo, ao avaliar o local de contaminação geralmente investiga-se a possibilidade de essa pluma contaminante atingir um ponto específico ou elabora-se estratégias de correção, com base em tais previsões.

No contexto de transferência de massa de uma espécie dissolvida em um fluido em movimento, existem dois mecanismos físicos básicos, aos quais se dá atenção neste estudo, a advecção e a difusão molecular.

A advecção ocorre devido ao fluxo da água, sendo o contaminante transportado a uma velocidade igual à velocidade média do fluido  $u$ , que é dada por (Das, Mukherjee e Muralidhar, 2018)

$$u = \frac{v}{\varepsilon} \quad (6.2)$$

sendo  $v$  a velocidade de Darcy ( $m/s$ ) e  $\varepsilon$  a porosidade do meio.

A difusão molecular produz um fluxo de partículas (no nível microscópico), de uma região de alta concentração para uma de baixa concentração, que ocorre mesmo na ausência de fluxo (Bear, 1972). O fluxo de massa difusivo se relaciona com o gradiente de concentração de forma linear (para baixas concentrações de soluto), com constante de proporcionalidade sendo a difusividade de massa do soluto na solução. Conhecida como lei de Fick, é escrita como (Das, Mukherjee e Muralidhar, 2018)

$$J_d = -D\nabla C, \quad (6.3)$$

onde  $D$  é a difusividade ( $m^2/s$ ) e  $C$  é a concentração do soluto no fluido ( $Kg/m^3$ ).

O espaço vazio pode ser visto como um conjunto de “tubos” interconectados, com diâmetros variados. Referindo-se ao que acontece no nível microscópico, há a dispersão mecânica, causada por variações da velocidade em magnitude e direção, de ponto a ponto, que se devem à complexa geometria do sistema de poros. Para acomodar os fenômenos no nível microscópico, introduz-se

parâmetros do meio no nível macroscópico, como porosidade, permeabilidade e dispersividade.

A dispersão mecânica combinada à difusão molecular, produz a chamada dispersão hidrodinâmica. A situação considerada demonstra o efeito da dispersão hidrodinâmica: Um fluxo de água ocorre através de um meio poroso saturado, onde encontra-se certa quantidade de um contaminante. Esse se espalha gradualmente, ocupando uma parte cada vez maior do “domínio de fluxo”, além do que se espera de acordo com o fluxo apenas. Com isso, a concentração desse contaminante na água decresce (Bear, 1972).

O fenômeno da dispersão hidrodinâmica ocorre de modo dominante em muitos problemas de fluxo de água subterrânea, em processos na engenharia química, na engenharia de reservatórios de petróleo, entre outros (Bear, 1972).

Levando em conta esses processos, a lei que governa o transporte de soluto é a lei da conservação de massa, (Ogata e Banks, 1961)

$$D_{hd} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = u \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial t}, \quad (6.4)$$

onde  $D_{hd}$  é o coeficiente de dispersão hidrodinâmica ( $m^2/s$ ) (a difusividade é substituída por um parâmetro que inclui a dispersão mecânica),  $C$  é a concentração do soluto no fluido ( $Kg/m^3$ ),  $u$  é a velocidade média do fluido (tomada constante) ( $m/s$ ),  $x$  é a coordenada paralela ao fluxo ( $m$ ) e  $t$  é tempo ( $s$ ). O termo à esquerda da Eq. (6.4) é referenciado como termo difusivo e o primeiro termo da direita como termo advectivo.

Na seção a seguir, estão a descrição matemática e a solução analítica de Ogata e Banks (1961) de um problema de transporte de soluto em um meio poroso. O problema considerado é o de um meio semi-infinito, inicialmente ( $t = 0$ ) a concentração do soluto sendo  $C = 0$ , e que (em  $x = 0$ ) é conectado a um reservatório contendo uma solução de soluto de concentração constante  $C = C_0$ .

É conveniente explicar alguns termos específicos, usados para caracterizar o meio. Ele é dito saturado, se um único fluido (gás ou líquido) preencher seu espaço de poros. Trata-se de um meio homogêneo, se suas propriedades, principalmente a permeabilidade, são as mesmas em todos os seus pontos. E, se a permeabilidade em um ponto considerado é independente da direção, diz-se que o meio é isotrópico naquele ponto (Das, Mukherjee e Muralidhar, 2018).

## 6.1. Descrição e solução analítica do problema

Assume-se que o meio é homogêneo e isotrópico e que não há transferência de massa entre as fases sólida e líquida. A equação governante é dada em Eq. (6.4).

As condições inicial e de contorno são:

$$C(x, 0) = 0 \quad x \geq 0 \quad (6.5a)$$

$$C(0, t) = C_0 \quad t \geq 0. \quad (6.5b)$$

$$C(x \rightarrow \infty, t) = 0 \quad t \geq 0 \quad (6.5c)$$

Para reduzir a equação inicial a uma forma mais familiar, Ogata e Banks (1961) supõem uma solução

$$C(x, t) = \Gamma(x, t)e^{\frac{ux}{2D_{hd}} - \frac{u^2t}{4D_{hd}}}. \quad (6.6)$$

Uma vez que

$$\frac{\partial C(x, t)}{\partial x} = \left( \frac{\partial \Gamma(x, t)}{\partial x} + \frac{u}{2D_{hd}} \Gamma(x, t) \right) e^{\frac{ux}{2D_{hd}} - \frac{u^2t}{4D_{hd}}}, \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial^2 C(x, t)}{\partial x^2} = \left( \frac{\partial^2 \Gamma(x, t)}{\partial x^2} + \frac{u}{D_{hd}} \frac{\partial \Gamma(x, t)}{\partial x} + \frac{u^2}{4D_{hd}^2} \Gamma(x, t) \right) e^{\frac{ux}{2D_{hd}} - \frac{u^2t}{4D_{hd}}} \quad (6.8)$$

e

$$\frac{\partial C(x, t)}{\partial t} = \left( \frac{\partial \Gamma(x, t)}{\partial t} - \frac{u^2}{4D_{hd}} \Gamma(x, t) \right) e^{\frac{ux}{2D_{hd}} - \frac{u^2t}{4D_{hd}}}. \quad (6.9)$$

A substituição das Eqs. (6.6)-(6.9) na Eq. (6.4) fornece

$$D_{hd} \frac{\partial^2 \Gamma(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial \Gamma(x, t)}{\partial t}. \quad (6.10)$$

As condições dadas pelas Eq. (6.5a)-(6.5c) tornam-se

$$\Gamma(x, 0) = 0 \quad x \geq 0 \quad (6.11a)$$

$$\Gamma(0, t)e^{\frac{-u^2 t}{4D_{hd}}} = C_0 \quad t \geq 0 \quad (6.11b)$$

$$\Gamma(x \rightarrow \infty, t) = 0 \quad t \geq 0 \quad (6.11c)$$

O problema é resolvido pela aplicação da Transformada de Laplace na variável  $t$  em cada termo da Eq. (6.10),

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 \Gamma(x, t)}{\partial x^2}\right\} = \frac{d^2 \bar{\Gamma}(x, s)}{dx^2} \quad (6.12)$$

e

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial \Gamma(x, t)}{\partial t}\right\} = s\bar{\Gamma}(x, s) - \Gamma(x, 0) = s\bar{\Gamma}(x, s), \quad (6.13)$$

onde  $\bar{\Gamma}(x, s)$  representa a Transformada de Laplace de  $\Gamma(x, t)$ , e no processo é usada a condição (6.11a).

A Equação (6.10) é reduzida à equação diferencial ordinária

$$\frac{d^2 \bar{\Gamma}(x, s)}{dx^2} - \frac{s}{D_{hd}} \bar{\Gamma}(x, s) = 0, \quad (6.14)$$

cuja solução, utilizando a equação característica e suas raízes, é

$$\bar{\Gamma}(x, s) = Ae^{-\sqrt{\frac{s}{D_{hd}}}x} + Be^{\sqrt{\frac{s}{D_{hd}}}x}. \quad (6.15)$$

A condição de contorno (6.11c) requer que  $B = 0$ . E, a partir da condição (6.11b) transformada,

$$\bar{\Gamma}(0, s) = \frac{C_0}{s - \frac{u^2}{4D_{hd}}} = \frac{4D_{hd}C_0}{4D_{hd}s - u^2}, \quad (6.16)$$

obtém-se

$$A = \frac{4D_{hd}C_0}{4D_{hd}s - u^2}. \quad (6.17)$$

Portanto, a solução particular da equação transformada, Eq. (6.14), é

$$\bar{r}(x, s) = \frac{4D_{hd}C_0}{4D_{hd}s - u^2} e^{-\sqrt{\frac{s}{D_{hd}}}x}. \quad (6.18)$$

Seja a solução suposta inicialmente, Eq. (6.6), sua transformada é, conforme Teorema 3.3, Eq. (3.4),

$$\mathcal{L}\{C(x, t)\} = \bar{r}\left(x, s + \frac{u^2}{4D_{hd}}\right) e^{\frac{ux}{2D_{hd}}}. \quad (6.19)$$

Da substituição de Eq. (6.18) em Eq. (6.19), obtém-se

$$\frac{C(x, s)}{C_0} = \frac{1}{s} e^{\left(\frac{u}{2D_{hd}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4s}{D_{hd}} + \left(\frac{u}{D_{hd}}\right)^2}\right)x}, \quad (6.20)$$

equação que é empregada para o teste dos métodos apresentados nas seções 4.1-4.3 deste trabalho.

A fim de avaliar a precisão, os resultados numéricos são comparados à inversa analítica (Ogata e Banks, 1961),

$$\frac{C(x, t)}{C_0} = \frac{1}{2} \left[ \operatorname{erfc}\left(\alpha - \frac{\epsilon}{\alpha}\right) + e^{4\epsilon} \operatorname{erfc}\left(\alpha + \frac{\epsilon}{\alpha}\right) \right], \quad (6.21)$$

onde  $\epsilon = \frac{ux}{4D_{hd}}$ ,  $\alpha = \frac{x}{2\sqrt{D_{hd}t}}$  e  $\operatorname{erfc}$  é a função erro complementar, que é definida por:

$$\operatorname{erfc}(t) = 1 - \operatorname{erf}(t) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du. \quad (6.22)$$

Neste estudo, são considerados os casos de difusão dominante e de advecção dominante,

sendo que o tipo de transporte dominante é explorado em termos do número de Péclet ( $Pe$ ), definido como (Bear, 1972)

$$Pe = \frac{u \cdot B}{D_{hd}}, \quad (6.23)$$

sendo  $B$  a espessura (vertical) do aquífero (neste estudo,  $B = 1\text{m}$ ). Assim, tem-se  $Pe = 10$  ( $D_{hd} = 0,005\text{m}^2/\text{s}$  e  $u = 0,05\text{m/s}$ ), para o caso de difusão dominante, e  $Pe = 1000$  ( $D_{hd} = 0,005\text{m}^2/\text{s}$  e  $u = 5\text{m/s}$ ), quando o transporte for advectivo dominante.

## 7. RESULTADOS

Para a inversão da solução transformada do problema, Eq. (6.20), testam-se os métodos de Stehfest (seção 4.1), Expansão em Série de Potências (seção 4.2), Expansão em termos de Polinômios de Legendre (seção 4.3). A abordagem de Mínimos Quadrados para Aproximação Racional (seção 4.4) não é aplicado à inversão da solução do problema, pois demandaria muito tempo, como observado nos testes para a inversão de funções elementares, uma vez que envolve resolver, para cada instante considerado, um sistema de equações não-lineares, através de um método numérico iterativo.

Considerou-se: quando  $Pe = 10$ , os instantes  $t = 1$ ,  $t = 2$ ,  $t = 5$ ,  $t = 9$  e  $t = 10$ , e domínio  $0 \leq x \leq 1\text{m}$ ; quando  $Pe = 1000$  (a frente de contaminação se move mais rápido), os instantes  $t = 0,01$ ,  $t = 0,02$ ,  $t = 0,05$ ,  $t = 0,09$  e  $t = 0,1$  e domínio  $0 \leq x \leq 0,7\text{m}$ .

O erro absoluto da inversão em cada  $x$  e para cada instante  $t$ , e gráfico das soluções analítica e numérica a partir de cada método são apresentados nas seções 7.1 e 7.2. O erro relativo não é apresentado, pois não teria o significado que se pretende na análise dos resultados.

Os valores de  $N$ , do método de Stehfest, foram escolhidos com base nas recomendações de Wanga e Zhan (2015), que sugerem valores de  $N$  entre 8 e 24, quando  $Pe = 10$ , para os quais foram obtidos resultados satisfatórios. No entanto, quando  $Pe = 1000$ , não foi encontrada nenhuma recomendação. O problema físico central neste estudo também foi proposto por esses autores.

Os valores dos parâmetros dos métodos de Expansão em Série de Potências e de Expansão em termos de Polinômios de Legendre foram determinados a partir de testes usando diferentes valores.

### 7.1. Caso $Pe = 10$

As Tabelas 7.1-7.3 e Figura 7.1 referem-se aos resultados obtidos, considerando-se o caso difusivo dominante ( $Pe = 10$ ).

Tabela 7.1. Erro absoluto da inversão da solução do problema pelo método de Stehfest, quando  $Pe = 10, N = 22$ .

$t$ (s) $x$ (m)	1	2	5	9	10
0,01	$5,02442 \times 10^{-04}$	$7,61068 \times 10^{-04}$	$1,13547 \times 10^{-03}$	$4,74391 \times 10^{-04}$	$7,96806 \times 10^{-04}$
0,10	$2,53813 \times 10^{-05}$	$1,03481 \times 10^{-05}$	$9,49572 \times 10^{-05}$	$5,71222 \times 10^{-04}$	$5,09350 \times 10^{-04}$
0,20	$1,35240 \times 10^{-07}$	$1,75373 \times 10^{-06}$	$1,67388 \times 10^{-05}$	$1,77017 \times 10^{-04}$	$9,39260 \times 10^{-06}$
0,30	$3,64307 \times 10^{-07}$	$4,08947 \times 10^{-07}$	$8,06751 \times 10^{-07}$	$8,70531 \times 10^{-05}$	$4,14767 \times 10^{-05}$
0,40	$6,91168 \times 10^{-09}$	$7,92481 \times 10^{-07}$	$1,29681 \times 10^{-06}$	$4,11288 \times 10^{-05}$	$1,92541 \times 10^{-06}$
0,50	$4,45589 \times 10^{-08}$	$7,27738 \times 10^{-07}$	$1,13299 \times 10^{-06}$	$1,65949 \times 10^{-05}$	$1,13155 \times 10^{-06}$
0,60	$6,70645 \times 10^{-09}$	$4,15642 \times 10^{-07}$	$1,31165 \times 10^{-06}$	$6,79911 \times 10^{-06}$	$2,42326 \times 10^{-06}$
0,70	$1,24008 \times 10^{-08}$	$2,05457 \times 10^{-08}$	$1,69134 \times 10^{-06}$	$8,98949 \times 10^{-07}$	$4,84058 \times 10^{-06}$
0,80	$1,04012 \times 10^{-08}$	$2,38826 \times 10^{-07}$	$2,69241 \times 10^{-06}$	$2,16460 \times 10^{-06}$	$3,31323 \times 10^{-06}$
0,90	$2,31282 \times 10^{-09}$	$1,19776 \times 10^{-07}$	$1,27110 \times 10^{-06}$	$7,91804 \times 10^{-06}$	$6,86781 \times 10^{-06}$
1,00	$1,10687 \times 10^{-09}$	$5,15196 \times 10^{-08}$	$2,55776 \times 10^{-06}$	$2,69003 \times 10^{-06}$	$9,27163 \times 10^{-06}$

Tabela 7.2. Erro absoluto da inversão da solução do problema pelo método de Expansão em Série de Potências, quando  $Pe = 10, N = 16, k = 5$ .

$t$ (s) $x$ (m)	1	2	5	9	10
0,01	$9,10803 \times 10^{-03}$	$1,18646 \times 10^{-03}$	$4,06548 \times 10^{-03}$	$4,44108 \times 10^{-03}$	$2,04159 \times 10^{-03}$
0,10	$4,06303 \times 10^{-04}$	$2,07362 \times 10^{-04}$	$9,58881 \times 10^{-05}$	$1,23138 \times 10^{-04}$	$3,25006 \times 10^{-05}$
0,20	$2,96381 \times 10^{-04}$	$2,11132 \times 10^{-05}$	$1,09321 \times 10^{-04}$	$1,16212 \times 10^{-04}$	$3,44014 \times 10^{-05}$
0,30	$8,62913 \times 10^{-05}$	$3,25362 \times 10^{-05}$	$5,64775 \times 10^{-05}$	$5,39475 \times 10^{-05}$	$7,83668 \times 10^{-05}$
0,40	$4,12481 \times 10^{-06}$	$4,64640 \times 10^{-05}$	$2,71757 \times 10^{-05}$	$2,13113 \times 10^{-05}$	$1,25162 \times 10^{-04}$
0,50	$4,92769 \times 10^{-05}$	$1,10679 \times 10^{-04}$	$9,16872 \times 10^{-05}$	$8,00669 \times 10^{-05}$	$2,78114 \times 10^{-04}$
0,60	$7,55096 \times 10^{-05}$	$2,11437 \times 10^{-04}$	$1,67982 \times 10^{-04}$	$1,47430 \times 10^{-04}$	$5,36442 \times 10^{-04}$
0,70	$1,46414 \times 10^{-04}$	$3,86841 \times 10^{-04}$	$3,11148 \times 10^{-04}$	$2,75303 \times 10^{-04}$	$9,80844 \times 10^{-04}$
0,80	$2,50074 \times 10^{-04}$	$6,66357 \times 10^{-04}$	$5,36710 \times 10^{-04}$	$4,76846 \times 10^{-04}$	$1,68629 \times 10^{-03}$
0,90	$4,02957 \times 10^{-04}$	$1,07391 \times 10^{-03}$	$8,63835 \times 10^{-04}$	$7,66209 \times 10^{-04}$	$2,72030 \times 10^{-03}$
1,00	$6,09502 \times 10^{-04}$	$1,62708 \times 10^{-03}$	$1,30524 \times 10^{-03}$	$1,15007 \times 10^{-03}$	$4,12227 \times 10^{-03}$



Tabela 7.3. Erro absoluto da inversão da solução do problema pelo método de Expansão em termos de Polinômios de Legendre, quando  $Pe = 10$ ,  $k = 19$ ,  $\sigma = 0,1$ .

$t$ (s) $x$ (m)	1	2	5	9	10
0,01	$7,18332 \times 10^{-04}$	$1,92143 \times 10^{-04}$	$1,69899 \times 10^{-03}$	$1,66529 \times 10^{-03}$	$6,19117 \times 10^{-05}$
0,10	$5,24222 \times 10^{-05}$	$5,52635 \times 10^{-05}$	$1,25165 \times 10^{-04}$	$1,79521 \times 10^{-04}$	$2,74702 \times 10^{-05}$
0,20	$3,10694 \times 10^{-05}$	$2,48960 \times 10^{-05}$	$1,49439 \times 10^{-05}$	$8,25762 \times 10^{-06}$	$3,02709 \times 10^{-05}$
0,30	$8,30489 \times 10^{-06}$	$1,29592 \times 10^{-05}$	$2,33335 \times 10^{-05}$	$1,41585 \times 10^{-05}$	$4,45133 \times 10^{-05}$
0,40	$2,63619 \times 10^{-05}$	$2,42785 \times 10^{-05}$	$4,83170 \times 10^{-05}$	$4,49268 \times 10^{-05}$	$8,18426 \times 10^{-05}$
0,50	$1,05144 \times 10^{-04}$	$9,89830 \times 10^{-05}$	$9,92365 \times 10^{-05}$	$4,37636 \times 10^{-05}$	$1,96969 \times 10^{-04}$
0,60	$2,51084 \times 10^{-04}$	$2,33738 \times 10^{-04}$	$1,81777 \times 10^{-04}$	$4,39079 \times 10^{-05}$	$3,90039 \times 10^{-04}$
0,70	$3,95122 \times 10^{-04}$	$3,68167 \times 10^{-04}$	$3,23568 \times 10^{-04}$	$1,20953 \times 10^{-04}$	$6,67070 \times 10^{-04}$
0,80	$7,01741 \times 10^{-04}$	$6,54659 \times 10^{-04}$	$5,54948 \times 10^{-04}$	$1,81459 \times 10^{-04}$	$1,15551 \times 10^{-03}$
0,90	$1,15421 \times 10^{-03}$	$1,07584 \times 10^{-03}$	$8,98621 \times 10^{-04}$	$2,83975 \times 10^{-04}$	$1,88154 \times 10^{-03}$
1,00	$1,77768 \times 10^{-03}$	$1,65831 \times 10^{-03}$	$1,39666 \times 10^{-03}$	$4,45605 \times 10^{-04}$	$2,91950 \times 10^{-03}$

Conforme mostrado nas Tabs. 7.1-7.3 e Fig. 7.1, quando  $Pe = 10$ , os erros da inversão através de cada um dos métodos, são relativamente pequenos. No entanto, o método de Stehfest fornece os resultados mais precisos. O mesmo apresenta uma melhor aproximação em  $0,4m \leq x \leq 1m$ , com erros das ordens de  $10^{-08}$  e  $10^{-09}$  quando  $t = 1$ ;  $10^{-07}$  e  $10^{-08}$  quando  $t = 2$ ; e  $10^{-05}$  e  $10^{-06}$  para outros valores de  $t$ .

Expansão em termos de Polinômios de Legendre, por sua vez, apresenta maiores erros (da ordem de  $10^{-03}$ ) nos pontos finais do domínio, para os instantes  $t = 1$ ,  $t = 2$  e  $t = 10$ ; e próximo à  $x = 0$ , para  $t = 5$  e  $t = 9$ . Os erros em outros pontos do domínio variam, das ordens de  $10^{-04}$  e  $10^{-05}$ .

A inversão através de Expansão em Série de Potências resulta em um maior erro, da ordem de  $10^{-03}$ , em  $x = 0,01$ , para todos os valores de  $t$ ; e também, nos maiores valores de  $x$  considerados, para os instantes exceto  $t = 1$ .

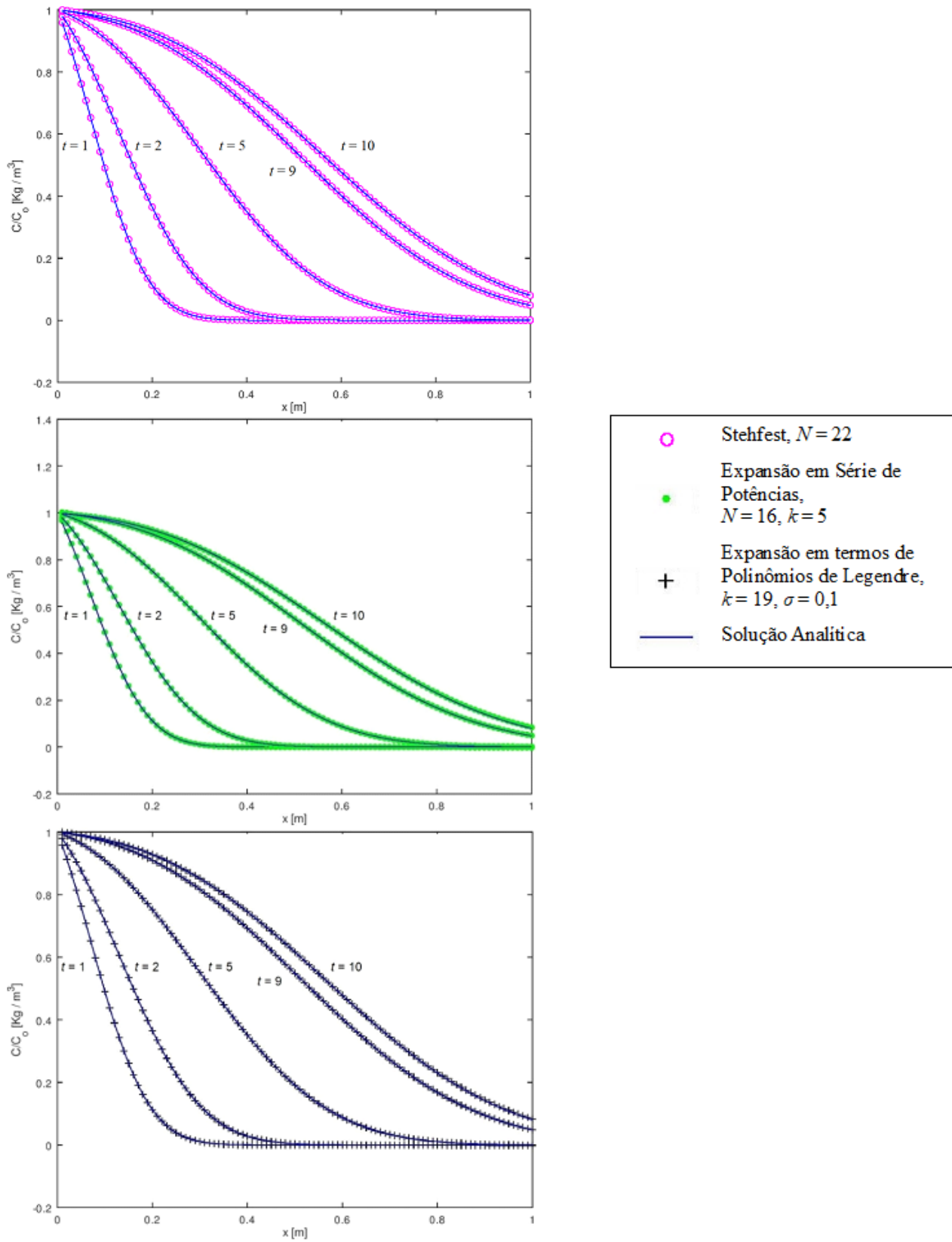


Figura 7.1. Soluções analítica e numérica através dos métodos de Stehfest, Expansão em Série de Potências e Expansão em termos de Polinômios de Legendre, quando  $Pe = 10$ .

A fim de investigar o efeito dos parâmetros livres dos métodos nos resultados, alguns testes adicionais foram realizados. Para a inversão através de Expansão em Série de Potências, foram usados valores de  $k$ ,  $k = 5$ ,  $k = 10$  e  $k = 15$ , e valores de  $N$ ,  $N = 16$  e  $N = 21$ . Observa-se que não houve variação significativa na magnitude dos erros da inversão para os pares de valores considerados, com exceção do resultado em  $x = 0,01$ , para  $t = 1$ , como mostra a Fig. 7.2.

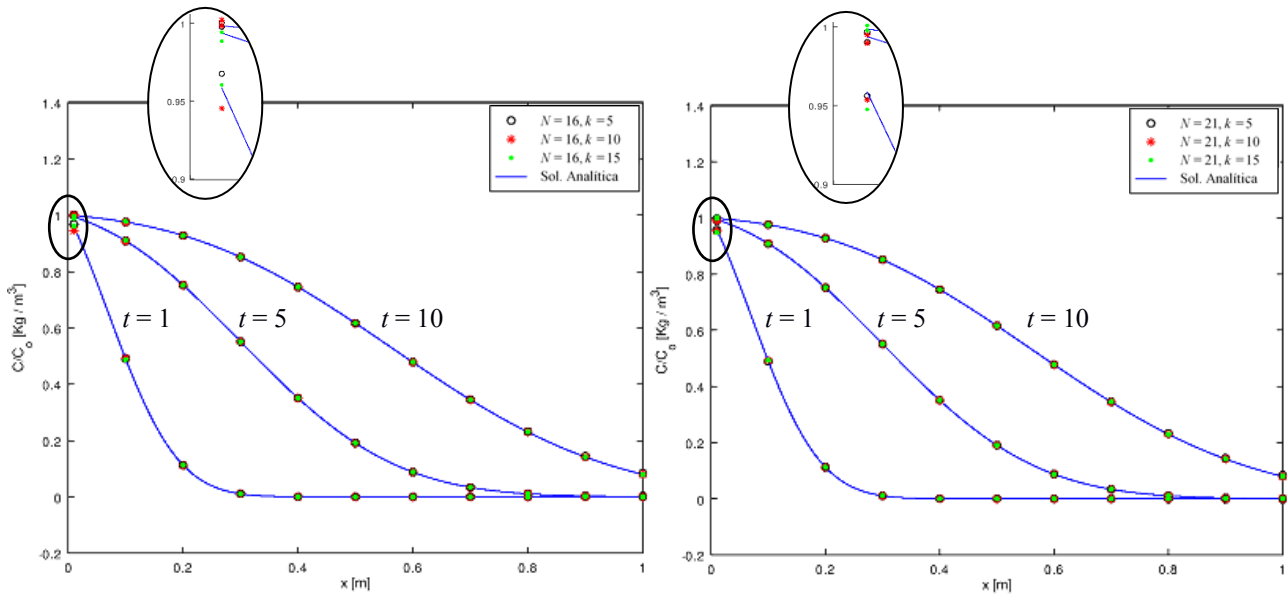


Figura 7.2. Variação dos valores dos parâmetros livres do método de Expansão em Série de Potências, quando  $Pe = 10$ .

Os testes para determinar o valor de  $k$ , que refere-se ao número de termos Polinômios de Legendre da série, indicaram que esse valor não deve ser maior que 23. Isso se deve ao fato de o sistema tornar-se tão mal condicionado a ponto de os resultados da inversão apresentarem erros muito grandes. Sendo assim, considerou-se  $k = 15$  e  $k = 19$ , e  $\sigma = 0,05$ ,  $\sigma = 0,1$  e  $\sigma = 0,15$ .

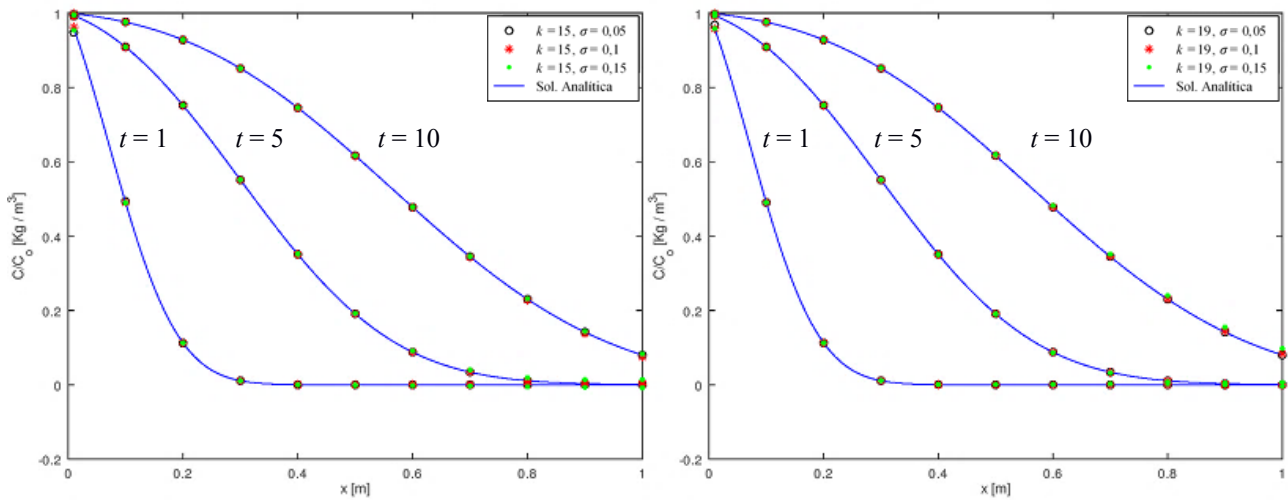


Figura 7.3. Variação dos valores dos parâmetros livres do método de Expansão em termos de Polinômios de Legendre, quando  $Pe = 10$ .

Como pode ser visto na Fig. 7.3, o método mostrou-se mais sensível às variações do valor do parâmetro  $\sigma$ . Os resultados diferem especialmente para o tempo  $t = 10$ , nos maiores  $x$ .

## 7.2. Caso $Pe = 1000$

As Tabelas 7.4-7.6 e Figura 7.4 referem-se aos resultados obtidos, considerando-se o caso advectivo dominante ( $Pe = 1000$ ).

Tabela 7.4. Erro absoluto da inversão da solução do problema pelo método de Stehfest, quando  $Pe = 1000$ ,  $N = 20$ .

$t$ (s) $x$ (m)	0,01	0,02	0,05	0,09	0,1
0,01	$5,22082 \times 10^{-05}$	$3,50339 \times 10^{-05}$	$2,99244 \times 10^{-05}$	$2,30704 \times 10^{-05}$	$1,85370 \times 10^{-05}$
0,10	$8,18812 \times 10^{-03}$	$8,20762 \times 10^{-04}$	$3,18002 \times 10^{-03}$	$3,69436 \times 10^{-05}$	$1,59078 \times 10^{-04}$
0,20	$2,04093 \times 10^{-04}$	$1,16459 \times 10^{-02}$	$2,01886 \times 10^{-02}$	$7,85880 \times 10^{-03}$	$3,03070 \times 10^{-03}$
0,30	$1,09243 \times 10^{-05}$	$1,70418 \times 10^{-03}$	$4,60456 \times 10^{-02}$	$3,57648 \times 10^{-02}$	$1,30047 \times 10^{-02}$
0,40	$6,04761 \times 10^{-07}$	$3,68370 \times 10^{-04}$	$5,40882 \times 10^{-03}$	$1,26274 \times 10^{-01}$	$9,01765 \times 10^{-03}$
0,50	$3,20729 \times 10^{-08}$	$3,54306 \times 10^{-05}$	$1,23912 \times 10^{-02}$	$1,62981 \times 10^{-01}$	$1,03621 \times 10^{-02}$
0,60	$4,11927 \times 10^{-09}$	$7,75927 \times 10^{-06}$	$9,53212 \times 10^{-03}$	$7,19647 \times 10^{-02}$	$3,39447 \times 10^{-02}$
0,70	$6,24679 \times 10^{-11}$	$2,21607 \times 10^{-06}$	$8,89901 \times 10^{-04}$	$1,81369 \times 10^{-02}$	$7,39587 \times 10^{-02}$

Tabela 7.5. Erro absoluto da inversão da solução do problema pelo método de Expansão em Série de Potências, quando  $Pe = 1000$ ,  $N = 150$ ,  $k = 0,1$ .

$t$ (s) $x$ (m)	0,01	0,02	0,05	0,09	0,1
0,01	$8,52553 \times 10^{-04}$	$1,20097 \times 10^{-04}$	$1,33055 \times 10^{-04}$	$1,02074 \times 10^{-04}$	$4,30658 \times 10^{-05}$
0,10	$1,05305 \times 10^{-02}$	$1,26155 \times 10^{-03}$	$3,34407 \times 10^{-03}$	$4,29087 \times 10^{-04}$	$3,14249 \times 10^{-03}$
0,20	$1,05957 \times 10^{-02}$	$7,63074 \times 10^{-03}$	$9,25383 \times 10^{-03}$	$1,16262 \times 10^{-02}$	$6,28394 \times 10^{-03}$
0,30	$4,16040 \times 10^{-03}$	$2,02613 \times 10^{-02}$	$1,56774 \times 10^{-02}$	$1,20182 \times 10^{-02}$	$2,68503 \times 10^{-02}$
0,40	$1,04964 \times 10^{-03}$	$1,79275 \times 10^{-02}$	$2,05856 \times 10^{-02}$	$9,19205 \times 10^{-02}$	$3,67030 \times 10^{-02}$
0,50	$6,69711 \times 10^{-03}$	$1,27746 \times 10^{-02}$	$2,13177 \times 10^{-03}$	$1,27722 \times 10^{-01}$	$9,21087 \times 10^{-03}$
0,60	$1,11806 \times 10^{-02}$	$1,94583 \times 10^{-03}$	$2,90501 \times 10^{-02}$	$7,68669 \times 10^{-02}$	$8,18737 \times 10^{-03}$
0,70	$8,94766 \times 10^{-04}$	$1,18533 \times 10^{-02}$	$1,57807 \times 10^{-02}$	$4,06025 \times 10^{-03}$	$5,47749 \times 10^{-02}$

Tabela 7.6. Erro absoluto da inversão da solução do problema pelo método de Expansão em termos de Polinômios de Legendre, quando  $Pe = 1000$ ,  $k = 20$ ,  $\sigma = 7$ .

$t$ (s) $x$ (m)	0,01	0,02	0,05	0,09	0,1
0,01	$4,00540 \times 10^{-03}$	$7,31463 \times 10^{-04}$	$2,73174 \times 10^{-03}$	$1,25065 \times 10^{-03}$	$1,10698 \times 10^{-03}$
0,10	$1,11562 \times 10^{-02}$	$6,66320 \times 10^{-03}$	$6,49737 \times 10^{-03}$	$5,49756 \times 10^{-03}$	$8,10052 \times 10^{-04}$
0,20	$4,55696 \times 10^{-03}$	$4,20301 \times 10^{-03}$	$2,20733 \times 10^{-02}$	$7,90678 \times 10^{-03}$	$5,71059 \times 10^{-03}$
0,30	$6,87201 \times 10^{-03}$	$9,74621 \times 10^{-03}$	$3,45016 \times 10^{-03}$	$2,37692 \times 10^{-02}$	$6,67342 \times 10^{-03}$
0,40	$2,11503 \times 10^{-03}$	$8,03750 \times 10^{-03}$	$2,62051 \times 10^{-02}$	$3,28620 \times 10^{-02}$	$3,72142 \times 10^{-02}$
0,50	$5,14439 \times 10^{-03}$	$1,23637 \times 10^{-02}$	$1,74877 \times 10^{-02}$	$5,63558 \times 10^{-02}$	$2,61603 \times 10^{-03}$
0,60	$4,40159 \times 10^{-03}$	$1,12590 \times 10^{-02}$	$1,64764 \times 10^{-02}$	$1,98968 \times 10^{-02}$	$4,89299 \times 10^{-02}$
0,70	$1,69013 \times 10^{-04}$	$3,51347 \times 10^{-03}$	$1,29324 \times 10^{-02}$	$2,24167 \times 10^{-02}$	$1,55348 \times 10^{-02}$

Para o caso em que  $Pe = 1000$ , os métodos tiveram um desempenho semelhante, como mostrado nas Tabs. 7.4-7.6 e Fig. 7.4, e a solução numérica oscila conforme  $x$  aumenta, exceto para o primeiro instante.

Da inversão através do método de Stehfest, os melhores resultados foram obtidos para os instantes  $t = 0,01$  (especialmente nos pontos finais do domínio, atingindo um erro de  $10^{-11}$  em  $x = 0,7m$ ) e  $t = 0,02$ . Para os demais instantes, há uma melhor aproximação em  $x = 0,01m$  e  $x = 0,1m$ .

A inversão por Expansão em Série de Potências apresenta menores erros próximo à  $x = 0$ , para todos os instantes considerados, e também em  $x = 0,7m$ , para o primeiro instante  $t = 0,01$ .

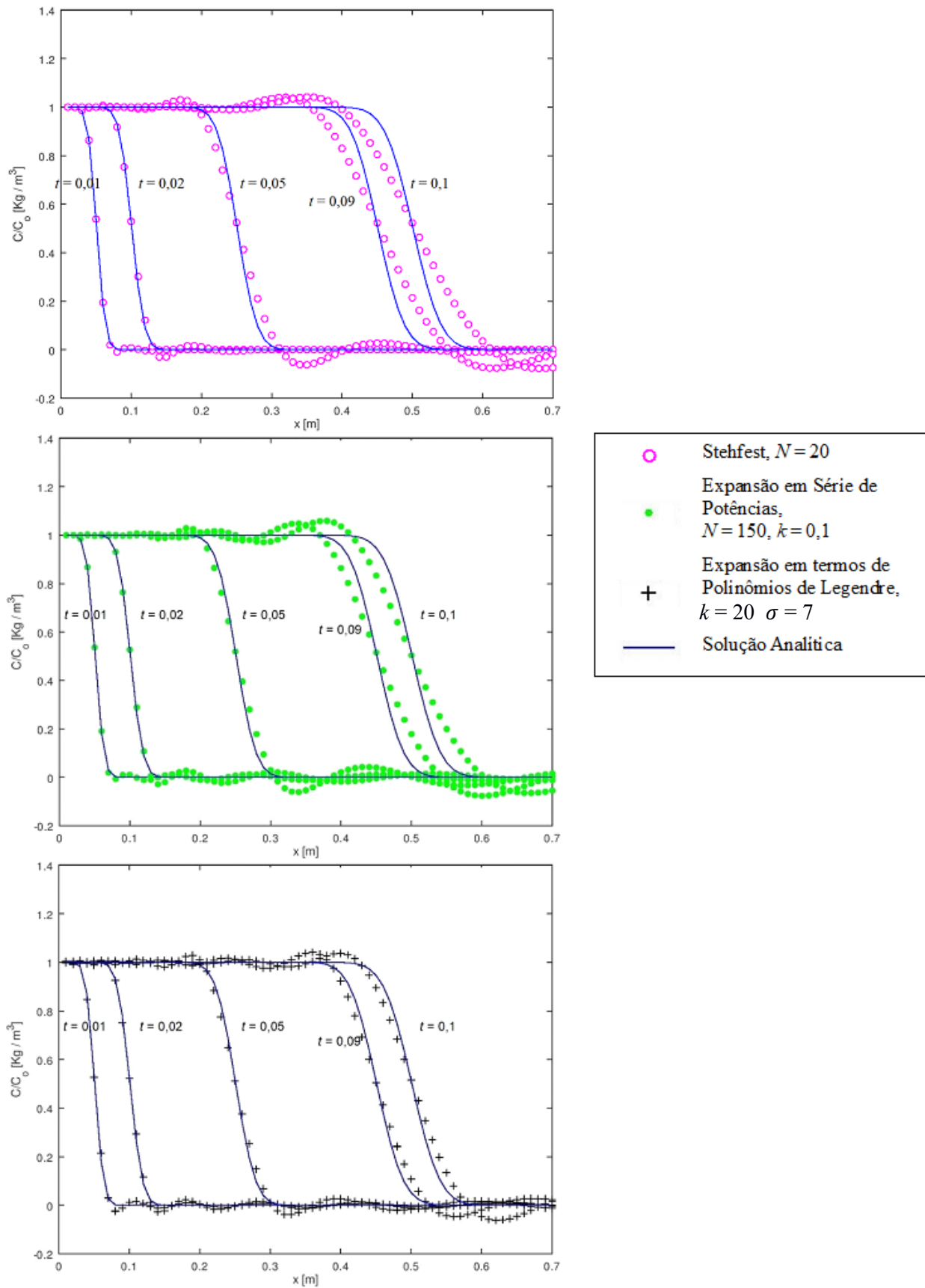


Figura 7.4. Soluções analítica e numérica, através dos métodos de Stehfest, Expansão em Série de Potências e Expansão em termos de Polinômios de Legendre, quando  $Pe = 1000$ .

De modo geral, os erros da inversão usando o método de Expansão em termos de Polinômios de Legendre são maiores nos maiores valores de  $x$ , para todos os instantes, exceto quando  $t = 0,01$ , onde os erros são, em maioria, da ordem de  $10^{-03}$ .

Comparando os resultados obtidos através de cada método, Stehfest ainda possibilita os melhores resultados (Tabs. 7.4-7.6 e Fig. 7.4).

Com relação aos valores dos parâmetros do método de Expansão em Série de Potências para o caso  $Pe = 1000$ , considerou-se  $k = 0,05$ ,  $k = 0,1$  e  $k = 0,15$ , e  $N = 100$  e  $N = 150$ . Conforme mostrado na Fig. 7.5, apesar de se obter resultados mais distantes da solução analítica, usando  $k = 0,05$ , se comparados aos resultados obtidos usando outros valores de  $k$ , o comportamento da solução numérica é o mesmo (oscilatório), para todos os pares de valores.

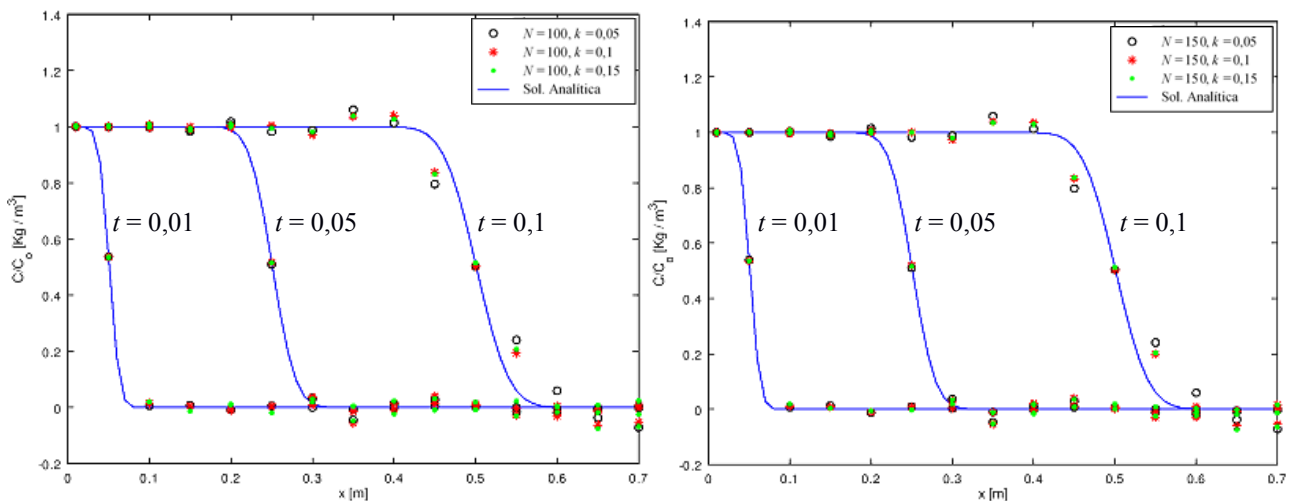


Figura 7.5. Variação dos valores dos parâmetros livres do método de Expansão em Série de Potências, quando  $Pe = 1000$ .

A Fig. 7.6 mostra os resultados da inversão através do método de Expansão em termos de Polinômios de Legendre, usando-se  $\sigma = 5$ ,  $\sigma = 7$  e  $\sigma = 10$ ,  $k = 15$  e  $k = 20$ . Notoriamente, os resultados são melhores usando  $k = 20$ , além de se mostrarem mais estáveis à alteração do valor de  $\sigma$ . No entanto, usar um número maior de termos no somatório não foi suficiente para que a inversão produzisse bons resultados.

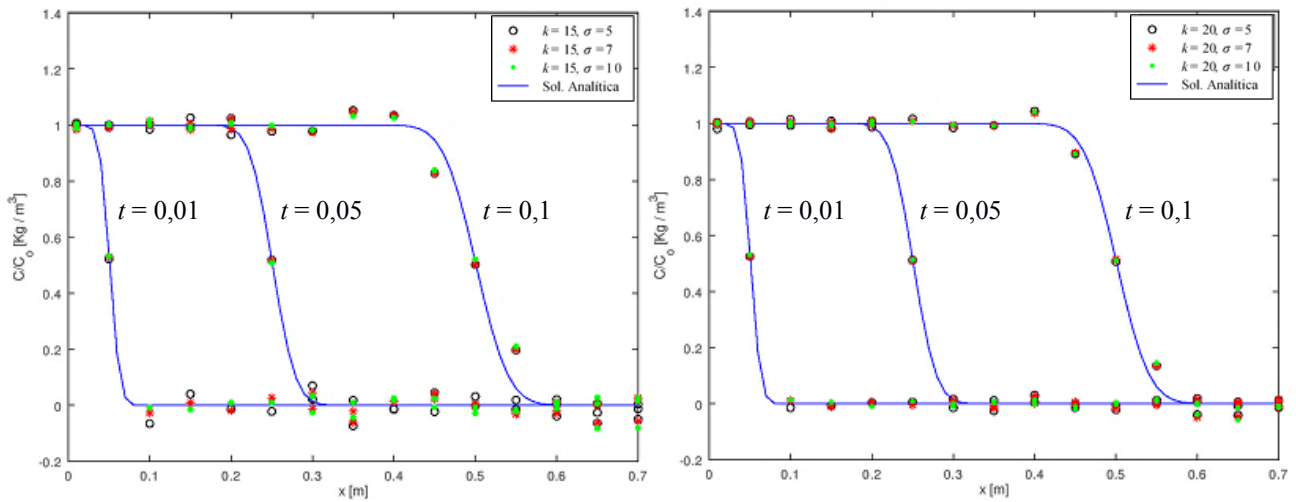


Figura 7.6. Variação dos valores dos parâmetros livres do método de Expansão em termos de Polinômios de Legendre, quando  $Pe = 1000$ .

Apresentados os resultados, conclui-se que os três métodos testados são recomendados apenas para problemas de transporte dominado por difusão ( $Pe = 10$ ). Cabe mencionar que quando a advecção é dominante ( $Pe = 1000$ ), a equação parabólica se torna uma equação hiperbólica, e frequentemente leva a instabilidades numéricas, como afirmam Wanga e Zhan (2015).



## 8. CONCLUSÕES

Métodos como a Transformada de Laplace fazem-se úteis na resolução de equações diferenciais que modelam processos nas mais diversas áreas do conhecimento. Seu potencial de “desfazer” derivadas, simplificando a equação a ser resolvida, atribui à Transformada certa importância. No entanto, a dificuldade principal ao se empregar a técnica trata-se de reverter a solução obtida ao domínio do tempo. Casos em que a inversão analítica é inviável, por conta da forma dessa solução, recorre-se a métodos de inversão numérica. Neste trabalho, quatro métodos foram apresentados: Stehfest, Expansão em Série de Potências, Expansão em termos de Polinômios de Legendre e Mínimos Quadrados para Aproximação Racional.

Primeiramente, os métodos foram testados para inverter funções elementares, avaliando a precisão dos resultados em comparação às transformadas inversas analíticas. A análise do desempenho de um determinado método na inversão de cada função permitiu fazer recomendações sobre seu uso: o método de Stehfest não é indicado à inversão apenas de funções cuja transformada inversa envolve uma função trigonométrica; Expansão em Série de Potências e Expansão em termos de Polinômios de Legendre melhor aproximam transformadas inversas sendo funções exponenciais. O método de Mínimos Quadrados para Aproximação Racional é mais adequado para os casos em que a transformada inversa é uma função exponencial decrescente multiplicada por uma função polinomial ou função trigonométrica.

Os métodos de Stehfest, Expansão em Série de Potências e Expansão em termos de Polinômios de Legendre também foram aplicados para inverter numericamente a solução da equação de advecção-difusão, com o enfoque no problema de transporte de contaminantes em aquíferos. Considerou-se os casos de transporte difusivo dominante e de transporte advectivo dominante (números de Péclet  $Pe = 10$  e  $Pe = 1000$ , respectivamente).

Os resultados numéricos obtidos mostram que os três métodos testados são recomendados apenas para problemas de transporte dominado por difusão ( $Pe = 10$ ), apresentando erros relativamente pequenos, sobretudo o método de Stehfest. Escoamentos com estas características estão associados a problemas de fluxo de água subterrânea, uma vez que a velocidade de fluxo dessas águas é muito lenta.

Para o caso em que  $Pe = 1000$ , as soluções numéricas através de cada método oscilam conforme  $x$  aumenta, exceto para o primeiro instante.

O teste da abordagem de Mínimos Quadrados para Aproximação Racional restringiu-se à inversão de funções elementares. Como observado nesses testes iniciais, o tempo computacional

gasto é considerável. Aplicar esse método ao problema central neste estudo demanda um tempo ainda maior, uma vez que envolve resolver, para cada instante, um sistema de equações não-lineares, através de um método numérico iterativo, de qual a convergência é condicionada a um chute inicial para as variáveis. É evidente o tempo computacional estar relacionado também ao número de termos do somatório para aproximação da transformada inversa,  $n$ , que se considera (então,  $2n$  variáveis a determinar).

A contribuição principal deste estudo está na aplicação dos métodos de Expansão em Série de Potências e Expansão em termos de Polinômios de Legendre à solução de problemas de transporte de soluto em meios porosos. Métodos simples, baseados na expansão da transformada inversa em séries, que possibilitaram bons resultados na inversão de determinadas funções. As limitações relacionadas a presença de matrizes mal-condicionadas no sistema que fornece os coeficientes da expansão, sugere, como proposta para trabalhos futuros, a investigação de métodos para solução de sistemas mal-condicionados, tais como fatoração QR (ou QR com pivoteamento de coluna) e fatoração ortogonal completa dessas matrizes.

Sendo assim, os objetivos foram alcançados. Cabe enfatizar que, ao contrário de apontar um melhor método para inversão numérica, com a análise e comparação do desempenho obtido aqui, apresentaram-se recomendações ao emprego dos métodos, como pretendido, reconhecendo as particularidades de cada formulação. Caso a precisão numérica seja o fator decisivo na escolha, devem ser considerados Stehfest, Expansão em termos de Polinômios de Legendre e Expansão em Série de Potências, nessa ordem, exceto em casos em que a solução procurada tenha comportamento oscilatório. Uma proposta para trabalhos futuros é investigar métodos eficientes para inverter transformadas de funções com essa característica. Conhecendo pouco a respeito da solução, indica-se comparar os resultados da inversão numérica através de mais de um método.

## 9. REFERÊNCIAS

- ABATE, J.; VALKÓ, P. P. Multi-precision Laplace transform inversion. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 60, n. 5, p. 979-993, jun. 2004.
- ADAMEK, V.; VALES, F.; CERV, J. Numerical Laplace inversion in problems of elastodynamics: Comparison of four algorithms. **Advances in Engineering Software**, v. 113, p. 120-129, nov. 2017.
- AMARAL, G. C. M. **Análise Comparativa do Desempenho Numérico de Técnicas de Inversão da Transformada de Laplace**. Dissertação (Mestrado), Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, 2016.
- ARAL, M. M.; GÜLÇAT, Ü. A finite element Laplace transform solution technique for the wave equation. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 11, p. 1719-1732, 1977.
- BARICHELLO, L. B. **Inversão numérica da Transformada de Laplace por polinômios trigonométricos e de Laguerre**. Dissertação (Mestrado), Programa de Pós-Graduação em Matemática, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1988.
- BEAR, J. **Dynamics of fluids in porous media**. New York: Dover Publications. Originally published: NY: American Elsevier Publishing Company, 1972.
- BEAR, J. **Hydraulics of groundwater**. New York: Dover Publications. Originally published: NY: McGraw-Hill, 1979. Com correções.
- BELLMAN, R.; KALABA, R.; SHIFFMAN, B. A numerical inversion of the Laplace Transform. The Rand Corporation, RM-3513-ARPA. 1963.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Rio de Janeiro: LTC, 2010. Tradução e revisão de Valéria de Magalhães Iório.
- CHUNG, H.Y.; SUN, Y.Y. Taylor series approach to functional approximation for inversion of Laplace transforms. **Electronics Letters**, v. 22, n. 23, p. 1219-1221, 1986.
- COHEN, A. M. **Numerical Methods for Laplace Transform Inversion**. New York: Springer Science, 2007.
- CRUMP K. S. Numerical inversion of Laplace transforms using a Fourier series approximation. **Journal of the Association for Computing Machinery**, v. 23, n. 1, p. 89-96, jan. 1976.
- DA COSTA, C. P.; RUI, K.; PÉREZ-FERNÁNDEZ, L. D. Different Numerical Inversion Algorithms of the Laplace Transform for the Solution of the Advection-Diffusion Equation with Non-local Closure in Air Pollution Modeling. **Tendências em Matemática Aplicada e Computacional**, v. 19, n. 1, p. 43-58, 2018.
- D'AMORE, L.; CAMPAGNA, R.; GALLETTI, A.; MARCELLINO, L.; MURLI, A. A smoothing

spline that approximates Laplace transform functions only known on measurements on the real axis. **Inverse Problems**, v. 28, n. 2, p. 1-37, jan. 2012.

DAS, M. K.; MUKHERJEE, P. P.; MURALIDHAR, K. **Modeling Transport Phenomena in Porous Media with Applications**. Mechanical Engineering Series. Springer, 2018.

DAVIES, B.; MARTIN, B. Numerical inversion of the Laplace transform: a survey and comparison of methods. **Journal of Computational Physics**, v. 33, n. 1, p. 1-32, 1979.

DE HOOG, F. R.; KNIGHT, J. H.; STOKES, A. N. An improved method for numerical inversion of Laplace transforms. **SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing**, v. 3, n. 3, p. 357-366, 1982.

DUBNER H., ABATE J. Numerical inversion of Laplace transforms by relating them to the Fourier cosine transform. **Journal of the Association for Computing Machinery**, v. 15, n. 1, p. 115-123, jan. 1968.

DUFFY, D. G. On the numerical inversion of Laplace transforms: comparison of three new methods on characteristic problems from applications. **ACM Transactions on Mathematical Software**, v. 19, n. 3, p. 333-359, set. 1993.

DURBIN, F. Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method. **The Computer Journal**, v. 17, n. 4, p. 371-376, nov. 1974.

GAVER JR., D. P. Observing Stochastic Processes, and Approximate Transform Inversion. **Operations Research**, v. 14, n. 3, p. 444-459, maio-jun. 1966.

GIUNTA, G.; LACCETTI, G.; RIZZARDI, M.R. More on the Weeks method for the numerical inversion of the Laplace transform. **Numerische Mathematik**, v. 54, n. 2, p. 193-200, mar. 1989.

HASSANZADEH, H.; POOLADI-DARVISH, M. Comparison of different numerical Laplace inversion methods for engineering applications. **Applied Mathematics and Computation**, v. 189, n. 2, p. 1966-1981, jun. 2007.

HONIG, G.; HIRDES U. A method for the numerical inversion of Laplace transforms. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 10, n. 1, p. 113-132, fev. 1984.

KREYSZIG, E. **Matemática Superior para Engenharia**, v. 1, 9. ed. LTC, 2009.

LONGMAN, I. M. Best rational function approximation for Laplace transform inversion. **SIAM J. Math. Anal.**, v. 5, n. 4, p. 574-580, ago. 1974.

LYNESS, J. N.; GIUNTA, G. A Modification of the Weeks method for numerical inversion of the Laplace transform. **Mathematics of Computation**, v. 47, n. 175, p. 313-322, jul. 1986.

MACHADO, M. V. B. Numerical Laplace inversion methods: application to the calculation of the water influx from aquifers connected to petroleum reservoirs. **Petroleum Science and Technology**, v. 30, n. 1, p. 74-88, 2012.

- MOENCH, A. F.; OGATA, A. A Numerical Inversion of the Laplace Transform Solution to Radial Dispersion in a Porous Medium. **Water Resources Research**, v. 17, n. 1, p. 250-252, 1981.
- OGATA A.; BANKS R. B. A Solution of the Differential Equation of Longitudinal Dispersion in Porous Media. Geological survey professional paper 411-A. United States Government Printing Office, Washington, DC, 1961.
- PAPOULIS, A. A new method of inversion of the Laplace transform. **Quarterly of Applied Mathematics**, v. 14, n. 4, p. 405-414, 1956.
- PIESSENS, R. Gaussian quadrature formulas for the numerical integration of Bromwich's integral and the inversion of the Laplace transform. **Journal of Engineering Mathematics**, v. 5, n. 1, p. 1-9, jan. 1971.
- PILATTI, C.; RODRIGUEZ, B. D. Do A.; PROLO FILHO, J. F. Avaliação do desempenho de métodos para inversão numérica da Transformada de Laplace por expansão em séries. In: Encontro Nacional de Modelagem Computacional (ENMC), 20., Encontro de Ciências e Tecnologia de Materiais (ECTM), 8., 2017, Nova Friburgo. **Anais do XX ENMC e VIII ECTM**. Disponível em: <<https://drive.google.com/drive/folders/1Cl8--87NNzouLJGkthL9QirzC5sDsCIC>>. Acesso em: mar. 2018.
- PILATTI, C.; RODRIGUEZ, B. D. Do A.; PROLO FILHO, J. F. Análise do desempenho dos métodos de Stehfest e de Expansão em Série de Potências para solução de problemas de transporte difusivo e advectivo dominantes. In: Conferência Sul em Modelagem Computacional (MCSul), 8., Seminário e Workshop em Engenharia Oceânica (SEMENGO), 8., 2018, Rio Grande. **Anais do 8º MCSul / VIII SEMENGO**. Disponível em: <<https://drive.google.com/file/d/107IQh7Yqc9HIDIvzPXMV2DAoCWpZ0BKP/view>>. Acesso em: dez. 2018.
- RAOOFIAN-NAEENI, M.; CAMPAGNA, R.; ESKANDARI-GHADI, M.; ARDALAN, A. A. Performance comparison of numerical inversion methods for Laplace and Hankel integral transforms in engineering problems. **Applied Mathematics and Computation**, v. 250, p. 759-775, jan. 2015.
- REN, J.; GUO, P.; PENG, S.; MA, Z. Performance of multi-stage fractured horizontal wells with stimulated reservoir volume in tight gas reservoirs considering anomalous diffusion. **Environmental Earth Sciences**, 77:768, 2018.
- SCHIFF, J. L. **The Laplace transform: theory and applications**. New York: Springer-Verlag, 1999.
- SEGATTO, C. F.; TOMASCHEWSKI, F. K.; BARROS, R. C.; VILHENA, M. T. On the solution of the  $S_N$  multigroup kinetics equations in multilayer slabs. **Annals of Nuclear Energy**, v. 104, p. 229-236, 2017.
- SIMON, R. M.; STROOT, M. T.; WEISS, G. H. Numerical inversion of Laplace transforms with application to percentage labeled mitoses experiments. **Computers and Biomedical Research**, v. 5, n. 6, p. 596-607, dez. 1972.
- SPIEGEL, M. R. **Transformadas de Laplace**. McGraw-Hill, 1965. Tradução de Roberto Ribeiro

Baldino.

- STEHFEST, H. Algorithm 368: numerical inversion of Laplace transforms [D5]. **Comm. ACM**, v. 13, n. 1, p. 47-49, 1970a.
- STEHFEST, H. Remark on algorithm 368 [D5]: numerical inversion of Laplace transforms. **Comm. ACM**, v. 13, n. 10, p. 624, 1970b.
- TAVARES, M. G.; PETERSEN, C. Z.; SCHRAMM, M.; ZANETTE, R. Solution for the multigroup neutron space kinetics equations by the modified Picard algorithm. In: International Nuclear Atlantic Conference (INAC), 2017, Belo Horizonte. **Anais...** Disponível em: <[https://inis.iaea.org/collection/NCLCollectionStore/\\_Public/49/023/49023329.pdf?r=1&r=1](https://inis.iaea.org/collection/NCLCollectionStore/_Public/49/023/49023329.pdf?r=1&r=1)>. Acesso em: jan. 2019.
- TALBOT, A. The accurate numerical inversion of Laplace transforms. **IMA Journal of Applied Mathematics**, v. 23, n. 1, p. 97-120, jan. 1979.
- VALKÓ, P. P.; ABATE, J. Comparison of sequence accelerators for the Gaver method of numerical Laplace transform inversion. **Computers and Mathematics with Applications**, v. 48, n. 3-4, p. 629-636, ago. 2004.
- VRBA, J.; VERHAGEN, B. Groundwater for emergency situations: a methodological guide, IHP-VII series on groundwater, 3. UNESCO, 2011.
- WANG, Q.; ZHAN, H. On different numerical inverse Laplace methods for solute transport problems. **Advances in Water Resources**, v. 75, p. 80-92, jan. 2015.
- WEEKS, W. T. Numerical inversion of Laplace transforms using Laguerre functions. **Journal of the Association for Computing Machinery**, v. 13, n. 3, p. 419-429, jul. 1966.
- WEN, Z.; ZHAN, H.; WANG, Q.; LIANG, X.; MA, T.; CHEN, C. Well hydraulics in pumping tests with exponentially decayed rates of abstraction in confined aquifers. **Journal of Hydrology**, v. 548, p. 40-45, 2017.
- WENDT, T. J. Application of numerical inversion of the Laplace transform to the inverse problem in transient heat conduction. M. Sci. thesis, Naval Postgraduate School, United States Naval Academy, 1968.
- ZAKIAN, V. Numerical inversion of Laplace transform. **Electronics Letters**, v. 5, n. 6, p. 120-121, mar. 1969.
- ZHANG, W.; CUI, Y.; JIANG, R.; XU, J.; QIAO, X.; JIANG, Y.; ZHANG, H.; WANG, X. Production performance analysis for horizontal wells in gas condensate reservoir using three-region model. **Journal of Natural Gas Science and Engineering**, v. 61, p. 226-236, 2019.
- ZONGXIAO, R.; XIAODONG, W.; GUOQING, H.; LINGYAN, L.; XIAOJUN, W.; GUANGHUI, Z.; HUN, L.; JIAMING, Z.; XIANWEI, Z. Transient pressure behavior of multi-stage fractured horizontal wells in stress-sensitive tight oil reservoirs. **Journal of Petroleum Science and Engineering**, v. 157, p. 1197-1208, 2017.