

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

MODELAGEM COMPUTACIONAL DO COEFICIENTE DE IMPACTO VERTICAL EM  
LONGARINAS DE PONTES

por

Vinícius Heidtmann Avila

Dissertação para obtenção do Título de  
Mestre em Modelagem Computacional

Rio Grande, agosto, 2018

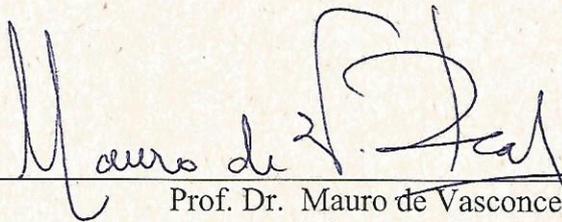
Vinícius Heidtmann Avila

“Modelagem computacional do coeficiente de impacto vertical em longarinas de pontes”

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal do Rio Grande - FURG, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre. Área concentração: Modelagem Computacional.

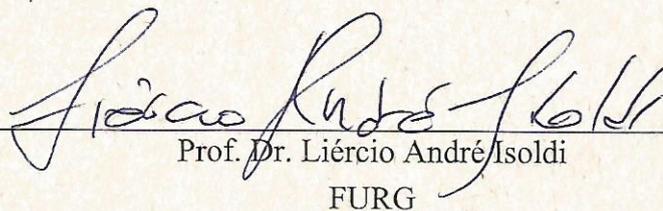
Aprovado em

BANCA EXAMINADORA



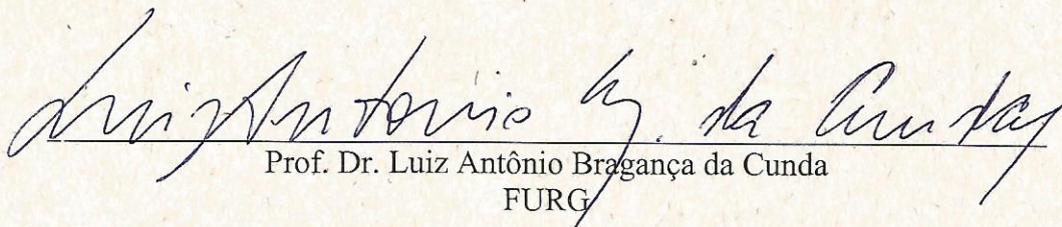
---

Prof. Dr. Mauro de Vasconcellos Real  
Orientador – FURG



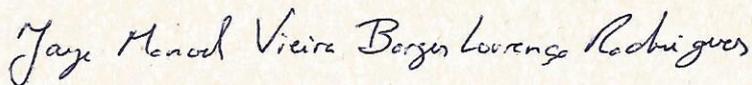
---

Prof. Dr. Liércio André Isoldi  
FURG



---

Prof. Dr. Luiz Antônio Bragança da Cunda  
FURG



---

Prof. Dr. Jorge Manuel Vieira Borges Lourenço Rodrigues

UFPEL

Rio Grande - RS  
2018

## Ficha catalográfica

A958m Avila, Vinícius Heidtmann.

Modelagem computacional do coeficiente de impacto vertical em longarinas de pontes / Vinícius Heidtmann Avila. – 2018.  
121p.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, Rio Grande/RS, 2018.

Orientador: Dr. Mauro de Vasconcellos Real.

1. Pontes Rodoviárias 2. Modelos de Cargas Móveis 3. Efeitos Dinâmicos 4. Coeficiente de Impacto I. Real, Mauro de Vasconcellos II. Título.

CDU 624.21:004

## **AGRADECIMENTOS**

A minha esposa Tainã, por entender as minhas ausências e me incentivar a seguir sempre.

Dedico aos meus pais que sempre me incentivaram a estudar.

Ao Prof. Dr. Mauro de Vasconcellos Real pela orientação, paciência, dedicação, amizade e incentivo ao longo do desenvolvimento desse trabalho.

Ao Prof. Dr. Márcio Wrague Moura pelo auxílio no desenvolvimento desse estudo.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior - CAPES pelo apoio financeiro durante o desenvolvimento do trabalho.

À FURG por ofertar o Curso de Mestrado em Modelagem Computacional.

## RESUMO

Pontes rodoviárias no Brasil são projetadas de acordo com a norma de projeto NBR 7188 (2013), em que o modelo de carga móvel é composto por um veículo de três eixos. A configuração do modelo de carga móvel segue o padrão de uma versão mais antiga da norma, a NB-6 (1960). Apesar da atualização dos valores de carregamentos, o presente modelo de carga móvel não é totalmente apropriado para representar os efeitos atuais de trânsito nas pontes brasileiras. Os efeitos dinâmicos induzidos pela carga móvel são levados em conta através do coeficiente de impacto, aplicado no modelo de carga. Os valores estáticos equivalentes aos efeitos dinâmicos do modelo de carga são obtidos pela multiplicação de seu carregamento por este coeficiente. O objetivo do trabalho é realizar uma análise dinâmica de vigas de pontes, determinar os efeitos dinâmicos, comparar com os efeitos estáticos e medir a eficiência do coeficiente de impacto das normas brasileiras. Para este estudo foi realizada uma modelagem computacional de viga de ponte, através do método dos elementos finitos, onde foi feita uma análise dinâmica com o modelo de carga móvel, para determinar os efeitos dinâmicos. Por meio do software ANSYS foi realizada uma análise estática da mesma estrutura com o mesmo carregamento, para determinar os efeitos estáticos. Após obter os determinados valores, foi realizada uma comparação entre a relação dos efeitos dinâmicos sobre os efeitos estáticos com o coeficiente de impacto da Norma Brasileira. Para a verificação do modelo computacional da análise transiente, foram utilizadas expressões da flecha de uma viga simplesmente apoiada, sujeita a uma carga móvel e o resultado obtido pela solução analítica de Fryba (1972) foi comparado ao valor do modelo no software estrutural. Foram realizadas as simulações, levando em conta o fator de amortecimento e a massa da estrutura junto com as cargas estabelecidas pela norma brasileira NBR 7188 (2013), para as vigas de seção “T”, com vãos de dez, vinte, trinta e quarenta metros. Os resultados obtidos para as vigas, demonstraram que para alguns casos, os coeficientes de impacto tiveram uma boa aproximação para transformar os esforços estáticos em dinâmicos. Porém em outros casos, tais coeficientes não apresentaram o mesmo resultado. Por meio do estudo realizado foi possível identificar que os coeficientes de impacto previstos na norma podem ser aprimorados a partir de novos estudos levando em consideração as análises dinâmicas dos carregamentos das rodovias brasileiras.

Palavras-chaves: pontes rodoviárias, modelos de cargas móveis, efeitos dinâmicos, coeficiente de impacto.

## ABSTRACT

Road bridges in Brazil are designed according to project code NBR 7188 (2013), in which the moving load model is composed of a three-axle vehicle. The configuration of the moving load model follows the pattern of an older version of the code, the NB-6 (1960). Despite the updating of load values, the present moving load model is not totally appropriate to represent the current traffic effects in Brazilian bridges. The dynamic effects induced by the moving load are taken into account by the impact coefficient, applied in the load model. The static equivalent to the dynamic effects values of the load model are obtained by multiplying this load by this coefficient. The objective of this work is to perform a dynamic analysis of bridge beams, to determine the dynamic effects, to compare with the static effects and to measure the accuracy of the impact coefficient. For this study, a bridge beam finite element model was performed using ANSYS software, where a dynamic analysis was performed with the moving load model to determine the dynamic effects. By means of the same software a static analysis of the same structure with the same load was carried out to determine the static effects. After obtaining the determined values, a comparison was made between the ratio of the dynamic effects and the static effects with the coefficient of impact of the Brazilian code. To validate the computational model of the transient analysis, it was used a deflection of a simply supported beam, subject to a moving load and the result obtained by Fryba (1972) was compared to the model solution in the structural software. The simulations were carried out, taking into account the damping factor and the actual mass of the structure along with the loads established by the Brazilian norm NBR 7188 (2013), for the "T" section beams, with spans of ten, twenty, thirty and forty meters. The results obtained for the beams, showed, that for some cases, the impact coefficients had a good approximation to transform the static efforts into the dynamic ones. However, in other cases, these coefficients did not show the same result. Through the conducted study, we found that the impact coefficients provided in the standard code can be enhanced from new studies taking into account the dynamic analysis of loadings of Brazilian highways.

Keywords: road bridges, mobile load models, dynamic effects, impact coefficient.

# ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO .....	21
1.1. Apresentação do Problema .....	21
1.3.1. Objetivo Geral .....	30
1.3.2. Objetivos Específicos .....	30
1.4. Organização do trabalho.....	30
2. METODOLOGIA .....	32
2.1. Princípios da análise de vibrações.....	32
2.1.1. Sistema de um grau de liberdade (1 GDL) .....	32
2.1.2. Sistema de múltiplos graus de liberdade (N GDL).....	39
2.2. Analogia de grelha.....	40
2.3. Método de Fauchart.....	42
2.4. Método dos Elementos Finitos (MEF) .....	43
2.4.1. Abordagem direta .....	45
2.4.2. Montagem do Sistema Global de Equações .....	47
2.4.3. Solução do sistema global de equações .....	50
2.4.4. Condições de contorno .....	52
2.4.5. Método dos elementos finitos para análise de vibrações.....	53
2.5. ANSYS.....	64
2.5.1. Elemento Beam 188.....	65
3. VERIFICAÇÃO DOS MODELOS .....	66
3.1. Verificação da modelagem computacional para a análise dinâmica .....	66
3.1.1. Teste de convergência de malha para o modelo das análises dinâmicas .....	67
3.1.2. Análise modal .....	67
3.1.3. Análise transiente não amortecida .....	69
3.1.4. Análise transiente amortecida.....	71
3.1.5. Análise transiente amortecida devido a uma carga harmônica.....	73
3.2. Verificação dos modelos de pontes .....	74
3.2.1. Modelos das pontes de 4 longarinas .....	75
3.2.2. Modelo de longarina .....	86
3.3. Método de Fauchart.....	89
4. ESTUDOS PARAMÉTRICOS .....	92
4.1. Modelos de ponte com 4 longarinas.....	93

4.2. Modelos de longarinas.....	98
5. CONCLUSÃO .....	105
6. BIBLIOGRAFIA .....	107
APÊNDICE 1 – Exemplo de APDL para análise estática .....	111
APÊNDICE 2 – Exemplo de APDL para análise modal .....	113
APÊNDICE 3 – Exemplo de APDL para análise transiente.....	116

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Vista geral de uma ponte, mostrando os principais elementos constituintes (PFEIL, 1983)	21
Figura 1.2 - Tipos Estruturais de pontes (PFEIL, 1983)	22
Figura 1.3 – Tipos de pontes estaiadas (LEONHARDT, 1979)	23
Figura 1.4 - Ponte corrediça (MARCHETTI, 2008)	23
Figura 1.5 - Ponte levadiça (MARCHETTI, 2008)	24
Figura 1.6 - Ponte basculante de pequeno vão (MARCHETTI, 2008)	24
Figura 1.7 - Ponte giratória (MARCHETTI, 2008)	24
Figura 1.8 - Estruturas isostáticas (DE ALMEIDA, 2009)	25
Figura 1.9 - Estruturas hiperestáticas (DE ALMEIDA, 2009)	25
Figura 1.10 - Distribuição de cargas estáticas (NBR 7188, 2013)	26
Figura 2.1 - Sistema massa-mola-amortecedor com 1 GDL (CLOUGH; PENZIEN, 1995)	33
Figura 2.2 - Equilíbrio de forças do sistema de 1 GDL sob ação de $p(t)$ (CLOUGH; PENZIEN, 1995)	34
Figura 2.3 - Resposta no domínio do tempo de um sistema de 1 GDL para diferentes fatores de amortecimento (MEIROVITCH, 1986)	36
Figura 2.4 - Ações dinâmicas típicas sobre estruturas (adaptada de CLOUGH; PENZIEN, 1995)	37
Figura 2.5 - Variação do fator de amplificação dinâmica com $\beta$ e $\xi$ (CLOUGH; PENZIEN, 1995)	39
Figura 2.6 - Barras de grelha das vigas (AMORIN et al., 2012)	41
Figura 2.7 - Inclusão das barras de grelha de laje à malha disposta pelas barras das vigas (AMORIN et al., 2012)	41
Figura 2.8 - Elemento de Barra de Grelha para Eixos do Elemento (AMORIM et al., 2012)	42
Figura 2.9 - Esquema estrutural transversal para uma faixa unitária (adaptado de STUCCHI, 2009)	43
Figura 2.10 - Diferentes tipos de elementos finitos (SOUZA, 2003)	44
Figura 2.11 - Elementos conectados por pontos nodais (adaptado de MADENCI; GUVEN, 2006)	44
Figura 2.12 - Malha de elementos finitos para um problema plano (SOUZA, 2003)	45
Figura 2.13 – Digrama de corpo-livre de um elemento de mola linear (MADENCI; GUVEN, 2006)	46
Figura 2.14 – Sistema de molas lineares e o correspondente modelo MEF (MADENCI; GUVEN, 2006)	48

Figura 2.15 - Possíveis modos de solução para o sistema de molas lineares (adaptado de MADENCI; GUVEN, 2006) .....	52
Figura 2.16 - Modelo de solução fisicamente aceitável para o sistema de molas lineares (adaptado de MADENCI; GUVEN, 2006).....	53
Figura 2.17 - Forças de corpo aplicadas e inerciais (MEIRELES, 2008).....	56
Figura 2.18 - Elemento Beam 189 (Ansys Stuba, 2014) .....	65
Figura 3.1 - Desenho da viga no software ANSYS .....	66
Figura 3.2 - Seção da viga, sendo as unidades em m.....	66
Figura 3.3 - Viga modelada por meio do software FTOOL.....	67
Figura 3.4 - 1º Modo de vibração da viga por meio do software ANSYS .....	68
Figura 3.5 - 2º Modo de vibração da viga por meio do software ANSYS .....	69
Figura 3.6 - 1º (a) e 2º (b) modo de vibração de uma viga simplesmente apoiada (SORIANO, 2014) .....	69
Figura 3.7 - Gráfico da deflexão pelo tempo, para uma viga submetida a uma carga móvel.....	71
Figura 3.8 - Gráfico da deflexão pelo tempo, para uma viga amortecida submetida a uma carga móvel .....	72
Figura 3.9 - Seção transversal da ponte com 40 m de vão, cotas em m (MOURA, 2018).....	74
Figura 3.10 - Seção transversal das vigas longarinas das pontes, cotas em cm.....	74
(a) vão de 20m, (b) vão de 30m e (c) vão de 40m (MOURA, 2018).....	74
Figura 3.11 - Seção transversal da viga longarina de 10 m de vão, cotas em cm.....	75
Figura 3.12 - Desenho da grelha no software ANSYS para ponte de 10 m de vão .....	75
Figura 3.13 - Seção da longarina 1 para ponte de 10 m de vão, sendo as unidades em m .....	76
Figura 3.14 - Seção da longarina 4 para ponte de 10 m de vão, sendo as unidades em m .....	76
Figura 3.15 - Seção da longarina 2 e 3 para ponte de 10 m de vão, sendo as unidades em m.....	77
Figura 3.16 - Seção da laje, sendo as unidades em m.....	77
Figura 3.17 - Desenho da grelha no software ANSYS para ponte de 20 m de vão .....	78
Figura 3.18 - Seção da longarina 1 para ponte de 20 m de vão, sendo as unidades em m .....	78
Figura 3.19 - Seção da longarina 4 para ponte de 20 m de vão, sendo as unidades em m .....	79
Figura 3.20 - Seção da longarina 2 e 3 para ponte de 20 m de vão, sendo as unidades em m.....	79
Figura 3.21 - Desenho da grelha no software ANSYS para ponte de 30 m de vão .....	80
Figura 3.22 - Seção da longarina 1 para ponte de 30 m de vão, sendo as unidades em m .....	80
Figura 3.23 - Seção da longarina 4 para ponte de 30 m de vão, sendo as unidades em m .....	81
Figura 3.24 - Seção da longarina 2 e 3 para ponte de 30 m de vão, sendo as unidades em m.....	81
Figura 3.25 - Desenho da grelha no software ANSYS para ponte de 40 m de vão .....	82

Figura 3.26 - Seção da longarina 1 para ponte de 40 m de vão, sendo as unidades em m .....	82
Figura 3.27 - Seção da longarina 4 para ponte de 40 m de vão, sendo as unidades em m .....	83
Figura 3.28 - Seção da longarina 2 e 3 para ponte de 40 m de vão, sendo as unidades em m.....	83
Figura 3.29 – Exemplo de modelo do carregamento e vinculações para a situação de 20 m de vão, sendo as medidas em metros.....	84
Figura 3.30 - Carregamento aplicado na seção (BOTELHO, 2016).....	86
Figura 3.31 - Seção T da longarina 1 para ponte de 10 m de vão, sendo as unidades em m.....	87
Figura 3.32 - Seção T da longarina 1 para ponte de 20 m de vão, sendo as unidades em m.....	87
Figura 3.33 - Seção T da longarina 1 para ponte de 30 m de vão, sendo as unidades em m.....	88
Figura 3.34 - Seção T da longarina 1 para ponte de 40 m de vão, sendo as unidades em m.....	88
Figura 3.35 - Viga que representa a ponte de 4 longarinas com a carga aplicada no tabuleiro, para o vão de: (a) 10 m; (b) 20 m; (c) 30 m; e (d) 40 m. ....	91
Figura 4.1 - Exemplo de modelo do carregamento do trem-tipo para a situação de 20 m de vão, sendo as medidas em m.....	92
Figura 4.2 - Gráfico comparando os deslocamentos máximos no meio do vão dos modelos de ponte com 4 longarinas .....	96
Figura 4.3 - Gráfico comparando os esforços cortantes máximos nos apoios dos modelos de ponte com 4 longarinas .....	97
Figura 4.4 - Gráfico comparando os momentos fletores máximos no meio do vão dos modelos de ponte com 4 longarinas .....	97
Figura 4.5 - Viga que representa a ponte de 4 longarinas com as cargas do eixo do trem-tipo aplicadas no tabuleiro, para o vão de: (a) 10m; (b) 20 m; (c) 30 m; e (d) 40 m. ....	99
Figura 4.6 - Gráfico comparando os deslocamentos máximos no meio do vão dos modelos de longarinas.....	103
Figura 4.7 - Gráfico comparando os esforços cortantes máximos nos apoios dos modelos de longarinas.....	103
Figura 4.8 - Gráfico comparando os momentos fletores máximos no meio do vão dos modelos de longarinas.....	104

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Tabela da conectividade .....	48
Tabela 3.1 - Resultado do teste de convergência de malha para as deflexões .....	67
Tabela 3.2 - Valores de $\omega_i$ em rad/s para uma viga simplesmente apoiada.....	68
Tabela 3.3 - Deflexão no meio do vão de uma viga sujeita a uma carga móvel.....	70
Tabela 3.4 – Valores de $\alpha_1$ e $\alpha_2$ para uma viga amortecida.....	72
Tabela 3.5 - Deflexão no meio do vão de uma viga amortecida sujeita a uma carga móvel.....	72
Tabela 3.6 - Coeficiente Dinâmico para uma de uma viga amortecida sujeita a uma carga móvel harmônica.....	73
Tabela 3.7 - Tabela contendo os resultados obtidos com o carregamento na viga 1 para o vão de 10 m.....	85
Tabela 3.8 - Tabela contendo os resultados obtidos com o carregamento na viga 1 para o vão de 20 m.....	85
Tabela 3.9 - Tabela contendo os resultados obtidos com o carregamento na viga 1 para o vão de 30 m.....	85
Tabela 3.10 - Tabela contendo os resultados obtidos com o carregamento na viga 1 para o vão de 40 m.....	85
Tabela 3.11 - Tabela contendo os resultados obtidos com o carregamento na viga 1 .....	85
Tabela 3.12 - Tabela contendo os resultados obtidos com o carregamento na longarina de seção T 89	
Tabela 3.13 - Valores utilizados no método de Fauchart para a ponte de 10 m de vão.....	89
Tabela 3.14 - Valores utilizados no método de Fauchart para a ponte de 20 m de vão.....	90
Tabela 3.15 - Valores utilizados no método de Fauchart para a ponte de 30 m de vão.....	90
Tabela 3.16 - Valores utilizados no método de Fauchart para a ponte de 40 m de vão.....	90
Tabela 3.17 – Tabela contendo os resultados das reações na longarina .....	91
Tabela 4.1 - Frequências naturais das estruturas para os modelos de ponte com 4 longarinas .....	93
Tabela 4.2 - Parâmetros $\alpha_1$ e $\alpha_2$ usados na análise transiente dos modelos de ponte com 4 longarinas .....	93
Tabela 4.3 - Comparação entre os efeitos dinâmicos devido à carga pontual móvel e os efeitos dinâmicos recomendados pela NBR 7188 (ABNT, 2013), para o modelo de ponte com 4 longarinas e 10 m de vão. ....	94
Tabela 4.4 - Comparação entre os efeitos dinâmicos devido à carga pontual móvel e os efeitos dinâmicos recomendados pela NBR 7188 (ABNT, 2013), para o modelo de ponte com 4 longarinas e 20 m de vão. ....	94

Tabela 4.5 - Comparação entre os efeitos dinâmicos devido à carga pontual móvel e os efeitos dinâmicos recomendados pela NBR 7188 (ABNT, 2013), para o modelo de ponte com 4 longarinas e 30 m de vão. ....	94
Tabela 4.6 - Comparação entre os efeitos dinâmicos devido à carga pontual móvel e os efeitos dinâmicos recomendados pela NBR 7188 (ABNT, 2013), para o modelo de ponte com 4 longarinas e 40 m de vão. ....	95
Tabela 4.7 - Comparação entre os efeitos dinâmicos devido a carga harmônica móvel e os efeitos dinâmicos recomendados pela NBR 7188 (ABNT, 2013), para o modelo de ponte com 4 longarinas e 10 m de vão. ....	95
Tabela 4.8 - Comparação entre os efeitos dinâmicos devido a carga harmônica móvel e os efeitos dinâmicos recomendados pela NBR 7188 (ABNT, 2013), para o modelo de ponte com 4 longarinas e 20 m de vão. ....	95
Tabela 4.9 - Comparação entre os efeitos dinâmicos devido a carga harmônica móvel e os efeitos dinâmicos recomendados pela NBR 7188 (ABNT, 2013), para o modelo de ponte com 4 longarinas e 30 m de vão. ....	96
Tabela 4.10 - Comparação entre os efeitos dinâmicos devido à carga harmônica móvel e os efeitos dinâmicos recomendados pela NBR 7188 (ABNT, 2013), para o modelo de ponte com 4 longarinas e 40 m de vão. ....	96
Tabela 4.11 - Frequências naturais das estruturas para os modelos de longarina.....	98
Tabela 4.12 - Parâmetros <b><math>\alpha_1</math></b> e <b><math>\alpha_2</math></b> usados na análise transiente dos modelos de longarina.....	98
Tabela 4.13 - Valores das cargas concentradas, obtidas pelo Método de Fauchart.....	100
Tabela 4.14 - Comparação entre os efeitos dinâmicos devido à carga pontual móvel e os efeitos dinâmicos recomendados pela NBR 7188 (ABNT, 2013), para o modelo de longarina com 10 m de vão.....	100
Tabela 4.15 - Comparação entre os efeitos dinâmicos devido à carga pontual móvel e os efeitos dinâmicos recomendados pela NBR 7188 (ABNT, 2013), para o modelo de longarina com 20 m de vão.....	100
Tabela 4.16 - Comparação entre os efeitos dinâmicos devido à carga pontual móvel e os efeitos dinâmicos recomendados pela NBR 7188 (ABNT, 2013), para o modelo de longarina com 30 m de vão.....	101
Tabela 4.17 - Comparação entre os efeitos dinâmicos devido à carga pontual móvel e os efeitos dinâmicos recomendados pela NBR 7188 (ABNT, 2013), para o modelo de longarina com 40 m de vão.....	101

Tabela 4.18 - Comparação entre os efeitos dinâmicos devido à carga harmônica móvel e os efeitos dinâmicos recomendados pela NBR 7188 (ABNT, 2013), para o modelo de longarina com 10 m de vão.....	101
Tabela 4.19 - Comparação entre os efeitos dinâmicos devido à carga harmônica móvel e os efeitos dinâmicos recomendados pela NBR 7188 (ABNT, 2013), para o modelo de longarina com 20 m de vão.....	102
Tabela 4.20 - Comparação entre os efeitos dinâmicos devido à carga harmônica móvel e os efeitos dinâmicos recomendados pela NBR 7188 (ABNT, 2013), para o modelo de longarina com 30 m de vão.....	102
Tabela 4.21 - Comparação entre os efeitos dinâmicos devido à carga harmônica móvel e os efeitos dinâmicos recomendados pela NBR 7188 (ABNT, 2013), para o modelo de longarina com 40 m de vão.....	102

## LISTA DE SÍMBOLOS

$C$	matriz de amortecimento
$D$	operador de derivação
$E$	módulo de elasticidade secante do material [MPa]
$E$	matriz de propriedades elásticas do material
$E_K$	subespaço
$G$	módulo de elasticidade transversal do material [MPa]
$H$	amplitude arbitrária do deslocamento $v(t)$
$I$	inércia da seção da viga [ $m^4$ ]
$J$	constante de torção da viga [ $m^4$ ]
$K$	matriz de rigidez
$L$	comprimento do vão da estrutura [m]
$L_{iv}$	comprimento do vão para estruturas isostáticas [m]
$M$	matriz de massa
$M_i$	momento fletor máximo [kN.m]
$M_{total}$	momento fletor total [kN.m]
$N$	matriz da função de interpolação
$N_i$	esforço máximo normal [kN]
$P$	força concentrada de magnitude constante [N]
$P(t)$	vetor de força dinâmica
$Q$	amplitude da força concentrada [N]

$R_i$	reação no apoio da viga [kN]
$R_{total}$	reação total da viga [kN]
$T$	período natural de vibração
$T_n$	menor período de vibração natural
$V$	vetor de deslocamento
$\dot{V}$	vetor de velocidade
$\ddot{V}$	vetor de aceleração
$\bar{V}$	autovetor
$a_1$ e $a_2$	constantes do amortecimento de Rayleigh
$b(t)$	vetor de força de massa
$b_x(t)dV$	força de corpo na direção $x$
$b_y(t)dV$	força de corpo na direção $y$
$b_z(t)dV$	força de corpo na direção $z$
$c$	coeficiente de amortecimento
$c_{cr}$	coeficiente de amortecimento crítico
$d_0$	deflexão no meio do vão para uma viga devido a uma carga estática [m]
$d(t)$	vetor de deslocamento nodal
$d(x, t)$	deflexão de uma viga simplesmente apoiada sujeita a carga móvel [m]
$e$	distância do centroide da laje até o centroide da longarina [m]
$f$	força axial
$f_D$	força proporcional ao amortecimento

$f_I$	força inercial
$f_S$	força na mola
$f_d$	força de dissipação
$f_n$	frequência natural de vibração
$f_r$	função de interpolação
$k$	rigidez da mola
$k_t$	coeficiente da mola transversal [kN.m/rad]
$k_v$	coeficiente da mola vertical [kN/m]
$m$	massa
$p_0$	amplitude do carregamento
$p_b(t)$	vetor de força de corpo inercial
$p_b^*(t)$	vetor de força de corpo inercial
$r$	velocidade da carga móvel [m/s]
$s$	dependente do parâmetro de amortecimento $c$
$t$	tempo [s]
$u$	componente de deslocamento na direção $x$
$u(t)$	vetor de deslocamento genérico
$v$	vetor de deslocamento na direção $y$
$v(t)$	deslocamento
$\dot{v}(t)$	velocidade
$\ddot{v}(t)$	aceleração

$v_c(t)$	solução transiente
$v_p(t)$	solução permanente
$w$	vetor de deslocamento na direção $z$
$x$	posição da carga onde se deseja determinar a deflexão [m]
$x(t)$	vetor deslocamento
$z$	coordenada de amplitude nodal
$\alpha$	parâmetro adimensional característico do efeito da velocidade
$\gamma$	massa específica do concreto [ $\text{kg/m}^3$ ]
$\delta$	coeficiente dinâmico
$\delta U_e$	energia de deformação virtual da tensão interna
$\delta W_e$	trabalho virtual das forças externas
$\delta d$	vetor de pequenos deslocamentos virtuais
$\delta u$	vetor do deslocamento genérico virtual
$\delta \varepsilon$	vetor da deformação-deslocamento virtual
$\varepsilon(t)$	relação entre deformação e deslocamento
$\lambda$	autovalor
$\mu$	massa da viga por unidade de comprimento [ $\text{kg/m}$ ]
$\nu$	coeficiente de Poisson
$\xi$	razão de amortecimento
$\rho$	densidade do material
$\rho \ddot{u} dV$	força de corpo inercial na direção $x$

$\rho \ddot{v} dV$	força de corpo inercial na direção $y$
$\rho \ddot{w} dV$	força de corpo inercial na direção $z$
$\sigma(t)$	relação entre tensão e deformação
$\varphi$	fator de impacto
$\omega$	frequência circular [rad/s]
$\omega_{(i)}$	frequência circular para o $i$ -ésimo modo de vibração [rad/s]
$\bar{\omega}$	frequência de excitação
$\omega_D$	frequência circular amortecida
$\omega_b$	frequência circular de amortecimento [rad/s]
$\varrho$	amplitude da resposta dinâmica
$\Delta t$	passo de tempo
$\Psi_k$	matriz formada pelos vetores iterativos
$\Omega$	frequência circular da força harmônica [rad/s]

## LISTA DE ABREVIATURAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
CIA	Coeficiente de Impacto Adicional
CIV	Coeficiente de Impacto Vertical
CNF	Coeficiente de Número de Faixas
FAD	Fator de Amplificação Dinâmico
GDL	Grau de Liberdade
MEF	Método dos Elementos Finitos

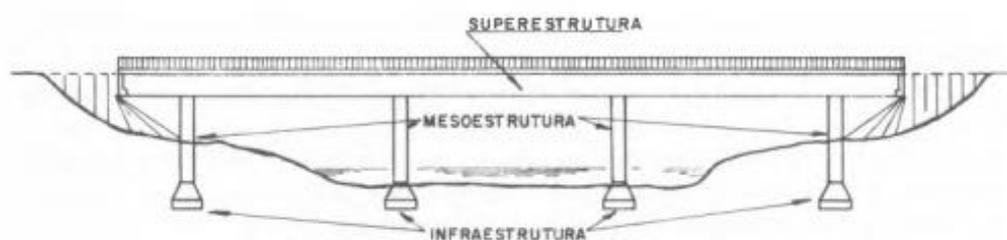
# 1. INTRODUÇÃO

## 1.1. Apresentação do Problema

As pontes sempre representaram as mais consideráveis formas de expressão da capacidade produtora da engenharia, seja nos tempos mais longínquos, quando o ser humano improvisava troncos de árvores e cordas vegetais para superar os obstáculos naturais e continuar o seu percurso, ou nos tempos modernos, quando as largas estruturas desafiam a lei da gravidade e a própria idealização humana pelo atrevimento de seus vãos e elegância de suas formas. Não é mera coincidência que essas magníficas obras da engenharia civil são conhecidas por Obras de Arte Especiais (VITÓRIO, 2013).

De acordo com Marchetti (2008), denomina-se ponte a obra com a finalidade de transpor obstáculos à continuidade do leito normal de uma via, tais como rios, braços de mar, vales profundos, outras vias e entre outros casos. E é chamada de viaduto a obra que tem por objetivo a transposição de vales, outras vias ou obstáculos em geral não constituídos por água.

Pontes podem ser separadas em três elementos, como mostra a Fig. 1.1, sendo eles a superestrutura, constituída de vigas e lajes, a qual suporta o estrado por onde se trafega, sendo esta a parte útil da obra. A mesoestrutura, formada pelos pilares, recebe os esforços da superestrutura e os transmite para a infraestrutura, que se destina a apoiar no terreno os esforços transmitidos pelos demais elementos. A infraestrutura é composta por blocos de estacas, sapatas ou tubulões (PFEIL, 1983).



**Figura 1.1 - Vista geral de uma ponte, mostrando os principais elementos constituintes (PFEIL, 1983)**

Segundo Pfeil (1983), pontes podem ser rodoviárias, ferroviárias ou para pedestre, sendo esta última denominada passarela. Podem também ser constituídas por diferentes materiais, sendo alguns deles, por exemplo, a madeira, pedra, concreto armado, concreto protendido e metal.

Quanto ao tipo estrutural as pontes podem ser em laje, em vigas retas, de alma cheia, em treliça, em quadros rígidos, em arcos ou abóbodas, pênséis ou suspensas e estaiada (em leque ou harpa), de acordo com as Figs. 1.2 e 1.3.

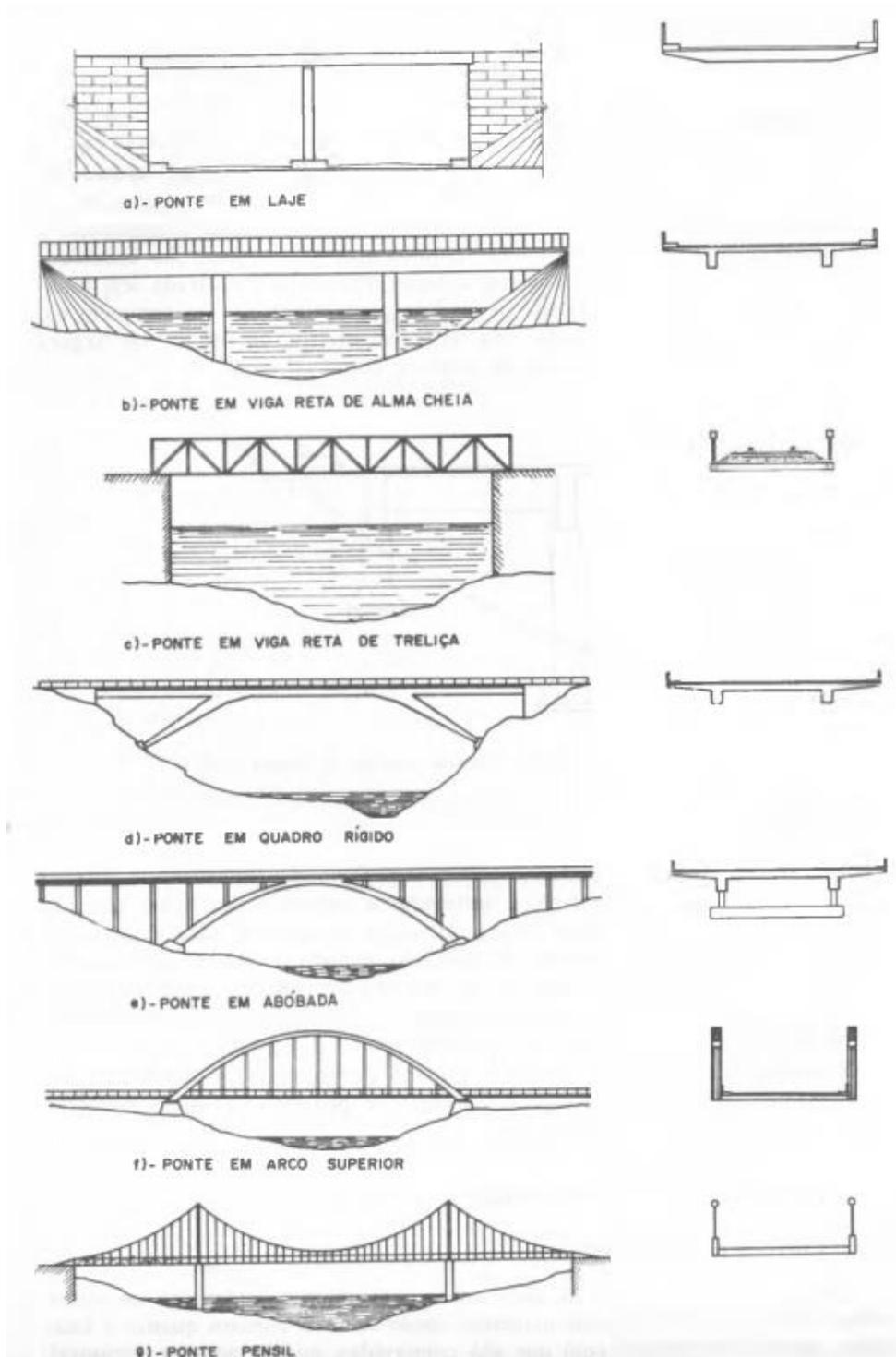
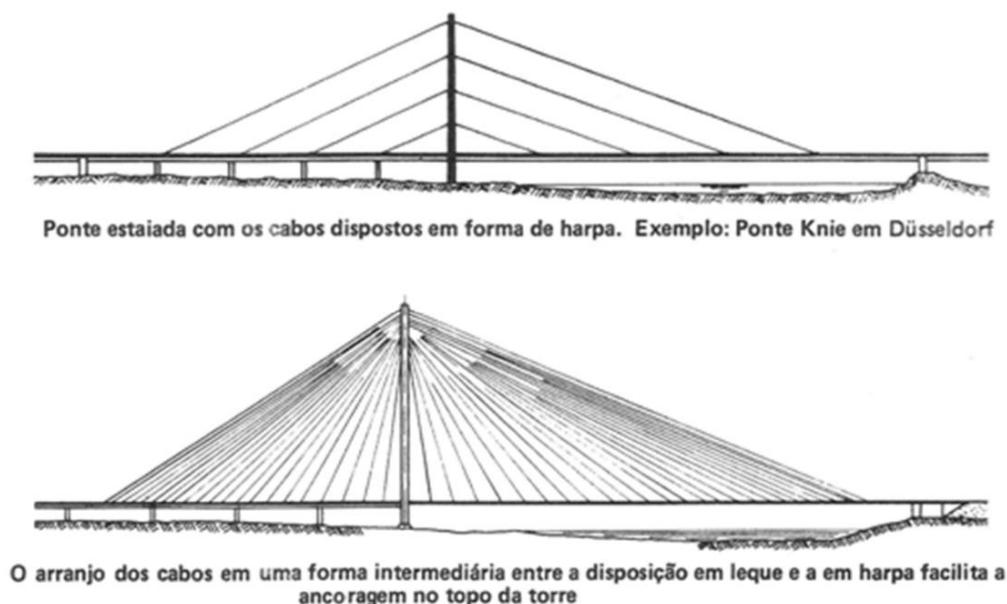


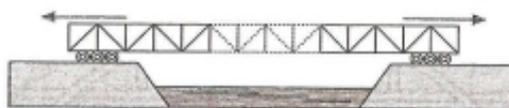
Figura 1.2 - Tipos Estruturais de pontes (PFEIL, 1983)



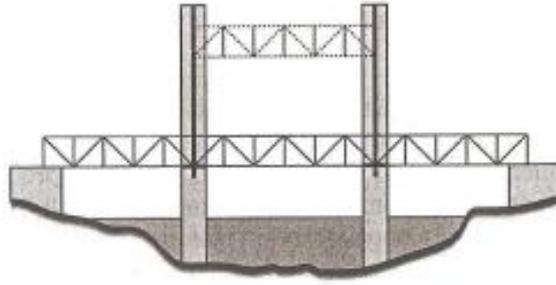
**Figura 1.3 – Tipos de pontes estaiadas (LEONHARDT, 1979)**

Quanto a sua durabilidade, pontes podem ser permanentes, construídas a caráter duradouro, ou pontes provisórias, em que possuem um período de vida relativamente curto e estas últimas são geralmente constituídas de madeira, mas também tem sido usado, atualmente, estruturas metálicas. Pontes provisórias também podem ser construídas utilizando como apoios elementos flutuantes como barcos ou tambores metálicos (PFEIL, 1983).

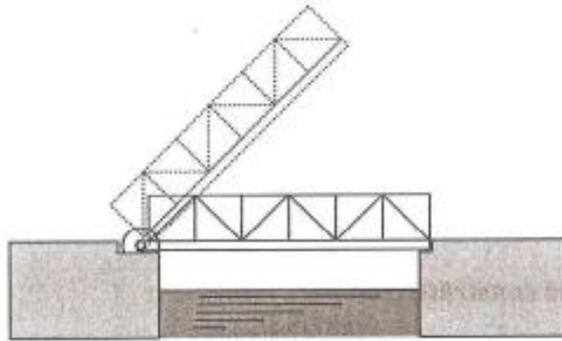
Quando o tabuleiro da ponte não pode ser construído em uma altura suficientemente alta para atender ao gabarito de navegação, é necessário adotar um estrado móvel, para permitir a passagem das embarcações. Desta maneira, se o estrado realizar um movimento de translação, a ponte pode ser corrediça (Fig. 1.4), quando o seu movimento é na horizontal, ou levadiça (Fig. 1.5), quando o seu movimento é na vertical. Se o estrado realizar um movimento de rotação (Fig. 1.6), a ponte pode ser basculante, giro vertical, ou giratória (Fig. 1.7), giro horizontal (MARCHETTI, 2008).



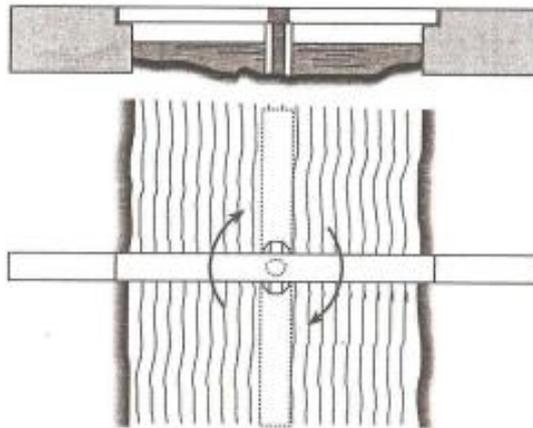
**Figura 1.4 - Ponte corrediça (MARCHETTI, 2008)**



**Figura 1.5 - Ponte levadiça (MARCHETTI, 2008)**



**Figura 1.6 - Ponte basculante de pequeno vão (MARCHETTI, 2008)**



**Figura 1.7 - Ponte giratória (MARCHETTI, 2008)**

Quanto ao tipo estático da superestrutura, ela pode ser isostática ou hiperestática. Uma estrutura isotáctica é quando os apoios desta são em número estritamente necessário para impedir todos os seus possíveis movimentos, sendo assim, o número de reações de apoio a serem determinadas é igual ao número de equações de equilíbrio disponíveis, como mostra a Fig. 1.8. Já uma estrutura hiperestática é quando os apoios desta são em número superior ao estritamente necessário para impedir seu movimento estrutura, sendo assim, o número de reações de apoio a serem determinadas

é superior ao número de equações de equilíbrio disponíveis, como mostra a Fig. 1.9 (DE ALMEIDA, 2009).

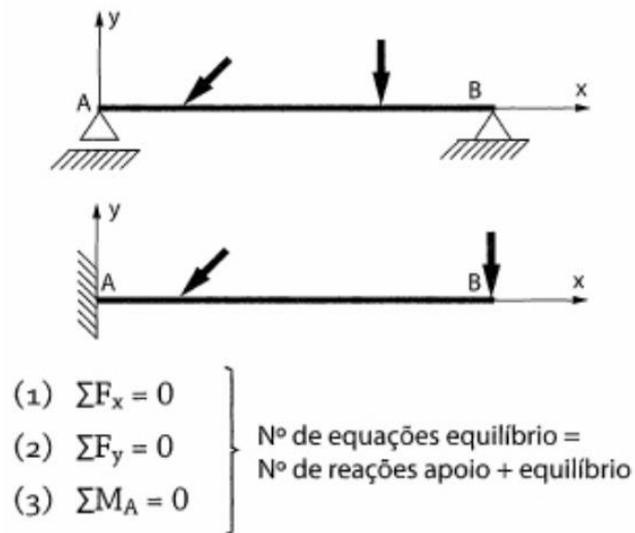


Figura 1.8 - Estruturas isostáticas (DE ALMEIDA, 2009)

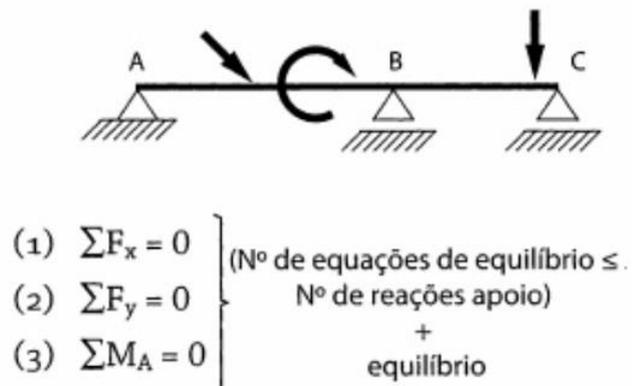


Figura 1.9 - Estruturas hiperestáticas (DE ALMEIDA, 2009)

Pontes rodoviárias no Brasil são projetadas de acordo com as normas de projeto NBR 7188 de 2013 e NBR 7187 de 2003, denominadas “Carga móvel rodoviária e de pedestres em pontes, viadutos, passarelas e outras estruturas” e “Projeto de pontes de concreto armado e de concreto protendido - Procedimentos”, respectivamente. O modelo de carga móvel, como mostra a Fig. 1.10, é composto de um veículo de 3 eixos mais uma carga distribuída, a ser aplicada na região fora das fronteiras do veículo e multiplicada por um fator de amplificação dinâmica (FAD), denominado coeficiente de impacto das cargas verticais, que é função do comprimento do vão, número de faixas e material utilizado na estrutura.

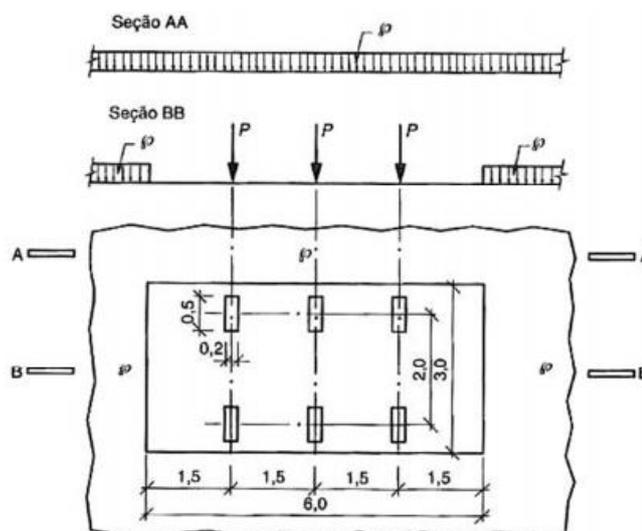


Figura 1.10 - Distribuição de cargas estáticas (NBR 7188, 2013)

Os trens-tipos constituem as cargas móveis verticais que devem ser levadas em consideração nos projetos estruturais de obras novas, assim como na investigação e amparo de obras já existentes (DA SILVA, 2014).

O trem-tipo da ponte deve sempre ser colocado no sentido longitudinal, na qual, por meio da linha de influência, se observa o desempenho da estrutura perante as ações do veículo. De acordo com Marchetti (2008), a NBR 7188 (ABNT, 1984) salienta que a roda do veículo deve encostar no guarda-rodas, para assim obter os efeitos mais desfavoráveis na obra.

Deste modo, as linhas de influência geradas pelo modelo de carga móvel mostram o resultado numérico desse carregamento permitindo a análise necessária para o dimensionamento da estrutura e verificações gerais dela (MARCHETTI, 2008).

O incremento das cargas dos veículos provocado pela transição das mesmas sobre as pontes rodoviárias é denominado por impacto vertical. Tal conceito é movido por dois efeitos distintos, o deslocamento das cargas e a irregularidade do pavimento (PFEIL, 1983).

A determinação dos efeitos dinâmicos causados pelo impacto, é feita por meio de técnicas experimentais. Desta forma, é possível relacionar as cargas móveis a cargas estáticas através da multiplicação do coeficiente de impacto (MARCHETTI, 2008).

Nas versões anteriores da NBR 7188 (ABNT, 1984), os efeitos dinâmicos induzidos pela carga móvel eram levados em consideração por meio do fator de impacto ( $\varphi$ ) aplicado ao modelo de carga. Assim como mostra a equação

$$\varphi = 1,4 - 0,007.L \quad (1.1)$$

onde  $L$  é o comprimento do vão da estrutura em m.

Os valores equivalentes aos esforços dinâmicos, dados pela norma NBR 7188 (ABNT, 2013), são obtidos multiplicando a carga concentrada do eixo e a carga distribuída do trem-tipo pelo coeficiente de impacto vertical (CIV), coeficiente de número de faixas (CNF) e coeficiente de impacto adicional (CIA). Assim como mostram as equações

$$CIV = \begin{cases} 1,35 & L_{iv} < 10\text{m} \\ 1,0 + \left(\frac{21,2}{L+50}\right) & 10\text{m} \leq L_{iv} \leq 200\text{m} \end{cases} \quad (1.2)$$

$$CNF = 1,0 - 0,05 \cdot (n - 2) > 0,9 \quad (1.3)$$

$$CIA = \begin{cases} 1,25 & \text{para obras em concreto armado} \\ 1,15 & \text{para obras em aço} \end{cases} \quad (1.4)$$

onde  $L_{iv}$  é o comprimento do vão, em m, para estruturas isostáticas, a média aritmética para pontes contínuas ou o comprimento do próprio balanço para estruturas em balanço e  $n$  é o número de faixas de tráfego.

No estudo do comportamento estrutural de pontes rodoviárias não são considerados os efeitos dinâmicos, tais como: mobilidade da carga, oscilação dos veículos ao atingir a ponte, impacto destes sobre o tabuleiro devido às irregularidades da pista, variação de velocidade das viaturas dentre outros (LEITÃO, 2009).

Para Ahi (2009), em estudos da capacidade de carga e análise dinâmica, tem-se tornado essencial à modelagem matemática computacional, representando a estrutura o mais fielmente possível, de forma a se conhecer precisamente as tensões e deformações presentes nos elementos estruturais.

Este estudo pretende realizar a comparação entre os efeitos dinâmicos e os efeitos estáticos provocados pelo modelo de carga móvel, em uma típica estrutura rodoviária. Para isto, o estudo objetiva elaborar modelos numéricos e analíticos para simular a passagem de veículos em alguns tipos de pontes.

Após a realização dos estudos, os valores representativos que forem obtidos dos efeitos dinâmicos devidos à carga móvel serão comparados com os efeitos dinâmicos produzidos pela NBR 7188 (ABNT, 2013), quando aplicados aos mesmos sistemas de ponte, para assim avaliar se a norma está propondo uma análise estática equivalente à dinâmica adequada.

## 1.2. Estado da Arte

Foi realizada uma revisão bibliográfica em livros, artigos, trabalhos de conclusão de curso, dissertações de mestrado e teses de doutorado com a intenção de coletar as informações mais atuais referentes ao assunto de análise dinâmica de pontes, para assim avançar nas pesquisas sobre tal tópico.

Ferreira (1999) apresentou uma metodologia simplificada, por meio de elementos finitos tridimensionais, para análise dinâmica de pontes, focando na excitação transmitida pela passagem do veículo, para assim avaliar os danos causados pela fadiga em estruturas mistas. Foi constatado que a aplicação da carga do veículo como uma carga constante, isto é, sem considerar as equações de movimento, conduz a resultados que não são reais.

Rossigali (2006) construiu estaticamente uma base de dados de veículos reais, a qual foi utilizada para determinar os esforços solicitantes extremos críticos na estrutura. Com esses resultados o autor foi capaz de mostrar que as solicitações provocadas pelo tráfego real podem ser maiores que as determinadas por meio do trem-tipo da norma brasileira.

Amorim (2007) desenvolveu uma análise dinâmica de pontes rodoviárias de concreto armado submetidas à travessia de comboios de veículos sobre o pavimento irregular da estrutura. O estudo foi feito por meio da metodologia de análise no domínio do tempo de acordo com um modelo estático. O modelo matemático foi concebido de forma a simular o conjunto dos veículos e do tabuleiro, denominado de sistema veículo-ponte. Foi constatado que os valores da amplificação dinâmica dos esforços aumentam a medida que a qualidade do pavimento decresce, devido a interação entre os veículos e a irregularidade da pista.

Melo (2007) desenvolveu e implementou um modelo analítico-numérico para representar a interação veículo-pavimento-estrutura, com o objetivo de determinar de maneira mais precisa os valores do coeficiente de impacto fornecido pela norma brasileira. Também apresentou um estudo paramétrico do fator de amplificação dinâmica para respostas dos deslocamentos de pontes típicas de vãos curtos no Brasil. Tal estudo conduziu à conclusão que o FAD depende de diversos fatores dinâmicos da estrutura e do veículo, além da irregularidade do pavimento.

Lopes (2008) estudou a influência da velocidade, do espaçamento e do número de veículos na resposta dinâmica dos esforços de uma ponte rodoviária de concreto. Por meio de um modelo matemático empregado para simular o sistema veículo-ponte, se demonstrou que a abordagem sugerida pela norma brasileira não representa fielmente o comportamento dinâmico da ponte rodoviária, devido a uma série de fatores que não são levados em consideração.

Leitão (2009) mediu os níveis dos esforços e tensões causados pelo tráfego de veículos sobre a superfície do pavimento irregular, além de realizar a verificação à fadiga em pontes rodoviárias mistas. Por meio de um modelo numérico-computacional, que foi concebido utilizando técnicas

usuais de discretização por meio de elementos finitos de casca e de viga tridimensionais, foi constatado que a irregularidade da pista gera tensões com grandes variações, as quais são bastante críticas para à análise de fadiga.

Ahi (2009) avaliou os esforços provocados pelo tráfego de veículos pesados sobre o tabuleiro de uma ponte rodoviária. Por meio da utilização de elementos finitos sólidos tridimensionais, foi simulado o modelo computacional da estrutura para análise dinâmica e os veículos foram representados a partir de sistemas massa-mola-amortecedor. Com base nos resultados, foi revelado que os valores das tensões de cisalhamento nos apoios são maiores que o obtido para as tensões normais, sendo assim necessária uma verificação cautelosa em tal parte da obra de arte.

Huacho (2014) verificou as vibrações produzidas por cargas móveis em pontes, para tal levou em consideração as teorias de Euler-Bernoulli e Timoshenko para descrever as vigas. Por meio da análise paramétrica realizada, demonstrou ser possível encontrar parâmetros satisfatórios para a razão da altura sobre o comprimento da viga para serem utilizados em análise de vibração da estrutura.

Silva et al. (2014) comparou os valores do coeficiente de impacto da NBR 7188 (ABNT, 1984) e NBR 7188 (ABNT, 2013) aplicados no projeto de uma ponte. Tal comparação demonstrou que a norma anterior não fornecia majoração adequada para as cargas atuantes na estrutura e que na versão mais atual da norma, se observou que seria acrescida uma margem de segurança para o carregamento do trem-tipo.

Araujo (2014) comparou os resultados de duas modelagens da interação dinâmica veículo-pavimento-estrutura, sendo um o modelo unifilar, mais simples e com menor tempo de processamento, e o outro uma modelagem 3D mais completa com elementos de casca. Os resultados demonstraram uma boa correlação entre os métodos abordados desde que as propriedades dinâmicas abordadas para ambos fossem as mesmas.

Rossigali et al. (2015) elaborou comparações entre os efeitos dinâmicos devido ao carregamento do tráfego de veículos comerciais reais, obtidos por meio de uma ferramenta computacional especialmente desenvolvida para este caso, e aqueles gerados pelo modelo de cargas da NBR 7188 (ABNT, 2013). Os autores demonstraram que o modelo utilizado pela norma brasileira não é adequado para representar as solicitações reais, podendo assim, estar contra a segurança.

Macedo (2016) apresentou a comparação, por meio do software ANSYS, das deformações sofridas por uma ponte sujeita a carregamentos rodoviários e ferroviários. Para tal, foram realizadas análises estática estrutural, modal e transiente estrutural com as devidas cargas. Desta maneira, concluiu que os esforços gerados pelo veículo ferroviário são consideravelmente maiores que os gerados pelo veículo rodoviário.

## 1.3. OBJETIVOS

### 1.3.1. Objetivo Geral

O objetivo do trabalho é realizar análises Estáticas e Dinâmicas, Modais e Transiente de vigas longitudinais de pontes, determinar os esforços dinâmicos e estáticos devido ao carregamento de uma carga móvel, comparar os resultados obtidos e aferir a precisão do coeficiente de impacto vertical fornecido pela norma brasileira.

### 1.3.2. Objetivos Específicos

- Desenvolver e verificar o modelo de análise estática para a estrutura da ponte rodoviária.
- Desenvolver e verificar o modelo de análise modal para a estrutura da ponte rodoviária.
- Desenvolver e verificar o modelo de análise transiente para a estrutura da ponte rodoviária.
- Realizar um estudo paramétrico para verificar a influência do comprimento do vão da ponte.
- Desenvolver e verificar o método simplificado de Fauchart de distribuição transversal de cargas.
- Avaliar o coeficiente de impacto vertical da norma brasileira NBR 7188 (ABNT, 2013).
- Estudar pontes rodoviárias isostáticas de 10, 20, 30 e 40 m de vão sob o ponto de vista do coeficiente de impacto.

## 1.4. Organização do trabalho

O presente trabalho é dividido em cinco capítulos.

No capítulo 1 foi feita uma introdução sobre o assunto a ser abordado no trabalho.

No capítulo 2 foi feita a revisão bibliográfica, apresentando os principais estudos realizados quanto à análise dinâmica de pontes sob a ação do tráfego rodoviário. Também foi apresentada a analogia de grelhas, as teorias do método de Fauchart, o Método dos Elementos Finitos e a aplicação deste no software ANSYS.

No capítulo 3 foi demonstrada a metodologia de verificação para os modelos abordados no estudo.

No capítulo 4 foram apresentados os estudos paramétricos, que avaliam a influência do comprimento da ponte e seções adotadas para as análises.

No capítulo 5 foi apresentada a conclusão dos estudos paramétricos, mostrando a diferença entre os esforços solicitantes da estrutura gerados pelo método utilizado na NBR 7188:2013 e os valores provocados pela passagem do veículo sobre a estrutura.

## 2. METODOLOGIA

### 2.1. Princípios da análise de vibrações

Segundo Soriano (2014), caso a estrutura esteja sob ações externas que variam com o tempo, é possível classificar o problema como dinâmico ou transiente, caso as forças de inércia passem a ser relevantes para a análise. Tais ações são comumente provenientes de atividades humanas (correr, pular e dançar), de equipamentos móveis (veículos e pontes rolantes), de partes móveis (vibradores, compactadores, turbinas, centrífugas e peneiras giratórias) ou ações da natureza (ventos, ondas marítimas e sismos). Estes fenômenos causam vibrações na estrutura, que podem além de danificá-las provocar fadiga e afetar a utilidade destas.

As vibrações podem ser classificadas em livres ou forçadas. As vibrações livres ocorrem quando o movimento se mantém por causa da força gravitacional ou elástica, como um pêndulo balançando ou uma barra elástica vibrando. Já as vibrações forçadas são causadas por forças externas aplicadas no sistema, como a vibração causada por uma máquina (KÜSTER, 2011).

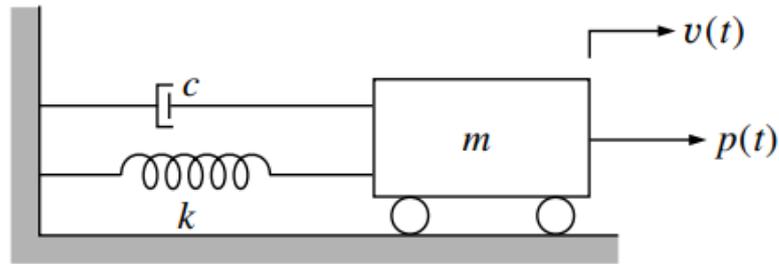
As estruturas sujeitas a excitação dinâmica estão sempre perdendo energia para o meio ambiente e, quando não houver reposição desta energia, o sistema vai gradualmente tendo sua vibração reduzida, e tal processo é denominado amortecimento. Estes tipos de vibrações quando não amortecidas corretamente podem acabar resultando em danos graves para a estrutura. Ambos os tipos de vibração, livre ou forçada, podem ser amortecidas ou não (SILVA, 2009).

A fim de estudar por completo o comportamento dinâmico de uma estrutura, é viável se iniciar por um simples sistema mecânico com um único grau de liberdade, composto por massa, mola e amortecedor. Sendo assim, será apresentada nos itens a seguir a abordagem de sistemas submetidos a vibrações livres e forçadas, para sistemas de um grau de liberdade e de múltiplos graus de liberdade, com base nas formulações apresentados por Meirovitch (1986) e Clough e Penzien (1995).

#### 2.1.1. Sistema de um grau de liberdade (1 GDL)

##### ***Formulação da equação de movimento***

O sistema massa-mola-amortecedor, demonstrado pela Fig. 2.1, constitui o sistema cuja configuração está completamente definida por uma única coordenada. Em um bloco, considerado rígido, está contida toda a massa  $m$ , e seu deslocamento sobre rodas é restrito somente a componente  $v(t)$ . Desta maneira, o movimento do sistema é reproduzido por uma única coordenada independente, que recebe nome de grau de liberdade. É considerada também uma mola sem massa, com rigidez  $k$ , oferecendo rigidez elástica ao deslocamento e um amortecedor de parâmetro  $c$ .



**Figura 2.1 - Sistema massa-mola-amortecedor com 1 GDL (CLOUGH; PENZIEN, 1995)**

Quando o sistema é submetido a uma ação de força dinâmica  $p(t)$ , a equação de movimento é expressa a partir das forças de equilíbrio do sistema na direção do deslocamento  $v(t)$ . A força  $f_S$ , que corresponde à mola, é diretamente proporcional ao seu alongamento, sendo igual ao produto da rigidez  $k$  com o deslocamento  $v$ , como mostra a equação:

$$f_S(t) = k v(t) \quad (2.1)$$

Existe uma força inercial  $f_I$  relacionada à massa que, pela 2ª lei de Newton ou pelo princípio de d'Alembert, é o produto da massa  $m$  pela aceleração  $\ddot{v}(t)$ , demonstrado pela equação abaixo:

$$f_I(t) = m \ddot{v}(t) \quad (2.2)$$

Por fim, se considera que a força proporcional ao amortecimento  $f_D$  é igual ao produto da constante  $c$  pela velocidade  $\dot{v}(t)$ , como segue:

$$f_D(t) = c \dot{v}(t) \quad (2.3)$$

Na Figura 2.2 é apresentado o equilíbrio do sistema de 1 GDL e suas equações estão formadas a seguir:

$$f_S(t) + f_I(t) + f_D(t) = p(t) \quad (2.4)$$

$$kv(t) + m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) = p(t) \quad (2.5)$$

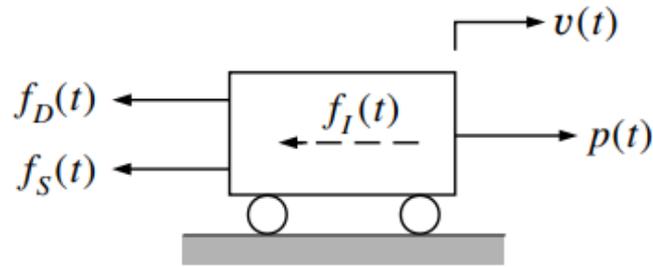


Figura 2.2 - Equilíbrio de forças do sistema de 1 GDL sob ação de  $p(t)$  (CLOUGH; PENZIEN, 1995)

### Resposta em vibrações livres

Para Neves (1990), os resultados de uma análise de vibração livre são importantes devido à ligação com as propriedades dinâmicas da estrutura, já que tais resultados são alcançados pelas equações diferenciais que caracterizam o equilíbrio entre as forças elásticas e inerciais. Além de que, o cálculo das frequências naturais garante a investigação do risco de a estrutura entrar em ressonância, por meio da confrontação das frequências naturais do sistema e a de um determinado carregamento, variável no tempo.

Devido à falta da força externa  $p(t)$ , o equilíbrio é dado somente pelas forças internas e o sistema está sob vibrações livres, demonstrado pela equação:

$$kv(t) + m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) = 0 \quad (2.6)$$

A resposta em vibrações livres que é obtida como a solução da Eq. (2.6) pode ser expressa da seguinte forma:

$$v(t) = He^{st} \quad (2.7)$$

onde  $H$  é a amplitude arbitrária do deslocamento  $v(t)$  e o valor de  $s$  depende do parâmetro de amortecimento  $c$ .

Ao derivar a expressão da resposta em vibração livre, a Eq. (2.7) é substituída na Eq. (2.6), resultando na equação:

$$(k + ms^2 + cs)He^{st} = 0 \quad (2.8)$$

Como  $v(t) = He^{st} \neq 0$ , se tem que  $k + ms^2 + cs = 0$ .

Ao se incorporar os conceitos das formulações de frequência circular natural  $\omega$ , fator de amortecimento viscoso  $\xi$  e o coeficiente de amortecimento crítico  $c_{cr}$ , a Eq. (2.8) se transforma na equação característica, como segue abaixo:

$$\omega^2 + s^2 + 2\xi\omega s = 0 \quad (2.9)$$

onde:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.10)$$

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}} \quad (2.11)$$

$$c_{cr} = 2m\omega \quad (2.12)$$

Além disso, são incluídos os conceitos de frequência natural de vibração  $f_n$  e o seu inverso, período natural de vibração  $T$ , como é mostrado a seguir:

$$f_n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} \quad (2.13)$$

A elaboração da equação característica, Eq. (2.9), é feita em duas condições, sendo elas quando  $\xi = 0$ , onde não há amortecimento, e quando  $\xi \neq 0$ , onde há amortecimento no sistema. No caso de sistema amortecido, se admite que a equação apresente três respostas diferentes, devido ao coeficiente de amortecimento  $c$ , descrito pelas relações  $\xi < 1$  (amortecimento subcrítico),  $\xi = 1$  (amortecimento crítico),  $\xi > 1$  (amortecimento supercrítico).

As construções civis apresentam valores do fator de amortecimento  $\xi$  normalmente abaixo dos 5,0%, desta maneira, o comportamento dinâmico de estruturas faz parte da categoria de sistemas com amortecimento subcrítico.

A Figura 2.3 demonstra o padrão da resposta no domínio do tempo para as diferentes condições de amortecimento.

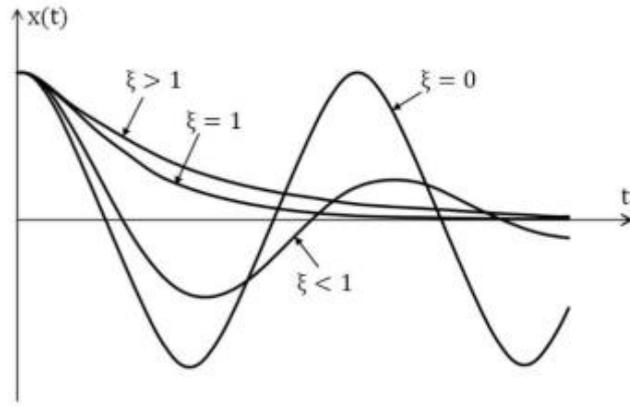


Figura 2.3 - Resposta no domínio do tempo de um sistema de 1 GDL para diferentes fatores de amortecimento (MEIROVITCH, 1986)

Se o amortecimento está presente no sistema, a solução da Eq. (2.9) que define a resposta é:

$$s = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega^2} = -\xi\omega \pm i\omega_D \quad (2.14)$$

onde  $\omega_D$  representa a frequência circular amortecida, como é mostrado a seguir:

$$\omega_D = \omega\sqrt{1 - \xi^2} \quad (2.15)$$

Ao se substituir a Eq. (2.14) na Eq. (2.7), se obtém o resultado:

$$v(t) = H_1 e^{-\xi\omega t + i\omega_D t} + H_2 e^{-\xi\omega t - i\omega_D t} = e^{-\xi\omega t} (H_1 e^{i\omega_D t} + H_2 e^{-i\omega_D t}) \quad (2.16)$$

Por meio da equação de Euler, onde  $e^{-\xi\omega t} = \cos \omega_D t \pm i \sin \omega_D t$ , se obtém, a solução transiente, que representa a resposta do sistema em vibração livre, dada por

$$u(t) = e^{-\xi\omega t} (A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t) \quad (2.17)$$

onde  $A = 2H_1$  e  $B = 2H_2$ . Usando as condições iniciais  $u(0)$  e  $\dot{u}(0)$ , as constantes  $A$  e  $B$  conduzem para a expressão:

$$u(t) = e^{-\xi\omega t} \left( \left( \frac{\dot{v}(0) + v(0)\xi\omega}{\omega_D} \right) \sin \omega_D t + u(0) \cos \omega_D t \right) \quad (2.18)$$

### Cargas dinâmicas e ressonância

Quase todos modelos de sistema estrutural podem estar sujeitos a uma espécie de carregamento dinâmico durante sua vida útil. De um ponto de vista analítico, é conveniente classificar tais cargas em dois tipos, periódicas e não-periódicas. Alguns típicos exemplos de carregamentos e de situações em que tais forças podem ser conduzidas são mostrados na Fig. 2.4.

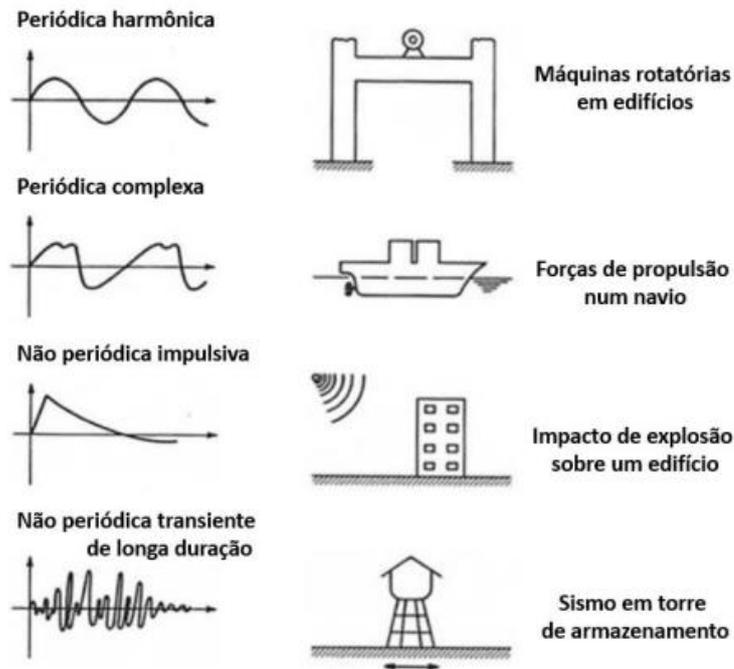


Figura 2.4 - Ações dinâmicas típicas sobre estruturas (adaptada de CLOUGH; PENZIEN, 1995)

Como é demonstrado na Fig. 2.4, uma carga periódica mostra uma mesma variação de amplitude em relação ao tempo, por muitos ciclos. Por meio da análise de Fourier qualquer carregamento periódico pode ser representado como somatório das séries dos componentes harmônicos simples, desta maneira, a análise da resposta a qualquer carregamento periódico segue o mesmo procedimento geral. As cargas não periódicas podem ser cargas impulsivas de curta duração ou cargas gerais de longa duração.

Para introduzir o conceito de ressonância, é considerado o carregamento harmônico definido pela equação:

$$p(t) = p_0 \text{ sen } \bar{\omega} t \quad (2.19)$$

onde  $p_0$  é a amplitude do carregamento e  $\bar{\omega}$  é a frequência de excitação.

Ao substituir a Eq. (2.19) na Eq. (2.5), é definida a solução da equação de movimento por

$$v(t) = v_c(t) + v_p(t) \quad (2.20)$$

onde  $v_c(t)$  é a solução transiente (Eq. 2.17) e  $v_p(t)$  é a solução estacionária, dada pela equação:

$$v_c(t) = H_1 \text{sen } \bar{\omega}t + H_2 \text{cos } \bar{\omega}t \quad (2.21)$$

na qual

$$H_1 = \frac{p_0}{k} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2} \quad (2.22)$$

$$H_2 = \frac{p_0}{k} \frac{-2\xi\beta}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2} \quad (2.23)$$

$$\beta \equiv \frac{\bar{\omega}}{\omega_D} \quad (2.24)$$

A relação entre a resposta dinâmica e a estática é chamada de fator de amplificação dinâmica (FAD), dado pela equação:

$$FAD \equiv \frac{\rho}{\frac{p_0}{k}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}} \quad (2.25)$$

onde  $\rho$  é a amplitude da resposta dinâmica, dada pela equação:

$$\rho = \frac{p_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}} \quad (2.26)$$

O FAD varia com a razão  $\beta$  e o fator de amortecimento  $\xi$ , como mostra a Fig. 2.5.

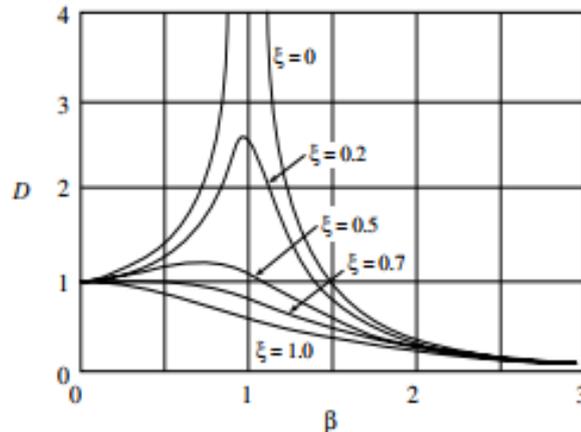


Figura 2.5 - Variação do fator de amplificação dinâmica com  $\beta$  e  $\xi$  (CLOUGH; PENZIEN, 1995)

O fenômeno da ressonância ocorre quando a frequência de excitação  $\bar{\omega}$  tem valores próximos da frequência natural de vibração do sistema  $\omega_D$ , tendo como resultado altos valores do FAD. Tal amplificação é minorada pelo efeito do amortecimento, mesmo assim, a resposta dinâmica é capaz de ultrapassar a resposta estática.

### 2.1.2. Sistema de múltiplos graus de liberdade (N GDL)

Neste item irá se considerar o modelo tridimensional de uma estrutura, discretizada em  $n$  nós. Para cada nó, estão associados 6 GDL, sendo três translações e três rotações, sendo assim, o sistema possui  $N = 6n$  graus de liberdade.

O sistema de  $N$  GDL está relacionado a  $N$  frequências naturais e configurações de deformação, denominadas modos de vibração, em função de cada grau de liberdade.

A equação de movimento para o sistema de  $N$  GDL obedece aos mesmos princípios da equação de movimento definida para o sistema de 1 GDL podendo ser escrita na forma matricial, como mostra a equação:

$$KV + M\dot{V} + C\ddot{V} = P(t) \quad (2.27)$$

onde  $m$ ,  $c$  e  $k$  são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez da estrutura, respectivamente,  $\ddot{V}$ ,  $\dot{V}$  e  $V$  são vetores de aceleração, velocidade e deslocamento dos nós, respectivamente.  $P(t)$  é o vetor de força dos nós.

Por meio da Eq. (2.15), se conclui que as frequências naturais de um sistema de baixo amortecimento demonstram uma boa aproximação das frequências naturais não amortecidas, chegando a seguinte dedução:

$$KV + M\dot{V} = 0 \quad (2.28)$$

A solução da Eq. (2.28) possui a forma

$$V = \lambda e^{\pm i\omega t} \quad (2.29)$$

onde  $\lambda$  é o vetor coluna que representa a amplitude do movimento. Após derivar duas vezes a Eq. 2.29, se obtém a equação:

$$\ddot{V} = -\omega^2 V \quad (2.30)$$

Ao substituir as equações Eq. (2.30) e Eq. (2.29) na Eq. (2.28), se obtém o seguinte resultado:

$$[K - \omega^2 M]\bar{V} = 0 \quad (2.31)$$

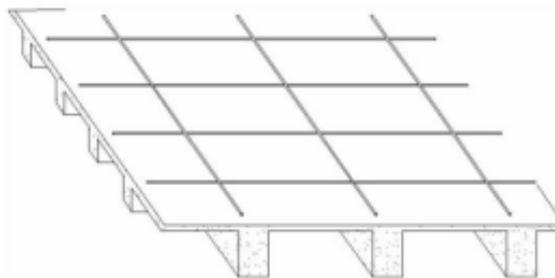
Como  $\lambda = 0$  é uma solução trivial, surge a expressão:

$$|K - \omega^2 M| = 0 \quad (2.32)$$

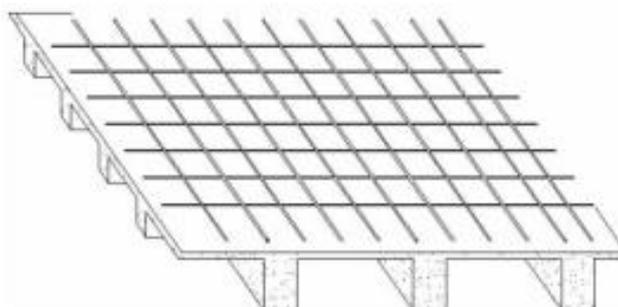
A expansão do determinante da Eq. (2.32) irá originar um polinômio de grau  $N$ , chegando a um problema de autovalores, no qual as raízes são as frequências naturais  $\omega_j$ , autovalores, para cada modo de vibração  $j$ . Ao aplicar tais valores na Eq. (2.31), são determinados os autovetores  $\bar{V}_j$ , os quais representam a amplitude dos deslocamentos nodais para cada um dos modos de vibração relacionados com as frequências.

## 2.2. Analogia de grelha

De acordo com Hambly (1976), a analogia de grelha é provavelmente o método computacional mais utilizado para análise de tabuleiros de pontes, devido a sua fácil compreensão e aplicação, e tem provado ser confiável e precisa para uma ampla variedade de pontes. Este método simula o tabuleiro de uma ponte por meio de uma grelha equivalente, na qual assume-se que as rigidezes de torção e flexão, espalhadas por toda a região da superestrutura, são concentradas na barra de grelha equivalente mais próxima. Desta maneira, a barra de grelha irá incorporar as propriedades de um trecho de viga. As Figuras 2.6 e 2.7 demonstram tal técnica.



**Figura 2.6 - Barras de grelha das vigas (AMORIN et al., 2012)**



**Figura 2.7 - Inclusão das barras de grelha de laje à malha disposta pelas barras das vigas (AMORIN et al., 2012)**

Idealmente, a rigidez da viga deve ser tal que quando a superestrutura e a grelha equivalente são submetidas a cargas idênticas, as duas estruturas devem se flexionar identicamente e os momentos, forças de cisalhamento e torções em qualquer barra da grelha devem ser iguais aos resultantes de tensões na seção transversal da parte da superestrutura que a barra representa (HAMBLY, 1976).

Todavia, por ser uma aproximação da estrutura real devido a uma simplificação, os cálculos são aproximados, e não exatos como idealiza o método. Contudo, para tabuleiros com laje e vigas o método da analogia de grelha é altamente recomendado, já que a união das vigas forma uma grelha de sustentação, fazendo com que os resultados desta técnica alcancem valores muito próximos dos reais (AMORIM et al., 2012).

Em uma estrutura de uma grelha, todos os elementos e nós existem no mesmo plano e se considera que os elementos estão conectados nos pontos nodais. O elemento de grelha possui seis graus de liberdade (três por nó) como mostra a Fig. 2.8, sendo estes o deslocamento vertical, o giro em torno do eixo do elemento e o giro numa direção ortogonal aos outros dois graus de liberdade. O carregamento atuante na grelha é principalmente ortogonal ao seu plano (AMORIM et al., 2012).

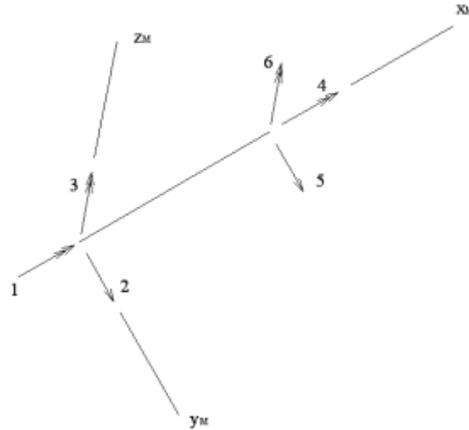


Figura 2.8 - Elemento de Barra de Grelha para Eixos do Elemento (AMORIM et al., 2012)

### 2.3. Método de Fauchart

O método de Fauchart possibilita transformar um modelo bidimensional em um unidimensional, por meio da consideração da rigidez das longarinas com base na utilização de molas (FONTANA, 2016).

Segundo Heinen (2016), o método de Fauchart é utilizado em tabuleiros de várias longarinas sem transversinas intermediárias. As vigas longitudinais devem ser biapoiadas, possuir inércia constante e trabalharem conforme a Resistência dos Materiais. Neste método o trabalho longitudinal da laje é desprezado.

Fauchart sugere o cálculo de uma estrutura plana que equivale a um metro de largura da seção transversal da laje. As vigas são trocadas por molas que exercem resistência ao deslocamento vertical e à rotação. As constantes das molas são obtidas por meio da aplicação da teoria de Euler-Bernoulli para vigas e a sua resolução é dada pelas séries de Fourier, resultando nas equações:

$$k_v = \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 EI \quad (2.33)$$

$$k_t = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 GJ \quad (2.34)$$

onde  $L$  é o comprimento do vão em m,  $I$  é inércia da seção da viga em  $m^4$ ,  $J$  é a constante de torção da viga em  $m^4$ ,  $E$  é o módulo de elasticidade secante do material que compõe a viga em MPa,  $G$  é o módulo de elasticidade transversal do material que compõe a viga em MPa,  $k_v$  é o coeficiente da mola vertical em kN/m e  $k_t$  é o coeficiente da mola transversal em kN.m/rad (STUCCHI, 2009).

Para desenvolver as linhas de influência que representam as cargas nas vigas, e obter as solicitações na laje de ligação, se resolve a viga sobre apoios elásticos (Fig. 2.9) para várias posições de uma carga unitária (HEINEN, 2016).

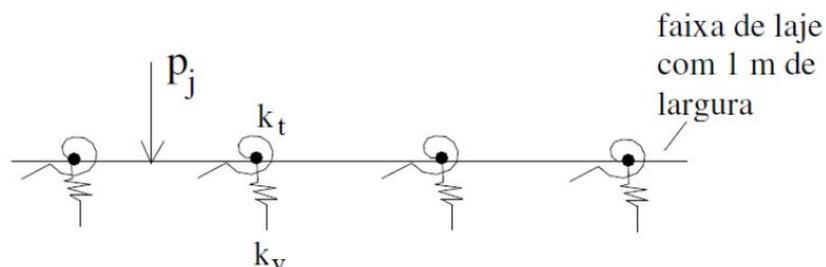


Figura 2.9 - Esquema estrutural transversal para uma faixa unitária (adaptado de STUCCHI, 2009)

## 2.4. Método dos Elementos Finitos (MEF)

O método dos elementos finitos é muito utilizado na análise de engenharia. O procedimento é empregado extensivamente na análise de sólidos, estruturas, transferência de calor e fluidos, de fato, o método dos elementos finitos é útil em praticamente todo o campo da análise de engenharia (BATHE, 1984).

De acordo com Burnett (1988), para se resolver um problema por meio do MEF, é essencial determinar quatro conceitos, sendo eles o sistema, domínio, equações que regem o sistema e condições de carregamento.

O sistema é, geralmente, um objeto físico composto de um ou mais materiais, onde esses podem ser simples ou complexos dependendo do número de materiais envolvidos. O domínio é tradicionalmente a região do espaço preenchido pelo sistema, podendo também ser o intervalo de tempo no momento em que as alterações no sistema ocorrem, sendo, geralmente, variáveis matemáticas de espaço e/ou tempo. As equações que governam um problema podem ser diferenciais ou integrais que são modificadas para equações algébricas. As condições de carregamento são de origem externa, na qual podem ser forças, temperaturas, correntes, campos, e outros, que interatuam com o sistema, provocando a alteração do sistema.

O conceito do método dos elementos finitos consiste em dividir a estrutura em diversas partes ou elementos de dimensões finitas, conectados entre si em pontos nodais, onde estão centradas todas as forças de ligação entre os elementos. Segundo Lotti (2006), os elementos são descritos por equações diferenciais. Como nos nós estão discretizadas as solicitações e deformações, o comportamento elástico e mecânico de cada elemento pode ser representado por expressões matemáticas simples. De acordo com Moreira (1977), a estrutura composta por esses elementos finitos dá lugar a sistemas de equações lineares tratadas por métodos matriciais.

Os elementos finitos podem ser planos, como triângulos ou quadriláteros, ou, espaciais como tetraedros e hexaedros, de acordo com a Fig. 2.10, e estes passam a fazer contato entre si nos nós, de acordo com a Fig. 2.11. As forças e os deslocamentos nos pontos nodais não correspondem a forças e deslocamentos existentes, ou seja, são fictícios e seus valores são adquiridos pela compatibilização da energia de deformação. A solução do sistema é aproximada, mas converge para a solução exata ao se aumentar o número de elementos da malha de elementos finitos (MOREIRA, 1977).

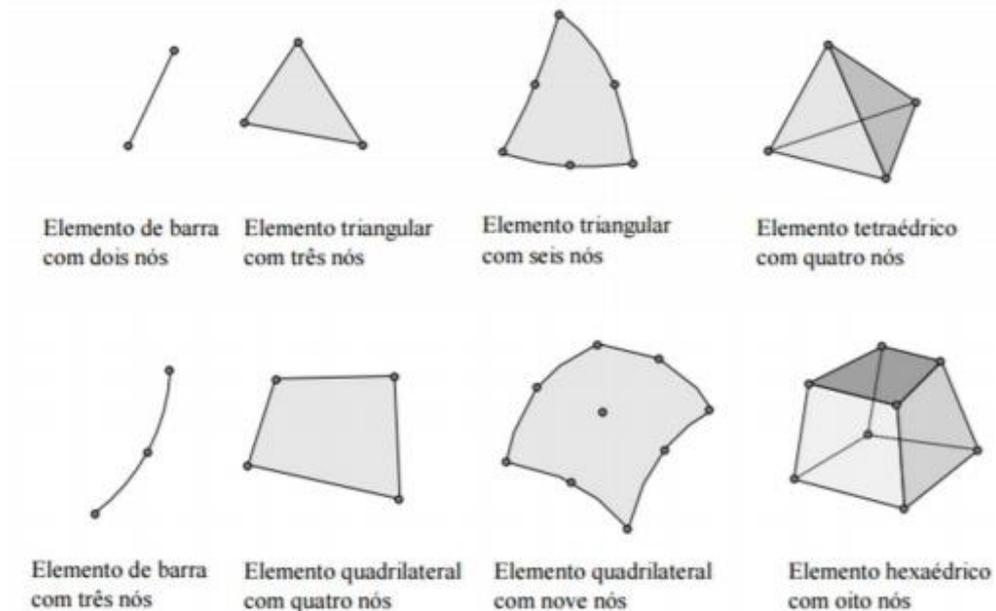


Figura 2.10 - Diferentes tipos de elementos finitos (SOUZA, 2003)

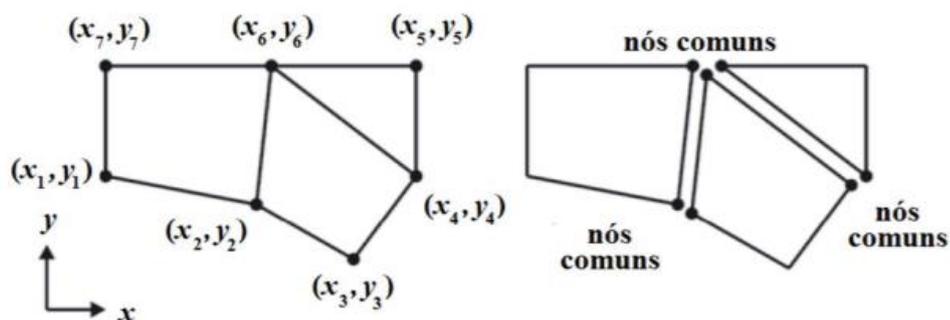


Figura 2.11 - Elementos conectados por pontos nodais (adaptado de MADENCI; GUVEN, 2006)

Para Madenci e Guven (2006), cada nó está especificando a localização da coordenada no espaço onde existem os graus de liberdade e as ações do problema físico. Os graus de liberdade são definidos pela natureza física do problema e o tipo de elemento empregado. Cada elemento, identificado por um número de elemento, é definido por uma específica sequência de número de nós.

A análise por meio do MEF deve seguir determinados passos:

- Discretização do domínio em um número finito de elementos (subdomínios), como mostrado na Fig. 2.12;
- Seleção da função de interpolação
- Desenvolvimento da matriz elemento para o subdomínio;
- Construção das matrizes de elementos para cada subdomínio para obter a matriz global de todo o domínio;
- Determinação das condições de contorno e iniciais;
- Solução das equações.

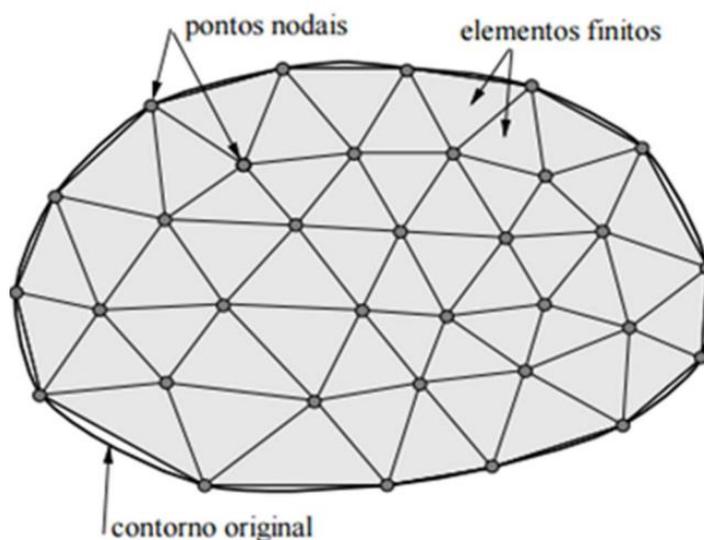


Figura 2.12 - Malha de elementos finitos para um problema plano (SOUZA, 2003)

#### 2.4.1. Abordagem direta

Apesar da abordagem direta ser mais adequada para problemas simples, esta envolve cada etapa fundamental de uma típica análise de elementos finitos (MADENCI; GUVEN, 2006). Sendo assim, essa abordagem pode ser demonstrada considerando um sistema de mola linear em um domínio unidimensional.

Uma mola linear  $k$  possui dois nós e cada um deles está submetido a forças axiais  $f_1$  e  $f_2$  resultando nos deslocamentos  $u_1$  e  $u_2$  em suas definidas posições positivas, demonstrado pela Fig. 2.13.

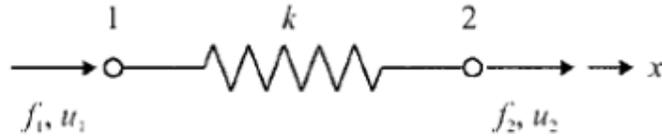


Figura 2.13 – Digrama de corpo-livre de um elemento de mola linear (MADENCI; GUVEN, 2006)

Submetida a essas forças nodais, a resultante do deslocamento da mola é dada por:

$$u = u_1 - u_2 \quad (2.35)$$

que está relacionada com a força que está agindo sobre a mola por:

$$f_1 = ku = k(u_1 - u_2) \quad (2.36)$$

O equilíbrio das forças requer que

$$f_2 = -f_1 \quad (2.37)$$

gerando:

$$f_2 = k(u_2 - u_1) \quad (2.38)$$

Combinando as equações Eq. (2.36) e Eq. (2.38) e reescrevendo a equação resultante na forma matricial resulta em

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \text{ ou } k^{(e)}u^{(e)} = f^{(e)} \quad (2.39)$$

em que  $u^{(e)}$  é o vetor das incógnitas nodais representando o deslocamento e  $k^{(e)}$  e  $f^{(e)}$  são a matriz de rigidez e o vetor de forças do elemento, respectivamente. O índice  $(e)$  indica o número do elemento.

A matriz de rigidez pode ser expressa na forma de índices, como por exemplo  $k_{ij}^{(e)}$ , onde  $i$  e  $j$  são o número da linha e da coluna. Os coeficientes  $(k_{ij}^{(e)})$  podem ser interpretados como sendo a força

requerida no nó  $i$  para produzir um deslocamento unitário no nó  $j$  enquanto todos os outros nós estão fixos.

### 2.4.2. Montagem do Sistema Global de Equações

A modelagem de um problema de engenharia com elementos finitos requer a montagem da matriz de rigidez e do vetor de forças da estrutura, conduzindo ao sistema global de equações:

$$Ku = F \quad (2.40)$$

em que  $K$  é o conjunto de matrizes de rigidez característica do elemento, atribuída como a matriz do sistema global,  $u$  é o vetor de incógnitas nodais e  $F$  é o conjunto de vetores de força do elemento atribuído como o vetor de força global.

A matriz de rigidez do sistema global ( $K$ ) pode ser obtida pela expansão da matriz de rigidez do elemento ( $k^{(e)}$ ), por meio do somatório:

$$K = \sum_{e=1}^E k^{(e)} \quad (2.41)$$

em que o parâmetro  $E$  indica o número total de elementos. As matrizes de rigidez do elemento expandido são do mesmo tamanho que a matriz do sistema global, mas possuem linhas e colunas de zeros correspondentes aos graus de liberdade não associados ao elemento ( $e$ ). O tamanho da matriz do sistema global é ditado pelo número mais alto entre os números de nós globais.

Da mesma maneira, o vetor de força global ( $F$ ) pode ser obtido pela expansão do vetor de forças do elemento ( $f^{(e)}$ ), por meio do somatório:

$$F = \sum_{e=1}^E f^{(e)} \quad (2.42)$$

Os vetores expandidos de força são do mesmo tamanho que o vetor de força global, mas possuem linhas de zeros correspondentes aos nós não associados ao elemento ( $e$ ). O tamanho do vetor de força global também é determinado pelo número mais elevado entre os números de nós globais.

Os passos da construção da matriz do sistema global e do vetor de forças global são explicados considerando o sistema de molas lineares mostrado na Fig. 2.14. Associado ao elemento ( $e$ ), as equações do elemento para uma mola dada pela Eq. (2.41) são reescritas como

$$\begin{bmatrix} k_{11}^{(e)} & k_{12}^{(e)} \\ k_{21}^{(e)} & k_{22}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(e)} \\ f_2^{(e)} \end{Bmatrix} \quad (2.43)$$

em que  $k_{11}^{(e)} = k_{22}^{(e)} = k^{(e)}$  e  $k_{12}^{(e)} = k_{21}^{(e)} = -k^{(e)}$ . Os índices usados na Eq. (2.43) correspondem ao nó 1 e ao nó 2, os números dos nós locais do elemento ( $e$ ). Os números de nós globais que especificam a conectividade entre os elementos para este sistema de molas são mostrados na Fig. 2.14, e as informações de conectividade são tabuladas na Tab. 2.1.

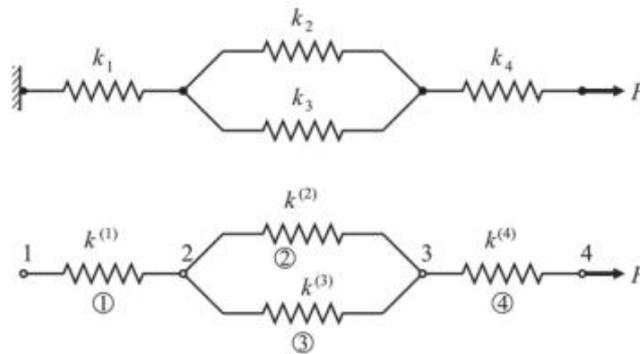


Figura 2.14 – Sistema de molas lineares e o correspondente modelo MEF (MADENCI; GUVEN, 2006)

Tabela 2.1 – Tabela da conectividade

Número do elemento	Numeração de nós local	Numeração de nós global
1	1	1
	2	2
2	1	2
	2	3
3	1	2
	2	3
4	1	3
	2	4

De acordo com a Eq. (2.41), o tamanho da matriz do sistema global é (4x4) e a contribuição específica de cada elemento é definida como:

$$\text{Elemento 1:} \quad \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \equiv k^{(1)} \quad (2.44)$$

$$\text{Elemento 2:} \quad \begin{matrix} 2 & 3 \\ \left[ \begin{matrix} k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} \\ k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} \end{matrix} \right] \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \left[ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} & 0 \\ 0 & k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right] \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \equiv k^{(2)} \quad (2.45)$$

$$\text{Elemento 3:} \quad \begin{matrix} 2 & 3 \\ \left[ \begin{matrix} k_{11}^{(3)} & k_{12}^{(3)} \\ k_{21}^{(3)} & k_{22}^{(3)} \end{matrix} \right] \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \left[ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{11}^{(3)} & k_{12}^{(3)} & 0 \\ 0 & k_{21}^{(3)} & k_{22}^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right] \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \equiv k^{(3)} \quad (2.46)$$

$$\text{Elemento 4:} \quad \begin{matrix} 3 & 4 \\ \left[ \begin{matrix} k_{11}^{(4)} & k_{12}^{(4)} \\ k_{21}^{(4)} & k_{22}^{(4)} \end{matrix} \right] \end{matrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \left[ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{11}^{(4)} & k_{12}^{(4)} \\ 0 & 0 & k_{21}^{(4)} & k_{22}^{(4)} \end{matrix} \right] \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \equiv k^{(4)} \quad (2.47)$$

A realização de sua montagem leva a:

$$K = \sum_{e=1}^4 k^{(e)} = k^{(1)} + k^{(2)} + k^{(3)} + k^{(4)} \quad (2.48)$$

ou

$$K = \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ k_{21}^{(1)} & (k_{22}^{(1)} + k_{11}^{(2)} + k_{11}^{(3)}) & (k_{12}^{(2)} + k_{12}^{(3)}) & 0 \\ 0 & (k_{21}^{(2)} + k_{21}^{(3)}) & (k_{22}^{(2)} + k_{22}^{(3)} + k_{11}^{(4)}) & k_{12}^{(4)} \\ 0 & 0 & k_{21}^{(4)} & k_{22}^{(4)} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

De acordo com a Eq. (2.42), o tamanho do vetor global do lado direito é (4x1) e a contribuição específica de cada elemento é definida como:

$$\text{Elemento 1:} \quad \left\{ \begin{matrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \end{matrix} \right\} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \equiv f^1 \quad (2.50)$$

$$\text{Elemento 2:} \quad \begin{Bmatrix} f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \end{Bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 0 \\ f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \equiv f^2 \quad (2.51)$$

$$\text{Elemento 3:} \quad \begin{Bmatrix} f_1^{(3)} \\ f_2^{(3)} \end{Bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 0 \\ f_1^{(3)} \\ f_2^{(3)} \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \equiv f^3 \quad (2.52)$$

$$\text{Elemento 4:} \quad \begin{Bmatrix} f_1^{(4)} \\ f_2^{(4)} \end{Bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_1^{(4)} \\ f_2^{(4)} \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \equiv f^4 \quad (2.53)$$

Da mesma forma, a realização de sua montagem leva a:

$$F = \sum_{e=1}^4 f^{(e)} = f^{(1)} + f^{(2)} + f^{(3)} + f^{(4)} \quad (2.54)$$

De acordo com a montagem da matriz do sistema global e do vetor de forças global, o vetor de incógnitas ( $u$ ) se torna:

$$u = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} = u_1^{(2)} = u_1^{(3)} \\ u_2^{(2)} = u_2^{(3)} = u_1^{(4)} \\ u_2^{(4)} \end{Bmatrix} \quad (2.54)$$

### 2.4.3. Solução do sistema global de equações

Para que o sistema global de equações tenha uma solução única, o determinante da matriz do sistema global deve ser diferente de zero. Entretanto, ao examinar a matriz do sistema global é revelado que um dos seus autovalores é zero, no que resulta em uma matriz de determinante igual a zero (singular). Portanto, a solução não é única. O autovetor correspondente ao autovalor zero representa o modo de translação, e os autovalores não nulos remanescentes representam todos os modos de deformação.

Para os valores específicos de  $k_{11}^{(e)} = k_{22}^{(e)} = k^{(e)}$  e  $k_{12}^{(e)} = k_{21}^{(e)} = -k^{(e)}$ , a matriz do sistema global se torna

$$K = k^{(e)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

com seus autovalores  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\lambda_3 = 3 - \sqrt{5}$  e  $\lambda_4 = 3 + \sqrt{5}$ . Os autovetores correspondentes são

$$u^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

$$u^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

$$u^{(3)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 - \sqrt{5} \\ -2 + \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

$$u^{(4)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 + \sqrt{5} \\ -2 - \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

sendo cada um desses autovetores a representação de um possível modo de solução. A contribuição de cada modo de solução é ilustrada na Fig. 2.15.

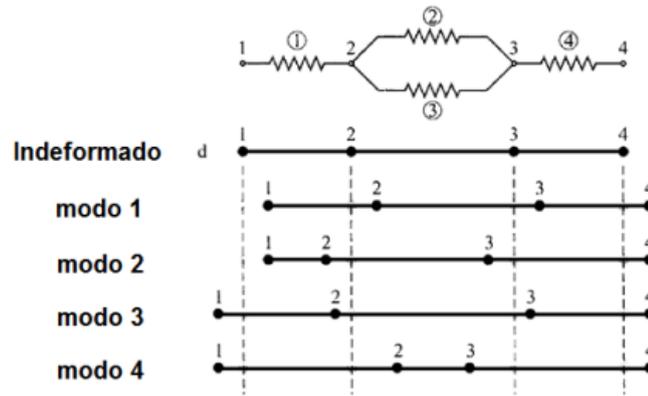


Figura 2.15 - Possíveis modos de solução para o sistema de molas lineares (adaptado de MADENCI; GUVEN, 2006)

Para que o sistema global de equações tenha uma solução única, a matriz do sistema global é tornada não singular, eliminando o autovalor zero. Isto é conseguido introduzindo uma condição de contorno de modo a suprimir o modo de translação da solução correspondente ao autovalor zero.

#### 2.4.4. Condições de contorno

Como é mostrado na Fig. 2.14, o Nó 1 está com seu deslocamento impedido. Esta restrição é satisfeita pela imposição da condição de contorno  $u_1 = 0$ . Os deslocamentos nodais ( $u_i$ ) ou as forças nodais ( $f_i$ ) podem ser especificados em um determinado nó. É fisicamente impossível especificar ambos como conhecidos ou desconhecidos. Portanto, a força nodal  $f_1$  permanece como uma das incógnitas. Os deslocamentos nodais  $u_2$ ,  $u_3$  e  $u_4$  são tratados como desconhecidos, e as forças nodais correspondentes têm valores de  $f_2 = 0$ ,  $f_3 = 0$  e  $f_4 = F$

Estes valores especificados são introduzidos no sistema global de equações como

$$k^{(e)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 = 0 \\ f_3 = 0 \\ f_4 = F \end{Bmatrix} \quad (2.59)$$

levando às seguintes equações

$$k^{(e)} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{Bmatrix} \quad (2.60)$$

$$-k^{(e)}u_2 = f_1 \quad (2.61)$$

A matriz dos coeficientes na Eq. (2.59) não é mais singular, e as soluções para estas equações são obtidas como

$$u_2 = \frac{F}{k^{(e)}} \quad (2.62)$$

$$u_3 = \frac{3}{2} \frac{F}{k^{(e)}} \quad (2.63)$$

$$u_4 = \frac{5}{2} \frac{F}{k^{(e)}} \quad (2.64)$$

e a força nodal desconhecida  $f_1$  é determinada como  $f_1 = -F$ . O modelo final de solução fisicamente aceitável é mostrado na Fig. 2.16.

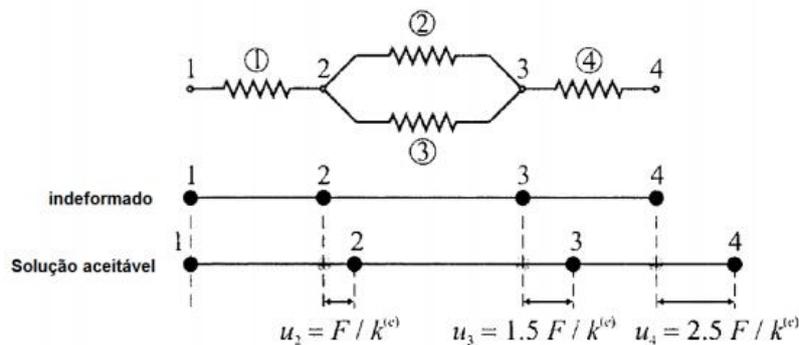


Figura 2.16 - Modelo de solução fisicamente aceitável para o sistema de molas lineares (adaptado de MADENCI; GUVEN, 2006)

#### 2.4.5. Método dos elementos finitos para análise de vibrações

A análise de vibrações tem como objetivo a determinação das respostas da estrutura a excitações que variam com o tempo, como por exemplo cargas dinâmicas, entre outras. Sendo assim, será apresentado nos itens a seguir o método dos elementos finitos para análise de vibrações, abordando a discretização da equação de movimento, consideração sobre o amortecimento, método de análise modal e método de integração direta, com base nas formulações apresentadas por Fonseca (2008), Meireles (2008) e Arruda (2008).

### **Discretização das equações de movimento**

Ao se utilizar o princípio dos trabalhos virtuais, é possível a determinação das equações de movimento para elementos finitos. Para a demonstração a seguir serão considerados somente os deslocamentos translacionais em um elemento finito tridimensional, sem a perda de generalidade e sem amortecimento.

É definido como  $u(t)$  o vetor de deslocamentos genéricos dependente do tempo em qualquer ponto do elemento, onde  $u$ ,  $v$  e  $w$  são as translações nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente. O vetor  $u(t)$  é definido pela expressão:

$$u(t) = [u \quad v \quad w]^T \quad (2.65)$$

Caso o elemento esteja sujeito a forças de massa, as quais também são variáveis ao longo do tempo, é definido como o vetor dessas forças  $b(t)$ , dado pela equação:

$$b(t) = [b_x \quad b_y \quad b_z]^T \quad (2.66)$$

O vetor de deslocamentos nodais variáveis ao longo do tempo  $d(t)$ , que considera somente as translações, é definido pela equação

$$d(t) = [d_i(t)] \quad (2.67)$$

na qual  $i$  varia de 1 até o número de nós do elemento  $e$ .

Da mesma maneira, as ações nodais que variam ao longo do tempo,  $p(t)$ , também levam em consideração somente as direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  nos nós. O vetor  $p(t)$  é definido pela equação

$$p(t) = [p_i(t)] \quad (2.68)$$

onde

$$p_i(t) = [p_{xi} \quad p_{yi} \quad p_{zi}]^T \quad (2.69)$$

Sendo  $N$  a matriz das funções de interpolação, a relação entre os deslocamentos nodais e os deslocamentos genéricos é dada pela equação a seguir.

$$u(t) = N d(t) \quad (2.70)$$

As relações entre deformações e deslocamentos,  $\varepsilon(t)$ , são obtidas por meio da derivação dos deslocamentos genéricos  $u(t)$ . Ao definir  $D$  como o operador de derivação, é possível estabelecer a relação:

$$\varepsilon(t) = D u(t) \quad (2.71)$$

Ao substituir a Eq. (2.70) na Eq. (2.71), se obtém

$$\varepsilon(t) = B d(t) \quad (2.72)$$

na qual

$$B = D N \quad (2.73)$$

Ao se considerar o material elástico linear, a relação entre a tensão e deformação,  $\sigma(t)$ , é dada pela equação

$$\sigma(t) = E \varepsilon(t) \quad (2.74)$$

na qual  $E$  é a matriz das propriedades elásticas do material.

Ao substituir a Eq. (2.72) na Eq. (2.74), se obtém:

$$\sigma(t) = E B d(t) \quad (2.75)$$

De acordo com Weaver Jr. e Johnston (1987), o princípio de trabalho virtual diz que caso uma estrutura, que esteja em equilíbrio dinâmico, sofra deslocamentos virtuais pequenos com um estado de deformação compatível, o trabalho virtual das forças externas será igual ao trabalho virtual das tensões internas.

Aplicando o princípio de trabalhos virtuais a um elemento finito, se obtém

$$\delta U_e = \delta W_e \quad (2.76)$$

onde  $\delta U_e$  é a energia de deformação virtual das tensões internas e  $\delta W_e$  é o trabalho virtual das forças externas sobre o elemento.

O vetor de pequenos deslocamentos virtuais  $\delta d$  é definido como:

$$\delta d = [\delta d_i]^T \quad (2.77)$$

Por meio da Eq. (2.70) e Eq. (2.72), se conclui que o vetor dos deslocamentos genéricos virtuais é dado por

$$\delta u = N \delta d \quad (2.78)$$

e o vetor da deformações-deslocamentos virtuais é dado por

$$\delta \varepsilon = B \delta d \quad (2.79)$$

Desta maneira, a energia de deformação virtual das tensões internas ( $\delta U_e$ ) pode ser definida como:

$$\delta U_e = \int_V \delta \varepsilon^T \sigma(t) dV \quad (2.80)$$

Para determinar o trabalho virtual externo, se considera um elemento infinitesimal onde são aplicadas as forças de corpo  $b_x(t) dV$ ,  $b_y(t) dV$  e  $b_z(t) dV$ , como mostra a Fig. 2.17.

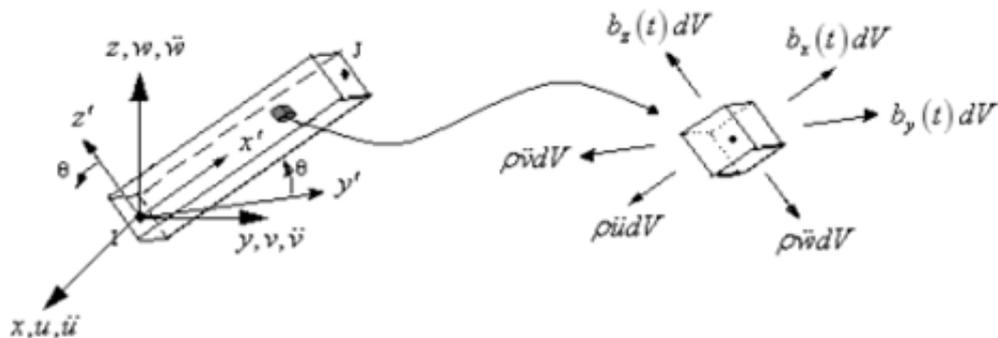


Figura 2.17 - Forças de corpo aplicadas e inerciais (MEIRELES, 2008)

É de grande importância destacar o surgimento das forças de corpo inerciais  $\rho \ddot{u} dV$ ,  $\rho \ddot{v} dV$  e  $\rho \ddot{w} dV$ , onde  $\rho$  é a densidade do material. Estas forças aparecem devido às acelerações  $\ddot{u}$ ,  $\ddot{v}$  e  $\ddot{w}$ , respectivamente. As forças inerciais atuam em sentidos contrários às suas respectivas acelerações. Sendo assim, é possível calcular o trabalho virtual externo ( $\delta W_e$ ) como a soma dos trabalhos virtuais das forças de corpo e das forças nodais, resultando na expressão:

$$\delta W_e = \delta d^T p(t) + \int_V \delta u^T b(t) dV - \int_V \delta u^T \rho \ddot{u} dV \quad (2.81)$$

Ao substituir a Eq. (2.80) e Eq. (2.81) na Eq. (2.76), se obtém:

$$\int_V \delta \varepsilon^T \sigma(t) dV = \delta d^T p(t) + \int_V \delta u^T b(t) dV - \int_V \delta u^T \rho \ddot{u} dV \quad (2.82)$$

Ao assumir que

$$\ddot{u} = N \ddot{d} \quad (2.83)$$

e ao substituir as Eq. (2.75) e Eq. (2.83) na Eq. (2.82) e utilizando as transpostas das Eq. (2.78) e Eq. (2.79), resulta em:

$$\delta d^T \int_V B^T E B dV d = \delta d^T p(T) + \delta d^T \int_V N^T b(t) dV - \delta d^T \int_V \rho N^T N dV \ddot{d} \quad (2.84)$$

ou

$$\delta d^T \left( \int_V B^T E B dV d - p(T) - \int_V N^T b(t) dV + \int_V \rho N^T N dV \ddot{d} \right) = 0 \quad (2.85)$$

Devido a  $\delta d^T$  conter deslocamentos nodais virtuais, ou seja, arbitrários, a Eq. (2.85) é satisfeita se

$$\int_V B^T E B dV d - p(T) - \int_V N^T b(t) dV + \int_V \rho N^T N dV \ddot{d} = 0 \quad (2.86)$$

Ao reordenar a Eq. (2.86), se obtém o sistema das equações de movimento

$$M \ddot{d} + K d = p(t) + p_b(t) \quad (2.87)$$

na qual

$$K = \int_V B^T E B dV \quad (2.88)$$

$$M = \int_V \rho N^T N dV \quad (2.89)$$

$$p_b(t) = \int_V N^T b(t) dV \quad (2.90)$$

onde  $K$  é a matriz de rigidez do elemento finito,  $M$  é a matriz de massa consistente e  $p_b(t)$  é o vetor de forças nodais equivalentes às cargas de corpo.

### **Considerações sobre o amortecimento**

É de grande dificuldade identificar e descrever de forma matemática cada um dos fenômenos de dissipação de energia. Portanto, o amortecimento de um sistema estrutural é geralmente considerado de maneira idealizada e aproximada.

Genericamente, é possível dizer que as forças de dissipação  $f_d$  que atuam em um sistema são calculadas na forma

$$f_d = C \dot{d}(t) \quad (2.91)$$

onde  $C$  é a matriz de amortecimento do sistema.

Ao adicionar a Eq. (2.91) na Eq. (2.87), resulta na expressão:

$$M \ddot{d}(t) + C \dot{d}(t) + K d(t) = p(t) + p_b^*(t) \quad (2.92)$$

onde  $p_b^*(t)$  é o vetor de forças nodais equivalentes às cargas de corpo externas, sem considerar as forças de amortecimento.

### **Amortecimento de Rayleigh**

Rayleigh (1945) propõe o procedimento de construção da matriz de amortecimento linear com base na combinação linear

$$C = a_1 M + a_2 K \quad (2.93)$$

onde  $a_1$  e  $a_2$  são constantes.

A razão de amortecimento para o  $i$ -ésimo modo de vibração é dada por

$$\xi_i = \frac{a_1 + a_2 \omega_i^2}{2\omega_i} \quad (2.94)$$

na qual  $\omega_{(i)}$  é a frequência natural do  $i$ -ésimo modo de vibração.

Pode se determinar as constantes  $a_1$  e  $a_2$  por meio das razões de amortecimento  $\xi_i$  e  $\xi_j$ , respectivas do  $i$ -ésimo e  $j$ -ésimo modos de vibração, por meio do sistema de equações lineares:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1/\omega_i & \omega_i \\ 1/\omega_j & \omega_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \xi_i \\ \xi_j \end{Bmatrix} \quad (2.95)$$

Com o estabelecimento da mesma razão de amortecimento para os dois modos de vibração, as expressões das constantes tomam a forma:

$$a_1 = 2\xi \frac{\omega_i \omega_j}{\omega_i + \omega_j} \quad (2.96)$$

$$a_2 = 2\xi \frac{1}{\omega_i + \omega_j} \quad (2.97)$$

### **Métodos de Integração Direta**

Para simplificar a Eq. (2.92), se considera que a soma dos vetores de forças nodais,  $p(t)$ , e forças equivalentes às cargas de corpo,  $p_b^*(t)$ , será representado por  $F$ . Desta maneira, se tem a seguinte forma para a equação do movimento discretizada de acordo com o método dos elementos finitos:

$$M \ddot{d} + C \dot{d} + K d = F \quad (2.98)$$

Para se resolver a Eq. (2.98) é possível efetuar a uma integração ao longo do tempo, através de diversas técnicas. Estas são separadas em duas categorias, os métodos explícitos e os métodos implícitos.

Os métodos explícitos são definidos como aqueles em que os novos valores de resposta calculados em cada etapa dependem apenas das quantidades obtidas na etapa anterior, de modo que a análise prossiga diretamente de uma etapa para a próxima. Já nos métodos implícitos, por outro lado, as expressões que fornecem os novos valores para uma determinada etapa incluem um ou

mais valores pertencentes a essa mesma etapa, de modo que devem ser assumidos valores iniciais das diversas grandezas, os quais são refinados por sucessivas iterações.

Um dos métodos implícitos mais populares e que será abordado neste trabalho é o método Newmark- $\beta$ .

### **Método Newmark- $\beta$**

Ao considerar o instante de tempo  $(t + 1)$ , a Eq. (2.98) fica expressa da seguinte forma:

$$M \ddot{d}^{(t+1)} + C \dot{d}^{(t+1)} + K d^{(t+1)} = F^{(t+1)} \quad (2.99)$$

Na formulação Newmark, as equações básicas de integração para a velocidade final e deslocamento são expressas da seguinte forma:

$$d^{(t+1)} = d^{(t)} + \Delta t \dot{d}^{(t)} + \frac{\Delta t^2}{2} [(1 - 2\beta)\ddot{d}^{(t)} + 2\beta\ddot{d}^{(t+1)}] \quad (2.100)$$

$$\dot{d}^{(t+1)} = \dot{d}^{(t)} + \Delta t [(1 - \gamma)\ddot{d}^{(t)} + \gamma\ddot{d}^{(t+1)}] \quad (2.101)$$

Para simplificação das equações, se considera que:

$$\tilde{d}^{(t+1)} = d^{(t)} + \Delta t \dot{d}^{(t)} + \frac{\Delta t^2}{2} (1 - 2\beta)\ddot{d}^{(t)} \quad (2.102)$$

$$\dot{\tilde{d}}^{(t+1)} = \dot{d}^{(t)} + \Delta t (1 - \gamma)\ddot{d}^{(t)} \quad (2.103)$$

Considerando as equações Eq. (2.102) e Eq. (2.103), se é capaz de reescrever a Eq. (2.100) e Eq. (2.101) como:

$$d^{(t+1)} = \tilde{d}^{(t+1)} + \Delta t^2 \beta \ddot{d}^{(t+1)} \quad (2.104)$$

$$\dot{d}^{(t+1)} = \dot{\tilde{d}}^{(t+1)} + \gamma \Delta t \ddot{d}^{(t+1)} \quad (2.105)$$

Reformulando a equações Eq. (2.104) e Eq. (2.105), se obtém:

$$\ddot{d}^{(t+1)} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} (d^{(t+1)} - \tilde{d}^{(t+1)}) \quad (2.106)$$

$$\dot{d}^{(t+1)} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t} (d^{(t+1)} - \tilde{d}^{(t+1)}) + \dot{\tilde{d}}^{(t+1)} \quad (2.107)$$

Substituindo as equações Eq. (2.106) e Eq. (2.107) na Eq. (2.99), se obtém:

$$M \frac{1}{\beta\Delta t^2} (d^{(t+1)} - \tilde{d}^{(t+1)}) + C \frac{\gamma}{\beta\Delta t} (d^{(t+1)} - \tilde{d}^{(t+1)}) + C \dot{\tilde{d}}^{(t+1)} + K d^{(t+1)} = F^{(t+1)} \quad (2.108)$$

ou também:

$$\left( \frac{1}{\beta\Delta t^2} M + \frac{\gamma}{\beta\Delta t} C + K \right) d^{(t+1)} = \tilde{F}^{(t+1)} \quad (2.109)$$

onde:

$$\tilde{F}^{(t+1)} = F^{(t+1)} + \frac{1}{\beta\Delta t^2} M \tilde{d}^{(t+1)} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t} C \tilde{d}^{(t+1)} - C \dot{\tilde{d}}^{(t+1)} \quad (2.110)$$

Por meio da Eq. (2.109) é possível se determinar o valor dos deslocamentos nodais variáveis ao longo do tempo,  $d(t)$ , para o instante de tempo  $t + 1$ .

Os parâmetros  $\gamma$  e  $\beta$  são estabelecidos com o objetivo de influenciar na estabilidade numérica e na precisão da solução. A estabilidade completa é garantida ao se utilizar:

$$2\beta \geq \gamma \geq 1/2 \quad (2.111)$$

Para valores de  $\gamma$  maiores que  $1/2$ , é sugerido a utilização da expressão

$$\beta \geq \frac{1}{4} \left( \gamma + \frac{1}{2} \right)^2 \quad (2.112)$$

para que o método seja totalmente convergente.

De outra maneira, para que o método de Newmark- $\beta$  seja estável, é necessário que

$$\Delta t \leq \frac{T_n}{\pi\sqrt{2(\gamma-2\beta)}} \quad (2.113)$$

onde  $\Delta t$  é o passo de tempo e  $T_n$  é o menor período de vibração natural do modelo analítico.

Para os valores de  $\gamma = 1/2$  e  $\beta = 1/4$ , a Eq. 2.113 tem como resultado  $\Delta t \leq \infty$ , significando que este método é estável para estes valores.

### **Métodos de análise modal**

Ao considerar uma estrutura em vibração livre e sem forças dissipativas, se obtém o seguinte sistema de equações de movimento:

$$M \ddot{d} + K d = 0 \quad (2.114)$$

Para este sistema se assume a seguinte solução:

$$d = Y \cos(\omega t) \quad (2.115)$$

onde  $\omega$  é um escalar e  $Y$  é um vetor a ser determinado, tendo como solução a frequência harmônica  $\omega$ .

Ao substituir a Eq. (2.115) na Eq. (2.114), se obtém o seguinte problema de autovalor generalizado do sistema:

$$(-\omega^2 M + K)Y = 0 \quad (2.116)$$

Ao considerar que

$$\varpi = \omega^2 \quad (2.117)$$

e substituir na Eq. (2.116), se obtém:

$$(K - \varpi M)Y = 0 \quad (2.118)$$

Sendo  $Y = 0$  uma solução trivial, então:

$$|K - \varpi M| = 0 \quad (2.119)$$

A Eq. (2.119) é chamada de equação característica do problema e ao determinar suas raízes é constituído um problema de autovetores. Como método de solução para este problema será apresentado o Método dos Subespaços.

### **Método dos Subespaços**

O Método dos Subespaços é considerado como um dos métodos mais eficientes para a obtenção dos parâmetros modais de problemas de MEF de grandes dimensões. Este método se estabelece com estimativas arbitrárias para os modos de vibração. É possível de expressar o vetor deslocamento,  $x(t)$ , em termos de um conjunto de funções de interpolação,  $f_r$ , e de coordenadas de amplitude nodais,  $z$ , por meio de:

$$x(t) = f_{r_1} z_1 + f_{r_2} z_2 + \dots + f_{r_i} z_i = \sum_{n=1}^i f_{r_n} z_n \quad \text{ou} \quad x(t) = \Psi z \quad (2.120)$$

onde  $i$  é o número de modos de vibração.

Quanto mais próximos forem os valores dos vetores  $f_{r_n}$  dos modos de vibração  $\omega_{(i)}$  verdadeiros, melhor será a aproximação. Por meio do método dos subespaços é possível calcular iterativamente os modos de vibração  $\omega_{(i)}$  por meio das aproximações  $f_{r_n}$ .

Tal método consiste em atribuir um conjunto de vetores iterativos iniciais, no qual o número está vinculado ao número pretendido de valores próprios. Em seguida é feita a execução do processo iterativo dos subespaços, que consiste no emprego de iterações inversas simultâneas sobre os vetores iterativos iniciais, para assim obter os melhores valores e vetores no fim de cada iteração. E por fim é aplicada a verificação sequencial de Sturm no final do processo iterativo, para assim determinar se a convergência dos valores próprios é no sentido da determinação dos valores mais baixos.

Começando pelos vetores iterativos iniciais que formam a base do subespaço  $E_k$ , o processo iterativo para obter os vetores que constituem o novo subespaço  $E_{k+1}$  é dado pelo seguinte algoritmo.

Se determina  $\bar{\Psi}_{k+1}$  ao se resolver o sistema de equações

$$K \bar{\Psi}_{k+1} = M \Psi_k \quad (2.121)$$

onde  $\Psi$  é a matriz formada pelos vetores iterativos iniciais adquiridos na iteração anterior, ou seja, na iteração  $k - 1$ .

Em seguida se encontram as projeções das matrizes de rigidez e de massa no subespaço  $E_{k+1}$ :

$$\bar{K}_{k+1} = \bar{\Psi}_{k+1}^T K \bar{\Psi}_{k+1} \quad (2.122)$$

$$\bar{M}_{k+1} = \bar{\Psi}_{k+1}^T M \bar{\Psi}_{k+1} \quad (2.123)$$

Se resolve então, com as matrizes projetadas, o problema de valores e vetores próprios relacionado ao subespaço  $E_{k+1}$ :

$$\bar{K}_{k+1} Q_{k+1} = \bar{M}_{k+1} Q_{k+1} \Theta_{k+1} \quad (2.124)$$

onde as colunas de  $Q_{k+1}$  possuem os vetores do subespaço e  $\Theta_{k+1}$  é uma matriz diagonal na qual os coeficientes são os valores próprios. Se calcula uma nova aproximação para os valores próprios por meio da expressão:

$$\Psi_{k+1} = \bar{\Psi}_{k+1} Q_{k+1} \quad (2.125)$$

Desde que os vetores iterativos não sejam ortogonais a um dos vetores próprios que se pretende calcular e com  $\varpi = \omega^2$ , o método converge para os valores próprios mais baixos e para os respectivos vetores próprios.

## 2.5. ANSYS

Para a montagem dos modelos computacionais usando o MEF neste trabalho foi escolhido o software ANSYS, devido a este responder satisfatoriamente às modelagens de problemas lineares e não-lineares.

O ANSYS é um programa computacional de elementos finitos de uso geral abrangente que contém mais de 100.000 linhas de código. ANSYS é capaz de realizar análises estáticas, dinâmicas, de transferência de calor, fluxo de fluidos e eletromagnetismo (MOAVENI, 1999).

A modelagem computacional realizada por meio do software ANSYS é composta por três etapas, sendo estas o pré-processamento, solução e pós-processamento (MOAVENI, 1999).

O pré-processamento é composto por:

1. Criar e discretizar o domínio da solução em elementos finitos, isto é, subdividir o problema em nós e elementos.
2. Assumir uma função de interpolação para representar o comportamento físico de um elemento; isto é, uma função contínua aproximada é assumida para representar a solução de um elemento.
3. Desenvolver equações para um elemento.
4. Montar os elementos para representar todo o problema. Construir matriz de rigidez global.

5. Aplicar condições de contorno, condições iniciais e carga.

A etapa de solução consiste em resolver um conjunto de equações algébricas lineares ou não lineares simultaneamente para obter resultados nodais, tais como valores de deslocamentos em diferentes nós ou valores de temperatura em diferentes nós em um problema de transferência de calor.

E na etapa de pós-processamento se obtém outras informações importantes. Neste ponto, são identificados os valores de tensões principais, fluxos de calor, entre outros.

Já o elemento adotado a ser utilizado nas análises estáticas, modais e transientes no programa foi o Beam 188.

### 2.5.1. Elemento Beam 188

O elemento Beam 188 é adequado para analisar estruturas de vigas delgadas a moderadamente grossas. Este elemento é baseado na teoria de viga de Timoshenko, que é uma teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem, onde a tensão de cisalhamento transversal é constante através da seção transversal, isto é, seções transversais permanecem planas e não distorcidas após deformação. Os efeitos da deformação de cisalhamento são considerados (Ansys Stuba, 2014).

O Beam 188 é um elemento de viga linear (com dois nós) em 3D com seis graus de liberdade em cada nó. Os graus de liberdade em cada nó incluem translações nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  e rotações nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ . As deformações das seções transversais são negligenciadas. A geometria, as localizações dos nós e o sistema de coordenadas para esse elemento são mostrados na Fig. 2.18 (Ansys Stuba, 2014).

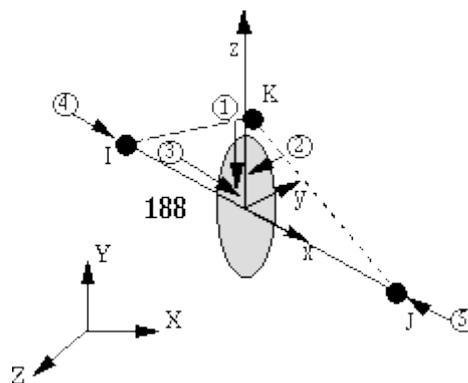


Figura 2.18 - Elemento Beam 189 (Ansys Stuba, 2014)

O BEAM188 permite a alteração nas propriedades de inércia da seção transversal em função do alongamento axial. Por padrão, a área da seção transversal muda de tal forma que o volume do elemento é preservado, mesmo após a deformação. O modelo é adequado para aplicações elasto-plásticas (Ansys Stuba, 2014).

### 3. VERIFICAÇÃO DOS MODELOS

#### 3.1. Verificação da modelagem computacional para a análise dinâmica

Para esta verificação, foi considerada uma viga simplesmente apoiada (bi apoiada) de 10 m de comprimento, como demonstra a Fig. 3.1. A viga na direção do eixo  $x$  foi modelada usando a seção mostradas na Fig. 3.2.

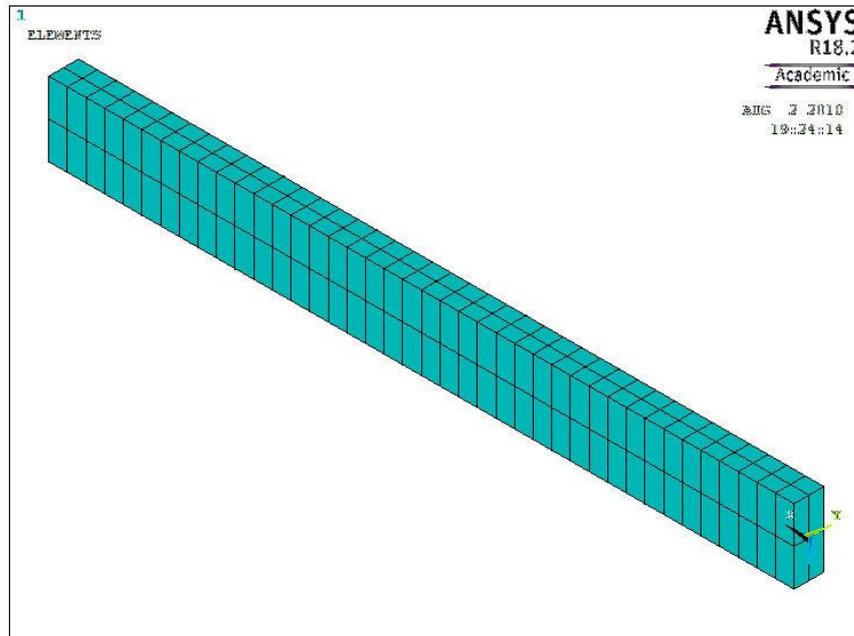


Figura 3.1 - Desenho da viga no software ANSYS

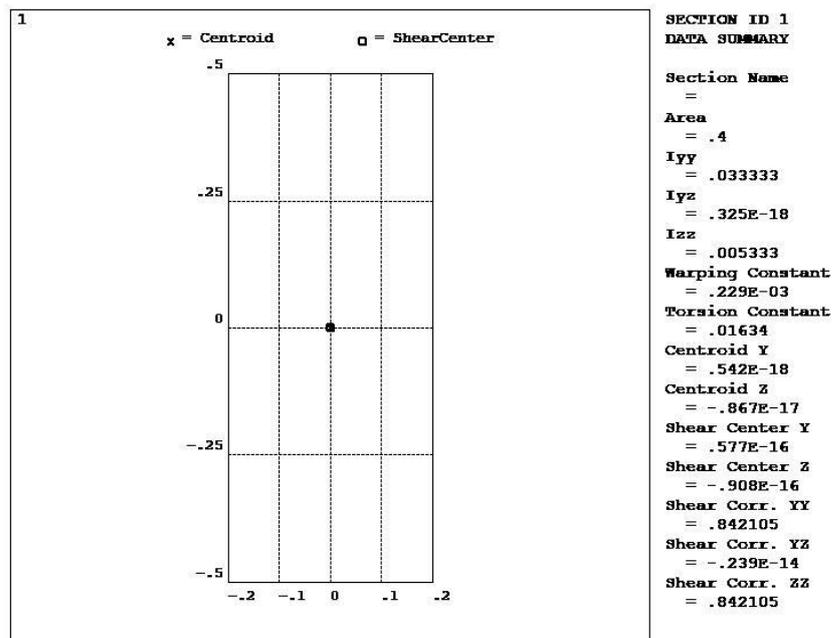


Figura 3.2 - Seção da viga, sendo as unidades em m

Foram usados os valores do módulo secante de deformação longitudinal do concreto ( $E$ ) de 25000 MPa, coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) de 0,2 e massa específica do concreto ( $\gamma$ ) de 2500 kg/m<sup>3</sup>.

### 3.1.1. Teste de convergência de malha para o modelo das análises dinâmicas

O teste de convergência de malha foi realizado comparando os resultados no software ANSYS, para a deflexão da estrutura devido a uma carga de 100 kN aplicada no meio do vão, com os resultados do software FTOOL, para a mesma situação. Foi considerado a deformabilidade devido ao esforço cortante em ambos softwares. A Figura 3.3 mostra a viga modelada por meio do FTOOL.

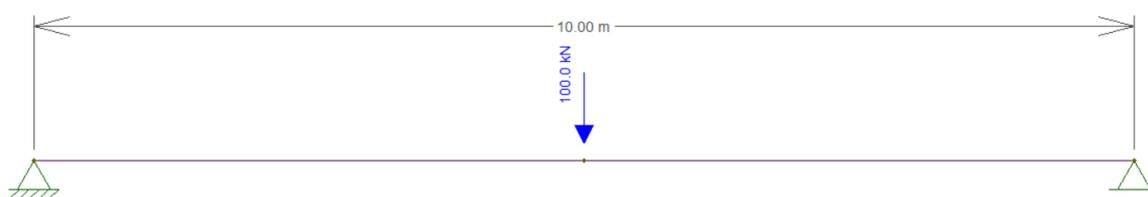


Figura 3.3 - Viga modelada por meio do software FTOOL

Para o teste foram usados três tamanhos de malha: 0,25 m; 0,50 m e 1,00 m. Os resultados são apresentados na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 - Resultado do teste de convergência de malha para as deflexões

Modelo	Deflexão (mm)	Diferença (%)
FTOOL	2,572	-
ANSYS - Malha de 1,00 m	2,551	0,82
ANSYS - Malha de 0,50 m	2,566	0,23
ANSYS - Malha de 0,25 m	2,570	0,08
ANSYS - Malha de 0,125 m	2,571	0,04

Os resultados demonstraram que, conforme o tamanho da malha no software ANSYS diminui, os resultados da deflexão no meio do vão mais se aproximam do resultado no software FTOOL. Sendo assim, foi adotado a malha e 0,25 m para calcular os modelos descritos nos próximos itens, devido ao seu bom resultado e tempo de processamento.

### 3.1.2. Análise modal

De acordo com Fryba (1972), a frequência circular para o  $i$ -ésimo modo de vibração,  $\omega_{(i)}$ , em rad/s de uma viga simplesmente apoiada é dada por:

$$\omega_{(i)} = \frac{i^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \quad (3.1)$$

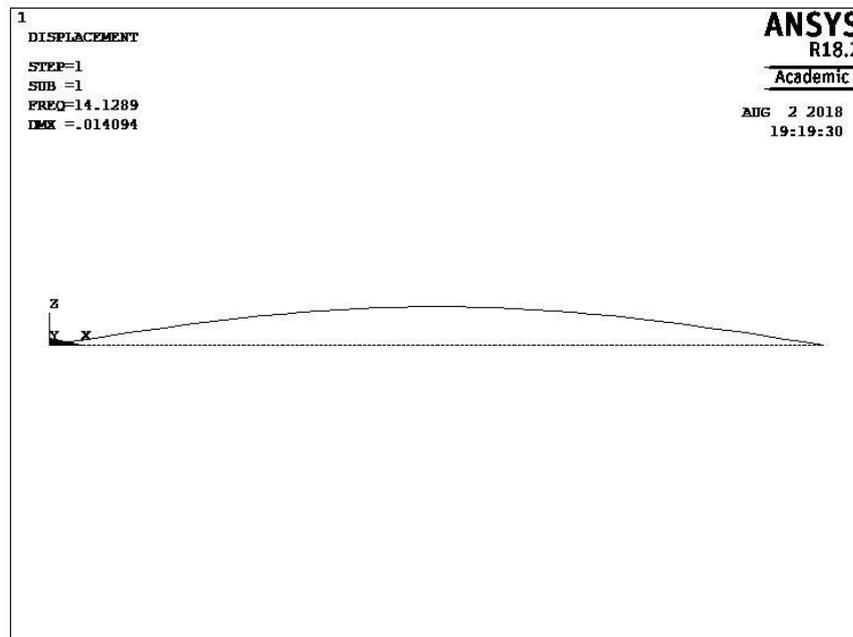
onde  $L$  é o comprimento do vão em m,  $E$  é o módulo de elasticidade da estrutura em N/m<sup>2</sup>,  $I$  é o momento de inércia fornecido pela seção transversal em m<sup>4</sup> e  $\mu$  é a massa da viga por unidade de comprimento em kg/m.

Por meio da Eq. (3.1) de Fryba (1972), foram determinados os valores de  $\omega_{(i)}$  para o 1º e 2º modo de vibração da viga. Em seguida, seus resultados foram comparados com os calculados com uma análise modal por meio do software ANSYS, considerando o mesmo caso em ambas situações. Os resultados são mostrados na Tab. 3.2.

**Tabela 3.2 - Valores de  $\omega_{(i)}$  em rad/s para uma viga simplesmente apoiada**

Modo de vibração	ANSYS	Fryba	Diferença (%)
1º	88,78	90,10	1,49
2º	340,86	360,39	5,73

Por intermédio do software ANSYS foram obtidos também as configurações do 1º e 2º modo de vibração da viga, como mostra a Fig. (3.4) e Fig. (3.5), e comparados com os modos de vibração propostos por Soriano (2014), ilustrados pela Fig. (3.6).



**Figura 3.4 - 1º Modo de vibração da viga por meio do software ANSYS**

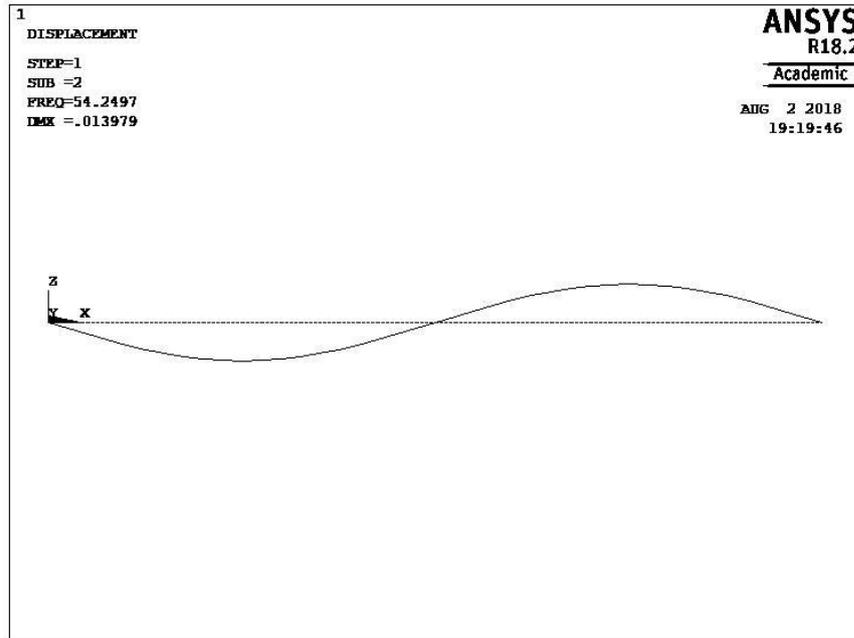


Figura 3.5 - 2º Modo de vibração da viga por meio do software ANSYS

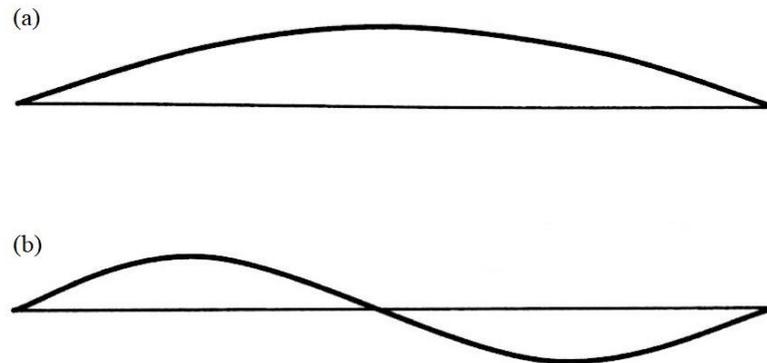


Figura 3.6 - 1º (a) e 2º (b) modo de vibração de uma viga simplesmente apoiada (SORIANO, 2014)

Os resultados para o 1º e 2º modo de vibração, obtidos por meio do software ANSYS, foram muito próximos dos valores calculados pela Eq. (3.1) de Fryba (1972) e obteve o mesmo comportamento proposto por Soriano (2014). Sendo assim, o modelo de análise modal demonstrou estar correto.

### 3.1.3. Análise transiente não amortecida

De acordo com Fryba (1972), a deflexão,  $d(x, t)$ , em m de uma viga simplesmente apoiada, sujeita a uma carga móvel que percorre com velocidade  $r$  em m/s, é dada por:

$$d(x, t) = d_0 \sum_{i=1}^{\infty} \sin \frac{i\pi x}{L} \frac{1}{i^2(i^2 - \alpha^2)} \left( \sin i\omega t - \frac{\alpha}{i} \sin \omega_{(i)} t \right) \quad (3.2)$$

na qual

$$d_0 = \frac{2PL^3}{\pi^4 EI} \quad (3.3)$$

$$\alpha = \frac{\omega}{\omega_{(i)}} \quad (3.4)$$

$$\omega = \frac{\pi r}{L} \quad (3.5)$$

onde  $x$  é a posição da carga onde se deseja determinar a deflexão em m,  $t$  é o tempo para a carga atingir o local desejado partindo da origem em s,  $d_0$  é a deflexão no meio do vão para uma viga devido a uma carga estática em m,  $\alpha$  é o parâmetro adimensional característico do efeito da velocidade,  $\omega$  é a frequência circular em rad/s e  $P$  é força concentrada de magnitude constante em N. Esta expressão é válida para os casos onde  $\alpha$  é diferente de  $i$ .

Com a intenção de simular a travessia de uma carga móvel, foi elaborada uma estratégia de modelagem partindo pela identificação dos nós onde serão aplicadas as cargas. Os nós utilizados para a simulação da passagem da carga possuem uma distância entre si de 0,50 m.

Por meio da Eq. (3.2) de Fryba (1972), foram determinados, com o auxílio do software algébrico WXMAXIMA (2018), os valores da deflexão no meio do vão de uma viga sujeita a uma carga móvel de 100 kN com velocidade de 80 km/h. Em seguida, seus resultados foram comparados com os adquiridos para uma análise transiente por meio do programa ANSYS, considerando o mesmo caso em ambas situações. Os resultados são mostrados na Tab. 3.3.

**Tabela 3.3 - Deflexão no meio do vão de uma viga sujeita a uma carga móvel**

Deflexão (mm)		Diferença (%)
ANSYS	Fryba	
2,780	2,636	5,46

Para a Equação (3.2) de Fryba (1972) foi considerado o somatório até o valor de 100 e para o software ANSYS foi considerado um passo de tempo ( $\Delta t$ ) de 1 ms.

A Figura 3.7 mostra o gráfico da deflexão pelo tempo para os resultados obtidos por meio do software ANSYS e os calculados pela Eq. (3.2) de Fryba (1972).

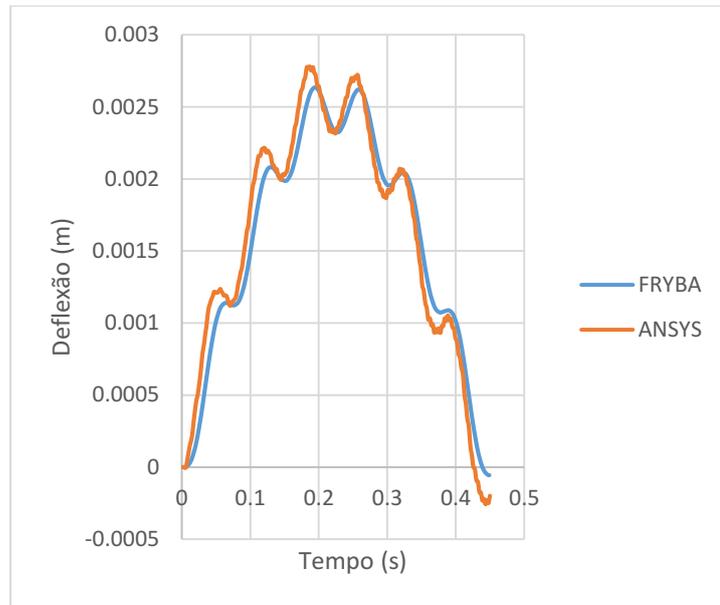


Figura 3.7 - Gráfico da deflexão pelo tempo, para uma viga submetida a uma carga móvel

Os resultados para a deflexão de uma viga bi apoiada sujeita a uma carga móvel, obtido por meio do software ANSYS, foram muito próximos dos valores calculados pela Eq. (3.2) de Fryba (1972). Sendo assim, o modelo de análise transiente não amortecido demonstrou estar correto.

### 3.1.4. Análise transiente amortecida

De acordo com Fryba (1972), a deflexão,  $d(x, t)$ , em m de uma viga amortecida simplesmente apoiada, sujeita a uma carga móvel que a percorre com velocidade  $r$  em m/s, é dada por

$$d(x, t) \approx d_0 \sum_{i=1}^{\infty} \text{sen} \frac{i\pi x}{L} \frac{1}{i^2(i^2 - \alpha^2)} \left( \text{sen } i\omega t - \frac{\alpha}{i} e^{-\omega_b t} \text{sen } \omega_{(i)} t \right) \quad (3.6)$$

na qual

$$\omega_b = \xi \frac{\omega_{(1)}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (3.7)$$

onde  $\omega_b$  é a frequência circular de amortecimento da viga em rad/s e  $\xi$  é a razão de amortecimento, uma grandeza adimensional. Esta expressão é válida para os casos onde  $\alpha$  é diferente de  $i$  e  $\xi$  é muito menor que 1.

Foram consideradas as Eqs. (2.96) e (2.97) do Amortecimento de Rayleigh para simular a viga amortecida para uma razão de 5%. Os resultados obtidos de  $a_1$  e  $a_2$ , mostrados pela Tab. 3.4, foram aplicados no software ANSYS.

Tabela 3.4 – Valores de  $a_1$  e  $a_2$  para uma viga amortecida

Taxa de Amortecimento (%)	Frequência natural circular do 1° modo (rad/s)	Frequência natural circular do 2° modo (rad/s)	$a_1$	$a_2$
5	88,78	340,86	7,04317194	0,00023275

Por meio da Eq. (3.6) de Fryba (1972), foram determinados, com o auxílio do software algébrico Wxmaxima, os valores da deflexão no meio do vão de uma viga, com uma razão de amortecimento de 5%, sujeita a uma carga móvel de 100 kN com velocidade de 80 km/h. Em seguida, seus resultados foram comparados com os calculados com uma análise transiente por meio do programa ANSYS, considerando o mesmo caso em ambas situações. Os resultados são mostrados na Tab. 3.5.

Tabela 3.5 - Deflexão no meio do vão de uma viga amortecida sujeita a uma carga móvel

Deflexão (mm)		Diferença (%)
ANSYS	Fryba	
2,631	2,529	4,03

Para a Equação (3.6) de Fryba (1972) foi considerado o somatório até o valor de 100 e para o software ANSYS foi considerado um passo de tempo ( $\Delta t$ ) de 1 ms.

A Figura 3.8 mostra o gráfico da deflexão pelo tempo para os resultados obtidos por meio do software ANSYS e os calculados pela Eq. (3.6) de Fryba (1972).

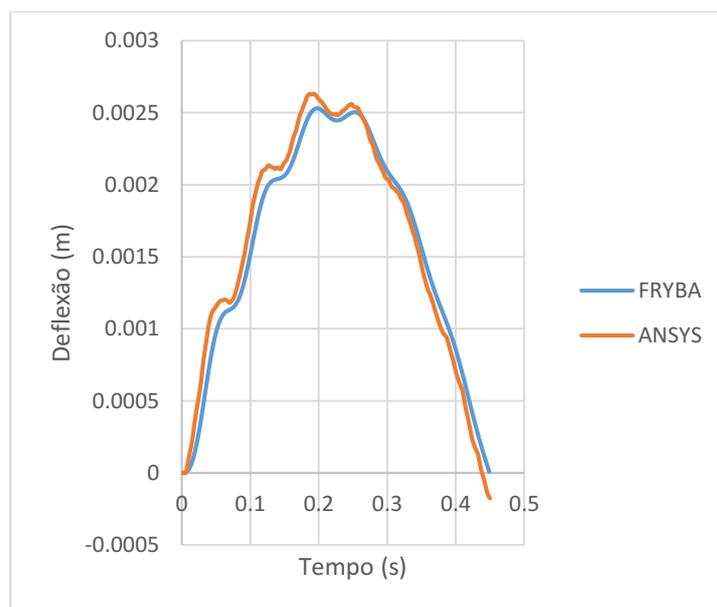


Figura 3.8 - Gráfico da deflexão pelo tempo, para uma viga amortecida submetida a uma carga móvel

Os resultados para a deflexão de uma viga amortecida bi apoiada sujeita a uma carga móvel, obtido por meio do software ANSYS, foram muito próximos dos valores calculados pela Eq. (3.6) de Fryba (1972). Sendo assim, o modelo de análise transiente não amortecido demonstrou estar correto.

### 3.1.5. Análise transiente amortecida devido a uma carga harmônica

De acordo com Fryba (1972), a expressão que determina o coeficiente dinâmico,  $\delta$ , para uma viga amortecida simplesmente apoiada sendo atravessada por uma carga harmônica  $P + Q \sin(\Omega t)$ , é dada por:

$$\delta = 1 + \frac{Q}{P} \frac{\omega_{(1)}^2}{\Omega^2} \frac{1}{\left(\frac{\omega_{(1)}^2}{\Omega^2} - 1\right)^2 + 4\left(\frac{\omega^2}{\Omega^2} + \frac{\omega_b^2}{\Omega^2}\right)} \left\{ \left[ \left(\frac{\omega_{(1)}^2}{\Omega^2} - 1\right)^2 + 4\frac{\omega_b^2}{\Omega^2} \right]^{1/2} + 2\frac{\omega}{\Omega} e^{-\frac{\omega_b l}{(2r)}} \right\} \quad (3.8)$$

onde  $Q$  é a amplitude da força concentrada em N e  $\Omega$  é a frequência circular da força harmônica em rad/s.

Por meio da Eq. (3.8) de Fryba (1972), foi determinado o valor do coeficiente dinâmico,  $\delta$ , para uma viga simplesmente apoiada, com uma razão de amortecimento de 5%, sujeita a uma carga móvel de 100 kN, com amplitude de 10 kN, frequência circular de 30 rad/s e com velocidade de 60 km/h. Em seguida, seus resultados foram comparados com os adquiridos para uma análise transiente amortecida harmônica por meio do programa ANSYS, considerando o mesmo caso em ambas situações. Os resultados são mostrados na Tab. 3.6.

**Tabela 3.6 - Coeficiente Dinâmico para uma de uma viga amortecida sujeita a uma carga móvel harmônica**

Coeficiente Dinâmico $\delta$		Diferença (%)
ANSYS	Fryba	
1,121	1,113	0,68

Os resultados para o coeficiente dinâmico de uma viga amortecida simplesmente apoiada sendo atravessada por uma carga harmônica, obtido por meio do software ANSYS, foram muito próximos dos valores calculados pela Eq. (3.8) de Fryba (1972). Sendo assim, o modelo de análise transiente amortecida devido a uma carga harmônica demonstrou estar correto.

Nos Apêndices 1, 2 e 3 são disponibilizados, respectivamente, os exemplos de códigos para análise estática, análise modal e análise transiente gerados por intermédio do software ANSYS.

### 3.2. Verificação dos modelos de pontes

As estruturas a serem analisadas, tratam-se de pontes em vigas, com 10 m, 20 m, 30 m e 40 m de vão, possuindo uma laje de 11,50 m de largura e 20 cm de espessura, baseadas em Moura (2018). Elas possuem 4 longarinas de perfil I, espaçadas igualmente a cada 310 cm, conforme a Fig. 3.9.

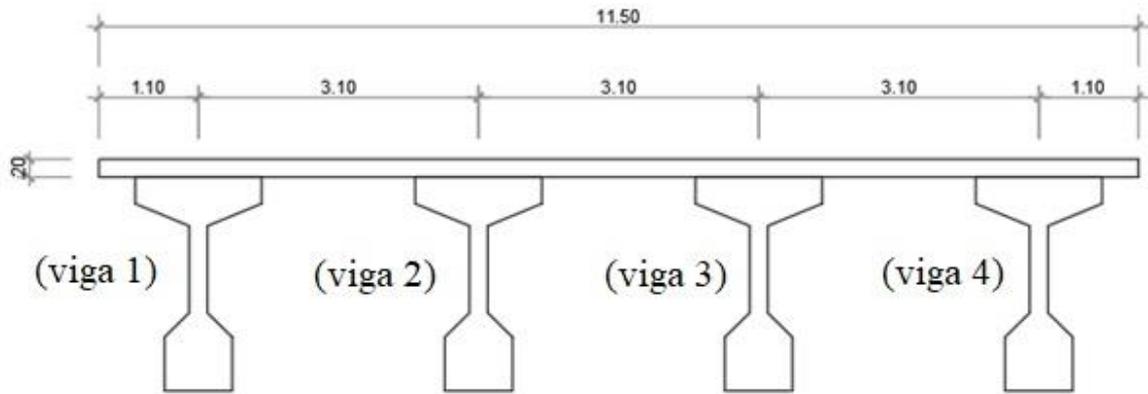


Figura 3.9 - Seção transversal da ponte com 40 m de vão, cotas em m (MOURA, 2018)

As configurações das seções transversais das longarinas de 20 m, 30 m, e 40 m de vão foram baseadas em Moura (2018), conforme a Fig. 3.10.

Devido a Moura (2018) não ter realizado um estudo para vãos de 10 m, foi adotada uma configuração específica para a seção transversal da viga, ilustrada conforme a Fig. 3.11.

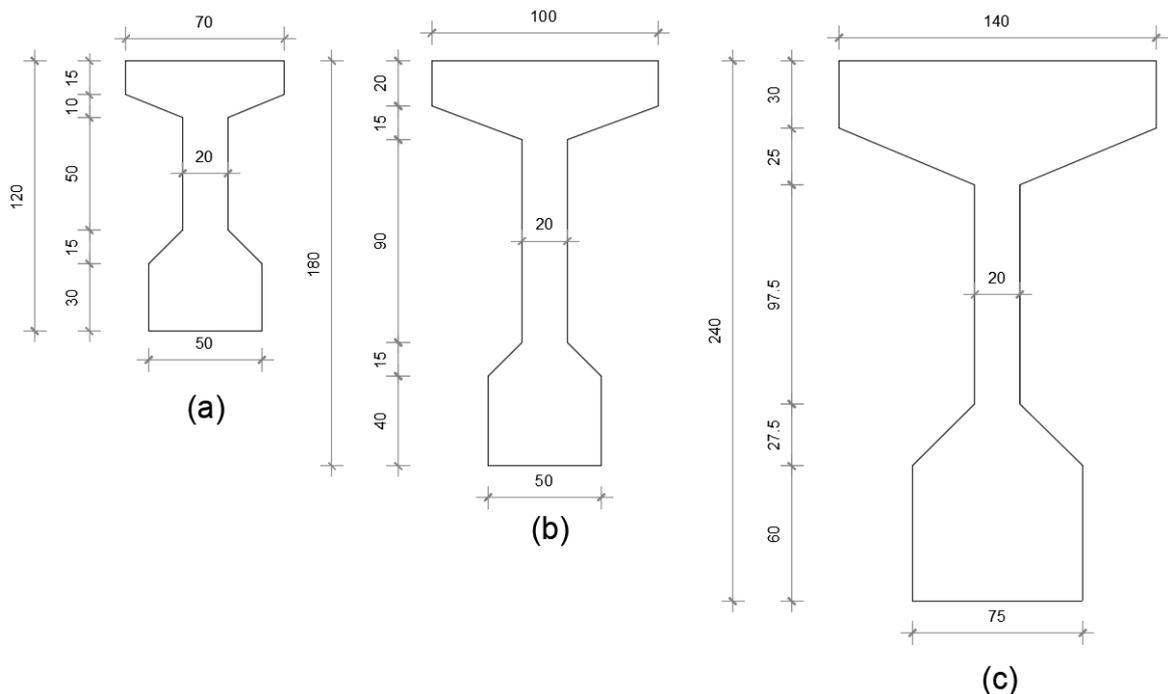


Figura 3.10 - Seção transversal das vigas longarinas das pontes, cotas em cm.

(a) vão de 20m, (b) vão de 30m e (c) vão de 40m (MOURA, 2018)

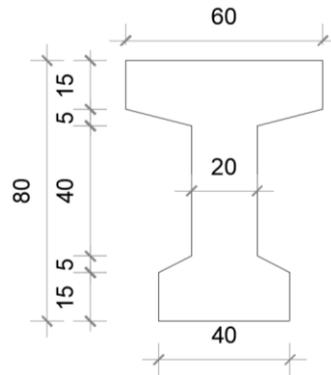


Figura 3.11 - Seção transversal da viga longarina de 10 m de vão, cotas em cm

### 3.2.1. Modelos das pontes de 4 longarinas

O modelo trata da ponte analisada resolvida por uma grelha. Foi resolvida a mesma ponte, considerando-a como uma viga, por meio do software FTOOL, com o intuito de fazer uma comparação entre os métodos de resolução através dos resultados encontrados. Será calculado o valor do momento fletor máximo para todas as 4 longarinas, para o carregamento aplicado na viga 1, juntamente com o momento fletor total.

Para a situação de 10 m de vão, a Fig. 3.12 mostra o desenho da grelha no software ANSYS. O espaçamento entre as vigas na direção transversal é de 0,5 m com seção retangular de largura 0,5 m e altura igual à espessura da laje. As vigas na direção do eixo  $x$  foram modeladas usando a seção das longarinas mostradas nas Figs. 3.13, 3.14 e 3.15. Já para as vigas na direção de  $y$  foi usada a seção da Fig. 3.16.

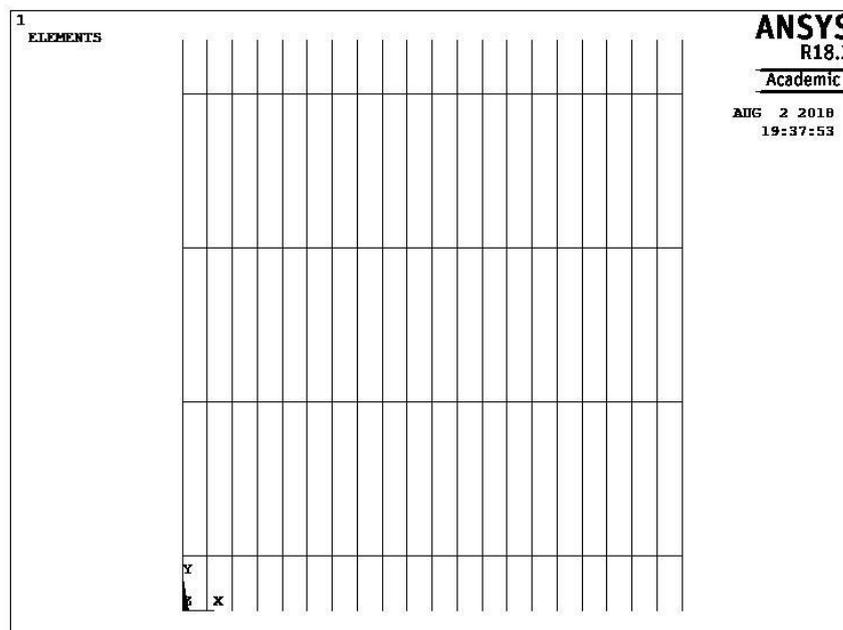


Figura 3.12 - Desenho da grelha no software ANSYS para ponte de 10 m de vão

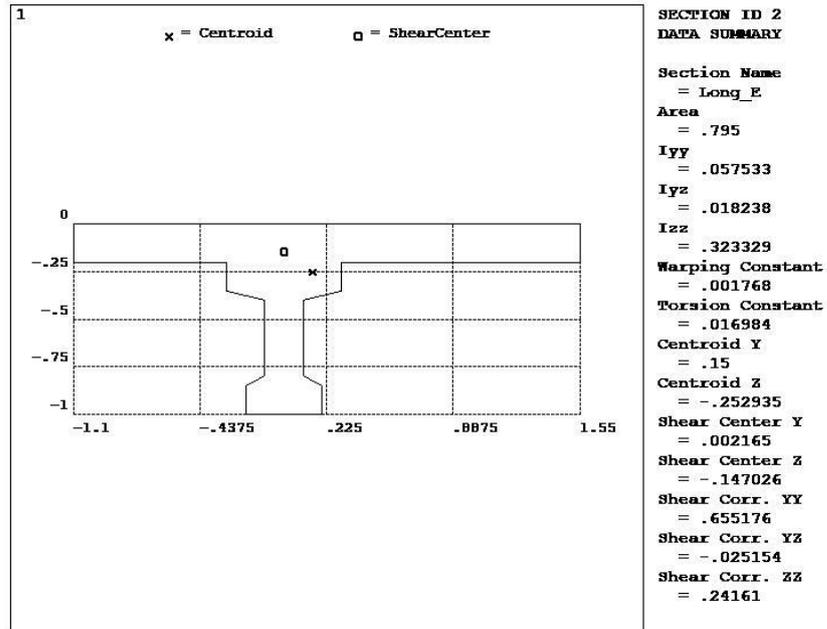


Figura 3.13 - Seção da longarina 1 para ponte de 10 m de vão, sendo as unidades em m

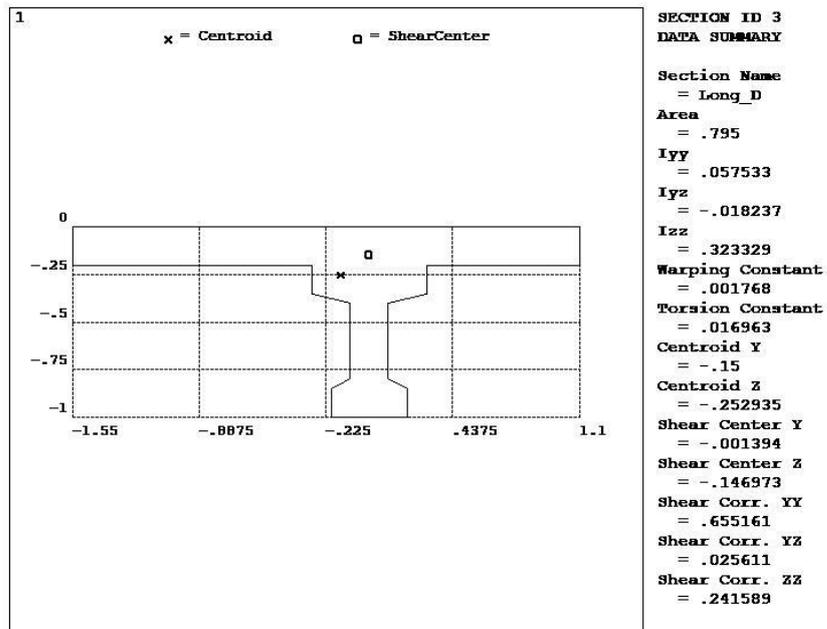


Figura 3.14 - Seção da longarina 4 para ponte de 10 m de vão, sendo as unidades em m

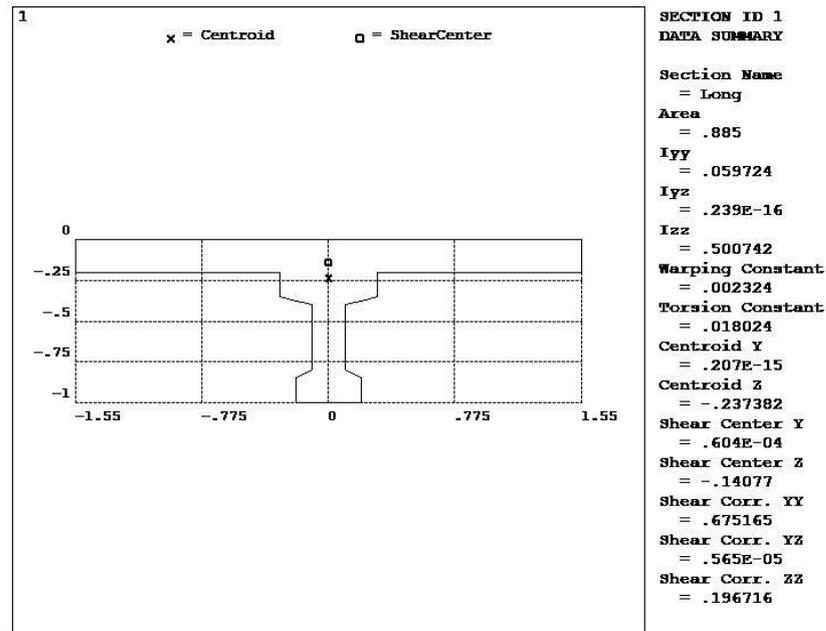


Figura 3.15 - Seção da longarina 2 e 3 para ponte de 10 m de vão, sendo as unidades em m

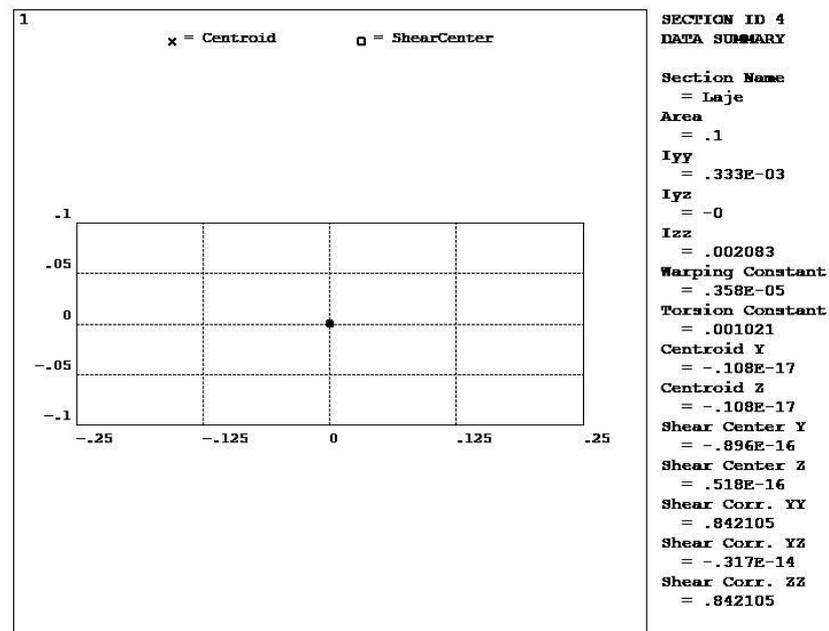


Figura 3.16 - Seção da laje, sendo as unidades em m

Para a situação de 20 m de vão, a Fig. 3.17 mostra o desenho da grelha no software ANSYS. As vigas na direção do eixo  $x$  foram modeladas usando a seção das longarinas mostradas nas Fig. 3.18, Fig. 3.19 e Fig. 3.20. Já para as vigas na direção de  $y$  foram usadas a mesma seção da Fig. 3.16.

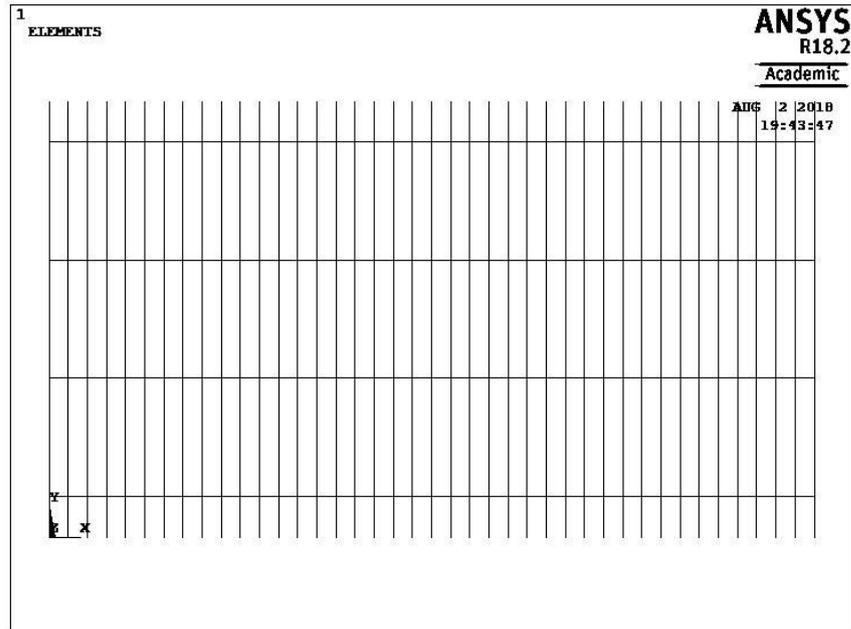


Figura 3.17 - Desenho da grelha no software ANSYS para ponte de 20 m de vão

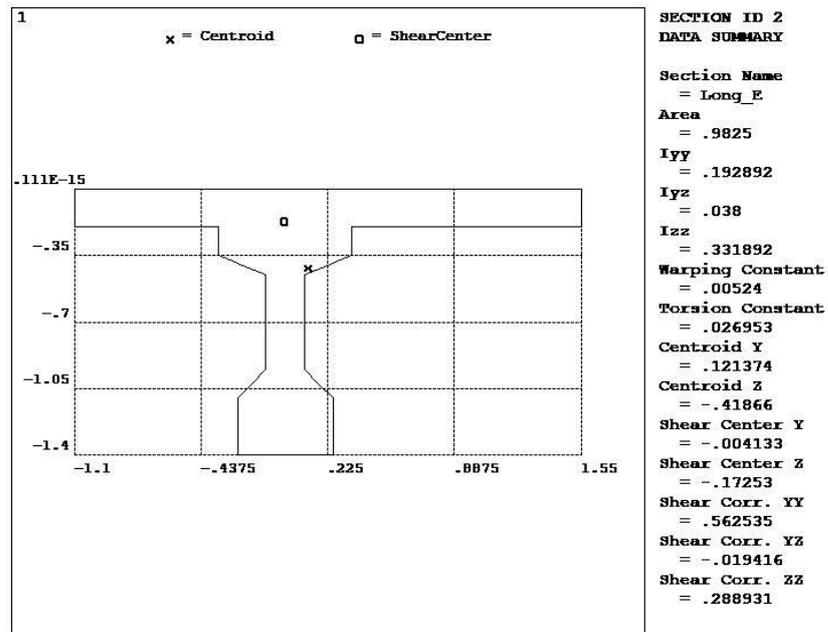


Figura 3.18 - Seção da longarina 1 para ponte de 20 m de vão, sendo as unidades em m

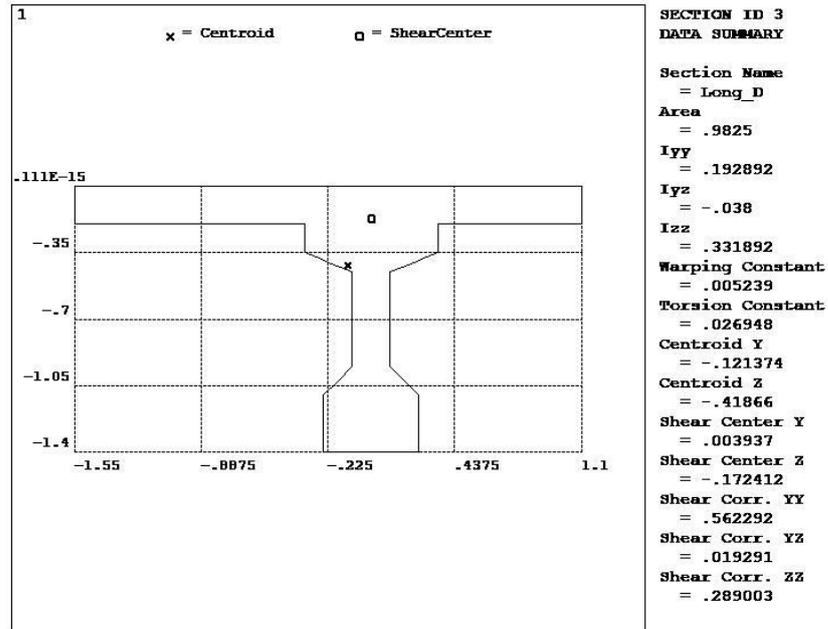


Figura 3.19 - Seção da longarina 4 para ponte de 20 m de vão, sendo as unidades em m

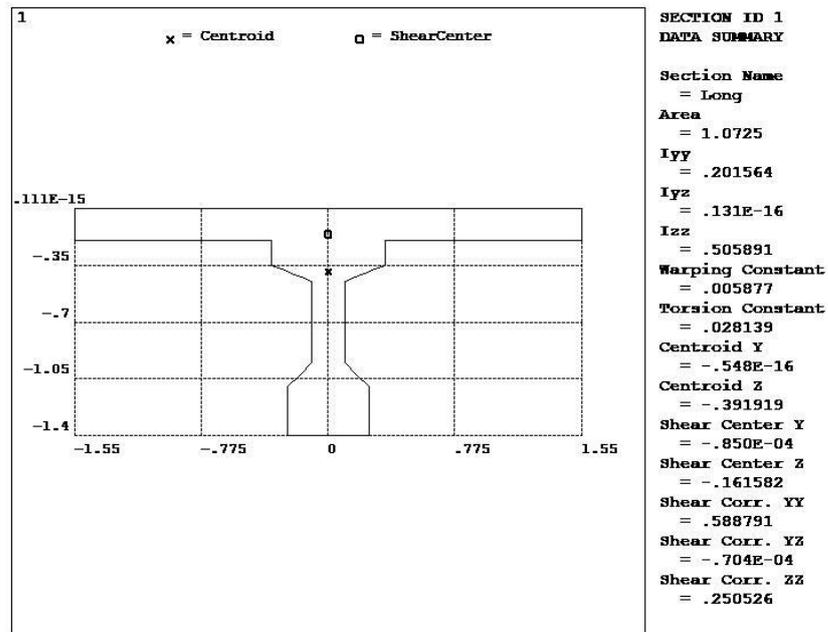


Figura 3.20 - Seção da longarina 2 e 3 para ponte de 20 m de vão, sendo as unidades em m

Para a situação de 30 m de vão, a Fig. 3.21 mostra o desenho da grelha no software ANSYS. As vigas na direção do eixo  $x$  foram modeladas usando a seção das longarinas mostradas nas Fig. 3.22, Fig. 3.23 e Fig. 3.24. Já para as vigas na direção de  $y$  foi usada a mesma seção da Fig. 3.16.

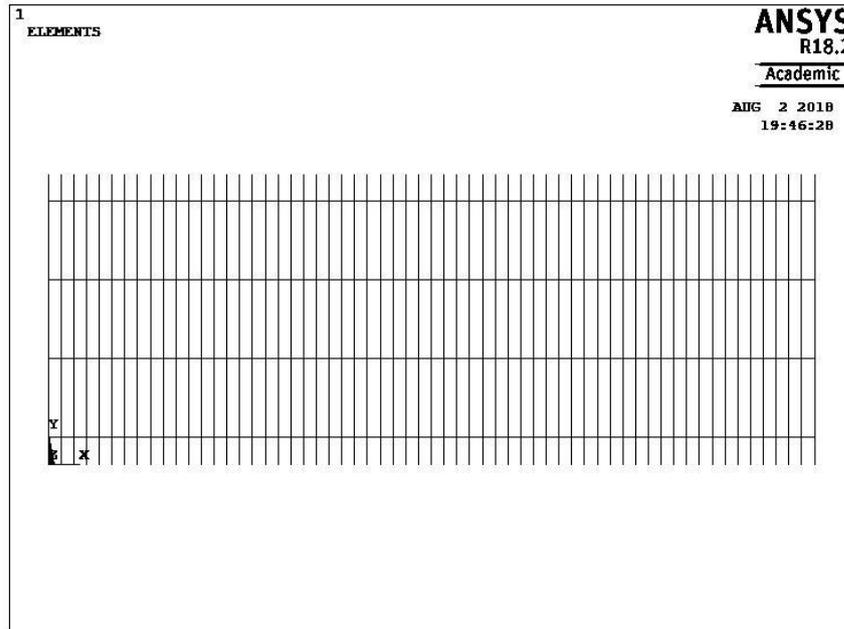


Figura 3.21 - Desenho da grelha no software ANSYS para ponte de 30 m de vão

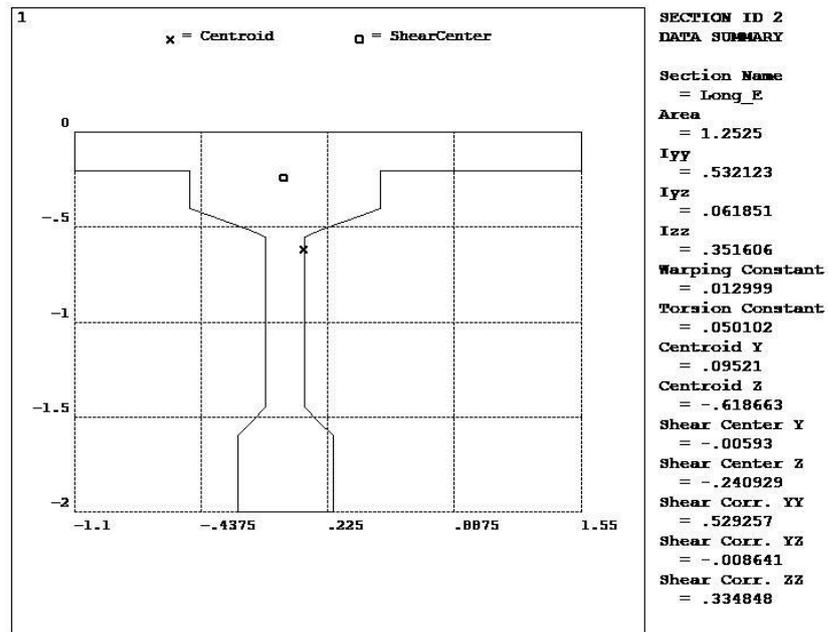


Figura 3.22 - Seção da longarina 1 para ponte de 30 m de vão, sendo as unidades em m

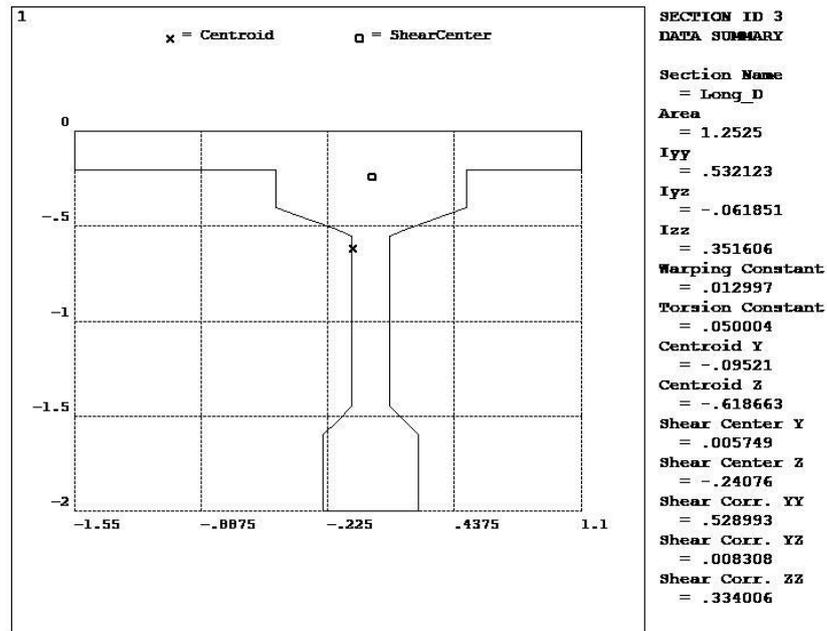


Figura 3.23 - Seção da longarina 4 para ponte de 30 m de vão, sendo as unidades em m

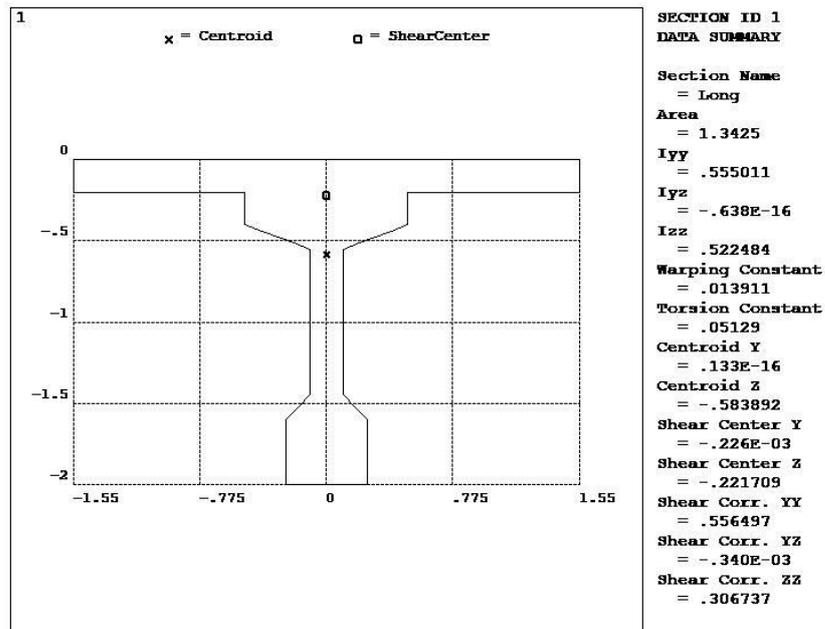


Figura 3.24 - Seção da longarina 2 e 3 para ponte de 30 m de vão, sendo as unidades em m

Para a situação de 40 m de vão, a Fig. 3.25 mostra o desenho da grelha no software ANSYS. As vigas na direção do eixo  $x$  foram modeladas usando a seção das longarinas mostradas nas Fig. 3.26, Fig. 3.27 e Fig. 3.28. Já para as vigas na direção de  $y$  foi usada a mesma seção da Fig. 3.16.

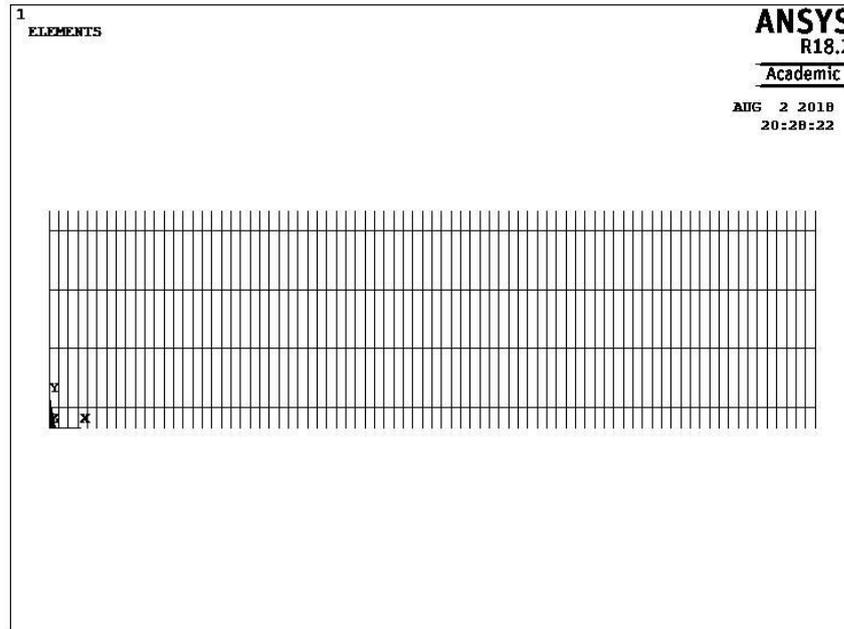


Figura 3.25 - Desenho da grelha no software ANSYS para ponte de 40 m de vão

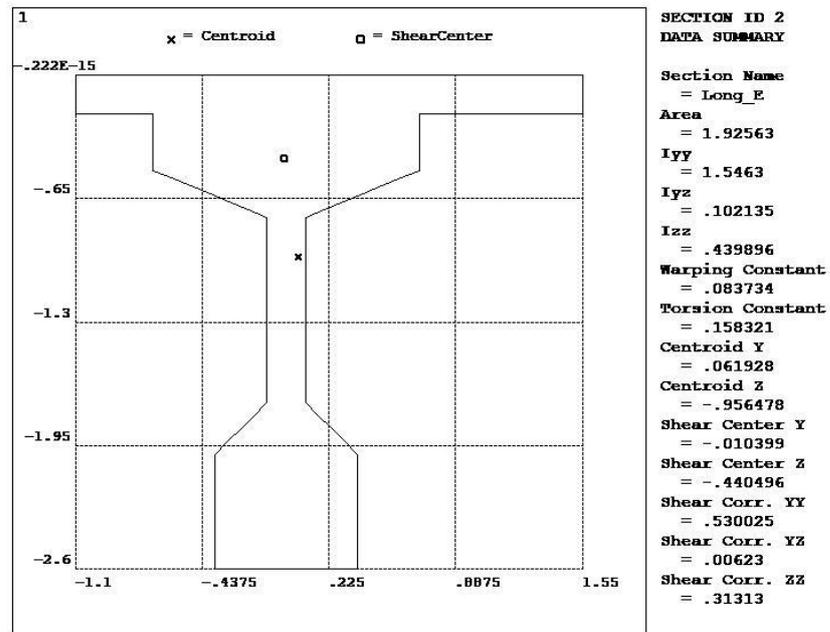


Figura 3.26 - Seção da longarina 1 para ponte de 40 m de vão, sendo as unidades em m

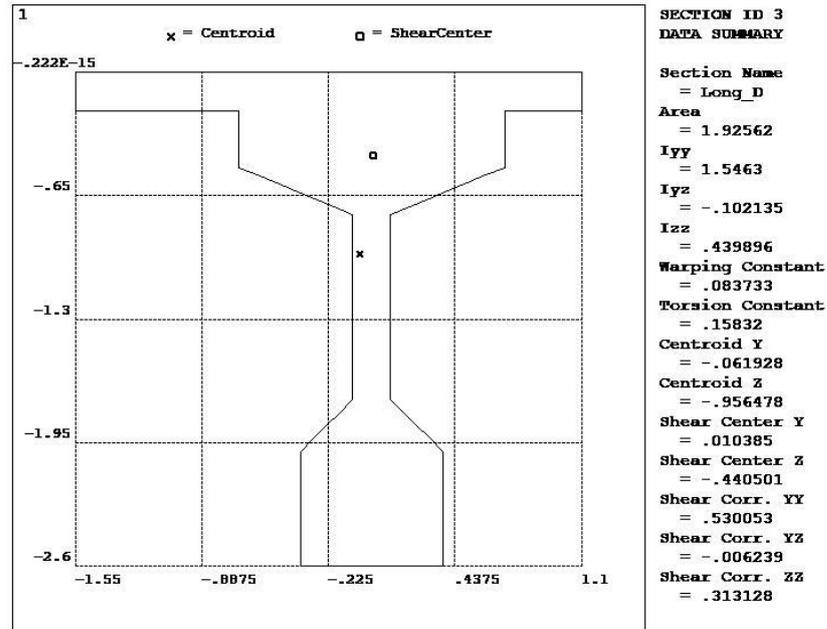


Figura 3.27 - Seção da longarina 4 para ponte de 40 m de vão, sendo as unidades em m

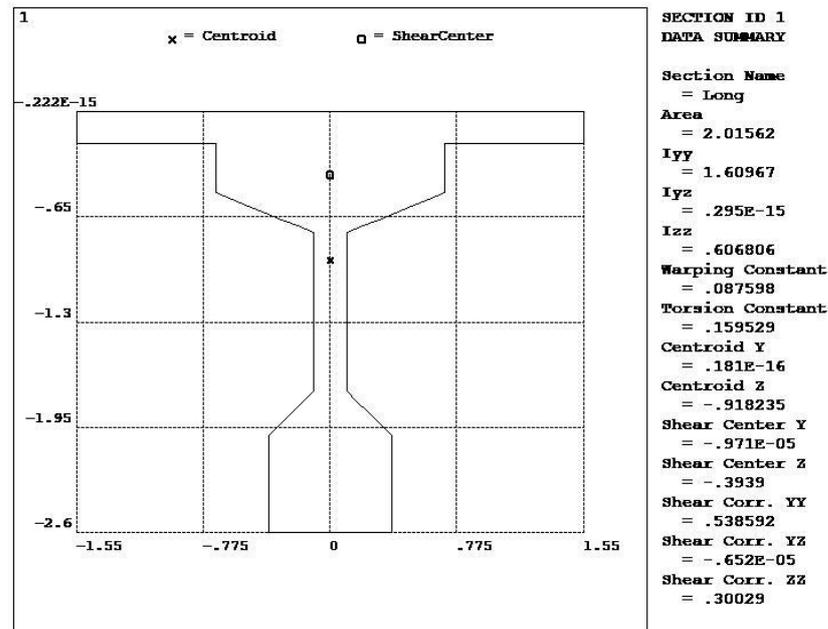


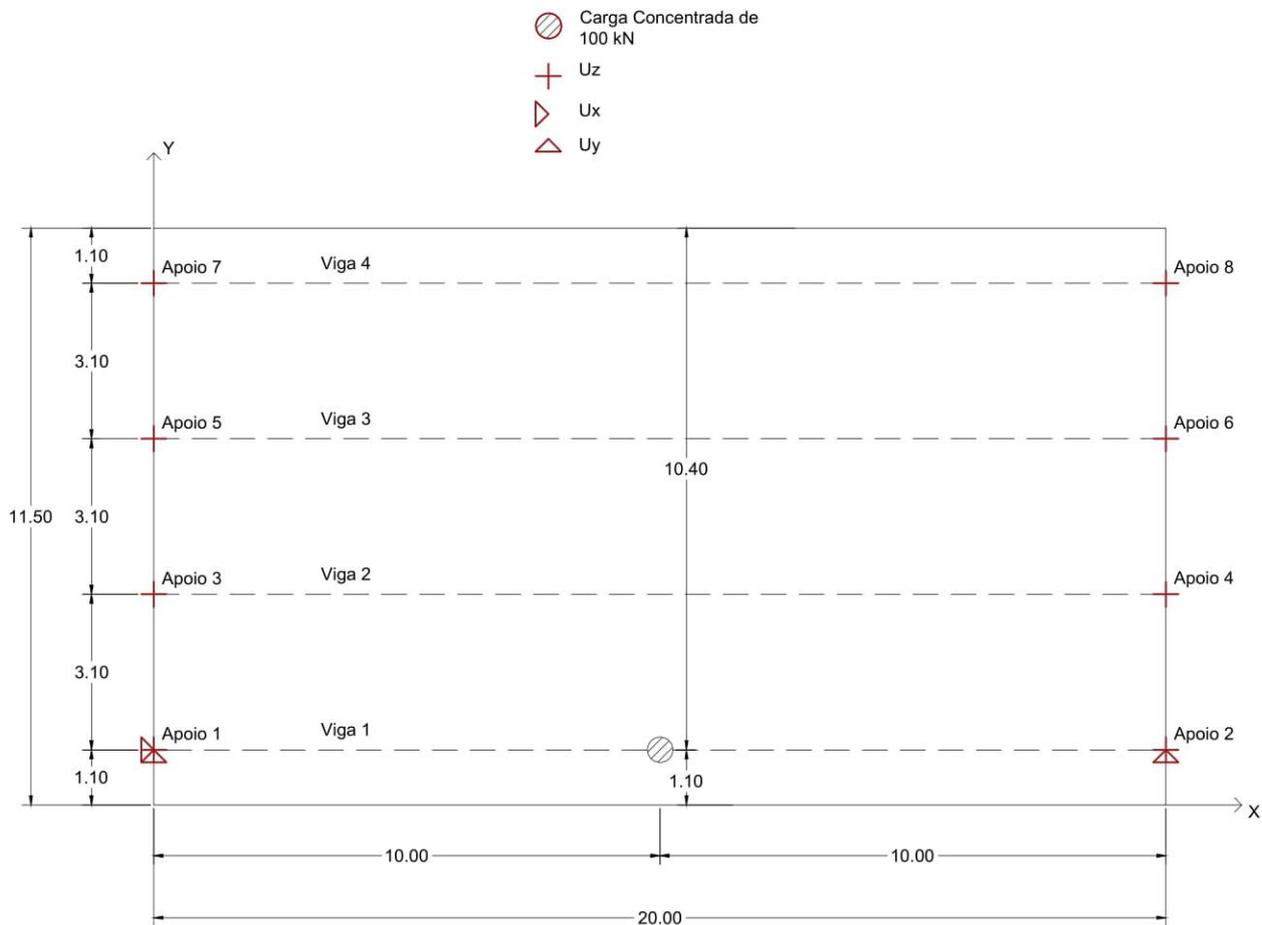
Figura 3.28 - Seção da longarina 2 e 3 para ponte de 40 m de vão, sendo as unidades em m

Foram usados os valores do módulo secante de deformação longitudinal do concreto ( $E$ ) de 26838 MPa e coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) de 0,2. O carregamento será aplicado no meio do vão da longarina e é uma carga concentrada de valor igual à 100 kN.

Foi adotado para os modelos das pontes uma malha com tamanho de 0,25 m para as vigas no sentido  $x$ , mesmo tamanho de malha utilizado na verificação da modelagem computacional para a análise dinâmica. Já para as vigas no sentido  $y$  (laje), foi adotado uma malha com tamanho entre 0,20

m e 0,25 m, para assim facilitar a aplicação das cargas devido ao trem-tipo e a união dos nós com as vigas no sentido  $x$ .

A Figura 3.29 mostra um exemplo de carregamento e as vinculações que foram aplicadas nas extremidades inferiores das longarinas dos modelos.



**Figura 3.29 – Exemplo de modelo do carregamento e vinculações para a situação de 20 m de vão, sendo as medidas em metros**

Após a definição do carregamento e das vinculações, o modelo foi resolvido por meio do software ANSYS, resultando nos valores de esforço normal máximo ( $N_i$ ) e momento fletor máximo ( $M_i$ ) para cada longarina, conforme é demonstrado nas Tabs. 3.7, 3.8, 3.9 e 3.10. Que também mostram o cálculo utilizado para encontrar o momento total, levando em consideração a distância do centroide da laje até o centroide de cada longarina ( $e$ ). Em seguida, foram comparados com os resultados obtidos pelo software FTOOL, como mostra a Tab. 3.11.

Tabela 3.7 - Tabela contendo os resultados obtidos com o carregamento na viga 1 para o vão de 10 m

Viga	Ni (kN)	Mi (kN.m)	e (m)	Mtotal (kN.m)= Mi + Ni.e
1	3,64	216,37	0,15	216,93
2	-3,91	30,43	0,14	29,89
3	-0,67	-2,41	0,14	-2,50
4	0,94	-0,71	0,15	-0,56
Momento Total				243,75

Tabela 3.8 - Tabela contendo os resultados obtidos com o carregamento na viga 1 para o vão de 20 m

Viga	Ni (kN)	Mi (kN.m)	e (m)	Mtotal (kN.m)= Mi + Ni.e
1	11,66	393,12	0,32	396,83
2	-11,96	103,17	0,29	99,68
3	-4,88	6,82	0,29	5,39
4	5,19	-9,81	0,32	-8,15
Momento Total				493,75

Tabela 3.9 - Tabela contendo os resultados obtidos com o carregamento na viga 1 para o vão de 30 m

Viga	Ni (kN)	Mi (kN.m)	e (m)	Mtotal (kN.m)= Mi + Ni.e
1	15,86	558,52	0,52	566,75
2	-16,11	177,84	0,48	170,05
3	-7,74	26,30	0,48	22,56
4	7,98	-19,39	0,52	-15,25
Momento Total				744,11

Tabela 3.10 - Tabela contendo os resultados obtidos com o carregamento na viga 1 para o vão de 40 m

Viga	Ni (kN)	Mi (kN.m)	e (m)	Mtotal (kN.m)= Mi + Ni.e
1	17,88	712,98	0,86	728,30
2	-17,76	243,81	0,82	229,28
3	-9,14	51,20	0,82	43,72
4	9,01	-15,27	0,86	-7,55
Momento Total				993,75

Tabela 3.11 - Tabela contendo os resultados obtidos com o carregamento na viga 1

Modelo	Momento Fletor Total (kN.m)		Diferença (%)
	ANSYS	FTOOL	
10 m	243,75	250,00	2,50
20 m	493,75	500,00	1,25
30 m	744,11	750,00	0,78
40 m	993,75	1000,00	0,62

De acordo com Botelho (2016), o cálculo para obter o momento total para cada viga é constituído pelo momento  $M_i$  da viga pré-moldada na seção central mais o esforço  $N_i$  multiplicado

pela distância do centro da laje ao centro da viga, conforme mostrado na Fig. 3.30, onde o ponto  $O$  e o ponto  $G$  são, respectivamente, os centróides da laje e da longarina.

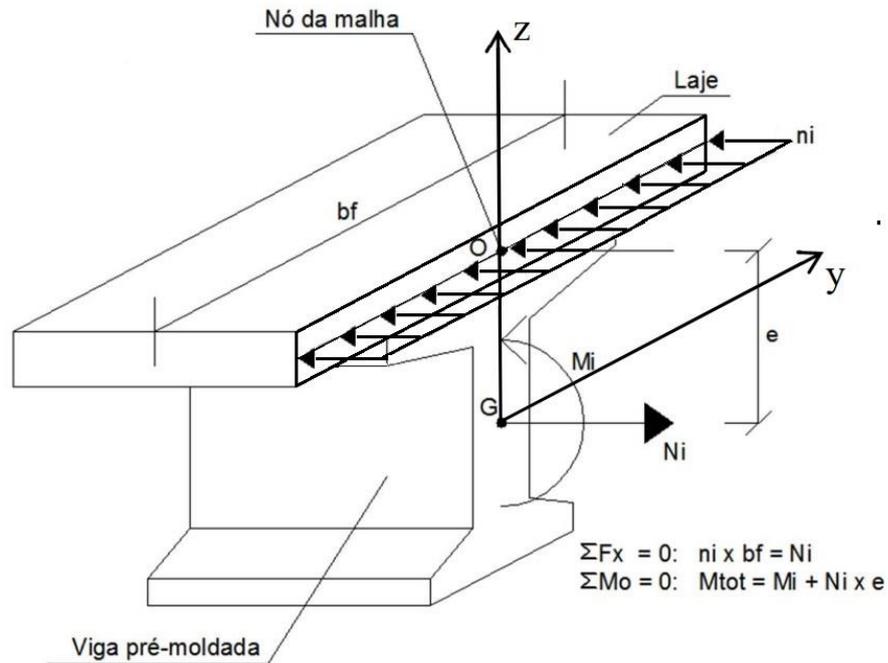


Figura 3.30 - Carregamento aplicado na seção (BOTELHO, 2016)

Os resultados para os momentos fletores totais dos modelos das pontes de 4 longarinas, obtido por meio do software ANSYS, foram muito próximos dos valores obtidos por meio do software FTOOL. Sendo assim, os modelos das pontes de 4 longarinas demonstraram estar corretos.

### 3.2.2. Modelo de longarina

Foram desenvolvidos também, por meio do software ANSYS, modelos referentes a viga 1, com seção T, das pontes de 10 m, 20 m, 30 m e 40 m, baseadas nas seções transversais de Moura (2018) e com a largura de mesa colaborante de acordo com a NBR 6118 (ABNT, 2014). As longarinas foram resolvidas como sendo vigas simplesmente apoiadas.

Foram resolvidas em conjunto as longarinas por meio do software FTOOL, com o intuito de fazer uma comparação entre os métodos de resolução através dos resultados encontrados. Será calculado o valor da flecha no meio do vão para as vigas longitudinais, devido ao carregamento aplicado na viga.

As seções das longarinas para as pontes de 10 m, 20 m, 30 m e 40 m são mostradas nas Figs. 3.31, 3.32, 3.33 e 3.34, respectivamente.

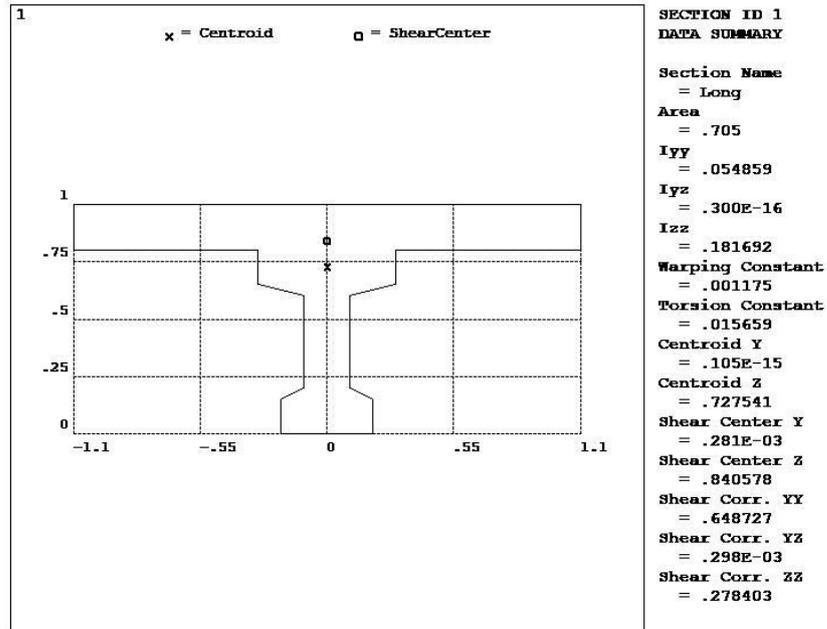


Figura 3.31 - Seção T da longarina 1 para ponte de 10 m de vão, sendo as unidades em m

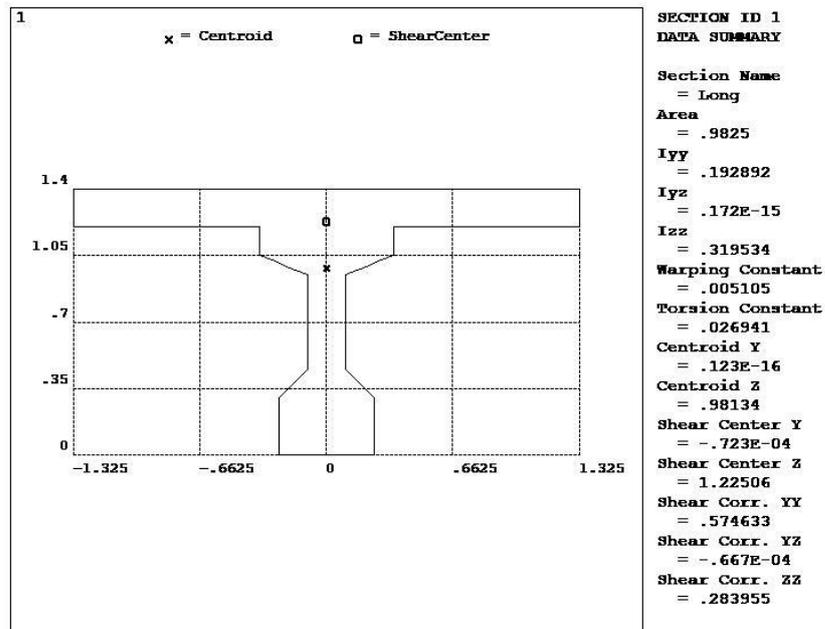


Figura 3.32 - Seção T da longarina 1 para ponte de 20 m de vão, sendo as unidades em m

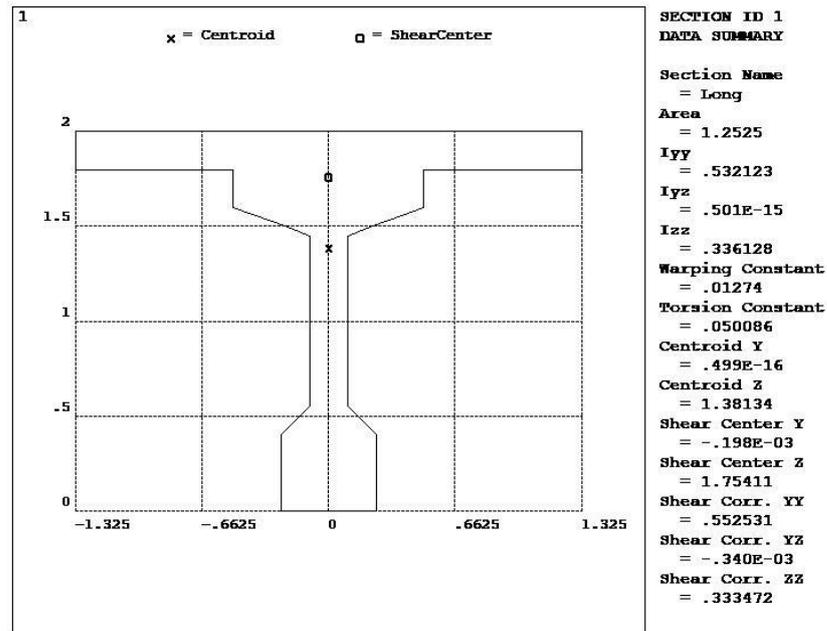


Figura 3.33 - Seção T da longarina 1 para ponte de 30 m de vão, sendo as unidades em m

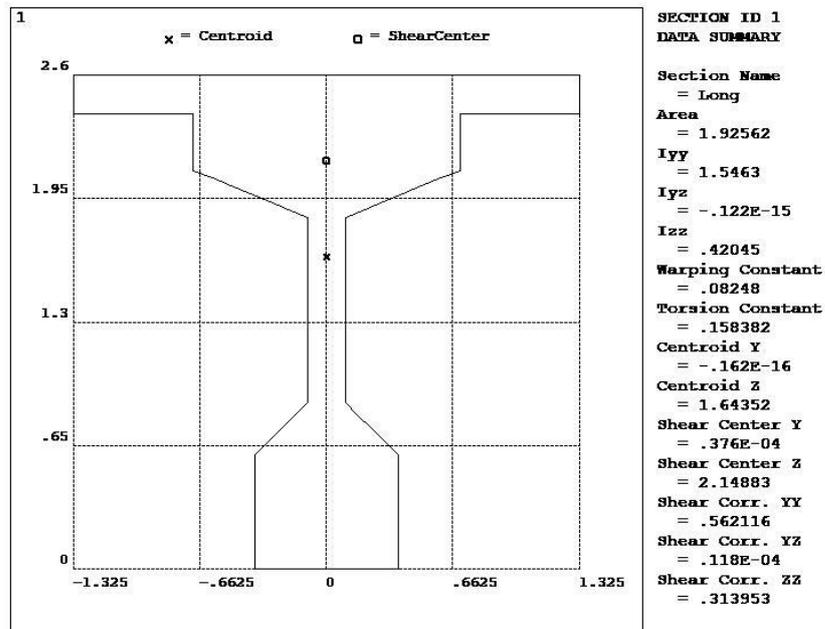


Figura 3.34 - Seção T da longarina 1 para ponte de 40 m de vão, sendo as unidades em m

Foram usados os valores do módulo secante de deformação longitudinal do concreto ( $E$ ) de 26838 MPa e coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) de 0,2. O carregamento será aplicado no meio do vão da longarina e é uma carga concentrada de valor igual à 100 kN.

Foi adotado para os modelos das vigas longitudinais uma malha com o mesmo tamanho de elementos das vigas no sentido  $x$  das pontes de 4 longarinas, sendo igual a 0,25 m.

Após ser definido o carregamento e as condições de contorno, foi resolvido o modelo pelo software ANSYS e resultou nos valores da flecha no meio do vão para cada um dos quatro modelos conforme mostrado na Tabela 3.12. Em seguida, foram comparados com os resultados obtidos pelo software FTOOL. Foi considerado a deformabilidade devido ao esforço cortante em ambos softwares.

**Tabela 3.12 - Tabela contendo os resultados obtidos com o carregamento na longarina de seção T**

Modelo	Flecha no meio do vão (mm)		Diferença (%)
	ANSYS	FTOOL	
10 m	1,528	1,527	0,06
20 m	3,379	3,379	0,00
30 m	4,099	4,106	0,17
40 m	3,361	3,385	0,71

Os resultados para a flecha no meio do vão dos modelos de longarinas, obtido por meio do software ANSYS, foram muito próximos dos valores obtidos por meio do software FTOOL. Sendo assim, os modelos de longarinas demonstraram estar corretos.

### 3.3. Método de Fauchart

Foi desenvolvido o método de Fauchart para a aplicação de cargas nos modelos das longarinas, de seção T, das pontes de 10 m, 20 m, 30 m e 40 m de vão, apresentadas no item 3.2.2. São mostrados nas Tabs. 3.13, 3.14, 3.15 e 3.16 os valores dos momentos de inércia ( $I$ ), constantes das molas transversais ( $k_t$ ), constantes das molas verticais ( $k_v$ ) e constantes de torção ( $J$ ), calculados com as fórmulas apresentadas anteriormente, com base nas seções T mostradas anteriormente.

**Tabela 3.13 - Valores utilizados no método de Fauchart para a ponte de 10 m de vão**

Dados	Viga 1 e 4	Viga 2 e 3
$I$ (m <sup>4</sup> )	0,054859	0,059724
$J$ (m <sup>4</sup> )	0,008000	0,010400
Poisson	0,2	0,2
$E$ (MPa)	26838	26838
$G$ (MPa)	11183	11183
$k_v$ (10 <sup>3</sup> kN/m)	14,342	15,614
$k_t$ (10 <sup>3</sup> kN.m/rad)	8,829	11,478

**Tabela 3.14 - Valores utilizados no método de Fauchart para a ponte de 20 m de vão**

Dados	Viga 1 e 4	Viga 2 e 3
$I$ (m <sup>4</sup> )	0,192892	0,201564
$J$ (m <sup>4</sup> )	0,010267	0,011467
Poisson	0,2	0,2
$E$ (MPa)	26838	26838
$G$ (MPa)	11183	11183
$k_v$ (10 <sup>3</sup> kN/m)	3,152	3,293
$k_t$ (10 <sup>3</sup> kN.m/rad)	2,833	3,164

**Tabela 3.15 - Valores utilizados no método de Fauchart para a ponte de 30 m de vão**

Dados	Viga 1 e 4	Viga 2 e 3
$I$ (m <sup>4</sup> )	0,532123	0,555011
$J$ (m <sup>4</sup> )	0,011867	0,013067
Poisson	0,2	0,2
$E$ (Mpa)	26838	26838
$G$ (Mpa)	11183	11183
$k_v$ (10 <sup>3</sup> kN/m)	1,717	1,791
$k_t$ (10 <sup>3</sup> kN.m/rad)	1,455	1,602

**Tabela 3.16 - Valores utilizados no método de Fauchart para a ponte de 40 m de vão**

Dados	Viga 1 e 4	Viga 2 e 3
$I$ (m <sup>4</sup> )	1,546300	1,609670
$J$ (m <sup>4</sup> )	0,013467	0,014667
Poisson	0,2	0,2
$E$ (Mpa)	26838	26838
$G$ (Mpa)	11183	11183
$k_v$ (10 <sup>3</sup> kN/m)	1,579	1,644
$k_t$ (10 <sup>3</sup> kN.m/rad)	0,929	1,012

A Fig. 3.35 mostra as vigas que representam as pontes a serem analisadas, com as vinculações de mola no lugar das longarinas e suas respectivas constantes. O carregamento aplicado é uma força concentrada de 100 kN. Com esse carregamento será calculada as reações de apoio para cada caso, por meio do FTOOL. Em seguida, serão comparadas as reações para a respectivas vigas longitudinais, por meio do software ANSYS, como mostra a Tabela 3.13. As dimensões utilizadas no modelo para a seção da laje foram de 0,20 m de altura e 1,00 m de largura.



Figura 3.35 - Viga que representa a ponte de 4 longarinas com a carga aplicada no tabuleiro, para o vão de: (a) 10 m; (b) 20 m; (c) 30 m; e (d) 40 m.

Tabela 3.17 – Tabela contendo os resultados das reações na longarina

Modelo	Reações na Viga 1 (kN)				Diferença (%)
	ANSYS			FTOOL	
	$R_1$	$R_2$	$R_{Total} = R_1 + R_2$	$R_{Total}$	
10 m	47,65	47,65	95,29	89,10	6,95
20 m	44,55	44,55	89,10	81,40	9,45
30 m	43,21	43,21	86,42	78,70	9,81
40 m	43,59	43,59	87,17	79,70	9,38

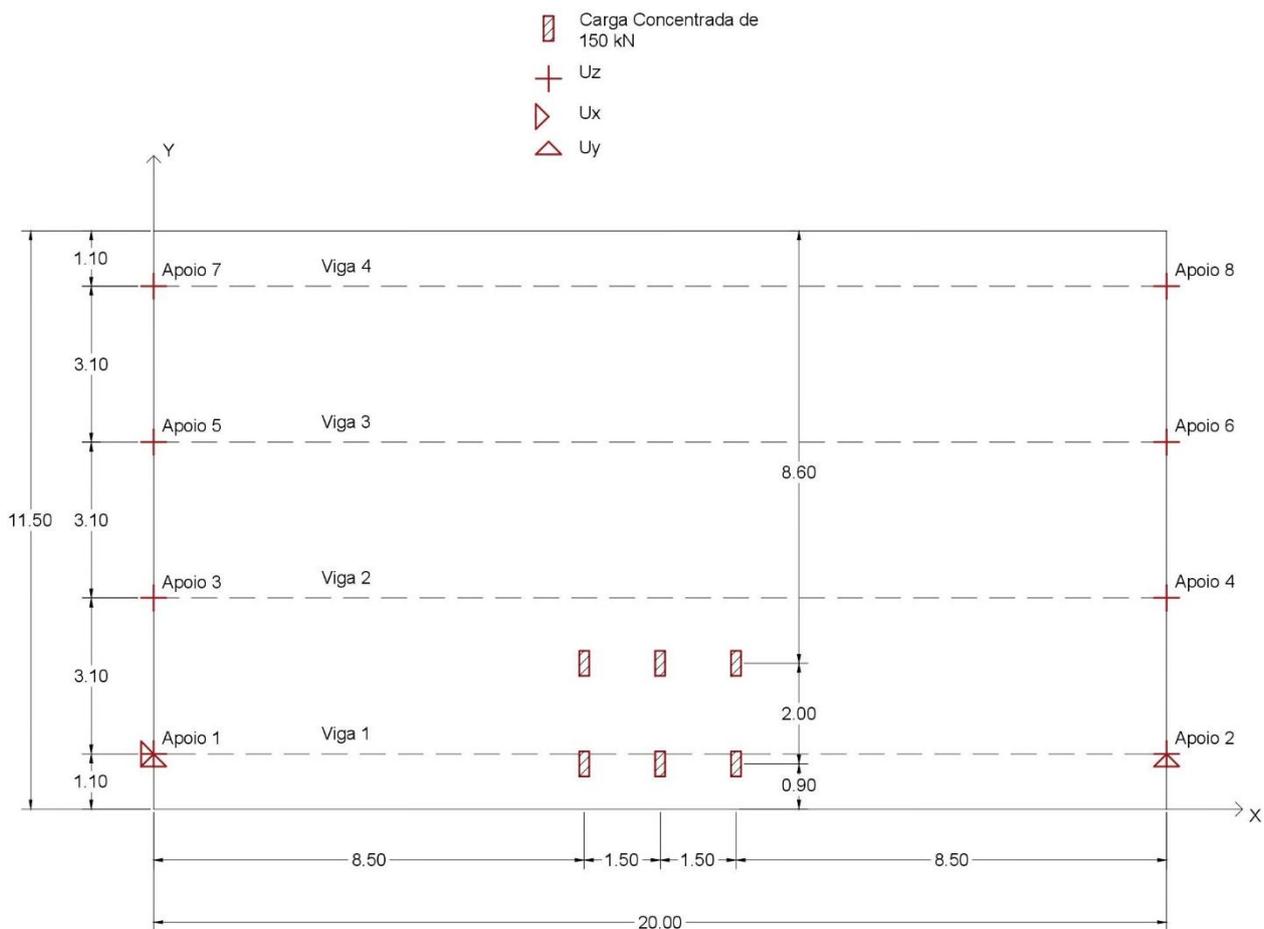
Os resultados obtidos por meio do Método de Fauchart mostraram uma diferença máxima entorno de 10%. Mesmo sendo uma diferença relativamente grande, é um valor aceitável já que se encontra em amparo pelo fator de segurança adotado nos projetos de estrutura.

## 4. ESTUDOS PARAMÉTRICOS

Neste capítulo serão apresentadas as análises estáticas, modais e transientes para os modelos de ponte com 4 longarinas e os modelos de longarina, verificados anteriormente. Os estudos paramétricos irão consistir na análise da influência do comprimento da ponte e da seção transversal da longarina.

Será utilizado como carregamento para as análises estáticas e transientes as cargas pontuais do trem-tipo da NBR 7188 (ABNT, 2013), com o intuito de se obter os valores máximos da flecha e momento fletor no meio do vão e esforço cortante máximo nos apoios da estrutura, para ambas análises. Já na análise modal, serão obtidos os valores das frequências naturais de vibração.

Para a análise estática será considerado exemplo de carregamento mostrado pela Figura 4.1, na qual as cargas do trem-tipo são posicionadas no meio do vão e afastadas em 90 cm da lateral da estrutura.



**Figura 4.1 - Exemplo de modelo do carregamento do trem-tipo para a situação de 20 m de vão, sendo as medidas em m.**

Já para a análise transiente, será considerado o veículo transitando longitudinalmente, com as cargas afastadas em 90 cm da lateral da estrutura.

O afastamento de 90 cm das cargas a lateral da estrutura é devido aos 40 cm de largura de um guarda-corpo mais os 50 cm de distância entre a face lateral do trem-tipo e a roda deste.

Foram usados, nos modelos de ponte com 4 longarinas e modelos de longarina, os valores do módulo secante de deformação longitudinal do concreto ( $E$ ) de 26838 MPa, coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) de 0,2 e massa específica do concreto ( $\gamma$ ) de 2500 kg/m<sup>3</sup>.

#### 4.1. Modelos de ponte com 4 longarinas

Por meio da análise modal, os valores das frequências naturais para os dois primeiros modos de vibração dos modelos de ponte com 4 longarinas foram obtidos, como mostra a Tabela 4.1. Estes modos de vibração representam o modo fletor e o modo torsor do tabuleiro da estrutura.

**Tabela 4.1 - Frequências naturais das estruturas para os modelos de ponte com 4 longarinas**

Ponte de 10 m de vão		Ponte de 20 m de vão		Ponte de 30 m de vão		Ponte de 40 m de vão	
Modo	Frequência (Hz)						
1	9,1780	1	5,4548	1	3,6023	1	2,5158
2	12,8420	2	5,7202	2	3,6778	2	2,8003

Devido à norma de projeto brasileira de pontes, NBR 7188 (ABNT, 2013), não possuir nenhuma recomendação quanto ao valor a ser adotado para o coeficiente de amortecimento ( $\xi$ ), foi realizada uma pesquisa em normas estrangeiras e outros estudos. A norma de projeto para estruturas de pontes Eurocódigo 2 (2003), assim como parte da bibliografia pesquisada, Araujo (2014) e Silva (2002), orientam quanto aos valores para a taxa de amortecimento modal da estrutura. A partir de tais orientações, foi considerado uma taxa de amortecimento ( $\xi$ ) de 2%.

A Tabela 4.2 apresenta os parâmetros  $a_1$  e  $a_2$  utilizados nas análises transientes das estruturas, com uma taxa de 2% de amortecimento, para os modelos de ponte com 4 longarinas.

**Tabela 4.2 - Parâmetros  $a_1$  e  $a_2$  usados na análise transiente dos modelos de ponte com 4 longarinas**

Modelo	Taxa de Amortecimento (%)	Frequência natural circular do modo 1 (Hz)	Frequência natural circular do modo 2 (Hz)	Frequência natural circular do modo 1 (rad/s)	Frequência natural circular do modo 2 (rad/s)	$a_1$	$a_2$
10 m	2	9,1780	12,8420	57,6671	80,6887	1,34525082	0,00028911
20 m	2	5,4548	5,7202	34,2735	35,9411	0,70174992	0,00056968
30 m	2	3,6023	3,6778	22,6339	23,1083	0,45737298	0,00087447
40 m	2	2,5158	2,8003	15,8072	17,5948	0,33306377	0,00119753

Inicialmente foi realizada uma análise transiente com o carregamento do trem-tipo da norma brasileira composto por cargas pontuais de 75 kN, representando a carga transmitida por cada roda para a estrutura, e transitando com velocidade de 80 km/h.

Com a intenção de simular a travessia do trem-tipo, foi elaborada uma estratégia de modelagem partindo pela identificação dos nós onde serão aplicadas as cargas. Os nós utilizados para a simulação da passagem da carga possuem uma distância entre si de 0,50 m.

Em seguida, os resultados dos esforços máximos, na viga 1, obtidos para cada situação foram comparados com os valores da análise estática, como demonstrado na Tabs. 4.3, 4.4, 4.5 e 4.6.

**Tabela 4.3 - Comparação entre os efeitos dinâmicos devido à carga pontual móvel e os efeitos dinâmicos recomendados pela NBR 7188 (ABNT, 2013), para o modelo de ponte com 4 longarinas e 10 m de vão.**

Esforços	Carregamento Estático	Carregamento Dinâmico	FAD	Fator de Correção NBR - 7188:2013	Fator de Correção NBR - 7188:1984
Deslocamento (mm)	3,99	4,05	1,02	1,35	1,33
Esforço Cortante (kN)	268,92	289,42	1,08		
Momento Fletor (kN.m)	595,08	595,23	1,00		

**Tabela 4.4 - Comparação entre os efeitos dinâmicos devido à carga pontual móvel e os efeitos dinâmicos recomendados pela NBR 7188 (ABNT, 2013), para o modelo de ponte com 4 longarinas e 20 m de vão.**

Esforços	Carregamento Estático	Carregamento Dinâmico	FAD	Fator de Correção NBR - 7188:2013	Fator de Correção NBR - 7188:1984
Deslocamento (mm)	9,20	9,32	1,01	1,30	1,26
Esforço Cortante (kN)	292,47	303,23	1,04		
Momento Fletor (kN.m)	1273,51	1295,92	1,02		

**Tabela 4.5 - Comparação entre os efeitos dinâmicos devido à carga pontual móvel e os efeitos dinâmicos recomendados pela NBR 7188 (ABNT, 2013), para o modelo de ponte com 4 longarinas e 30 m de vão.**

Esforços	Carregamento Estático	Carregamento Dinâmico	FAD	Fator de Correção NBR - 7188:2013	Fator de Correção NBR - 7188:1984
Deslocamento (mm)	10,83	11,10	1,02	1,27	1,19
Esforço Cortante (kN)	300,48	302,17	1,01		
Momento Fletor (kN.m)	1920,13	1930,75	1,01		

**Tabela 4.6 - Comparação entre os efeitos dinâmicos devido à carga pontual móvel e os efeitos dinâmicos recomendados pela NBR 7188 (ABNT, 2013), para o modelo de ponte com 4 longarinas e 40 m de vão.**

Esforços	Carregamento Estático	Carregamento Dinâmico	FAD	Fator de Correção NBR - 7188:2013	Fator de Correção NBR - 7188:1984
Deslocamento (mm)	8,55	8,65	1,01	1,24	1,12
Esforço Cortante (kN)	304,76	304,00	1,00		
Momento Fletor (kN.m)	2523,14	2530,27	1,00		

Logo após, foi realizada uma análise transiente com o carregamento do trem-tipo composto por cargas harmônicas  $P + Q \sin(\Omega t)$  e transitando com velocidade de 80 km/h.

Foi adotado o valor de 75 kN para a carga concentrada ( $P$ ), referente as cargas transmitidas por cada roda do trem-tipo da norma para a estrutura. Para a frequência circular da força harmônica ( $\Omega$ ) foi utilizado o valor de 4 Hz, sugerido por Melo (2007), para representar as características dinâmicas de uma carga móvel. Já para a amplitude ( $Q$ ), devido a não se encontrar nenhuma recomendação, utilizou-se uma carga de  $Q = 0,10P$ , com a qual se obteve resultados semelhantes a Rossigali (2015).

Em seguida, os resultados dos esforços máximos, na viga 1, obtidos para cada situação foram comparados com os valores da análise estática, como demonstrado nas Tabs. 4.7, 4.8, 4.9 e 4.10.

**Tabela 4.7 - Comparação entre os efeitos dinâmicos devido a carga harmônica móvel e os efeitos dinâmicos recomendados pela NBR 7188 (ABNT, 2013), para o modelo de ponte com 4 longarinas e 10 m de vão.**

Esforços	Carregamento Estático	Carregamento Dinâmico	FAD	Fator de Correção NBR - 7188:2013	Fator de Correção NBR - 7188:1984
Deslocamento (mm)	3,99	4,39	1,10	1,35	1,33
Esforço Cortante (kN)	268,92	295,43	1,10		
Momento Fletor (kN.m)	595,08	643,97	1,08		

**Tabela 4.8 - Comparação entre os efeitos dinâmicos devido a carga harmônica móvel e os efeitos dinâmicos recomendados pela NBR 7188 (ABNT, 2013), para o modelo de ponte com 4 longarinas e 20 m de vão.**

Esforços	Carregamento Estático	Carregamento Dinâmico	FAD	Fator de Correção NBR - 7188:2013	Fator de Correção NBR - 7188:1984
Deslocamento (mm)	9,20	11,35	1,23	1,30	1,26
Esforço Cortante (kN)	292,47	307,32	1,05		
Momento Fletor (kN.m)	1273,51	1541,98	1,21		

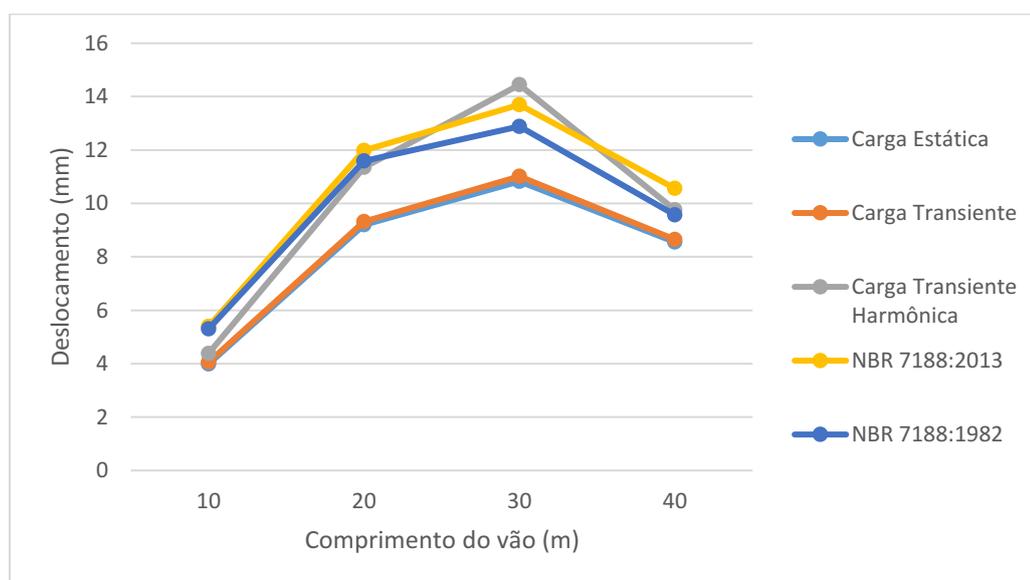
**Tabela 4.9 - Comparação entre os efeitos dinâmicos devido a carga harmônica móvel e os efeitos dinâmicos recomendados pela NBR 7188 (ABNT, 2013), para o modelo de ponte com 4 longarinas e 30 m de vão.**

Esforços	Carregamento Estático	Carregamento Dinâmico	FAD	Fator de Correção NBR - 7188:2013	Fator de Correção NBR - 7188:1984
Deslocamento (mm)	10,83	14,44	1,33	1,27	1,19
Esforço Cortante (kN)	300,48	303,50	1,01		
Momento Fletor (kN.m)	1920,13	2209,85	1,15		

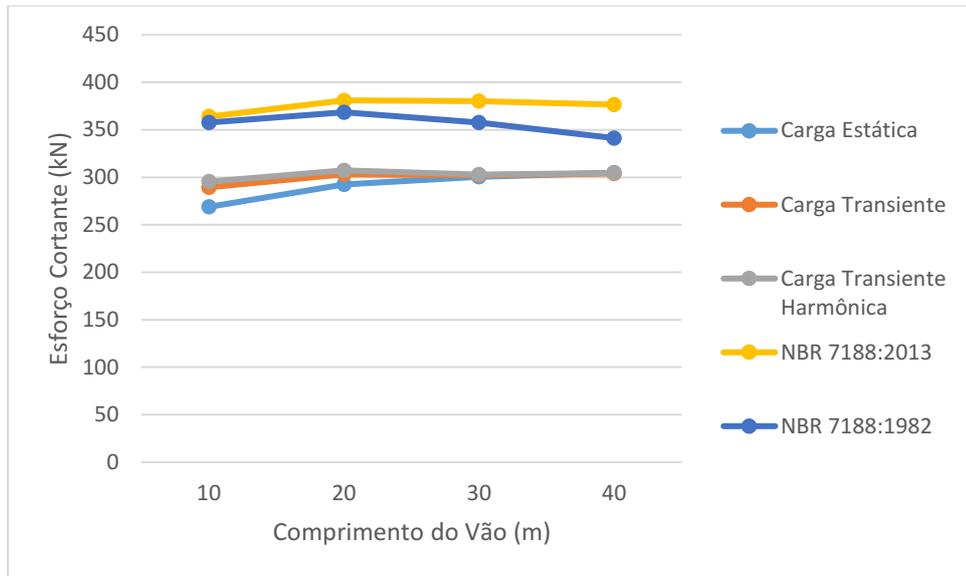
**Tabela 4.10 - Comparação entre os efeitos dinâmicos devido à carga harmônica móvel e os efeitos dinâmicos recomendados pela NBR 7188 (ABNT, 2013), para o modelo de ponte com 4 longarinas e 40 m de vão.**

Esforços	Carregamento Estático	Carregamento Dinâmico	FAD	Fator de Correção NBR - 7188:2013	Fator de Correção NBR - 7188:1984
Deslocamento (mm)	8,55	9,76	1,14	1,24	1,12
Esforço Cortante (kN)	304,76	304,54	1,00		
Momento Fletor (kN.m)	2523,14	2822,48	1,12		

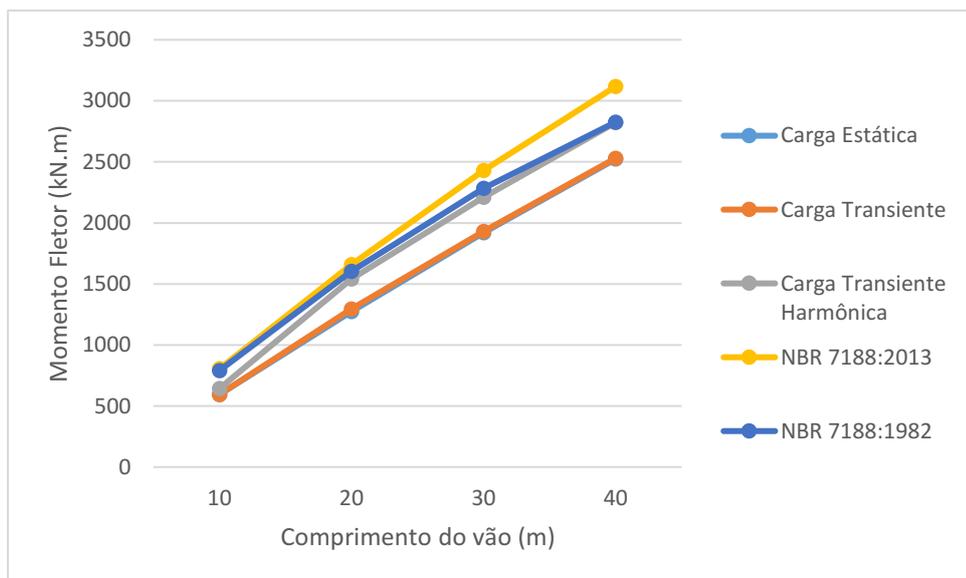
As Figuras 4.2, 4.3 e 4.4 apresentam, respectivamente, os valores dos deslocamentos, esforços cortantes e momentos fletores máximos para cada vão da estrutura, devido as cargas estáticas, cargas transientes, cargas transientes harmônicas e as cargas majoradas de acordo com as NBR 7188:2013 e NBR 7188:1984.



**Figura 4.2 - Gráfico comparando os deslocamentos máximos no meio do vão dos modelos de ponte com 4 longarinas**



**Figura 4.3 - Gráfico comparando os esforços cortantes máximos nos apoios dos modelos de ponte com 4 longarinas**



**Figura 4.4 - Gráfico comparando os momentos fletores máximos no meio do vão dos modelos de ponte com 4 longarinas**

Nas Tabelas 4.3 a 4.10, é possível observar que somente a passagem de uma carga transiente sobre a estrutura não provoca aumento do FAD no meio do vão da estrutura, mas sim a passagem de uma carga transiente harmônica, onde se é capaz de melhor representar a interação veículo-pavimento-estrutura.

Na Figura 4.2, o deslocamento máximo no meio do vão calculados com base na norma brasileira apresentaram resultados muito próximos com os valores obtidos pelas cargas transientes,

demonstrando uma boa conversão dos esforços estáticos aos dinâmicos, com exceção do vão de 30 m, sendo assim necessário uma maior atenção para este caso.

Na Figura 4.3, os esforços cortantes máximos nos apoios gerados pelas cargas transientes se demonstraram ser inferiores ao calculados com base na norma brasileira, apresentando um dimensionamento exagerado para esta região.

Na Figura 4.4, os momentos fletores máximos no meio do vão calculados com base na norma brasileira apresentaram resultados muito próximos com os valores obtidos pelas cargas transientes, demonstrando uma boa conversão dos esforços estáticos aos dinâmicos.

## 4.2. Modelos de longarinas

Por meio da análise modal, os valores das frequências naturais para os dois primeiros modos de vibração dos modelos de longarina foram obtidos, como mostra a Tab. 4.11. Estes modos de vibração representam o 1º e 2º modo fletor da estrutura.

**Tabela 4.11 - Frequências naturais das estruturas para os modelos de longarina**

Ponte de 10 m de vão		Ponte de 20 m de vão		Ponte de 30 m de vão		Ponte de 40 m de vão	
Modo	Frequência (Hz)						
1	13,8650	1	5,5762	1	3,6587	1	2,8230
2	50,6880	2	21,001	2	13,9030	2	10,6670

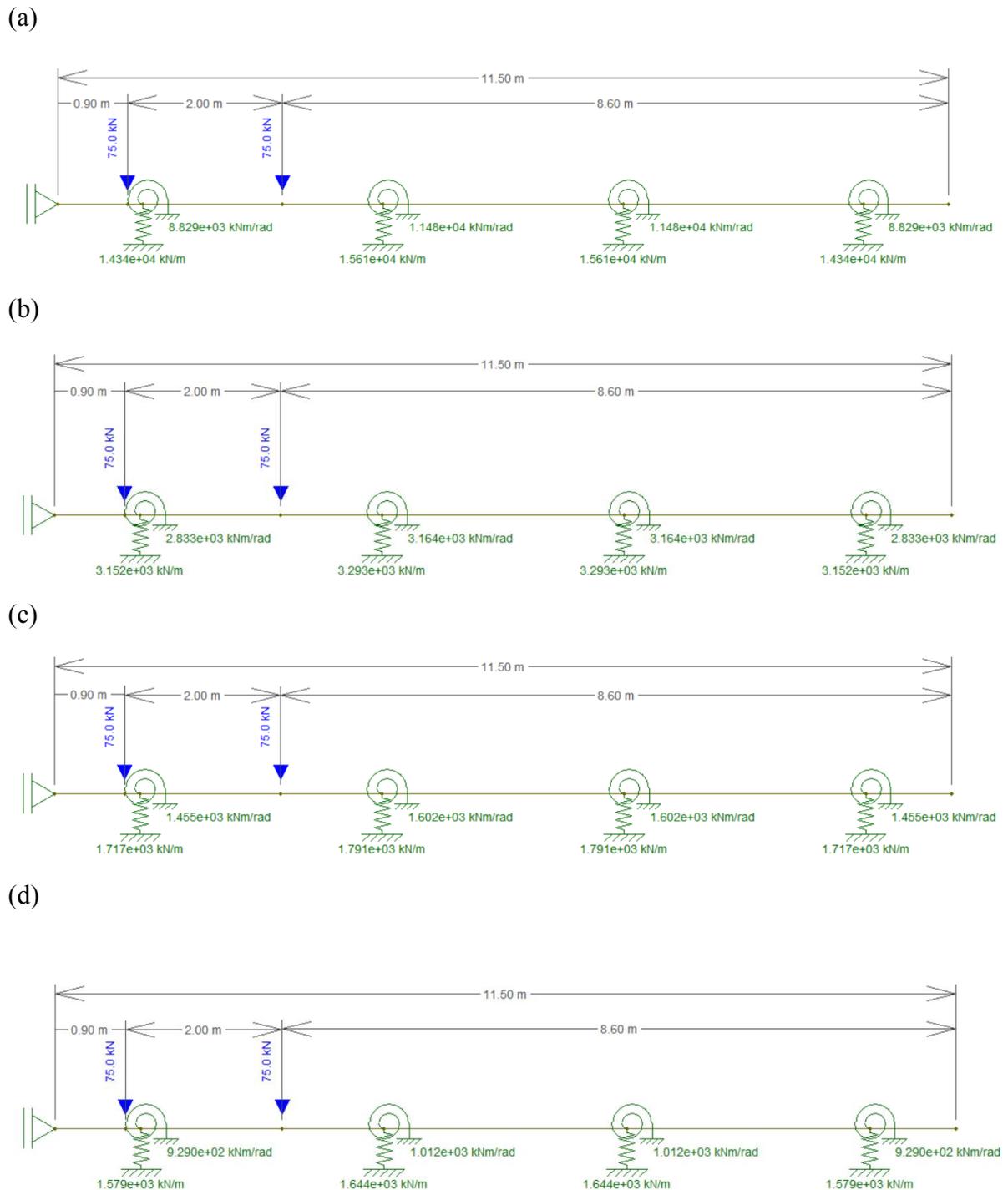
Foi utilizado o mesmo coeficiente de amortecimento dos modelos de ponte com 4 longarinas. A Tabela 4.12 apresenta os parâmetros  $a_1$  e  $a_2$  utilizados nas análises transientes das estruturas, com uma taxa de 2% de amortecimento, para os modelos de longarina.

**Tabela 4.12 - Parâmetros  $a_1$  e  $a_2$  usados na análise transiente dos modelos de longarina**

Modelo	Taxa de amortecimento (%)	Frequência natural circular do modo 1 (Hz)	Frequência natural circular do modo 2 (Hz)	Frequência natural circular do modo 1 (rad/s)	Frequência natural circular do modo 2 (rad/s)	$a_1$	$a_2$
10 m	2	13,8650	50,6880	87,1164	318,4821	2,73620391	0,00009862
20 m	2	5,5762	21,0010	35,0363	131,9532	1,10741130	0,00023954
30 m	2	3,6587	13,9030	22,9883	87,3551	0,72796186	0,00036250
40 m	2	2,8230	10,6670	17,7374	67,0227	0,56102354	0,00047192

Foi realizada uma análise transiente com o carregamento do trem-tipo composto por cargas pontuais, transitando com velocidade de 80 km/h.

Para os valores do carregamento foram utilizados os modelos do Método de Fauchart, para encontrar o valor da carga concentrada referente a cada eixo do veículo. A Fig. 4.5 mostra os modelos do Método de Fauchart para os vãos de 10 m, 20 m, 30 m e 40 m, com as cargas do eixo do veículo aplicadas nas devidas posições.



**Figura 4.5 -** Viga que representa a ponte de 4 longarinas com as cargas do eixo do trem-tipo aplicadas no tabuleiro, para o vão de: (a) 10m; (b) 20 m; (c) 30 m; e (d) 40 m.

A Tabela 4.13 mostra os valores das cargas concentradas, obtidas por meio do Método de Fauchart, referentes a cada eixo do trem-tipo para os de 10 m, 20 m, 30 m e 40 m.

**Tabela 4.13 - Valores das cargas concentradas, obtidas pelo Método de Fauchart**

Modelo	Carga concentrada referente a cada eixo do trem-tipo (kN)
10 m	100,5
20 m	97,2
30 m	96,0
40 m	97,1

Com a intenção de simular a travessia das cargas móveis, foi elaborada uma estratégia de modelagem partindo pela identificação dos nós onde serão aplicadas as cargas. Os nós utilizados para a simulação da passagem da carga possuem uma distância entre si de 0,50 m.

Em seguida, os resultados dos esforços máximos obtidos para cada situação foram comparados com os valores da análise estática, como demonstrado nas Tabs. 4.14, 4.15, 4.16 e 4.17.

**Tabela 4.14 - Comparação entre os efeitos dinâmicos devido à carga pontual móvel e os efeitos dinâmicos recomendados pela NBR 7188 (ABNT, 2013), para o modelo de longarina com 10 m de vão.**

Esforços	Carregamento Estático	Carregamento Dinâmico	FAD	Fator de Correção NBR - 7188:2013	Fator de Correção NBR - 7188:1984
Deslocamento (mm)	4,19	4,43	1,06	1,35	1,33
Esforço Cortante (kN)	256,30	285,41	1,11		
Momento Fletor (kN.m)	603,00	622,10	1,03		

**Tabela 4.15 - Comparação entre os efeitos dinâmicos devido à carga pontual móvel e os efeitos dinâmicos recomendados pela NBR 7188 (ABNT, 2013), para o modelo de longarina com 20 m de vão.**

Esforços	Carregamento Estático	Carregamento Dinâmico	FAD	Fator de Correção NBR - 7188:2013	Fator de Correção NBR - 7188:1984
Deslocamento (mm)	9,61	9,81	1,02	1,30	1,26
Esforço Cortante (kN)	269,70	291,98	1,08		
Momento Fletor (kN.m)	1312,20	1378,55	1,05		

**Tabela 4.16 - Comparação entre os efeitos dinâmicos devido à carga pontual móvel e os efeitos dinâmicos recomendados pela NBR 7188 (ABNT, 2013), para o modelo de longarina com 30 m de vão.**

Esforços	Carregamento Estático	Carregamento Dinâmico	FAD	Fator de Correção NBR - 7188:2013	Fator de Correção NBR - 7188:1984
Deslocamento (mm)	11,67	11,92	1,02	1,27	1,19
Esforço Cortante (kN)	273,60	278,14	1,02		
Momento Fletor (kN.m)	2016,00	2032,54	1,01		

**Tabela 4.17 - Comparação entre os efeitos dinâmicos devido à carga pontual móvel e os efeitos dinâmicos recomendados pela NBR 7188 (ABNT, 2013), para o modelo de longarina com 40 m de vão.**

Esforços	Carregamento Estático	Carregamento Dinâmico	FAD	Fator de Correção NBR - 7188:2013	Fator de Correção NBR - 7188:1984
Deslocamento (mm)	9,72	10,12	1,04	1,24	1,12
Esforço Cortante (kN)	280,40	281,64	1,00		
Momento Fletor (kN.m)	2767,40	2841,73	1,03		

Logo após, foi realizada uma análise transiente com o carregamento do trem-tipo composto por cargas harmônicas  $P + Q \sin(\Omega t)$  e transitando com velocidade de 80 km/h.

Foi adotado os valores correspondentes da Tabela 4.13 para a carga concentrada ( $P$ ), referente as cargas transmitidas por cada eixo para a estrutura. Para a frequência circular da força harmônica ( $\Omega$ ) foi utilizado novamente o valor de 4 Hz, sugerido por Melo (2007), para representar as características dinâmicas de uma carga móvel. Já para a amplitude ( $Q$ ), utilizou-se a mesma carga de  $Q = 0,10P$ .

Em seguida, os resultados dos esforços máximos obtidos para cada situação foram comparados com os valores da análise estática, como demonstrado nas Tabs. 4.18, 4.19, 4.20 e 4.21.

**Tabela 4.18 - Comparação entre os efeitos dinâmicos devido à carga harmônica móvel e os efeitos dinâmicos recomendados pela NBR 7188 (ABNT, 2013), para o modelo de longarina com 10 m de vão.**

Esforços	Carregamento Estático	Carregamento Dinâmico	FAD	Fator de Correção NBR - 7188:2013	Fator de Correção NBR - 7188:1984
Deslocamento (mm)	4,19	4,70	1,12	1,35	1,33
Esforço Cortante (kN)	256,30	295,03	1,15		
Momento Fletor (kN.m)	603,00	661,26	1,10		

**Tabela 4.19 - Comparação entre os efeitos dinâmicos devido à carga harmônica móvel e os efeitos dinâmicos recomendados pela NBR 7188 (ABNT, 2013), para o modelo de longarina com 20 m de vão.**

Esforços	Carregamento Estático	Carregamento Dinâmico	FAD	Fator de Correção NBR - 7188:2013	Fator de Correção NBR - 7188:1984
Deslocamento (mm)	9,61	12,03	1,25	1,30	1,26
Esforço Cortante (kN)	269,70	295,83	1,10		
Momento Fletor (kN.m)	1312,20	1614,03	1,23		

**Tabela 4.20 - Comparação entre os efeitos dinâmicos devido à carga harmônica móvel e os efeitos dinâmicos recomendados pela NBR 7188 (ABNT, 2013), para o modelo de longarina com 30 m de vão.**

Esforços	Carregamento Estático	Carregamento Dinâmico	FAD	Fator de Correção NBR - 7188:2013	Fator de Correção NBR - 7188:1984
Deslocamento (mm)	11,67	16,69	1,43	1,27	1,19
Esforço Cortante (kN)	273,60	283,71	1,04		
Momento Fletor (kN.m)	2016,00	2548,34	1,26		

**Tabela 4.21 - Comparação entre os efeitos dinâmicos devido à carga harmônica móvel e os efeitos dinâmicos recomendados pela NBR 7188 (ABNT, 2013), para o modelo de longarina com 40 m de vão.**

Esforços	Carregamento Estático	Carregamento Dinâmico	FAD	Fator de Correção NBR - 7188:2013	Fator de Correção NBR - 7188:1984
Deslocamento (mm)	9,72	10,78	1,11	1,24	1,12
Esforço Cortante (kN)	280,40	284,65	1,02		
Momento Fletor (kN.m)	2767,40	2997,22	1,08		

As Figuras 4.6, 4.7 e 4.8 apresentam, respectivamente, os valores dos deslocamentos, esforços cortantes e momentos fletores máximos para cada vão da estrutura, devido às cargas estáticas, cargas transientes, cargas transientes harmônicas e as cargas majoradas de acordo com as NBR 7188:2013 e NBR 7188:1984.

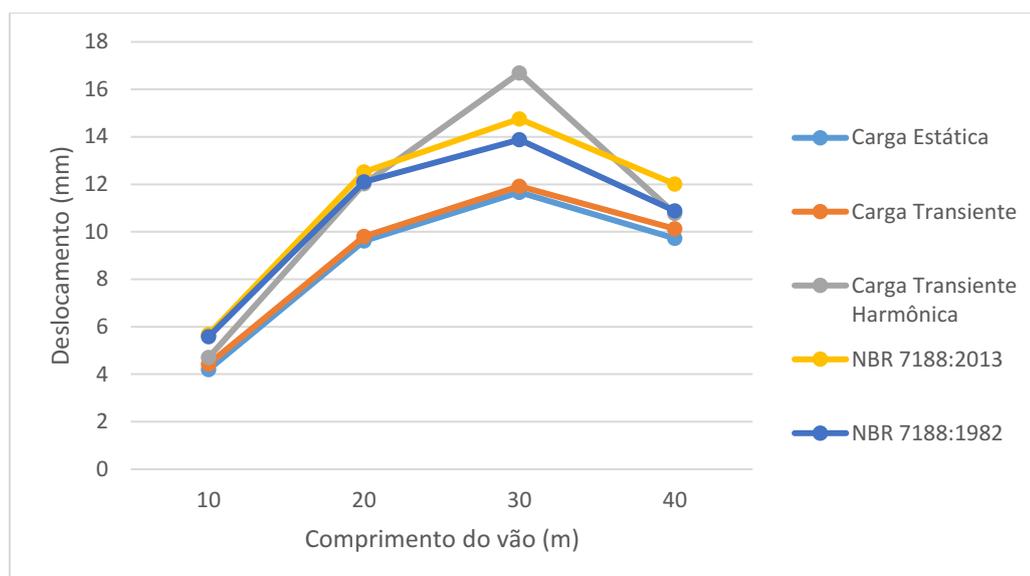


Figura 4.6 - Gráfico comparando os deslocamentos máximos no meio do vão dos modelos de longarinas

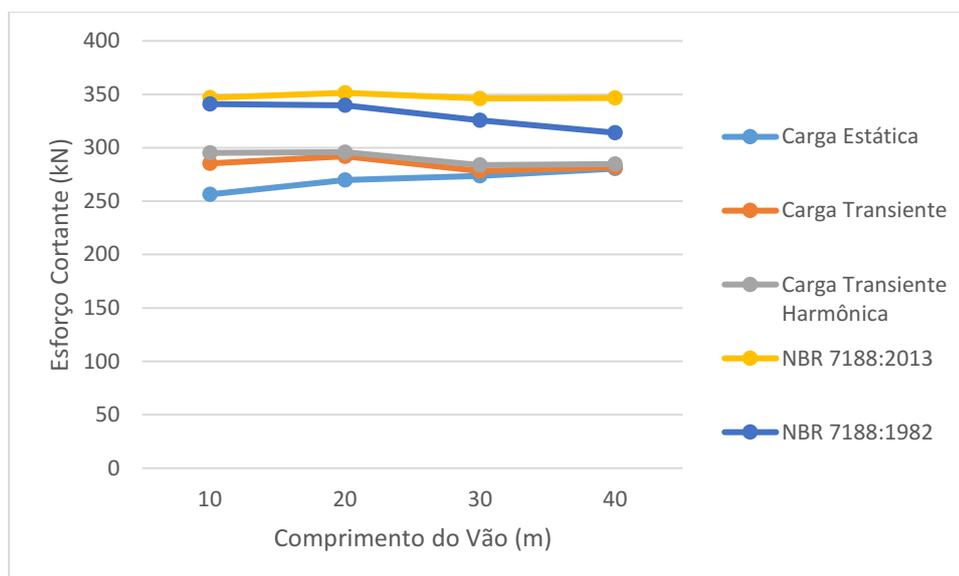
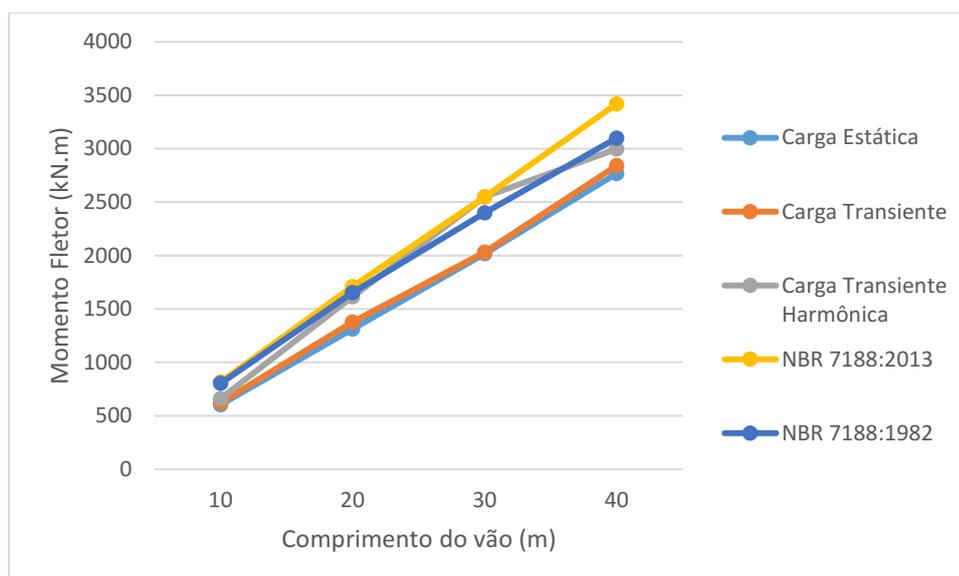


Figura 4.7 - Gráfico comparando os esforços cortantes máximos nos apoios dos modelos de longarinas



**Figura 4.8 - Gráfico comparando os momentos fletores máximos no meio do vão dos modelos de longarinas**

Os resultados obtidos por meio dos modelos de longarinas foram semelhantes aos resultados dos modelos de ponte com 4 longarinas, demonstrando uma boa representação da estrutura inteira com base em modelos simplificados.

## 5. CONCLUSÃO

O objetivo deste trabalho foi apresentar a modelagem computacional de pontes de concreto para a realização de análises estáticas, modais e transientes. Foram apresentados modelos de elementos finitos de grelha e de vigas. Também foi apresentado o método de Fauchart.

As verificações dos modelos-computacionais no software ANSYS (2018), referente aos modelos de ponte com 4 longarinas e modelos de longarinas, retirados de Moura (2018), demonstraram que tais modelos são capazes de representar de maneira adequada os esforços gerados em uma estrutura real de ponte de concreto.

As verificações dos métodos de análise modal e transientes no software ANSYS (2018), com as expressões de Fryba (1972), demonstraram que os métodos de análises construídos são capazes de representar adequadamente os efeitos dinâmicos em uma ponte de concreto.

Tanto os modelos de ponte com 4 longarinas como os modelos de longarinas apresentam resultados semelhantes, onde é possível observar que somente a passagem de uma carga móvel transiente não é capaz de provocar um aumento no FAD, mas sim a passagem de uma carga harmônica, que representa uma melhor interação veículo-pavimento-estrutura.

Nos modelos de análise transiente estudados, se observa que o FAD não possui o mesmo comportamento que o fator de correção da NBR 7188 (ABNT, 2013). Tal resultado é devido ao fato que a norma de projeto brasileira não leva em consideração diversos fatores importantes, como por exemplo as condições da pista de rodagem, a massa do veículo e da estrutura e o amortecimento destes.

Devido aos resultados semelhantes obtidos nos modelos de ponte com 4 longarinas e modelos de longarinas, foi possível constatar que este último, em conjunto com o modelo do Método de Fauchart, representa satisfatoriamente o comportamento de uma estrutura por completo, mesmo sendo um modelo com base em simplificações.

A interação veículo-pavimento-estrutura é diretamente relacionada ao valor da Amplitude ( $Q$ ), que leva em consideração o peso do veículo, o efeito da irregularidade da pista ou mesmo a superposição de ambas as ações. Para estudos futuros, há a necessidade de uma melhor compreensão do valor da Amplitude, para assim desenvolver modelos computacionais com maior exatidão para as situações estudadas.

Os resultados obtidos para as vigas, demonstraram que para alguns casos, os coeficientes de impacto tiveram uma boa aproximação para transformar os esforços estáticos em dinâmicos. Porém em outros casos, tais coeficientes não apresentaram o mesmo resultado.

Em seus estudos, Rossigali (2015) obteve resultados semelhantes ao comparar os esforços provocados por um carregamento real de uma estrutura rodoviária brasileira, aos esforços obtidos pela majoração das cargas pelo coeficiente de impacto.

Por meio do estudo realizado foi possível identificar que os coeficientes de impacto previstos na norma podem ser aprimorados a partir de novos estudos levando em consideração carregamentos atuais das rodovias brasileiras e diversos efeitos dinâmicos não considerados, tais como a irregularidades geométricas do pavimento, os ressaltos no início da ponte, o próprio movimento da estrutura, a massa, o amortecimento e a rigidez da estrutura, como também do veículo, entre outros fatores.

## 6. BIBLIOGRAFIA

- AHI, Antonio Jorge de Figueiredo. **Análise de Fadiga em Pontes Rodoviárias de Concreto Armado**. 2009. 154 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-graduação em Engenharia Civil, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.
- AMORIM, David Leonardo Nascimento de Figueiredo; BARBOZA, Aline da Silva Ramos; BARBIRATO, João Carlos Cordeiro. Técnica De Analogia De Grelha Associada A Um Modelo De Pórtico Para Análise Do Comportamento De Sistemas Estruturais De Pontes. **5º Congresso Brasileiro de Pontes e Estruturas**, Rio de Janeiro, junho 2012.
- ANSYS Stuba, 2014. Disponível em: <<http://www.ansys.stuba.sk/>>. Acesso em: 17 jun. 2018.
- ANSYS Student. Versão 18.2. Canonsburg: ANSYS, Inc., 2018. Disponível em: <<https://www.ansys.com/academic/free-student-products>>. Acesso em: 01 jun. 2018.
- ARAUJO, Andréa Oliveira de. **Modelos analítico-numéricos para interação dinâmica veículo - pavimento - estrutura de ponte rodoviária**. 2014. 69 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.
- ARRUDA, Mário Rui Tiago. **Análise Dinâmica De Estruturas Com Elementos Finitos Híbridos-Mistos De Tensão**. 2008. 107 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa, 2008.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto - Procedimento. Rio de Janeiro, 2014. 238 p.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 7187**: Projeto de pontes de concreto armado e de concreto protendido - Procedimento. Rio de Janeiro, 2003. 11 p.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 7188**: Carga móvel rodoviária e de pedestres em pontes, viadutos, passarelas e outras estruturas. Rio de Janeiro, 2013. 14 p.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 7188**: Carga móvel rodoviária e de pedestres em pontes, viadutos, passarelas e outras estruturas. Rio de Janeiro, 1984. 4 p.
- BATHE, Klaus- Jürgen. **Finite Element Procedures**. Nova Jersey: Prentice-hall, 1984.
- BOTELHO, Thaís de Oliveira. **Modelagem Computacional De Tabuleiros De Pontes De Concreto**. 2016. 123 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Modelagem Computacional, Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, 2016.
- BURNETT, David. **Finite Element Analysis: From Concepts to Applications**. Nova York: Addison Wesley Publishers, 1987.
- CLOUGH, Ray; PENZIEN, Joseph. **Dynamics of Structures**. Berkeley: Computers & Structures, Inc, 1995.
- DE ALMEIDA, Maria Cascão Ferreira. **Estruturas Isostáticas**. São Paulo: Oficina de Textos, 2009.

- DE AMORIM, Anderson Bastos Amorim de. **Avaliação da Resposta Dinâmica de Pontes Rodoviárias com Pavimentos Irregulares e Comparação com a Metodologia de Projeto Proposta pela NBR 7187**. 2007. 145 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007.
- EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **EN 1991-2**: Eurocode 1: Actions on structures - Part 2: Traffic loads on bridges. Bruxelas: CEN, 2003.
- FERREIRA, Vitor Teixeira. **Modelo Simplificado para a Análise Dinâmica de Estruturas Mistas de Pontes**. 1999. 108 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1999.
- FONSECA, Flavio Torres da. **Sistema computacional para análise dinâmica geometricamente não-linear através do método dos elementos finitos**. 2008. 223 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008.
- FONTANA, Patricia. **Análise de modelos de distribuição transversal de cargas em superestruturas de viga em seção caixão de pontes e viadutos alargados**. 2016. 151 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2016.
- FRYBA, Ladislav. **Vibration of Solids and Structures under Moving Loads**. Praga: Thomas Telford, 1972.
- FTOOL: Um Programa Gráfico-Interativo para Ensino de Comportamento de Estruturas. Versão 4.00. PUC-Rio: Luiz Fernando Martha, 2018. Disponível em: <<https://www.engenhariacivil.com/ftool-400>>. Acesso em: 01 jun. 2018.
- HAMBLY, Edmund. **Bridge Deck Behaviour**. Nova York: E & FN SPON, 1976.
- HEINEN, Sabrina Kalise. **Efeito da distribuição transversal das cargas na Obtenção de linhas de influência reais usando um sistema de pesagem em movimento em pontes**. 2016. 148 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2016.
- HUACHO, Carlos Alonso Pacheco. **Análise Paramétrica de Vibrações Induzidas em Pontes Devido à Cargas Móveis**. 2014. 108 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Estruturas e Construção Civil, Faculdade de Tecnologia da Universidade de Brasília, Brasília, 2014.
- KÜSTER, Leandro Dias; SARTORTI, Artur Lenz. Análise dinâmica de estruturas de concreto: Avaliação de três sistemas construtivos de lajes. **Teoria e Prática na Engenharia Civil**, Rio Grande, v. 11, n. 18, p.13-22, nov. 2011.
- LEITÃO, Fernando Nahid. **Verificação à Fadiga de Pontes Rodoviárias Mistas (Aço-Concreto)**. 2009. 189 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-graduação em Engenharia Civil, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.
- LEONHARDT, F. **Construções de Concreto - Princípios básicos da Construção de Pontes de Concreto**. 1ª Edição. ed. Rio de Janeiro: Editora Interciência Ltda, v. 6, 1979.

- LOPES, Elvis Dináti Chantre. **Influência da Velocidade, do Espaçamento e do Número de Veículos sobre a Resposta Dinâmica de Pontes Rodoviárias de Concreto Armado**. 2008. 129 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.
- LOTTI, Raquel. Aplicabilidade científica do método dos elementos finitos. **Revista Dental Press de Ortodontia e Ortopedia Facial**, Maringá, v. 11, n. 2, p.35-43, abr. 2006.
- MACEDO, T. A.; LOMBARDI, D. B.; DUTRA, R. D. F. Análise Dinâmica De Pontes: Estudo Comparativo Entre Cargas Móveis Rodoviárias E Ferroviárias Com O Uso Do Software ANSYS. **58º Congresso Brasileiro do Concreto**, Belo Horizonte, outubro 2016.
- MADENCI, Erdogan; GUVEN, Ibrahim. **The Finite Element Method and Applications in Engineering Using ANSYS**. Nova York: Springer, 2006.
- MARCHETTI, Osvaldemar. **Pontes de Concreto Armado**. São Paulo: Blucher, 2008.
- MEIRELES, José Filipe Bizarro de. **Análise Dinâmica De Estruturas Por Modelos De Elementos Finitos Identificados Experimentalmente**. 2007. 344 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Mecânica, Universidade do Minho, Guimarães, 2007.
- MEIROVITCH, Leonard. **Elements of Vibration Analysis**. Boston: Mcgraw-hill, 1986.
- MELO, Eduardo Souza de. **Interação Dinâmica Veículo-Estrutura Em Pequenas Pontes Rodoviárias**. 2007. 148 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007.
- MOAVENI, Saeed. **Finite Element Analysis: Theory and Application with ANSYS**. Nova Jersey: Prentice-hall, 1999.
- MOREIRA, Dominicio Falcão. **Análise Matricial das Estruturas**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1977.
- MOURA, Márcio Wrague. **Avaliação da confiabilidade de longarinas de concreto protendido de pontes rodoviárias em relação ao estado limite último de flexão**. 2018. 260 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2018.
- NEVES, Francisco de Assis das. **Vibrações de Estruturas Aporticadas Espaciais Estaiadas**. 1990. 168 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1990.
- PFEIL, Walter. **Pontes em concreto armado**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1985.
- RAYLEIGH, John William Strutt. **Theory of Sound**. Nova York: Dover Publications, 1945.
- ROSSIGALI, C. E. et al. Towards actual brazilian traffic load models for short span highway bridges. **Revista Ibracon de Estruturas e Materiais**, [s.l.], v. 8, n. 2, p.124-139, abr. 2015. FapUNIFESP (SciELO).

- ROSSIGALI, Carlos Eduardo. **Atualização do modelo de cargas móveis para pontes rodoviárias de pequenos vãos no Brasil**. 2015. 289 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.
- ROSSIGALI, Carlos Eduardo. **Estudos Probabilísticos para Modelos de Cargas Móveis em Pontes Rodoviárias no Brasil**. 2006. 161 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2006.
- SILVA, Andréa Regina da. **Sistema Computacional para Análise Avançada Estática e Dinâmica de Estruturas Metálicas**. 2009. 322 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal do Ouro Preto, Ouro Preto, 2009.
- SILVA, José Guilherme Santos da. Comportamento dinâmico de pontes rodoviárias submetidas à travessia de veículos sobre a superfície irregular do pavimento. **Revista Internacional de Métodos Numéricos Para Cálculo y Diseño En Ingeniería**, Barcelona, v. 18, n. 4, p.521-540, jan. 2002.
- SILVA, Pauline Fonseca et al. Efeitos da Mudança da NBR 7188:2013 nos Projetos de Pontes.: Estudo de Caso: Projeto de Recuperação da Ponte sobre o Rio Correias na BR 101/SC. **7º Congresso Brasileiro de Pontes e Estruturas**, Rio de Janeiro, maio 2014.
- SORIANO, Humberto Lima. **Introdução à dinâmica das estruturas**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2014.
- SOUZA, Remo Magalhães de. **O Método dos Elementos Finitos Aplicado ao Problema de Condução de Calor**. Universidade Federal do Pará. Belém, p. 39. 2003.
- STUCCHI, Fernando Rebouças. PEF - 2404 Pontes e Grandes Estruturas (Notas de Aula). Universidade de São Paulo - Escola Politécnica - Departamento de Estruturas e Fundações. São Paulo, p. 100. 2006.
- VITÓRIO, José Afonso Pereira. **Um Estudo Comparativo sobre Métodos de Alargamento de Pontes Rodoviárias de Concreto Armado, com a utilização das normas brasileiras e Eurocódigos**. 2013. 296 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Civil, Universidade do Porto, Porto, 2013.
- WEAVER, William; JOHNSTON, Paul. **Structural Dynamics by Finite Elements**. Nova Jersey: Prentice-hall, 1987.
- WXMAXIMA. Versão 17.10.1. [S.l.]: Andrej Vodopivec, 2018. Disponível em: <<http://andrejv.github.io/wxmaxima/download.html>>. Acesso em: 01 jun. 2018.

## APÊNDICE 1 – Exemplo de APDL para análise estática

```

/BATCH
/input,start,ans,'C:\Program Files\ANSYS Student\v182\ANSYS\apdl\
/FILNAME,analise_estatica,0
/NOPR
KEYW,PR_SET,1
KEYW,PR_STRUC,1
KEYW,PR_THERM,0
KEYW,PR_FLUID,0
KEYW,PR_ELMAG,0
KEYW,MAGNOD,0
KEYW,MAGEDG,0
KEYW,MAGHFE,0
KEYW,MAGELC,0
KEYW,PR_MULTI,0
/GO
/PREP7
ET,1,BEAM188
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,250000000000
MPDATA,PRXY,1,,0.2
SECTYPE, 1, BEAM, RECT, Viga, 0
SECOFFSET, CENT
SECDATA,0.4,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0
K, ,,,
K, ,.5,,
K, ,1,,
K, ,1.5,,
K, ,2,,
K, ,2.5,,
K, ,3,,
K, ,3.5,,
K, ,4,,
K, ,4.5,,
K, ,5,,
K, ,5.5,,
K, ,6,,
K, ,6.5,,
K, ,7,,
K, ,7.5,,
K, ,8,,
K, ,8.5,,
K, ,9,,
K, ,9.5,,
K, ,10,,
LSTR, 1, 2
LSTR, 2, 3
LSTR, 3, 4
LSTR, 4, 5

```

```

LSTR, 5, 6
LSTR, 6, 7
LSTR, 7, 8
LSTR, 8, 9
LSTR, 9, 10
LSTR, 10, 11
LSTR, 11, 12
LSTR, 12, 13
LSTR, 13, 14
LSTR, 14, 15
LSTR, 15, 16
LSTR, 16, 17
LSTR, 17, 18
LSTR, 18, 19
LSTR, 19, 20
LSTR, 20, 21
FLST,5,20,4,ORDE,2
FITEM,5,1
FITEM,5,-20
CM,_Y,LINE
LSEL, , , ,P51X
CM,_Y1,LINE
CMSEL, ,_Y
LESIZE,_Y1,0.25, , , , , ,1
FLST,2,20,4,ORDE,2
FITEM,2,1
FITEM,2,-20
LMESH,P51X
/UI,MESH,OFF
NUMMRG,NODE, , , ,LOW
FINISH
/SOL
FLST,2,1,3,ORDE,1
FITEM,2,1
/GO
DK,P51X, , , ,0,UX,UY,UZ,ROTX,ROTZ, ,
FLST,2,1,3,ORDE,1
FITEM,2,21
/GO
DK,P51X, , , ,0,UY,UZ,ROTX,ROTZ, , ,
FLST,2,19,3,ORDE,2
FITEM,2,2
FITEM,2,-20
/GO
DK,P51X, , , ,0,UY,ROTX,ROTZ, , , ,
FLST,2,1,3,ORDE,1
FITEM,2,11
/GO
FK,P51X,FZ,-100000
SOLVE
FINISH

```

## APÊNDICE 2 – Exemplo de APDL para análise modal

```

/BATCH
/input,start,ans,'C:\Program Files\ANSYS Student\v182\ANSYS\apdl'
/FILNAME,analise_modal,0
/NOPR
KEYW,PR_SET,1
KEYW,PR_STRUC,1
KEYW,PR_THERM,0
KEYW,PR_FLUID,0
KEYW,PR_ELMAG,0
KEYW,MAGNOD,0
KEYW,MAGEDG,0
KEYW,MAGHFE,0
KEYW,MAGELC,0
KEYW,PR_MULTI,0
/GO
/PREP7
ET,1,BEAM188
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,25000000000
MPDATA,PRXY,1,,0.2
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,DENS,1,,2500
SECTYPE, 1, BEAM, RECT, Viga, 0
SECOFFSET, CENT
SECDATA,0.4,1,0,0,0,0,0,0,0,0
K, ,,,
K, ,.5,,
K, ,1,,
K, ,1.5,,
K, ,2,,
K, ,2.5,,
K, ,3,,
K, ,3.5,,
K, ,4,,
K, ,4.5,,
K, ,5,,
K, ,5.5,,
K, ,6,,
K, ,6.5,,
K, ,7,,
K, ,7.5,,
K, ,8,,
K, ,8.5,,
K, ,9,,
K, ,9.5,,
K, ,10,,
LSTR, 1, 2

```

```

LSTR, 2, 3
LSTR, 3, 4
LSTR, 4, 5
LSTR, 5, 6
LSTR, 6, 7
LSTR, 7, 8
LSTR, 8, 9
LSTR, 9, 10
LSTR, 10, 11
LSTR, 11, 12
LSTR, 12, 13
LSTR, 13, 14
LSTR, 14, 15
LSTR, 15, 16
LSTR, 16, 17
LSTR, 17, 18
LSTR, 18, 19
LSTR, 19, 20
LSTR, 20, 21
FLST,5,20,4,ORDE,2
FITEM,5,1
FITEM,5,-20
CM,_Y,LINE
LSEL, , , ,P51X
CM,_Y1,LINE
CMSEL,,_Y
LESIZE,_Y1,0.25, , , , , ,1
FLST,2,20,4,ORDE,2
FITEM,2,1
FITEM,2,-20
LMESH,P51X
NUMMRG,NODE, , , ,LOW
/UI,MESH,OFF
FINISH
/SOL
ANTYPE,2
MODOPT,SUBSP,6
MXPAND,6, , ,0
LUMPM,0
PSTRES,0
MODOPT,SUBSP,6,0,0, ,OFF
RIGID,
SUBOPT,STRMCHK,0
SUBOPT,MEMORY,AUTO
FLST,2,1,3,ORDE,1
FITEM,2,1
/GO
DK,P51X, , , ,0,UX,UY,UZ,ROTX,ROTZ, ,
FLST,2,1,3,ORDE,1
FITEM,2,21
/GO

```

```
DK,P51X, , , 0,UY,UZ,ROTX,ROTZ, , ,  
FLST,2,19,3,ORDE,2  
FITEM,2,2  
FITEM,2,-20  
/GO  
DK,P51X, , , 0,UY,ROTX,ROTZ, , , ,  
SOLVE  
FINISH
```

## APÊNDICE 3 – Exemplo de APDL para análise transiente

```

/BATCH
/input,start,ans,'C:\Program Files\ANSYS Student\v182\ANSYS\apdl'
/FILNAME,analise_transiente,0
/NOPR
KEYW,PR_SET,1
KEYW,PR_STRUC,1
KEYW,PR_THERM,0
KEYW,PR_FLUID,0
KEYW,PR_ELMAG,0
KEYW,MAGNOD,0
KEYW,MAGEDG,0
KEYW,MAGHFE,0
KEYW,MAGELC,0
KEYW,PR_MULTI,0
/GO
/PREP7
ET,1,BEAM188
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,25000000000
MPDATA,PRXY,1,,0.2
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,DENS,1,,2500
SECTYPE, 1, BEAM, RECT, Viga, 0
SECOFFSET, CENT
SECDATA,0.4,1,0,0,0,0,0,0,0,0
K, ,,,
K, ,.5,,
K, ,1,,
K, ,1.5,,
K, ,2,,
K, ,2.5,,
K, ,3,,
K, ,3.5,,
K, ,4,,
K, ,4.5,,
K, ,5,,
K, ,5.5,,
K, ,6,,
K, ,6.5,,
K, ,7,,
K, ,7.5,,
K, ,8,,
K, ,8.5,,
K, ,9,,
K, ,9.5,,
K, ,10,,
LSTR, 1, 2

```

```

LSTR, 2, 3
LSTR, 3, 4
LSTR, 4, 5
LSTR, 5, 6
LSTR, 6, 7
LSTR, 7, 8
LSTR, 8, 9
LSTR, 9, 10
LSTR, 10, 11
LSTR, 11, 12
LSTR, 12, 13
LSTR, 13, 14
LSTR, 14, 15
LSTR, 15, 16
LSTR, 16, 17
LSTR, 17, 18
LSTR, 18, 19
LSTR, 19, 20
LSTR, 20, 21
FLST,5,20,4,ORDE,2
FITEM,5,1
FITEM,5,-20
CM,_Y,LINE
LSEL, , , ,P51X
CM,_Y1,LINE
CMSEL,,_Y
LESIZE,_Y1,0.25, , , , , ,1
FLST,2,20,4,ORDE,2
FITEM,2,1
FITEM,2,-20
LMESH,P51X
/UI,MESH,OFF
NUMMRG,NODE, , , ,LOW
FINISH
/SOL
ANTYPE,4
TRNOPT,FULL
LUMPM,0
DELTIM,0.001
OUTRES,ALL,ALL
FLST,2,1,1,ORDE,1
FITEM,2,1
/GO
D,P51X, , , , ,UX,UY,UZ,ROTX,ROTZ,
FLST,2,1,1,ORDE,1
FITEM,2,40
/GO
D,P51X, , , , ,UY,UZ,ROTX,ROTZ, ,
FLST,2,39,1,ORDE,3
FITEM,2,2
FITEM,2,-39

```

```

FITEM,2,41
/GO
D,P51X, , , , ,UY,ROTX,ROTZ, , ,
FLST,2,1,3,ORDE,1
FITEM,2,1
/GO
TIMINT,OFF
TIME,0.001
NSUBST,2
KBC,1
FK,P51X,FZ,-100000
LSWRITE,1,
TIMINT,ON
DELTIM,0.001,0.001,0.01
ALPHAD,7.04317194
BETAD,0.00023275
TIME,0.0225
FLST,2,1,3,ORDE,1
FITEM,2,2
/GO
FK,P51X,FZ,-100000
FLST,2,1,3,ORDE,1
FITEM,2,1
FKDELE,P51X,ALL
LSWRITE,2,
TIME,0.045
FLST,2,1,3,ORDE,1
FITEM,2,3
/GO
FK,P51X,FZ,-100000
FLST,2,1,3,ORDE,1
FITEM,2,2
FKDELE,P51X,ALL
LSWRITE,3,
TIME,0.0675
FLST,2,1,3,ORDE,1
FITEM,2,4
/GO
FK,P51X,FZ,-100000
FLST,2,1,3,ORDE,1
FITEM,2,3
FKDELE,P51X,ALL
LSWRITE,4,
TIME,0.09
FLST,2,1,3,ORDE,1
FITEM,2,5
/GO
FK,P51X,FZ,-100000
FLST,2,1,3,ORDE,1
FITEM,2,4
FKDELE,P51X,ALL

```

```
LSWRITE,5,  
TIME,0.1125  
FLST,2,1,3,ORDE,1  
FITEM,2,6  
/GO  
FK,P51X,FZ,-100000  
FLST,2,1,3,ORDE,1  
FITEM,2,5  
FKDELE,P51X,ALL  
LSWRITE,6,  
TIME,0.135  
FLST,2,1,3,ORDE,1  
FITEM,2,7  
/GO  
FK,P51X,FZ,-100000  
FLST,2,1,3,ORDE,1  
FITEM,2,6  
FKDELE,P51X,ALL  
LSWRITE,7  
TIME,0.1575  
FLST,2,1,3,ORDE,1  
FITEM,2,8  
/GO  
FK,P51X,FZ,-100000  
FLST,2,1,3,ORDE,1  
FITEM,2,7  
FKDELE,P51X,ALL  
LSWRITE,8,  
TIME,0.18  
FLST,2,1,3,ORDE,1  
FITEM,2,9  
/GO  
FK,P51X,FZ,-100000  
FLST,2,1,3,ORDE,1  
FITEM,2,8  
FKDELE,P51X,ALL  
LSWRITE,9,  
TIME,0.2025  
FLST,2,1,3,ORDE,1  
FITEM,2,10  
/GO  
FK,P51X,FZ,-100000  
FLST,2,1,3,ORDE,1  
FITEM,2,9  
FKDELE,P51X,ALL  
LSWRITE,10,  
TIME,0.225  
FLST,2,1,3,ORDE,1  
FITEM,2,11  
/GO  
FK,P51X,FZ,-100000
```

FLST,2,1,3,ORDE,1  
FITEM,2,10  
FKDELE,P51X,ALL  
LSWRITE,11,  
TIME,0.2475  
FLST,2,1,3,ORDE,1  
FITEM,2,12  
/GO  
FK,P51X,FZ,-100000  
FLST,2,1,3,ORDE,1  
FITEM,2,11  
FKDELE,P51X,ALL  
LSWRITE,12,  
TIME,0.27  
FLST,2,1,3,ORDE,1  
FITEM,2,13  
/GO  
FK,P51X,FZ,-100000  
FLST,2,1,3,ORDE,1  
FITEM,2,12  
FKDELE,P51X,ALL  
LSWRITE,13,  
TIME,0.2925  
FLST,2,1,3,ORDE,1  
FITEM,2,14  
/GO  
FK,P51X,FZ,-100000  
FLST,2,1,3,ORDE,1  
FITEM,2,13  
FKDELE,P51X,ALL  
LSWRITE,14,  
TIME,0.315  
FLST,2,1,3,ORDE,1  
FITEM,2,15  
/GO  
FK,P51X,FZ,-100000  
FLST,2,1,3,ORDE,1  
FITEM,2,14  
FKDELE,P51X,ALL  
LSWRITE,15,  
TIME,0.3375  
FLST,2,1,3,ORDE,1  
FITEM,2,16  
/GO  
FK,P51X,FZ,-100000  
FLST,2,1,3,ORDE,1  
FITEM,2,15  
FKDELE,P51X,ALL  
LSWRITE,16,  
TIME,0.36  
FLST,2,1,3,ORDE,1

```
FITEM,2,17
/GO
FK,P51X,FZ,-100000
FLST,2,1,3,ORDE,1
FITEM,2,16
FKDELE,P51X,ALL
LSWRITE,17,
TIME,0.3825
FLST,2,1,3,ORDE,1
FITEM,2,18
/GO
FK,P51X,FZ,-100000
FLST,2,1,3,ORDE,1
FITEM,2,17
FKDELE,P51X,ALL
LSWRITE,18,
TIME,0.405
FLST,2,1,3,ORDE,1
FITEM,2,19
/GO
FK,P51X,FZ,-100000
FLST,2,1,3,ORDE,1
FITEM,2,18
FKDELE,P51X,ALL
LSWRITE,19,
TIME,0.4275
FLST,2,1,3,ORDE,1
FITEM,2,20
/GO
FK,P51X,FZ,-100000
FLST,2,1,3,ORDE,1
FITEM,2,19
FKDELE,P51X,ALL
LSWRITE,20,
TIME,0.45
FLST,2,1,3,ORDE,1
FITEM,2,21
/GO
FK,P51X,FZ,-100000
FLST,2,1,3,ORDE,1
FITEM,2,20
FKDELE,P51X,ALL
LSWRITE,21,
LSSOLVE,1,21,1,
FINISH
```