Universidade Federal do Rio Grande – FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física – IMEF

Edital 15 - CAPES

Matemática Básica
Para Ciências Sociais I

DETERMINANTES

Prof. Antônio Maurício Medeiros Alves
Profª Denise Maria Varella Martinez

UNIDADE 2 – DETERMINANTES

1. INTRODUÇÃO

Existe um número associado à matriz quadrada, obtido através de determinadas operações, envolvendo todos os elementos da matriz, que é chamado de **determinante**. O desenvolvimento da teoria dos determinantes permitiu o surgimento, quase que paralelo da teoria dos sistemas de equações lineares.

2. DEFINIÇÃO

Dada uma matriz quadrada A de ordem n, podemos associar um número real, conhecido como **determinante** da matriz A $(\det A)$, que pode ser obtido a partir de determinadas operações algébricas com os elementos da mesma. Cada matriz possui um único determinante.

Obs.: somente as matrizes quadradas possuem determinante.

2.1 DETERMINANTE DA MATRIZ DE ORDEM 1 $(n = 1)$

O determinante da matriz $A = (a_{11})$ é indicado por $\det A$ e corresponde ao próprio elemento a_{11}.

Ex.: Se $A = [2]$, então $\det A = |2| = 2$

2.2 DETERMINANTE DA MARIZ DE ORDEM 2 $(n = 2)$

O determinante de uma matriz quadrada A de ordem 2 é calculado através do produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária.

Sendo a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, o determinante da matriz A

é representado por $\boxed{\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} \cdot a_{22}) - (a_{12} \cdot a_{21}) = k \in R}$

Ex.: Dada a matriz $A=\begin{bmatrix}2 & 5\\1 & 8\end{bmatrix}$ então, $\det A=\begin{bmatrix}2 & 5\\1 & 8\end{bmatrix}=2.8-5.1=11$

2.3 DETERMINANTE DA MATRIZ QUADRADA DE ORDEM 3 $(n=3)$

Consideremos a matriz quadrada de ordem 3, $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$.

O determinante da matriz de ordem 3 será:

$$\det A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=\underbrace{a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}}+\underbrace{a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}}+\underbrace{a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}}-\underbrace{a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}}-\underbrace{a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}}-\underbrace{a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}}$$

$$\begin{bmatrix}a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & a_{33}\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix} & a_{12} & \\ & & a_{23}\\ a_{31} & & \end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix} & & a_{13}\\ a_{21} & & \\ & a_{32} & \end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix} & & a_{13}\\ & a_{22} & \\ a_{31} & & \end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix} & a_{12} & \\ a_{21} & & \\ & & a_{33}\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}a_{11} & & \\ & & a_{23}\\ & a_{32} & \end{bmatrix}$$

Podemos ainda obter o determinante de uma forma mais facilitada pela Regra de *Sarrus*, provavelmente escrita no ano de 1833, pelo matemático *Pierre Frédéric Sarrus*. Calculando por *Sarrus* a matriz de ordem 3 se resolveria da seguinte forma:

Repetimos as duas primeiras colunas à direita da matriz (ou as duas primeiras linhas abaixo da matriz) e efetuamos as multiplicações das diagonais:

$$\begin{matrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22}\\a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32}\end{matrix}$$

$$\boxed{a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13}+a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11}+a_{33}\cdot a_{21}\cdot a_{12}}\qquad\boxed{a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}}$$

Os produtos obtidos na diagonal principal permanecem com o mesmo sinal e os produtos obtidos na direção da diagonal secundária mudam de sinal.

Em outras palavras, montamos uma expressão com os produtos da diagonal principal menos (-) os produtos da diagonal secundária. O determinante é a soma dos valores obtidos.

$$(a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32})-(a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13}+a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11}+a_{33}\cdot a_{21}\cdot a_{12})$$

Ex.: Seja a matriz $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 5\\ 2 & 0 & -2\\ -1 & 4 & -3\end{bmatrix}$, o determinante será calculado da seguinte forma:

Aplicando a Regra de *Sarrus*

$$\begin{array}{ccccc} 3 & 1 & 5 & 3 & 1\\ 2 & 0 & -2 & 2 & 0\\ -1 & 4 & -3 & -1 & 4\end{array}$$

$$\boxed{5.0.(-1)+3.(-2).4+1.2.(-3)} \qquad \boxed{5.2.4+1.(-2).(-1)+3.0.(-3)}$$

Dessa forma, montaremos a expressão:

$$5.2.4+1.(-2).(-1)+3.0.(-3)-[5.0.(-1)+3.(-2).4+1.2.(-3)]=$$

$$40+2+0-(0-24-6)=$$

$$42-(-30)=42+30=72$$

Ou ainda, podemos repetir as duas primeiras linhas abaixo da matriz e efetuar as multiplicações:

$$\begin{array}{ccc} 3 & 1 & 5\\ 2 & 0 & -2\\ -1 & 4 & -3\\ 3 & 1 & 5\\ 2 & 0 & -2\end{array}$$

$$\boxed{5.0.(-1)+(-2).4.3+(-3).1.2} \qquad \boxed{3.0.(-3)+2.4.5+(-1).1.(-2)}$$

Da mesma forma, montamos a expressão:

$$3.0.(-3)+2.4.5+(-1).1.(-2)-[5.0.(-1)+(-2).4.3+(-3).1.2]=$$

$$0+40+2-[0-24-6]=42-(-30)=42+30=72$$

2.4 PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

2.4.1 Fila de zeros, Filas iguais e Filas proporcionais $(\det = 0)$

Se todos os elementos de uma linha ou coluna de uma matriz quadrada forem iguais a zero, seu determinante será nulo.

Ex.: Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -9 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, os determinantes de ambas as matrizes serão nulos, pois, a primeira coluna de A é igual a zero e a terceira linha de B também é igual a zero. Portanto, $\det A = 0$ e $\det B = 0$.

Se os elementos correspondentes de duas linhas ou de duas colunas de uma matriz quadrada forem iguais, seu determinante será nulo.

Ex.: Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 \\ -7 & 2 & 2 \\ 3 & -8 & -8 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 7 & -6 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$, os determinantes de ambas as matrizes serão nulos, pois, a segunda e terceira coluna de A são iguais e a primeira e terceira linhas de B também são iguais. Portanto, $\det A = 0$ e $\det B = 0$.

Se uma matriz quadrada possui duas linhas ou colunas proporcionais, ou seja, se uma linha (ou coluna) é igual à outra paralela multiplicada por qualquer número, seu determinante será nulo.

Ex.: Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 9 & 21 \end{bmatrix}$, o determinante de A será nulo, pois os elementos da segunda linha representam o triplo dos elementos da primeira linha, logo existe uma relação de proporcionalidade. Portanto $\det A = 0$.

2.4.2 Multiplicação de uma fila ou de uma matriz por uma constante

Se todos os elementos de uma linha ou de uma coluna de uma matriz quadrada forem multiplicados por uma constante α, então seu determinante fica multiplicado por α.

Ex. Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Multiplicando a primeira coluna de A por k=3, temos $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

Então:

$\det(A) = (1)(3) - (2)(-1) = 5$

$\det(B) = (3)(3) - (2)(-3) = 15$, verificando a propriedade $\det(B) = 3\det(A)$.

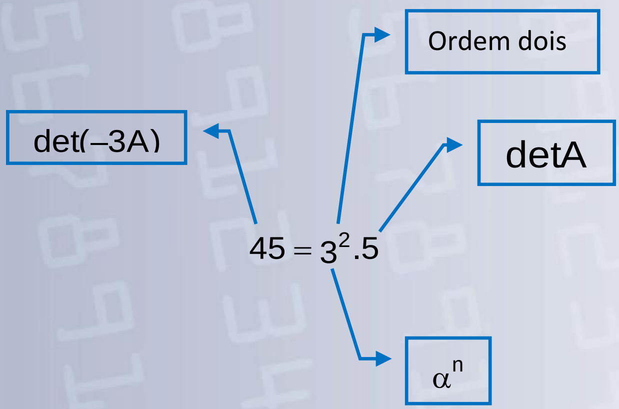
Se uma matriz quadrada é multiplicada por uma constante α, seu determinante ficará multiplicado por α^n onde n é a ordem da matriz.

Ex.: Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ e $\alpha = -3$,

$\det A = (2.4) - (1.3) = 8 - 3 = 5$

$\alpha.A = -3\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 9 \\ 3 & -12 \end{bmatrix}$, portanto

$\det(-3A) = 72 - 27 = 45$, ou seja,



Desse modo, podemos dizer que $\boxed{\det(\alpha . A_n) = \alpha^n . \det A_n}$, em que A é uma matriz quadrada de ordem n.

2.4.3 Determinante da matriz transposta

O determinante de uma matriz quadrada é igual ao determinante de sua transposta.

Ex.: Seja $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $A^t = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$, o $\det A = 5.0 - (-3).1 = +3$ e

$\det A^t = 5.0 - 1.(-3) = +3$, logo $\boxed{\det A = \det A^t}$

2.4.4 Troca de filas paralelas

Se trocarmos de posição duas linhas ou colunas de uma matriz quadrada, o determinante da nova matriz é o oposto do determinante da matriz original.

Ex.: Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & -9 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & -9 \end{bmatrix}$

A nova matriz B foi obtida a partir da troca entre as posições da primeira e segunda colunas de A. E assim:

$$\det A = -45 - 84 - 96 - 105 - 72 - 48 = 96 - 354 = -258$$

$$\det B = 72 + 48 + 105 - 96 + 84 + 45 = -96 + 354 = 258$$

Dessa forma, os sinais dos determinantes ficam opostos.

2.4.5 Teorema de Binet

Segundo o Teorema de *Binet*, o determinante de um produto de matrizes quadradas é o produto dos seus determinantes.

Sendo A e B matrizes quadradas:

$$\boxed{\det(A.B) = (\det A).(\det B)}$$

Ex.: Sejam $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 5 & 0\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ matrizes quadradas, e seus determinantes:

$\det A = 3.0 + 2.5 = 10$

$\det B = 0.4 + 1.3 = 3$

O produto das matrizes A e B será:

$A.B=\begin{bmatrix}3.0+2.3 & 3.1+2.4\\ 5.0+0.3 & 5.1+0.4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 11\\ 0 & 5\end{bmatrix}$, e, segundo o Teorema de Binet:

$\det(A.B) = \det A.\det B$

$\det A.\det B = 10.3 = 30$

O que se verifica calculando pelo cálculo do determinante da matriz produto:

$\det(A.B) = 6.5 - 11.0 = 30$

2.4.6 Teorema de Jacobi

Segundo o Teorema de *Jacobi*, o determinante de uma matriz não é alterado quando multiplicamos uma linha (ou coluna) por um número, e somamos o resultado com outra linha (ou coluna) paralela.

Ex.: Sejam $A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{bmatrix}$, o $\det A = 3.1 - [(-1).(-2)] = 3 - (+2) = 3 - 2 = 1$

Multiplicando a primeira linha, por exemplo, por 3, e somando os resultados com a segunda linha teremos a nova matriz quadrada:

$B=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 3.3+(-2) & 3.(-1)+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 7 & -2\end{bmatrix}$

O $\det B = 3.(-2) - [(-1).7] = -6 - (-7) = -6 + 7 = 1$, logo $\det A = \det B$.

2.4.7 Determinante da Inversa

Seja uma matriz quadrada A e sua inversa A^{-1}, então:

$$\boxed{\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{ com } \det A \neq 0}$$

Ex.: Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $\det A^{-1}$ será:

$$\det A = 1.0 - [(-1).2] = 0 - (-2) = 2$$

logo, $\det A^{-1} = \frac{1}{2}$.

2.5. MENOR COMPLEMENTAR

O menor complementar relativo a um elemento de uma determinada matriz quadrada é o determinante associado à matriz que se obtém eliminando a linha e a coluna que contem o elemento selecionado. Por exemplo:

Seja a matriz quadrada $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ podemos calcular o menor complementar, que chamaremos de M_{ij}, escolhendo, primeiramente, um elemento a_{ij}. Partindo do exemplo, escolheremos o elemento a_{11} que corresponde ao número 1. Logo, o menor complementar referente ao elemento a_{11} será

M_{ij}, ou seja, M_{11}, que encontraremos eliminando a linha e a coluna que contem o elemento, ficando com:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Assim, o menor complementar será $M_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. E assim por diante:

$M_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, pois $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$M_{13} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \text{ pois } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M_{21} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ pois } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, \text{ pois } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M_{23} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \text{ pois } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M_{31} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \text{ pois } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \text{ pois } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M_{33} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \text{ pois } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2.6 CO-FATOR OU COMPLEMENTO ALGÉBRICO

O co-fator, que chamaremos de C_{ij}, é o número real obtido pela expressão:

co-fator

$$\boxed{C_{ij} = (-1)^{i+j} . M_{ij}}$$

Menor Complementar

Nesse sentido, se considerarmos a matriz do exemplo anterior, $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, podemos calcular o co-fator referente ao elemento a_{11}, por exemplo, o qual possui o menor complementar $M_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Portanto, o co-fator C_{11} será:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} . \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ao calcular o determinante:

$$C_{11} = 1.(0.2 - 5.1) = 1.(0 - 5) = 1.(-5) = -5.$$

Calculando o determinante

2.7 TEOREMA DE LAPLACE

O Teorema de *Laplace* é utilizado para simplificar o cálculo de determinantes de matrizes quadradas:

> ***"O determinante de uma matriz quadrada de ordem 3 é igual à soma dos produtos dos elementos de uma linha ou coluna qualquer pelos respectivos co-fatores."***

Ex.: Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, empregando o Teorema de *Laplace* escolhemos os elementos de uma linha ou coluna qualquer da matriz.

Se escolhermos o elemento da primeira linha e primeira coluna, por exemplo:

$$\boxed{\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}}$$

Elemento da **primeira linha**

Co-fator

Sabendo que $C_{ij} = (-1)^{i+j}.M_{ij}$, temos:

$C_{11} = (-1)^{1+1}.M_{11}$ e sabemos que $M_{11} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, então:

$C_{11} = (-1)^{1+1}.\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = 1.[2.1 - 3.(-2)] = 1.(2+6) = 8$, da mesma forma,

$C_{12} = (-1)^{1+2}.M_{12}$ e sabemos que $M_{12} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, então:

$C_{12} = (-1)^{1+2}.\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = (-1).[1.1 - (3.4)] = (-1).(1-12) = (-1).(-11) = 11$ e, também,

$C_{13} = (-1)^{1+3}.M_{13}$ e sabe-se que $M_{13} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, então:

$C_{13} = (-1)^{1+3}.\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = (1).[1.(-2) - (2.4)] = (-1).[(-2) - 8] = (-1).(-10) = 10$.

Assim, o determinante da matriz, aplicando o teorema de *Laplace* aos elementos da primeira linha será:

$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} = 3.8 + 0.11 + (-1).10 = 24 + 0 - 10 = 14$.

2.8 Determinante da matriz de ordem superior a três $(n > 3)$

Para calcularmos o determinante de uma matriz de ordem $n > 3$, aplicaremos o Teorema de *Laplace* tantas vezes quantas forem necessárias até chegarmos a um determinante de ordem 3 para que seja possível aplicar a Regra de Sarrus, conforme o exemplo:

Ex.: Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ uma matriz de ordem 4. Para calcular seu determinante, vamos primeiramente aplicar *Laplace*. Escolheremos a primeira linha e, assim, teremos $\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} + a_{14}c_{14}$.

Sabendo que $C_{ij} = (-1)^{i+j}.M_{ij}$, temos:

$C_{11} = (-1)^{1+1}.M_{11}$, com $M_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, então, aplicaremos Sarrus no determinante:

$$C_{11} = (-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (1).\begin{matrix} -1 & 2 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{matrix}$$

Aplicando a Regra de Sarrus

$\boxed{5.3.1+(-1).1.2+2.0.1}$ $\boxed{5.0.2+2.1.1+(-1).3.1}$

$$C_{11} = 1.\{[0+2+(-3)]-[15+(-2)+0]\} = 1.[-1-(13)] = 1.(-14) = -14$$

$C_{12} = (-1)^{1+2}.M_{12}$, com $M_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1).\begin{matrix} 3 & 2 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{matrix}$$

Aplicando a Regra de Sarrus

$\boxed{5.3.2+3.1.2+2.0.1}$ $\boxed{5.0.2+2.1.1+3.3.1}$

$$C_{12} = (-1).\{[0+2+9]-[30+6+0]\} = (-1).[11-(+36)] = (-1).(-25) = 25$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3}.M_{13}\text{ , com } M_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3}.\begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = (1).\begin{matrix} 3 & -1 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{matrix}$$

Aplicando a Regra de Sarrus

$$\boxed{5.0.2+3.1.1+(-1).0.1} \qquad \boxed{5.0.1+(-1).1.2+3.0.1}$$

$$C_{13} = (1).\{[0+(-2)+0]-[0+3+0]\} = (1).[-2-(+3)] = (1).(-5) = -5$$

$$C_{14} = (-1)^{1+4}.M_{14}\text{ , com } M_{14} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_{14} = (-1)^{1+4}.\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = (-1).\begin{matrix} 3 & -1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{matrix}$$

Aplicando a Regra de Sarrus

$$\boxed{2.0.2+3.3.1+(-1).0.2} \qquad \boxed{2.0.1+(-1).3.2+3.0.2}$$

$$C_{14} = (-1).\{[0+(-6)+0]-[0+9+0]\} = (-1).[-6-(+9)] = (-1).(-6-9) = (-1).(-15) = 15$$

Portanto, o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ será:

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} + a_{14}C_{14}$$

$$\det(A) = 1.(-14)\underbrace{+0.25}+2.(-5)+4.15 = -14\underbrace{+0}-10+60 = -24+60 = 36$$

Obs. Sempre que possível devemos escolher a fila (linha ou coluna) com maior número de zeros, pois se o elemento for nulo o produto dele pelo seu co-fator também será nulo, não precisando ser calculado.