Universidade Federal do Rio Grande – FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física – IMEF

Edital 15 – CAPES

Matemática Básica
Para Ciências Sociais II

FUNÇÕES
Parte A

Prof. Antônio Maurício Medeiros Alves
Profª Denise Maria Varella Martinez

UNIDADE 1 – FUNÇÕES

PARTE A

1. INTRODUÇÃO

Muitas vezes, deparamo-nos com situações que envolvem uma relação entre grandezas. São exemplos dessa relação:

1. O preço de um produto e sua demanda e oferta.
2. O rendimento anual de suas economias, os juros, e a taxa de juros oferecidos pelo banco.
3. O tempo de viagem e a velocidade média desenvolvida no trajeto.
4. Na geometria, a área do círculo e o raio da circunferência.

Em cada caso, o valor de uma variável depende do valor da outra, como no exemplo dos juros (j) que dependem da taxa de juros (i). Nesse caso pode-se dizer que a variável (j) é dependente da variável (i), pois seu valor é determinado pelo valor da variável (i), chamada de variável independente.

Podemos utilizar a linguagem matemática por meio de tabelas, gráficos e fórmulas, para representar as relações de dependência entre duas ou mais grandezas. Dentro do universo das relações entre grandezas, as funções são as melhores ferramentas para descrever o mundo real, em termos matemáticos.

Uma função é uma maneira de associar a cada valor da variável x um único valor de $\mathrm{f}(\mathrm{x})$. Isso é visualizado através da representação gráfica entre dois conjuntos de acordo com uma regra de associação, também chamada de lei da função. Outra forma de visualizar a relação entre as variáveis pode ser pela construção de uma tabela de correspondência.

Exemplo:
A tabela abaixo relaciona o número de litros de gasolina comprados com o preço a pagar:

Número de litros	Preço a pagar $(R\$)$
1	2,30
2	4,60
3	6,90
$\vdots$	$\vdots$
40	92,00
x	2,30 x

Veja que o preço a pagar depende do número de litros comprados, ou seja, o preço é uma *função* da quantidade de litros.

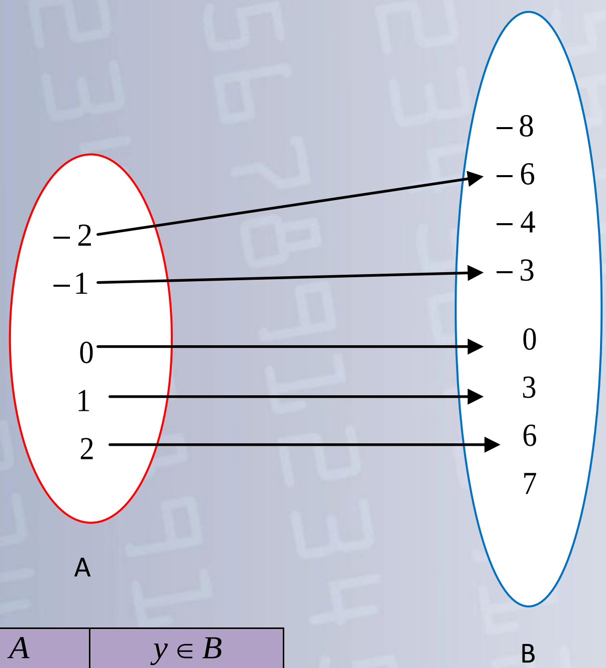
Preço a pagar = R$ 2,30 vezes o número de litros comprados.

$p = 2{,}30x$ → Lei da função

2. REPRESENTAÇÃO DE FUNÇÃO POR MEIO DE CONJUNTOS

Uma regra ou relação que associa a cada elemento de um conjunto um único elemento de outro conjunto é chamada de *função*.

Exemplo:
Dado um conjunto A = {-2, -1, 0, 1, 2} e um conjunto B = {-8, -6, -4, -3, 0, 3, 6, 7}, chamamos de função a relação que associa cada elemento de A ao seu triplo em B:



$x \in A$	$y \in B$
-2	-6
-1	-3
0	0
1	3
2	6

Veja que todos os elementos de A têm correspondente em B e, a cada elemento de A corresponde um único elemento de B.

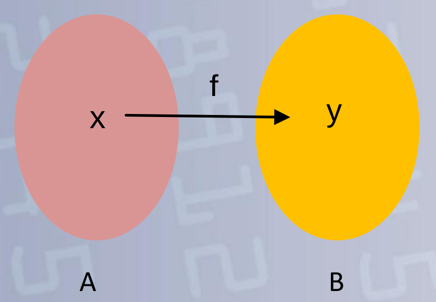
Assim, temos uma função de A em B, expressa pela fórmula $y = 3x$ ou $f(x) = 3x$, chamada de lei de associação ou lei da função.

3. DEFINIÇÃO

Dados dois conjuntos não-vazios A e B, uma função de A em B, é uma lei que associa cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$.

Notação

$f : A \rightarrow B$ (f é uma função de A em B).

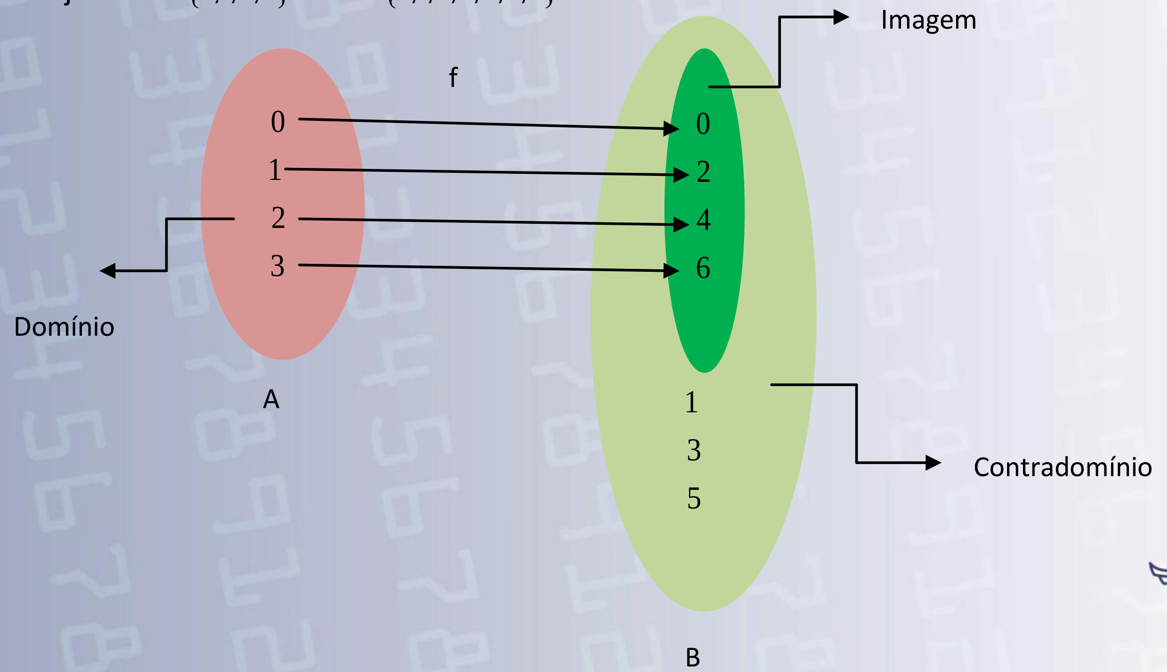


A função f transforma x de A em y de B, ou seja: $y = f(x)$

4. DOMÍNIO, CONTRADOMÍNIO E IMAGEM

Dada uma função f de A em B, o conjunto A chama-se ***domínio*** (D) da função e o conjunto B, ***contradomínio*** (CD) da função. Para cada $x \in A$, o elemento de $y \in B$ chama-se ***imagem*** (Im) de x pela função f. Veja o exemplo:

Sejam $A = \{0,1,2,3\}$ e $B = \{0,1,2,3,4,5,6\}$



Observe que $f : A \rightarrow B$ é definida por $f(x) = 2x$ ou $y = 2x$. O domínio da função são os elementos do conjunto $A = \{0,1, 2,3\}$, o contradomínio são os elementos do conjunto $B = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ e a imagem são os elementos $Im(f) = \{0,2,4,6\}$.

4.1. Estudo do domínio de uma função real

Toda função f de A em B define os conjuntos domínio (A) e contradomínio (B). No entanto, quando é dada apenas a lei da função f consideramos que o contradomínio é representado pelo conjunto dos números reais ($\Re$), ou seja, $B = \Re$ e o domínio de A como subconjunto de $\Re(A \subset \Re)$ tal que seja válida a relação $f : A \rightarrow \Re$.

Veja os exemplos abaixo:

A) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ só é possível em $\Re$ se $x \neq 0$ (não existe divisão por zero).

Portanto, $D(f) = \Re - \{0\} = \Re^*$

B) $f(x) = \sqrt{3 - x}$ só é possível em $\Re$ se $3 - x \geq 0$ (em $\Re$ não há raiz quadrada de número negativo).

$$3 - x \geq 0$$
$$-x \geq -3$$
$$x \leq 3$$

[obs. ao multiplicar uma inequação por -1, invertemos o sinal da desigualdade]

Portanto, $D(f) = \{x \in \Re / x \leq 3\}$

C) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3 - x}}$ só é possível em $\Re$ se $3 - x > 0$ (pois em $\Re$ não há raiz quadrada de número negativo nem divisão por zero).

$$3 - x > 0$$
$$-x > -3$$
$$x < 3$$

Portanto, $D(f) = \{x \in \Re / x < 3\}$

5. CONSTRUÇÃO DO GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO

O gráfico de uma função $y = f(x)$ pode ser assim construído:

1°) Representar os eixos das coordenadas cartesianas;

2°) Determinar uma tabela com os possíveis valores do domínio dado por x, definidos aleatoriamente;

3°) Calcular o par ordenado (x,y) de acordo com a lei de formação da função em questão;

4°) Marcar no plano cartesiano os pares ordenados calculados;

5°) Traçar a linha que une os pontos constituindo o gráfico da função.

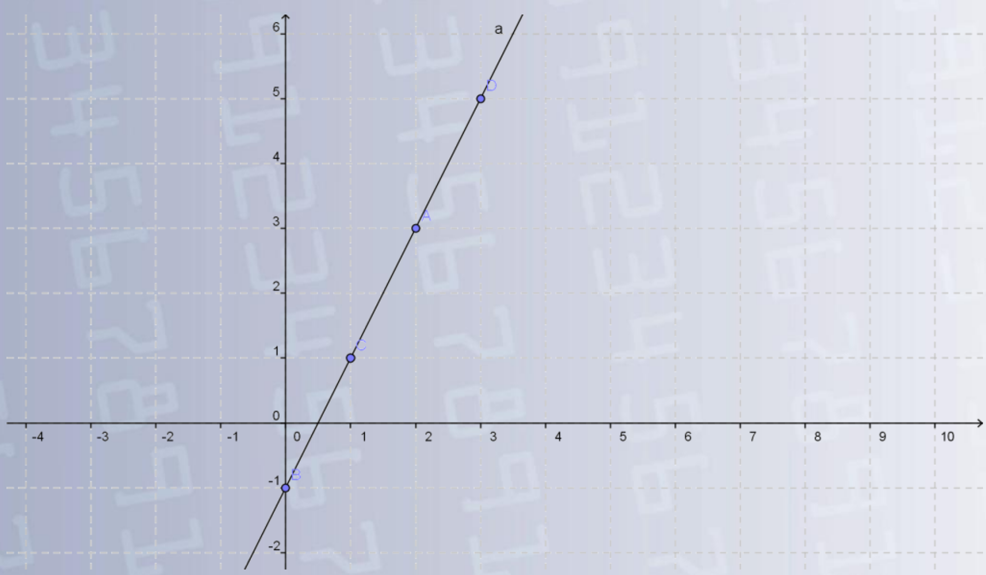
Veja o exemplo:
Determinar o gráfico da função $y = 2x - 1$

x	$y = 2x - 1$	(x, y)
-2	-5	$(-2,-5)$
-1	-3	$(-1,-3)$
0	-1	$(0,-1)$
1	1	$(1,1)$
2	3	$(2,3)$

Substituindo os valores de x em $y = 2x - 1$:

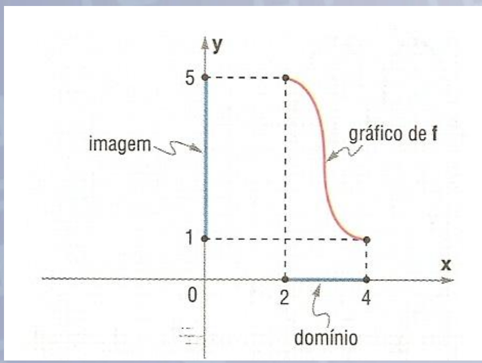
$y = 2x - 1$
$y = 2.(-2) - 1 = -5$
$y = 2.(-1) - 1 = -3$
$y = 2.0 - 1 = -1$
$y = 2.1 - 1 = 1$
$y = 2.2 - 1 = 3$

Graficamente:



5.1. Determinando o domínio a partir do gráfico de uma função

Podemos determinar o domínio e a imagem de uma função apenas observando seu gráfico. Veja o exemplo abaixo:

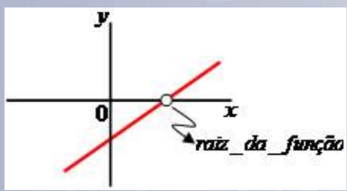


O domínio é o conjunto das abscissas x dos pontos do gráfico e a imagem é o conjunto das ordenadas y dos pontos do gráfico:

$$D(f) = \{x \in \Re / 2 \le x \le 4\} = [2,4]$$
$$Im(f) = \{x \in \Re / 1 \le x \le 5\} = [1,5]$$

5.2. Raízes ou Zeros da função

Chama-se raiz ou zero da função f todo valor de x pertencente a essa função, tal que $f(x) = 0$.



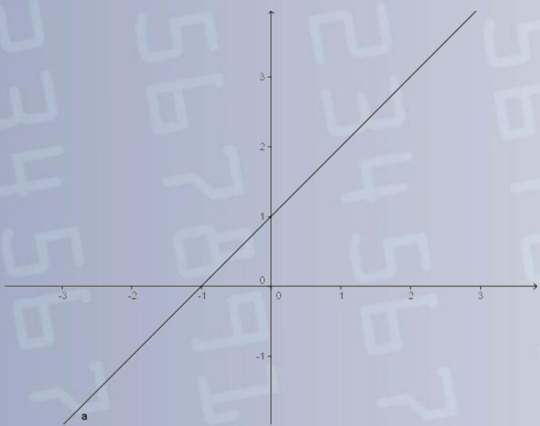
A Raiz ou Zero de uma função é todo o valor das abscissas dos pontos de intersecção do gráfico f com o eixo Ox.

Veja o exemplo:

Seja a função $y = x + 1$:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} 0 = x + 1 \\ -x = 1 \\ x = -1 \end{array} \Rightarrow -1 \text{ é a raiz ou zero da função}$$

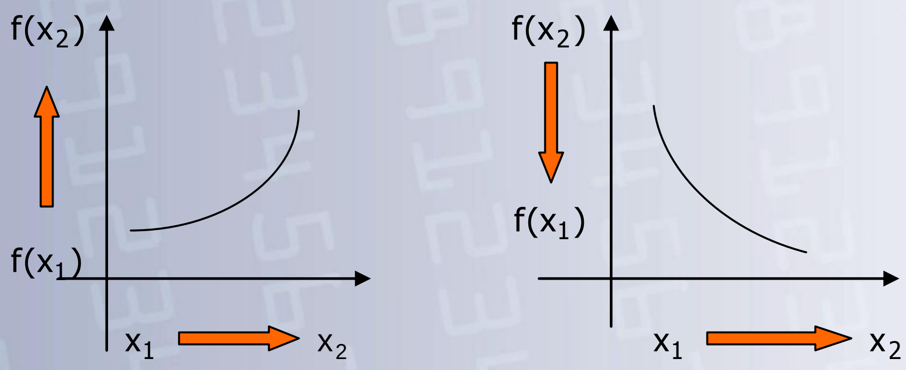
Observe o gráfico:



6. FUNÇÃO CRESCENTE E DECRESCENTE

Uma função $y = f(x) \in \Re$ é dita **crescente** num conjunto A se, e se somente se, para quaisquer x_1 e x_2 pertencentes ao conjunto A, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) < f(x_2)$. Ou seja, à medida que x cresce, a imagem y também cresce.

Analogamente, uma função é decrescente num conjunto A se, e somente se, para quaisquer x_1 e x_2 pertencentes ao conjunto A, $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) > f(x_2)$. Ou seja, à medida que x cresce, a imagem y decresce.
O gráfico abaixo representa um esquema de função crescente e decrescente.

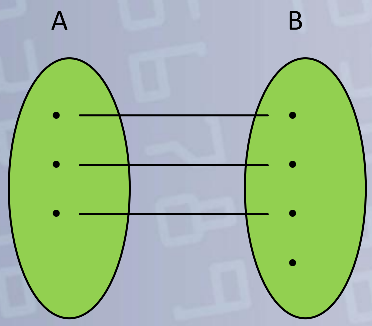


7. FUNÇÃO INJETORA, SOBREJETORA E BIJETORA

7.1. Função Injetora

Uma função $f: A \to B$ é injetora quando elementos diferentes de A são associados a elementos diferentes de B, ou seja, não há elemento em B que seja imagem de mais de um elemento de A.

Não há elemento em B que seja imagem de mais de um elemento em A.

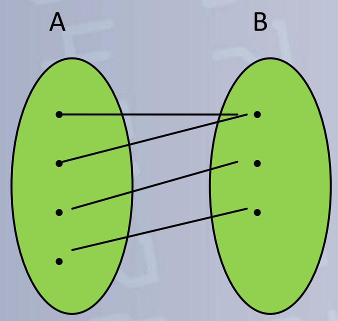


$x_1 \neq x_2$ em A

$y_1 \neq y_2$ em B

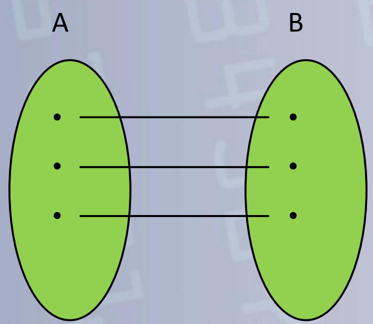
7.2. Função Sobrejetora

Uma função $f: A \to B$ é sobrejetora quando **todo elemento** de B é imagem de pelo menos um elemento de A. Ou seja, quando o contradomínio da função for igual ao conjunto imagem.

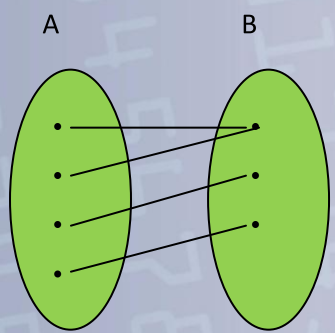


7.3. Função Bijetora

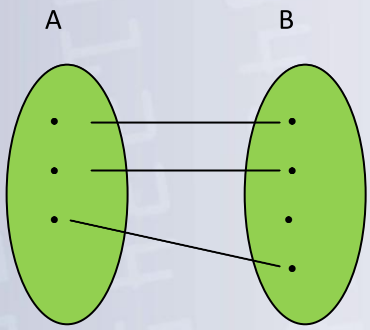
Uma função $f: A \to B$ é bijetora se for, simultaneamente, injetora e sobrejetora. Ou seja, para cada elemento em B existe um único elemento em A.



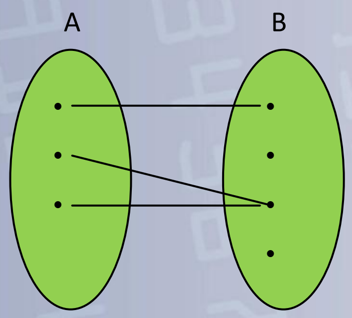
Exemplos



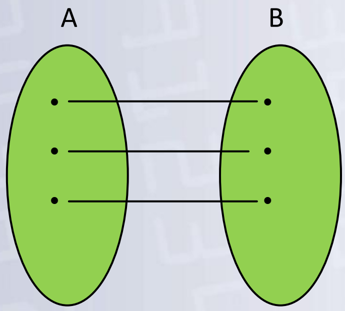
Não é Bijetora. É sobrejetora, mas não injetora.



Não é Bijetora. É Injetora, mas não sobrejetora.



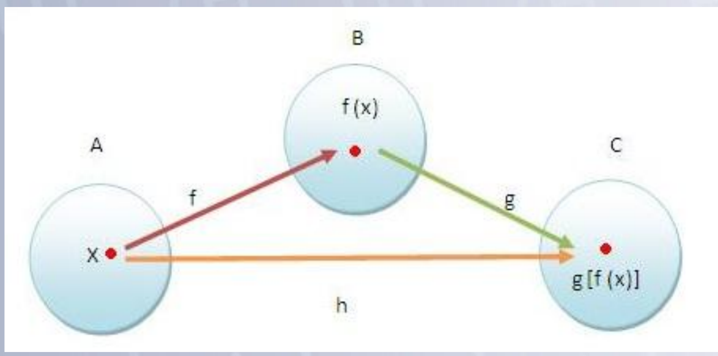
Não é Bijetora, nem Injetora e nem sobrejetora.



É Bijetora, pois é Injetora e sobrejetora.

8. FUNÇÃO COMPOSTA

Sejam as funções $f : A \to B$ e $g : B \to C$, denominamos função composta de g e f a função $h : A \to C$, indicada por $g \circ f : A \to C$ (leia-se g composta f), definida por $(g \circ f)(x) = g(f(x)), x \in A$:



Exemplo:
Dadas as funções $f(x) = 3x - 1$ e $g(x) = x^2 + 2$ calcule $(g \circ f)(x)$.

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x - 1)$

$(g \circ f)(x) = (3x - 1)^2 + 2$

$(g \circ f)(x) = 9x^2 - 6x + 1 + 2$

$(g \circ f)(x) = 9x^2 - 6x + 3$

9. FUNÇÃO INVERSA

Uma função injetora pode ser invertida. A função definida pela inversão de uma função injetora f é a inversa de f, que é indicada por f^{-1}. Salientamos que ($f^{-1}(x)$ não significa $1/f(x)$).

Uma maneira de constatar se f e g são funções inversas é compor as funções $(f \circ g)(x)$ e $(g \circ f)(x)$. Se $f(g(x)) = x$ e $g(f(x)) = x$, então, f e g são funções inversas.

Teste: As funções $f(x)$ e $g(x)$ são inversas uma da outra se, e somente se, $f(g(x)) = x$ e $g(f(x)) = x$. Neste caso, $g = f^{-1}$ e $f = g^{-1}$.

Exemplo:

Determine a inversa da função $y = \frac{1}{2}x + 1$, expressando-a em função de x.

Solução:

Passo 1: Determine x em função de y.

$$y = \frac{1}{2}x + 1 \Rightarrow 2y = x + 2$$
$$x = 2y - 2$$

Passo 2: Troque x por y na equação $x = 2y - 2$,

Ficando $y = 2x - 2$, a função inversa de $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ é a função

$$f^{-1}(x) = 2x - 2$$

Conferindo:

$$f^{-1}(f(x)) = 2\left(\frac{1}{2}x + 1\right) - 2 = x + 2 - 2 = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = \frac{1}{2}(2x + -2) + 1 = x - 1 + 1 = x$$

10. FUNÇÃO POLINOMIAL DO 1º GRAU

Chamamos de função polinomial do 1º grau ou função afim toda função $f : \Re \to \Re$ dada por $f(x) = ax + b$, com a e b reais para todo $x \in \Re$.

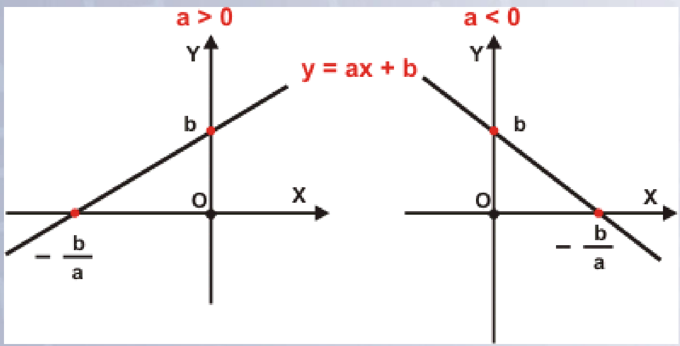
Exemplo:

$f(x) = 5x + 3$ onde $a = 5$ e $b = 3$

$f(x) = 3x - 1$ onde $a = 3$ e $b = -1$

10.1. Gráfico

O gráfico de uma função afim, $f(x) = ax + b$, é uma reta oblíqua aos eixos Ox e Oy. Se a > 0 temos uma função crescente, representada por uma reta ascendente de coeficiente angular positivo. Se a < 0 temos uma função decrescente, representada por uma reta descendente de coeficiente angular negativo. O ponto onde a reta intercepta o eixo das abscissas (x) é chamado de zero ou raiz da função e é representado por $x_0 = -\frac{b}{a}$.



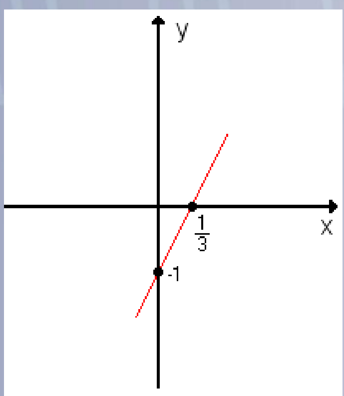
Exemplo:

Seja $f(x) = 3x - 1$. Vamos definir os pontos de intersecção do gráfico com os eixos ordenados:

Quando $x = 0$ temos $y = 3.0 + 1 = 1$, obtendo o ponto $(0,1)$, de intersecção com o eixo y ou das ordenadas.

Quando $y = 0$ temos:

$$0 = 3x - 1$$
$$3x = 1$$
$$x = \frac{1}{3}$$

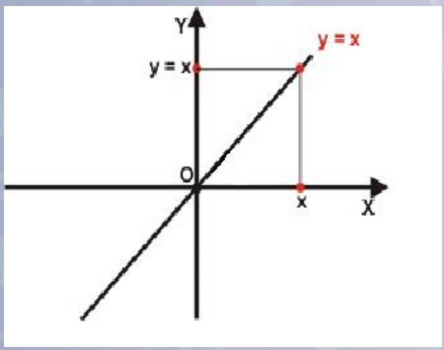


Obtendo o ponto $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$, de intersecção com o eixo x ou das abscissas.

10.2. Casos particulares

A) Função Identidade

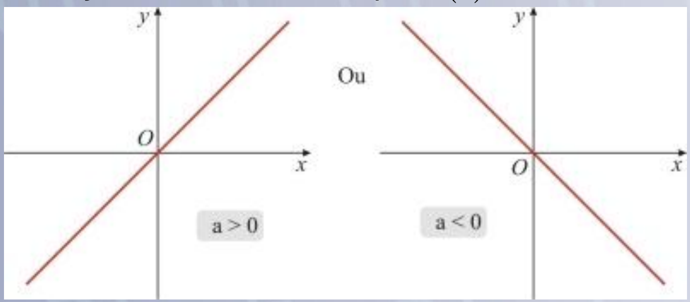
A função identidade é definida por $f(x) = x$, com $x \in \Re$.



No caso da função identidade $a = 1$ e $b = 0$.

B) Função Linear

A função linear é definida por $f(x) = ax$, com a e $x \in \Re$.



Podemos observar que o gráfico da função linear é uma reta não perpendicular ao eixo Ox e intercepta a origem do plano cartesiano. Neste caso, $b = 0$.

Exemplos:

$f(x) = 2x$ com $a = 2$

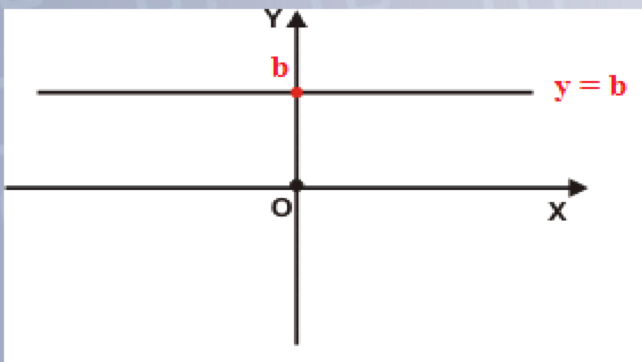
$f(x) = \frac{1}{2}x$ com $a = \frac{1}{2}x$

$f(x) = -\sqrt{5}x$ com $a = -\sqrt{5}$

A função identidade é um caso particular de função linear, em que a = 1.

C) Função Constante

A função constante é definida por $f(x) = b$, com $x \in \Re$, ou seja, a = 0.



Podemos observar que o gráfico da função constante é uma reta paralela ao eixo x, passando pelos pontos de ordenadas $y = b$. Neste caso $a = 0$

10.3. Valor numérico de uma função afim

O valor numérico de uma função afim $f(x) = ax + b$ é dado por $f(x_1) = ax_1 + b$.

Exemplo:

Seja $f(x) = 2x + 5$, podemos determinar $f(1)$:

$f(1) = 2.1 + 5 = 7$, logo $f(1) = 7$

10.4. Determinação da função com dois pontos conhecidos

Podemos encontrar a função afim conhecendo os valores de $f(x_1)$ e $f(x_2)$, com x_1 e x_2 reais e $x_1 \neq x_2$. Dessa forma, encontraremos os valores de a e b.

Exemplo:

Seja $f(1) = -1$ e $f(2) = 2$, determine a função afim.

$f(1) = -1$, logo quando $x = 1$ temos $y = f(x) = -1$e, então:

$$f(x) = ax + b$$
$$y = ax + b$$
$$-1 = a.1 + b$$
$$a + b = -1$$

$f(2) = 2$, logo quando $x = 2$ temos $y = f(x) = 2$ e, então:

$$f(x) = ax + b$$
$$2 = a.2 + b$$
$$2 = 2a + b$$
$$2a + b = 2$$

Resolvendo o sistema, encontramos os valores de a e de b:

$f(x) = ax + b$

$\begin{cases} a + `b = -1 \\ 2a + b = 2 \end{cases}$, obtemos a = -5 e b = 4.

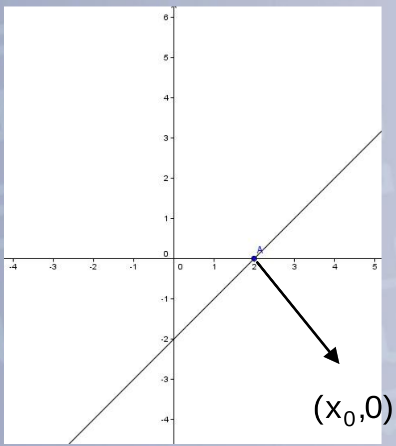
Logo, a função afim determinada por $f(1) = -1$ e $f(2) = 2$ será $f(x) = -5x + 4$.

10.5. Estudo do sinal

O estudo do sinal da função consiste em determinar os valores de x do domínio, para os quais $f(x)=0$, $f(x)>0$ e $f(x)<0$.

Vejamos como fazer esse estudo através do gráfico.

a) Função crescente

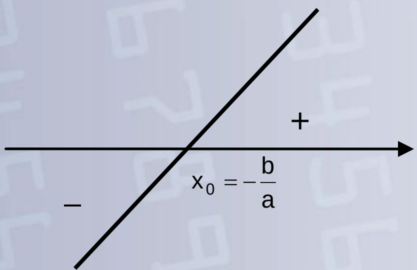


$a>0 \Rightarrow$ Função crescente

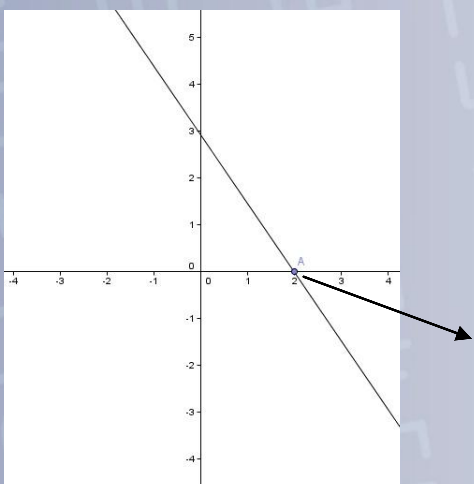
$x = x_0 \Rightarrow f(x) = 0$
$x > x_0 \Rightarrow f(x) > 0$
$x < x_0 \Rightarrow f(x) < 0$

x_0 é o zero da função

Logo, se $a > 0$



b) Função Decrescente



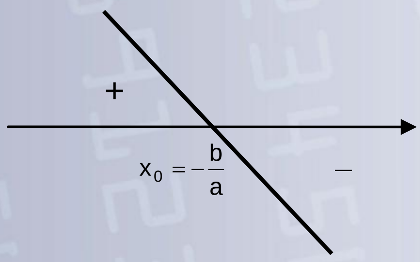
$a<0 \Rightarrow$ Função decrescente

$x = x_0 \Rightarrow f(x) = 0$
$x > x_0 \Rightarrow f(x) < 0$
$x < x_0 \Rightarrow f(x) > 0$

$(x_0,0)$

x_0 é o zero da função

Logo, se $a < 0$



Exemplo:

Dada a função $f : \Re \to \Re$ tal que $f(x) = -4x + 2$,

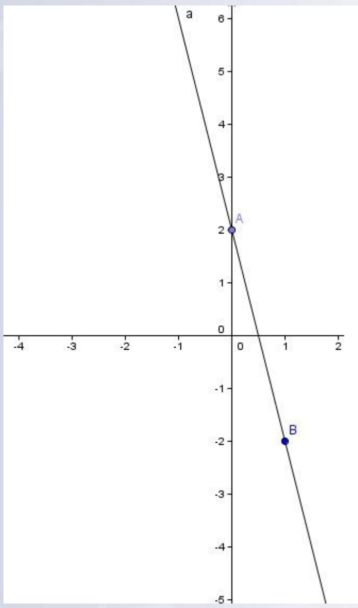
a) Calcule o zero da função

$$f(x) = -4x + 2$$
$$-4x + 2 = 0$$
$$-4x = -2$$
$$x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Logo $x = \frac{1}{2}$ é o zero da função e o gráfico de f intercepta o eixo x em $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

b) Construa o gráfico

$$f(x) = -4x + 2$$



Atribuindo valores para x temos:

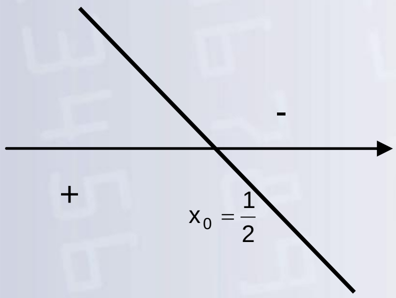
$x = 0$		$y = -4.0 + 2 = 2$		$(0,2)$
$x = 1$	⇒	$y = -4.1 + 2 = -2$	⇒	$(1,-2)$
$x = \frac{1}{2}$		$y = 0$		$(\frac{1}{2}, 0)$

c) Faça o estudo do sinal da função

$y > 0$ para todos os $x < \frac{1}{2}$

$y < 0$ para todos os $x > \frac{1}{2}$

$y = 0$ para $x = \frac{1}{2}$

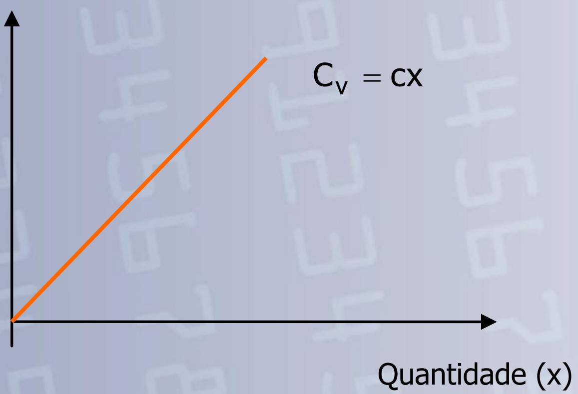


11. FUNÇÃO CUSTO

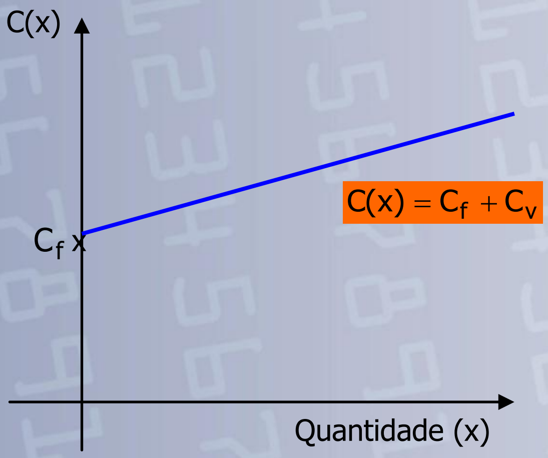
A função Custo descreve o custo de produção de determinado bem e varia em função da quantidade produzida (x) desse bem. No custo de produção existem duas parcelas chamadas de Custo Fixo (C_f) e Custo Variável (C_v).

11.1 Custo Fixo (C_f)**:** corresponde aos gastos fixos que não dependem da quantidade produzida, tais como instalação ou manutenção de prédios, aluguéis, seguros, etc. Ele pode ser considerado como uma ***Função Constante*** e seu gráfico é paralelo ao eixo horizontal.

11.2) Custo Variável (C_v): é definido em função da quantidade produzida. Os gastos de produção crescem à medida que a produção cresce. Caracteriza-se como uma ***Função Crescente***. Quando nada se produz, não há gasto de produção, portanto, seu gráfico inicia na origem.



11.3) Função Custo Total

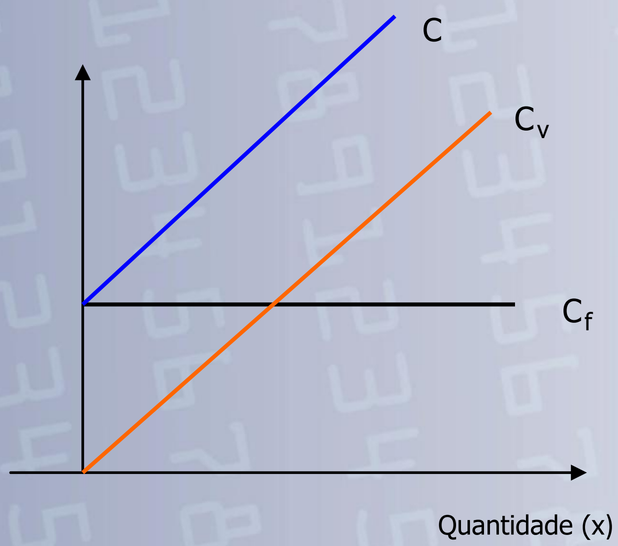


Em qualquer nível de produção, a função Custo Total, é a soma das funções Custo Fixo e Custo Variável.

Na maioria das vezes, o custo variável é igual a uma constante multiplicada pela quantidade q ou x.

Assim, sendo C o custo variável unitário de produção de determinado bem e q ou x a quantidade produzida, o custo variável é dado por $C_v = cx$ ou $C_v = cq$. Dessa forma, o custo total $(C(x))$ é dado, então, pela equação $C(x) = C_f + cx$, onde c é o custo variável unitário de produção do bem e C_f é o custo fixo.

Nesse caso, o custo total é uma função do 1º grau da quantidade produzida, cujo gráfico é uma reta crescente, com coeficiente angular positivo dado por c e coeficiente linear dado pelo custo fixo.

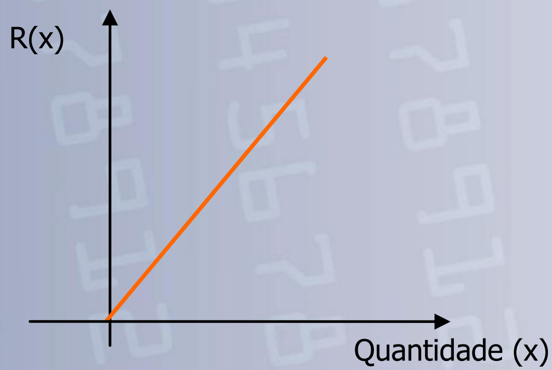


Ex.: O custo mensal de fabricação de um produto é de $R\$1000{,}00$, e o custo variável por unidade de produção é de $R\$5{,}00$. Então a função custo total será dada por $C(x) = 1000 + 5x$.

12. FUNÇÃO RECEITA

A Função Receita descreve o total bruto gerado pela venda de uma quantidade variável (x) de um produto. Ou seja, chamamos de receita ao produto de x pelo preço de venda e a indicamos por R. Se o preço P do produto for fixo, qualquer que seja a quantidade vendida x ou q, a receita pode ser determinada multiplicando-se o preço unitário fixo P pela quantidade x ou q.

É uma função crescente e seu gráfico é uma semi-reta passando pela origem (trata-se de uma função do 1º grau com coeficiente linear igual a zero), pois se não for vendido nenhum produto (x) a receita (R) será igual a zero.



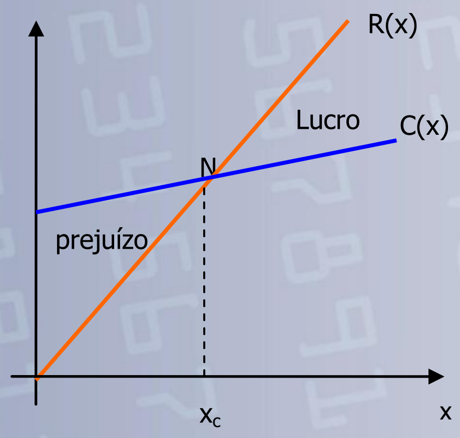
Ex.: Um produto é vendido a $R\$30{,}00$ a unidade. A função receita é, então, dada por $R(x) = 30x$.

13. FUNÇÃO LUCRO

A função Lucro é obtida pela diferença entre as funções receita e custo.

$$L(x) = R(x) - C(x)$$

Se construirmos o gráfico da Função Receita juntamente com o gráfico da Função Custo em um mesmo sistema de coordenadas cartesianas teremos:



As retas interceptam-se num ponto N, onde a receita e o custo são iguais e, conseqüentemente o Lucro é zero. A abscissa desse ponto é chamada de ponto de nivelamento ou ponto crítico.

Podemos observar que:

$x > x_C$, então, $R(x) > C(x)$ e, portanto, $L(x) > 0$ (Lucro positivo).

$x < x_C$, então, $R(x) < C(x)$ e, portanto, $L(x) < 0$ (Lucro negativo é PREJUÍZO).

$x = x_C$, então, $R(x) = C(x)$ e, portanto, não há lucro $L(x) = 0$.

Ex.: Determine o ponto de nivelamento (ou ponto crítico) e esboce o gráfico das funções receita, $R(x) = \frac{1}{2}x$, e custo, $C(x) = 20 + \frac{1}{4}x$. Obtenha a função lucro e faça o estudo do sinal**.**

Vejamos:

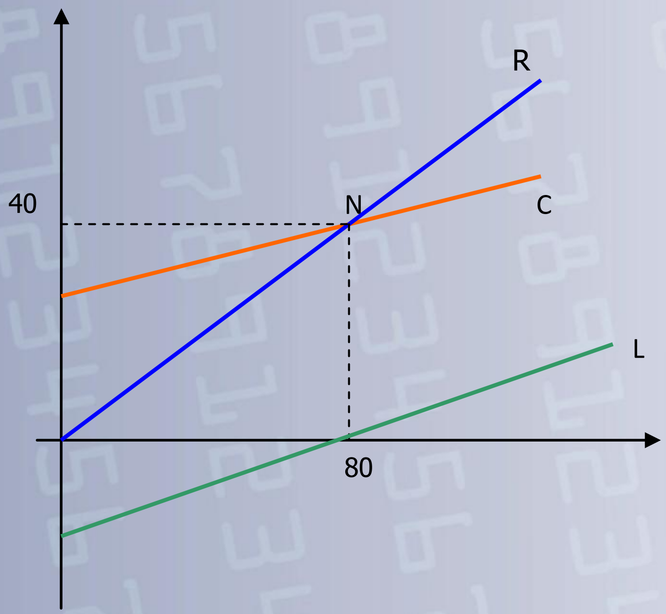
O ponto de nivelamento ocorre quando a receita é igual ao custo: $\frac{1}{2}x = 20 + \frac{1}{4}x$,

Então, $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x = 20 \Rightarrow \frac{2x - x}{4} = 20 \Rightarrow x = 80 \Rightarrow (80,40)$.

A função Lucro é dada por $L(x) = R(x) - C(x)$, então, por $L(x) = \frac{1}{2}x - (20 + \frac{1}{4}x)$

$$L(x) = \frac{1}{2}x - (20 + \frac{1}{4}x) = \frac{2x - 80 - x}{4} = \frac{x - 80}{4} = \frac{x}{4} - 20.$$

Graficamente podemos observar que o lucro é positivo para valores de x maiores do que 80, é negativo (prejuízo) para valores de x menores que 80 e é zero para x igual a 80.



14. FUNÇÃO DEMANDA E OFERTA

Oferta e Demanda são forças que movimentam as economias de mercado, sendo esse definido pelo grupo de compradores e de vendedores de um dado bem ou serviço. Tais forças se referem ao comportamento desses compradores e vendedores, quando interagem no mercado. Enquanto a **Oferta** é definida pelos vendedores, quem define a **Demanda** são os compradores.

14.1) Demanda

Demanda ou procura é a quantidade (q ou x) de produto que os consumidores querem e podem comprar. A demanda cresce com a queda no preço (Função Decrescente). A demanda de um bem é uma função de muitas variáveis. Supondo-se que somente o preço unitário (P) do produto varie, verifica-se que o preço (P) relaciona-se com a quantidade demandada (q ou x). Chama-se função de demanda a relação entre P e x, ou seja, $P = f(x)$.

A Procura de um produto é determinada pelas várias quantidades que os consumidores estão dispostos e aptos a adquirir, em função de vários níveis possíveis de preço, em dado período de tempo.

A relação de dependência entre quantidades procuradas e preços descreve uma função linear de coeficiente angular negativo. Assim, se dispusermos as quantidades demandadas ou procuradas no eixo horizontal de um diagrama cartesiano, representando os preços no eixo vertical, teremos, para a função demanda ou procura, uma reta descendente, resultante do princípio: ***Quanto mais altos os preços, menores as quantidades procuradas correspondentes.***

Ex.: $P = 10 - 0{,}002x$, representa a função demanda do número de refrigerantes (x) procurados por semana, numa lanchonete.

14.2) Oferta

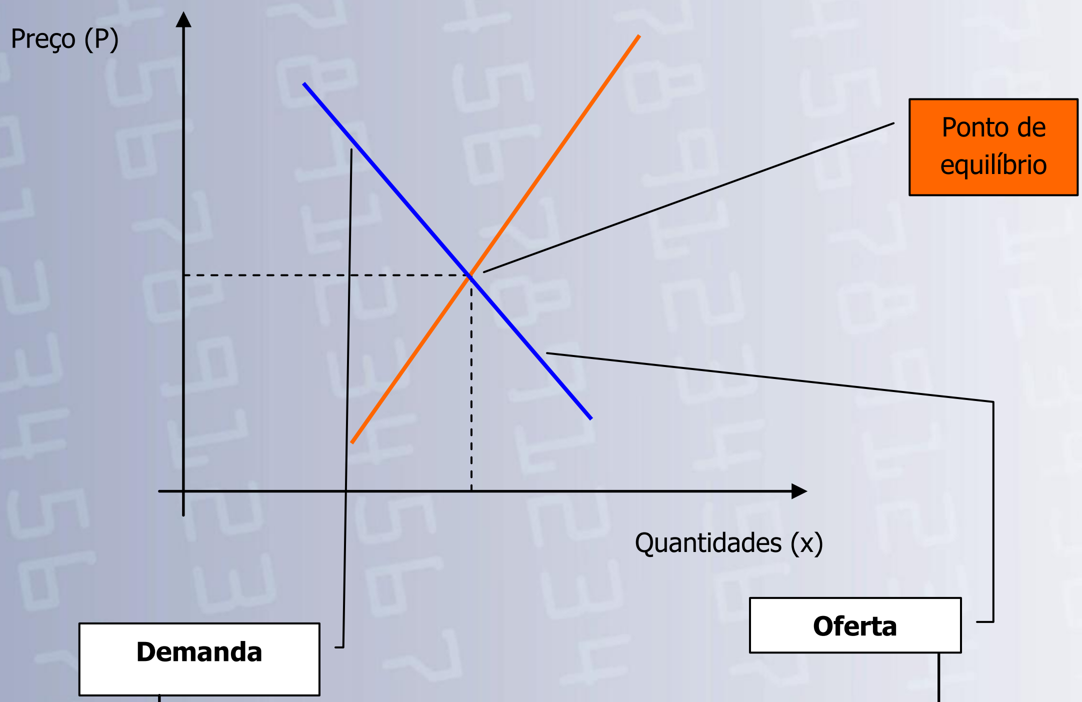
A Oferta de determinado produto depende diretamente dos preços. A relação de dependência entre quantidades ofertadas e preços descreve uma função linear de coeficiente angular positivo. Conseqüentemente, a representação gráfica da curva de oferta é oposta à da procura. Colocando as quantidades ofertadas no eixo horizontal e os preços no eixo vertical, teremos uma reta ascendente da esquerda para a direita.

Ex.: Em determinada lanchonete, quando o preço do refrigerante é de $R\$2{,}10$, a quantidade ofertada é de 350 unidades por semana, e, quando o preço é de $R\$2{,}40$, a quantidade ofertada equivale a 1400. Assim, o coeficiente angular da reta de oferta pode ser calculado por $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2{,}4 - 2{,}1}{1400 - 350} = \dfrac{0{,}3}{1050} = \dfrac{1}{3500}$, resultando na seguinte função oferta: $P - 2{,}1 = \dfrac{1}{3500}(x - 350) \Rightarrow P = \dfrac{1}{3500}x + 2$.

Por se tratar de uma reta essa função também pode ser encontrada pelo determinante que define e equação da reta que passa por dois pontos, cujos valores da abscissa e da ordenada correspondem às unidades e ao preço do refrigerante em cada situação.

14.3) Ponto de equilíbrio

O ***ponto de Equilíbrio*** corresponde ao ponto em que as quantidades de ***demanda*** e ***oferta*** se igualam, isto é, ocorre em um dado preço no qual a quantidade procurada é igual à quantidade oferecida. No gráfico acima, ***o ponto de equilíbrio*** define preço e quantidades iguais para oferta e demanda e é representado pelo ponto de intersecção das duas retas.



A relação entre quantidade demandada e preço de uma mercadoria é representada pela reta azul no gráfico acima. Esta descreve o comportamento do consumidor, que compra mais quando o preço cai e compra menos quando o preço sobe. Essa variação inversa entre preço e quantidade demandada, que se observa na reta descendente (coeficiente angular negativo), é chamada ***curva de demanda.***

A relação entre preço e quantidade oferecida de uma mercadoria descreve o comportamento do produtor e é representada pela reta laranja no gráfico acima. A reta é ascendente (coeficiente angular positivo), pois quando o preço sobe, significa que existem mais produtores interessados em colocar no mercado quantidades cada vez maiores de seu produto, ao contrário de quando o preço cai, que a oferta diminui. A reta ascendente é chamada de ***curva de oferta***.

Ex.: Num certo mercado, as equações de oferta e demanda de um produto são dadas por:

Oferta: $x = 60 + 5p$;

Demanda: $x = 500 - 13p$.

Qual a quantidade transacionada quando o mercado estiver em equilíbrio?

Resolução: Para que o mercado esteja em equilíbrio, oferta = demanda.

Então, igualando:

$$60 + 5p = 500 - 13p \Rightarrow 5p + 13p = 500 - 60 \Rightarrow 18p = 440 \Rightarrow p = \frac{440}{18} = \frac{220}{9}$$

Como procuramos por $x =$ quantidade transacionada, temos:

$$x = 60 + 5\left(\frac{220}{9}\right) = \frac{540 + 1100}{9} = \frac{1640}{9} = 182{,}2.$$

15. Função Depreciação Linear

O valor de um bem diminui com o tempo, devido ao desgaste, à falta de manutenção, etc. A essa perda de valor do bem em função do tempo chamamos de ***depreciação***. O gráfico do valor em função do tempo é uma reta decrescente.

O valor de um equipamento hoje é $R\$2000{,}00$ e daqui a nove anos será $R\$200{,}00$. Podemos considerar dois pontos do gráfico (0, 2000) e (9, 200). Admitindo depreciação linear:

a) Qual o valor do equipamento daqui a três anos?

Hoje, consideraremos como tempo zero, então, $R\$2000{,}00$ é o coeficiente linear da reta. Como o preço decresce, a reta será decrescente e o coeficiente angular negativo. O coeficiente angular é calculado como sendo

$$m = \frac{2000 - 200}{0 - 9} = \frac{1800}{-9} = -200$$

Portanto, o valor é dado por $V = 2000 - 200x$. Logo, o valor do equipamento daqui a três anos será:

$V = 2000 - 200(3) = 1400$ reais.

b) Qual o valor de sua depreciação daqui a três anos?

A depreciação é dada por

$D = Valorhoje - V$, ou seja, $D = 2000 - (2000 - 200x)$. Assim, daqui a três anos, a depreciação será:

$$D = 2000 - 2000 + 200(3) = 600$$

c)Daqui a quanto tempo o valor da máquina será nulo?

O valor da máquina será nulo quando:

$$0 = 2000 - 200x \Rightarrow -200x = -2000 \Rightarrow x = \frac{-2000}{-200} = 10 \text{ anos}$$

16. Função Consumo e Função Poupança

16.1) Função Consumo (C)

A Função Consumo relaciona o Consumo (C) com o Rendimento Disponível (Y), ou seja, o consumo varia em função da renda familiar disponível. Podemos escrever a função consumo da seguinte forma:

$C = C_0 + mY$.

A componente C_0 é chamada de ***consumo autônomo***, que representa o gasto fixo, e o coeficiente angular mY da função consumo é chamado de ***propensão marginal*** a consumir.

16.2) Função Poupança (S)

A função Poupança é a diferença entre o rendimento disponível (Y) e o consumo e é indicada por $S = Y - C = -C_0 + (1-m)Y$. O coeficiente angular da função poupança é chamado de propensão marginal a poupar.

OBS.: Quando o Consumo é igual ao Rendimento Disponível, não existe Poupança. O ponto de intersecção das duas retas, que representam as funções, é chamado de ***ponto limiar***. O ponto limiar é, portanto, o nível de

Rendimento Disponível em que todo o Rendimento é gasto em Consumo, e onde não existe Poupança.

Ex.: Uma família tem um consumo autônomo de $R\$800{,}00$ e uma propensão marginal a consumir igual a $0{,}8$. Obtenha:

a) a função consumo

O consumo autônomo é o coeficiente linear da reta e a propensão marginal a consumir é o seu coeficiente angular, logo $C = 800 + 0{,}8Y$.

b) a função poupança

A função poupança é dada por $S = Y - C = -C_0 + (1-m)Y$.

Então, $S = Y - 800 - 0.8Y$, logo, **S = 0,2 Y – 800**