

**PROGRAMAÇÃO LINEAR:  
MÉTODO SIMPLEX  
INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA**

**Prof. Dr. André Andrade Longaray**

# INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA DOS COEFICIENTES DO QUADRO DO SIMPLEX

Suponha o seguinte modelo de P.L.:

$$\text{Maximizar } Z = 3x_1 + 5x_2$$

s.a.:

$$1x_1 \leq 4$$

$$1x_2 \leq 6$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

e

$$x_j \geq 0, \text{ para } j = 1, 2, \dots, 5$$

# INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA DOS COEFICIENTES DO QUADRO DO SIMPLEX

Redução à forma canônica:

**Modelo:**

$$\text{Maximizar } Z = 3 \cdot X_1 + 5 \cdot X_2 + 0 \cdot X_3 + 0 \cdot X_4 + 0 \cdot X_5$$

$$\text{sujeito a } 1 \cdot X_1 + 1 \cdot X_3 = 4 \text{ (Recurso A)}$$

$$1 \cdot X_2 + 1 \cdot X_4 = 6 \text{ (Recurso B)}$$

$$3 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + 1 \cdot X_5 = 18 \text{ (Recurso C)}$$

$$\text{com } X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$$

**Definições:**

$X_1$  = quantidade de *Produto 1* a ser feita

$X_2$  = quantidade de *Produto 2* a ser feita

$X_3$  = folga na utilização do *Recurso A*

$X_4$  = folga na utilização do *Recurso B*

$X_5$  = folga na utilização do *Recurso C*

# INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA DOS COEFICIENTES DO QUADRO DO SIMPLEX

Quadro final do modelo (iteração ótima):

BASE	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	b
$x_3$	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	2
$x_2$	0	1	0	1	0	6
$x_1$	1	0	0	$-2/3$	$1/3$	2
Z	0	0	0	3	1	36

variáveis não básicas:

$$x_4 = 0$$

$$x_5 = 0$$

variáveis básicas:

$$x_3 = 2$$

$$x_2 = 6$$

$$x_1 = 2$$

$$\mathbf{Z = 36}$$

## INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA DOS COEFICIENTES DO QUADRO DO SIMPLEX

⌘ Eu posso prever como meu modelo SIMPLEX se comportaria se ele sofresse pequenas variações?

## INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA DOS COEFICIENTES DO QUADRO DO SIMPLEX

⌘ Eu posso prever como meu modelo se comportaria se ele sofresse pequenas variações?

**SIM!!!**

# INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA DOS COEFICIENTES DO QUADRO DO SIMPLEX

**POR MEIO DA TÉCNICA DE...**

# INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA DOS COEFICIENTES DO QUADRO DO SIMPLEX

**POR MEIO DA TÉCNICA DE...**

.... ANÁLISE DA DISPONIBILIDADE DE RECURSOS



# INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA DOS COEFICIENTES DO QUADRO DO SIMPLEX

## **Análise da disponibilidade dos recursos**

O objetivo desta análise é interpretar os coeficientes das variáveis fora da base e os coeficientes de  $Z$  transformada.

# INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA DOS COEFICIENTES DO QUADRO DO SIMPLEX

Para isso, deve-se realizar a **análise de sensibilidade** com as variáveis que estão fora da base.

# INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA DOS COEFICIENTES DO QUADRO DO SIMPLEX

Quadro final do modelo (iteração ótima):

BASE	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	b
$x_3$	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	2
$x_2$	0	1	0	1	0	6
$x_1$	1	0	0	$-2/3$	$1/3$	2
Z	0	0	0	3	1	36

variáveis não básicas:

$$x_4 = 0$$

$$x_5 = 0$$

variáveis básicas:

$$x_3 = 2$$

$$x_2 = 6$$

$$x_1 = 2$$

variáveis que sofrerão a análise de sensibilidade!

# INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA DOS COEFICIENTES DO QUADRO DO SIMPLEX

## análise de sensibilidade para $x_4$ :

Como  $x_4$  está fora da base, seu valor na solução ótima é **zero**. Vamos passar seu valor para **1** e calcular as variações que devem ocorrer nas variáveis básicas.

$$x_4 = 0 \text{ passa para } x_4 = 1$$

# INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA DOS COEFICIENTES DO QUADRO DO SIMPLEX

## análise de sensibilidade para $x_4$ :

### a) Cálculo da variação em $x_3$

A relação entre  $x_4$  e  $x_3$  aparece na primeira equação do quadro da solução ótima:

BASE	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	b
$x_3$	0	0	1	2/3	-1/3	2
$x_2$	0	1	0	1	0	6
$x_1$	1	0	0	-2/3	1/3	2
Z	0	0	0	3	1	36

$\Rightarrow 1x_3 + 2/3x_4 = 2$

# INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA DOS COEFICIENTES DO QUADRO DO SIMPLEX

## análise de sensibilidade para $x_4$ :

a) Cálculo da variação em  $x_3$

$$1x_3 + 2/3x_4 = 2$$

$$\text{Se } x_4 = 0, x_3 = 2$$

com  $\Delta x_4 = 1$ , temos:

$$1x_3 = 2 - 2/3.(1) \rightarrow 1x_3 = 2 - 2/3 \rightarrow x_3^{\text{nov}} = 4/3$$

a variação em  $x_3$  é:

$$\Delta x_3 = x_3^{\text{nov}} - x_3$$

$$\text{onde: } \Delta x_3 = 4/3 - 2$$

$$\Delta x_3 = -2/3$$

# INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA DOS COEFICIENTES DO QUADRO DO SIMPLEX

## análise de sensibilidade para $x_4$ :

### b) Cálculo da variação em $x_2$

A relação entre  $x_4$  e  $x_2$  aparece na segunda equação do quadro da solução ótima:

BASE	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	b
$x_3$	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	2
$x_2$	0	1	0	1	0	6
$x_1$	1	0	0	$-2/3$	$1/3$	2
Z	0	0	0	3	1	36

$\Rightarrow 1x_2 + 1x_4 = 6$

# INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA DOS COEFICIENTES DO QUADRO DO SIMPLEX

## análise de sensibilidade para $x_4$ :

### b) Cálculo da variação em $x_2$

$$1x_2 + 1x_4 = 6$$

$$\text{Se } x_4 = 0, \quad x_2 = 6$$

com  $\Delta x_4 = 1$ , temos:

$$1x_2 = 6 - 1.(1) \quad \rightarrow \quad 1x_2 = 6 - 1 \quad \rightarrow \quad x_2^{\text{nov}} = 5$$

a variação em  $x_2$  é:

$$\Delta x_2 = x_2^{\text{nov}} - x_2$$

$$\text{onde: } \Delta x_2 = 5 - 6$$

$$\Delta x_2 = -1$$



# INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA DOS COEFICIENTES DO QUADRO DO SIMPLEX

## análise de sensibilidade para $x_4$ :

### c) Cálculo da variação em $x_1$

A relação entre  $x_4$  e  $x_1$  aparece na terceira equação do quadro da solução ótima:

BASE	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	b
$x_3$	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	2
$x_2$	0	1	0	1	0	6
$x_1$	1	0	0	$-2/3$	$1/3$	2
Z	0	0	0	3	1	36

$\Rightarrow 1x_1 - 2/3x_4 = 2$

# INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA DOS COEFICIENTES DO QUADRO DO SIMPLEX

## análise de sensibilidade para $x_4$ :

c) Cálculo da variação em  $x_1$

$$1x_1 - 2/3x_4 = 2$$

$$\text{Se } x_4 = 0, x_1 = 2$$

com  $\Delta x_4 = 1$ , temos:

$$1x_1 = 2 + 2/3.(1) \rightarrow 1x_1 = 2 + 2/3 \rightarrow x_1^{\text{nov}} = 8/3$$

a variação em  $x_2$  é:

$$\Delta x_1 = x_1^{\text{nov}} - x_1$$

$$\text{onde: } \Delta x_1 = 8/3 - 2$$

$$\Delta x_1 = 2/3$$

# INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA DOS COEFICIENTES DO QUADRO DO SIMPLEX

## análise de sensibilidade para $x_4$ :

### d) Cálculo da variação em Z

Tomando a função objetivo  $Z = 3x_1 + 5x_2$ , pode-se escrever:

$$\Delta Z = 3.(\Delta x_1) + 5.(\Delta x_2)$$

Substituindo pelos valores de  $\Delta x_1$  e  $\Delta x_2$ , tem -se:

$$\Delta Z = 3.(2/3) + 5.(-1)$$

$$\Delta Z = -3$$

longaray@bol.com.br

## INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA DOS COEFICIENTES DO QUADRO DO SIMPLEX

BASE	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	b
$x_3$	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	2
$x_2$	0	1	0	1	0	6
$x_1$	1	0	0	$-2/3$	$1/3$	2
Z	0	0	0	3	1	36

Portanto, para  $\Delta x_4 = 1$  temos:

$$\Delta x_3 = -2/3$$

$$\Delta x_2 = -1$$

$$\Delta x_1 = 2/3$$

$$\Delta Z = -3$$

# INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA DOS COEFICIENTES DO QUADRO DO SIMPLEX

## análise de sensibilidade para $x_5$ :

Como  $x_5$  está fora da base, seu valor na solução ótima é **zero**. Vamos passar seu valor para **1** e calcular as variações que devem ocorrer nas variáveis básicas.

$$x_5 = 0 \text{ passa para } x_5 = 1$$

# INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA DOS COEFICIENTES DO QUADRO DO SIMPLEX

## análise de sensibilidade para $x_5$ :

### a) Cálculo da variação em $x_3$

A relação entre  $x_5$  e  $x_3$  aparece na primeira equação do quadro da solução ótima:

BASE	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	b
$x_3$	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	2
$x_2$	0	1	0	1	0	6
$x_1$	1	0	0	$-2/3$	$1/3$	2
Z	0	0	0	3	1	36

$\Rightarrow 1x_3 - 1/3x_5 = 2$

# INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA DOS COEFICIENTES DO QUADRO DO SIMPLEX

## análise de sensibilidade para $x_5$ :

a) Cálculo da variação em  $x_3$

$$1x_3 - 1/3x_5 = 2$$

$$\text{Se } x_5 = 0, \quad x_3 = 2$$

com  $\Delta x_3 = 1$ , temos:

$$1x_3 = 2 + 1/3.(1) \rightarrow 1x_3 = 2 + 1/3 \rightarrow x_3^{\text{nov}} = 7/3$$

a variação em  $x_3$  é:

$$\Delta x_3 = x_3^{\text{nov}} - x_3$$

$$\text{onde: } \Delta x_3 = 7/3 - 2$$

$$\Delta x_3 = 1/3$$

# INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA DOS COEFICIENTES DO QUADRO DO SIMPLEX

## análise de sensibilidade para $x_5$ :

### b) Cálculo da variação em $x_2$

A relação entre  $x_5$  e  $x_2$  aparece na segunda equação do quadro da solução ótima:

BASE	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	b
$x_3$	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	2
$x_2$	0	1	0	1	0	6
$x_1$	1	0	0	$-2/3$	$1/3$	2
Z	0	0	0	3	1	36

$\Rightarrow 1x_2 + 0x_5 = 6$



# INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA DOS COEFICIENTES DO QUADRO DO SIMPLEX

## análise de sensibilidade para $x_5$ :

### b) Cálculo da variação em $x_2$

$$1x_2 + 0x_5 = 6$$

$$\text{Se } x_5 = 0, \quad x_2 = 6$$

com  $\Delta x_5 = 1$ , temos:

$$1x_2 = 6 \quad \rightarrow \quad x_2^{\text{nov}} = 6$$

a variação em  $x_2$  é:

$$\Delta x_2 = x_2^{\text{nov}} - x_2$$

$$\text{onde: } \Delta x_2 = 6 - 6$$

$$\Delta x_2 = 0$$

# INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA DOS COEFICIENTES DO QUADRO DO SIMPLEX

## análise de sensibilidade para $x_5$ :

### c) Cálculo da variação em $x_1$

A relação entre  $x_5$  e  $x_1$  aparece na terceira equação do quadro da solução ótima:

BASE	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	b
$x_3$	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	2
$x_2$	0	1	0	1	0	6
$x_1$	1	0	0	$-2/3$	$1/3$	2
Z	0	0	0	3	1	36

$\Rightarrow 1x_1 + 1/3x_5 = 2$

# INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA DOS COEFICIENTES DO QUADRO DO SIMPLEX

## análise de sensibilidade para $x_5$ :

c) Cálculo da variação em  $x_1$

$$1x_1 + 1/3x_5 = 2$$

$$\text{Se } x_5 = 0, \quad x_1 = 2$$

com  $\Delta x_5 = 1$ , temos:

$$1x_1 = 2 - 1/3.(1) \rightarrow 1x_1 = 2 - 1/3 \rightarrow x_1^{\text{nov}} = 5/3$$

a variação em  $x_2$  é:

$$\Delta x_1 = x_1^{\text{nov}} - x_1$$

$$\text{onde: } \Delta x_1 = 5/3 - 2$$

$$\Delta x_1 = -1/3$$

# INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA DOS COEFICIENTES DO QUADRO DO SIMPLEX

## análise de sensibilidade para $x_5$ :

### d) Cálculo da variação em Z

Tomando a função objetivo  $Z = 3x_1 + 5x_2$ , pode-se escrever:

$$\Delta Z = 3.(\Delta x_1) + 5.(\Delta x_2)$$

Substituindo pelos valores de  $\Delta x_1$  e  $\Delta x_2$ , tem -se:

$$\Delta Z = 3.(-1/3) + 5.(0)$$

$$\Delta Z = -1$$

longaray@bol.com.br

## INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA DOS COEFICIENTES DO QUADRO DO SIMPLEX

BASE	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	b
$x_3$	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	2
$x_2$	0	1	0	1	0	6
$x_1$	1	0	0	$-2/3$	$1/3$	2
Z	0	0	0	3	1	36

**Portanto, para  $\Delta x_5 = 1$  temos:**

$$\Delta x_3 = 1/3$$

$$\Delta x_2 = 0$$

$$\Delta x_1 = -1/3$$

$$\Delta Z = -1$$

## INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA DOS COEFICIENTES DO QUADRO DO SIMPLEX

BASE	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	b
$X_3$	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	2
$X_2$	0	1	0	1	0	6
$X_1$	1	0	0	$-2/3$	$1/3$	2
Z	0	0	0	3	1	36

Com base no cálculo das variações, pode-se proceder a interpretação econômica!

**Para  $\Delta X_4 = 1$  temos:**

$$\Delta X_3 = -2/3$$

$$\Delta X_2 = -1$$

$$\Delta X_1 = 2/3$$

$$\Delta Z = -3$$

**Para  $\Delta X_5 = 1$  temos:**

$$\Delta X_3 = 1/3$$

$$\Delta X_2 = 0$$

$$\Delta X_1 = -1/3$$

$$\Delta Z = -1$$

## INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA DOS COEFICIENTES DO QUADRO DO SIMPLEX

A solução ótima do problema representa um plano de produção dos produtos 1 e 2:

$x_1 = 2$ ; significa a indicação para produção de 2 unid. de P1.

$x_2 = 6$ ; significa a indicação para produção de 6 unid. de P2.

dando margem de contribuição total de  $Z = 36$

## INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA DOS COEFICIENTES DO QUADRO DO SIMPLEX

A utilização dos recursos está programada da seguinte forma:

RECURSO A:  $x_3 = 2$  significa que há uma sobra de 2 unidades.

RECURSO B:  $x_4 = 0$  significa utilização total do recurso, já que a folga é 0.

RECURSO C:  $x_5 = 0$  significa utilização total do recurso, já que a folga é 0.



## INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA DOS COEFICIENTES DO QUADRO DO SIMPLEX

Para  $\Delta X_4 = 1$  temos:

$$\Delta X_3 = -2/3$$

$$\Delta X_2 = -1$$

$$\Delta X_1 = 2/3$$

$$\Delta Z = -3$$

Para  $\Delta X_5 = 1$  temos:

$$\Delta X_3 = 1/3$$

$$\Delta X_2 = 0$$

$$\Delta X_1 = -1/3$$

$$\Delta Z = -1$$

A **análise de sensibilidade** tem a seguinte interpretação:

## INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA DOS COEFICIENTES DO QUADRO DO SIMPLEX

Para  $\Delta X_4 = 1$  temos:

$$\Delta X_3 = -2/3$$

$$\Delta X_2 = -1$$

$$\Delta X_1 = 2/3$$

$$\Delta Z = -3$$

Passando o valor de  $x_4$  de 0 para 1, estamos impondo uma **folga** de 1 unidade no recurso B ou reduzindo a disponibilidade original desse, de 6 unidades para 5 unidades.

Para  $\Delta X_4 = 1$       AUMENTO DA FOLGA = REDUÇÃO DA DISPONIBILIDADE

$\Delta Z = -3$                   REDUÇÃO NA MARGEM DE CONTRIBUIÇÃO

## INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA DOS COEFICIENTES DO QUADRO DO SIMPLEX

Para  $\Delta X_4 = 1$  temos:

$$\Delta X_3 = -2/3$$

$$\Delta X_2 = -1$$

$$\Delta X_1 = 2/3$$


$$\Delta Z = -3$$

→ Significa que a folga no recurso A cai de 2/3

## INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA DOS COEFICIENTES DO QUADRO DO SIMPLEX

Para  $\Delta X_4 = 1$  temos:

$$\Delta X_3 = -2/3$$

$\Delta X_2 = -1$   Significa que o nível de produção de P2 cai de 1 unidade

$$\Delta X_1 = 2/3$$

$$\Delta Z = -3$$

## INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA DOS COEFICIENTES DO QUADRO DO SIMPLEX

Para  $\Delta X_4 = 1$  temos:

$$\Delta X_3 = -2/3$$

$$\Delta X_2 = -1$$

$$\Delta X_1 = 2/3$$

$$\Delta Z = -3$$

→ Significa que o nível de produção de P1 aumenta 2/3 unidade

## INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA DOS COEFICIENTES DO QUADRO DO SIMPLEX

Para  $\Delta X_4 = 1$  temos:

$$\Delta X_3 = -2/3$$

$$\Delta X_2 = -1$$

$$\Delta X_1 = 2/3$$

$$\Delta Z = -3$$

Como resultado dessas variações nos níveis de produção de P1 e P2, obtivemos uma variação de (-3) na f.o.

## INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA DOS COEFICIENTES DO QUADRO DO SIMPLEX

Fazendo a mesma análise para  $x_5$ , encontramos uma variação de (-1) no valor da função objetivo.

Para  $\Delta X_5 = 1$  temos:

$$\Delta X_3 = 1/3$$

$$\Delta X_2 = 0$$

$$\Delta X_1 = -1/3$$



$$\Delta Z = -1$$

## INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA DOS COEFICIENTES DO QUADRO DO SIMPLEX

Comparando os dois valores, percebemos que o Recurso B tem mais valor para a empresa do que o Recurso C, pois uma redução unitária em sua disponibilidade original causa uma queda maior na f.o. original.

**Para  $\Delta X_4 = 1$  temos:**

$$\Delta X_3 = -2/3$$

$$\Delta X_2 = -1$$

$$\Delta X_1 = 2/3$$

$$\Delta Z = -3$$

**Para  $\Delta X_5 = 1$  temos:**

$$\Delta X_3 = 1/3$$

$$\Delta X_2 = 0$$

$$\Delta X_1 = -1/3$$

$$\Delta Z = -1$$



# INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA DOS COEFICIENTES DO QUADRO DO SIMPLEX

O Recurso A, por apresentar folga na solução ótima ( $x_3 = 2$ ), não causa qualquer variação no valor da f.o., quando tem sua disponibilidade reduzida de 1 unidade.

variáveis não básicas:

$$x_4 = 0$$

$$x_5 = 0$$

variáveis básicas:


$$x_3 = 2$$

$$x_2 = 6$$

$$x_1 = 2$$

## INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA DOS COEFICIENTES DO QUADRO DO SIMPLEX

Chama-se de **preço sombra** ou **utilidade marginal** de uma restrição, a quantidade na qual o valor da função objetivo muda aumentando ou diminuindo de uma unidade a disponibilidade do recurso a que corresponde essa restrição!!!

Ou seja...

**... o que acabamos de fazer!!!**

# INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA DOS COEFICIENTES DO QUADRO DO SIMPLEX

Veja a notação no quadro SIMPLEX:

BASE	Produtos		Variáveis de folga relacionadas com recursos			b
	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>	
X <sub>3</sub>	0	0	1	2/3	- 1/3	2
X <sub>2</sub>	0	1	0	1	0	6
X <sub>1</sub>	1	0	0	- 2/3	1/3	2
Z	0	0	0	3	1	36

CONTRIBUIÇÃO MARGINAL
 UTILIDADE MARGINAL

## INTERPRETAÇÃO ECONÔMICA DOS COEFICIENTES DO QUADRO DO SIMPLEX

### **Limite para as variáveis nas disponibilidades de recursos:**

O limite na variação da disponibilidade de um recurso é o momento em que uma variável atinge o valor zero, já que não podemos ter variáveis negativas na solução de nosso problema. Esta variável sairia da base, exigindo cálculo de nova solução.