Universidade Federal do Rio Grande – FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física – IMEF

Edital 15 - CAPES

Matemática Básica
Para Ciências Sociais I

GEOMETRIA ANALÍTICA

Prof. Antônio Maurício Medeiros Alves
Profª Denise Maria Varella Martinez

UNIDADE 4 – GEOMETRIA ANALÍTICA

1. INTRODUÇÃO

A Geometria Analítica é uma parte da Matemática que, através de processos particulares, estabelece as relações existentes entre a Álgebra e a Geometria (esta última já era do conhecimento dos gregos, há mais de dois mil anos). Desse modo, uma reta, uma circunferência ou uma figura geométrica qualquer podem ter suas propriedades estudadas, através de métodos algébricos.

A história nos diz que os estudos iniciais da Geometria Analítica se deram no século XVII. Dois franceses, Pierre de Fermat (1601-1665) e René Descartes (1596-1650), desenvolveram a geometria analítica de maneira independente.

A contribuição de Fermat à geometria analítica encontra-se num pequeno texto intitulado *Introdução aos Lugares Planos e Sólidos* e data de 1636, mas somente foi publicado em 1679, postumamente, junto com sua obra completa.

A Geometria Analítica de Descartes apareceu em 1637 no pequeno texto chamado *A Geometria* como um dos três apêndices do *Discurso do Método*, obra considerada o marco inicial da filosofia moderna. Nessa obra Descartes defende o método matemático como modelo para a aquisição de conhecimentos em todos os campos. Ao relacionar a Álgebra com a Geometria, ele criou princípios matemáticos capazes de analisar por métodos geométricos as propriedades do ponto, da reta e da circunferência, determinando distâncias entre eles, localização e pontos de coordenadas.

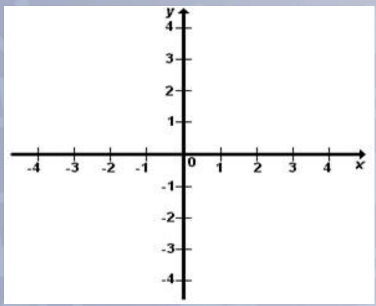
Contudo, a Geometria Analítica, como é hoje, pouco se assemelha às contribuições deixadas por Fermat e Descartes. Mas, cada um a seu modo, sabiam que a idéia central era associar equações a curvas e superfícies.

Referências
http://www.algosobre.com.br/matematica/geometria-analitica.html
http://www.somatematica.com.br/historia/analitica.php

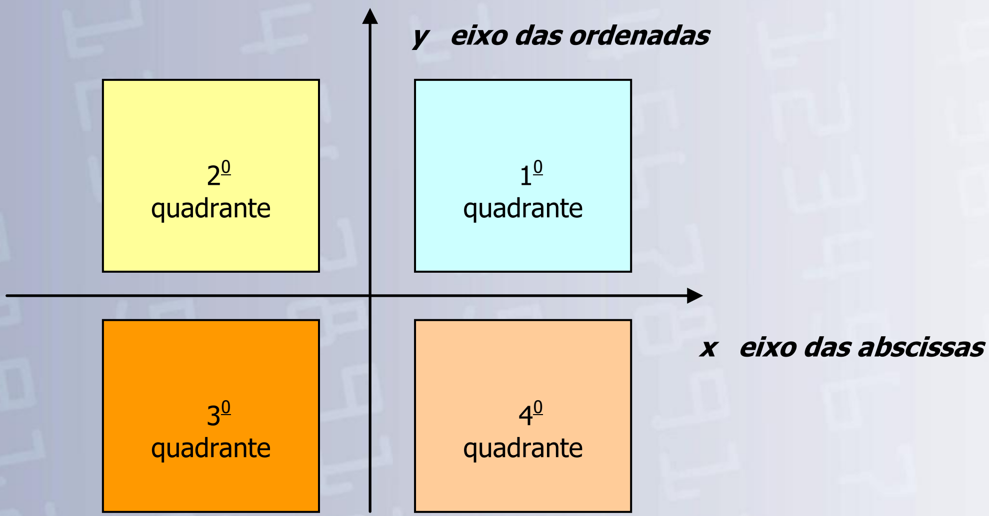
2. ESTUDO DO PONTO

2.1. Plano Cartesiano

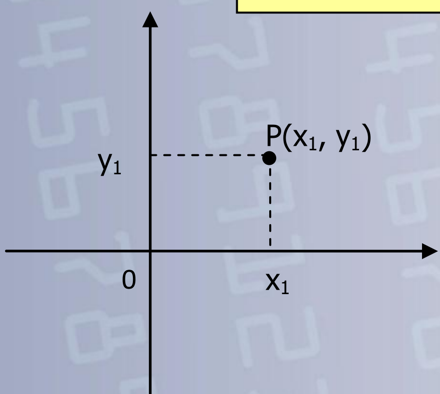
O Plano Cartesiano, criado por Descartes, é formado por dois eixos x e y perpendiculares entre si que se cruzam na origem. O horizontal é chamado de



eixo das abscissas (eixo 0X) e o vertical de ordenada (eixo 0Y). A intersecção dos eixos é chamada de origem. Associando-se o conjunto de todos os números reais a cada um dos eixos obtém-se o plano cartesiano ortogonal. Os eixos x e y dividem o plano cartesiano em quadrantes, como pode ser observado na figura abaixo. Qualquer ponto (x,y) que não se encontrar sobre os eixos, estará localizado nos quadrantes a seguir:



1° quadrante	⟹	$x > 0$ e $y > 0$
2° quadrante	⟹	$x < 0$ e $y > 0$
3° quadrante	⟹	$x < 0$ e $y < 0$
4° quadrante	⟹	$x > 0$ e $y < 0$



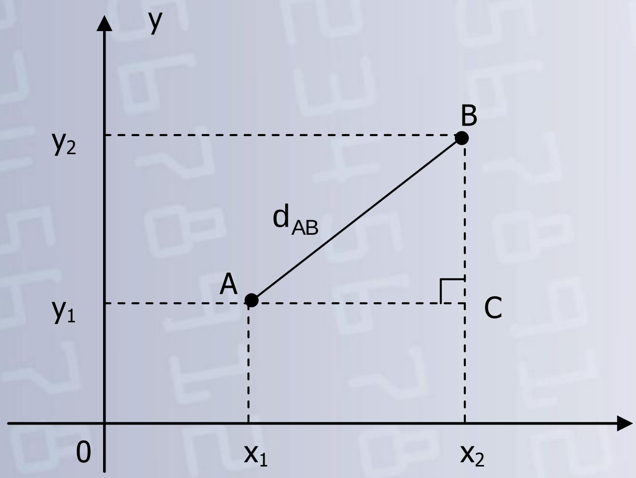
Dado um ponto $P(x_1, y_1)$ do plano cartesiano: suas coordenadas são “x_1” e “y_1”, sendo “x_1” a abscissa e “y_1” a ordenada, conforme mostra a figura ao lado.

Todo par ordenado de números reais fica associado a um único ponto P do plano cartesiano. Os pontos pertencentes aos eixos x e y, respectivamente, são os pontos de coordenadas (x_1,0) e (0,y_1).

O sistema de coordenadas cartesianas possui inúmeras aplicações, desde a construção de um simples gráfico até os trabalhos relacionados à cartografia, pontos estratégicos de bases militares, localizações no espaço aéreo, terrestre e marítimo. Além disso, podemos associar o Plano Cartesiano com a latitude e a longitude, temas relacionados aos estudos geográficos e à criação do atual sistema de posicionamento, o GPS.

2.2. Distância entre dois pontos

Dado o plano cartesiano, vamos estabelecer a distância d_{AB} entre os pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$.



Os pontos A, B e C formam o triângulo retângulo ABC, onde os lados BC e AC representam os catetos e AB a hipotenusa. A distância entre os pontos A e B é a medida da hipotenusa do triângulo, que pode ser calculada por meio do Teorema de Pitágoras, definido como *"o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos"*. Dessa forma, podemos construir a distância entre os dois pontos A e B:

Cateto BC: $y_2 - y_1$; Cateto AC: $x_2 - x_1$; Hipotenusa AB: distância d_{AB}

$$(d_{AB})^2 = (AC)^2 + (CB)^2$$

$$(d_{AB})^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Exemplo: Dados os pontos $A(2,-3)$ e $B(4,5)$, determine a distância entre eles.

Sabendo que $x_1 = 2$ e $x_2 = 4$; $y_1 = -3$ e $y_2 = 5$, encontraremos a

$$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(4-2)^2 + [5-(-3)]^2} = \sqrt{(2)^2 + (8)^2} = \sqrt{4 + 64} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

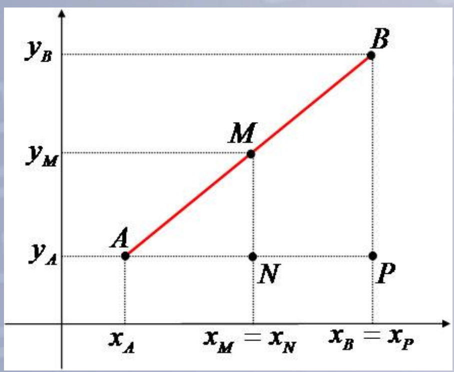
distância entre $A(2,-3)$ e $B(4,5)$, fazendo:

2.3. Ponto Médio de um segmento de reta

Dado um segmento de reta $\overline{AB}$ tal que as coordenadas dos pontos são $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$. As coordenadas do ponto médio de $\overline{AB}$, chamado de M, são dadas por:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Observe no gráfico abaixo que, o segmento de reta $\overline{AB}$ tem um ponto médio $M(x_M, y_M)$ e os triângulos AMN e ABP são semelhantes, possuindo os três ângulos respectivamente iguais. Dessa forma, aplicamos o Teorema de Tales:



$$\frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AN}$$

No entanto, $AB = 2(AM)$, então:

$$\frac{AM}{2AM} = \frac{AP}{AN}, \text{ logo } \frac{AP}{AN} = \frac{1}{2} \text{ e } AP = 2AN.$$

Sabendo que a distância de $\overline{AP} = x_B - x_A$ e a distância entre $\overline{AN} = x_M - x_A$, temos:

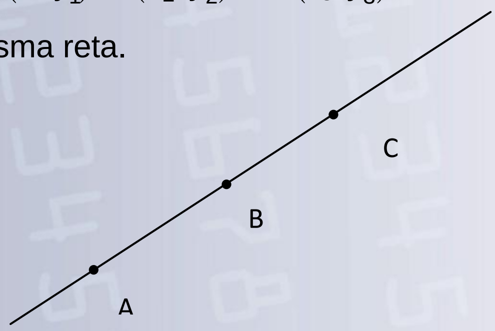
$$x_B - x_B = 2(x_M - x_A)$$
$$x_B - x_A = 2x_M - 2x_A$$
$$x_B - x_A + 2x_A = 2x_M$$
$$x_B + x_A = 2x_M$$
$$x_M = \frac{x_B + x_A}{2}$$

Teorema de Tales

O Teorema de Tales é determinado pela intersecção entre retas paralelas e transversais, que formam segmentos proporcionais. Foi estabelecido por Tales de Mileto que defendia a tese de que os raios solares que chegavam à Terra estavam na posição inclinados. Partindo desse principio básico observado na natureza, intitulou uma situação de proporcionalidade que relaciona as retas paralelas e as transversais.

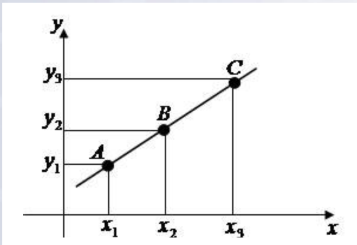
2.4. Condição de alinhamento de três pontos

Três pontos distintos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ estão alinhados se, e somente se, pertencem à mesma reta.



Para verificarmos se os pontos estão alinhados efetuamos o cálculo do determinante da matriz de ordem 3x3, construída utilizando as coordenadas dos 3 pontos A, B e C, onde as abscissas dos pontos constituirão a primeira coluna da matriz, as ordenadas a segunda coluna e a terceira coluna será complementada com o número um (1). Se o valor do determinante for igual à zero, podemos afirmar que existe colinearidade dos três pontos.

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$



Exemplo: Verificar se os pontos $A(1,2)$, $B(3,4)$ e $C(4,5)$ estão alinhados.

Testando a condição de alinhamento temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix} = (4+15+8) - (16+5+6) = 27 - 27 = 0 .$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{matrix}$$

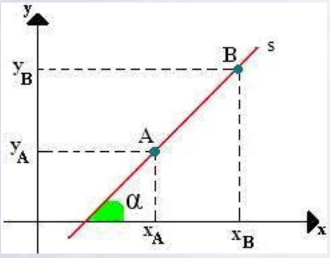
$1.4.4 + 1.5.1 + 1.2.3$ $\qquad$ $1.4.1 + 3.5.1 + 4.2.1$

Logo A , B e C estão alinhados.

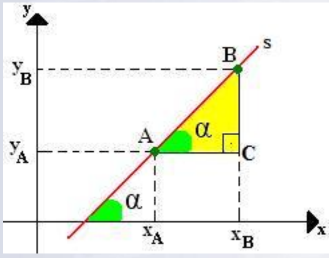
2.5. Coeficiente angular de uma reta

O valor do coeficiente angular m de uma reta é a tangente do seu ângulo de inclinação, formado pela intersecção da reta e o eixo ox, ou seja, m = $\text{tg}\,\alpha$.

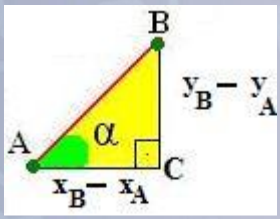
O valor da tangente do ângulo α [$tg\alpha$] pode ser encontrado da seguinte forma:



Considere uma reta s que passa pelos pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ e possui um ângulo de inclinação com o eixo ox igual a α. A semi-reta que passa pelo ponto A e é paralela ao eixo ox forma um triângulo retângulo no ponto C.



O ângulo α do triângulo BCA será igual ao da inclinação da reta, pois, pelo Teorema de Tales, duas retas paralelas cortadas por uma transversal formam ângulos correspondentes iguais. Levando em consideração o triângulo BCA e que o coeficiente angular é igual à tangente do ângulo de inclinação, teremos:



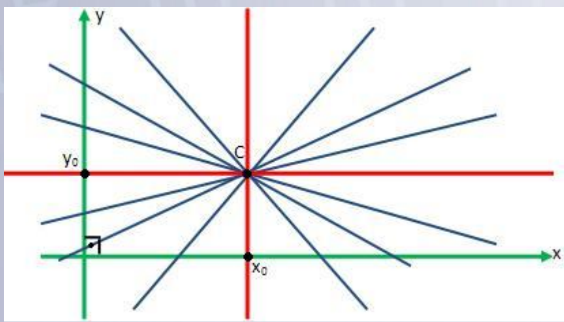
Portanto, $m = tg\alpha = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Exemplo: O coeficiente angular da reta que passa pelos pontos $A(2,3)$ e $B(4,7)$ vale:

$$m = tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{7-3}{4-2} = \frac{4}{2} = 2.$$

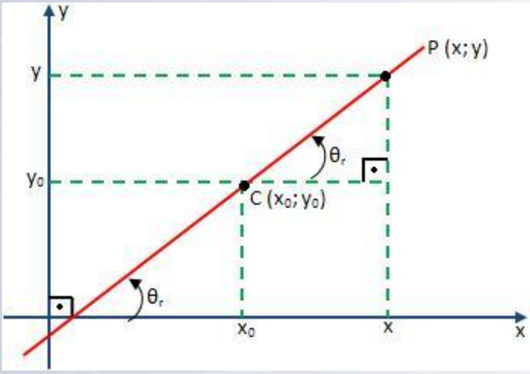
2.6. Equação da reta que passa por um ponto:

Consideremos as retas que passam pelo ponto C de coordenadas (x_0, y_0).



Considere $C(x_0, y_0)$ e $P(x, y)$ como um ponto genérico de uma das retas do feixe. Sendo m o coeficiente angular da reta temos: $m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$ e

$y - y_0 = m(x - x_0)$



Atribuindo todos os valores possíveis para o coeficiente angular m, obtemos as equações de todas as retas que passam pelo ponto C, com exceção da reta vertical.

Então, a equação das retas que passam por $C(x_0, y_0)$ e tem coeficiente angular m é dada por:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \text{ com } m \in \Re$$

Caso particular

A reta vertical do feixe, que passa por $C(x_0, y_0)$, tem a equação: $x = x_0$.

Exemplos:

1) Determinar a equação da reta que passa pelo ponto $A(-1, 4)$ e tem coeficiente angular 2.

Usando $y - y_0 = m(x - x_0)$ temos:

$$y - 4 = 2(x - (-1)) \Rightarrow y - 4 = 2(x + 1) \Rightarrow y - 4 = 2x + 2 \Rightarrow -2x + y - 6 = 0 \Rightarrow 2x - y + 6 = 0$$

2) Determinar a equação da reta que passa pelos pontos $A(-1, -2)$ e $B(5, 2)$.

Calculando o coeficiente angular temos:

$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - (-2)}{5 - (-1)} = \frac{2 + 2}{5 + 1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Usando o ponto $A(-1, -2)$:

$$y - (-2) = \frac{2}{3}(x - (-1)) \Rightarrow y + 2 = \frac{2}{3}(x + 1) \Rightarrow 3y + 6 = 2x + 2 \Rightarrow 2x - 3y - 4 = 0.$$

E ainda, usando o ponto $B(5, 2)$:

$$y - (-2) = \frac{2}{3}(x - 5) \Rightarrow y + 2 = \frac{2}{3}(x - 5) \Rightarrow\Rightarrow 3y + 6 = 2x - 10 \Rightarrow 2x - 3y - 4 = 0.$$

A equação da reta que passa pelos pontos A e B e tem coeficiente angular 2/3 é $2x - 3y - 4 = 0$.

Outra forma de encontrarmos a equação da reta é utilizando a condição de alinhamento de três pontos. Considerando que os pontos $P(x,y)$, A e B estão alinhados. Dessa forma, pela condição de alinhamento entre três pontos:

$$\begin{array}{ccc} \left[\begin{array}{ccc} x & y & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{array}\right] & & \\ \begin{array}{ccc} x & y & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{array} & & \end{array}$$

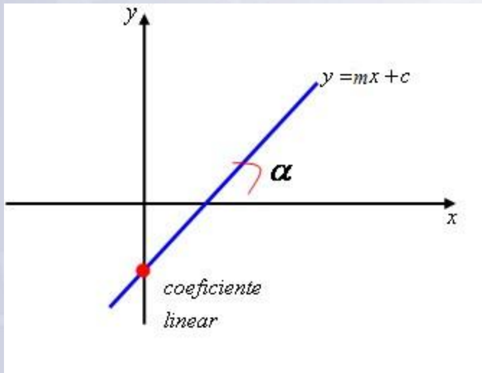
$$-10+2x-y \qquad\qquad -2x-2+5y$$

$$-2x-2+5y-(-10+2x-y)=-2x-2+5y+10-2x+y=-4x+6y+8=2x-3y-4$$

3. FORMAS DA EQUAÇÃO DA RETA

3.1. Equação reduzida da reta

A equação reduzida da reta é dada por $y=mx+c$. O coeficiente angular m representa a inclinação da reta em relação ao eixo das abscissas (x) e o coeficiente linear (b) representa o valor numérico por onde a reta passa no eixo das ordenadas (y).



Exemplo:

Achar a equação reduzida da reta que passa em $A(-3,2)$ e $B(1,3)$. Usando $y=mx+b$, e substituindo os pontos A e B obtemos o sistema:

$$\begin{cases} m.(-3)+c=2 \\ m.(1)+c=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3m-c=-2 \\ m+c=3 \end{cases}, \text{ sendo } \quad 4m=1 \Rightarrow m=\frac{1}{4}$$

Substituindo o valor de m em qualquer uma das equações temos:

$m+c=3 \Rightarrow \frac{1}{4}+c=3 \Rightarrow c=\frac{11}{4}$, logo a equação reduzida é $y=\frac{1}{4}x+\frac{11}{4}$.

3.2. Equação Geral da reta

A equação geral da reta é dada por: $ax+by+c=0$, onde a, b e c são números reais constantes e a e b diferentes de zero.

Exemplo:

Achar a equação geral da reta que passa pelos pontos $A(2{,}3)$ e $B(4{,}7)$.

Indicando um ponto qualquer por $P(x, y)$ e usando a condição de alinhamento, obtemos:

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{matrix}$$

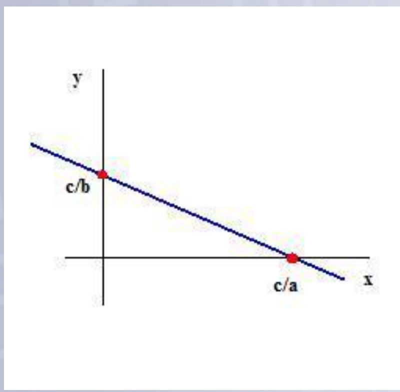
, aplicando Sarrus:

$$\begin{aligned} & x.3.1 + 2.7.1 + 4.y.1 - (1.3.4 + 1.7.x + 1.y.2) = \\ & 3x + 14 + 4y - (12 + 7x + 2y) = \\ & 3x + 14 + 4y - 12 - 7x - 2y = \\ & -4x + 2y + 2 = 0 \\ & 2x - y - 1 = 0 \end{aligned}$$

$1.3.4 + 1.7.x + 1.y.2$ $\qquad$ $x.3.1 + 2.7.1 + 4.y.1$

3.3. Equação segmentária da reta

Seja s uma reta qualquer do plano $ax + by = c$, a equação segmentária da reta se dá pela divisão da equação por c. Portanto $\frac{ax}{c} + \frac{by}{c} = \frac{c}{c}$, logo $\frac{x}{c/a} + \frac{y}{c/b} = 1$, onde $\frac{c}{a}$ é a abscissa do ponto de interseção com o eixo x e $\frac{c}{b}$ é a ordenada do ponto de interseção com o eixo y.



Exemplo:

Determine a forma segmentária da equação da reta $2x + 3y - 6 = 0$:

Usando $\frac{x}{c/a} + \frac{y}{c/b} = 1$, temos:

$$\frac{2x}{6} + \frac{3y}{6} = \frac{6}{6}$$

$$\frac{2x}{6} + \frac{3y}{6} = 1 \qquad \frac{c}{a} = \frac{6}{2} = 3; \quad \frac{c}{b} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$$

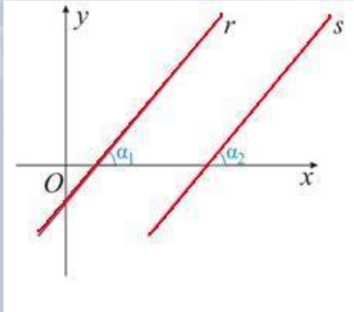
4. POSIÇÕES RELATIVAS DE DUAS RETAS NO PLANO

Sejam:

- α_1 o ângulo que a reta r forma com o eixo 0x; m_1 seu coeficiente angular;
- α_2 o ângulo que a reta s forma com o eixo 0x; m_2 seu coeficiente angular.

4.1. Retas Paralelas

As retas s e r são ditas paralelas $(r // s)$ se $m_1 = m_2 \Rightarrow tg\alpha_1 = tg\alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$



Exemplo:

Verifique se as retas $r: 2x + 3y - 7 = 0$ e $s: -10x - 15y + 45 = 0$ são paralelas.

Determinando o coeficiente angular de cada uma das retas, temos:

Reta $r: 2x + 3y - 7 = 0$:

Isolando y ficamos com:

$$3y = 7 - 2x$$

$$y = \frac{7 - 2x}{3} \qquad m_r = \frac{-2}{3}$$

Reta $s: -10x - 15y + 45 = 0$:

Isolando y ficamos com:

$$-15y = -45 + 10x$$

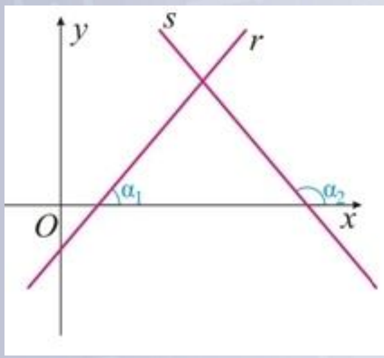
$$y = \frac{45 - 10x}{15} \qquad m_s = \frac{-2}{3}$$

$$y = \frac{-2x}{3} + 3$$

Como $m_r = m_s$, as retas r e s são paralelas $(r // s)$.

4.2. Retas concorrentes e Intersecção de duas retas

Duas retas são ditas concorrentes se elas se interceptam em um ponto. Para que as retas r e s sejam concorrentes seus coeficientes angulares devem ser diferentes. Portanto, $\alpha_r \neq \alpha_s \Rightarrow m_r \neq m_s$.



Para encontrar a intersecção de duas retas, devemos resolver o sistema formado por suas respectivas equações.

Exemplo:

Achar a intersecção das retas $r: x - 2y + 4 = 0$ e $s: x + 2y - 8 = 0$.

Resolvendo o sistema formado por essas duas equações, temos:

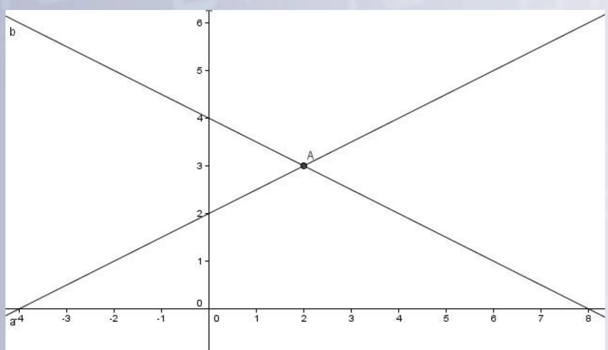
$$\begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ x + 2y - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2x - 4 = 0 \\ x = 2 \end{matrix}$$

Substituindo em qualquer uma das equações temos:

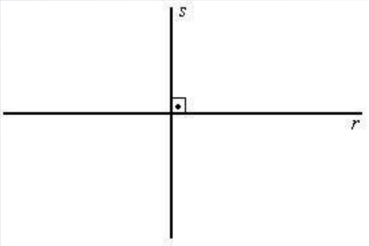
$$s: x + 2y - 8 = 0$$

$$\begin{aligned} 2 + 2y - 8 &= 0 \\ 2y - 6 &= 0 \\ 2y &= 6 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Logo, o sistema é possível e determinado, ou seja, possui uma única solução, que é o par ordenado $(2,3)$. Isso significa que existe somente um ponto que pertence ás duas retas, ou seja, o ponto $P(2,3)$.



4.3. Retas perpendiculares



Duas retas r e s são perpendiculares se, e somente se, são concorrentes e formam ângulos retos e $m_r.m_s = -1$.

Exemplo:

Verificar se as retas $r: 3x - 5y + 5 = 0$ e $s: 5x + 3y - 12 = 0$ são perpendiculares.

Determinando o coeficiente angular de cada reta temos:

Reta $r: 3x - 5y + 5 = 0$:

$$-5y = -5 - 3x \Rightarrow y = \frac{5 + 3x}{5}$$

$$y = \frac{3x}{5} + 1 \Rightarrow \quad m_r = \frac{3}{5}$$

Reta $s: 5x + 3y - 12 = 0$

$$3y = 12 - 5x \Rightarrow y = \frac{12 - 5x}{3}$$

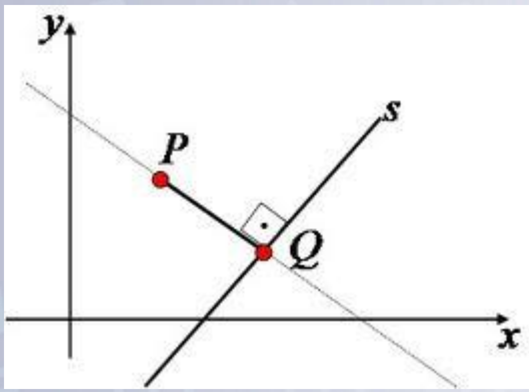
$$y = -\frac{5x}{3} + 4 \Rightarrow \quad m_S = -\frac{5}{3}$$

Usando $m_r.m_s = -1$temos:

$\frac{3}{5}.\left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{15}{15} = -1$ Logo, concluímos que as retas são perpendiculares $(r \perp s)$.

5. DISTÂNCIA ENTRE PONTO E RETA

A distância entre um ponto $P(x_0, y_0)$ e uma reta s é calculada unindo P a s através de um segmento PQ, que deverá formar com s um ângulo reto $(90°)$. Para estabelecer a distância entre os dois é necessária a utilização da equação geral da reta e da coordenada do ponto.



Estabelecendo a equação geral da reta $s: ax_0 + by_0 + c = 0$ e a coordenada do ponto $P(x_0, y_0)$, chegamos à fórmula da distância entre um ponto e uma reta dada por:

$$d = \frac{|a x_0 + b y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Exemplo:

Achar a distância do ponto $P(2{,}3)$ à reta $r: 6x - 8y + 4 = 0$.

Sendo: $a = 6;\ b = -8;\ c = 4;\ x_0 = 2;\ y_0 = 3$

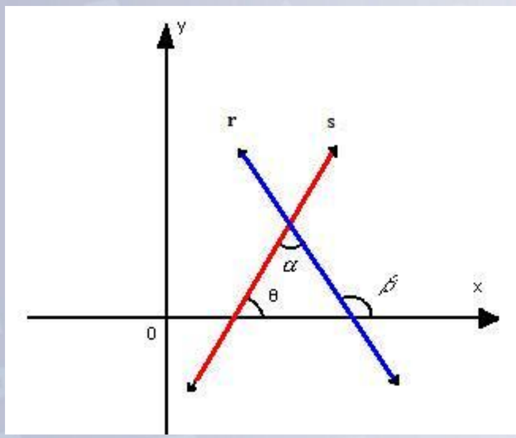
Usando

$$d = \frac{|a x_0 + b y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|6.2 + (-8).3 + 4|}{\sqrt{6^2 + (-8)^2}} = \frac{|12 - 24 + 4|}{\sqrt{36 + 64}} = \frac{|-8|}{\sqrt{100}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

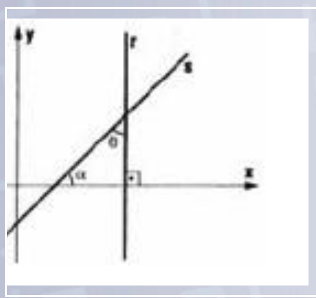
Logo a distância do ponto P a reta s é de $\frac{4}{5}$ ou $0{,}8$ unidades.

6. ÂNGULO FORMADO POR DUAS RETAS

Sejam r e s duas retas distintas e concorrentes que formam, entre si, um ângulo α, onde m_r e m_s são os coeficientes angulares das retas, respectivamente. A tangente de α é dada por: $\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r}\right|$.



Se uma das retas for vertical e a outra oblíqua, o ângulo α formado entre elas é tal que $\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{1}{m_r}\right|}$.



Exemplo:

Determinar o valor do ângulo formado pelas retas $r: y-4=3(x-5)$ e $s: 2x+y-7=0$.

Reta $r: y-4=3(x-5) \Rightarrow m_r=3$

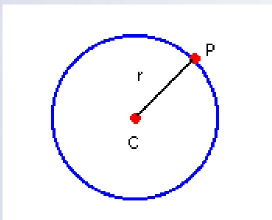
Reta $s: 2x+y-7=0 \Rightarrow m_s=-2$

$y=7-2x$

Usando $\operatorname{tg}\alpha=\left|\frac{m_s-m_r}{1+m_s \cdot m_r}\right|$ temos: $\operatorname{tg}\alpha=\left|\frac{3-(-2)}{1+3.(-2)}\right|=\left|\frac{3+2}{1-6}\right|=\left|\frac{5}{-5}\right|=1$

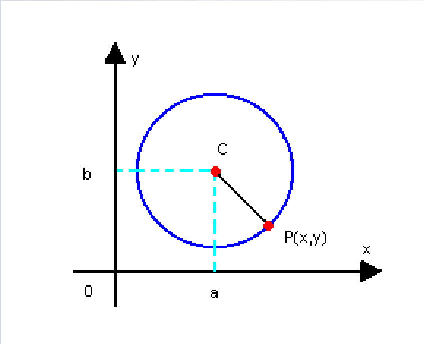
7. ESTUDO DA CIRCUNFERÊNCIA

A circunferência é o conjunto de todos os pontos de um plano cuja distância ao ponto C é igual a um valor r. O ponto C é chamado ***centro*** da circunferência, e a medida do



segmento de reta que liga um ponto qualquer da circunferência ao centro é chamado de ***raio***.

7.1. Equação da circunferência



Sejam $C(a,b)$ o centro e $P(x,y)$ um ponto qualquer da circunferência, a distância de C a P é o raio da circunferência. Através do cálculo da distância entre dois pontos temos:

$d = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$; $r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$

é a ***equação reduzida da circunferência.***

Quando o centro da circunferência for $C(0,0)$, a equação da circunferência será $x^2 + y^2 = r^2$ .Desenvolvendo a equação reduzida da circunferência temos:

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$$
$$r^2 = x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2$$

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$ é a ***equação geral da circunferência***.

Exemplo:

Determinar a equação de uma circunferência com centro no ponto $O(-3,1)$ e raio 3. Usando $r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$, temos:

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 \Rightarrow (3)^2 = (x-(-3))^2 + (y-1)^2$$
$$3^2 = (x+3)^2 + (y-1)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0$$

Logo a equação é $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 9$ ou $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0$.

7.1.1. Identificação do centro e do raio da circunferência

A identificação do centro e do raio da circunferência pode ser feita através do método de completar quadrados. Vejamos como exemplo a equação dada por: $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$

Sabemos que $(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2ax + a^2$. Portanto a equação a cima pode ser colocada na forma: $\underbrace{x^2 + 6x + \ldots}_{A} + \underbrace{y^2 - 4y + \ldots}_{B} = -4$

Para que a expressão A seja um quadrado perfeito, vamos completar a expressão com 9.

$$x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2 = 0\,;\; a^2 = 9.$$

Para que a expressão B seja um quadrado perfeito vamos completar a expressão com 4. $y^2 - 4y + 4 = (y-2)^2 = 0\,;\; a^2 = 4.$

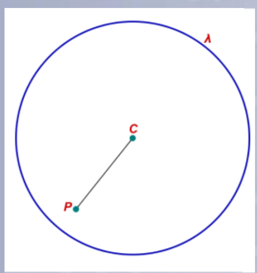
Para que a igualdade seja mantida devemos somar ao segundo membro da expressão os números 9 e 4.

$$\left(x^2 + 6x + 9\right) + \left(y^2 - 4y + 4\right) = -4 + 9 + 4 \text{ ou } (x+3)^2 + (y-2)^2 = 9$$

Desta forma a equação $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$ representa uma circunferência de centro $C(-3,2)$ e raio 3.

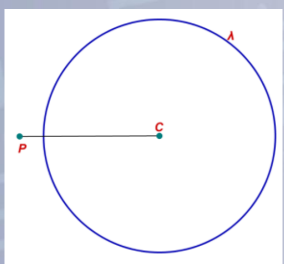
7.1.2. Posições relativas entre circunferência e ponto no plano

A) Ponto Interno à Circunferência



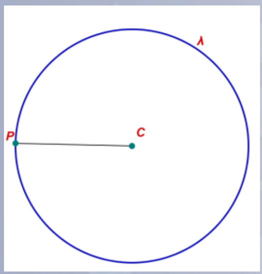
Nesse caso o raio é menor que a distância do ponto P ao centro da circunferência, logo $d_{CP} < r$.

B) Ponto Externo à Circunferência



Nesse caso o raio é maior que a distância do ponto P ao centro da circunferência, logo $d_{CP} > r$.

C) Ponto pertence à Circunferência



Nesse caso o raio é igual à distância do ponto P ao centro da circunferência, logo $d_{CP} = r$.

Exemplo:

Verificar se os pontos $A(1,2)$, $B(3,3)$ e $C(6,3)$ pertencem a circunferência $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$. Pelo método de completar quadrados temos: $(x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 4y + 4) = -9 + 9 + 4 \Rightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = 2^2$. O centro é $C(3,2)$ e o raio, $r = 2$.

⇒ Ponto $A(1,2)$: Substituindo as coordenadas na equação temos:

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$$
$$1^2 + 2^2 - 6.1 - 4.2 + 9 = 1 + 4 - 6 - 8 + 9 = 14 - 14 = 0$$

Logo $A \in$ a circunferência e a distância do ponto A ao centro C é

$$d_A = \sqrt{(1-3)^2 + (2-2)^2} = d_A = \sqrt{4+0} = 2 \quad \text{(igual a } r\text{)}.$$

⇒ Ponto $B(3,3)$: Substituindo as coordenadas na equação temos:

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$$
$$3^2 + 3^2 - 6.3 - 4.3 + 9 = 9 + 9 - 18 - 12 + 9 = -3$$

Logo $B \notin$ a circunferência. A distância de B até o centro é

$d_B = \sqrt{(3-3)^2 + (3-2)^2} = d_B = \sqrt{0+1} = 1$ (menor que r). Significa que B está na região interior da circunferência.

⇒ Ponto $C(6,3)$:

Substituindo as coordenadas na equação temos:

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$$
$$6^2 + 3^2 - 6.6 - 4.3 + 9 = 36 + 9 - 36 - 12 + 9 = 6$$

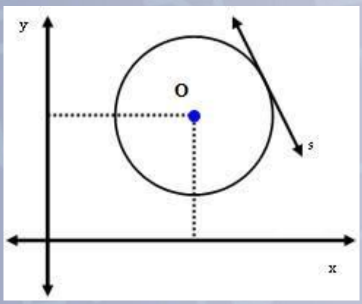
Logo $C \notin$ a circunferência. A distância de C até o centro é :

$d_C = \sqrt{(6-3)^2 + (3-2)^2} = d_C = \sqrt{(3)^2 + (1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \cong 3{,}16$ (maior que r). Significa que C está na região exterior à circunferência.

7.1.3. Posições relativas entre circunferência e reta no plano

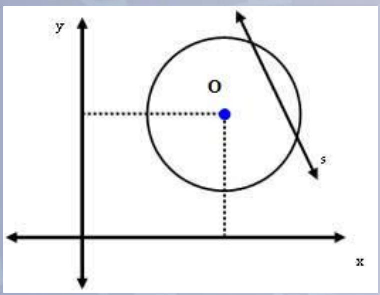
Uma reta qualquer comparada à circunferência pode ser tangente, secante ou externa à circunferência.

A) Reta tangente à circunferência



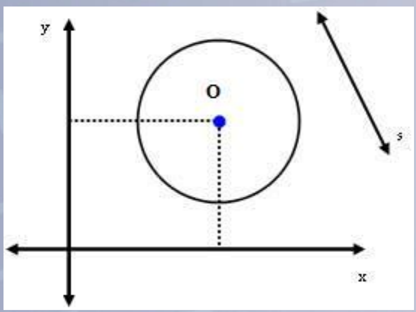
É aquela que "toca" a circunferência em um só ponto. A distância entre o centro O e a reta s é igual ao raio.

B) Reta secante à circunferência



A reta intercepta a circunferência em dois pontos distintos. A distância entre o centro O e a reta s é menor que a medida do raio.

C) Reta externa à circunferência



Nesse caso, a reta não possui nenhum ponto em comum com a circunferência. A distância entre o centro O e a reta s é menor que a medida do raio.

Exemplo:

Dada a circunferência $x^2+y^2-6x+4y-5=0$ estudar a posição relativa das retas:

a) $y=x+1$

b) $y=x+2$

c) $y+5=0$

Para fazer esse estudo precisamos encontrar a intersecção da equação da circunferência com a da reta selecionada a partir da resolução do sistema:

a) $\begin{cases} y=x+1 \\ x^2+y^2-6x+4y-5=0 \end{cases}$

Substituindo a equação da reta $y=x+1$ em $x^2+y^2-6x+4y-5=0$, temos:

$$x^2+(x+1)^2-6x+4(x+1)-5=0$$
$$x^2+x^2+2x+1-6x+4x+4-5=0$$
$$2x^2=0$$
$$x=0$$

Substituindo em $y=x+1 \Longrightarrow y=1$

Significa que só há um ponto em comum entre a reta e a circunferência, o ponto $P(0,1)$. Assim, a reta $y=x+1$ é a ***reta tangente à circunferência***.

b) $\begin{cases} y=x+2 \\ x^2+y^2-6x+4y-5=0 \end{cases}$

Substituindo a equação da reta $y=x+2$ em $x^2+y^2-6x+4y-5=0$, temos:

$$x^2+(x+2)^2-6x+4(x+2)-5=0$$
$$x^2+x^2+4x+4-6x+4x+8-5=0$$
$$2x^2+2x+7=0$$
$$\Delta=b^2-4ac=2^2-4.2.7=4-56=-52$$

Logo, não existe raiz real, pois $-52<0$. Significa que não existe ponto que esteja na reta e na circunferência. Assim, a reta $y=x+2$ é ***exterior à circunferência.***

c) $\begin{cases} y+5=0 \\ x^2+y^2-6x+4y-5=0 \end{cases}$

Isolando y na equação da reta $y+5=0 \Rightarrow y=-5$ e substituindo em

$x^2+y^2-6x+4y-5=0$, temos:

$$x^2+(-5)^2-6x+4(-5)-5=0$$

$$x^2++25-6x-20-5=0$$

$$x^2-6x=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4.1.0=36$$

$$x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{36}}{2.1}=\frac{6\pm 6}{2}=$$

$$x'=\frac{6+6}{2}=\frac{12}{2}=6$$

$$x''=\frac{6-6}{2}=0$$

Logo existem dois pontos que estão na reta e na circunferência: $P_1(6,-5)$ e $P_2(0,-5)$. Logo, a reta $y+5=0$ é ***secante à circunferência.***