Universidade Federal do Rio Grande – FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física – IMEF

Edital 15 - CAPES

# Matemática Básica Para Ciências Sociais I

# SISTEMAS LINEARES

Prof. Antônio Maurício Medeiros Alves
Profª Denise Maria Varella Martinez

# UNIDADE 3 – SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

## 1. INTRODUÇÃO:

Sistemas lineares aparecem, em geral, em problemas, onde certas quantidades precisam ser determinadas indiretamente. Como exemplo, pode-se tomar o seguinte problema do cotidiano:

Três amigos se encontram em uma lanchonete. O amigo A compra um suco e um sanduíche e paga R$7,00 (sete reais). O amigo B compra dois quibes e um sanduíche e também paga R$7,00. O amigo C compra um suco e um quibe, pagando R$6,00. Qual o preço de cada produto?  A matriz abaixo indica a quantidade de cada produto comprada por cada um dos amigos:

| | suco | sanduíche | quibe |
|---|---|---|---|
| A | 1 | 1 | 0 |
| B | 0 | 1 | 2 |
| C | 1 | 0 | 1 |

Chamaremos de $X_1$, $X_2$ e $X_3$, respectivamente, o preço do suco, do sanduíche e do quibe. Podemos, então, montar um sistema matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Refere-se à tabela acima

Custo de cada produto

Valor pago por cada amigo

Vamos fazer a multiplicação das matrizes (3x3 por 3x1) que estão localizadas à esquerda do sinal de igualdade. Multiplicamos cada linha da matriz de ordem 3x3 pela coluna da matriz de ordem 3x1 ordenadamente, elemento por elemento, somando-se os produtos em seguida. Após, fazemos uma igualdade de matrizes, resultando no sistema linear.

$$\begin{pmatrix} X_1 + X_2 + 0X_3 \\ 0X_1 + X_2 + 2X_3 \\ X_1 + 0X_2 + X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 + X_2 = 7 \\ X_2 + 2X_3 = 7 \\ X_1 + X_3 = 6 \end{cases}$$

Sistema linear

O sistema linear tem como solução $X_1$= 4 reais (preço do suco); $X_2$= 3 reais (preço do sanduíche) e $X_3$= 2 reais (preço do quibe), ou seja, a solução do sistema linear acima é $S = \{(4,3,2)\}$.

Utilizando sistemas, podemos resolver diversos problemas do nosso cotidiano. Sistemas lineares são, também, empregados para resolver problemas complexos. Tais sistemas são utilizados na tomografia computadorizada, onde feixes de raio-X atravessam o corpo e a intensidade de saída do feixe depende da ação combinada das regiões que ele atravessa. Cada feixe é como uma das colunas do sistema, e a reunião da informação de vários feixes permitem acessar a informação, em cada parte do interior do corpo.

## 2. EQUAÇÃO LINEAR:

É uma equação da forma $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$, onde $a_i (i = 1,2,...n)$ são os coeficientes (reais ou complexos), $x_i (i = 1,2,...n)$ são as incógnitas e $b$ é o termo independente.

### Exemplos de equações lineares:

$$3x + 3y + 7z = 10$$
$$2x_1 + 3x_2 - 7x_5 = 20$$
$$-w + t - 5g = -3$$

A ***solução de uma equação linear*** é dada pelo conjunto de valores que, ao serem substituídos nas incógnitas, chegam a uma igualdade verdadeira. Por exemplo, a equação $x + y + z = 5$ apresenta como solução $x = -1, y = 3, z = 3$, uma vez que $-1 + 3 + 3 = 5$. Os valores $x = 1, y = 2, z = 3$ também verificam a equação. Pode-se, então, afirmar que existem infinitas soluções (um número infinito de termos ordenados (x,y,z)) que satisfazem a equação dada.

Quando o termo independente $b$ for igual a zero, a equação linear denomina-se ***equação linear homogênea***. Observamos que uma equação linear não apresenta termos da forma $x_1^2$, $xy$, ou seja, cada termo da equação tem uma única incógnita, cujo expoente é sempre igual à unidade (1).

Duas equações lineares são ***equivalentes***, quando têm as mesmas soluções em um mesmo conjunto universo.

## 3. DEFINIÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR:

Um sistema de equações lineares ou sistema linear é um conjunto composto por duas ou mais equações lineares. Um sistema linear de **n** equações e **incógnitas** pode ser representado da seguinte forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + \ldots + a_{4n}x_n = b_4 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + a_{n4}x_4 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}, \text{(I)}$$

Sistema

onde $a_{ij}(i = 1,2,3,\ldots,n)(j = 1,2,3,\ldots,n)$ são os coeficientes, $b_i(i = 1,2,3,\ldots,n)$ os termos independentes e $x_i(i = 1,2,3,\ldots,n)$ são as incógnitas.

## 4. REPRESENTAÇÃO MATRICIAL DE UM SISTEMA LINEAR:

Podemos representar um sistema linear na forma matricial, como no exemplo inicial:

**Matriz dos coeficientes**

**Matriz das incógnitas**

**Matriz dos termos independentes**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & \ldots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & \cdots & a_{4n} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & \ldots & a_{5n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & a_{n5} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{(II)}$$

Para representarmos um sistema linear na forma (I), a partir da forma matricial (II), realizamos duas operações com as matrizes que aparecem na forma (II). Primeiramente, efetuamos a multiplicação entre as matrizes dos coeficientes (**A**) e a matriz das incógnitas (**X**) e, posteriormente, realizamos a igualdade entre as matrizes do produto e dos termos independentes (**B**). Em notação simplificada, a forma matricial é dada por $A \cdot X = B$.

## 5. SOLUÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR:

Chamamos de solução de um sistema linear ao conjunto ordenado de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \cdots, \alpha_n)$ que, colocados respectivamente nos lugares das incógnitas, fazem com que todas as equações lineares fiquem verdadeiras (isto é, igualdades numéricas).

Exemplo: O sistema linear $\begin{cases} x - 2y = -3 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ tem o conjunto $S = \{(1,2)\}$ como solução. Nesse caso, a solução é única.

Um sistema linear pode ter uma única solução, infinitas soluções ou não ter solução. Quando o **sistema linear é homogêneo**, isto é, o termo independente de todas as equações for nulo, e a solução é $(0,0,0)$, dizemos que **a solução é trivial**. Caso o sistema admita outra solução em que as incógnitas não são todas nulas, a solução é chamada de **solução não trivial**.

## 6. SISTEMAS LINEARES EQUIVALENTES:

Dois sistemas são equivalentes se admitem o mesmo conjunto solução.

Exemplo: Dado um sistema linear, o seu conjunto solução pode ser igualmente determinado por inúmeros outros sistemas de equações. Verificar se os seguintes sistemas são equivalentes:

(1) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + y = 7 \end{cases}$ e

(2) $\begin{cases} -x+5y=11 \\ 3x-y=9 \end{cases}$

Resolvendo o sistema (1), isolando a variável x (incógnita) na segunda equação, obtemos: $x=7-y$ e substituindo na primeira, temos $2(7-y)-y=5 \Rightarrow -3y=-9 \Rightarrow y=3$ e

$x=4$, então, a solução do sistema (1) é $S=\{(4,3)\}$.

Resolvendo o sistema (2): da primeira equação temos que $x=5y-11$ e substituindo na segunda, obtemos $3(5y-11)-y=9 \Rightarrow 14y=42 \Rightarrow y=3$ e $x=4$, então, a solução do sistema (2) é $S=\{(4,3)\}$.

Logo, como os dois sistemas admitem a mesma solução, eles são equivalentes.

Os sistemas a) $\begin{matrix} x_1-x_2=0 \\ x_1+x_2=2 \end{matrix}$; b) $\begin{matrix} x_1-x_2=0 \\ 3x_1+x_2=4 \end{matrix}$; c) $\begin{matrix} 7x_1+x_2=8 \\ 3x_1+x_2=4 \end{matrix}$, são sistemas equivalentes, ou seja, todos têm o mesmo conjunto solução $S=\{(1,1)\}$.

## 7. CLASSIFICAÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR:

Os sistemas lineares são classificados quanto ao número de soluções que apresentam.

Se o sistema linear tiver pelo menos uma solução, dizemos que ele é ***possível ou compatível,*** caso contrário, quando o sistema não tem solução, dizemos que ele é ***impossível ou incompatível***.

O sistema possível é ***determinado***, quando ele tem uma única solução e é ***indeterminado***, quando ele tem mais de uma solução. O esquema a seguir mostra a classificação de um sistema linear:


### 7.1. Sistema Possível e Determinado- SPD

Um sistema linear é possível e determinado quando admite uma única solução..

Exemplo: $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ x - 4y = 2 \end{cases}$

Isolando $x$ na segunda equação, ficamos com $x = 2 + 4y$. Depois, ao substituí-lo na primeira equação, obtemos o resultado:

$$3(2 + 4y) - 2y = 4$$
$$6 + 12y - 2y = 4$$
$$10y = 4 - 6$$
$$10y = -2$$
$$y = \frac{-2}{10} = \frac{-1}{5}$$

Substituindo o valor de $y$ na primeira equação, obteremos:

$$3x - 2\left(\frac{-1}{5}\right) = 4$$
$$3x + \frac{2}{5} = 4$$
$$3x = 4 - \frac{2}{5}$$
$$3x = 18$$
$$x = 6$$

logo, o par ordenado que corresponde à solução do sistema é $\left(6, \frac{-1}{5}\right)$. Esta é única, o que o caracteriza como um sistema linear possível e determinado - SPD. Sendo assim:

$$\begin{matrix} 3x - 2y = 4 \\ x - 4y = 2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 3.6 - 2.\left(\frac{-1}{5}\right) = 4 \\ 6 - 4.\left(\frac{-1}{5}\right) = 2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 18 + \frac{2}{5} = 4 \\ 6 + \frac{4}{5} = 2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 18 = 4 - \frac{2}{5} \\ 6 = 2 - \frac{4}{5} \end{matrix} \Rightarrow$$

$\begin{matrix} 18 = 18 \\ 6 = 6 \end{matrix}$, portanto, as sentenças são verdadeiras.

Verifica-se que os coeficientes das mesmas incógnitas, nas duas equações, não são proporcionais. Em outras palavras, $3$ é o triplo de $1$ e $-2$ é metade de $-4$,

$\frac{3}{1} \neq \frac{-2}{-4}$ ou $3.(-4) \neq 1.(-2)$.

### 7.2. Sistema Possível e Indeterminado (SPI)

Um sistema é possível e indeterminado quando as duas equações forem totalmente proporcionais, ou seja, equivalentes.

Exemplo: $\begin{cases} 3x + y = -2 \text{ (I)} \\ -6x - 2y = 4 \text{ (II)} \end{cases}$

As duas equações são totalmente equivalentes. Isto pode ser observado ao vermos que $-6$ está para $3$, assim como $-2$ está para $1$, assim como $4$ está para $-2$:

$\frac{3}{-6} = \frac{1}{-2} = \frac{-2}{4}$. Além disso, se resolvermos o sistema por substituição, teremos, ao isolar $y$ em (I), $y = -2 - 3x$ e, ao substituí-lo em (II), obteremos como resultado:

$$-6x - 2(-2 - 3x) = 4$$
$$-6x + 4 + 6x = 4$$
$$4 = 4$$

logo, podemos perceber que o sistema admite infinitas soluções.

**DICA:** Quando calculamos o determinante da matriz do sistema, no caso, $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$, este resulta em: $3.(-2)-[(-6).1] = -6+6=0$. Sendo assim, o determinante não nulo indica que o sistema é determinado. Entretanto, se o determinante for nulo, restarão duas possibilidades: SPI e SI. Então, saberemos classificá-lo, se examinarmos os termos independentes. No SPI, os termos independentes são totalmente proporcionais, já no SI não, como veremos a seguir.

### 7.3. Sistema Impossível (SI)

Um sistema é impossível quando as duas equações tiverem apenas os coeficientes das mesmas incógnitas em ambas as equações proporcionais e quando os termos independentes não estiverem na mesma proporção.

Exemplo: $\begin{cases} 2x-6y=5 \ \text{(I)} \\ 3x-9y=1 \ \text{(II)} \end{cases}$

Os coeficientes das mesmas incógnitas, nas duas equações, são proporcionais, mas os termos independentes não. Em outras palavras, $2$ está para $3$, assim como $-3$ está para $9$, porém não como $5$ está para $1$.

$\frac{2}{3} = \frac{-6}{-9} \neq \frac{5}{1}$. Além disso, se resolvermos o sistema por substituição, teremos, ao isolar $y$ em (I):

$$-6y = 5-2x$$

$$y = \frac{-5+2x}{6}$$

e, ao substituí-lo em (II), teremos:

$$3x - 9\left(\frac{2x-5}{6}\right) = 1$$

$$3x - \left(\frac{18x-45}{6}\right) = 1$$

$$3x - \frac{18x+45}{6} = 1$$

$$\frac{18x - 18x + 45 = 6}{6}$$

$$45 = 6$$

logo, o sistema é impossível e não tem solução.

## 8. RESOLUÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR:

### 8.1. Por adição e substituição:

Podemos resolver um sistema linear por **substituição**, ou seja, quando isolamos uma incógnita em uma equação e substituímos a mesma na outra equação, conforme mostra o exemplo abaixo:

Exemplo : Dado o sistema $\begin{cases} x - 4y = 1 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}$, determine a sua solução:

Isolando a incógnita x na primeira equação $x = 1 + 4y$ e substituindo-a na segunda, obtemos: $5(1+4y) - 2y = 4$, então $18y = -1$ e $y = -1/18$. Sabendo o valor de y, encontramos o de x, $x = 1 + 4(-1/18) = (18-4)/18 = 14/18 = 7/9$. Assim, o conjunto solução do sistema é $S = \{(7/9, -1/18)\}$.

Agora, resolvendo o mesmo sistema **por adição**:

$\begin{cases} x - 4y = 1 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases} \begin{matrix} \xrightarrow{x(-5)} \\ \rightarrow \end{matrix} \begin{cases} -5x + 20y = -5 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}$ somando as duas equações, obtemos o valor da incógnita y, $18y = -1 \Rightarrow y = -1/18$, que substituído, em qualquer uma das equações, fornece o valor de x, $x = 1 + 4y = 1 + 4(-1/18) = (18-4)/18 = 14/18 = 7/9$, logo, o sistema é possível e determinado, pois só admite a solução $S = \{(7/9, -1/18)\}$.

OBSERVAÇÂO: Em aulas posteriores, veremos que as equações lineares, que formam o sistema possível e determinado mostrado acima, representam duas retas no plano cartesiano que se interceptam (se cruzam) no ponto (7/9,-1/18).

Exemplo: O sistema $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$ é possível e indeterminado, pois $x = y$ nas duas equações e admite como solução: $(0,0);(1,1);(-20,-20);(\alpha,\alpha)$ etc. Novamente, frisamos que todo sistema linear homogêneo é possível, pois sempre admite a solução trivial (0,0).

OBSERVAÇÂO: Em aulas posteriores, veremos que as equações lineares, que formam o sistema possível e indeterminado mostrado acima, representam retas paralelas sobrepostas no plano cartesiano, logo, existem infinitos pontos que satisfazem a ambas as equações (pontos que pertencem a ambas as retas).

Exemplo : O sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$ é um sistema impossível, pois não é possível encontrarmos dois números reais, cuja soma seja 1 e 4 ao mesmo tempo.

OBSERVAÇÂO: Em aulas posteriores, veremos que as equações lineares, que formam o sistema impossível mostrado acima, representam retas paralelas (não sobrepostas) no plano cartesiano, logo, não existem pontos que pertençam às duas retas.

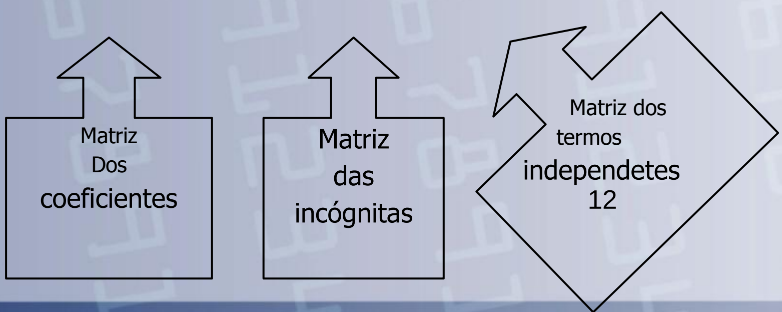
## 9. REGRA DE CRAMER:

A regra de Cramer (Gabriel Cramer, matemático e astrônomo suíço (1704-1752) ) é empregada para resolver um sistema linear, em que o número de equações é igual ao número de incógnitas.

Dado o sistema, com três equações lineares e três incógnitas,

$$\begin{cases} a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}Z = b_1 \\ a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}Z = b_2 \\ a_{31}X + a_{32}Y + a_{33}Z = b_3 \end{cases}$$

ou na representação



matricial $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$, determine a sua solução:

Podemos resolver o sistema acima, empregando a técnica de substituição ou adição de equações lineares, mas uma forma prática de resolver um sistema 3x3, 4x4 ou maior é utilizando a Regra de Cramer. A ***Regra de Cramer*** consiste em :

1) Calcular o determinante da matriz dos coeficientes (para isso, empregamos a regra de Sarrus ou a de Laplace), simbolicamente indicado por $D_p = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$;

2) Calcular os determinantes $D_x, D_y$ e $D_z$ que se obtém de $D_p$, substituindo, respectivamente, a 1ª coluna (dos coeficientes de X), a 2ª coluna (dos coeficientes de Y) e a 3ª coluna (dos coeficientes de Z) pela coluna dos termos independentes, ou seja, $D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$ e $D_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$.

3) Calcular as incógnitas fazendo: $X = \dfrac{D_x}{D_p}$, $Y = \dfrac{D_y}{D_p}$ e $Z = \dfrac{D_z}{D_p}$, desde que $D_p \neq 0$.

Exemplo: Resolver o sistema $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

Cálculo do determinante da matriz dos coeficientes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = D_p = -12$$

Cálculo do determinante das incógnitas.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 10 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_1) = D_{x_1} = -24$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 10 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_2) = D_{x_2} = 12$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_3) = D_{x_3} = 0$$

Cálculo das incógnitas.

$x_1 = \frac{D_{x_1}}{D_p} = \frac{-24}{-12} = 2$, $x_2 = \frac{D_{x_2}}{D_p} = \frac{12}{-12} = -1$ e $x_3 = \frac{D_{x_3}}{D_p} = \frac{0}{-12} = 0$, logo, o sistema é possível e determinado e tem a solução $S = \{(2, -1, 0)\}$.

## 9.1. A discussão de um sistema utilizando a Regra de Cramer:

Discutir um sistema linear é saber se ele é ***possível e determinado***, ***possível e indeterminado*** ou ***impossível***. Então:

| |
|---|
| Se $D_p \neq 0$ , o sistema é ***possível e determinado***; |

Se $D_p = 0$ e $D_x = D_y = D_z = 0$ , o sistema ***é possível e indeterminado***;

Se $D_p = 0$ e pelo menos um $D_n \neq 0$ (n = x, y, z, ...), o sistema ***é impossível.***

A Regra de Cramer é utilizada para resolver qualquer sistema, onde o número de equações (m) é igual ao número de incógnitas (n).

Exemplo: Uma certa escola de ensino médio tem 107 alunos, nas $1^{\underline{as}}$ e $2^{\underline{as}}$ séries, 74, nas $2^{\underline{as}}$ e $3^{\underline{as}}$ séries e 91, nas $1^{\underline{as}}$ e $3^{\underline{as}}$ séries. Qual o total de alunos dessa escola?

Fazendo X= número de alunos na $1^{\underline{a}}$ série, Y= número de alunos na $2^{\underline{a}}$ série e Z =número de alunos na $3^{\underline{a}}$ série, temos o sistema:

$$\begin{cases} X + Y = 107 \\ Y + Z = 74 \\ X + Z = 91 \end{cases}, \text{ resolvendo pela Regra de Cramer obtemos: } D_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 107 & 1 & 0 \\ 74 & 1 & 1 \\ 91 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 124,\ D_y = \begin{vmatrix} 1 & 107 & 0 \\ 0 & 74 & 1 \\ 1 & 91 & 1 \end{vmatrix} = 90 \text{ e } D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 107 \\ 0 & 1 & 74 \\ 1 & 0 & 91 \end{vmatrix} = 58.$$

Logo: $X = \dfrac{D_x}{D_p} = \dfrac{124}{2} = 62$, $Y = \dfrac{D_y}{D_p} = \dfrac{90}{2} = 45$ e $Z = \dfrac{D_z}{D_p} = \dfrac{58}{2} = 29$

O total de alunos da escola é igual a X+Y+Z=136 alunos. O sistema acima é possível e determinado.

Exemplo: Discuta o sistema $\begin{cases} 3X + mY = 2 \\ X - Y = 1 \end{cases}$

Resolução: Calculando os determinantes:

$$D_p = \begin{vmatrix} 3 & m \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 - m,\ D_x = \begin{vmatrix} 2 & m \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - m \text{ e } D_y = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

fazendo: $D_p = 0 \Rightarrow -3 - m = 0 \Rightarrow m = -3$

$$D_x = 0 \Rightarrow -2 - m = 0 \Rightarrow m = -2$$

Resposta: Para que o sistema seja impossível $m = -3$ $(D_p = 0)$, para que seja possível e determinado $m \neq -3$ $(D_p \neq 0)$, e não existe um $m$ tal que $D_p = D_x = 0$ ($m = -3$ e $m = -2$, respectivamente).

A Regra de Cramer, embora simples na resolução de sistemas de duas equações e duas incógnitas ou três equações e três incógnitas, não é recomendável a sistemas maiores, dada a complexidade dos cálculos envolvidos (por exemplo, um sistema a quatro equações e quatro incógnitas demandaria o cálculo do cinco determinantes de quarta ordem). O método do escalonamento, que veremos a seguir, é operacionalmente mais simples e é mais fácil de ser programado em computadores.

## 10. ESCALONAMENTO DE UM SISTEMA:

O método do escalonamento foi desenvolvido pelo matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e posteriormente foi aperfeiçoado por Wilhem Jordan (1842-1899). Exemplos de sistemas escalonados:

$$\begin{cases} x + 3y = 4 \\ y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 5y + z = 1 \\ -z = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y + 5z + 2t = 4 \\ 3y + 8z - 2t = 1 \\ -z - 3t = 0 \\ 4t = -8 \end{cases},$$

O sistema $\begin{cases} x - 2y + 4z = 30 \\ 4y = 5z = 12 \\ y - 3z = 0 \end{cases}$ não está na forma escalonada.

### 10.1. Operações elementares:

Antes de começarmos a escalonar um sistema linear, vamos ver três tipos de **operações elementares**, que podem ser realizadas sobre um sistema linear de equações de forma a transformá-lo em um outro sistema equivalente mais simples que o anterior. Na seqüência, trabalharemos com um exemplo para mostrar como funcionam essas operações.

**1. Permutação**: trocar de lugar duas equações do sistema não altera a solução do sistema;

| *Trocar a Linha 1 com a Linha 3* | | |
|---|---|---|
| $x+2y-z=2$ | | $4x+y-5z=9$ |
| $2x-3y+2z=0$ | $\approx$ | $2x-3y+2z=0$ |
| $4x+y-5z=9$ | | $x+2y-z=2$ |

**2. Multiplicação**: Substituir uma das equações por um múltiplo não nulo dela mesma, não altera a solução do sistema:

| *Multiplicar a Linha 1 pelo número 3* | | |
|---|---|---|
| $x+2y-z=2$ | | $3x+6y-3z=6$ |
| $2x-3y+2z=0$ | $\approx$ | $2x-3y+2z=0$ |
| $4x+y-5z=9$ | | $4x+y-5z=9$ |

**3. Adição:** A adição de duas equações do sistema também não altera o conjunto solução:

| *Adicionar Linha 2 com a Linha 3* | | |
|---|---|---|
| $x+2y-z=2$ | | $3x+6y-3z=6$ |
| $2x-3y+2z=0$ | $\approx$ | $2x-3y+2z=0$ |
| $4x+y-5z=9$ | | $6x-2y-3z=9$ |

Cada uma das três operações acima é chamada de operação elementar. Assim, dado um sistema linear, todo sistema obtido a partir dele, por meio de uma seqüência finita de operações elementares, é dito um sistema equivalente ao sistema dado. Vimos, anteriormente, que sistemas equivalentes possuem o mesmo conjunto solução.

## 10.2. Resolução de sistemas lineares por escalonamento:

Basicamente, há dois tipos de sistemas escalonados a considerar:

**A) Primeiro tipo**: onde número de equações é igual ao número de incógnitas. Nesse caso, o sistema é determinado.

**B) Segundo tipo**: onde o número de equações é menor que o de incógnitas. Nesse caso, o sistema é indeterminado.

**Passos do método do escalonamento:**

Primeiro passo: Anular os coeficientes da 1ª incógnita, da 2ª equação em diante. Caso não seja, tornar o coeficiente da 1ª incógnita igual a 1.

Segundo passo: Deixar de lado a 1ª equação e repetir o primeiro passo com os coeficientes da próxima incógnita, que tenha coeficiente diferente de zero, nas equações remanescentes (que sobram).

Terceiro passo: Deixar de lado as duas primeiras equações e repetir o primeiro passo com os coeficientes da próxima incógnita, que tenha coeficiente diferente de zero, nas equações remanescentes.

Os próximos passos são análogos e devem ser seguidos, até que o sistema fique escalonado.

Exemplo : Resolver o sistema $\begin{cases} x + 2y + 4z = 5 \\ 2x - y + 2z = 8 \\ 3x - 3y - z = 7 \end{cases}$ por escalonamento.

Esse sistema é do primeiro tipo, ou seja, o número de equações é igual ao número de incógnitas. O coeficiente da incógnita x é 1. Começamos multiplicando a primeira equação por (-2) e adicionando o resultado à segunda equação. Depois, multiplicamos a primeira equação por (-3) e adicionamos a terceira equação. Obtemos o sistema equivalente $\begin{cases} x + 2y + 4z = 5 \\ -5y - 6z = -2 \\ -9y - 13z = -8 \end{cases}$. Dessa forma, anulamos os coeficientes da 1ª incógnita, da 2ª equação em diante (Primeiro Passo).

Multiplicando a segunda equação por (-1/5), obtemos $\begin{cases} x + 2y + 4z = 5 \\ y + \frac{6}{5}z = \frac{2}{5} \\ -9y - 13z = -8 \end{cases}$, agora, multiplicando a segunda equação por (9) e adicionando o resultado à terceira equação, obtemos: $\begin{cases} x + 2y + 4z = 5 \\ y + \frac{6}{5}z = \frac{2}{5} \\ -\frac{11}{5}z = -\frac{22}{5} \end{cases}$. **Pronto!!! O sistema está escalonado**.

Resta, agora, resolvê-lo. Da terceira equação, tiramos que $z = 2$. Substituindo na segunda, obtemos o valor de y, $y + \frac{6}{5}(2) = \frac{2}{5} \Rightarrow y = -2$. Substituindo y e z na primeira equação, obtemos: $x + 2(-2) + 4(2) = 5 \Rightarrow x = 1$. O sistema é possível e determinado e tem como solução $(1, -2, 2)$.

Exemplo: Seja o sistema $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + 4y + 2z = 10 \\ 2x - 3y + 7z = 18 \end{cases}$, vamos escaloná-lo:

$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + 4y + 2z = 10 \\ 2x - 3y + 7z = 18 \end{cases}$ e, somando a segunda, temos $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ y - z = -2 \\ 2x - 3y + 7z = 18 \end{cases}$, substituímos, então, a 2ª equação pela soma dela com a primeira multiplicada por (-3).

$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ y - z = -2 \\ 2x - 3y + 7z = 18 \end{cases}$ e, somando a terceira, temos $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ y - z = -2 \\ -5y + 5z = 10 \end{cases}$, substituímos, então, a 3ª equação pela soma dela com a primeira multiplicada por (-2).

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ \quad y-z=-2 \\ -5y+5z=10 \end{cases} \quad \text{e, somando a terceira, obtemos} \quad \begin{cases} x+y+z=4 \\ \quad y-z=-2 \\ 0y+0z=0 \end{cases},$$

Como a última equação é satisfeita para quaisquer valores de x, y e z, ela pode ser suprimida do sistema. Assim, obtemos o seguinte sistema escalonado, onde o número de incógnitas é maior do que o número de equações e, portanto, indeterminado. Admite infinitas soluções.

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ \quad y-z=-2 \end{cases}$$

OBSERVAÇÂO: Se durante o escalonamento, ocorrer uma equação do tipo $0x+0y=b$ com $b \neq 0$, então, o sistema será impossível.