

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

**ESCALAMENTO GEOMÉTRICO NO FORMALISMO DE DIPOLOS DA QCD EM ALTAS
ENERGIAS: UMA APLICAÇÃO A PROCESSOS EXCLUSIVOS EM HERA COM NÊUTRON
DOMINANTE***

Vinícius Marcelo Becker

Dissertação de Mestrado realizada sob orientação do Prof. Dr. João Thiago de Santana Amaral e apresentado ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande em preenchimento dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física.

Rio Grande

2017

*Trabalho parcialmente financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Vinicius Marcelo Becker

**ESCALAMENTO GEOMÉTRICO NO FORMALISMO DE DIPOLOS DA QCD EM ALTAS
ENERGIAS: UMA APLICAÇÃO A PROCESSOS EXCLUSIVOS EM HERA COM NÊUTRON
DOMINANTE**

Dissertação de Mestrado realizada sob orientação do Prof. Dr. João Thiago de Santana Amaral e apresentado ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande em preenchimento dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física.

Trabalho aprovado. **Rio Grande**, 02 de março de 2017:

Prof. Dr. João Thiago de Santana Amaral
Orientador

Prof. Dr. Arthur Marques Moraes

Prof. Dr. Cristiano Brenner Mariotto

Rio Grande
2017

Este trabalho é dedicado aos meus pais

*“It does not make any difference how beautiful your guess is.
It does not make any difference how smart you are,
who made the guess, or what his name is -
if it disagrees with experiment, it is wrong.”
Richard P. Feynman*

AGRADECIMENTOS

Dedico este espaço àqueles que, de alguma maneira, fizeram parte da realização desta dissertação. Não conseguirei citar todos aqui, mas há, no entanto, alguns a quem não posso deixar de manifestar o meu agradecimento sincero.

Ao meu orientador, Prof. Dr. João Thiago de Santana Amaral, pelo apoio, pela compreensão, pela amizade, pela paciência, pelo incentivo e pelos ensinamentos, os quais tornaram possível a conclusão desta dissertação.

Ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Rio Grande, por toda a estrutura e por todo o auxílio.

Ao corpo docente do Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande, em especial aos professores do curso de Física, os quais tive a oportunidade de ser aluno. Os senhores contribuíram não somente na minha formação profissional, mas também na minha formação pessoal.

Aos professores doutores Arthur Marques Moraes, Cristiano Brenner Mariotto, Otavio Socolowski Jr. e Victor Gonçalves, por comporem a banca examinadora deste trabalho.

À toda a minha família, mas de maneira especial, aos meus pais Laurilo e Beatriz, pelo amor, pelo carinho, pela compreensão, pelo incentivo e por todo o apoio, mesmo que a distância, durante estes longos anos longe de casa, e à Prof^a. Dra. Marlene Teda Pelzer, por sua ajuda ao longo de todos estes anos.

Aos colegas do curso de Física, em especial aos colegas de graduação Gabriel Ramos e Geférson Lucatelli, e aos colegas da sala P-07, Daner “Andrey” Silveira, Dener Lemos, Diego “Chuí” Caniza, Juílson Paiva, Leonardo Ferreira, Rafael Palota e Rafael Reimbrecht pela amizade ao longo de todo o período de minha formação.

À Big Band da FURG, em especial aos colegas do naipe de madeiras, que me acolheram tão bem e que me ensinaram tanto durante os 2 anos em que tive o privilégio de ser o clarinetista desta incrível banda, preocupada em difundir música de qualidade.

À companheira de todas as horas, tristes ou alegres, Karina Vieira.

Aos meus amigos da Casa do Estudante Universitário, com os quais convivi ao longo de toda a minha estada em Rio Grande.

RESUMO

Neste trabalho, estudamos analítica e numericamente o modelo MPS, um modelo fenomenológico para a amplitude de espalhamento dipolo-alvo no espaço misto, e o aplicamos na descrição de processos que envolvem a produção exclusiva de mésons vetoriais, em particular o méson ρ , em colisões elétron-próton, para os casos em que observamos um nêutron no estado final. O processo acima citado, foi descrito com sucesso utilizando-se um modelo no espaço de coordenadas. Neste trabalho mostramos que também é possível descrever a produção exclusiva do méson vetorial ρ , envolvendo nêutron no estado final, utilizando o modelo no espaço misto, com algumas diferenças importantes em relação à descrição no espaço de coordenadas.

Palavras-chaves: Escalamento geométrico, formalismo de dipolos, QCD em altas energias.

ABSTRACT

In this work, we study analytically and numerically the MPS model, a phenomenological model for the amplitude of dipole-target scattering in the mixed space and apply it in the description of processes that involve the exclusive vector meson production, in particular the ρ meson, in electron-proton collisions, for the cases in which we observe a neutron in the final state. The above process was successfully described using a model in the coordinate space. In this work we show that it is also possible to describe the exclusive ρ production, involving neutron in the final state, using a model in the mixed space, with some important differences in relation to the description in the coordinate space.

Keywords: Geometric scaling, dipole formalism, QCD at high energies.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.1	– Os vértices de interação do Modelo Padrão.	3
Figura 2.1	– Vértices da QCD.	8
Figura 2.2	– DIS.	9
Figura 2.3	– Uma estrutura menor no interior do próton pode ser sondada por fótons virtuais de comprimento de onda mais curto que conduzem à observação de pártons de pequeno x em alto Q^2 . As regiões circuladas indicam a escala de comprimento abaixo da qual a estrutura não pode ser determinada.	12
Figura 2.4	– Distribuições dos quarks de valência (xu_v e xd_v), dos quarks de mar (xS) e dos glúons (xG) obtidas em HERA em $Q^2=10$ GeV ² . Tanto a distribuição dos glúons quanto a dos quarks de mar é multiplicada por 0,05. Claramente, em pequeno x , os glúons predominam.	13
Figura 2.5	– Função de estrutura F_2 obtida pelo experimento ZEUS como função de Q^2	14
Figura 2.6	– Evolução das densidades partônicas em energia/rapidez Y (equações BFKL, BK e JIMWLK); evolução na virtualidade do fóton Q^2 (equação DGLAP). O sistema passa de um regime diluído para um regime denso, sofrendo uma transição para uma região de saturação, que é caracterizada pela escala saturação $Q_s^2(Y)$	15
Figura 2.7	– Amplitude de espalhamento forward $\gamma^* \rightarrow p$ no referencial de repouso do alvo: o fóton virtual se divide em um par $q\bar{q}$ que interage com o alvo. A interação é representada pela elipse vertical. Por questões de simplicidade, o elétron que emite o fóton virtual não é mostrado no diagrama.	19
Figura 3.1	– Fóton virtual se dividindo em um par $q\bar{q}$	24
Figura 3.2	– Quark com momentum p , spin s e cor α emite um glúon com momentum k , cor c e polarização λ . O momentum, spin e cor do quark após a emissão do glúon são $p - k$, β e s' , respectivamente.	33
Figura 3.3	– Diagramas que contribuem para o processo $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}g$	36
Figura 3.4	– O glúon emitido pode ser visto como uma parte da função de onda do alvo (linha tracejada inferior) ou como uma parte da função de onda do dipolo (linha tracejada superior).	40
Figura 4.1	– Função de onda do <i>onium</i>	42
Figura 4.2	– A emissão de glúons no referencial de dipolo é equivalente à divisão de dipolos.	43
Figura 4.3	– Evolução BFKL.	43
Figura 4.4	– Múltiplos espalhamentos entre um alvo e um projétil constituído de dois dipolos.	45
Figura 4.5	– Número de ocupação de dipolo em função do momentum k do dipolo para $Y = 0, 4, 8, 12, 16, 20$. As linhas pontilhadas correspondem a solução da equação BFKL enquanto que as linhas sólidas correspondem a evolução BK. Aqui $n(k)$ é a amplitude de espalhamento de dipolo.	46
Figura 4.6	– Comportamento de ondas progressivas	48
Figura 4.7	– Comportamento de ondas progressivas da equação BK obtidas em uma simulação numérica (SOYEZ, 2006). A amplitude é apresentada para valores de $Y = 0, 5, 10, 15, 20, 25$	51

Figura 4.8	– Dados obtidos em HERA para a seção de choque total do DIS versus a variável de escalamento τ .	52
Figura 5.1	– Produção de mésons vetoriais no referencial de dipolo.	59
Figura 6.1	– Processo ep exclusivo com energia de centro de massa \sqrt{s} associado com a produção de nêutron dominante.	62
Figura 6.2	– Espectro de nêutron dominante na produção exclusiva do méson vetorial ρ^0 obtido considerando os cinco diferentes modelos para o fluxo de píons utilizando o modelo BG.	67
Figura 6.3	– Espectro de nêutron dominante na produção exclusiva do méson vetorial ρ^0 obtido considerando os cinco diferentes modelos para o fluxo de píons utilizando o modelo LCG.	68
Figura 6.4	– Predição para o espectro de nêutron dominante na produção exclusiva do méson vetorial ρ^0 para a região cinemática $p_T < 0.69 \cdot x_L$ GeV utilizando os valores de K obtidos para a região cinemática $p_T < 0.2$ GeV.	69
Figura A.1	– Espectro de nêutron dominante para a produção exclusiva do méson vetorial ρ^0 obtido pelo fluxo f_1 considerando o modelo BG. Todos os valores possíveis para o fator K são apresentados.	80
Figura A.2	– Espectro de nêutron dominante na produção exclusiva do méson vetorial ρ^0 obtido pelo fluxo f_2 considerando o modelo BG. Todos os valores possíveis para o fator K são apresentados.	81
Figura A.3	– Espectro de nêutron dominante na produção exclusiva do méson vetorial ρ^0 obtido pelo fluxo f_3 considerando modelo BG. Todos os valores possíveis para o fator K são apresentados.	81
Figura A.4	– Espectro de nêutron dominante na produção exclusiva do méson vetorial ρ^0 obtido pelo fluxo f_4 considerando o modelo BG. Todos os valores possíveis para o fator K são apresentados.	82
Figura A.5	– Espectro de nêutron dominante na produção exclusiva do méson vetorial ρ^0 obtido pelo fluxo f_5 considerando o modelo BG. Todos os valores possíveis para o fator K são apresentados.	82
Figura A.6	– Espectro de nêutron dominante na produção exclusiva do méson vetorial ρ^0 obtido pelo fluxo f_1 considerando o modelo LCG. Todos os valores possíveis para o fator K são apresentados.	83
Figura A.7	– Espectro de nêutron dominante na produção exclusiva do méson vetorial ρ^0 obtido pelo fluxo f_2 considerando o modelo LCG. Todos os valores possíveis para o fator K são apresentados.	83
Figura A.8	– Espectro de nêutron dominante na produção exclusiva do méson vetorial ρ^0 obtido pelo fluxo f_3 considerando o modelo LCG. Todos os valores possíveis para o fator K são apresentados.	84
Figura A.9	– Espectro de nêutron dominante na produção exclusiva do méson vetorial ρ^0 obtido pelo fluxo f_4 considerando o modelo LCG. Todos os valores possíveis para o fator K são apresentados.	84
Figura A.10	– Espectro de nêutron dominante na produção exclusiva do méson vetorial ρ^0 obtido pelo fluxo f_5 considerando o modelo LCG. Todos os valores possíveis para o fator K são apresentados.	85

LISTA DE TABELAS

Tabela 1.1	– Os doze férmions fundamentais divididos em quarks e léptons.....	2
Tabela 1.2	– As quatro forças conhecidas na natureza.	2
Tabela 1.3	– As forças experimentadas pelos doze férmions fundamentais	3
Tabela 5.1	– Parâmetros para as funções de onda dos mésons vetoriais	60

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
2	CROMODINÂMICA QUÂNTICA EM ALTAS ENERGIAS	6
2.1	CROMODINÂMICA QUÂNTICA	6
2.2	ESPALHAMENTO PROFUNDAMENTE INELÁSTICO	8
2.3	O REGIME DE ALTAS ENERGIAS	12
2.4	COORDENADAS NO CONE DE LUZ	16
2.5	DIS NO FORMALISMO DE DIPOLOS	17
3	A EQUAÇÃO DE BALITSKY-KOVCHegov	22
3.1	TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS NO CONE DE LUZ	22
3.2	FUNÇÃO DE ONDA DO FÓTON VIRTUAL	23
3.3	EMIÇÃO DE GLÚONS	32
3.4	EQUAÇÃO DE BALITSKY-KOVCHegov	36
4	PROPRIEDADES DA EQUAÇÃO DE BALITSKY-KOVCHegov	42
4.1	O FORMALISMO DE DIPOLOS E A EQUAÇÃO BFKL	42
4.2	EQUAÇÃO BK	45
4.3	ESCALAMENTO GEOMÉTRICO: UMA ABORDAGEM TEÓRICA	47
4.4	ESCALAMENTO GEOMÉTRICO: EVIDÊNCIA EXPERIMENTAL	52
5	ESCALAMENTO GEOMÉTRICO NO ESPAÇO MISTO: TEORIA E FENOMENOLOGIA	53
5.1	ESCALAMENTO GEOMÉTRICO ESTENDIDO	53
5.2	O MODELO MPS	55
5.3	PRODUÇÃO EXCLUSIVA DE MÉSON VETORIAIS EM PEQUENO X	58
6	PRODUÇÃO EXCLUSIVA DE MÉSONS VETORIAIS ENVOLVENDO NÊUTRON DOMINANTE	62
6.1	$\gamma^*P \rightarrow \rho^0\pi^+N$ E O FORMALISMO DE DIPOLOS	62
6.2	RESULTADOS OBTIDOS	66
6.3	DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	69
7	CONCLUSÕES	71
	Referências	73

ANEXOS **79**

ANEXO A – GRÁFICOS..... 80

1 INTRODUÇÃO

A Física de Partículas é a responsável por estudar os constituintes elementares da matéria (partículas) e suas interações. As partículas interagem umas com as outras através de quatro forças fundamentais. São elas: força gravitacional, força eletromagnética, força nuclear forte e força nuclear fraca. A força gravitacional entre duas partículas é extremamente pequena e, portanto, pode ser desprezada nas interações entre partículas elementares. Com exceção da interação gravitacional, as demais interações sofridas pelas partículas são descritas pelo Modelo Padrão.

O Modelo Padrão da Física de Partículas é uma Teoria Quântica de Campos (abreviamos como QFT, do inglês “Quantum Field Theory”), consistente com a mecânica quântica e a relatividade especial. Desenvolvido nos anos 70, o Modelo Padrão prevê a existência de partículas denominadas *férmions*. Os férmions são partículas fundamentais, no sentido de não possuírem uma estrutura interna, e possuem spin semi-inteiro. Segundo o Modelo Padrão, existem dois tipos de férmions: os *léptons* e os *quarks*. Ainda pelo Modelo Padrão, tanto léptons quanto quarks se apresentam em igual número: são seis tipos (sabores) de léptons (*elétron*, *múon*, *tau*, *neutrino do elétron*, *neutrino do múon* e *neutrino do tau*) e seis tipos (sabores) de quarks (*up*, *down*, *charm*, *strange*, *bottom* e *top*).

Como já foi dito anteriormente, além do Modelo Padrão identificar as partículas elementares, ele também descreve como ocorrem as interações entre elas. Para tanto, a cada uma das interações descritas pelo Modelo Padrão, teremos associada uma propriedade específica da matéria, a qual chamamos de carga. Assim, para a interação eletromagnética, existe a carga elétrica. Para a interação fraca, temos a carga fraca. E para a interação forte, há a carga de cor.

Na Tabela 1.1 são apresentados os doze férmions fundamentais, bem como suas cargas elétricas e suas respectivas massas. A dinâmica destes doze férmions fundamentais é descrita pela equação de Dirac (DIRAC, 1928), que também prevê que para cada partícula, existe uma antipartícula, que possui a mesma massa, porém uma carga elétrica oposta.

Cada uma das três forças relevantes para a física de partículas é descrita por uma Teoria Quântica de Campos. Segundo a QFT, a interação entre partículas elementares corresponde à troca de uma partícula de spin inteiro, conhecida como *bóson de gauge*. Na Tabela 1.2 apresentamos as forças experimentadas pelas partículas elementares, bem como o bóson de gauge associado a cada força. A intensidade de cada uma das forças associadas aos diferentes bósons de gauge também é apresentada. Note que estes números são apenas indicativos, pois a intensidade das forças depende da distância e da escala de energia que está sendo considerada.

Ainda pela QFT, a natureza de cada uma das forças fundamentais é determinada pelas propriedades de seus bósons de gauge e pela forma como esses bósons se acoplam aos férmions. O acoplamento dos bósons de gauge aos férmions é descrito pelos vértices de interação do

Tabela 1.1 – Os doze férmions fundamentais divididos em quarks e léptons.

Léptons			Quarks		
Partícula	Q	massa/GeV	Partícula	Q	massa/GeV
elétron (e^-)	-1	0.0005	down (d)	-1/3	0.003
neutrino (ν_e)	0	$<10^{-9}$	up (u)	+2/3	0.005
múon (μ^-)	-1	0.106	strange (s)	-1/3	0.1
neutrino (ν_μ)	0	$<10^{-9}$	charm (c)	+2/3	1.3
tau (τ^-)	-1	1.78	bottom (b)	-1/3	4.5
neutrino (ν_τ)	0	$<10^{-9}$	top (t)	+2/3	174

Fonte: (PATRIGNANI *et al.*, 2016).

Tabela 1.2 – As quatro forças conhecidas na natureza.

Força	Intensidade	Bóson	Spin	massa/GeV
Forte	1	Glúon (g)	1	0
Eletromagnética	10^{-3}	Fóton (γ)	1	0
Fraca	10^{-8}	Bóson W (W^\pm)	1	80.4
		Bóson Z (Z)	1	91.2

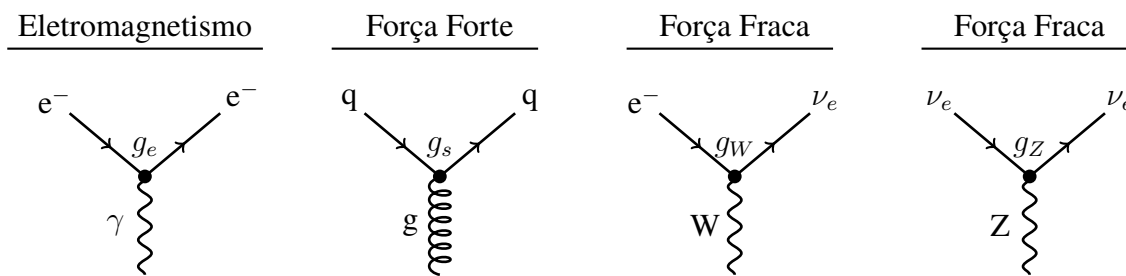
Fonte: (PATRIGNANI *et al.*, 2016).

Modelo Padrão, mostrados na Figura 1.1. Os férmions no estado inicial (incidentes) são representados diagramaticamente por uma linha sólida que possui uma seta apontando na direção do vértice. Já os férmions no estado final (emergentes) são representados diagramaticamente por uma linha sólida que possui uma seta apontando na direção contrária a do vértice. Os bósons W e Z , bem como o fóton, são representados por linhas onduladas. Já o glúon é representado por linhas em forma de mola. Em cada um dos casos apresentados na Figura 1.1, a interação entre os férmions, incidente e emergente, e entre os bósons é representada por um vértice. Para cada tipo de interação existe uma constante de acoplamento g associada, responsável por especificar a intensidade da interação entre férmions e bósons. Por exemplo, para interações eletromagnéticas, a constante de acoplamento é simplesmente a carga do elétron, $g_e = e$.

Uma partícula se acopla a um bóson somente se ela carrega a carga da interação. Por exemplo, apenas partículas carregadas eletricamente acoplam-se ao fóton. Somente os quarks carregam a carga de cor e, portanto, somente os quarks participam da interação forte. Todos os doze férmions fundamentais carregam a carga da interação fraca, e portanto, todos eles participam da interação fraca. Na Tabela 1.3 apresentamos os tipos de interações experimentadas por cada um dos doze férmions fundamentais.

A teoria de campos correspondente à força eletromagnética chama-se Eletrodinâmica Quântica (abreviamos como QED, do inglês “Quantum Electrodynamics”). Na QED, as inte-

Figura 1.1 – Os vértices de interação do Modelo Padrão.



Fonte: O autor.

Tabela 1.3 – As forças experimentadas pelos doze férmions fundamentais.

					Forte	Eletromagnética	Fraca
Quarks	Tipo down	d	s	b	✓	✓	✓
	Tipo up	u	c	t	✓	✓	✓
Léptons	Carregados	e^-	μ^-	τ^-		✓	✓
	Neutrinos	ν_e	ν_μ	ν_τ			✓

Fonte: O autor.

rações eletromagnéticas entre partículas carregadas são mediadas pela troca de fótons virtuais. No caso da força forte, a teoria de campos correspondente se chama CromoDinâmica Quântica (abreviamos como QCD, do inglês “Quantum ChromoDynamics”). Para a QCD, as interações fortes entre partículas carregadas são mediadas pela troca de glúons, que assim como os fótons, não possuem massa. Devido à natureza das interações da QCD, quarks não são vistos como partículas livres, mas são sempre confinados a estados ligados, chamados *hádrons*. Existem dois tipos de hádrons: os *bárions*, formados por três quarks ou por três antiquarks, e os *mésons*, formados por pares quark-antiquark. Como exemplos de bárions, temos o próton e o nêutron. Chamamos os três quarks presentes no interior do próton (ou nêutron) de quarks de valência. Além dos quarks de valência, também existem glúons. Quarks e glúons são comumente chamados de *pártons*. Para maiores detalhes vide (BJORKEN, 1969a; BJORKEN; PASCHOS, 1969; FEYNMAN, 1972). Como veremos mais adiante, devido às propriedades de auto-interação da QCD, teremos, no interior do próton, além dos três quarks de valência, os chamados de quarks de mar. Exemplos de mésons são o ρ , o ϕ e o π .

As interações fracas são mediadas pelos bósons carregados W^+ e W^- , que são aproximadamente oitenta vezes mais massivos que o próton e pelo bóson neutro Z^0 , cerca de noventa vezes mais massivo que o próton.

As interações eletromagnéticas e as interações fracas ainda podem ser apresentadas como manifestações diferentes de uma única força, a força eletrofraca. Todas as partículas de matéria interagem através da força eletrofraca.

O Modelo Padrão descreve bem muitos dos fenômenos físicos medidos nas colisões entre partículas, mas ainda existem muitas questões em aberto. A partir de estudos envolvendo o espalhamento profundamente inelástico (ou DIS, do inglês Deep Inelastic Scattering) elétron-próton, foi possível notar que as densidades de quarks e de glúons (comumente chamadas de densidades partônicas) dentro do próton crescem rapidamente com o aumento da energia da colisão, levando ao crescimento das amplitudes de espalhamento. Esse comportamento foi observado experimentalmente em HERA (Hadron-Electron Ring Accelerator) (BREITWEG *et al.*, 2000; ADLOFF *et al.*, 2001; CHEKANOV *et al.*, 2001). Enquanto que as densidades partônicas não forem muito altas, o crescimento é descrito pela equação BFKL (LIPATOV, 1976; KURAEV; LIPATOV; FADIN, 1977; BALITSKY; LIPATOV, 1978). Porém, devido ao tamanho finito do próton, essas densidades não podem crescer indefinidamente (FROISSART, 1961). Assim, em algum ponto, efeitos não-lineares (recombinação de glúons) se tornam importantes, levando à chamada física de saturação partônica (GRIBOV; LEVIN; RYSKIN, 1983), na qual a equação BFKL não pode mais ser aplicada.

O DIS pode ser estudado de forma bastante conveniente em um referencial no qual o fóton virtual possui energia suficiente para se separar em um par quark-antiquark, um dipolo, que interage com o próton. No formalismo de dipolos (MUELLER, 1994; MUELLER; PATEL, 1994; MUELLER, 1995), à medida que temos um aumento na energia, o dipolo evolui e a sua função de onda é descrita como um sistema de dipolos. Quando este sistema de dipolos interage com um alvo, a amplitude de espalhamento pode ser descrita com a equação de BFKL. Além disso, o formalismo de dipolos pode também ser adaptado para incluir efeitos não-lineares que levam à saturação das amplitudes de espalhamento. De fato, Kovchegov (KOVCHegov, 1999; KOVCHegov, 2000) derivou uma equação para a amplitude de espalhamento de dipolo que corresponde à equação BFKL mas que possui um termo adicional não linear, responsável pela diminuição do crescimento na densidade de glúons. Embora esta equação não seja exata, uma vez que é uma aproximação de campo médio da hierarquia infinita mais completa de equações estabelecida por Balitsky (BALITSKY, 1996a), ela é uma equação fechada para a amplitude de espalhamento. Esta equação, conhecida como equação BK (Balitsky-Kovchegov), é a equação mais simples que descreve a QCD no regime de altas energias.

A equação BK é uma equação de evolução não-linear para a amplitude de espalhamento $N(\mathbf{r}, \mathbf{b}, Y)$ de um dipolo de tamanho transversal \mathbf{r} com parâmetro de impacto \mathbf{b} , em que a rapidez Y é o logaritmo do inverso da energia do centro de massa.

Nesta dissertação iremos derivar esta equação e estudar algumas propriedades importantes de suas soluções assintóticas. Em particular, (MUNIER; PESCHANSKI, 2003; MUNIER; PESCHANSKI, 2004a; MUNIER; PESCHANSKI, 2004b) mostraram que a equação BK, sem dependência no parâmetro de impacto, no espaço de momentum, admite soluções de ondas progressivas, apresentando a propriedade de escalamento geométrico (STAŚTO; GOLEC-BIERNAT; KWIECIŃSKI, 2001), fenômeno observado em experimentos envolvendo o DIS.

A fim de verificar a extensão da propriedade de ondas progressivas (MARQUET; PESCHANSKI; SOYEZ, 2005) analisaram a equação BK com dependência transversal completa, ou seja, com dependência no parâmetro de impacto \mathbf{b} . Em sua análise, os autores estudaram a equação BK no espaço de momentum, realizando uma transformada de Fourier, saindo do espaço de coordenadas $N(\mathbf{r}, \mathbf{b}, Y)$ e indo para o espaço de full-momentum $\tilde{N}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, Y)$, em que \mathbf{k} é o momentum do dipolo incidente e \mathbf{q} é o momentum transferido pelo alvo durante a interação com o dipolo. Como resultado, os autores conseguiram mostrar que a equação BK completa assume sim, a propriedade de ondas progressivas, uma vez que a investigação do problema seja realizada em termos do momentum transferido durante a interação, ao invés de ser realizada em termos do parâmetro de impacto da interação. Esse resultado motivou (e ainda motiva) o desenvolvimento de modelos fenomenológicos para a amplitude de espalhamento dipolo-alvo com dependência no momentum transferido.

Assim sendo, neste trabalho estudaremos analítica e numericamente um modelo fenomenológico com estas características proposto por (MARQUET; SOYEZ; PESCHANSKI, 2007). Aplicaremos este modelo para descrever processos que envolvam a produção exclusiva de mésons vetoriais, em particular o méson ρ , em colisões elétron-próton, para os casos em que observamos um nêutron no estado final.

O processo acima citado, foi descrito com sucesso por (GONÇALVES; NAVARRA; SPIERING, 2016) utilizando um modelo no espaço de coordenadas. Nosso objetivo será mostrar que também é possível descrever a produção exclusiva do méson vetorial ρ envolvendo nêutron no estado final com um modelo no espaço misto, ou seja, um espaço em que a amplitude de espalhamento dipolo-próton depende do tamanho transversal do dipolo e do momentum transferido pelo próton durante sua interação com o dipolo.

Esta dissertação está estruturada da seguinte maneira: no capítulo 2, após uma breve revisão sobre QCD, descrevemos o DIS elétron-próton e o abordamos em um referencial no qual o fóton pode se dividir em um par quark-antiquark, o referencial de dipolos. No Capítulo 3, introduzimos a Teoria Quântica de Campos no Cone de Luz e a utilizaremos para deduzir a equação de evolução não linear BK. No Capítulo 4, estudamos algumas propriedades da equação BK. No Capítulo 5, apresentamos o modelo fenomenológico para a amplitude de espalhamento dipolo-alvo. Este modelo, desenvolvido por (MARQUET; SOYEZ; PESCHANSKI, 2007) a partir das propriedades discutidas no capítulo anterior, possui uma dependência explícita no momentum transferido. Após estudar analiticamente e numericamente esse modelo, no Capítulo 6 estudamos sua aplicação em processos exclusivos que envolvem a produção de mésons vetoriais com nêutron dominante no estado final. O Capítulo 7 é reservado a conclusões e perspectivas.

Para manter a uniformidade de notação com a literatura da área, bem como a forma de como os dados experimentais são divulgados, utilizaremos nesta dissertação o Sistema Natural de Unidades, ou seja, $\hbar = c = k_B = 1$.

2 CROMODINÂMICA QUÂNTICA EM ALTAS ENERGIAS

Após uma breve revisão da QCD, introduzimos, neste capítulo, o experimento mais simples que descreve a estrutura dos hádrons em um regime de nosso interesse, o chamado limite de altas energias. Ainda neste contexto, discutimos algumas características interessantes, como por exemplo o crescimento indefinido das densidades de quarks e glúons no interior dos hádrons. Ao final do capítulo, trataremos o DIS em um referencial especial, o referencial de dipolos, que nos permite escrever a seção de choque de um dado processo de forma fatorizada.

2.1 CROMODINÂMICA QUÂNTICA

A Cromodinâmica Quântica (QCD) é a teoria responsável pela descrição da interação forte entre quarks e glúons. A densidade Lagrangeana da QCD é dada por (FRITZSCH; GELL-MANN; LEUTWYLER, 1973; GROSS; WILCZEK, 1973; GROSS; WILCZEK, 1974; WEINBERG, 1973)

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu,a} + \sum_{\text{sabores } s} \bar{q}_i^s [i\gamma^\mu D_\mu - m]_{ij} q_j^s, \quad (2.1)$$

em que q_j^s representa o campo do quark com cor j e \bar{q}_i^s representa o campo do antiquark com cor i . Aqui, $\bar{q} = q^\dagger \gamma^0$ é o espinor adjunto de Dirac e γ^μ são as matrizes de Dirac. Um campo A_μ^a descreve o glúon, que possui spin igual a 1, massa zero, e índice de cor a na representação adjunta do grupo SU(3). A soma sobre índices repetidos é assumida, com $i, j = 1, 2, 3$ e $a = 1, \dots, 8$. A derivada covariante D_μ é definida por

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_s A_\mu = \partial_\mu - ig_s t^a A_\mu^a, \quad (2.2)$$

em que t^a são os geradores do grupo SU(3) na representação fundamental ($t^a = \lambda^a/2$, em que λ^a são as matrizes de Gell-Mann) e g_s é a constante de acoplamento forte. O tensor associado ao campo do glúon $F_{\mu\nu}^a$ é definido por

$$F_{\mu\nu} = t^a F_{\mu\nu}^a = \frac{i}{g} [D_\mu, D_\nu] \quad (2.3)$$

ou, de forma equivalente, por

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g_s f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (2.4)$$

em que f^{abc} são as constantes de estrutura do grupo de cor SU(3).

A densidade Lagrangeana da QCD baseia-se em duas suposições confirmadas por observações experimentais: todos os hádrons são constituídos por quarks e os quarks não podem

ser observados como partículas livres. A primeira observação leva a um novo número quântico para quarks: cor. De fato, devido ao princípio da exclusão de Pauli, que nos diz que dois férmions idênticos não podem ocupar o mesmo estado quântico simultaneamente, não seria possível observar partículas como o *hyperon** Ω^- , constituído por três quarks s . Para resolver essa questão, é preciso introduzir um novo número quântico, que deve possuir pelo menos três valores diferentes, de modo a tornar os três quarks s diferentes entre si no *hyperon* Ω^- . Este número quântico é a cor.

A segunda observação implica que as forças entre os quarks devem ser mais fortes para distâncias maiores, a fim de evitar que os quarks deixem um hádron. Quanto maior for a distância entre os quarks no interior do próton, maior será o parâmetro de acoplamento g_s . Essa propriedade é chamada de confinamento. A hipótese do confinamento considera que partículas livres não tenham cor, e por isso não observamos quarks livres, pois estes possuem carga de cor diferente de zero. Só observamos os quarks em estados ligados (hádrons) que não possuem cor. Acredita-se que o confinamento seja originado pelas auto-interações glúon-glúon que surgem devido ao fato de que os glúons, assim como os quarks, carregarem a carga de cor, permitindo que os glúons interajam uns com os outros.

No centro da Figura 2.1, estão representados diagramaticamente os três vértices principais da QCD. Os índices gregos μ, ν, ρ e σ são índices de Lorentz. Os índices de cor dos quarks e antiquarks são representados pelos índices i e j . Os índices a, b, c, d e e representam os índices de cor dos glúons. k_1, k_2 e k_3 são os momenta dos glúons. Do lado direito da Figura 2.1, temos a contribuição de cada vértice da QCD para a amplitude de espalhamento de um dado processo. Podemos ver então que quarks emitem glúons, bem como glúons podem emitir pares quark-antiquark. E ainda, glúons podem emitir glúons, assim como também podem se recombinar.

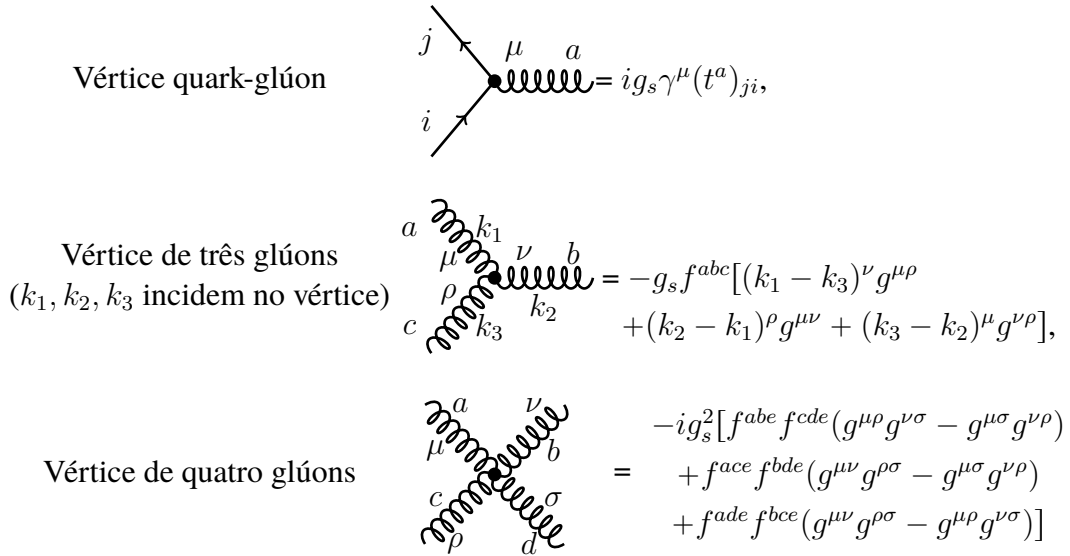
Por outro lado, em distâncias cada vez menores (altas energias), a constante de acoplamento forte se torna tão pequena à medida que a distância diminui, ou seja, quarks e glúons interagem muito fracamente e podem ser tratados aproximadamente como sendo livres. Essa propriedade é chamada de liberdade assintótica (GROSS; WILCZEK, 1973; POLITZER, 1973).

Para um regime em que o acoplamento é forte, temos a chamada física não perturbativa, na qual os cálculos são limitados. Já para colisões envolvendo altas energias, nas quais o acoplamento é fraco, as interações entre quarks e hádrons podem ser tratadas usando teoria de perturbação. Note que mesmo em colisões de altas energias, há a existência de uma componente não-perturbativa, devido a natureza dos hádrons ser não-perturbativa, oriunda do confinamento de cores. Assim, foi desenvolvido o teorema de fatorização da QCD, que separa a seção de choque em duas partes: a parte que envolve as interações em pequenas distâncias, e que assim pode ser tratada via teoria de perturbação, e a parte que envolve interações de longas distâncias. Essas interações são representadas por funções, que podem ser obtidas com um ajuste global para

*Bárions constituídos por pelo menos um quark s .

medidas experimentais. Um exemplo dessas funções são as funções de distribuição partônicas. Para maiores detalhes, veja (COLLINS; SOPER; STERMAN, 1989).

Figura 2.1 – Vértices da QCD.



Fonte: O autor.

A verificação do crescimento das densidades de quarks e glúons com o aumento da energia foi dada, pela primeira vez, pelo DIS elétron-próton, o processo mais simples que descreve as propriedades da QCD em altas energias.

2.2 ESPALHAMENTO PROFUNDAMENTE INELÁSTICO

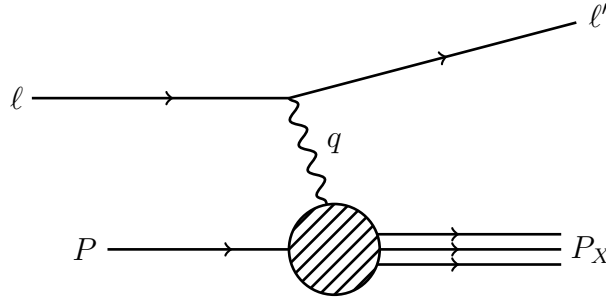
Um dos processos de espalhamento mais simples e importantes que ocorrem na Física de Partículas, é o espalhamento profundamente inelástico (abreviamos como DIS, do inglês “Deep Inelastic Scattering”). Considerando o DIS entre um elétron e e um próton p , podemos escrever o processo como

$$e(\ell) + p(P) \rightarrow e'(\ell') + X(P_X), \tag{2.5}$$

em que P é o quadrimomentum do próton incidente e ℓ e ℓ' são os quadrimomenta dos elétrons incidente e emergente, respectivamente. X é um estado hadrônico final, com quadrimomentum P_X , que representa outras partículas produzidas pelo processo.

O processo é ilustrado diagramaticamente na Figura 2.2. O elétron interage com o próton através da troca de um fóton virtual (denotado γ^*). O fóton virtual geralmente quebra o próton, levando à produção de novas partículas, tornando assim o processo inelástico.

O fato de o elétron ser um lépton, e assim, não possuir uma estrutura interna, torna a emissão de um fóton por um elétron bem compreendida pela QED. Por outro lado, o espa-

Figura 2.2 – Espalhamento Profundamente Inelástico (DIS).


Fonte: O autor

lhamento fóton-próton é mais complicado, dado que o próton possui em seu interior quarks e glúons.

Consideremos o DIS no referencial de repouso do próton. Neste, o próton possui um quadrimomentum dado por $P^\mu = (m, \mathbf{0})$, em que m é sua massa. O quadrimomentum do elétron incidente é $\ell^\mu = (E, \boldsymbol{\ell})$, enquanto que o elétron emergente possui quadrimomentum $\ell'^\mu = (E', \boldsymbol{\ell}')$. Aqui, E e E' são as energias associadas aos elétrons. Como as partículas estão na camada de massa, teremos $P^2 = m^2$ e $\ell^2 = \ell'^2 = m_e^2$, em que m_e é a massa do elétron. A partir dos três quadrimomenta descritos anteriormente, é possível construir invariantes de Lorentz, ou seja, grandezas que não se alteram perante algum tipo de transformação (Lorentz, rotação, ...), que serão relevantes para a dinâmica da colisão.

Para descrever o DIS, geralmente utilizamos três variáveis cinemáticas invariantes de Lorentz. A primeira, fixada pelas condições experimentais, é o quadrado da energia do centro de massa para a interação elétron-próton, dada por

$$s = (\ell + P)^2. \quad (2.6)$$

As outras duas variáveis cinemáticas podem ser escolhidas entre os seguintes invariantes de Lorentz:

- O quadrado do momentum transferido pelo fóton

$$q^2 \equiv -Q^2 = (\ell - \ell')^2, \quad (2.7)$$

em que a quantidade Q^2 é chamada de virtualidade do fóton;

- O quadrado da energia do centro de massa do sistema fóton-próton, dado por

$$W^2 = (P + q)^2; \quad (2.8)$$

- A variável

$$\nu = \frac{P \cdot q}{m} = \frac{W^2 + Q^2 - m^2}{2m}, \quad (2.9)$$

que representa a energia do elétron transferida para o próton;

- A variável x de Bjorken, definida como

$$x = \frac{Q^2}{2P \cdot q} = \frac{Q^2}{Q^2 + W^2 - m^2}, \quad (2.10)$$

que pode ser interpretada como a fração de momentum do próton carregada pelos seus constituintes participando do processo de espalhamento;

- A variável chamada inelasticidade

$$y = \frac{P \cdot q}{P \cdot \ell} = \frac{W^2 + Q^2 - m^2}{s - m^2} \quad (2.11)$$

que representa a fração de energia do elétron incidente carregada pelo fóton.

Uma relação útil entre x , y e Q^2 é dada por

$$xy = \frac{Q^2}{s - m^2} \simeq \frac{Q^2}{s}. \quad (2.12)$$

Desde que $W^2 \geq m^2$, x e y assumem valores entre 0 e 1. Nas discussões que seguem, iremos trabalhar com o limite de altas energias, o qual corresponde a valores de $s \gg Q^2$. Logo, a partir da Eq.(2.10), vemos que o regime de altas energias corresponde a um regime de pequeno x .

A seção de choque diferencial para o DIS elétron-próton, no referencial de repouso do próton, é dada por (HALZEN; MARTIN, 1984; PESKIN; SCHROEDER, 1995; STERMAN; MAYER, 1994)

$$\frac{d\sigma}{dE'd\Omega} = \frac{\alpha_{em}^2 E'}{2mQ^4 E} L_{\mu\nu} W^{\mu\nu}, \quad (2.13)$$

em que α_{em} é a constante de acoplamento da interação eletromagnética e $\Omega \equiv (\vartheta, \varphi)$ é o ângulo sólido que caracteriza a direção do elétron no estado final. Ainda, definimos o tensor leptônico $L^{\mu\nu}$ como

$$L^{\mu\nu} = 2 [\ell_\mu \ell'_\nu + \ell_\nu \ell'_\mu - (\ell \cdot \ell') g_{\mu\nu}], \quad (2.14)$$

no qual desprezamos a massa do elétron e $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ é o tensor métrico. O tensor hadrônico $W_{\mu\nu}$ pode ser parametrizado como (BARONE; PREDAZZI, 2002)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} W_{\mu\nu} &= \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) W_1(P \cdot q, q^2) \\ &+ \frac{1}{m^2} \left[\left(P_\mu - \frac{P \cdot q}{q^2} q_\mu \right) \left(P_\nu - \frac{P \cdot q}{q^2} q_\nu \right) \right] W_2(P \cdot q, q^2), \end{aligned} \quad (2.15)$$

e a seção de choque do DIS pode então ser expressa em termos de duas funções de estrutura W_1 e W_2 ($d\Omega = d \cos \vartheta d\varphi$)

$$\frac{d\sigma}{dE'd\Omega} = \frac{4\alpha_{em}^2 E'^2}{Q^4} \left[2W_1 \sin^2 \left(\frac{\vartheta}{2} \right) + W_2 \cos^2 \left(\frac{\vartheta}{2} \right) \right]. \quad (2.16)$$

Geralmente, introduz-se as funções de estrutura adimensionais F_1 e F_2

$$F_1(x, Q^2) \equiv mW_1(\nu, Q^2) \quad \text{e} \quad F_2(x, Q^2) \equiv \nu W_2(\nu, Q^2). \quad (2.17)$$

Podemos reescrever o tensor hadrônico $W_{\mu\nu}$ em termos de F_1 e F_2 , ou seja,

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu} &= 2 \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) F_1(x, Q^2) \\ &+ \frac{2}{(P \cdot q)} \left[\left(P_\mu - \frac{P \cdot q}{q^2} q_\mu \right) \left(P_\nu - \frac{P \cdot q}{q^2} q_\nu \right) \right] F_2(x, Q^2), \end{aligned} \quad (2.18)$$

e a seção de choque diferencial para o DIS, escrita como função de x e y , é

$$\frac{d\sigma}{dx dy} = \frac{4\alpha_{em}^2 s}{Q^4} \left[xy^2 F_1(x, Q^2) + \left(1 - y - \frac{xy m^2}{s} \right) F_2(x, Q^2) \right]. \quad (2.19)$$

As funções de estrutura do DIS, dadas na Eq. (2.17), podem ser relacionadas com seções de choque totais de foto-absorção virtual (BARONE; PREDAZZI, 2002). Como resultado, obtemos

$$\sigma_L^{\gamma^*p} = \frac{4\pi^2 \alpha_{em}}{Q^2} (F_2 - 2xF_1) \quad (2.20)$$

$$\sigma_T^{\gamma^*p} = \frac{4\pi^2 \alpha_{em}}{Q^2} 2xF_1 \quad (2.21)$$

em que $\sigma_L^{\gamma^*p}$ é a seção de choque total de foto-absorção longitudinal e $\sigma_T^{\gamma^*p}$ é a seção de choque total de foto-absorção transversal.

Ainda, se definirmos as funções de estrutura longitudinal e transversal como

$$F_L = F_2 - 2xF_1 \quad (2.22)$$

$$F_T = 2xF_1, \quad (2.23)$$

as seções de choque γ^*p podem ser reescritas como

$$\sigma_L^{\gamma^*p} = \frac{4\pi^2 \alpha_{em}}{Q^2} F_L(x, Q^2) \quad (2.24)$$

$$\sigma_T^{\gamma^*p} = \frac{4\pi^2 \alpha_{em}}{Q^2} F_T(x, Q^2). \quad (2.25)$$

Note que $F_2 = F_L + F_T$ e que a seção de choque total de foto-absorção virtual σ^{γ^*p} é proporcional a F_2

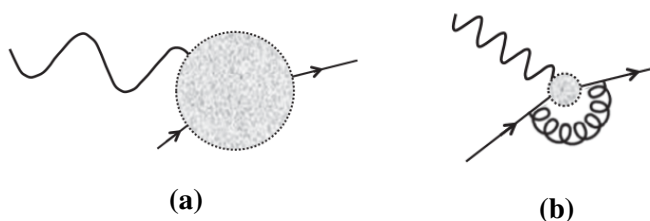
$$\sigma^{\gamma^*p} = \left(\sigma_T^{\gamma^*p} + \sigma_L^{\gamma^*p} \right) = \frac{4\pi^2 \alpha_{em}}{Q^2} F_2(x, Q^2). \quad (2.26)$$

2.3 O REGIME DE ALTAS ENERGIAS

A estrutura partônica do próton pode ser estudada em experimentos de espalhamento profundamente inelástico elétron-próton. As medidas mais precisas da estrutura do próton são do acelerador de partículas HERA (Hádron-Electron Ring Accelerator), que colidiu elétrons e pósitrons com prótons entre 1992 e 2007. O que se viu nos experimentos realizados em HERA é que a estrutura do próton pode mudar muito dependendo da escala na qual é medida.

Quando a estrutura do próton é sondada com um fóton que tem um comprimento de onda longo em comparação com o tamanho do próton, uma partícula carregada com carga elétrica $+e$ é vista. Não é possível determinar qualquer subestrutura espacial, tal como indicado na Figura 2.3a. Porém, ao diminuirmos o comprimento de onda do fóton (ou aumentarmos a vir-

Figura 2.3 – Uma estrutura menor no interior do próton pode ser sondada por fótons virtuais de comprimento de onda mais curto que conduzem à observação de pártons de pequeno x em alto Q^2 . As regiões circuladas indicam a escala de comprimento abaixo da qual a estrutura não pode ser determinada.



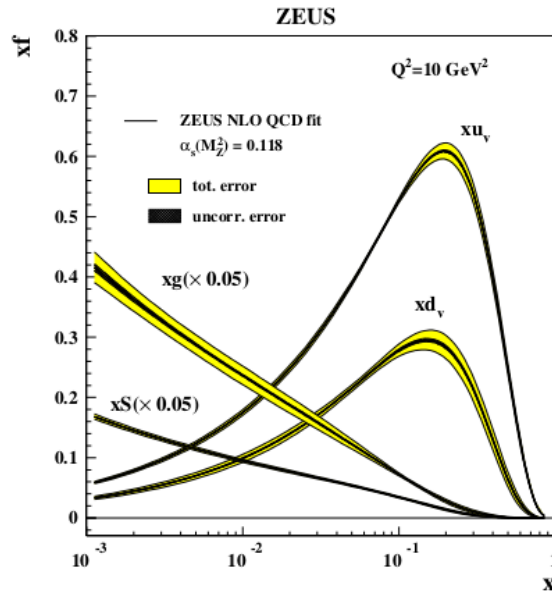
Fonte: (THOMSON, 2013)

tualidade Q^2) à ordem do raio do próton, uma estrutura mais complexa torna-se visível, como mostrado na Figura 2.3b.

O fóton começa a ver um grande número de quarks e antiquarks de mar que carregam uma pequena fração do momentum longitudinal do próton, dada pelo x de Bjorken, no interior do próton. Estes quarks originam-se das interações do glúon com pares quark-antiquark. As densidades de quarks e glúons extraídas a partir dos dados de HERA (CHEKANOV *et al.*, 2003) são mostradas na Figura 2.4. Notamos que a densidade dos quarks de valência dentro do próton, denotados por xu_v e xd_v , decresce à medida que x assume valores cada vez menores. Já a densidade de quarks de mar e glúons presentes no interior do próton, denotadas por xS e xG , parece crescer muito rapidamente em pequeno x . É possível observar também que a distribuição de glúons é maior do que a distribuição de quarks de valência e de mar para valores de x abaixo de $x = 0.1$.

Na Figura 2.5 apresentamos os dados de F_2 obtidos pelo experimento ZEUS no colisor HERA (BERINGER *et al.*, 2012). A partir do gráfico, observamos que, para um regime cinemático limitado entre $0.01 < x < 0.5$, os dados são consistentes com o escalamento previsto

Figura 2.4 – Distribuições dos quarks de valência (xu_v e xd_v), dos quarks de mar (xS) e dos glúons (xG) obtidas em HERA em $Q^2=10 \text{ GeV}^2$. Tanto a distribuição dos glúons quanto a dos quarks de mar é multiplicada por 0,05. Claramente, em pequeno x , os glúons predominam.



Fonte: (CHEKANOV *et al.*, 2003)

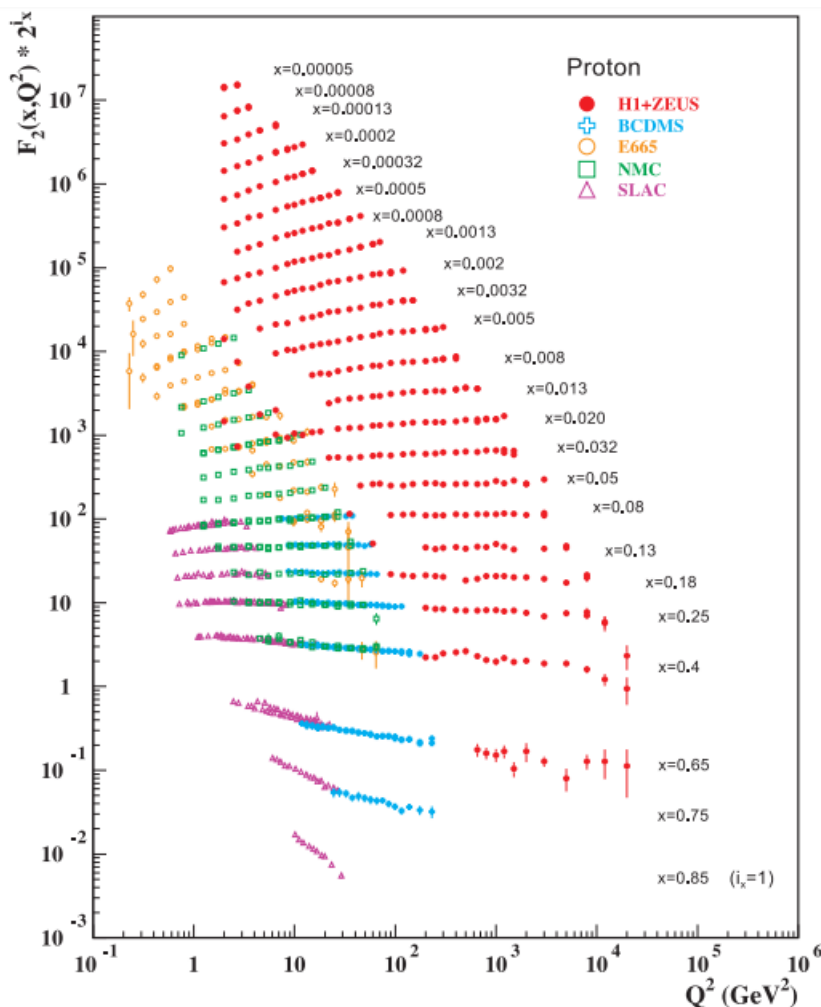
por Bjorken. Segundo (BJORKEN, 1969b), no limite em que

$$\nu, Q^2 \rightarrow \infty, \quad x = \frac{Q^2}{2m\nu} \text{ fixo}, \quad (2.27)$$

o assim chamado limite de Bjorken, F_1 e F_2 apresentariam um escalamento, ou seja, dependeriam somente de x . Para valores de x fora do intervalo acima, os desvios apresentados sugerem que o escalamento seja violado. É possível observar também que, para valores pequenos de x , a função de estrutura cresce à medida que Q^2 aumenta. Já para valores grandes de x , a função de estrutura do próton decresce à medida que Q^2 aumenta. Com isso, vemos que as funções de estrutura variam com Q^2 e x . Essa variação é causada por processos radiativos devido às propriedades de auto interação dos glúons e por interações dos glúons com quarks. Portanto, se espera um aumento no número de quarks e de glúons à medida que Q^2 cresça, pois haverá um espaço de fase maior disponível para os processos radiativos. Podemos pensar nisso como um crescimento de F_2 com Q^2 para x pequeno e fixo.

Na figura 2.6 apresentamos um diagrama esquemático representando a configuração usual de um próton em diferentes regiões do espaço de fase. Neste diagrama, os círculos representam os pártons no interior de um próton. O tamanho aparente dos pártons é definido pela escala em que os mesmos são sondados, dado por $1/Q^2$, em que Q^2 é a virtualidade do fóton. Assim, fótons com grande Q^2 sondam distâncias menores no interior do próton, enquanto fótons com baixo Q^2 sondam distâncias maiores. Com isso, a virtualidade do fóton Q^2 determina a resolução com que o próton é investigado.

Figura 2.5 – Função de estrutura F_2 obtida pelo experimento ZEUS como função de Q^2 .

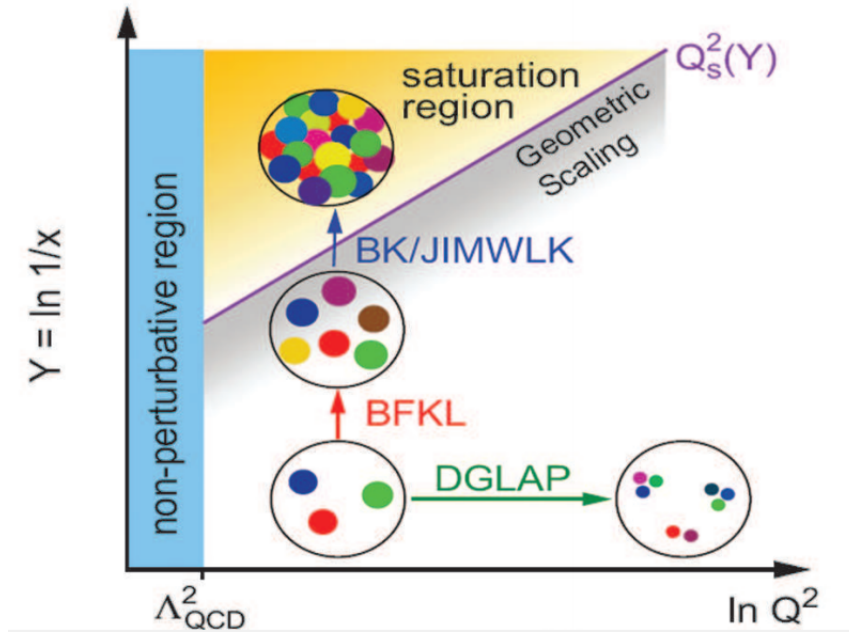


Fonte: (BERINGER *et al.*, 2012)

Primeiramente, analisando o próton na região em que a virtualidade Q^2 e a rapidez Y ($Y = \ln(1/x)$) são pequenos, vemos a presença de três quarks de valência no interior do próton. Quando aumentamos Q^2 e mantemos a energia fixa, a resolução com que o fóton investiga os constituintes do próton aumenta, fazendo com que o número de pártons aumente, porém diminuindo a área ocupada por eles dentro do próton. A alteração da densidade dos pártons como uma função da virtualidade do fóton, pode ser calculada a partir da QCD, utilizando técnicas perturbativas. As evoluções das densidades partônicas em Q^2 em uma dada escala de energia ou rapidez Y são descritas pelas equações de Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi, ou simplesmente, equação DGLAP (ALTARELLI; PARISI, 1977; GRIBOV; LIPATOV, 1972; DOKSHITZER, 1977).

Por outro lado, quando aumentamos a energia (ou Y), e mantemos Q^2 fixo, valores menores de x são sondados, o que nos permite verificar um rápido aumento nas densidades partônicas, principalmente de glúons. A área ocupada por esses glúons no interior do próton, apro-

Figura 2.6 – Evolução das densidades partônicas em energia/rapidez Y (equações BFKL, BK e JIMWLK); evolução na virtualidade do fóton Q^2 (equação DGLAP). O sistema passa de um regime diluído para um regime denso, sofrendo uma transição para uma região de saturação, que é caracterizada pela escala saturação $Q_s^2(Y)$.



Fonte: (PROKUDIN, 2013)

ximadamente, é a mesma. Evoluções deste tipo são descritas pelas equações de Balitsky-Fadin-Kuraev-Lipatov, conhecida como equação BFKL (LIPATOV, 1976; KURAEV; LIPATOV; FADIN, 1977; BALITSKY; LIPATOV, 1978).

Uma característica importante presente nas equações DGLAP e BFKL é o fato de que as duas permitem, com o aumento da energia, um crescimento ilimitado das densidades partônicas. De fato, mantendo Q^2 fixo e analisando valores pequenos de x , ou alternativamente mantendo x pequeno e fixo, e analisando a diminuição de Q^2 , veremos que em alguns pontos, os glúons começam a se sobreporem. Assim, para valores suficientemente grandes de Q^2 , têm-se um grande espaço de fase disponível para a produção de glúons macios (glúons que carregam uma pequena fração de momentum do próton ($x \ll 1$)) e conseqüentemente, espera-se um aumento no número de glúons com o decréscimo de x .

Quanto maior o tamanho dos glúons, mais rapidamente ocorre o preenchimento do espaço livre no interior do próton. Porém, esse crescimento na direção de pequeno x não pode continuar indefinidamente sem romper a unitariedade da teoria. A seção de choque, que informa a probabilidade de interação, aumenta quando a densidade de pártons aumenta, e a probabilidade de interação total é limitada pela unitariedade. Esse limite é o chamado limite de Froissart (FROISSART, 1961). Como conseqüência, espera-se que os pártons iniciem um processo de sobreposição. A partir daí, ocorre a recombinação destes pártons, e, devido à propriedade de

auto-acoplamento dos glúons na QCD, estes processos de recombinação de glúons tornam-se importantes em pequeno x .

Este tipo de interação é descrita pela Física de Saturação Partônica, introduzida por Gribov, Levin e Ryskin (GRIBOV; LEVIN; RYSKIN, 1983). Dentro da física de saturação, define-se uma escala de saturação Q_s . Essa escala de momentum caracteriza a transição do sistema, de um regime diluído para um sistema denso (saturado), e cresce com a energia do centro de massa s , de modo que

$$Q_s^2 \sim s^\lambda,$$

em que $\lambda \sim 0.3$ (KOVCHegov, 2011).

Na literatura ainda podemos encontrar um formalismo desenvolvido recentemente, denominado *Color Glass Condensate* (CGC) (JALILIAN-MARIAN *et al.*, 1997a; JALILIAN-MARIAN *et al.*, 1998; JALILIAN-MARIAN; KOVNER; WEIGERT, 1998; KOVNER; MILHANO; WEIGERT, 2000; IANCU; LEONIDOV; MCLERRAN, 2001). O CGC é uma teoria de campo efetiva que leva às equações de Jalilian-Marian-Iancu-McLerran-Weiger-Leodinov-Kovner (JIMWLK) (JALILIAN-MARIAN *et al.*, 1997b; JALILIAN-MARIAN *et al.*, 1997a; JALILIAN-MARIAN *et al.*, 1998; JALILIAN-MARIAN; KOVNER; WEIGERT, 1998; KOVNER; MILHANO; WEIGERT, 2000; IANCU; LEONIDOV; MCLERRAN, 2001).

No limite de grande número de cores N_c e efetuando uma aproximação de campo médio, encontramos uma única equação não linear, derivada por Balitsky (BALITSKY, 1996a) e por Kovchegov (KOVCHegov, 1999), que recebe o nome de equação BK. Em se tratando de descrever a QCD no limite de altas energias, a BK é a mais simples das equações. Ela corresponde à equação BFKL, mas possui um termo adicional não linear, que representa a diminuição do crescimento da densidade de glúons.

No próximo capítulo, iremos deduzir a equação BK. Os cálculos que serão apresentados utilizam variáveis no cone de luz. Assim, na próxima seção, vamos introduzir o sistema de coordenadas no cone de luz.

2.4 COORDENADAS NO CONE DE LUZ

Seja um quadrivetor $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, em que x^0 é a componente temporal e x^i , com $i = 1, 2, 3$, são as componentes espaciais. As componentes referentes ao cone de luz para o quadrivetor x^μ são definidas como

$$x^+ = \frac{x^0 + x^3}{\sqrt{2}}, \quad x^- = \frac{x^0 - x^3}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{x} = (x^1, x^2). \quad (2.28)$$

Assim, expressamos o quadrivetor x^μ como $x^\mu = (x^+, x^-, \mathbf{x})$. A componente x^+ é chamada de componente temporal do cone de luz. Com isso, agora o trivetor espacial é escrito como

$\bar{x} = (x^-, \mathbf{x})$. O tensor métrico nessa base é dada pela matriz

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

e o produto escalar é definido como

$$x \cdot y = x^+ y^- + x^- y^+ - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}. \quad (2.30)$$

2.5 DIS NO FORMALISMO DE DIPOLOS

Até o momento, consideramos o DIS somente em um referencial no qual o fóton virtual interage com um próton, mais precisamente com seus constituintes partônicos, isto é, quarks e glúons. Além disso, toda a evolução quântica da QCD ocorreu dentro do próton, e suas distribuições partônicas evoluem como uma função da virtualidade Q^2 e do x de Bjorken.

A abordagem envolvendo dipolos de cor descreve o DIS em pequeno x no referencial de repouso do próton. Este referencial pode ser obtido através de uma transformação de Lorentz (*boost*), de modo que o próton ainda carregue a maior parte da energia da colisão, mas o fóton possui energia suficiente para se dissociar em um par quark-antiquark $q\bar{q}$, um dipolo de cor, o qual então interage com o próton.

O tamanho transversal deste dipolo, isto é, a distância entre quark e antiquark, é dado por \mathbf{r} e o quark carrega uma fração z do momentum do fóton, enquanto que o antiquark carrega uma fração $1 - z$. Desde que o tempo de interação seja muito menor que o tempo de formação do par, pode-se mostrar que o tamanho transversal do dipolo $q\bar{q}$ é aproximadamente congelado durante o processo de espalhamento.

Neste referencial, o fóton possui um momentum

$$q^\mu = \left(-\frac{Q^2}{2q^-}, q^-, \mathbf{0} \right). \quad (2.31)$$

Denotando por κ o quadrimomentum do quark e por κ' o quadrimomentum do antiquark, temos que

$$\kappa^\mu = \left(\frac{\kappa^2}{2zq^-}, zq^-, \boldsymbol{\kappa} \right), \quad (2.32)$$

$$\kappa'^\mu = \left(\frac{\kappa^2}{2(1-z)q^-}, (1-z)q^-, -\boldsymbol{\kappa} \right), \quad (2.33)$$

em que z e $(1-z)$ são as frações de momentum do fóton carregadas pelo quark e pelo antiquark, respectivamente. Ainda, o quark e o antiquark estão na camada de massa, e assim, a massa

invariante do par é

$$M^2 = (\kappa + \kappa')^2 = \frac{\kappa^2}{z(1-z)}. \quad (2.34)$$

A fim de obtermos o tempo de formação do par, denotado por τ_f , devemos calcular a diferença de energia ΔE entre o par e o fóton virtual. Pelo princípio da incerteza, τ_f será

$$\tau_f \sim \frac{1}{\Delta E}. \quad (2.35)$$

A energia do par pode ser obtida como

$$E_{par} = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\kappa^+ + \kappa^-) + (\kappa'^+ + \kappa'^-)]. \quad (2.36)$$

Logo, a partir das Equações (2.32) e (2.33), obtemos que

$$E_{par} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q^- + \frac{\kappa^2}{2z(1-z)q^-} \right). \quad (2.37)$$

A energia do fóton é dada como

$$E_{\gamma^*} = \frac{1}{\sqrt{2}} (q^+ + q^-). \quad (2.38)$$

Assim, pela Equação (2.31), encontramos

$$E_{\gamma^*} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q^- - \frac{Q^2}{2q^-} \right). \quad (2.39)$$

Portanto, a diferença de energia ΔE entre o par $q\bar{q}$ e o fóton virtual γ^* , é

$$\Delta E = E_{par} - E_{\gamma^*} = \frac{1}{2\sqrt{2}q^-} \left(Q^2 + \frac{\kappa^2}{z(1-z)} \right). \quad (2.40)$$

Pela Equação (2.34) vemos que $\kappa^2 = z(1-z)M^2$. Assumindo que $M^2 \lesssim Q^2$ (BARONE; PREDAZZI, 2002), a diferença de energia ΔE se torna

$$\Delta E \simeq \frac{Q^2}{\sqrt{2}q^-}. \quad (2.41)$$

Ainda, pela Equação (2.9), teremos que

$$\nu = \frac{P \cdot q}{m} = \frac{\sqrt{2}Pq^-}{m}, \quad (2.42)$$

em que o produto escalar foi calculado utilizando a convenção apresentada na seção anterior. Substituindo o resultado acima na equação (2.10), encontramos

$$x = \frac{Q^2}{2\sqrt{2}Pq^-}. \quad (2.43)$$

Comparando as Equações (2.41) e (2.43), teremos

$$\Delta E = 2Px. \quad (2.44)$$

Finalmente, o tempo de formação do par é

$$\tau_f \sim \frac{1}{\Delta E} \simeq \frac{1}{2Px}. \quad (2.45)$$

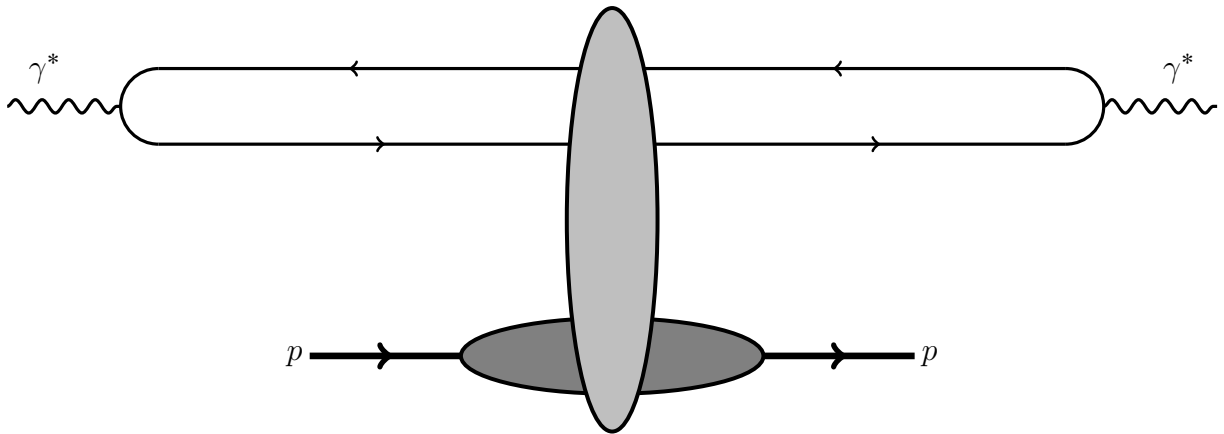
Para valores pequenos de x ($x \ll 1$), o tempo de formação do par é muito maior que o tempo da interação do par com o alvo,

$$\tau_f \gg \tau_{int} \sim \frac{1}{P}. \quad (2.46)$$

Equivalentemente, podemos dizer que o par viaja uma longa distância $l \sim 1/2Px$ antes de interagir com o alvo. Consequentemente, o tamanho transverso do par é congelado durante a interação com o próton, e podemos interpretar o DIS em pequeno x como o espalhamento de um dipolo $q\bar{q}$ de tamanho fixo com um alvo.

Neste formalismo, o espalhamento elástico γ^*p é assumido como ocorrendo em três etapas: primeiro o fóton virtual γ^* , emitido pelo elétron incidente, se separa em um par quark-antiquark. Então o par $q\bar{q}$ interage elasticamente com o próton e, posteriormente, o par $q\bar{q}$ se recombina para formar um fóton virtual γ^* . A representação diagramática desse processo é dada na Figura 2.7.

Figura 2.7 – Amplitude de espalhamento forward $\gamma^* \rightarrow p$ no referencial de repouso do alvo: o fóton virtual se divide em um par $q\bar{q}$ que interage com o alvo. A interação é representada pela elipse vertical. Por questões de simplicidade, o elétron que emite o fóton virtual não é mostrado no diagrama.



Fonte: O autor

Assim, a amplitude para o processo elástico $\gamma^*p \rightarrow \gamma^*p$, $\mathcal{A}_{el}^{\gamma^*p}(x, Q, \Delta)$, pode ser escrita de forma fatorizada como sendo o produto das amplitudes dos três subprocessos descritos anteriormente, integrados sobre as variáveis do dipolo \mathbf{r} e z :

$$\mathcal{A}_{el}^{\gamma^*p}(x, Q, \Delta) = \sum_f \sum_{h, \bar{h}} \int d^2\mathbf{r} \int_0^1 dz \Psi_{h\bar{h}}^*(\mathbf{r}, z, Q) \mathcal{A}_{el}^{q\bar{q}}(x, \mathbf{r}, \Delta) \Psi_{h\bar{h}}(\mathbf{r}, z, Q), \quad (2.47)$$

em que $\Psi_{h\bar{h}}(\mathbf{r}, z, Q)$ denota a amplitude de probabilidade do fóton virtual incidente flutuar em um par quark-antiquark com helicidades h e \bar{h} e sabor f . As helicidades do fóton são suprimidas

por questões de simplicidade. Ainda, $\mathcal{A}_{el}^{q\bar{q}}(x, \mathbf{r}, \mathbf{\Delta})$ é a amplitude de espalhamento elástica de um dipolo de tamanho \mathbf{r} com o próton, $\mathbf{\Delta}$ denota o momentum transverso perdido pelo próton emergente, e x é o x de Bjorken.

A amplitude $\mathcal{A}_{el}^{q\bar{q}}(x, \mathbf{r}, \mathbf{\Delta})$ é definida de tal modo que a seção de choque diferencial elástica para o espalhamento elástico do par $q\bar{q}$ com o próton seja

$$\frac{d\sigma_{el}^{q\bar{q}}}{dt} = \frac{1}{16\pi} |\mathcal{A}_{el}^{q\bar{q}}(x, \mathbf{r}, \mathbf{\Delta})|^2, \quad (2.48)$$

em que $t = -\mathbf{\Delta}^2$. Além disso, $\mathcal{A}_{el}^{q\bar{q}}(x, \mathbf{r}, \mathbf{\Delta})$ pode ser relacionada com o elemento $S(x, \mathbf{r}, \mathbf{b})$ da matriz S para o espalhamento de um dipolo de tamanho \mathbf{r} em um parâmetro de impacto \mathbf{b} (MUELLER, 1998):

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{el}^{q\bar{q}}(x, \mathbf{r}, \mathbf{\Delta}) &= \int d^2\mathbf{b} e^{-i\mathbf{b}\cdot\mathbf{\Delta}} \tilde{\mathcal{A}}_{el}^{q\bar{q}}(x, \mathbf{r}, \mathbf{b}) \\ &= i \int d^2\mathbf{b} e^{-i\mathbf{b}\cdot\mathbf{\Delta}} 2[1 - S(x, \mathbf{r}, \mathbf{b})]. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Pelo teorema ótico (BARONE; PREDAZZI, 2002) temos que a seção de choque total para o espalhamento do par $q\bar{q}$ com o próton é dada pela parte imaginária de apenas um elemento da matriz S : a amplitude de espalhamento elástico *forward* ($\mathbf{\Delta} = 0$). Assim,

$$\sigma_{tot}^{q\bar{q}}(x, \mathbf{r}) = \text{Im} \mathcal{A}_{el}^{q\bar{q}}(x, \mathbf{r}, \mathbf{\Delta} = 0). \quad (2.50)$$

Pela Equação (2.49), a relação acima se traduz na seguinte expressão para a seção de choque total dipolo-próton

$$\sigma_{tot}^{q\bar{q}}(x, \mathbf{r}) = 2 \int d^2\mathbf{b} [1 - \text{Re} S(x, \mathbf{r}, \mathbf{b})]. \quad (2.51)$$

A integração sobre o parâmetro de impacto \mathbf{b} presente no elemento da matriz S motiva a definição da seção de choque diferencial como

$$\frac{d\sigma^{q\bar{q}}}{d^2\mathbf{b}} = 2[1 - \text{Re} S(x, \mathbf{r}, \mathbf{b})]. \quad (2.52)$$

Usualmente assume-se (KOWALSKI; MOTYKA; WATT, 2006)

$$\frac{d\sigma^{q\bar{q}}}{d^2\mathbf{b}} = 2[1 - \text{Re} S(x, \mathbf{r}, \mathbf{b})] \equiv 2N(x, \mathbf{r}, \mathbf{b}), \quad (2.53)$$

em que $N(x, \mathbf{r}, \mathbf{b})$ é a amplitude de espalhamento elástica *forward*[†] dipolo-próton.

Agora, podemos calcular a seção de choque total para o espalhamento γ^*p . Usando as Equações (2.47) e (2.50) e integrando a seção de choque de dipolo com as funções de onda do fóton:

$$\begin{aligned} \sigma_{T,L}^{\gamma^*p}(x, Q) &= \text{Im} \mathcal{A}_{T,L}^{\gamma^*p}(x, \mathbf{r}, \mathbf{\Delta} = 0) \\ &= \sum_f \int d^2\mathbf{r} \int_0^1 dz (\Psi^* \Psi)_{T,L}^f \sigma^{q\bar{q}}(x, \mathbf{r}) \\ &= \sum_f \int d^2\mathbf{r} \int_0^1 dz (\Psi^* \Psi)_{T,L}^f \int d\mathbf{b} 2N(x, \mathbf{r}, \mathbf{b}) \end{aligned} \quad (2.54)$$

[†]O termo *forward* significa que não há transferência de momentum durante a interação do dipolo com o próton.

em que $\Psi_{T,L}^f(\mathbf{r}, z, Q)$ são as funções de sobreposição do fóton, e os índices T e L representam as polarizações transversal e longitudinal do fóton, respectivamente. As funções de sobreposição são bem conhecidas e podem ser obtidas explicitamente. Na primeira parte do próximo capítulo, apresentaremos os cálculos referentes a estas funções.

A amplitude de espalhamento $N(x, \mathbf{r}, \mathbf{b})$ nos informa a probabilidade de um dipolo interagir com o próton. A dependência com a energia (x) de $N(x, \mathbf{r}, \mathbf{b})$ pode ser encontrada com a equação de Balitsky-Kovchegov (BK). Como a equação BK é uma equação que não possui uma solução analítica, existem diversos modelos fenomenológicos para $N(x, \mathbf{r}, \mathbf{b})$ na literatura baseados nas soluções assintóticas da equação BK. No capítulo 5, iremos estudar um modelo fenomenológico para $N(x, \mathbf{r}, \mathbf{b})$ e aplicá-lo em um processo envolvendo a produção exclusiva de mésons vetoriais.

No próximo capítulo, a partir dos cálculos envolvendo as funções de sobreposição, deduziremos a equação de Balitsky-Kovchegov.

3 A EQUAÇÃO DE BALITSKY-KOVCHegov

Neste capítulo, vamos obter explicitamente as funções de sobreposição do fóton introduzidas no capítulo anterior. Aqui, também estudaremos a emissão de um glúon a partir de um quark. A partir destes dois estudos, iremos deduzir a equação de Balitsky-Kovchegov (BK), que é a equação mais simples que descreve a QCD no regime de altas energias. Os tópicos discutidos neste capítulo seguem de perto a discussão apresentada em (MÄNTYSAARI, 2011).

3.1 TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS NO CONE DE LUZ

Um campo escalar $\phi(x)$ pode ser quantizado no cone de luz em termos dos operadores de criação \tilde{a}^\dagger e aniquilação \tilde{a} de partículas:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\bar{p}}{\sqrt{(2\pi)^3}\sqrt{2p^+}} [e^{ip\cdot x}\tilde{a}^\dagger(\bar{p}) + e^{-ip\cdot x}\tilde{a}(\bar{p})]. \quad (3.1)$$

O vetor \bar{p} é a parte espacial do momentum de uma partícula no cone de luz, $\bar{p} = (p^+, \mathbf{p})$. Os operadores \tilde{a}^\dagger e \tilde{a} satisfazem a relação de comutação

$$[\tilde{a}(\bar{p}), \tilde{a}^\dagger(\bar{q})] = \delta^{(3)}(\bar{p} - \bar{q}). \quad (3.2)$$

Similarmente, para um campo de férmions ψ , temos

$$\psi(x) = \sum_s \int \frac{d^3\bar{p}}{\sqrt{(2\pi)^3}\sqrt{2p^+}} [e^{-ip\cdot x}b_s(\bar{p})u_s(p) + e^{ip\cdot x}d_s^\dagger(\bar{p})v_s(p)]. \quad (3.3)$$

Aqui, $b_s(\bar{p})$ aniquila um férmion que possui spin s e momentum p , enquanto $d_s^\dagger(\bar{p})$ cria um antiférmion que também possui spin s e momentum p . Ainda, $u_s(p)$ e $v_s(p)$ são os espinores para férmions e antiférmions, respectivamente. Os operadores fermiônicos satisfazem as seguintes relações de anticomutação

$$\{b_s(\bar{p}), b_{s'}^\dagger(\bar{q})\} = \delta^{(3)}(\bar{p} - \bar{q})\delta_{ss'} \quad \text{e} \quad \{d_s(\bar{p}), d_{s'}^\dagger(\bar{q})\} = \delta^{(3)}(\bar{p} - \bar{q})\delta_{ss'}. \quad (3.4)$$

Um campo para bósons da gauge A_μ pode ser escrito como

$$A_\mu(x) = \sum_\lambda \int \frac{d^3\bar{p}}{\sqrt{(2\pi)^3}\sqrt{2p^+}} [e^{-ip\cdot x}a^\lambda(\bar{p})\varepsilon_\mu^\lambda(p) + e^{ip\cdot x}a^{\lambda\dagger}(\bar{p})\varepsilon_\mu^{*\lambda}(p)] \quad (3.5)$$

em que λ é a polarização do campo e ε é o vetor de polarização. Os operadores $a^{\lambda\dagger}$ e $a^{\lambda'}$ satisfazem a relação de comutação

$$[a^\lambda(\bar{p}), a^{\lambda'\dagger}(\bar{q})] = \delta^{(3)}(\bar{p} - \bar{q})\delta_{\lambda\lambda'}. \quad (3.6)$$

O termo de interação da Hamiltoniana da QED é (lembrando que P^- é a energia no cone de luz)

$$P_{int}^- = e \int d^3\bar{x} \bar{\psi} \not{A} \psi + e^2 \int d^3\bar{x} \left[\bar{\psi} \gamma^+ \psi \frac{1}{(i\partial_-)^2} \bar{\psi} \gamma^+ \psi + \bar{\psi} \not{A} \frac{\gamma^+}{i\partial_-} \not{A} \psi \right], \quad (3.7)$$

em que $\not{A} = A_\mu \gamma^\mu$, e é a carga elementar do elétron, $\gamma^+ = 1/\sqrt{2}(\gamma^0 + \gamma^3)$, em que γ^0 e γ^3 são as matrizes gama, e $\partial_- = 1/2 \partial^+$ é uma derivada do tipo espaço (BRODSKY; PAULI; PINSKY, 1998).

Os dois últimos termos da Equação (3.7) descrevem interações como $f\bar{f}f\bar{f}$ e $\gamma\gamma f\bar{f}$ (em que f representa um férmion e \bar{f} um antiférmion, e γ representa um fóton), que não estão presentes na forma instantânea da QED. Neste trabalho não lidaremos com essas interações, porque quando calculamos o processo $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}$ (fóton virtual indo em um par quark-antiquark) na próxima seção, só precisamos do primeiro termo da Equação (3.7), que é semelhante à forma instantânea da QED.

3.2 FUNÇÃO DE ONDA DO FÓTON VIRTUAL

A probabilidade do fóton virtual emitir um dipolo pode ser calculada em termos da teoria de perturbação do cone de luz. Podemos usar diretamente as regras de Feynman para o cone de luz para escrever a amplitude para o espalhamento $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}$. Mas nesta seção, iremos obtê-la de outra maneira. As regras de Feynman serão utilizadas para calcular a amplitude de emissão de um glúon ($q \rightarrow qg$) na próxima seção.

Primeiramente, vamos definir um estado de fóton virtual com momentum \bar{q} e polarização λ na teoria livre (não-interagente) como

$$|\gamma^*(\bar{q})\rangle_0 = a^{\lambda\dagger}(\bar{q}) |0\rangle. \quad (3.8)$$

Se denotarmos o Hamiltoniano da teoria livre por P_0^- , teremos

$$P_0^- |\gamma^*\rangle_0 = q^- |\gamma^*\rangle_0. \quad (3.9)$$

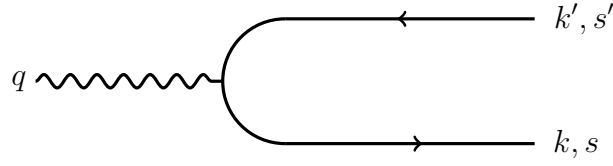
De maneira similar, podemos escrever um estado de dipolo nesta teoria como

$$|q_s(\bar{k})\bar{q}_{s'}(\bar{k}')\rangle_0 = b_s^\dagger(\bar{k}) d_{s'}^\dagger(\bar{k}') |0\rangle, \quad (3.10)$$

da qual segue que

$$P_0^- |q_s(\bar{k})\bar{q}_{s'}(\bar{k}')\rangle_0 = (k^- + k'^-) |q_s(\bar{k})\bar{q}_{s'}(\bar{k}')\rangle_0. \quad (3.11)$$

Aqui, k e k' representam os momenta do quark e do antiquark, respectivamente. Ainda, s e s' representam os spins do quark e do antiquark, respectivamente. Na Figura 3.1, apresentamos

Figura 3.1 – Fóton virtual se dividindo em um par $q\bar{q}$.


Fonte: O autor

um diagrama que representa um fóton virtual com momentum q se separando em um par quark-antiquark.

Vamos agora aplicar a teoria de perturbação, da mesma maneira que fazemos em mecânica quântica. Vamos assumir que o estado de fóton virtual na teoria interagente, $|\gamma^*\rangle$, pode ser escrito como um estado da teoria livre $|\gamma^*\rangle_0$ acrescido de uma pequena perturbação

$$|\gamma^*\rangle = |\gamma^*\rangle_0 + \sum_{ss'} \int d^3\bar{l}d^3\bar{l}'\delta^{(3)}(\bar{q} - \bar{l} - \bar{l}')\psi_{ss'}(\bar{l})|q_s(\bar{l})\bar{q}_{s'}(\bar{l}')\rangle_0 + \mathcal{O}(e^2), \quad (3.12)$$

em que a função $\psi_{ss'}$ é a função de onda do fóton virtual (ainda desconhecida). Aqui, l e l' representam os momenta de um par quark-antiquark e s e s' representam os seus spins. Como o desdobramento $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}$ inclui um acoplamento entre uma linha fermiônica e um campo de gauge, ou seja, teremos somente um vértice, e portanto, esperamos que $\psi_{ss'}$ seja proporcional a e , e com isso, podemos desprezar os termos envolvendo ordens mais altas no acoplamento eletromagnético $\alpha_{em} = g_e^2/4\pi$, ou equivalentemente, na carga elementar e (ver Capítulo 1).

Realizando a projeção da Equação (3.12) com ${}_0\langle q_{\hat{s}}(\bar{k})\bar{q}_{\hat{s}'}(\bar{k}')|$, e usando a ortogonalidade dos estados não interagentes

$${}_0\langle q_{\hat{s}}(\bar{k})\bar{q}_{\hat{s}'}(\bar{k}')|q_s(\bar{l})\bar{q}_{s'}(\bar{l}')\rangle_0 = \delta^{(3)}(\bar{k} - \bar{l})\delta^{(3)}(\bar{k}' - \bar{l}')\delta_{s\hat{s}}\delta_{s'\hat{s}'}, \quad (3.13)$$

obtemos

$$\begin{aligned} {}_0\langle q_{\hat{s}}(\bar{k})\bar{q}_{\hat{s}'}(\bar{k}')|\gamma^*\rangle &= \underbrace{{}_0\langle q_{\hat{s}}(\bar{k})\bar{q}_{\hat{s}'}(\bar{k}')|\gamma^*\rangle_0}_0 \\ &+ \sum_{ss'} \int d^3\bar{l}d^3\bar{l}'\delta^{(3)}(\bar{q} - \bar{l} - \bar{l}')\psi_{ss'}(\bar{l}){}_0\langle q_{\hat{s}}(\bar{k})\bar{q}_{\hat{s}'}(\bar{k}')|q_s(\bar{l})\bar{q}_{s'}(\bar{l}')\rangle_0 + \mathcal{O}(e^2) \\ {}_0\langle q_{\hat{s}}(\bar{k})\bar{q}_{\hat{s}'}(\bar{k}')|\gamma^*\rangle &= 0 + \sum_{ss'} \int d^3\bar{l}d^3\bar{l}'\delta^{(3)}(\bar{q} - \bar{l} - \bar{l}')\psi_{ss'}(\bar{l})\delta^{(3)}(\bar{k} - \bar{l})\delta^{(3)}(\bar{k}' - \bar{l}')\delta_{s\hat{s}}\delta_{s'\hat{s}'} \\ {}_0\langle q_{\hat{s}}(\bar{k})\bar{q}_{\hat{s}'}(\bar{k}')|\gamma^*\rangle &= 0 + \sum_{ss'} \int d^3\bar{l}'\delta^{(3)}(\bar{q} - \bar{k} - \bar{l}')\psi_{ss'}(\bar{k})\delta^{(3)}(\bar{k}' - \bar{l}')\delta_{s\hat{s}}\delta_{s'\hat{s}'} \\ {}_0\langle q_{\hat{s}}(\bar{k})\bar{q}_{\hat{s}'}(\bar{k}')|\gamma^*\rangle &= 0 + \sum_{ss'} \delta^{(3)}(\bar{q} - \bar{k} - \bar{k}')\psi_{ss'}(\bar{k})\delta_{s\hat{s}}\delta_{s'\hat{s}'}. \end{aligned}$$

As funções $\delta_{s\hat{s}}$ e $\delta_{s'\hat{s}'}$ resolvem a soma, e portanto, temos que

$${}_0\langle q_{\hat{s}}(\bar{k})\bar{q}_{\hat{s}'}(\bar{k}')|\gamma^*\rangle = 0 + \delta^{(3)}(\bar{q} - \bar{k} - \bar{k}')\psi_{\hat{s}\hat{s}'}(\bar{k}). \quad (3.14)$$

Por outro lado, também podemos projetar a Equação (3.12) em ${}_0\langle q_{\hat{s}}(\bar{k})\bar{q}_{\hat{s}'}(\bar{k}')|(P_0^- + P_{int}^-)\rangle$, em que $P^- = P_0^- + P_{int}^-$ é a Hamiltoniana total da teoria interagente e P_{int}^- é dado pela Equação (3.7). Assim,

$$\begin{aligned} q^- {}_0\langle q_{\hat{s}}(\bar{k})\bar{q}_{\hat{s}'}(\bar{k}')|\gamma^*\rangle &= q^- \cdot 0 + {}_0\langle q_{\hat{s}}(\bar{k})\bar{q}_{\hat{s}'}(\bar{k}')|P_{int}^-|\gamma^*\rangle_0 \\ &+ \sum_{ss'} \int d^3\bar{l} \delta^{(3)}(\bar{q} - \bar{k} - \bar{l}') \psi_{\hat{s}\hat{s}'}(\bar{k})(k^- + l'^-) \delta^{(3)}(\bar{k}' - \bar{l}') \delta_{\hat{s}\hat{s}} \delta_{\hat{s}'\hat{s}'} \\ &+ \mathcal{O}(e^2) \\ &= q^- \cdot 0 + {}_0\langle q_{\hat{s}}(\bar{k})\bar{q}_{\hat{s}'}(\bar{k}')|P_{int}^-|\gamma^*\rangle_0 \\ &+ \delta^{(3)}(\bar{q} - \bar{k} - \bar{k}') \psi_{\hat{s}\hat{s}'}(\bar{k})(k^- + k'^-) + \mathcal{O}(e^2). \end{aligned}$$

Portanto,

$$q^- {}_0\langle q_{\hat{s}}(\bar{k})\bar{q}_{\hat{s}'}(\bar{k}')|\gamma^*\rangle = {}_0\langle q_{\hat{s}}(\bar{k})\bar{q}_{\hat{s}'}(\bar{k}')|P_{int}^-|\gamma^*\rangle_0 + (k^- + k'^-) \delta^{(3)}(\bar{q} - \bar{k} - \bar{k}') \psi_{\hat{s}\hat{s}'}(\bar{k}) + \mathcal{O}(e^2), \quad (3.15)$$

em que o termo contendo $\psi_{\hat{s}\hat{s}'} \langle q\bar{q}|P_{int}^-|q\bar{q}\rangle$ está incluído em $\mathcal{O}(e^2)$.

Substituindo a Equação (3.14) na Equação (3.15) e efetuando a troca de índices $\hat{s}, \hat{s}' \rightarrow s, s'$, encontramos

$$\delta^{(3)}(\bar{q} - \bar{k} - \bar{k}') \psi_{ss'} = \frac{{}_0\langle q_s(\bar{k})\bar{q}_{s'}(\bar{k}')|P_{int}^-|\gamma^*\rangle_0}{q^- - k^- - k'^-}. \quad (3.16)$$

Podemos encontrar o produto interno ${}_0\langle q_s(\bar{k})\bar{q}_{s'}(\bar{k}')|P_{int}^-|\gamma^*\rangle_0$ presente na equação acima substituindo o Hamiltoniano apresentado na Equação (3.7). Logo,

$${}_0\langle q_s(\bar{k})\bar{q}_{s'}(\bar{k}')|P_{int}^-|\gamma^*\rangle_0 = \left\langle q_s(\bar{k})\bar{q}_{s'}(\bar{k}') \left| e \int d^3\bar{x} \bar{\psi} A_\mu \gamma^\mu \psi \right| \gamma^* \right\rangle_0.$$

Realizando a substituição do campo A_μ e do campo fermiônico ψ , dados pelas Equações (3.5) e (3.3), encontramos

$$\begin{aligned} &{}_0\langle q_s(\bar{k})\bar{q}_{s'}(\bar{k}')|P_{int}^-|\gamma^*\rangle_0 = \\ &\left\langle q_s(\bar{k})\bar{q}_{s'}(\bar{k}') \left| e \int d^3\bar{x} \sum_s \int \frac{d^3\bar{p}}{\sqrt{(2\pi)^3} \sqrt{2p^+}} [e^{-ip \cdot x} d_s(\bar{p}) \bar{v}_s(p) + e^{ip \cdot x} b_s^\dagger(\bar{p}) \bar{u}_s(p)] \right. \right. \\ &\times \sum_{\lambda'} \int \frac{d^3\bar{l}}{\sqrt{(2\pi)^3} \sqrt{2l^+}} [e^{-il \cdot x} a^{\lambda'}(\bar{l}) \epsilon_\mu^{\lambda'}(l) + e^{il \cdot x} a^{\lambda'\dagger}(\bar{l}) \epsilon_\mu^{*\lambda'}(l)] \gamma^\mu \\ &\left. \left. \times \sum_{s'} \int \frac{d^3\bar{p}'}{\sqrt{(2\pi)^3} \sqrt{2p'^+}} [e^{-ip' \cdot x} b_{s'}(\bar{p}') u_{s'}(p') + e^{ip' \cdot x} d_{s'}^\dagger(\bar{p}') v_{s'}(p')] \right| \gamma^* \right\rangle_0. \end{aligned}$$

Pelas Equações (3.8) e (3.10) teremos

$$\begin{aligned} {}_0\langle q_s(\bar{k})\bar{q}_{s'}(\bar{k}')|P_{int}^-|\gamma^*\rangle_0 &= e_f e \sum_{s,s',\lambda'} \int d^3\bar{x} d^3\bar{p} d^3\bar{p}' d^3\bar{l} \langle 0 | b_s(\bar{k}) d_{s'}(\bar{k}') \\ &\times [d_s(\bar{p}) \bar{v}_s(p) e^{-ip \cdot x} + b_s^\dagger(\bar{p}) \bar{u}_s(p) e^{ip \cdot x}] \\ &\times [a^{\lambda'}(\bar{l}) \epsilon_\mu^{\lambda'}(l) e^{-il \cdot x} + a^{\lambda'\dagger}(\bar{l}) \epsilon_\mu^{*\lambda'}(l) e^{il \cdot x}] \gamma^\mu \\ &\times [b_{s'}(\bar{p}') u_{s'}(p') e^{-ip' \cdot x} + d_{s'}^\dagger(\bar{p}') v_{s'}(p') e^{ip' \cdot x}] a^{\lambda'\dagger}(\bar{q}) |0\rangle, \end{aligned}$$

em que os fatores $(2\pi)^{-3/2}(2p^+)^{-1/2}$, $(2\pi)^{-3/2}(2l^+)^{-1/2}$ e $(2\pi)^{-3/2}(2p'^+)^{-1/2}$ foram incluídos nas medidas de integração ${}^3\bar{p}$, ${}^3\bar{p}'$ e ${}^3\bar{l}$. Ainda, e_f é a carga do quark em termos da carga elementar (-1/3 para quarks d e 2/3 para quarks u).

Agora, vamos prosseguir utilizando as regras de comutação e de anticomutação dos operadores de criação e aniquilação termo a termo, de maneira que o operador de aniquilação seja movido para à direita ou o operador de criação seja movido para à esquerda. Usamos o fato de que o operador de aniquilação destrói o vácuo e, portanto, $b_p|0\rangle = 0$ e $\langle 0|b_p^\dagger = 0$. Como resultado, encontramos

$$\begin{aligned} {}_0\langle q_{\bar{s}}(\bar{k})\bar{q}_{s'}(\bar{k}')|P_{int}^-|\gamma^*\rangle_0 &= e_f e \sum_{ss'\lambda'} \int d^3\bar{x} {}^3\bar{l} {}^3\bar{p}' {}^3\bar{p} \langle 0|b_s(\bar{k})d_{s'}(\bar{k}')b_s^\dagger(\bar{p})a^{\lambda'}(\bar{l})d_{s'}^\dagger(\bar{p}')a^{\lambda'}(\bar{q}) \\ &\times \bar{u}_s(p)\not{x}^{\lambda'}(l)v_{s'}(p')e^{i(p+p'-l)\cdot x}|0\rangle. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Continuando com as comutações e anticomutações, teremos

$$\begin{aligned} {}_0\langle q_{\bar{s}}(\bar{k})\bar{q}_{s'}(\bar{k}')|P_{int}^-|\gamma^*\rangle_0 &= e_f e \sum_{ss'\lambda'} \int d^3\bar{x} {}^3\bar{l} {}^3\bar{p}' {}^3\bar{p} \\ &\times \left[-\delta^{(3)}(\bar{k} - \bar{p})\delta_{ss} \delta^{(3)}(\bar{l} - \bar{q})\delta_{\lambda'\lambda} \delta^{(3)}(\bar{k}' - \bar{p}')\delta_{s's'} \bar{u}_s(p)\not{x}^{\lambda'}(l)v_{s'}(p')e^{i(p+p'-l)\cdot x} \right]. \end{aligned}$$

Reorganizando os termos,

$$\begin{aligned} {}_0\langle q_{\bar{s}}(\bar{k})\bar{q}_{s'}(\bar{k}')|P_{int}^-|\gamma^*\rangle_0 &= -e_f e \sum_{ss'\lambda'} \int d^3\bar{x} e^{i(p+p'-l)\cdot x} \\ &\times \int {}^3\bar{l} {}^3\bar{p}' {}^3\bar{p} \bar{u}_s(p)\not{x}^{\lambda'}(l)v_{s'}(p')\delta^{(3)}(\bar{k} - \bar{p})\delta^{(3)}(\bar{l} - \bar{q})\delta^{(3)}(\bar{k}' - \bar{p}')\delta_{ss}\delta_{\lambda'\lambda}\delta_{s's'}. \end{aligned}$$

A integral $d^3\bar{x}$ ($x^+ = 0$), é igual a

$$\int d^3\bar{x} e^{i(p+p'-l)\cdot x} = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\bar{p} + \bar{p}' - \bar{l}). \quad (3.18)$$

Além disso, as funções δ_{ss} , $\delta_{\lambda'\lambda}$ e $\delta_{s's'}$ eliminam as somas $\sum_{ss'\lambda'}$. Logo,

$$\begin{aligned} {}_0\langle q_{\bar{s}}(\bar{k})\bar{q}_{s'}(\bar{k}')|P_{int}^-|\gamma^*\rangle_0 &= -e_f e \\ &\times \int {}^3\bar{l} {}^3\bar{p}' {}^3\bar{p} \bar{u}_s(p)\not{x}^{\lambda'}(l)v_{s'}(p')\delta^{(3)}(\bar{k} - \bar{p})\delta^{(3)}(\bar{l} - \bar{q})\delta^{(3)}(\bar{k}' - \bar{p}') (2\pi)^3\delta^{(3)}(\bar{p} + \bar{p}' - \bar{l}). \end{aligned}$$

As funções delta resolvem as integrais sobre o momentum e assim, teremos

$$\begin{aligned} {}_0\langle q_{\bar{s}}(\bar{k})\bar{q}_{s'}(\bar{k}')|P_{int}^-|\gamma^*\rangle_0 &= -e_f e \left(\frac{\bar{u}_s(k)}{\sqrt{(2\pi)^3 2k^+}} \right) \left(\frac{\not{x}^{\lambda'}(q)}{\sqrt{(2\pi)^3 2q^+}} \right) \left(\frac{v_{s'}(k')}{\sqrt{(2\pi)^3 2k'^+}} \right) \\ &\times (2\pi)^3\delta^{(3)}(\bar{k} + \bar{k}' - \bar{q}). \end{aligned}$$

Comparando a equação acima com a Equação (3.16), obtemos

$$\psi_{ss'}(\bar{k}) = e_f e \left(\frac{\bar{u}_s(k)}{\sqrt{(2\pi)^3 2k^+}} \right) \left(\frac{\not{x}^{\lambda'}(q)}{\sqrt{(2\pi)^3 2q^+}} \right) \left(\frac{v_{s'}(k')}{\sqrt{(2\pi)^3 2k'^+}} \right) \frac{(2\pi)^3}{q^- - k^- - k'^-}, \quad (3.19)$$

que é a função de onda do fóton virtual. Ainda precisamos encontrar alguns termos desta função.

Assim, sabendo que

$$q = (q^+, q^-, \mathbf{q}), \quad (3.20)$$

temos

$$q^2 = q \cdot q = (q^+, q^-, \mathbf{q}) \cdot (q^+, q^-, \mathbf{q}) = q^+ q^- + q^- q^+ - \mathbf{q}^2.$$

Como $\mathbf{q}^2 = 0$, teremos

$$q^2 = 2q^+ q^-. \quad (3.21)$$

Denotando $Q^2 = -q^2$, encontramos

$$q^- = -\frac{Q^2}{2q^+}. \quad (3.22)$$

Da mesma forma, sabendo que

$$k = (k^+, k^-, \mathbf{k}), \quad (3.23)$$

temos

$$k^2 = k \cdot k = (k^+, k^-, \mathbf{k}) \cdot (k^+, k^-, \mathbf{k}) = k^+ k^- + k^- k^+ - \mathbf{k}^2 = 2k^+ k^- - \mathbf{k}^2. \quad (3.24)$$

Denotando $m^2 = k^2$, encontramos

$$k^- = \frac{m^2 + \mathbf{k}^2}{2zq^+}, \quad (3.25)$$

em que m é a massa do quark e z é a fração de momentum carregada pelo quark ($k^+ = zq^+$).

Similarmente, para k'^- teremos

$$k'^- = \frac{m^2 + \mathbf{k}^2}{2(1-z)q^+}, \quad (3.26)$$

em que $(1-z)$ é a fração de momentum carregada pelo antiquark.

Assim, pelas Equações (3.22), (3.25) e (3.26), encontramos

$$\begin{aligned} q^- - k^- - k'^- &= -\frac{Q^2}{2q^+} - \frac{m^2 + \mathbf{k}^2}{2zq^+} - \frac{m^2 + \mathbf{k}^2}{2(1-z)q^+} \\ &= \frac{-Q^2(1-z)z - (m^2 + \mathbf{k}^2)(1-z) - (m^2 + \mathbf{k}^2)z}{2q^+z(1-z)} \\ &= -\frac{Q^2(1-z)z + m^2 + \mathbf{k}^2}{2q^+z(1-z)}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Ainda nos falta obter o termo

$$\bar{u}_s(k) \not{\epsilon}^\lambda(q) v_{s'}(k'). \quad (3.28)$$

presente na função de onda do fóton virtual. Para fazer isso, precisamos especificar o vetor de polarização ϵ . Considerando primeiramente um fóton virtual que possui somente polarização longitudinal, podemos escrever em um gauge covariante* (HALZEN; MARTIN, 1984)

$$\epsilon_L(q) = \left(\frac{q^+}{Q}, \frac{Q}{2q^+}, \mathbf{0} \right). \quad (3.29)$$

*invariante por transformações de Lorentz

Podemos realizar então uma transformação de gauge para o gauge do cone de luz, no qual $\varepsilon^+ = 0$. Assim,

$$\begin{aligned}\varepsilon_L^\mu(q) \rightarrow \varepsilon_L^\mu(q) - \frac{q^\mu}{Q} &= \left(0, \frac{Q}{2q^+} - \frac{q^-}{Q}, \mathbf{0}\right) \\ &= \left(0, \frac{Q^2 - 2q^+q^-}{2Qq^+}, \mathbf{0}\right).\end{aligned}$$

Como $-Q^2 = 2q^+q^-$, encontramos

$$\varepsilon_L^\mu(q) \rightarrow \varepsilon_L^\mu(q) - \frac{q^\mu}{Q} = \left(0, \frac{Q}{q^+}, \mathbf{0}\right). \quad (3.30)$$

Como $\varepsilon^- = Q/q^+$, e $\not{\varepsilon} = \gamma_- \varepsilon^- = \gamma^+ \varepsilon^-$, podemos escrever

$$\begin{aligned}\bar{u}_s(k)\not{\varepsilon}^\lambda(q)v_{s'}(k') &= \bar{u}_s(k)\gamma^+\varepsilon^-v_{s'}(k') \\ &= \bar{u}_s(k)\gamma^+\left(\frac{Q}{q^+}\right)v_{s'}(k') \\ &= \left(\frac{Q}{q^+}\right)\bar{u}_s(k)\gamma^+v_{s'}(k').\end{aligned}$$

Sabendo que $\bar{u}_s(k) = u_s^\dagger(k)\gamma^0$, teremos

$$\bar{u}_s(k)\not{\varepsilon}^\lambda(q)v_{s'}(k') = \left(\frac{Q}{q^+}\right)u_s^\dagger(k)\gamma^0\gamma^+v_{s'}(k'). \quad (3.31)$$

Então, agora precisamos encontrar $u_s^\dagger(k)\gamma^0\gamma^+v_{s'}(k')$. Para isso, usaremos as formas explícitas das matrizes gama e dos espinores de Dirac na base quiral, dados em (KOGUT; SOPER, 1970). Os espinores são:

$$\begin{aligned}u(k, 1) &= \frac{1}{\sqrt[4]{2}\sqrt{k^+}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}k^+ \\ k_x + ik_y \\ m \\ 0 \end{pmatrix}; & u(k, -1) &= \frac{1}{\sqrt[4]{2}\sqrt{k^+}} \begin{pmatrix} 0 \\ m \\ -k_x + ik_y \\ \sqrt{2}k^+ \end{pmatrix}; \\ v(k, 1) &= \frac{1}{\sqrt[4]{2}\sqrt{k^+}} \begin{pmatrix} 0 \\ -m \\ -k_x + ik_y \\ \sqrt{2}k^+ \end{pmatrix}; & v(k, -1) &= \frac{1}{\sqrt[4]{2}\sqrt{k^+}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}k^+ \\ k_x + ik_y \\ -m \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned} \quad (3.32)$$

As matrizes gama são dadas por:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.33)$$

em que $\sigma^i, i = 1, 2, 3$ são as matrizes de spin de Pauli. A matriz γ^+ é definida como:

$$\gamma^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^0 + \gamma^3). \quad (3.34)$$

Logo, pelas matrizes gama dadas anteriormente, teremos que

$$\begin{aligned}
 \gamma^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \\
 &= \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Realizando o produto de γ^0 com γ^+ , encontramos

$$\begin{aligned}
 \gamma^0 \gamma^+ &= \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Voltando para a Equação (3.31), teremos

$$\begin{aligned}
 u_s^\dagger(k) \gamma^0 \gamma^+ v_{s'}(k') &= \sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{k^+}} \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{k'^+}} \\
 &\times \begin{pmatrix} \sqrt{2} k^+ & k_x - i k_y & m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} k'^+ \\ k'_x + i k'_y \\ -m \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{k^+} \sqrt{k'^+}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} k^+ & k_x - i k_y & m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} k'^+ \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{k^+} \sqrt{k'^+}} \sqrt{2} k^+ \sqrt{2} k'^+ \\
 &= \sqrt{2} \sqrt{k^+} \sqrt{2} \sqrt{k'^+} \\
 &= \sqrt{2 k^+ 2 k'^+} \delta_{s, -s'}.
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Finalmente, a função de onda do fóton virtual, levando em consideração somente a

polarização longitudinal, será:

$$\begin{aligned}
 \psi_{ss'}^L(k) &= e_f e \frac{\bar{u}_s(k)}{\sqrt{(2\pi)^3 2k^+}} \frac{\not{\epsilon}^\lambda(q)}{\sqrt{(2\pi)^3 2q^+}} \frac{v_{s'}(k')}{\sqrt{(2\pi)^3 2k'^+}} \frac{(2\pi)^3}{q^- - k^- - k'^-} \\
 &= e_f e \frac{\bar{u}_s(k) \not{\epsilon}^\lambda(q) v_{s'}(k')}{\sqrt{(2\pi)^3 2k^+ (2\pi)^3 2q^+ (2\pi)^3 2k'^+}} \left[-\frac{2q^+ z(1-z)}{Q^2 z(1-z) + m^2 + \mathbf{k}^2} \right] (2\pi)^3 \\
 &= -e_f e \frac{(2\pi)^3 \sqrt{2k^+ 2k'^+} \delta_{s,-s'}}{\sqrt{(2\pi)^9 2k^+ 2q^+ 2k'^+}} \left(\frac{Q}{q^+} \right) \left[\frac{2q^+ z(1-z)}{Q^2 z(1-z) + m^2 + \mathbf{k}^2} \right] \\
 &= -e_f e \frac{(2\pi)^3 \sqrt{2k^+ 2k'^+} \delta_{s,-s'}}{(2\pi)^4 \sqrt{2\pi} \sqrt{2k^+ 2k'^+} \sqrt{2q^+}} \left(\frac{Q}{q^+} \right) \left[\frac{2q^+ z(1-z)}{Q^2 z(1-z) + m^2 + \mathbf{k}^2} \right] \\
 &= -e_f e \frac{\sqrt{2} \sqrt{2} q^+ \delta_{s,-s'}}{(2\pi) \sqrt{2} \sqrt{\pi} \sqrt{2} \sqrt{q^+}} \left(\frac{Q}{q^+} \right) \left[\frac{z(1-z)}{Q^2 z(1-z) + m^2 + \mathbf{k}^2} \right] \\
 &= -e_f e \frac{q^+ \delta_{s,-s'}}{(2\pi) \sqrt{\pi} \sqrt{q^+}} \left(\frac{Q}{q^+} \right) \left[\frac{z(1-z)}{Q^2 z(1-z) + m^2 + \mathbf{k}^2} \right] \\
 &= -e_f e \frac{\delta_{s,-s'}}{(2\pi) \sqrt{\pi}} \left(\frac{Q}{q^+} \right) \left[\frac{\sqrt{q^+} z(1-z)}{Q^2 z(1-z) + m^2 + \mathbf{k}^2} \right] \\
 &= -e_f e \left[\frac{\sqrt{q^+} z(1-z)}{\epsilon^2 + \mathbf{k}^2} \right] \left(\frac{Q}{q^+} \right) \frac{1}{(2\pi) \sqrt{\pi}} \delta_{s,-s'}, \tag{3.38}
 \end{aligned}$$

em que $\epsilon^2 = Q^2 z(1-z) + m_f^2$ e f é o sabor do quark.

Até o momento, trabalhamos com a função de onda do fóton virtual no espaço de momentum. Podemos levar a nossa análise para o espaço de coordenadas. Para tanto, vamos definir uma nova função $\psi_{ss'}^L(z, k)$ que precisa satisfazer a condição de normalização

$$\int dk^+ |\psi_{ss'}^L(k)|^2 = \int dz |\psi_{ss'}^L(z, k)|^2. \tag{3.39}$$

Como $k^+ = zq^+$, temos que

$$\begin{aligned}
 \int dk^+ |\psi_{ss'}^L(k)|^2 &= \int dz |\psi_{ss'}^L(z, k)|^2 \\
 q^+ \int dz |\psi_{ss'}^L(k)|^2 &= \int dz |\psi_{ss'}^L(z, k)|^2 \\
 \psi(z, k) &= \sqrt{q^+} \psi(k). \tag{3.40}
 \end{aligned}$$

Finalmente, o resultado pode ser levado para o espaço de coordenadas via transformada de Fourier:

$$\begin{aligned}
 \psi_{ss'}^L(z, r) &= \int \frac{d^2 k}{2\pi} e^{ik \cdot r} \psi(z, k) \\
 &= \int \frac{d^2 k}{2\pi} e^{ik \cdot r} \sqrt{q^+} \left\{ -e_f e \left[\frac{\sqrt{q^+} z(1-z)}{\epsilon^2 + k^2} \right] \left(\frac{Q}{q^+} \right) \frac{1}{(2\pi) \sqrt{\pi}} \delta_{s,-s'} \right\} \\
 &= -\frac{e_f e}{(2\pi) \sqrt{\pi}} Q z(1-z) \delta_{s,-s'} \int \frac{d^2 k}{2\pi} e^{ik \cdot r} \left[\frac{1}{\epsilon^2 + k^2} \right] \\
 &= -\frac{e_f e}{(2\pi) \sqrt{\pi}} Q z(1-z) \delta_{s,-s'} \int \frac{d^2 k}{\epsilon^2 + k^2} e^{ik \cdot r} \left[\frac{1}{2\pi} \right]. \tag{3.41}
 \end{aligned}$$

Aqui, temos que

$$\int \frac{d^2k}{\epsilon^2 + k^2} e^{ik \cdot r} = 2\pi K_0(\epsilon r), \quad (3.42)$$

em que K_0 é a função de Bessel de segunda ordem modificada (ARFKEN; WEBER, 2005).

Voltando para a função de onda, teremos

$$\begin{aligned} \psi_{ss'}^L(z, r) &= -\frac{e_f e}{(2\pi)\sqrt{\pi}} Qz(1-z)\delta_{s,-s'} 2\pi K_0(\epsilon r) \left[\frac{1}{2\pi} \right] \\ &= -\frac{e_f e}{(2\pi)\sqrt{\pi}} Qz(1-z)K_0(\epsilon r)\delta_{s,-s'}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

O resultado final para a função de onda do fóton virtual com polarização longitudinal, somada sobre os spins e sobre as cores dos quarks é

$$\begin{aligned} \sum_{s,s',cor} |\psi_L(z, r)|^2 &= \sum_{s,s',cor} \left| -\frac{e_f e}{(2\pi)\sqrt{\pi}} Qz(1-z)K_0(\epsilon r)\delta_{s,-s'} \right|^2 \\ &= \sum_{s,s',cor} \frac{e_f^2 e^2}{(2\pi)^2 (\sqrt{\pi})^2} Q^2 z^2 (1-z)^2 K_0^2(\epsilon r) \delta_{s,-s'} \\ &= \sum_{s,s',cor} \frac{e_f^2 e^2}{4\pi^3} Q^2 z^2 (1-z)^2 K_0^2(\epsilon r) \delta_{s,-s'} \\ &= \sum_{s,s'} e_f^2 \frac{N_c \alpha_{em}}{\pi^2} Q^2 z^2 (1-z)^2 K_0^2(\epsilon r) \delta_{s,-s'} \\ &= e_f^2 \frac{2N_c \alpha_{em}}{\pi^2} Q^2 z^2 (1-z)^2 K_0^2(\epsilon r), \end{aligned} \quad (3.44)$$

em que N_c é o número de cores dos quarks.

A função de onda para um fóton virtual que possui polarização transversa, pode ser calculada de maneira similar: a diferença está no vetor de polarização que, no gauge do cone de luz, é dado por

$$\varepsilon_T^\lambda(q) = \left(0, \frac{q_T \cdot \varepsilon_T^\lambda}{q^+}, \varepsilon_T^\lambda \right), \quad (3.45)$$

em que ε_T^λ ($\lambda = \pm 1$) são os vetores de polarização transversal. As expressões explícitas são $\varepsilon_T^1 = (1, i)/\sqrt{2}$ e $\varepsilon_T^{-1} = (1, -i)/\sqrt{2}$ (PESKIN; SCHROEDER, 1995). Note que no nosso caso, o fóton virtual não possui momentum transverso, e assim $q_T = 0$ e $k = -k'$.

Para calcular a função de onda precisamos determinar o elemento de matriz $\bar{u}_s(k)\varepsilon_T^\lambda(q) \cdot \gamma_T v_{s'}(k')$. Isso pode ser feito usando expressões explícitas para os espinores e para as matrizes gama, dadas nas Equações (3.32) e (3.33). Se $s = s'$, obtém-se (MÄNTYSAARI, 2011)

$$\bar{u}_s(k)\varepsilon_T^\lambda(q) \cdot \gamma_T v_{s'}(k') = \frac{-\lambda - s}{\sqrt{2}} \frac{m_f}{\sqrt{z(1-z)}} \delta_{ss'}. \quad (3.46)$$

Observe que agora o elemento de matriz tem uma dependência na massa dos quarks m_f .

Similarmente, se $s = -s'$ e $\lambda = 1$, obtém-se (MÄNTYSAARI, 2011)

$$\bar{u}_s(k)\varepsilon_T^1(q)\gamma_T v_{s'}(k') = -\frac{2}{\sqrt{z(1-z)}}(z\delta_{s,-1}\delta_{s',1} - (1-z)\delta_{s,1}\delta_{s',-1})\varepsilon^1 \cdot k. \quad (3.47)$$

O elemento de matriz com polarização $\lambda = -1$ pode ser obtido de maneira similar, com a diferença sendo $s \leftrightarrow s'$. Substituindo esses elementos de matriz pela Equação (3.19) obtemos a função de onda no espaço de momentum (MÄNTYSAARI, 2011)

$$\begin{aligned} \psi_{ss'}^{\lambda=\pm 1} &= \frac{e_f e}{\sqrt{(2\pi)^3} \sqrt{q^+}} \frac{1}{\epsilon^2 + k^2} \\ &\times \sqrt{2}(z\delta_{s,\mp 1}\delta_{s',\pm 1} - (1-z)\delta_{s,\pm 1}\delta_{s',\mp 1})\varepsilon^{\pm 1} \cdot k + m_f \delta_{s,\pm 1}\delta_{s',\pm 1}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Podemos levar o resultado para o espaço de coordenadas, da mesma forma que fizemos anteriormente com a polarização longitudinal:

$$\begin{aligned} \psi_{ss'}^{\lambda=\pm 1}(z, r) &= \int \frac{d^2 k}{2\pi} e^{ik \cdot r} \psi(z, k) \\ &= \frac{e_f e}{\sqrt{(2\pi)^3}} \left[i\sqrt{2} \frac{\varepsilon^{\pm 1} \cdot r}{|r|} K_1(\epsilon r) (z\delta_{s,\mp 1} - (1-z)\delta_{s,\pm 1})\delta_{s,-s'} \right. \\ &\quad \left. + m_f K_0(\epsilon r) \delta_{s,\pm 1}\delta_{s',\pm 1} \right], \end{aligned} \quad (3.49)$$

em que K_1 é a função de Bessel de segunda ordem modificada (ARFKEN; WEBER, 2005). Aqui usamos o resultado $\psi^T(q^+, k) = \sqrt{q^+} \psi^T(z, k)$ para alterar a variável para z . O índice T indica que a função de onda do fóton virtual possui polarização transversal.

O quadrado da função de onda dos fótons virtuais que possuem polarização transversal é obtida como uma média das funções de onda ao quadrado para fótons com $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$. O resultado é

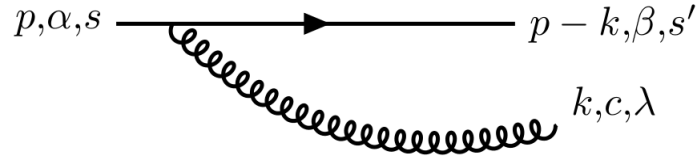
$$\sum_{s,s',cor} |\psi_T(z, r)|^2 = e_f^2 \frac{N_c \alpha_{em}}{2\pi^2} \{ [z^2 + (1-z)^2] \epsilon^2 K_1^2(\epsilon r) + m_f^2 K_0^2(\epsilon r) \}. \quad (3.50)$$

Estas funções podem ser encontradas na literatura (DOSCH *et al.*, 1997). Observamos também que a função de onda do fóton com polarização longitudinal vai para zero no limite $Q^2 \rightarrow 0$. Já para a função correspondente ao fóton com polarização transversal, não observamos esse comportamento, o que já era esperado, pois o fóton real só pode ter uma polarização transversal.

3.3 EMISSÃO DE GLÚONS

Após termos calculado a função de onda do fóton virtual indo em um dipolo, nesta seção iremos calcular a amplitude do processo de emissão de um glúon a partir de um quark. Como já vimos em capítulos anteriores, quarks podem emitir glúons. Assim, torna-se importante para nossa análise contabilizar este processo, que é representado na Figura (3.2), em que o quark,

Figura 3.2 – Quark com momentum p , spin s e cor α emite um glúon com momentum k , cor c e polarização λ . O momentum, spin e cor do quark após a emissão do glúon são $p - k$, β e s' , respectivamente.



Fonte: O autor

com momentum inicial p , spin s e cor α , emite um glúon com momentum k , cor c e helicidade λ . O momentum, spin e cor do quark após a emissão do glúon são $p - k$, β e s' , respectivamente.

Estamos considerando o limite de altas energias, em que p^+ é grande e onde o glúon emitido é suave ($x \ll 1$). Podemos calcular o vértice $q \rightarrow qg$ usando as regras de Feynman para a QCD para o cone de luz. As regras relevantes ao processo a ser calculado são (BRODSKY; PAULI; PINSKY, 1998):

1. Para um férmion incidente com momentum p , cor α e spin s , adiciona-se um fator

$$u_s(p)/\sqrt{(2\pi)^3 2p^+}.$$

2. Para um férmion emergente com momentum $p - k$, cor β e spin s' , adiciona-se um fator

$$\bar{u}_{s'}(p - k)/\sqrt{(2\pi)^3 2(p - k)^+}.$$

3. Para transformar as linhas que entram em linhas que saem, ou vice versa, basta fazer a troca $u \leftrightarrow v$, $\bar{u} \leftrightarrow -\bar{v}$ e $\varepsilon \leftrightarrow \varepsilon^*$.

4. Para um vértice quark-glúon, com momentum k , cor c e polarização λ , adiciona-se um fator

$$g_s t_{\alpha\beta}^c \gamma^\mu \epsilon_\lambda^\mu(k)/\sqrt{(2\pi)^3 2k^+},$$

em que t^c é o gerador da representação fundamental do SU(3).

5. Multiplica-se toda a expressão pelo denominador da energia do cone de luz

$$\frac{(2\pi)^3}{(p_{inicial}^- - p_{final}^-)} = \frac{(2\pi)^3}{(p^- - k^- - (p - k)^-)}.$$

Assim, de acordo com estas regras, a amplitude para a emissão de um glúon é dada por:

$$\Psi_{q \rightarrow qg}(k, z) = \sqrt{p^+} \frac{\bar{u}_{s'}(p - k)}{\sqrt{(2\pi)^3 2(p - k)^+}} \frac{g_s t_{\alpha\beta}^c \gamma^\mu \epsilon_\lambda^\mu(k)}{\sqrt{(2\pi)^3 2k^+}} \frac{u_s(p)}{\sqrt{(2\pi)^3 2p^+}} \frac{(2\pi)^3}{p^- - k^- - (p - k)^-}. \quad (3.51)$$

Aqui o fator $\sqrt{p^+}$ é adicionado devido a mudança para a variável z , a fração do momentum longitudinal do quark carregado pelo glúon: $k^+ = zp^+$. A notação $(p-k)^-$ presente na expressão para a energia do cone de luz, corresponde ao componente negativo do momentum de uma partícula na camada de massa possuindo um trimomentum $(\bar{p} - \bar{k})$. No limite de altas energias, no qual o glúon emitido é suave, nós temos que $z \ll 1$.

Queremos que o glúon produzido seja físico, ou seja, que esteja na camada de massa, e por isso, este glúon só pode ter polarização transversa. O vetor polarização para o glúon é o mesmo que para o fóton, e no gauge $\varepsilon^+ = 0$, ele se torna

$$\varepsilon^\lambda(k) = \left(0, \frac{k \cdot \varepsilon^\lambda}{k^+}, \varepsilon^\lambda \right). \quad (3.52)$$

Como k^+ é pequeno, ε^- domina, e assim, podemos fazer a aproximação $\gamma_\mu \varepsilon^\mu \approx \gamma^+ \varepsilon^-$.

Podemos calcular o elemento de matriz $\bar{u}_s(p-k) \not{\varepsilon}^\lambda(k) u_{s'}(p)$ usando explicitamente os espiniores e as matrizes gama das Equações (3.32) e (3.33). Assim,

$$\begin{aligned} \bar{u}_s(p-k) \not{\varepsilon}^\lambda(k) u_{s'}(p) &= \bar{u}_s(p-k) \gamma^+ \varepsilon^- u_{s'}(p) \\ &= \bar{u}_s(p-k) \gamma^+ \left(\frac{k \cdot \varepsilon^\lambda}{k^+} \right) u_{s'}(p) \\ &= \left(\frac{k \cdot \varepsilon^\lambda}{k^+} \right) \bar{u}_s(p-k) \gamma^+ u_{s'}(p). \end{aligned}$$

Como $\bar{u}_s(p-k) = u_s^\dagger(p-k) \gamma^0$, teremos

$$\bar{u}_s(p-k) \not{\varepsilon}^\lambda(k) u_{s'}(p) = \left(\frac{k \cdot \varepsilon^\lambda}{k^+} \right) u_s^\dagger(p-k) \gamma^0 \gamma^+ u_{s'}(p). \quad (3.53)$$

Realizando o cálculo, encontramos

$$\begin{aligned} u_s^\dagger(p-k) \gamma^0 \gamma^+ u_{s'}(p) &= \sqrt{2} \frac{1}{\sqrt[4]{2} \sqrt{(p^+ - k^+)}} \frac{1}{\sqrt[4]{2} \sqrt{p^+}} \\ &\times \begin{pmatrix} \sqrt{2}(p^+ - k^+) & k_x - ik_y & m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}p^+ \\ p_x + ip_y \\ m \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(p^+ - k^+)}} \frac{1}{\sqrt{p^+}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}(p^+ - k^+) & k_x - ik_y & m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}p^+ \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(p^+ - k^+)}} \frac{1}{\sqrt{p^+}} \sqrt{2}(p^+ - k^+) \sqrt{2}p^+ \\ &= \sqrt{2} \sqrt{(p^+ - k^+)} \sqrt{2} \sqrt{p^+} \\ &= \sqrt{2(p^+ - k^+) 2p^+} \delta_{s,s'}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Além disso, precisamos calcular a energia

$$p^- - k^- - (p - k)^-. \quad (3.55)$$

Como já vimos anteriormente,

$$k^2 = 2k^+k^- - \mathbf{k}^2.$$

Logo,

$$k^- = \frac{\mathbf{k}^2}{2k^+}. \quad (3.56)$$

De maneira similar,

$$(p - k)^- = \frac{(p - k)^2}{2(p - k)^+}. \quad (3.57)$$

Assim, a Equação (3.55) se torna

$$p^- - k^- - (p - k)^- = p^- - \frac{\mathbf{k}^2}{2k^+} - \frac{(p - k)^2}{2(p - k)^+} \approx -\frac{\mathbf{k}^2}{2k^+}, \quad (3.58)$$

como k^+ é pequeno. Lembrando que $k^+ = zp^+$ e que $\varepsilon^- = (k \cdot \varepsilon^\lambda)/k^+$, encontramos, voltando à Equação (3.51):

$$\begin{aligned} \Psi_{q \rightarrow qg}(k, z) &= -(2\pi)^3 \sqrt{p^+} \frac{g_s t_{\alpha\beta}^c \sqrt{2(p^+ - k^+)2p^+} \delta_{s,s'}}{\sqrt{(2\pi)^9} \sqrt{2k^+} \sqrt{2(p - k)^+} 2p^+} \frac{2k^+}{\mathbf{k}^2} \left(\frac{k \cdot \varepsilon^\lambda}{k^+} \right) \\ &= -\frac{(2\pi)^3 \sqrt{2} \sqrt{2} \sqrt{p^+} g_s t_{\alpha\beta}^c \delta_{s,s'}}{\sqrt{(2\pi)^6} \sqrt{(2\pi)^3} \sqrt{2} \sqrt{k^+}} \left(\frac{k \cdot \varepsilon^\lambda}{\mathbf{k}^2} \right) \\ &= -\frac{(2\pi)^3 \sqrt{2} g_s}{(2\pi)^3 \sqrt{(2\pi)^3}} t_{\alpha\beta}^c \frac{\sqrt{p^+}}{\sqrt{k^+}} \left(\frac{k \cdot \varepsilon^\lambda}{\mathbf{k}^2} \right) \delta_{s,s'} \\ &= -\frac{\sqrt{2} g_s}{\sqrt{(2\pi)^3}} t_{\alpha\beta}^c \frac{1}{\sqrt{z}} \left(\frac{k \cdot \varepsilon^\lambda}{\mathbf{k}^2} \right) \delta_{s,s'}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

No espaço de coordenadas, a expressão se torna

$$\begin{aligned} \Psi_{q \rightarrow qg}(z, r) &= \int \frac{d^2 k}{\sqrt{(2\pi)^2}} e^{ik \cdot r} \Psi_{q \rightarrow qg}(k, z) \\ &= \int \frac{d^2 k}{\sqrt{(2\pi)^2}} e^{ik \cdot r} \left[-\frac{\sqrt{2} g_s}{\sqrt{(2\pi)^3}} t_{\alpha\beta}^c \frac{1}{\sqrt{z}} \left(\frac{k \cdot \varepsilon^\lambda}{\mathbf{k}^2} \right) \delta_{s,s'} \right] \\ &= -\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2}} \frac{\sqrt{2} g_s}{\sqrt{(2\pi)^3}} t_{\alpha\beta}^c \frac{1}{\sqrt{z}} \delta_{s,s'} \int d^2 k e^{ik \cdot r} \left(\frac{k \cdot \varepsilon^\lambda}{\mathbf{k}^2} \right). \end{aligned}$$

Aqui, temos (MÄNTYSAARI, 2011)

$$\int d^2 k e^{ik \cdot r} \left(\frac{k \cdot \varepsilon^\lambda}{\mathbf{k}^2} \right) = 2\pi i \frac{r \cdot \varepsilon}{\mathbf{r}^2}, \quad (3.60)$$

que é a transformada de Fourier do produto escalar. Logo, a função de onda $\Psi_{q \rightarrow qg}(z, r)$ será dada por

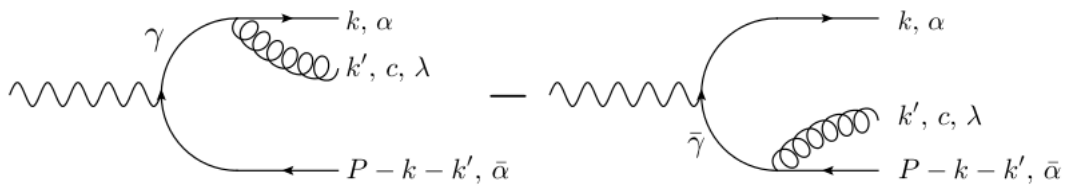
$$\begin{aligned} \Psi_{q \rightarrow qg}(z, r) &= -\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2}} \frac{\sqrt{2}g_s}{\sqrt{(2\pi)^3}} t_{\alpha\beta}^c \frac{1}{\sqrt{z}} \delta_{s,s'} \left(2\pi i \frac{r \cdot \varepsilon}{\mathbf{r}^2} \right) \\ &= -i \frac{\sqrt{2}g_s}{\sqrt{(2\pi)^3}} t_{\alpha\beta}^c \frac{1}{\sqrt{z}} \frac{r \cdot \varepsilon}{\mathbf{r}^2} \delta_{s,s'}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Temos portanto a probabilidade de um glúon ser emitido a partir de um quark. Na próxima seção, utilizaremos este resultado bem como os resultados obtidos na seção anterior para deduzir a equação de Balitsky-Kovchegov.

3.4 EQUAÇÃO DE BALITSKY-KOVCHegov

Na Seção 3.2 calculamos a amplitude para o processo $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}$ em mais baixa ordem. Se o dipolo sofre um boost para uma rapidez maior, ou seja, é fornecida mais energia ao dipolo, haverá mais espaço de fase disponível, e tanto o quark quanto o antiquark podem emitir um glúon, conforme calculado na Seção 3.3. A emissão de glúons é uma correção de ordem superior ($\sim \alpha_s \alpha_{em}$) para a função de onda de fóton virtual, e esperamos obter alguma compreensão da dependência com a energia da amplitude de espalhamento calculando a amplitude do processo $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}g$. A seguinte discussão segue de perto (MÄNTYSAARI, 2011).

Figura 3.3 – Diagramas que contribuem para o processo $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}g$.



Fonte: (MÄNTYSAARI, 2011)

Os diagramas que contribuem para o processo $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}g$ são mostrados na Figura (3.3). À esquerda, temos a emissão de um glúon com momentum k' , cor c e polarização λ a partir de um quark com momentum k e cor α . À direita, temos a emissão de um glúon com momentum k' , cor c e polarização λ a partir de um antiquark com momentum $P - k - k'$ e cor $\bar{\alpha}$.

Usando o resultado derivado anteriormente para as funções de onda do fóton virtual com polarização longitudinal (Equação (3.44)) e com polarização transversal (Equação (3.50)), e para a amplitude de emissão do glúon (Equação (3.61)), podemos escrever a função de onda

do fóton virtual agora na ordem dominante, com as contribuições em α_{em} e em α_s :

$$\begin{aligned} |\gamma^*\rangle &= |\gamma^*\rangle_0 + \frac{1}{\sqrt{N_c}} \int dz d^2 r \psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\alpha\bar{\alpha}}(r, z) C(r) |q_\alpha(x) \bar{q}_{\bar{\alpha}}(y)\rangle_0 \\ &+ \frac{1}{\sqrt{N_c}} \int dz d^2 r dz' d^2 r' \Psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}g}(r, r', z, z') |q_\alpha(x) \bar{q}_{\bar{\alpha}}(y) g_c(z)\rangle_0. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Aqui, os fatores $N_c^{-1/2}$ foram adicionados com o objetivo de manter o produto interno $\langle \gamma^* | \gamma^* \rangle$ normalizado ($\langle \gamma^* | \gamma^* \rangle$ contém uma soma sobre todas as cores de quark i, j e sobre a cor do glúon c). Além disso, um termo ainda desconhecido $C(r)$ foi adicionado ao segundo termo do lado direito da Equação (3.62), a fim de não alterar a normalização da função de onda.

Vamos então encontrar a função $\Psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}g}$. Já calculamos a amplitude de probabilidade para um quark emitir um glúon, e sua expressão, no espaço de momentum, é dada na Equação (3.59). Isso nos permite escrever (MÄNTYSAARI, 2011)

$$\begin{aligned} \Psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}g}(k, k', z, z') &= \psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}(k + k', z) \Psi_{q \rightarrow qg}(k', z') \\ &- \psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}(k, z) \Psi_{q \rightarrow qg}(k', z'). \end{aligned} \quad (3.63)$$

O sinal relativo menos surge das regras de Feynman da teoria da perturbação do cone de luz: no segundo termo, o glúon é emitido por um antiquark e não por um quark (veja a regra 3 citada na página 33).

A partir da Equação (3.59), que nos dá a forma da função $\Psi_{q \rightarrow qg}$, podemos calcular a transformada de Fourier de $\Psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}g}$ para o espaço de coordenadas:

$$\begin{aligned} \Psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}g}(r, r', z, z') &= - \int \frac{d^2 k'}{\sqrt{(2\pi)^2}} \frac{d^2 k}{\sqrt{(2\pi)^2}} e^{ik \cdot r} e^{ik' \cdot r'} \frac{g_s}{\sqrt{4\pi^3 z'}} \frac{\epsilon \cdot k'}{k'^2} \\ &\times [t_{\gamma\alpha}^c \psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\bar{\alpha}\gamma}(k + k', z) - t_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}}^c \psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\bar{\gamma}\alpha}(k, z)]. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Aqui o sobrescrito $\bar{\gamma}\alpha$ presente na função $\psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}$ significa que é produzido um quark com cor α e um antiquark com cor $\bar{\gamma}$. A soma sobre índices repetidos de cor é compreendida, e devido à conservação da carga de cor $\psi^{\bar{\alpha}\gamma} \sim \delta^{\bar{\alpha}\gamma}$, e assim $t_{\gamma\alpha}^c \psi^{\bar{\alpha}\gamma} \sim t_{\bar{\alpha}\alpha}^c$. Fazendo uma mudança de variáveis $k \rightarrow k - k'$ no primeiro termo e integrando sobre k teremos

$$\Psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}g}(r, r', z, z') = - \frac{g_s t_{\bar{\alpha}\alpha}^c}{4\pi^2 \sqrt{\pi z'}} \psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\alpha\bar{\alpha}}(r, z) \int d^2 k' \left[e^{ik' \cdot (r' - r)} - e^{ik' \cdot r'} \right] \frac{\epsilon \cdot k'}{k'^2}. \quad (3.65)$$

Agora, vamos observar a interpretação geométrica de r' . No primeiro caso, quando o glúon é emitido pelo quark, o momentum do glúon, k' , é o conjugado canônico de $r' - r$. Isso sugere que $r' - r$ seja a separação entre o quark e o glúon. De maneira similar, quando o glúon é emitido pelo antiquark, r' é o conjugado canônico de k' , e assim r' é a separação entre o glúon e o antiquark. Em ambos os casos, r é a distância entre o quark e o antiquark, ou seja, r é o tamanho do dipolo.

Voltando para a Equação (3.65), ainda precisamos calcular as duas integrais restantes. Elas podem ser calculadas usando o resultado para a transformada de Fourier do produto escalar (MÄNTYSAARI, 2011):

$$\int d^2 k' \left[e^{ik' \cdot (r' - r)} \right] \frac{\epsilon \cdot k'}{k'^2} = 2\pi i \frac{\epsilon \cdot (r' - r)}{(r' - r)^2} \quad (3.66)$$

e

$$\int d^2 k' \left[-e^{ik' \cdot r'} \right] = -2\pi i \frac{\epsilon \cdot r'}{r'^2}. \quad (3.67)$$

Assim, a Equação (3.65) se torna

$$\Psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}(r, r', z, z') = -\frac{ig_s t_{\bar{\alpha}\alpha}^c}{2\pi\sqrt{\pi}z'} \psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\alpha\bar{\alpha}}(r, z) \left(\frac{\epsilon \cdot r'}{r'^2} - \frac{\epsilon \cdot (r' - r)}{(r' - r)^2} \right). \quad (3.68)$$

Voltemos então à Equação (3.62). Para a ordem mais baixa, ou seja, desprezando o termo de radiação de glúons, o produto interno é (lembrando que soma sobre os índices de cor do quark α e $\bar{\alpha}$ é compreendida)

$$\langle \gamma^* | \gamma^* \rangle = 1 + \frac{1}{N_c} \int dz d^2 r |\psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\alpha\bar{\alpha}}(r, z)|^2 = 1 + \int dz d^2 r |\psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}(r, z)|^2. \quad (3.69)$$

Por outro lado, quando consideramos o termo de radiação de glúons, o produto interno é dado por

$$\begin{aligned} \langle \gamma^* | \gamma^* \rangle &= 1 + \frac{1}{N_c} \int dz d^2 r |C(r)|^2 |\psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\alpha\bar{\alpha}}(r, z)|^2 \\ &+ \int dz d^2 r dz' d^2 r' |\psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}(r, z)|^2 \frac{g_s^2}{N_c 4\pi^3 z'} t_{\alpha\bar{\alpha}}^c t_{\bar{\alpha}\alpha}^c \left| \epsilon^\lambda \cdot \left(\frac{r'}{r'^2} + \frac{(r - r')^2}{(r - r')^2} \right) \right|^2. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Aqui usamos o fato de que as matrizes t^c são hermitianas: $(t_{\alpha\bar{\alpha}}^c)^* = t_{\bar{\alpha}\alpha}^c$. A soma é tomada sobre os estados de polarização transversal $\lambda = 1, 2$ do glúon produzido e os índices de cores de quark e glúon $\alpha, \bar{\alpha}$ e c . Podemos então usar a propriedade

$$\sum_{\lambda=1,2} \epsilon_\lambda^* \cdot x \epsilon_\lambda \cdot x' = x \cdot x'. \quad (3.71)$$

Isto pode ser visto a partir das expressões explícitas do vetor de polarização citado na Seção (3.2). Além disso, notamos que $t_{\bar{\alpha}\alpha}^c t_{\alpha\bar{\alpha}}^c = (N_c^2 - 1)/2$. Estes resultados nos permitem escrever a Equação (3.70) como

$$\begin{aligned} \langle \gamma^* | \gamma^* \rangle &= 1 + \frac{1}{N_c} \int dz d^2 r |\psi_{\gamma^* \rightarrow q\bar{q}}^{\alpha\bar{\alpha}}(r, z)|^2 \\ &\times \left[|C(r)|^2 N_c + \int d^2 r' \frac{dz'}{z'} \frac{g_s^2}{4\pi^3} \frac{N_c^2 - 1}{2} \frac{r^2}{r'^2 (r - r')^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.72)$$

A integral sobre r' é divergente nos limites $r' \rightarrow 0$ e $r' \rightarrow r$. Veremos mais adiante que essas divergências cancelam na equação de BK.

Comparando as equações (3.69) e (3.72) encontramos

$$|C(r)|^2 = 1 - \int d^2r' dY \frac{\alpha_s N_c}{2\pi^2} \frac{r^2}{r'^2 (r - r')^2}, \quad (3.73)$$

em que usamos a aproximação de grande número de cores $(N_c^2 - 1)/N_c \approx N_c$ e o fato de que o intervalo de rapidez é $Y = \ln(1/z')$. Também denotamos $\alpha_s = g_s^2/(4\pi)$.

Agora, vamos utilizar este resultado para derivar uma equação para a dependência com a energia da amplitude de espalhamento forward elástica dipolo-alvo N , introduzida no final do Capítulo 2. Para isso, vamos realizar um boost sobre o dipolo, levando-o de uma rapidez Y à uma rapidez $Y + \Delta Y$. Este boost abre uma região do espaço de fase onde um glúon pode ser emitido, e a probabilidade para o dipolo emitir um glúon é

$$\frac{1}{N_c} \sum_{cor} |\Psi_{q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}g}(r, r', z, z')|^2 dz' dr' = \frac{\alpha_s N_c}{2\pi^2 z'} \frac{r^2}{r'^2 (r - r')^2} dz' d^2r', \quad (3.74)$$

a expressão para $|\Psi_{q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}g}|^2$ pode ser lida a partir da Equação (3.72). A contribuição do canal $q\bar{q}g$ para a amplitude de espalhamento elástica forward é

$$\frac{\alpha_s N_c}{2\pi^2} \int dy d^2r' \frac{r^2}{r'^2 (r - r')^2} N_{q\bar{q}g}(Y, r, r'), \quad (3.75)$$

em que $N_{q\bar{q}g}$ é a amplitude elástica forward para o sistema $q\bar{q}g$ interagir com o alvo, e nós escrevemos outra vez $Y = \ln(1/z')$. Por outro lado, a probabilidade de ter um estado $q\bar{q}$ é reduzida por um fator $1 - |C(r)|^2$.

Agora, vamos escrever uma equação para $N_{q\bar{q}}$, a amplitude elástica forward para o dipolo interagir com o alvo. Considerando um referencial no qual o glúon emitido pode ser visto como uma parte da função de onda do fóton virtual, a amplitude de espalhamento é dada por

$$N_{q\bar{q}}(Y, r) + \frac{\alpha_s N_c}{2\pi^2} \int dY d^2r' \frac{r^2}{r'^2 (r - r')^2} [N_{q\bar{q}g}(Y, r, r') - N_{q\bar{q}}(Y, r)]. \quad (3.76)$$

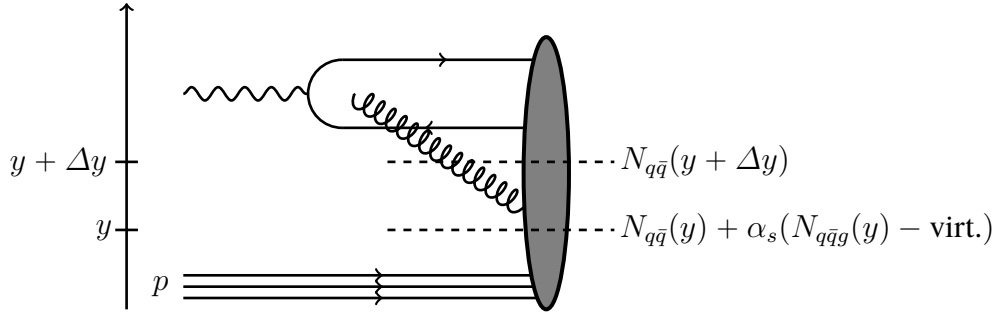
Isto corresponde à linha tracejada inferior na Figura 3.4: o sistema dipolo-glúon interage com o alvo.

Por outro lado, se o glúon for tomado como uma parte da função de onda do alvo, temos um dipolo com rapidez $Y + \Delta Y$ que interage com o alvo. Isto corresponde a uma nova escolha de referencial, representado pela linha tracejada superior na Figura 3.4. Os observáveis físicos, não podem depender da escolha de referencial. Assim, exigimos que as amplitudes de espalhamento obtidas em ambos os casos sejam as mesmas. Portanto, teremos a seguinte equação

$$\begin{aligned} N_{q\bar{q}}(Y + \Delta Y, r) &= N_{q\bar{q}}(Y, r) \\ &+ \frac{\alpha_s N_c}{2\pi^2} \Delta Y \int d^2r' \frac{r^2}{r'^2 (r - r')^2} [N_{q\bar{q}g}(Y, r, r') - N_{q\bar{q}}(Y, r)]. \end{aligned} \quad (3.77)$$

A contribuição real contida no termo $N_{q\bar{q}g}$ resulta do novo processo onde um glúon é emitido e a correção virtual $-N_{q\bar{q}g}$ é um resultado da exigência de normalização da função de

Figura 3.4 – O glúon emitido pode ser visto como uma parte da função de onda do alvo (linha tracejada inferior) ou como uma parte da função de onda do dipolo (linha tracejada superior).



Fonte: O autor

onda. Observe que esta terminologia é um pouco diferente da normalmente utilizada em cálculos de QCD perturbativa: por contribuição real nos referimos a um termo resultante devido a uma nova partícula no estado final, enquanto que uma contribuição virtual decorre da exigência de normalização e ela é proporcional à amplitude original. Assumimos que a diferença de rapidez ΔY é pequena, o que nos permitiu substituir a integral em Y por um fator ΔY .

O que ainda resta é entender a amplitude de espalhamento $N_{q\bar{q}g}$ para um sistema de dipolo-glúon interagindo com o alvo. Isto pode ser obtido considerando o processo no limite de grande N_c . A estrutura de cor do glúon emitido é um estado de cor-anticor, e o número destes estados é $N_c^2 - 1$. Em grande N_c , temos $N_c^2 - 1 \approx N_c^2$, e o glúon pode ser substituído por dois quarks, como o número de estados de cores diferentes para um quark é N_c . Assim, assumimos que o glúon emitido é um novo par quark-antiquark.

Note que r' e $r - r'$ são distâncias entre o quark/antiquark e o glúon, e agora temos efetivamente dois novos dipolos de cor com tamanhos transversais r' e $r - r'$. A probabilidade deste sistema não interagir com o hádron é

$$S_{q\bar{q}g}(r, r') = S_{q\bar{q}}(r')S_{q\bar{q}}(r - r'), \quad (3.78)$$

e tendo em mente que $S = 1 - N$ temos

$$N_{q\bar{q}g}(r, r') = N_{q\bar{q}}(r') + N_{q\bar{q}}(r - r') - N_{q\bar{q}}(r')N_{q\bar{q}}(r - r'), \quad (3.79)$$

em que a dependência em Y é mantida implícita. Substituindo este resultado de volta à Equação (3.77), dividindo por ΔY e tomando o limite de pequeno ΔY obtemos a equação de Balitsky-Kovchegov (BK)

$$\begin{aligned} \partial_Y N(r) &= \frac{\bar{\alpha}_s}{2\pi} \int d^2 r' \frac{r^2}{r'^2 (r - r')^2} \\ &\times [N(r') + N(r - r') - N(r) - N(r')N(r - r')], \end{aligned} \quad (3.80)$$

em que $\bar{\alpha}_s = \alpha_s N_c / \pi$. Observe que as divergências que apareceram na Equação (3.72) cancelam quando $r' \rightarrow 0$ e quando $r' \rightarrow r$, como $N(r') \rightarrow 0$, quando $r' \rightarrow 0$. Esta equação foi derivada primeiramente por Balitsky (BALITSKY, 1996a) e por Kovchegov (KOVCHegov, 1999).

A Equação (3.80) é uma equação integro-diferencial e fornece a amplitude de espalhamento $N(r, Y)$ a todas as rapidezzes $Y > 0$. A evolução com a energia decorre da emissão de glúons que se torna possível quando o dipolo sofre um boost para uma rapidez maior. A integração ao longo do intervalo de rapidez corresponde a várias emissões de glúons e, portanto, temos um grande número de dipolos presentes na função de onda do fóton virtual.

Ainda sobre a Equação (3.80), os três primeiros termos do lado direito, são termos lineares e eles correspondem à evolução BFKL, que será discutida no início do próximo capítulo.

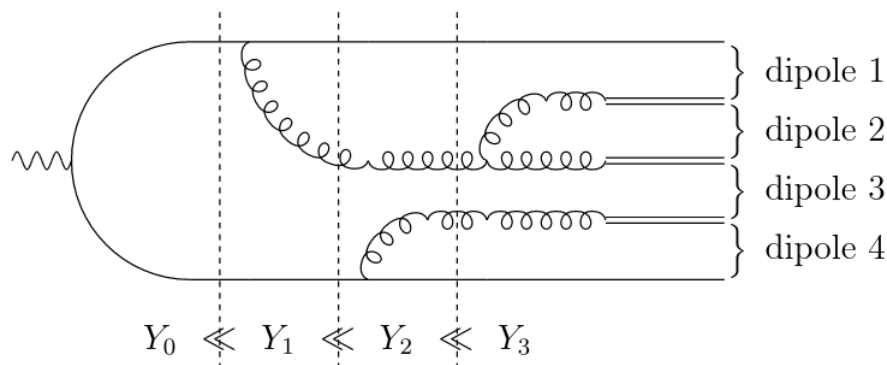
4 PROPRIEDADES DA EQUAÇÃO DE BALITSKY-KOVCHegov

Após termos encontrado a equação BK, que descreve a dependência na energia da amplitude de espalhamento de dipolo no capítulo anterior, neste capítulo discutiremos algumas propriedades importantes dessa equação, como por exemplo, a propriedade de admitir soluções de ondas progressivas e como essa propriedade reflete no escalamento geométrico. Mas primeiramente iremos abordar a equação BFKL, a parte linear da equação BK.

4.1 O FORMALISMO DE DIPOLOS E A EQUAÇÃO BFKL

Como vimos no capítulo anterior, podemos estudar a evolução da função de onda do alvo ou da amplitude de espalhamento após um acréscimo ΔY na rapidez (boost). Mais ainda, podemos ver o último glúon suave como sendo emitido pelo dipolo, que é um objeto simples e portanto possui uma evolução que pode ser facilmente estudada. Nesta dissertação, iremos trabalhar no limite de grande número de cores, ou seja, de grande N_c . Neste limite, um glúon de coordenada transversal \mathbf{z} pode ser considerado como um par quark-antiquark no ponto \mathbf{z} . Assim, o estado final é composto de dois dipolos (\mathbf{x}, \mathbf{z}) e (\mathbf{z}, \mathbf{y}) , ou seja, ao invés de considerarmos uma função de onda composta por quarks, antiquarks e glúons, é suficiente considerar um *onium*, que é um sistema branco (sem cor) de dipolos $q\bar{q}$. Este é o chamado formalismo de dipolos, e foi introduzido por Mueller (MUELLER, 1994; MUELLER, 1995; MUELLER; PATEL, 1994). Na Figura 4.1 temos a representação da evolução de um dipolo à medida que a rapidez (energia) aumenta. Emissões sucessivas de glúons suaves podem ser consideradas como independentes. No formalismo de dipolos, os glúons emitidos são substituídos por dipolos, ou seja, a emissão gluônica é equivalente à divisão de dipolos.

Figura 4.1 – Função de onda do *onium*.



Fonte: (SOYEZ, 2006)

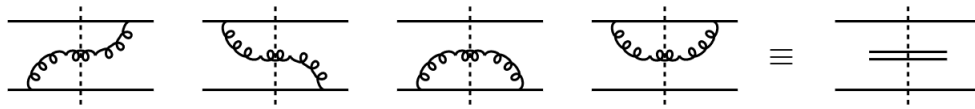
No regime de altas energias, todas as possíveis emissões de glúons de um dipolo são equivalentes à divisão deste dipolo em dois dipolos filhos, como representado na Figura 4.2. A probabilidade de um dipolo com coordenadas transversais (\mathbf{x}, \mathbf{y}) se dividir em dois dipolos filhos, (\mathbf{x}, \mathbf{z}) e (\mathbf{z}, \mathbf{y}) , é dada por (MUELLER, 1994; MUELLER; PATEL, 1994; MUELLER, 1995)

$$dP = \frac{\bar{\alpha}}{2\pi} \mathcal{M}_{\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{z}} dY d^2z, \quad (4.1)$$

em que $\bar{\alpha} = \alpha_s N_c / \pi$ e

$$\mathcal{M}_{\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{z}} = \left[\frac{\mathbf{x} - \mathbf{z}}{(\mathbf{x} - \mathbf{z})^2} - \frac{\mathbf{y} - \mathbf{z}}{(\mathbf{y} - \mathbf{z})^2} \right]^2 = \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{(\mathbf{x} - \mathbf{z})^2 (\mathbf{z} - \mathbf{y})^2}. \quad (4.2)$$

Figura 4.2 – A emissão de glúons no referencial de dipolo é equivalente à divisão de dipolos.



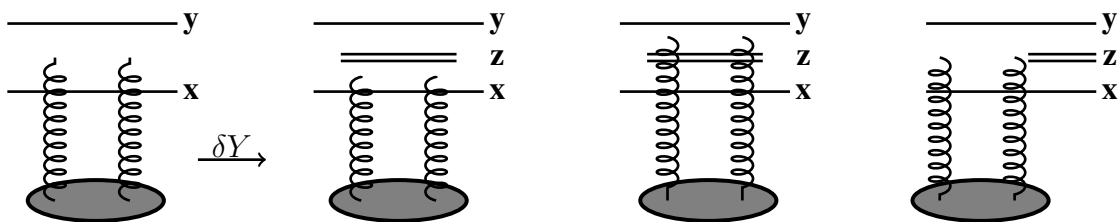
Fonte: (SOYEZ, 2006)

Denotemos por $\langle T_{\mathbf{x}\mathbf{y}} \rangle$ a amplitude de espalhamento para um dipolo composto por um quark de coordenada transversal \mathbf{x} e um antiquark de coordenada transversal \mathbf{y} . Aqui, a notação $\langle \cdot \rangle$ representa a média sobre todas as realizações do campo de cor do alvo. Realizando um boost no dipolo, ou seja, aumentando a rapidez do dipolo de Y para $Y + \delta Y$, esse dipolo pode se dividir em dois dipolos filhos, (\mathbf{x}, \mathbf{z}) e (\mathbf{z}, \mathbf{y}) . Cada um desses dipolos filhos pode interagir com o alvo, levando à seguinte equação de evolução linear:

$$\partial_Y \langle T_{\mathbf{x}\mathbf{y}} \rangle_Y = \frac{\bar{\alpha}}{2\pi} \int d^2z \mathcal{M}_{\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{z}} [\langle T_{\mathbf{x}\mathbf{z}} \rangle_Y + \langle T_{\mathbf{z}\mathbf{y}} \rangle_Y - \langle T_{\mathbf{x}\mathbf{y}} \rangle_Y]. \quad (4.3)$$

Esta é a equação BFKL no formalismo de dipolos (LIPATOV, 1976; KURAEV; LIPATOV; FADIN, 1977; BALITSKY; LIPATOV, 1978). O último termo do integrando da Equação (4.3) é a contribuição virtual (o dipolo original interage antes de se dividir). A evolução BFKL é representada na Figura 4.3.

Figura 4.3 – Evolução BFKL.



Fonte: O autor

Sendo a equação BFKL uma equação linear, espera-se que sua solução cresça exponencialmente. De fato, se desprezarmos a dependência do parâmetro impacto, ou seja, $\langle T_{\mathbf{x}\mathbf{y}} \rangle =$

$\langle T(r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \rangle_Y$, a solução da Equação (4.3) é obtida realizando uma transformada de Mellin

$$\langle T(r) \rangle_Y = \int \frac{d\gamma}{2i\pi} \mathcal{T}_0(\gamma; r_0) e^{\bar{\alpha}\chi(\gamma)Y - \gamma \log(r_0^2/r^2)}, \quad (4.4)$$

em que

$$\chi(\gamma) = 2\psi(1) - \psi(\gamma) - \psi(1 - \gamma), \quad (4.5)$$

é o núcleo da equação BFKL. Aqui, $\psi(\gamma)$ é a função digama, dada por

$$\psi(\gamma) \equiv \frac{d \ln \Gamma(\gamma)}{d\gamma}. \quad (4.6)$$

Ainda, $\mathcal{T}_0(\gamma; r_0)$ descreve a transformada inversa de Mellin da condição inicial em $Y = 0$,

$$\mathcal{T}_0(\gamma; r_0) = \int_0^\infty \frac{d^2 r}{r^2} \left(\frac{r_0^2}{r^2} \right)^\gamma T_0(r), \quad (4.7)$$

e r_0 é uma escala de referência arbitrária introduzida por razões dimensionais. A condição inicial $T_0(r)$, independentemente de sua forma, deve satisfazer a condição de transparência de cor, ou seja, ela deve se anular com r^2 quando $r \rightarrow 0$, e deve saturar em um valor constante quando $r \sim 1/Q_0$, com Q_0 sendo o corte infravermelho nas condições iniciais.

A integral na Equação (4.7) é absolutamente convergente para a parte real de γ ($0 < \text{Re} < 1$). Assim, o contorno para a integração complexa na Equação (4.4) pode ser escolhido como (IANCU; ITAKURA; MCLERRAN, 2002)

$$C = \{\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2; -\infty < \gamma_2 < \infty\}, \quad (4.8)$$

com $0 < \gamma_1 < 1$.

Para um tamanho de dipolo fixo, é possível obter o comportamento em altas energias através da expansão em torno do ponto de sela $\gamma = 1/2$, e o resultado é (SOYEZ, 2006)

$$\langle T(r) \rangle_Y \sim \frac{r}{r_0} \exp \left[\omega_{\mathbb{P}} Y - \frac{\log^2(r_0^2/r)}{2\chi''(1/2)\bar{\alpha}Y} \right], \quad (4.9)$$

em que $\omega_{\mathbb{P}} = 4\pi\bar{\alpha} \log(2)$. Porém, esta expressão possui dois problemas principais:

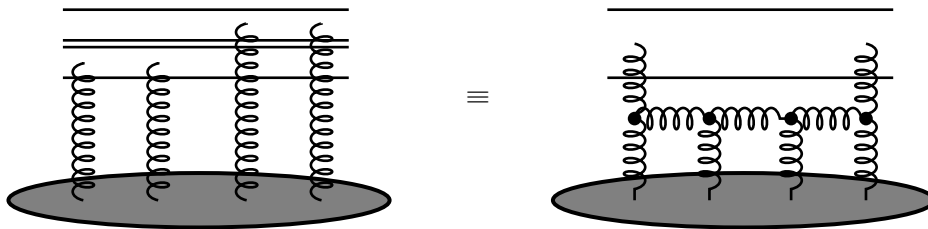
- Violação do limite de Froissart (FROISSART, 1961): o crescimento exponencial da amplitude com a rapidez Y , leva a um crescimento da seção de choque com uma potência da energia, o que viola a unitariedade da amplitude de espalhamento, $T \leq 1$;
- Difusão para uma região não perturbativa: com o aumento da rapidez, mesmo que uma condição inicial seja centrada em torno de um valor pequeno de r , a amplitude pode sofrer difusão para grandes tamanhos de dipolos, ou seja, para a região não perturbativa. Nesta região, os momenta transversais de alguns dipolos tornam-se da ordem de Λ_{QCD} , levando a uma constante de acoplamento $\alpha_s(\Lambda) \sim 1$. Isso invalida a aplicação da QCD perturbativa, ou seja, a própria evolução BFKL.

Após essa discussão, podemos perceber que a equação BFKL não é a melhor equação para descrever a evolução em altas energias. Também é possível perceber que no regime de altas energias, efeitos não lineares tornam-se importantes. A seguir, veremos que tais efeitos surgem quando, por exemplo, no caso do espalhamento de um único dipolo com um hádron, consideramos a situação na qual os dois dipolos resultantes da separação do dipolo original, interagem com o hádron simultaneamente, resultando em um diagrama adicional, que descreve a fusão de glúons, ou ainda, na linguagem de dipolos, a fusão de dipolos. A seguir, veremos como esses efeitos não lineares estão relacionados com as equações de evolução das amplitudes de espalhamento dipolo-alvo.

4.2 EQUAÇÃO BK

O problema relacionado à violação da unitaridade é justamente o ponto em que vemos a necessidade de levar em conta múltiplas interações. A maneira mais direta de ver isso é voltar à divisão de um dipolo (\mathbf{x}, \mathbf{y}) em dois dipolos. Quando o alvo torna-se denso o suficiente, ambos os dipolos podem interagir com ele. Assim, devemos levar em conta esta contribuição, representada na Figura 4.4.

Figura 4.4 – Múltiplos espalhamentos entre um alvo e um projétil constituído de dois dipolos.



Fonte: O autor

Isto leva a um termo de supressão quadrática na equação de evolução que se torna

$$\partial_Y \langle T_{\mathbf{xy}} \rangle_Y = \frac{\bar{\alpha}}{2\pi} \int d^2z \mathcal{M}_{\mathbf{xyz}} [\langle T_{\mathbf{zx}} \rangle_Y + \langle T_{\mathbf{zy}} \rangle_Y - \langle T_{\mathbf{xy}} \rangle_Y - \langle T_{\mathbf{zx}} T_{\mathbf{zy}} \rangle_Y]. \quad (4.10)$$

A primeira coisa a observar é que este novo termo é da mesma ordem que os anteriores quando $T^2 \sim T$ ou, equivalentemente, quando $T \sim 1$. É assim, uma contribuição obrigatória próxima ao limite de unitaridade ($T \leq 1$). No entanto, a Equação (4.10) envolve um novo objeto, $\langle T_{\mathbf{zx}} T_{\mathbf{zy}} \rangle_Y$ que sonda as correlações dentro do alvo. De maneira geral, deve-se escrever uma equação para $\langle T^2 \rangle$ que envolverá $\langle T^2 \rangle$ através de contribuições de tipo BFKL e $\langle T^3 \rangle$ através de requisitos de unitaridade. Isto termina com uma hierarquia completa, dando a evolução para cada $\langle T^k \rangle$, conhecida como a hierarquia de Balitsky (grande N_c) (BALITSKY, 1996b).

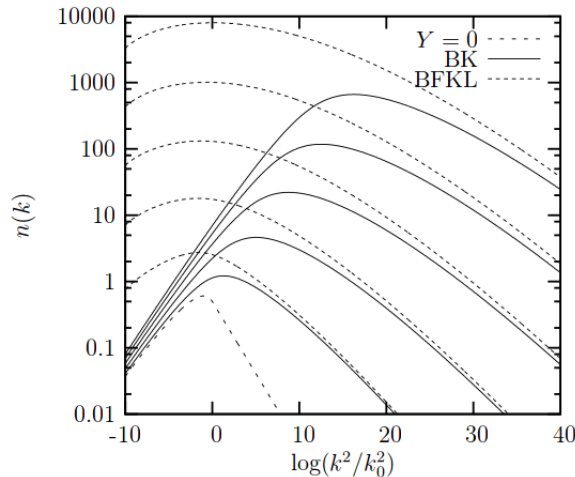
Se o alvo for suficientemente grande e homogêneo, pode-se simplesmente assumir que $\langle T_{xz}T_{zy} \rangle_Y = \langle T_{xy} \rangle_Y \langle T_{xy} \rangle_Y$, levando a uma equação fechada para $\langle T_{xy} \rangle$

$$\partial_Y \langle T_{xy} \rangle_Y = \frac{\bar{\alpha}}{2\pi} \int d^2z \mathcal{M}_{xyz} [\langle T_{xz} \rangle_Y + \langle T_{zy} \rangle_Y - \langle T_{xy} \rangle_Y - \langle T_{xz} \rangle_Y \langle T_{zy} \rangle_Y]. \quad (4.11)$$

Esta última expressão é a equação de Balitsky-Kovchegov (BK) que é a equação mais simples que se pode obter a partir da QCD perturbativa, incluindo as contribuições de BFKL em alta energia e as correções de unitaridade. Note que a divisão do dipolo é equivalente à emissão de glúon.

Além disso, este novo termo também resolve o problema da difusão infravermelha. Isso pode ser visto na Figura 4.5, que mostra o número de ocupação do dipolo para soluções numéricas das equações BFKL e BK no espaço de momentum (k é o momento do dipolo, canonicamente conjugado ao seu tamanho). A solução BFKL exibe a forma gaussiana prevista a partir de (4.4), estendendo-se tanto para o infravermelho como para o ultravioleta. Na solução BK, vemos claramente que a evolução do infravermelho é cortada e o máximo da distribuição fornece uma escala natural $Q_s(Y)$, chamada de escala de saturação, aumentando com rapidez. Em geral, pode-se dizer que as correções de saturação reduzem a emissão de dipolos de tamanhos maiores que o inverso da escala de saturação (SOYEZ, 2006).

Figura 4.5 – Número de ocupação de dipolo em função do momentum k do dipolo para $Y = 0, 4, 8, 12, 16, 20$. As linhas pontilhadas correspondem a solução da equação BFKL enquanto que as linhas sólidas correspondem a evolução BK. Aqui $n(k)$ é a amplitude de espalhamento de dipolo.



Fonte: (SOYEZ, 2006)

Chamando $N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \langle T_{xy} \rangle_Y$ (manteremos a dependência de N com Y implícita), a equação de Balitsky-Kovchegov completa é expressa, no espaço de coordenadas, por

$$\begin{aligned} \partial_Y N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\bar{\alpha}}{2\pi} \int d^2z \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{(\mathbf{x} - \mathbf{z})^2 (\mathbf{z} - \mathbf{y})^2} \\ &\times [N(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + N(\mathbf{z}, \mathbf{y}) - N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - N(\mathbf{x}, \mathbf{z})N(\mathbf{z}, \mathbf{y})] \end{aligned} \quad (4.12)$$

Os vetores \mathbf{x} e \mathbf{y} representam as posições transversais do quark e do antiquark que constituem um dipolo de tamanho transversal $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$, com um parâmetro de impacto \mathbf{b} dado por $\mathbf{b} = (\mathbf{x} + \mathbf{y})/2$.

Note que, realizando um ajuste nas variáveis, a Equação (4.12) é exatamente a mesma equação obtida no capítulo anterior dada em (3.80).

A evolução na energia segue da emissão de glúons, que ocorre quando o dipolo sofre um boost para rapidezzes grandes. Integrar sobre o intervalo de rapidez corresponde a uma múltipla emissão de glúons, e assim, teremos um grande número de dipolos presentes na função de onda do fóton virtual.

A Equação (4.12) pode ser escrita de forma simplificada, assumindo que $N(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ não dependa do parâmetro \mathbf{b} , mas dependa somente do tamanho do dipolo $r = |\mathbf{r}| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$. Introduzindo a transformada de Fourier

$$\mathcal{N}(k) = \int \frac{d^2r}{2\pi} \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{r^2} N(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} dr d\theta \frac{1}{r^2} e^{-ikr \cos\theta} N(r) = \int_0^\infty \frac{dr}{r} J_0(kr) N(r), \quad (4.13)$$

em que J_0 é a função de Bessel de primeiro tipo e ordem zero (ARFKEN; WEBER, 2005), obtemos a equação BK no espaço de momentum para a amplitude $\mathcal{N}(k = |\mathbf{k}|)$ (KOVCHegov, 2000)

$$\partial_Y \mathcal{N}(k) = \frac{\bar{\alpha}}{\pi} \int \frac{d^2k'}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2} \left[\mathcal{N}(k') - \frac{\mathbf{k}^2}{\mathbf{k}'^2 + (\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2} \mathcal{N}(k) \right] - \bar{\alpha} \mathcal{N}^2(k). \quad (4.14)$$

A equação acima pode ser reescrita na forma (KOVCHegov, 2000)

$$\partial_Y \mathcal{N}(k) = \bar{\alpha} \chi(-\partial_L) \mathcal{N}(k) - \bar{\alpha} \mathcal{N}^2(k), \quad (4.15)$$

em que ∂_L é a derivada parcial em relação à $L = \ln(k^2/k_0^2)$, com k_0 sendo uma escala fixa. A função χ , dada por

$$\chi(\gamma) = 2\psi(1) - \psi(\gamma) - \psi(1 - \gamma), \quad (4.16)$$

é o núcleo da equação BFKL, e $\chi(-\partial_L)$ é um operador integro-diferencial definido através da seguinte expansão em série:

$$\begin{aligned} \chi(-\partial_L) &= \chi(\gamma_0) + \chi'(\gamma_0)(-\partial_L - \gamma_0 \mathbf{1}) + \frac{1}{2} \chi''(\gamma_0)(-\partial_L - \gamma_0 \mathbf{1})^2 \\ &+ \frac{1}{6} \chi'''(\gamma_0)(-\partial_L - \gamma_0 \mathbf{1})^3 + \dots \end{aligned} \quad (4.17)$$

para um dado γ_0 entre 0 e 1.

4.3 ESCALAMENTO GEOMÉTRICO: UMA ABORDAGEM TEÓRICA

Munier e Peschansky mostraram (MUNIER; PESCHANSKI, 2003; MUNIER; PESCHANSKI, 2004a; MUNIER; PESCHANSKI, 2004b) que a equação BK para $\mathcal{N}(k)$ pode ser

encontrada na mesma classe de universalidade que a equação diferencial parcial não linear de Fisher ou Kolmogorov-Petrovsky-Piscounov (F-KPP) (FISHER, 1937; KOLMOGOROV; PETROVSKII; PISCUNOV, 1937).

O ponto de partida é realizar uma expansão na Equação (4.16) até a segunda ordem de ∂_L na Equação (4.17) em torno de $\gamma_0 = \frac{1}{2}$. Assim, a equação BK fica

$$\partial_Y \mathcal{N}(k) = \bar{\alpha} \bar{\chi}(-\partial_L) \mathcal{N}(k) - \bar{\alpha} \mathcal{N}^2(k), \quad (4.18)$$

em que

$$\bar{\chi}(-\partial_L) = \chi\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \chi''\left(\frac{1}{2}\right) \left(-\partial_L + \frac{1}{2}\right)^2. \quad (4.19)$$

Fazendo a seguinte mudança de variáveis linear,

$$t \propto Y, \quad x \sim L, \quad u(x, t) \propto \mathcal{N}(k),$$

em que t é o tempo e x é a coordenada espacial, a equação BK resulta em

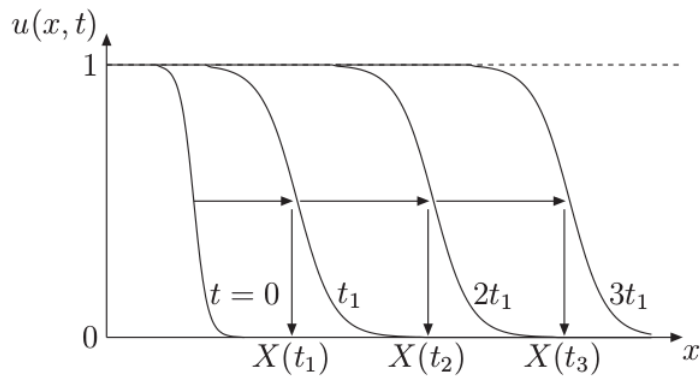
$$\partial_t u(x, t) = \partial_x^2 u(x, t) + u(x, t) [1 - u(x, t)]. \quad (4.20)$$

Para maiores detalhes acerca dessa passagem, veja (AMARAL, 2008).

A equação (4.20) é a equação F-KPP, estudada na física estatística. Olhando para os termos do lado direito dessa equação, podemos identificar um termo associado à difusão ($\partial_x^2 u$), um termo associado ao crescimento (u) e um termo não-linear (u^2) associado ao amortecimento.

É conhecido que a equação F-KPP admite soluções assintóticas de ondas progressivas, ou seja, sua solução $u(x, t)$ adquire a forma $u(x - v_c t)$ para grandes valores de t a uma velocidade crítica v_c . Com isso, à medida que o tempo passa, a solução não depende das variáveis x e t de forma independente, mas depende de uma relação linear entre x e t . O comportamento de ondas progressivas de $u(x, t)$ é apresentado na Figura 4.6.

Figura 4.6 – Comportamento de ondas progressivas



Fonte: (AMARAL, 2008)

A solução da Equação (4.20) corresponde a uma superposição linear de ondas (MUNIER; PESCHANSKI, 2004a; MUNIER; PESCHANSKI, 2004b; MUNIER; PESCHANSKI, 2003):

$$u(x, t) = \int \frac{d\gamma}{2i\pi} u_0(\gamma) \exp[-\gamma(x_{f_0} + vt) + \omega(\gamma)t], \quad (4.21)$$

em que $\omega(\gamma)$ é a transformada de Mellin do núcleo da equação, ou seja, $\partial_x^2 + 1$, e define a relação de dispersão da equação linearizada, $x_{f_0} = x - vt$ é a posição relativa da frente de onda. Cada onda parcial cujo número de onda é γ possui uma velocidade de fase

$$v_\varphi(\gamma) = \frac{\omega(\gamma)}{\gamma} \quad (4.22)$$

obtida pela imposição de que o fator exponencial na Equação (4.21) seja independente do tempo. A velocidade de grupo é definida pelo ponto de sela γ_c do fator de fase exponencial

$$v = \left. \frac{d\omega}{d\gamma} \right|_{\gamma_c} \equiv v_g. \quad (4.23)$$

Basicamente, a verdadeira velocidade da frente depende da competição entre as singularidades de $u_0(\gamma)$ (a transformada de Mellin da condição inicial $u(x, t = 0)$) e o ponto de sela do fator de fase. Supõe-se que $u(x, t = 0)$ seja uma função monotônica que conecta de forma suave 1 e 0 quando x vai de $-\infty$ até ∞ , com comportamento assintótico $u(x, t = 0) \stackrel{x \rightarrow \infty}{\sim} e^{-\gamma_0 x}$ (MUNIER; PESCHANSKI, 2003).

No caso em que $\gamma_0 \geq \gamma_c$, tem-se que a solução é levada ao comportamento crítico correspondente a ondas progressivas para tempos grandes,

$$u(x, t) \stackrel{t \rightarrow \infty}{\sim} e^{-\gamma_c x_{f_0}} \quad (4.24)$$

e o expoente crítico γ_c corresponde a uma onda que possui uma velocidade de fase mínima igual à velocidade de grupo

$$v_c = \frac{\omega(\gamma_c)}{\gamma_c} = \left. \frac{d\omega}{d\gamma} \right|_{\gamma_c}. \quad (4.25)$$

Podemos traduzir esta discussão para a QCD com a ajuda da equação BK. Anteriormente, vimos na discussão sobre a equação BFKL, que a solução da parte linear da Equação (4.18) é dada por

$$\mathcal{N}_Y(k) = \int \frac{d\gamma}{2i\pi} N_0 e^{-\gamma L + \bar{\alpha}\chi(\gamma)Y}, \quad (4.26)$$

em que L desempenha o papel da variável espacial x . A fim de determinarmos uma quantidade análoga à velocidade de grupo v_g , comparamos a Equação (4.26) com a Equação (4.21). Assim, a relação de dispersão é dada por

$$\omega(\gamma) = \bar{\alpha}\chi(\gamma). \quad (4.27)$$

A velocidade de fase possui um mínimo em γ_c . A partir das Equações (4.23) e (4.25), γ_c é a solução da equação implícita

$$\gamma_c \chi'(\gamma_c) = \chi(\gamma_c), \quad (4.28)$$

o que implica em $\gamma_c = 0.6275$ (MUNIER; PESCHANSKI, 2004a). Neste ponto deve-se analisar a condição inicial $N_0(\gamma)$, que deve ser tal que $\mathcal{N}(k, Y = 0) \sim k^2$ para grandes valores de L , ou seja, deve satisfazer a propriedade de transparência de cor. Isso corresponde a $\gamma_0 = 1$. Assim, tem-se que $\gamma_c \leq \gamma_0$ e, portanto, uma situação similar à discutida anteriormente para o comportamento assintótico de $u(x, t)$ da equação FKPP. A velocidade crítica da frente de onda é

$$v_c = \bar{\alpha} \frac{\chi(\gamma_c)}{\gamma_c} \quad (4.29)$$

o que corresponde à seleção da onda mais lenta possível. Para o núcleo de ordem dominante (4.16), obtém-se $v_c = 4.88\bar{\alpha}$ (SOYEZ, 2006). Usando-se a aproximação difusiva para o núcleo BFKL, descrita anteriormente, é possível chegar a uma expressão para a solução assintótica para a equação BK independente do parâmetro de impacto. Em particular, para a cauda da amplitude, obtém-se

$$\mathcal{N}(k, Y) \stackrel{k \gg Q_s}{\approx} \left[\frac{k^2}{Q_s^2(Y)} \right]^{-\gamma_c} \log \left[\frac{k^2}{Q_s^2(Y)} \right] \exp \left[-\frac{\log^2(k^2/Q_s^2(Y))}{2\bar{\alpha}\chi''(\gamma_c)Y} \right]. \quad (4.30)$$

Na expressão acima, $Q_s(Y)$ é a escala de saturação, a qual mede a posição da frente de onda. Mais precisamente, é $L_s(Y) = \log(Q_s^2/k_0^2) = v_c Y$ que mede a posição da frente de onda. Um cálculo mais detalhado permite a extração de duas correções subdominantes adicionais, resultando na escala de saturação (MUNIER; PESCHANSKI, 2004a)

$$Q_s^2 = k_0^2 \exp \left(v_c Y - \frac{3}{2\gamma_c} \log(Y) - \frac{3}{\gamma_c^2} \sqrt{\frac{2\pi}{\bar{\alpha}\chi''(\gamma_c)}} \frac{1}{\sqrt{Y}} \right). \quad (4.31)$$

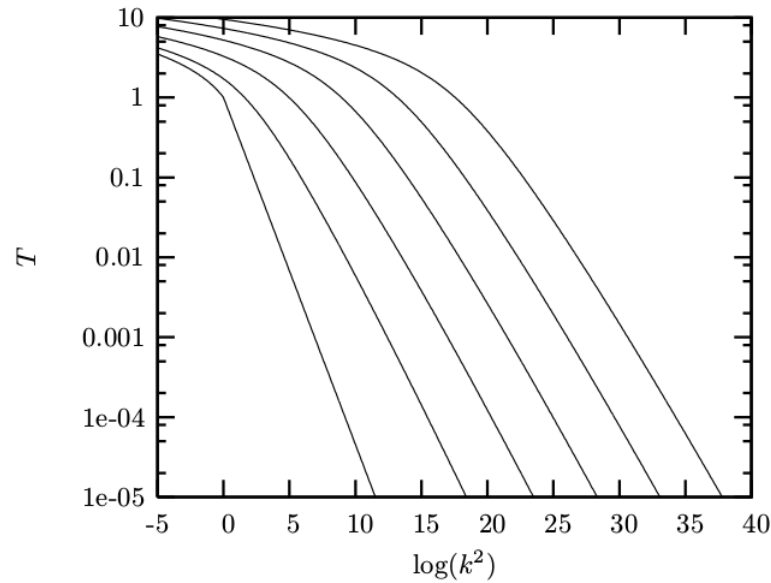
É importante saber que, na realidade, a utilização da aproximação difusiva é apenas uma maneira mais direta de verificar essas propriedades da equação BK, pois é possível provar a existência de ondas progressivas mesmo para equações mais complicadas que a FKPP, com núcleos mais complicados que $\partial_x^2 + 1$ (SOYEZ, 2006). Na Figura 4.7 é apresentado o resultado de uma simulação numérica da evolução em rapidez da equação BK. Pode-se ver que a amplitude de espalhamento apresenta um comportamento assintótico similar ao representado na Figura 4.6 para $u(x, t)$: para valores assintóticos da rapidez ela viaja para valores cada vez maiores de L , mantendo a sua forma.

Consideremos agora o limite de nosso interesse, ou seja, o de altas energias, que corresponde a valores muito grandes da rapidez Y . Neste limite, o expoente em (4.30) tende a zero e portanto a exponencial tende a 1, levando a uma amplitude (SOYEZ, 2006)

$$\mathcal{N}(k, Y) \stackrel{Y \rightarrow \infty}{\approx} N \left(\frac{k^2}{Q_s^2(Y)} \right) \stackrel{k \gg Q_s}{\approx} \left[\frac{k^2}{Q_s^2(Y)} \right]^{-\gamma_c} \log \left[\frac{k^2}{Q_s^2(Y)} \right]. \quad (4.32)$$

A expressão acima mostra que, para valores assintóticos da rapidez, a amplitude $\mathcal{N}(k, Y)$ deixa de depender separadamente de k e Y e apresenta uma dependência apenas na variável de escalamento $k^2/Q_s^2(Y)$.

Figura 4.7 – Comportamento de ondas progressivas da equação BK obtidas em uma simulação numérica (SOYEZ, 2006). A amplitude é apresentada para valores de $Y = 0, 5, 10, 15, 20, 25$.



Fonte: (SOYEZ, 2006)

A Equação (4.32) possui uma propriedade interessante. Ela mostra que a amplitude, em altas energias, não depende separadamente das variáveis k e Q_s , mas apenas da razão entre elas, ou seja, apresenta o escalamento geométrico. Essa propriedade expressa o fato de que quando se move ao longo da linha de saturação, o comportamento das amplitudes de espalhamento permanece invariável.

As correções de ordem mais baixa em (4.30) também são importantes. O último termo apresenta uma dependência explícita da rapidez Y , violando assim o escalamento geométrico. Contudo, podemos desprezar este termo quando

$$\frac{\log^2(k^2/Q_s^2(Y))}{2\bar{\alpha}\chi''(\gamma_c)Y} < 1. \quad (4.33)$$

Isto implica que o escalamento geométrico é obtido para

$$\log(k^2/Q_s^2(Y)) \lesssim \sqrt{2\chi''(\gamma_c)\bar{\alpha}Y}, \quad (4.34)$$

ou seja, em uma janela que se estende \sqrt{Y} acima da escala de saturação.

Na próxima seção, veremos que o escalamento geométrico foi observado experimentalmente em HERA, confirmando as previsões teóricas.

4.4 ESCALAMENTO GEOMÉTRICO: EVIDÊNCIA EXPERIMENTAL

O escalamento geométrico (STAŚTO; GOLEC-BIERNAT; KWIECIŃSKI, 2001) é uma característica fenomenológica interessante do DIS em altas energias.

A seção de choque fóton virtual-próton $\sigma_{tot}^{\gamma^*p}$, como já vimos anteriormente, depende tanto da virtualidade do fóton Q^2 quanto da energia Y , a princípio, de maneira independente. Entretanto, as medidas do espalhamento γ^*p inclusivo em pequeno x (ADLOFF *et al.*, 1997; AID *et al.*, 1996; DERRICK *et al.*, 1996; BREITWEG *et al.*, 2000) obtidas em HERA, mostraram algo diferente: $\sigma_{tot}^{\gamma^*p}$ não depende de Q^2 e de Y de forma independente, mas sim de uma relação entre Q^2 e Y . Assim, temos

$$\sigma_{tot}^{\gamma^*p}(Q^2, Y) = \sigma_{tot}^{\gamma^*p}(\tau), \quad (4.35)$$

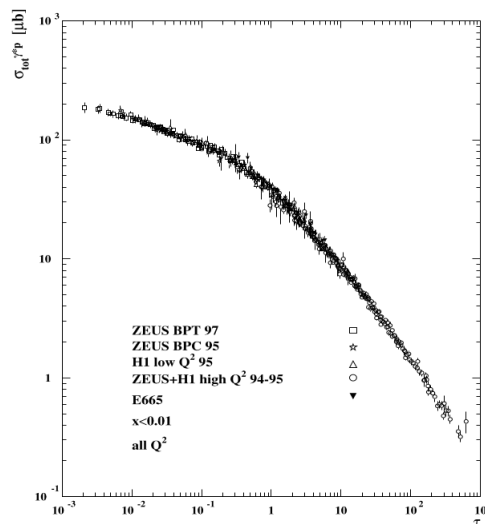
em que

$$\tau = \frac{Q^2}{Q_s^2(Y)} \quad (4.36)$$

é a chamada variável de escalamento e $Q_s^2(Y)$ é uma função crescente de Y , chamada de escala de saturação, dada por

$$Q_s^2(Y) = Q_0^2 e^{\lambda Y}. \quad (4.37)$$

Figura 4.8 – Dados obtidos em HERA para a seção de choque total do DIS versus a variável de escalamento τ .



Fonte: (STAŚTO; GOLEC-BIERNAT; KWIECIŃSKI, 2001)

A Figura 4.8 apresenta todos os dados disponíveis para $x < 0.01$ para o intervalo nos valores de Q^2 entre 0.045 GeV^2 e 450 GeV^2 . Analisando a figura, é possível notar o escalamento: todos os pontos estão descrevendo a mesma curva.

5 ESCALAMENTO GEOMÉTRICO NO ESPAÇO MISTO: TEORIA E FENOMENOLOGIA

Neste capítulo, falaremos sobre a extensão do escalamento geométrico para a equação BK com dependência transversal completa. Essa análise motivou o desenvolvimento do modelo fenomenológico MPS por (MARQUET; SOYEZ; PESCHANSKI, 2007). Esse modelo será estudado neste capítulo, e foi originalmente aplicado, com êxito, na descrição da produção exclusiva de mésons vetoriais, processo que também estudaremos.

5.1 ESCALAMENTO GEOMÉTRICO ESTENDIDO

Até agora, discutimos apenas a equação de BK independente do parâmetro de impacto. Poderíamos, entretanto, perguntar se esses argumentos se estendem ou não à equação completa incluindo todos os graus de liberdade do espaço de fase. Seja a equação BK no espaço de coordenadas

$$\partial_Y N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\bar{\alpha}}{2\pi} \int d^2 z \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{(\mathbf{x} - \mathbf{z})^2 (\mathbf{z} - \mathbf{y})^2} [N(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + N(\mathbf{z}, \mathbf{y}) - N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - N(\mathbf{x}, \mathbf{z})N(\mathbf{z}, \mathbf{y})] \quad (5.1)$$

Um dipolo de coordenadas transversais (\mathbf{x}, \mathbf{y}) é então representado através de seu tamanho $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ e parâmetro de impacto $\mathbf{b} = (\mathbf{x} + \mathbf{y})/2$. A rapidez Y é mantida implicitamente na amplitude.

Temos um problema aqui. A divisão do dipolo é não-local no parâmetro de impacto, ou seja, a equação BK acopla diferentes valores de \mathbf{b} , implicando assim, numa impossibilidade em aplicar diretamente os argumentos apresentados no capítulo anterior para cada valor de \mathbf{b} . Para resolver esta questão, devemos ir para o espaço de momentum e substituir o parâmetro de impacto pelo momentum transferido \mathbf{q} , definindo a seguinte transformada de Fourier

$$\tilde{\mathcal{N}}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2 x d^2 y e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{k})\cdot\mathbf{y}} \frac{\mathcal{N}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}. \quad (5.2)$$

A equação BK toma então a forma

$$\begin{aligned} \partial_Y \tilde{\mathcal{N}}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) &= \frac{\bar{\alpha}}{\pi} \int \frac{d^2 k'}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2} \left\{ \tilde{\mathcal{N}}(\mathbf{k}', \mathbf{q}) - \frac{1}{4} \left[\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{k}'^2} + \frac{(\mathbf{q} - \mathbf{k})^2}{(\mathbf{q} - \mathbf{k}')^2} \right] \tilde{\mathcal{N}}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \right\} \\ &- \frac{\bar{\alpha}}{2\pi} \int d^2 k' \tilde{\mathcal{N}}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \tilde{\mathcal{N}}(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \mathbf{q} - \mathbf{k}'), \end{aligned} \quad (5.3)$$

para a qual o núcleo BFKL é local em \mathbf{q} . Essa equação envolve três contribuições. A primeira integração contém os termos lineares correspondentes às emissões real e virtual de glúons. O último termo é a correção não linear.

Vamos agora analisar a Equação (5.3). Para essa equação assumir a propriedade de ondas progressivas, ela deve satisfazer três condições (SOYEZ, 2006):

1. A amplitude tem 0 como ponto fixo instável e 1 como ponto fixo estável;
2. A condição inicial diminui mais rapidamente do que $\exp(-\gamma_c L)$ para grandes valores de L , lembrando que $L = \ln(k^2/k_0^2)$;
3. A equação obtida por negligenciar os termos não lineares admite a superposição de ondas como solução:

$$u(x, t) = \int \frac{d\gamma}{2i\pi} u_0(\gamma) \exp[-\gamma(x - v_\gamma t)], \quad (5.4)$$

conforme já discutido no capítulo anterior.

A primeira condição é garantida pela saturação e pela evolução BFKL. A segunda condição vem da transparência de cor ($\mathcal{N} \propto 1/k^2 = \exp(-L)$). Para que a terceira condição seja válida, é preciso encontrar as soluções da parte linear de 5.3, isto é, a equação de BFKL completa, que pode ser expressa como uma superposição de ondas.

Quando trabalhamos com o momentum transferido \mathbf{q} em vez do parâmetro de impacto \mathbf{b} , temos uma fatorização entre o alvo e o projétil (SOYEZ, 2006). Foi obtido por (MARQUET; PESCHANSKI; SOYEZ, 2005) que quando o momentum k do dipolo é muito maior do que o momentum transferido q e a escala típica do alvo k_0 , as soluções da equação BFKL são uma superposição de ondas e, portanto, teremos ondas progressivas para a equação BK completa. Mais precisamente, o comportamento em altas energias da amplitude assume a forma

$$\tilde{\mathcal{N}}(k, q; Y) \stackrel{Y \rightarrow \infty}{\cong} N \left(\frac{k^2}{Q_s^2(q; Y)} \right) \stackrel{k \gg Q_s}{\cong} \left[\frac{k^2}{Q_s^2(q; Y)} \right]^{-\gamma_c} \log \left[\frac{k^2}{Q_s^2(q; Y)} \right]. \quad (5.5)$$

Esta expressão é exatamente a mesma que para o caso em que não temos dependência transversal completa, exceto pela escala de saturação, que agora é dependente do momentum transferido q

$$Q_s^2(q; Y) \stackrel{Y \rightarrow \infty}{\cong} A^2 \exp \left[v_c Y - \frac{3}{2\gamma_c} \log(Y) \right] \quad (5.6)$$

com

$$A^2 = \begin{cases} k_0^2, & \text{se } k_0 \gg q \\ q^2, & \text{se } q \gg k_0. \end{cases} \quad (5.7)$$

Quando $q \rightarrow 0$, recuperamos o resultado para o caso independente do parâmetro de impacto.

(MARQUET; PESCHANSKI; SOYEZ, 2005) mostraram que a as soluções de ondas progressivas da equação BK para o caso forward podem ser estendidas para a equação BK completa, incluindo um momentum transferido q diferente de zero, desde que $k \gg q$, em que k representa a escala do projétil. A escala de saturação apresenta a mesma dependência em energia que no caso forward, mas agora ela é proporcional a q .

Como consequência da existência de soluções de ondas progressivas, a forma assintótica da solução, ou seja, a frente de onda, aparece como uma expressão da mesma forma que para

o caso forward com duas modificações: a escala de saturação é proporcional a q e o pré-fator, relacionado com as condições iniciais, é dependente de q .

A partir dessas considerações, podemos prever que a equação BK implica na extensão do escalamento geométrico em um momentum transferido diferente de zero.

Todos esses resultados também são aplicados na representação de espaço misto, com dependência no tamanho do dipolo e no momentum transferido. Entretanto, essas propriedades não são expressas tão facilmente em termos do parâmetro de impacto.

É importante salientar que (MARQUET; SOYEZ, 2005) verificaram numericamente as propriedades das soluções assintóticas da equação de BK com dependência em q . Todas as propriedades preditas teoricamente em (MARQUET; PESCHANSKI; SOYEZ, 2005) são de fato reproduzidas por simulações numéricas.

O fato da equação BK completa assumir a propriedade de ondas progressivas, dado que a investigação seja realizada em termos do momentum transferido durante a interação, ao invés do parâmetro de impacto da interação, motivaram (MARQUET; SOYEZ; PESCHANSKI, 2007) a desenvolver um modelo fenomenológico para a amplitude de espalhamento dipolo-alvo com dependência no momentum transferido, o modelo MPS. Na próxima seção, estudaremos este modelo.

5.2 O MODELO MPS

Como vimos na seção anterior, (MARQUET; PESCHANSKI; SOYEZ, 2005; MARQUET; SOYEZ, 2005) mostraram que a propriedade de ondas progressivas pode ser estendida à equação BK com dependência transversal completa, possibilitando a investigação do problema em termos do momentum transferido, ao invés de trabalharmos com o parâmetro de impacto. O ponto notável em (MARQUET; PESCHANSKI; SOYEZ, 2005) é o fato da análise de ondas progressivas da equação BK ser realizada mais facilmente no espaço misto, a partir da seguinte transformada de Fourier:

$$\tilde{N}_p(\mathbf{r}, \mathbf{q}; Y) = \int d^2b e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}} N_p(\mathbf{r}, \mathbf{b}; Y), \quad (5.8)$$

em que \mathbf{q} é o momentum transferido.

A partir do conhecimento das soluções exatas da equação BFKL com momentum transferido diferente de zero (NAVELET; PESCHANSKI, 1997; LIPATOV, 1986), as propriedades de ondas progressivas foram estendidas (MARQUET; PESCHANSKI; SOYEZ, 2005) (para grande Q):

1. para pequeno momentum transferido, isto é, $|\mathbf{q}| < Q_0 < Q \sim 1$, teremos assintoticamente

$$\tilde{N}(\mathbf{r}, \mathbf{q}; Y) = \tilde{N}(r^2 Q_s^2, \mathbf{q}), \quad (5.9)$$

em que a escala de saturação Q_s^2 é

$$Q_s^2 = Q_0^2 e^{\lambda Y}, \quad (5.10)$$

recuperando o resultado forward ($\mathbf{q} = 0$);

2. para um momentum transferido intermediário, isto é, $Q_0 < |\mathbf{q}| < Q \sim 1$, teremos assintoticamente

$$\tilde{N}(\mathbf{r}, \mathbf{q}; Y) = \tilde{N}(r^2 Q_s^2, \mathbf{q}), \quad (5.11)$$

em que a escala de saturação Q_s^2 é

$$Q_s^2 = \mathbf{q}^2 e^{\lambda Y}; \quad (5.12)$$

O caso em que temos grande momentum transferido, isto é, $Q_0 < Q < |\mathbf{q}| \sim 1$, não nos interessa, pois não haverá mais saturação.

Podemos perceber, que para o caso em que temos um momentum transferido intermediário, a escala de saturação se torna dependente de \mathbf{q} , mas mantendo a mesma forma de evolução em rapidez como no caso forward. Essas previsões foram confirmadas por uma análise analítica e numérica da equação BK no espaço de momentum (MARQUET; SOYEZ, 2005).

Para pequenos valores de x , a amplitude de espalhamento de dipolo deixa de ser uma função das variáveis r e Y , e passa a ser uma função de uma única variável $r^2 Q_s^2(Y)$ até os tamanhos de dipolos inversos significativamente maiores do que a escala de saturação $Q_s(Y)$. Mais precisamente podemos escrever

$$\tilde{N}_p(\mathbf{r}, \mathbf{q} = 0; Y) = 2\pi R_p^2 N_p(r^2 Q_s^2(Y)), \quad (5.13)$$

em que R_p é o raio do próton. Isso implica no escalamento geométrico (para quarks sem massa) da seção de choque total em pequeno x :

$$\sigma_{tot}^{\gamma^* p \rightarrow X}(Y, Q^2) = \sigma_{tot}^{\gamma^* p \rightarrow X}(\tau). \quad (5.14)$$

(MARQUET; SOYEZ; PESCHANSKI, 2007) propuseram para o caso $\mathbf{q} \neq 0$ a seguinte generalização:

$$\tilde{N}_p(\mathbf{r}, \mathbf{q}; Y) = 2\pi R_p^2 f(\mathbf{q}) N_p(r^2 Q_s^2(Y, \mathbf{q})), \quad (5.15)$$

com o comportamento assintótico $Q_s^2(Y, \mathbf{q}) \sim \max(Q_0^2, \mathbf{q}^2) \times \exp(\lambda Y)$ e um fator de forma $f(\mathbf{q})$ desconhecido, de origem não perturbativa.

A escala de saturação com dependência em \mathbf{q} , é parametrizada como

$$Q_s^2(Y, \mathbf{q}) = Q_0^2 (1 + c\mathbf{q}^2) e^{\lambda Y}$$

de modo a interpolar suavemente entre as regiões de pequena transferência e de transferência intermediária.

O fator de forma $f(\mathbf{q})$ descreve a dependência da transferência de momentum no vértice do próton. Note que este fator de forma é fatorizado a partir dos vértices do projétil e assim, ele não afeta as propriedades do escalamento geométrico. Por simplicidade, usamos

$$f(\mathbf{q}) = \exp(-B\mathbf{q}^2). \quad (5.16)$$

A amplitude de espalhamento $N_p(rQ_s, Y)$, que entra na expressão (5.15), é dada pelo modelo IIM (IANCU; ITAKURA; MUNIER, 2004):

$$N_p(rQ_s(Y), Y) = \begin{cases} N_0 \left(\frac{rQ_s(Y)}{2} \right)^{2\left[\gamma_c + \frac{\ln(2/rQ_s(Y))}{\kappa\lambda Y}\right]} & \text{para } rQ_s(Y) \leq 2 \\ 1 - e^{-\alpha \ln^2(\beta rQ_s(Y))} & \text{para } rQ_s(Y) > 2. \end{cases} \quad (5.17)$$

A primeira expressão do modelo IIM é obtida a partir da análise da equação BFKL com uma condição de contorno na linha de saturação, enquanto que a segunda expressão é obtida a partir da equação BK. Assim, podemos pensar no modelo IIM como um modelo que interpola os regimes diluído (BFKL) e saturado (BK). Os parâmetros α e β são determinados a partir da condição de que N_p e sua derivada sejam contínuas em $rQ_s = 2$. O valor da amplitude N_0 é ajustado como $N_0 = 0.7$. O coeficiente $\kappa \approx 9.9$ é obtido a partir do núcleo BFKL enquanto o expoente crítico $\gamma_c \approx 0.6275$ é ajustado às medidas de HERA da função de estrutura do próton. Na análise original, o ajuste aos dados de HERA não incluem contribuições dos quarks pesados. Nesta dissertação, vamos considerar a versão estendida do modelo IIM, apresentada em (SOYEZ, 2007). Esta extensão inclui quarks pesados, como o charm ($m_c = 1.4$ GeV) e o bottom ($m_b = 4.5$ GeV). Para os sabores mais leves, como os quarks up e down, temos que ($m_{u,d} = 0.14$ GeV). Os parâmetros da escala de saturação são $\lambda = 0.2197$ e $Q_0 = 0.298$ GeV, e o raio do próton é $R_p = 3.34$ GeV⁻¹.

O último fator presente na expressão para tamanhos pequenos de dipolo, introduz violações no escalamento geométrico, que são importantes quando Y não é suficientemente grande, como predito pela evolução da QCD em altas energias. Ele controla a forma como o escalamento geométrico é abordado. De fato, ele pode ser desprezado para $\log(r^2 Q_s^2/4) < \sqrt{2\kappa\lambda Y}$, significando que a janela de escalamento geométrico se estende como \sqrt{Y} acima da escala de saturação (em unidades logarítmicas).

A expressão final para o modelo MPS (MARQUET; SOYEZ; PESCHANSKI, 2007) é, portanto,

$$\tilde{N}(\mathbf{r}, \mathbf{q}; x) = 2\pi R_p^2 e^{-B\mathbf{q}^2} N(\mathbf{r}Q_s(x, \mathbf{q}), Y), \quad (5.18)$$

que é uma extensão para o modelo forward (IANCU; ITAKURA; MUNIER, 2004) incluindo as predições da QCD para momentum transferido diferente de zero. De fato, este modelo reproduz o modelo inicial para $\mathbf{q} = 0$ e assegura que a escala de saturação tenha o comportamento

assintótico correto. Neste modelo, há dois parâmetros originalmente livres: o parâmetro c , relacionado com a escala de saturação, e o parâmetro B é a inclinação do fator de forma. Esses parâmetros foram ajustados às medidas experimentais da produção elástica de mésons vetoriais. No artigo em que o modelo MPS é apresentado (MARQUET; SOYEZ; PESCHANSKI, 2007), os autores obtiveram os valores para o parâmetro $c = 4.041$ e para o parâmetro $B = 3.713$. Esses valores para c e B são aqueles que fizeram uma melhor descrição dos dados de HERA relacionados com a produção exclusiva de mésons vetoriais, apresentados em (ADLOFF *et al.*, 2000; CHEKANOV *et al.*, 2005; CHEKANOV *et al.*, 2004).

O fator de forma depende somente de B , independentemente do méson vetorial no estado final. Isto está de acordo com as previsões retiradas da equação BK (MARQUET; PESCHANSKI; SOYEZ, 2005; MARQUET; SOYEZ, 2005), o que implica na fatorização da contribuição não perturbativa na Equação (5.18). A diferença nos processos de produção dos mésons vetoriais ρ , ϕ e J/Ψ vem completamente das funções de onda dos mésons vetoriais. Através de suas funções de onda, diferentes mésons vetoriais são sensíveis a diferentes tamanhos de dipolo, e por isso, sentem os efeitos da saturação diferentemente.

O modelo MPS foi aplicado originalmente na descrição da produção exclusiva dos mésons vetoriais ρ , ϕ e J/Ψ , e conseguiu, com sucesso, descrever esses processos. No entanto, ele também é capaz de descrever outros processos (MARIOTTO; MACHADO, 2013; MACHADO, 2016).

Na próxima seção, apresentaremos o processo de produção exclusiva de mésons vetoriais, cujo entendimento será de fundamental importância para a compreensão de um processo um pouco mais complicado, que será abordado no capítulo 6.

5.3 PRODUÇÃO EXCLUSIVA DE MÉSON VETORIAIS EM PEQUENO x

Consideremos a produção exclusiva de mésons vetoriais em colisões elétron-próton em pequeno x no referencial de dipolo. As funções de onda $\psi_{f,h,\bar{h}}^{\gamma*,\lambda}(z, \mathbf{r}; Q^2)$, que descrevem a separação do fóton virtual com polarização $\lambda = 0, \pm 1$ em um dipolo, são encontradas na literatura (KOWALSKI; MOTYKA; WATT, 2006). Os índices $h = \pm 1$ e $\bar{h} = \pm 1$ denotam as helicidades do quark e do antiquark compondo o dipolo de sabor f . Essas funções de onda dependem da virtualidade Q^2 , da fração de momentum longitudinal z carregada pelo quark e do vetor bidimensional \mathbf{r} , cujo módulo representa o tamanho transversal do dipolo.

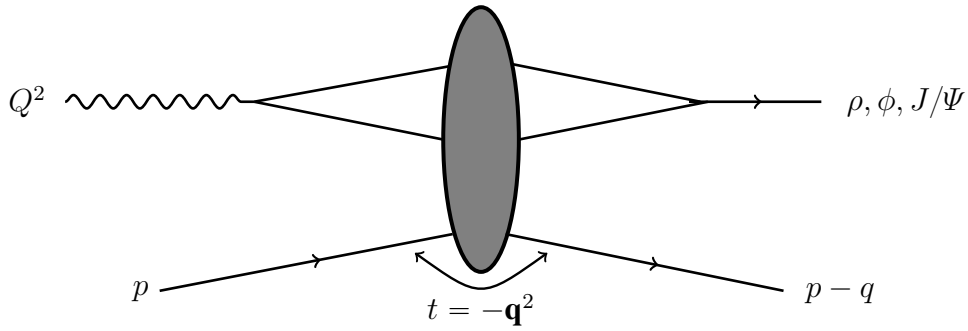
A produção exclusiva de mésons vetoriais é representada na Figura 5.1. O fóton se divide em um dipolo de tamanho \mathbf{r} , o qual interage elasticamente com o próton, com momentum transferido \mathbf{q} , e se recombina formando um méson vetorial (ρ , ϕ ou J/Ψ), cuja massa será denotada por M_V . Os méson vetoriais são mésons que possuem spin 1. Além disso, eles possuem paridade ímpar, ou seja, não são invariantes perante rotações espaciais. O méson vetorial ρ é

composto pelos quarks $u\bar{d}$. Já o méson vetorial ϕ pelos quarks $s\bar{s}$. Por fim, o méson vetorial J/Ψ é formado pelos quarks $c\bar{c}$.

Para descrever este processo, precisamos introduzir as funções de onda $\psi_{f,h,\bar{h}}^{V,\lambda}(z, \mathbf{r}; M_V^2)$, as quais descrevem a divisão do méson vetorial, com polarização λ , em um dipolo. De fato, para calcular a amplitude da produção de mésons vetoriais, apresentada na Figura 5.1, precisamos das funções de sobreposição transversal $\Phi_T^{\gamma^*V} = (\Phi_+^{\gamma^*V} + \Phi_-^{\gamma^*V})/2$ e longitudinal $\Phi_L^{\gamma^*V} = \Phi_0^{\gamma^*V}$, obtidas através de (KOWALSKI; MOTYKA; WATT, 2006)

$$\Phi_\lambda^{\gamma^*V}(z, \mathbf{r}; Q^2, M_V^2) = \sum_{f\bar{h}\bar{h}} \left[\psi_{f,h,\bar{h}}^{V,\lambda}(z, \mathbf{r}; M_V^2) \right]^* \psi_{f,h,\bar{h}}^{\gamma^*,\lambda}(z, \mathbf{r}; Q^2). \quad (5.19)$$

Figura 5.1 – Produção de mésons vetoriais no referencial de dipolo.



Fonte: O autor

Como podemos ver, essas funções de sobreposição dependem das funções de onda $\psi_{f,h,\bar{h}}^{V,\lambda}$ do méson vetorial, que não podem ser calculadas a partir de primeiros princípios, usando técnicas perturbativas. Existem, na literatura, diferentes modelos para essa função. Neste trabalho, utilizamos dois modelos diferentes para a função de onda do méson vetorial, denominados *Light-Cone Gauss* (LCG) (DOSCH *et al.*, 1997; KULZINGER; DOSCH; PIRNER, 1999) e *Boosted Gaussian* (BG) (NEMCHIK; NIKOLAEV; ZAKHAROV, 1994; NEMCHIK *et al.*, 1997).

A expressão para a função de sobreposição, para o caso em que a polarização do fóton virtual é transversa ($\lambda = \pm 1$), é

$$\begin{aligned} \Phi_T^{\gamma^*V}(z, \mathbf{r}, Q^2) &= \frac{\hat{e}_f e}{4\pi} \frac{N_c}{\pi z(1-z)} \\ &\times \left\{ m_f^2 K_0(r\bar{Q}_f) \phi_T(r, z) - [z^2 + (1-z)^2] \bar{Q}_f K_1(r\bar{Q}_f) \partial_r \phi_T(r, z) \right\}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

em que $e = \sqrt{4\pi\alpha_{em}}$, \hat{e}_f é a carga efetiva do méson vetorial, m_f é a massa dos quarks que compõem o méson vetorial, $N_c = 3$ é o número de cores, $\bar{Q}_f^2 = z(1-z)Q^2 + m_f^2$ e $K_{0,1}$ são as funções de McDonald de ordem zero e um, respectivamente (ARFKEN; WEBER, 2005). Ainda, $\phi_T(r, z)$ define a parte escalar da função de onda do méson vetorial.

Para o caso em que a polarização do fóton virtual é longitudinal ($\lambda = 0$), a função de sobreposição será

$$\begin{aligned} \Phi_L^{\gamma^*V}(z, \mathbf{r}, Q^2) &= \frac{\hat{e}_f e N_c}{4\pi \pi} \\ &\times 2Qz(1-z)K_0(r\bar{Q}_f) \left[M_V \phi_L(r, z) + \delta \frac{m_f^2 - \nabla_r^2}{M_V z(1-z)} \phi_L(r, z) \right], \end{aligned} \quad (5.21)$$

em que $\phi_L(r, z)$ define a parte escalar da função de onda do méson vetorial e o fator δ está relacionado com a escolha do modelo para as funções de onda do méson vetorial.

Tanto $\phi_T(r, z)$ quanto $\phi_L(r, z)$ são modelados. Como mencionamos anteriormente, nesta dissertação iremos trabalhar com os modelos BG e LCG. Para o modelo BG, temos que $\delta = 1$ e as funções $\phi_T(r, z)$ e $\phi_L(r, z)$ são dadas por

$$\phi_{T,L}(r, z) = \mathcal{C}_{T,L} z(1-z) \exp \left[-\frac{m_f^2 R^2}{8z(1-z)} - \frac{2z(1-z)r^2}{R^2} + \frac{m_f^2 R^2}{2} \right]. \quad (5.22)$$

Já para o modelo LCG, temos que $\delta = 0$ e as funções $\phi_T(r, z)$ e $\phi_L(r, z)$ são dadas por

$$\phi_T(r, z) = N_T [z(1-z)]^2 \exp(-r^2/2R_T^2) \quad (5.23)$$

$$\phi_L(r, z) = N_L z(1-z) \exp(-r^2/2R_L^2). \quad (5.24)$$

Os parâmetros \mathcal{C}_T , \mathcal{C}_L , N_T , N_L , R , R_T e R_L , apresentados na Tabela (5.1), são determinados pela condição de normalização da função de onda e pela taxa de decaimento do méson.

Tabela 5.1 – Parâmetros para as funções de onda dos mésons vetoriais

Méson Vetorial	Parâmetros Comuns			Parâmetros BG			Parâmetros LCG			
	$M_V(\text{GeV})$	$m_f(\text{GeV})$	\hat{e}_f	$R^2(\text{GeV}^{-2})$	\mathcal{C}_L	\mathcal{C}_T	$R_L^2(\text{GeV}^{-2})$	$R_T^2(\text{GeV}^{-2})$	N_L	N_T
ρ	0.776	0.14	$1/\sqrt{2}$	12.9	0.853	0.911	10.4	21.0	1.79	4.47
ϕ	1.019	0.14	1/3	11.2	0.825	0.919	9.7	16.0	1.41	4.75
J/Ψ	3.097	1.4	2/3	2.3	0.575	0.578	3.0	6.5	0.83	1.23

Fonte: (KOWALSKI; MOTYKA; WATT, 2006)

Sendo \mathbf{q} o momentum transferido pelo próton durante a colisão, a seção de choque diferencial com respeito a $t = -\mathbf{q}^2$ é expressa como

$$\frac{d\sigma_{T,L}^{\gamma^*p \rightarrow Vp}}{dt} = \frac{1}{16\pi} |\mathcal{A}_{T,L}^{\gamma^*p \rightarrow Vp}|^2. \quad (5.25)$$

Aqui, \mathcal{A} é a parte imaginária da amplitude de espalhamento, e é dada por

$$\mathcal{A}_{T,L}^{\gamma^*p \rightarrow Vp} = \int d^2x d^2y \int_0^1 dz \Phi_{T,L}^{\gamma^*V}(z, \mathbf{x} - \mathbf{y}; Q^2, M_V^2) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}} N_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}; Y), \quad (5.26)$$

em que \mathbf{x} e \mathbf{y} são, respectivamente, as posições transversas do quark e do antiquark, que constituem o dipolo. Ainda, $N_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}; Y)$ é a amplitude de espalhamento dipolo-próton, que carrega

toda a dependência em energia através da rapidez Y , que agora é definida em termos da energia do centro de massa W e da massa do méson vetorial M_V :

$$Y = \log \left(\frac{W^2 + Q^2}{M_V^2 + Q^2} \right). \quad (5.27)$$

Fazendo as seguintes mudanças de variáveis

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = z\mathbf{x} + (1 - z)\mathbf{y}, \quad (5.28)$$

e pela transformada de Fourier (5.8), a Equação (5.25) se torna

$$\frac{d\sigma_{T,L}^{\gamma^*p \rightarrow Vp}}{dt} = \frac{1}{16\pi} \left| \int d^2r \int_0^1 dz \Phi_{T,L}^{\gamma^*V}(z, \mathbf{r}; Q^2, M_V^2) e^{-iz\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \tilde{N}_p(\mathbf{r}, \mathbf{q}; Y) \right|^2, \quad (5.29)$$

em que $\tilde{N}_p(\mathbf{r}, \mathbf{q}; Y)$ é dada pelo modelo apresentado na seção anterior.

É importante ressaltar que o modelo MPS descreveu com sucesso o processo apresentado nesta seção (MARQUET; SOYEZ; PESCHANSKI, 2007), e esse mesmo processo será de suma importância no próximo capítulo, pois trata do vértice que será parte de um processo mais complicado, envolvendo nêutron no estado final.

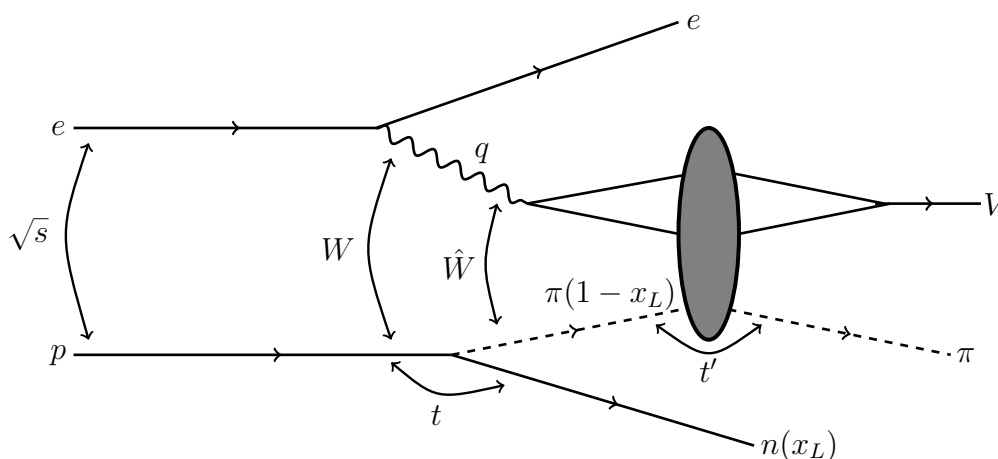
6 PRODUÇÃO EXCLUSIVA DE MÉSONS VETORIAIS ENVOLVENDO NÊUTRON DOMINANTE

Neste capítulo, iremos tratar a produção exclusiva do méson vetorial ρ^0 associado a nêutron dominante ($\gamma^*p \rightarrow \rho^0\pi^+n$) em HERA, usando o formalismo de dipolos de cor. Este formalismo nos permite estimar a contribuição de efeitos de saturação à produção de nêutron dominante no intervalo cinemático que foi investigado por HERA. A descrição deste processo foi obtida com sucesso por (GONÇALVES; NAVARRA; SPIERING, 2016) utilizando um modelo fenomenológico no espaço de coordenadas. Nós, por outro lado, aplicaremos o modelo fenomenológico no espaço misto, apresentado no capítulo anterior, para descrever o mesmo processo.

6.1 $\gamma^*p \rightarrow \rho^0\pi^+n$ E O FORMALISMO DE DIPOLOS

Em colisões de partículas que envolvem altas energias, os bárions emergentes, isto é, prótons e nêutrons, que possuam ângulos polares muito pequenos em relação à direção inicial do feixe hadrônico e que possuam os mesmos quarks de valência (ou pelo menos um deles) que as partículas incidentes, são chamados de partículas dominantes. Recentemente, foram apresentadas as primeiras medidas da produção exclusiva do méson vetorial ρ^0 associada com nêutrons dominantes ($\gamma^*p \rightarrow \rho^0\pi^+n$) (ANDREEV *et al.*, 2016). A descrição destes processos ainda é um desafio teórico. Em altas energias, esse processo pode ser visto como uma sequência de três

Figura 6.1 – Processo ep exclusivo com energia de centro de massa \sqrt{s} associado com a produção de nêutron dominante.



Fonte: O autor

subprocessos fatorizáveis (GONÇALVES; NAVARRA; SPIERING, 2016), apresentados na Figura 6.1: i) o fóton virtual com quadrimomento q , emitido a partir do elétron incidente e , se separa em um par quark-antiquark $q\bar{q}$; ii) o par então interage com um pión π , presente na função

de onda do próton incidente p , e iii) o nêutron dominante n e o méson vetorial V são formados. Consequentemente, a seção de choque fóton virtual-píon pode ser fatorizada em termos da função de onda do fóton virtual, que descreve o fóton virtual se dividindo em um par $q\bar{q}$, e da seção de choque dipolo-píon $\sigma_{d\pi}$, que descreve a interação do par $q\bar{q}$ com o píon.

A seção de choque diferencial para um dado processo associado à produção de nêutron dominante pode ser expressa como

$$\frac{d^2\sigma(W, Q^2, x_L, t)}{dx_L dt} = f_{\pi/p}(x_L, t)\sigma_{\gamma^*\pi}(\hat{W}^2, Q^2), \quad (6.1)$$

em que Q^2 é a virtualidade do fóton emitido, W é a energia de centro de massa do sistema fóton virtual-próton, x_L é a fração de momentum do próton carregada pelo nêutron e t é o quadrimomentum, ao quadrado, do píon emitido, e ele é dado por (CARVALHO *et al.*, 2016):

$$t \simeq -\frac{p_T^2}{x_L} - \frac{(1-x_L)(m_n^2 - m_p^2 x_L)}{x_L}. \quad (6.2)$$

Aqui, p_T é o momentum transversal, m_n é a massa do nêutron dominante e m_p é a massa do próton.

Ainda, $f_{\pi/p}(x_L, t)$ é o fluxo de píons virtuais emitidos pelo próton e $\sigma_{\gamma^*\pi}(\hat{W}^2, Q^2)$ é a seção de choque da interação entre o fóton virtual e o píon virtual em uma energia de centro de massa \hat{W}^2 que pode ser escrita em termos da energia de centro de massa do sistema fóton virtual-próton W . A relação é dada por $\hat{W}^2 = (1-x_L)W^2$.

O fluxo de píons $f_{\pi/p}(x_L, t)$ é a distribuição de momentum do píon virtual em um nucleon* físico (o nucleon despido mais uma "nuvem de píons") (CARVALHO *et al.*, 2016). Para uma revisão sobre o modelo de nuvem de píons, veja (D'ALESIO; PIRNER, 2000).

O fluxo de píons geralmente é parametrizado como (BISHARI, 1972; HOLTSMANN *et al.*, 1994; KUMANO, 1991; KOPELIOVICH *et al.*, 1997):

$$f_{\pi/p}(x_L, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{2g_{p\pi p}^2}{4\pi} \frac{-t}{(t - m_\pi^2)^2} (1-x_L)^{1-2\alpha(t)} [F(x_L, t)]^2, \quad (6.3)$$

em que $g_{p\pi p}^2/4\pi = 14.4$ (CARVALHO *et al.*, 2016) é a constante de acoplamento $\pi^0 pp$, m_π é a massa do píon e $\alpha(t)$ é a trajetória do píon (para maiores detalhes veja (BARONE; PREDAZZI, 2002)). Ainda, $F(x_L, t)$ é o chamado fator de forma e é modelado.

No presente trabalho, vamos considerar cinco diferentes parametrizações para o fator de forma encontradas na literatura. São elas:

$$F_1(x_L, t) = \exp \left[R^2 \frac{(t - m_\pi^2)}{(1-x_L)} \right], \quad \alpha(t) = 0 \quad (6.4)$$

(HOLTSMANN *et al.*, 1994), em que $R = 0.6 \text{ GeV}^{-1}$.

$$F_2(x_L, t) = 1, \quad \alpha(t) = \alpha(t)_\pi \quad (6.5)$$

*Os nucleons são os constituintes do núcleo de um átomo, ou seja, quando falamos em nucleons, estamos nos referindo a prótons ou nêutrons.

(BISHARI, 1972), em que $\alpha(t)_\pi \simeq t$ (t é dado em GeV^2).

$$F_3(x_L, t) = \exp [b(t - m_\pi^2)], \quad \alpha(t) = \alpha(t)_\pi \quad (6.6)$$

(KOPELIOVICH *et al.*, 1997), em que $\alpha(t)_\pi \simeq t$ (t é dado em GeV^2) e $b = 0.3 \text{ GeV}^{-2}$.

$$F_4(x_L, t) = \frac{\Lambda_m^2 - m_\pi^2}{\Lambda_m^2 - t}, \quad \alpha(t) = 0 \quad (6.7)$$

(KUMANO, 1991), em que $\Lambda_m = 0.74 \text{ GeV}$.

$$F_5(x_L, t) = \left[\frac{\Lambda_d^2 - m_\pi^2}{\Lambda_d^2 - t} \right]^2, \quad \alpha(t) = 0 \quad (6.8)$$

(KUMANO, 1991), em que $\Lambda_d = 1.2 \text{ GeV}$.

De agora em diante, vamos enumerar os fluxos de píons de acordo com os fatores de forma listados nas equações (6.4)-(6.8), denotando-os por f_1, f_2, \dots, f_5 , respectivamente.

Ainda nos falta descrever o último termo presente na Equação (6.1): a seção de choque fóton virtual-píon $\sigma_{\gamma^*\pi}(\hat{W}^2, Q^2)$. Como já mencionamos anteriormente, no formalismo de dipolos a seção de choque fóton virtual-píon pode ser fatorizada em termos da função de onda do fóton virtual e da seção de choque dipolo-píon.

Assim, temos que a seção de choque fóton virtual-píon $\sigma_{\gamma^*\pi}(\hat{W}^2, Q^2)$ para a produção de um estado final exclusivo, como por exemplo, um méson vetorial V , é dada por:

$$\sigma(\gamma^*\pi \rightarrow V\pi) = \sum_{i=T,L} \int_{-\infty}^0 \frac{\sigma_i}{dt'} dt' = \frac{1}{16\pi} \sum_{i=T,L} \int_{-\infty}^0 |\mathcal{A}_i^{\gamma^*\pi \rightarrow V\pi}|^2 dt', \quad (6.9)$$

com a parte imaginária da amplitude de espalhamento sendo dada por

$$\mathcal{A}_{T,L}^{\gamma^*\pi \rightarrow V\pi} = \int d^2x d^2y \int_0^1 dz \Phi_{T,L}^{\gamma^*V}(z, \mathbf{x} - \mathbf{y}; Q^2, M_V^2) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}} N_\pi(\mathbf{x}, \mathbf{y}; Y). \quad (6.10)$$

Aqui, $\Phi_{T,L}^{\gamma^*V}(z, \mathbf{x} - \mathbf{y}; Q^2, M_V^2)$ são as funções de sobreposição definidas no capítulo anterior. Ainda, \mathbf{q} denota o momentum transversal perdido pelo píon emergente ($t' = -\mathbf{q}^2$) e Y é dado por (CARVALHO *et al.*, 2016):

$$Y = \log \left(\frac{\hat{W}^2 + Q^2}{Q^2 + M_V^2} \right) = \log \left(\frac{(1 - x_L)W^2 + Q^2}{Q^2 + M_V^2} \right), \quad (6.11)$$

em que M_V é a massa do méson vetorial.

A seção de choque dipolo-píon é dada por

$$\sigma_{d\pi}(\mathbf{r}, Y) = 2 \int d^2\mathbf{b} N_\pi(\mathbf{r}, \mathbf{b}, Y), \quad (6.12)$$

em que $N_\pi(\mathbf{r}, \mathbf{b}, Y)$ é a amplitude de espalhamento forward entre um dipolo pequeno (um par quark-antiquark sem cor) e um píon. A seção de choque $\sigma_{d\pi}$ é a principal contribuição para os

cálculos de $\sigma_{\gamma^*\pi}$. No que segue, assim como em (CARVALHO *et al.*, 2016), assumimos, por simplicidade, a validade do modelo aditivo de quarks, o qual nos permite relacionar $\sigma_{d\pi}$ com a seção de choque dipolo-próton σ_{dp} , investigada no capítulo anterior.

Assim, pelo modelo aditivo de quarks,

$$\sigma_{d\pi}(\mathbf{r}, Y) = R_q \cdot \sigma_{dp}(\mathbf{r}, Y), \quad (6.13)$$

ou equivalentemente

$$N_\pi(\mathbf{r}, \mathbf{b}, Y) = R_q \cdot N_p(\mathbf{r}, \mathbf{b}, Y), \quad (6.14)$$

em que R_q é uma constante. Ainda pelo modelo aditivo de quarks, espera-se que R_q , que é a razão entre o número de quarks de valência no hádron alvo, seja $R_q = 2/3$. Essa suposição está de acordo com o estudo da função de estrutura do pión realizado em pequeno x , presente em (NIKOLAEV; SPETH; ZOLLER, 2000). Para maiores informações envolvendo o modelo aditivo de quarks e píons, veja (LEVIN; FRANKFURT, 1965; KOPELIOVICH *et al.*, 2012).

Note, que exceto pela amplitude de espalhamento N_π , a Equação (6.10) é exatamente a mesma que a dada pela Equação (5.26). Diferentemente da análise para processos inclusivos envolvendo nêutron dominante, feita por (CARVALHO *et al.*, 2016), bem como da análise de processos exclusivos envolvendo nêutron dominante, realizada por (GONÇALVES; NAVARRA; SPIERING, 2016), nas quais foram utilizados o modelo para a amplitude de espalhamento dipolo-próton (no espaço de coordenadas) chamado de modelo bCGC (KOWALSKI; MOTYKA; WATT, 2006; WATT; KOWALSKI, 2008), aqui utilizaremos o modelo no espaço misto apresentado no capítulo anterior. Neste trabalho, estamos interessados somente no processo exclusivo de produção do méson vetorial ρ .

Assim, realizando o mesmo procedimento do capítulo anterior, encontramos que a seção de choque diferencial para a produção exclusiva do méson vetorial ρ , para o caso em que observamos um nêutron no estado final, no espaço misto, é

$$\frac{d\sigma_{T,L}^{\gamma^*\pi \rightarrow \rho\pi}}{dt'} = \frac{1}{16\pi} \left| \int d^2r \int_0^1 dz \Phi_{T,L}^{\gamma^*V}(z, \mathbf{r}; Q^2, M_\rho^2) e^{-iz\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \tilde{N}_\pi(\mathbf{r}, \mathbf{q}; Y) \right|^2,$$

em que

$$\tilde{N}_\pi(\mathbf{r}, \mathbf{q}; Y) = \frac{2}{3} \tilde{N}_p(\mathbf{r}, \mathbf{q}; Y).$$

Antes de encerrar esta seção, ainda precisamos discutir um tópico importante. Processos envolvendo nêutron dominante são dominados pela troca de píons (ANDREEV *et al.*, 2016). Na Figura 6.1, estamos considerando o caso mais simples possível, no qual temos a troca de somente um pión.

Entretanto, (KOPELIOVICH *et al.*, 1997; HOLTMANN *et al.*, 1994; KUMANO, 1991; NIKOLAEV *et al.*, 1999; THOMAS; BOROS, 1999) mostram que, os processos que são diferentes do que a troca de píons, devam contribuir com menos do que 25 % da seção de choque. O

efeito deste *background*, para a troca de um pión, é aumentar a taxa de produção de nêutrons. No entanto, este efeito é parcialmente compensado por reespalhamentos absorptivos do nêutron, o que diminui a taxa de nêutrons (KAIDALOV *et al.*, 2006; KHOZE; MARTIN; RYSKIN, 2006; NIKOLAEV; SPETH; ZAKHAROV, 1997; D’ALESIO; PIRNER, 2000).

Assim, neste trabalho, seguiremos a mesma ideia dos autores (CARVALHO *et al.*, 2016; GONÇALVES; NAVARRA; SPIERING, 2016). Assumimos que esses efeitos de absorção podem ser compensados com um fator K , que multiplica o lado direito da Equação (6.1), que será estimado a partir da análise de dados experimentais.

Este fator K é definido como (D’ALESIO; PIRNER, 2000)

$$K = \frac{\sigma_{exp}}{\sigma_{teo}}, \quad (6.15)$$

em que σ_{exp} e σ_{teo} são as seções de choque com e sem correções de absorção, respectivamente. Este fator multiplica a seção de choque não corrigida da produção de nêutron dominante. Iremos considerá-lo como uma constante, já que ele possui uma fraca dependência em x_L .

Apesar dos esforços realizados em vários estudos de correções de absorção em processos semi-inclusivos, como por exemplo o estudo teórico, realizado por (D’ALESIO; PIRNER, 2000), a magnitude desses efeitos em processos exclusivos ainda permanece em aberto. (D’ALESIO; PIRNER, 2000) concluíram que os valores do fator K devam estar no intervalo $0.5 < K < 0.95$. A análise fenomenológica para processos exclusivos, obtida por (GONÇALVES; NAVARRA; SPIERING, 2016), mostra os valores de K no intervalo entre 0.1 e 0.2.

Antes de apresentar os nossos resultados na próxima seção, salientamos que as nossas previsões para os processos exclusivos associados com nêutron dominante dependem apenas da escolha do modelo para o fluxo de píons e da amplitude de espalhamento de dipolo, assim como na análise feita em (GONÇALVES; NAVARRA; SPIERING, 2016).

As principais incertezas nas predições estão relacionadas com escolha de R_q na Equação (6.1), já seu valor efetivo ainda é uma questão em aberto, e com a magnitude dos efeitos de absorção. Se espera que estes efeitos modifiquem, quase uniformemente, todo o espectro x_L de nêutron dominante.

6.2 RESULTADOS OBTIDOS

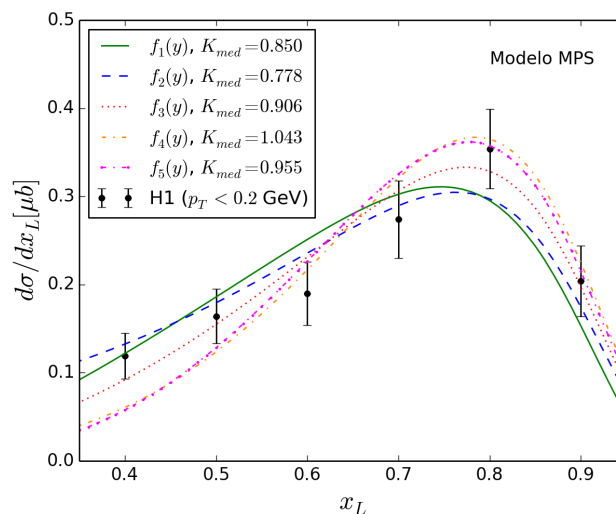
Começamos a nossa análise considerando a produção exclusiva do méson vetorial ρ associada a nêutron dominante, como analisado pela Colaboração H1 (ANDREEV *et al.*, 2016). Apresentamos as nossas predições, que foram obtidas utilizando-se o modelo MPS, levando em conta a incerteza experimental presente nos dados de H1 para a seção de choque total. Na nossa análise, bem como na análise feita em (GONÇALVES; NAVARRA; SPIERING, 2016), essa incerteza experimental se traduz em um intervalo de possíveis valores para o fator K .

Para restringir o valor do fator K associado às correções envolvendo absorção, seguiremos a mesma análise feita em (GONÇALVES; NAVARRA; SPIERING, 2016): para um dado modelo do fluxo de píons e seção de choque de dipolo, estimamos a seção de choque total. O valor de K será o valor necessário para tornar nossa previsão consistente com (ANDREEV *et al.*, 2016).

No que segue, vamos considerar a energia de centro de massa do sistema fóton virtual-próton $W = 60$ GeV, a virtualidade do fóton virtual $Q^2 = 0.04$ GeV² e $R_q = 2/3$. A região cinemática com a qual iremos trabalhar é $p_T < 0.2$ GeV, em que p_T é o momentum transverso do nêutron dominante.

Na Figura 6.2 apresentamos as nossas previsões para a seção de choque diferencial através da utilização do modelo MPS, considerando o modelo BG para as funções de sobreposição. As curvas apresentadas são referentes aos cinco diferentes modelos para o fluxo de píons. Os valores médios para o fator K também são apresentados. A partir da gravura, notamos que todas as curvas acompanham a tendência ditada pelos dados experimentais. Entretanto, os fluxos f_1 , f_2 e f_3 fornecem uma melhor descrição os dados, principalmente para valores pequenos de x_L . No que se refere aos valores médios do fator K , esses mesmos fluxos retornam valores dentro do intervalo obtido na análise teórica para processos semi inclusivos (D’ALESIO; PIRNER, 2000). Já os fluxos f_4 e f_5 apresentam valores médios fora deste intervalo. Assim, se assumirmos que a magnitude do fator K relacionado à correções envolvendo somente absorção para processos exclusivos seja igual ao previsto para processos semi-inclusivos, podemos inferir que o modelo MPS favorece os fluxos f_1 , f_2 e f_3 .

Figura 6.2 – Espectro de nêutron dominante na produção exclusiva do méson vetorial ρ^0 obtido considerando os cinco diferentes modelos para o fluxo de píons utilizando o modelo BG.



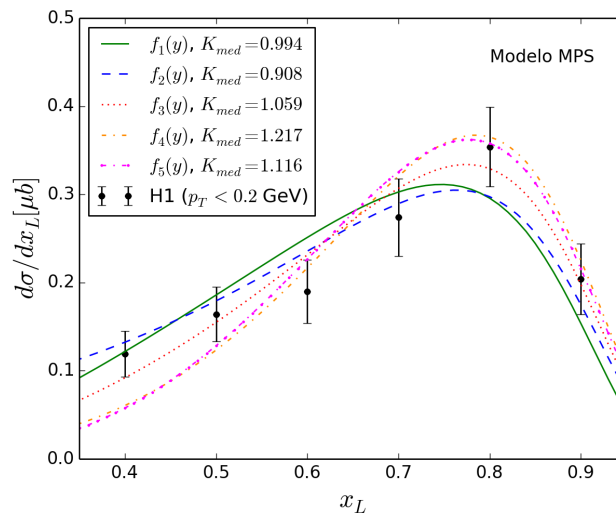
Fonte: O autor

Na Figura 6.3 os resultados obtidos com a utilização do modelo LCG para a função

de sobreposição são apresentados. Embora o modelo LCG também faça uma descrição satisfatória dos dados, os valores médios obtidos para o fator K estão fora do intervalo previsto em (D’ALESIO; PIRNER, 2000), resultando na nossa preferência pelo modelo BG.

As curvas referentes a cada um dos modelos para o fluxo de píons, obtidas considerando tanto o modelo BG quanto o modelo LCG, na região cinemática de $p_T < 0.2$ GeV, podem ser encontradas no Anexo A. Neste anexo, também apresentamos as curvas para os modelos de fluxo de píons obtidas considerando uma outra região cinemática: $p_T < 0.69 \cdot x_L$ GeV.

Figura 6.3 – Espectro de nêutron dominante na produção exclusiva do méson vetorial ρ^0 obtido considerando os cinco diferentes modelos para o fluxo de píons utilizando o modelo LCG.

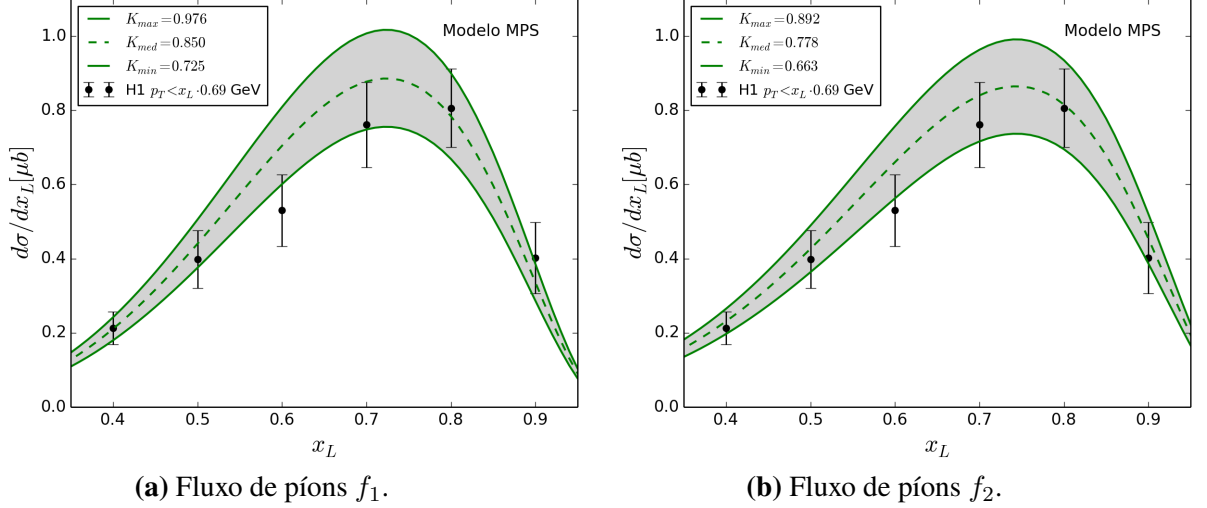


Fonte: O autor

Assumindo o mesmo intervalo de possíveis valores para o fator K obtido para os fluxos f_1 e f_2 na região cinemática de $p_T < 0.2$ GeV presentes no Anexo A, apresentamos na Figura 6.4 as nossas previsões para a região cinemática de $p_T < 0.69 \cdot x_L$ GeV, também presente em (ANDREEV *et al.*, 2016). É possível perceber que, utilizando os valores de K obtidos para a região cinemática de $p_T < 0.2$ GeV, conseguimos descrever satisfatoriamente a região cinemática de $p_T < 0.69 \cdot x_L$ GeV.

O fluxo f_3 não foi utilizado nesta análise devido ao mesmo apresentar um valor de K máximo acima de 1, conforme pode ser observado no apêndice. Neste trabalho, um valor de K acima de 1 representa um valor não físico, pois estamos considerando o fator K somente como uma correção a efeitos de absorção.

Figura 6.4 – Predição para o espectro de nêutron dominante na produção exclusiva do méson vetorial ρ^0 para a região cinemática $p_T < 0.69 \cdot x_L$ GeV utilizando os valores de K obtidos para a região cinemática $p_T < 0.2$ GeV.



Fonte: O autor

6.3 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Obtivemos um acordo razoável com os dados experimentais, com valores de K variando entre 0.605 até valores próximos de 1. Novamente ressaltamos que esses valores de K estão relacionados com a nossa escolha para R_q . Por exemplo, na análise realizada por (GONÇALVES; NAVARRA; SPIERING, 2016) no espaço de coordenadas, é discutida a hipótese de que se em vez de $R_q = 2/3$ fosse utilizado $R_q = 1/3$, os valores de K correspondentes deveriam ser multiplicados por 4, uma vez que as seções de choque exclusivas dependem quadraticamente da amplitude de espalhamento do dipolo. Já a nossa análise realizada no espaço misto restringe nossa escolha a valores de $R_q = 2/3$, ou bem próximos a ele, uma vez que a multiplicação por um fator 4 nos retornaria valores não físicos para o fator K .

Analisando os modelos para a função de sobreposição, podemos notar que ambos os modelos BG e LCG fazem uma boa descrição dos dados. Entretanto, vemos que o modelo LCG retorna valores mais altos para o fator K , inclusive para os valores médios. Assim, a nossa preferência é pelo modelo BG.

Embora todos os fluxos que analisamos façam uma descrição satisfatória, é possível destacar que o modelo MPS favoreça dois fluxos de píons, que fazem uma boa descrição de todos os valores de x_L , para as duas regiões cinemáticas. São os fluxos f_1 e f_2 .

Comparando os nossos resultados com os resultados obtidos por (GONÇALVES; NAVARRA; SPIERING, 2016), vemos que os nossos valores para o fator K são maiores por um

fator de, pelo menos, 3 (entre 3 e 4), para o mesmo valor de R_q . O modelo para a função de sobreposição que melhor descreveu os dados, foi o modelo BG, e as duas curvas que melhor descreveram os dados no nosso trabalho, foram as curvas geradas pelos fluxos f_1 e f_2 . Já para (GONÇALVES; NAVARRA; SPIERING, 2016), o modelo LCG descreveu melhor os dados e foram as curvas geradas pelos fluxos de píons f_2 e f_3 que fizeram a melhor descrição dos dados. Vale salientar, que a principal diferença entre as duas análises é a seguinte: elas foram realizadas utilizando modelos para a amplitude de espalhamento dipolo-alvo diferentes. No nosso caso, utilizamos o modelo MPS (um modelo no espaço misto), enquanto que (GONÇALVES; NAVARRA; SPIERING, 2016) utilizaram o modelo bCGC (KOWALSKI; MOTYKA; WATT, 2006; WATT; KOWALSKI, 2008) (um modelo no espaço de coordenadas).

Embora as duas análises retornem resultados bem diferentes, os nossos resultados estão coerentes com (D’ALESIO; PIRNER, 2000), se assumirmos que, *a priori*, a magnitude do fator de correção de absorção, para processos exclusivos, é igual ao previsto para processos semi-inclusivos. A utilização do modelo MPS restringe a nossa escolha para valores de $R_q = 2/3$, ou a valores muito próximos a $2/3$. O modelo MPS, de acordo com a nossa análise, favorece a suposição do modelo aditivo de quarks.

Com base no que foi discutido, vemos que a descrição dos processos semi-inclusivos e exclusivos envolvendo nêutron dominante ainda não possuem uma descrição teórica satisfatória. As incertezas associadas com esses processos estão no fator K , já que o fóton pode não interagir apenas com o pión, no valor exato para o fator R_q , que está relacionado com a validade do modelo aditivo de quarks para a seção de choque fóton-pión, na forma precisa do fluxo de píons, já que existem diversos modelos na literatura e por fim, em uma expressão precisa para a seção de choque do dipolo. Algumas dessas incertezas serão reduzidas com novos (e mais precisos) dados experimentais e com estudos teóricos sobre os efeitos absorptivos em processos exclusivos envolvendo nêutron dominante, algo que ainda não existe na literatura.

7 CONCLUSÕES

Nesta dissertação, tratamos alguns dos principais tópicos da evolução na QCD no regime de altas energias. A partir do estudo das propriedades do espalhamento profundamente inelástico (DIS) em um referencial no qual o fóton virtual emitido pelo elétron incidente possui energia suficiente para se separar em um par quark-antiquark (dipolo), pudemos entender como a evolução na direção de pequeno x (altas energias) ocorre. O DIS nos fornece informações acerca de efeitos não lineares que surgem em altas energias. Estes efeitos nos levam para a chamada física de saturação partônica. Devido à presença desses efeitos não lineares, surgem as chamadas equações de evolução não lineares para as amplitudes de espalhamento.

Em particular, para o espalhamento dipolo-hádron, as amplitudes de espalhamento podem ter sua evolução descrita pela equação de Balitsky-Kovchegov (BK), que é a mais simples equação de evolução para a amplitude de espalhamento dipolo-hádron. Calculamos as funções de onda do fóton virtual usando Teoria Quântica de Campos no Cone de Luz, e a partir destas, realizamos a dedução da equação BK no espaço de coordenadas. Por ser mais simples, é também a equação mais estudada e as propriedades de suas soluções são bem conhecidas. Entre as propriedades que estudamos, está o fato de a equação BK assumir soluções de ondas progressivas, que surgem como uma explicação para o escalamento geométrico. Vimos também que o escalamento geométrico, obtido primeiramente no espaço de momentum e sem dependência no parâmetro de impacto, pode ser estendido para o espaço misto, no qual temos uma correspondência entre o parâmetro de impacto e o momentum transferido.

A partir dessa propriedade, foi desenvolvido o modelo MPS, dado pela Equação (5.18), que é um modelo fenomenológico para a amplitude de espalhamento dipolo-alvo no espaço misto, ou seja, um espaço em que a amplitude de espalhamento dipolo-alvo depende do tamanho transversal do dipolo e do momentum transferido pelo alvo durante sua interação com o dipolo.

Realizamos um estudo analítico e numérico do modelo MPS, que descreveu originalmente, com sucesso, os dados de HERA para processos envolvendo a produção exclusiva de mésons vetoriais, e o aplicamos na descrição dos dados de HERA sobre a produção exclusiva do méson vetorial ρ associada a um nêutron dominante em colisões elétron-próton.

O processo acima citado, foi descrito com sucesso utilizando o modelo bCGC, que é um modelo fenomenológico no espaço de coordenadas. Neste trabalho, mostramos que também é possível descrever satisfatoriamente o mesmo processo com o modelo MPS.

Estimamos o espectro de nêutron dominante usando cinco diferentes modelos para o fluxo de píons existentes na literatura. Como pudemos observar, o espectro de nêutron dominante depende, essencialmente, do fluxo de píons e da seção de choque dipolo-píon. Na nossa análise, o modelo MPS favoreceu dois dos cinco modelos para o fluxo de píons testados. Foram os fluxos

de píons f_1 e f_2 , dados pelas Equações (6.4) e (6.5), respectivamente.

Os valores para o fator K obtidos em nossa análise utilizando o modelo MPS, estão entre 0.6 até valores próximos de 1. Estes valores de K são maiores por um fator de, pelo menos, 3 (entre 3 e 4), para o mesmo valor de R_q , que os na análise fenomenológica para processos exclusivos utilizando um modelo no espaço de coordenadas.

Embora as duas análises retornem resultados bem diferentes, os nossos resultados estão coerentes com uma análise teórica para processos semi-inclusivos, se assumirmos que, a priori, a magnitude do fator de correção de absorção, para processos exclusivos, é igual ao previsto para processos semi-inclusivos.

A utilização do modelo MPS restringe a nossa escolha para valores de $R_q = 2/3$, ou a valores muito próximos a $2/3$. O modelo MPS, de acordo com a nossa análise, favorece a suposição do modelo aditivo de quarks. Ainda, observamos os dados de HERA utilizando o modelo MPS podem ser descritos de maneira mais satisfatória pelo modelo das funções de sobreposição BG. O modelo LCG também realiza uma boa descrição dos dados, mas têm a tendência de elevar os valores do fator K .

É possível perceber que ainda restam muitas incertezas teóricas relacionadas com a tentativa de obter um ajuste definitivo para o espectro de nêutron dominante.

Considerando que o input principal dos nossos cálculos foi fixado pelos dados experimentais sobre a produção exclusiva de ρ , podemos estender nossa análise para outros estados finais exclusivos. De fato, estamos trabalhando em outros estados finais e em outros observáveis, como por exemplo, o momentum t' perdido pelo pión emergente. Além disso, também estamos interessados em generalizar o modelo MPS incluindo a constante de acoplamento variável.

REFERÊNCIAS

- ADLOFF, C. *et al.* A measurement of the proton structure function $F_2(x, Q^2)$ at low x and low Q^2 at HERA. **Nuclear Physics B**, v. 497, n. 1, 1997.
- _____. Elastic electroproduction of ρ mesons at HERA. **The European Physical Journal C**, v. 13, n. 3, p. 371–396, 2000.
- _____. Measurement of neutral and charged current cross sections in electron-proton collisions at high q^2 . **The European Physical Journal C**, v. 19, n. 2, p. 269–288, 2001.
- AID, S. *et al.* A measurement and QCD analysis of the proton structure function $F_2(x, Q^2)$ at HERA. **Nuclear Physics B**, v. 470, n. 1, p. 3 – 38, 1996.
- ALTARELLI, G.; PARISI, G. Asymptotic freedom in parton language. **Nuclear Physics B**, v. 126, n. 2, p. 298 – 318, 1977.
- AMARAL, J. T. S. **Amplitudes de Espalhamento na Cromodinâmica Quântica em Altas Energias no Formalismo de Dipolos**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Física, Porto Alegre, 2008.
- ANDREEV, V. *et al.* Exclusive ρ^0 meson photoproduction with a leading neutron at HERA. **The European Physical Journal C**, v. 76, n. 1, p. 1–21, 2016.
- ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. **Mathematical methods for physicists**. [S.l.]: Elsevier, 2005.
- BALITSKY, I. Operator expansion for high-energy scattering. **Nuclear Physics B**, v. 463, n. 1, p. 99 – 157, 1996.
- _____. Operator expansion for high-energy scattering. **Nuclear Physics B**, v. 463, n. 1, p. 99 – 157, 1996.
- BALITSKY, Y. Y.; LIPATOV, L. N. Pomeron singularity in quantum chromodynamics. **Soviet Journal of Nuclear Physics**, v. 28, n. 6, 1978.
- BARONE, V.; PREDAZZI, E. **High-Energy Particle Diffraction**. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2002. (Theoretical and Mathematical Physics).
- BERINGER, J. *et al.* Review of particle physics particle data group. **Physical Review D**, v. 86, n. 1, p. 010001, 2012.
- BISHARI, M. Pion exchange and inclusive spectra. **Physics Letters B**, v. 38, n. 7, p. 510 – 514, 1972.
- BJORKEN, J. D. Asymptotic sum rules at infinite momentum. **Physical Review**, v. 179, p. 1547–1553, Mar 1969.
- _____. Asymptotic sum rules at infinite momentum. **Physical Review**, v. 179, p. 1547–1553, Mar 1969.
- BJORKEN, J. D.; PASCHOS, E. A. Inelastic electron-proton and γ -proton scattering and the structure of the nucleon. **Physical Review**, v. 185, p. 1975–1982, Sep 1969.

- BREITWEG, J. *et al.* Measurement of the proton structure function F_2 at very low Q^2 at HERA. **Physics Letters B**, v. 487, n. 1–2, p. 53 – 73, 2000.
- BRODSKY, S. J.; PAULI, H.-C.; PINSKY, S. S. Quantum chromodynamics and other field theories on the light cone. **Physics Reports**, v. 301, n. 4–6, p. 299 – 486, 1998.
- CARVALHO, F. *et al.* Gluon saturation and Feynman scaling in leading neutron production. **Physics Letters B**, v. 752, p. 76–83, Mar 2016.
- CHEKANOV, S. *et al.* Measurement of the neutral current cross section and f_2 structure function for deep inelastic e^+p scattering at HERA. **The European Physical Journal C**, v. 21, n. 3, p. 443–471, 2001.
- _____. ZEUS next-to-leading-order QCD analysis of data on deep inelastic scattering. **Physical Review D**, v. 67, n. 1, p. 012007, jan 2003.
- _____. Exclusive electroproduction of J/Ψ mesons at HERA. **Nuclear Physics B**, v. 695, n. 1–2, p. 3 – 37, 2004.
- _____. Exclusive electroproduction of ϕ mesons at HERA. **Nuclear Physics B**, v. 718, n. 1–2, p. 3 – 31, 2005.
- COLLINS, J. C.; SOPER, D. E.; STERMAN, G. F. Factorization of Hard Processes in QCD. **Advanced Series on Directions in High Energy Physics**, v. 5, 1989.
- D’ALESIO, U.; PIRNER, H. J. Target fragmentation in pp , ep and γp collisions at high energies. **The European Physical Journal A**, v. 7, p. 109–119, jan. 2000.
- DERRICK, M. *et al.* Measurement of the F_2 structure function in deep inelastic e^+p scattering using 1994 data from the ZEUS detector at HERA. **Zeitschrift für Physik C**, v. 72, n. 3, p. 399, 1996.
- DIRAC, P. A. M. The quantum theory of the electron. **Proceedings of the Royal Society of London Series A**, v. 117, p. 610–624, feb 1928.
- DOKSHITZER, Y. L. Calculation of the Structure Functions for Deep Inelastic Scattering and e^+e^- Annihilation by Perturbation Theory in Quantum Chromodynamics. **Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics**, v. 46, p. 641–653, 1977.
- DOSCH, H. G. *et al.* Vector meson leptoproduction and nonperturbative gluon fluctuations in QCD. **Physical Review D**, v. 55, p. 2602–2615, Mar 1997.
- FEYNMAN, R. P. Photon–hadron interactions. WA Benjamin, Inc., Reading, MA, 1972.
- FISHER, R. A. The wave of advance of advantageous genes. **Annals of eugenics**, v. 7, n. 4, p. 355–369, 1937.
- FRITZSCH, H.; GELL-MANN, M.; LEUTWYLER, H. Advantages of the color octet gluon picture. **Physics Letters B**, v. 47, n. 4, p. 365 – 368, 1973.
- FROISSART, M. Asymptotic behavior and subtractions in the mandelstam representation. **Physical Review**, v. 123, p. 1053–1057, Aug 1961.

GONÇALVES, V. P.; NAVARRA, F. S.; SPIERING, D. Exclusive processes with a leading neutron in ep collisions. **Physical Review D**, v. 93, p. 054025, Mar 2016.

GRIBOV, L.; LEVIN, E.; RYSKIN, M. Semihard processes in qcd. **Physics Reports**, v. 100, n. 1, p. 1 – 150, 1983.

GRIBOV, V. N.; LIPATOV, L. N. Deep inelastic $e p$ scattering in perturbation theory. **Soviet Journal of Nuclear Physics**, v. 15, p. 438–450, 1972.

GROSS, D. J.; WILCZEK, F. Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories. **Physical Review Letters**, v. 30, p. 1343–1346, Jun 1973.

_____. Asymptotically free gauge theories. ii. **Physical Review D**, v. 9, p. 980–993, Feb 1974.

HALZEN, F.; MARTIN, A. D. **Quark & Leptons: An Introductory Course In Modern Particle Physics**. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., 1984.

HOLTMANN, H. *et al.* How to measure the pion structure function at HERA. **Physics Letters B**, v. 338, n. 2, p. 363 – 368, 1994.

IANCU, E.; ITAKURA, K.; MCLERRAN, L. Geometric scaling above the saturation scale. **Nuclear Physics A**, v. 708, n. 3–4, p. 327 – 352, 2002.

IANCU, E.; ITAKURA, K.; MUNIER, S. Saturation and BFKL dynamics in the HERA data at small- x . **Physics Letters B**, v. 590, n. 3-4, p. 199–208, 2004.

IANCU, E.; LEONIDOV, A.; MCLERRAN, L. Nonlinear gluon evolution in the color glass condensate: I. **Nuclear Physics A**, v. 692, n. 3–4, p. 583 – 645, 2001.

JALILIAN-MARIAN, J. *et al.* The BFKL equation from the wilson renormalization group. **Nuclear Physics B**, v. 504, n. 1–2, p. 415 – 431, 1997.

_____. The BFKL equation from the Wilson renormalization group. **Nuclear Physics B**, v. 504, p. 415–431, 1997.

_____. Wilson renormalization group for low x physics: Towards the high density regime. **Physical Review D**, v. 59, p. 014014, Nov 1998.

JALILIAN-MARIAN, J.; KOVNER, A.; WEIGERT, H. Wilson renormalization group for low x physics: Gluon evolution at finite parton density. **Physical Review D**, v. 59, p. 014015, Nov 1998.

KAIDALOV, A. *et al.* Leading neutron spectra. **The European Physical Journal C**, v. 47, n. 2, p. 385–393, 2006.

KHOZE, V.; MARTIN, A.; RYSKIN, M. Information from leading neutrons at hera. **The European Physical Journal C**, v. 48, n. 3, p. 797–804, 2006.

KOGUT, J. B.; SOPER, D. E. Quantum electrodynamics in the infinite-momentum frame. **Physical Review D**, v. 1, p. 2901–2914, May 1970.

KOLMOGOROV, A.; PETROVSKII, I.; PISCUNOV, N. A study of the diffusion equation with increase in the amount of substance, and its application to a biological problem. **Moscow University Mathematics Bulletin, Serie A**, v. 1, p. 1–25, 1937.

- KOPELIOVICH, B. *et al.* Deep-inelastic electroproduction of neutrons in the proton fragmentation region. **Zeitschrift für Physik C**, v. 73, n. 1, p. 125–131, 1997.
- KOPELIOVICH, B. Z. *et al.* Pion structure function at small x from deep-inelastic scattering data. **Physical Review D**, v. 85, p. 114025, Jun 2012.
- KOVCHegov, Y. V. Small- x F_2 structure function of a nucleus including multiple pomeron exchanges. **Physical Review D**, v. 60, p. 034008, Jun 1999.
- _____. Unitarization of the BFKL Pomeron on a nucleus. **Physical Review D**, v. 61, p. 074018, Mar 2000.
- _____. Introduction to the physics of saturation. **Nuclear Physics A**, v. 854, p. 3–9, mar 2011.
- KOVNER, A.; MILHANO, J. G.; WEIGERT, H. Relating different approaches to nonlinear QCD evolution at finite gluon density. **Physical Review D**, v. 62, p. 114005, Oct 2000.
- KOWALSKI, H.; MOTYKA, L.; WATT, G. Exclusive diffractive processes at HERA within the dipole picture. **Physical Review D**, v. 74, p. 074016, Oct 2006.
- KULZINGER, G.; DOSCH, H. G.; PIRNER, H. J. Diffractive photoproduction and leptonproduction of vector mesons ρ , ρ' and ρ'' . **The European Physical Journal C**, v. 7, p. 73–86, 1999.
- KUMANO, S. π NN form factor for explaining sea-quark distributions in the nucleon. **Physical Review D**, v. 43, p. 59–63, Jan 1991.
- KURAEV, E. A.; LIPATOV, L. N.; FADIN, V. S. The Pomeron singularity in Nonabelian Gauge Theories. **Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics**, v. 45, p. 199–204, 1977.
- LEVIN, E. M.; FRANKFURT, L. L. The Quark hypothesis and relations between cross-sections at high-energies. **Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters**, v. 2, p. 65–70, 1965.
- LIPATOV, L. N. Reggeization of the Vector Meson and the Vacuum Singularity in Nonabelian Gauge Theories. **Soviet Journal of Nuclear Physics**, v. 23, p. 338–345, 1976.
- _____. The Bare Pomeron in Quantum Chromodynamics. **Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics**, v. 63, p. 904–912, 1986.
- MACHADO, M. V. T. Phenomenology of hard diffraction at high energies. In: **New Trends in High-Energy Physics and QCD Natal, Rio Grande do Norte, Brazil, October 21-November 6, 2014**. [S.l.: s.n.], 2016.
- MARIOTTO, C. B.; MACHADO, M. V. T. Inclusive and exclusive dilepton photoproduction at high energies. **Physical Review D**, v. 87, p. 054028, Mar 2013.
- MARQUET, C.; PESCHANSKI, R.; SOYEZ, G. Traveling waves and geometric scaling at nonzero momentum transfer. **Nuclear Physics A**, v. 756, p. 399–418, jul. 2005.
- MARQUET, C.; SOYEZ, G. The Balitsky Kovchegov equation in full momentum space. **Nuclear Physics A**, v. 760, p. 208–222, out. 2005.

MARQUET, C.; SOYEZ, G.; PESCHANSKI, R. Exclusive vector meson production at HERA from QCD with saturation. **Physical Review D**, v. 76, n. 3, p. 034011, ago. 2007.

MUELLER, A. Soft gluons in the infinite-momentum wave function and the BFKL pomeron. **Nuclear Physics B**, v. 415, n. 2, p. 373 – 385, 1994.

_____. Unitarity and the BFKL pomeron. **Nuclear Physics B**, v. 437, n. 1, p. 107 – 126, 1995.

_____. General issues in small- x and diffractive physics. **The European Physical Journal A**, v. 1, n. 1, p. 19–26, 1998.

MUELLER, A.; PATEL, B. Single and double BFKL pomeron exchange and a dipole picture of high energy hard processes. **Nuclear Physics B**, v. 425, n. 3, p. 471 – 488, 1994.

MUNIER, S.; PESCHANSKI, R. Geometric Scaling as Traveling Waves. **Physical Review Letters**, 2003.

_____. Traveling wave fronts and the transition to saturation. **Physical Review D**, v. 69, p. 034008, Feb 2004.

_____. Universality and tree structure of high-energy QCD. **Physical Review D**, v. 70, p. 077503, Oct 2004.

MÄNTYSAARI, H. **Balitsky-Kovchegov equation**. Dissertação (Mestrado) — University of Jyväskylä, Department of Physics, Jyväskylä, 2011.

NAVELET, H.; PESCHANSKI, R. Conformal invariance and the exact solution of {BFKL} equations. **Nuclear Physics B**, v. 507, n. 1–2, p. 353 – 366, 1997.

NEMCHIK, J. *et al.* Color dipole phenomenology of diffractive electroproduction of light vector mesons at HERA. **Zeitschrift für Physik C**, v. 75, n. 1, p. 71–87, 1997.

NEMCHIK, J.; NIKOLAEV, N.; ZAKHAROV, B. Scanning the BFKL pomeron in elastic production of vector mesons at HERA. **Physics Letters B**, v. 341, n. 2, p. 228–237, 1994.

NIKOLAEV, N.; SPETH, J.; ZOLLER, V. The color dipole BFKL-Regge expansion: from DIS on protons to pions to rise of hadronic cross sections. **Physics Letters B**, v. 473, n. 1–2, p. 157 – 166, 2000.

NIKOLAEV, N. N. *et al.* Do the e866 drell-yan data change our picture of the chiral structure of the nucleon? **Physical Review D**, v. 60, p. 014004, May 1999.

NIKOLAEV, N. N.; SPETH, J.; ZAKHAROV, B. G. Absorptive corrections to the one pion exchange and measurability of the small x pion structure function at HERA. 1997.

PATRIGNANI, C. *et al.* Review of Particle Physics. **Chin. Phys.**, C40, n. 10, p. 100001, 2016.

PESKIN, M.; SCHROEDER, D. **An introduction to quantum field theory**. [S.l.]: Addison-Wesley Publishing Company, 1995.

POLITZER, H. D. Reliable perturbative results for strong interactions? **Physical Review Letters**, v. 30, p. 1346–1349, Jun 1973.

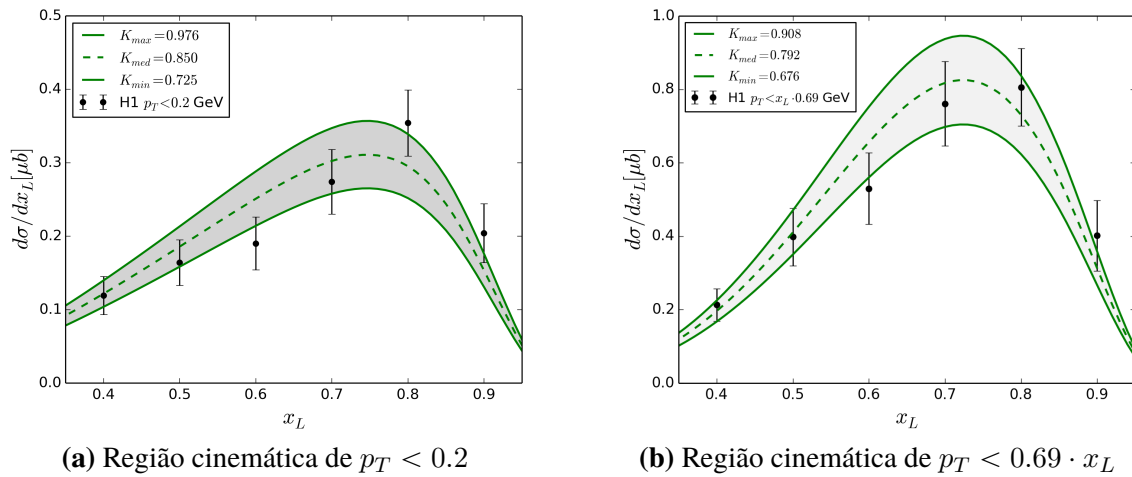
- PROKUDIN, A. Spin effects, qcd, and jefferson laboratory with 12 gev electrons. **Physics of Particles and Nuclei**, v. 44, n. 6, p. 947–953, 2013.
- SOYEZ, G. QCD at high energy: Saturation and fluctuation effects. **Acta Phys. Polon.**, B37, p. 3477–3510, 2006.
- _____. Saturation QCD predictions with heavy quarks at HERA. **Physics Letters B**, v. 655, n. 1–2, p. 32 – 38, 2007.
- STAŚTO, A. M.; GOLEC-BIERNAT, K.; KWIECIŃSKI, J. Geometric scaling for the total γ^*p cross section in the low x region. **Physical Review Letters**, v. 86, p. 596–599, Jan 2001.
- STERMAN, G.; MAYER, M. E. **An introduction to quantum field theory**. [S.l.]: Cambridge University Press Cambridge, 1994.
- THOMAS, A.; BOROS, C. Pion exchange and the H1 forward spectrometer data. **The European Physical Journal C**, v. 9, n. 2, p. 267–269, 1999.
- THOMSON, M. **Modern Particle Physics**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2013. (Modern Particle Physics).
- WATT, G.; KOWALSKI, H. Impact parameter dependent color glass condensate dipole model. **Physical Review D**, v. 78, p. 014016, Jul 2008.
- WEINBERG, S. Non-abelian gauge theories of the strong interactions. **Physical Review Letters**, v. 31, p. 494–497, Aug 1973.

Anexos

ANEXO A – GRÁFICOS

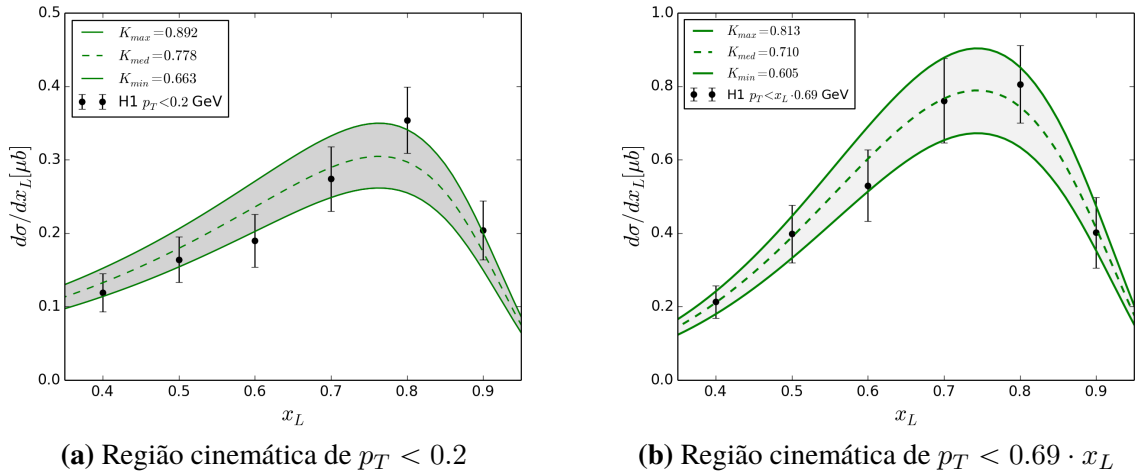
Apresentamos, nas Figuras A.1 até A.10 as nossas previsões para os espectros de nêutron dominante associados com a produção exclusiva do méson vetorial ρ , considerando diferentes modelos para o fluxo de píons. As Figuras à esquerda, correspondem a um momentum transverso do nêutron dominante de $p_T < 0.2$ GeV, enquanto que as Figuras à direita, correspondem a momentum transverso do nêutron dominante de $p_T < x_L \cdot 0.69$ GeV. Os valores de K correspondentes também são apresentados. As bandas estão relacionadas com a incerteza na escolha na escolha do fator K . O limite superior de cada banda corresponde ao valor de K_{max} , ou seja, a razão entre a seção de choque experimental acrescida da incerteza e a seção de choque teórica. O limite inferior de cada banda corresponde ao valor de K_{min} , ou seja, a razão entre a seção de choque experimental diminuída da incerteza e a seção de choque teórica. A linha pontilhada central corresponde ao valor de K_{med} , ou seja, a razão entre a seção de choque experimental e a seção de choque teórica.

Figura A.1 – Espectro de nêutron dominante para a produção exclusiva do méson vetorial ρ^0 obtido pelo fluxo f_1 considerando o modelo BG. Todos os valores possíveis para o fator K são apresentados.



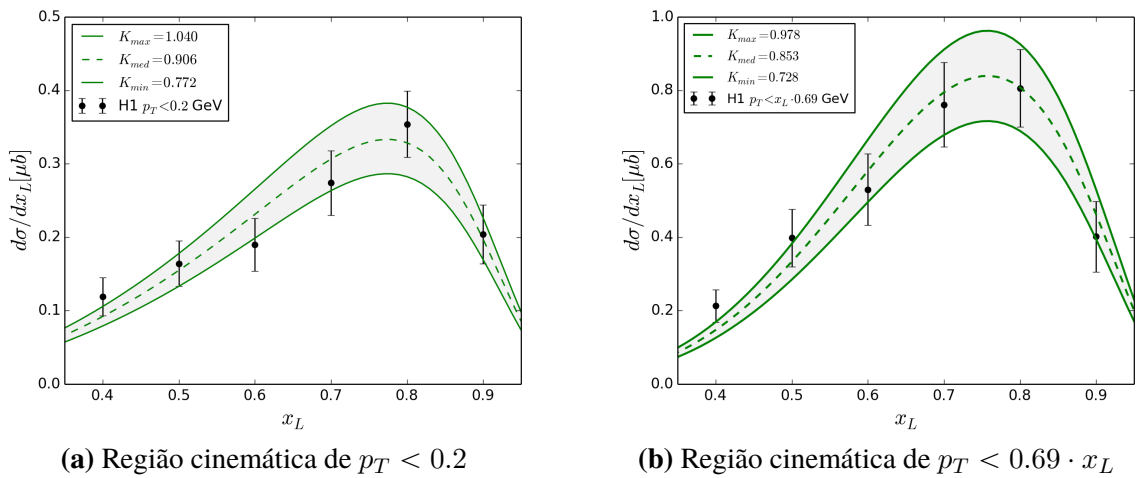
Fonte: O autor

Figura A.2 – Espectro de nêutron dominante na produção exclusiva do méson vetorial ρ^0 obtido pelo fluxo f_2 considerando o modelo BG. Todos os valores possíveis para o fator K são apresentados.



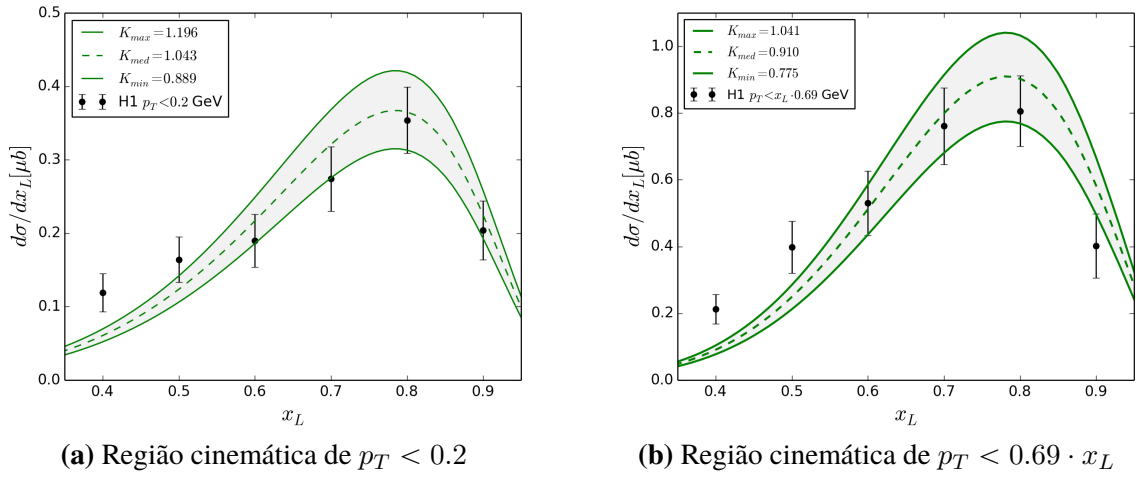
Fonte: O autor

Figura A.3 – Espectro de nêutron dominante na produção exclusiva do méson vetorial ρ^0 obtido pelo fluxo f_3 considerando modelo BG. Todos os valores possíveis para o fator K são apresentados.



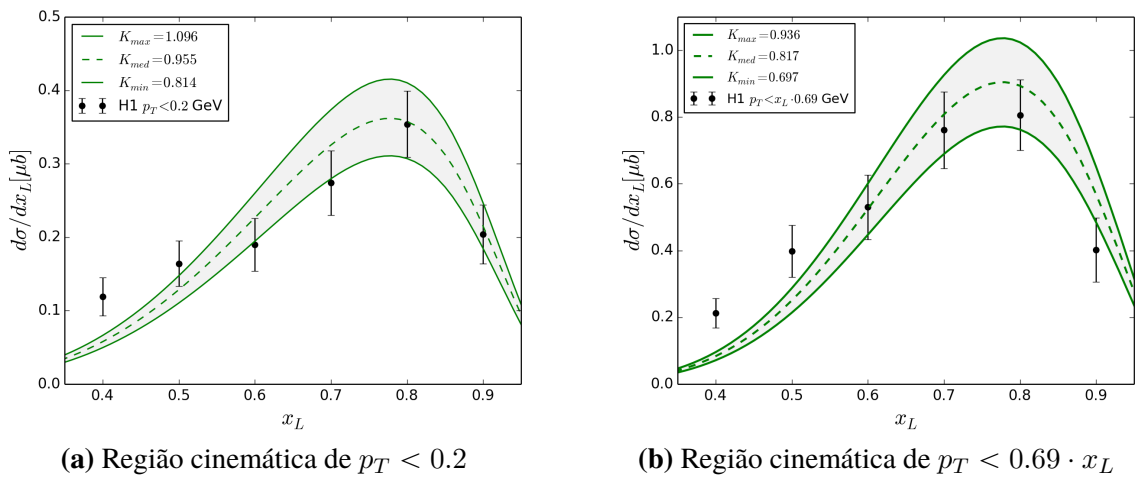
Fonte: O autor

Figura A.4 – Espectro de nêutron dominante na produção exclusiva do méson vetorial ρ^0 obtido pelo fluxo f_4 considerando o modelo BG. Todos os valores possíveis para o fator K são apresentados.



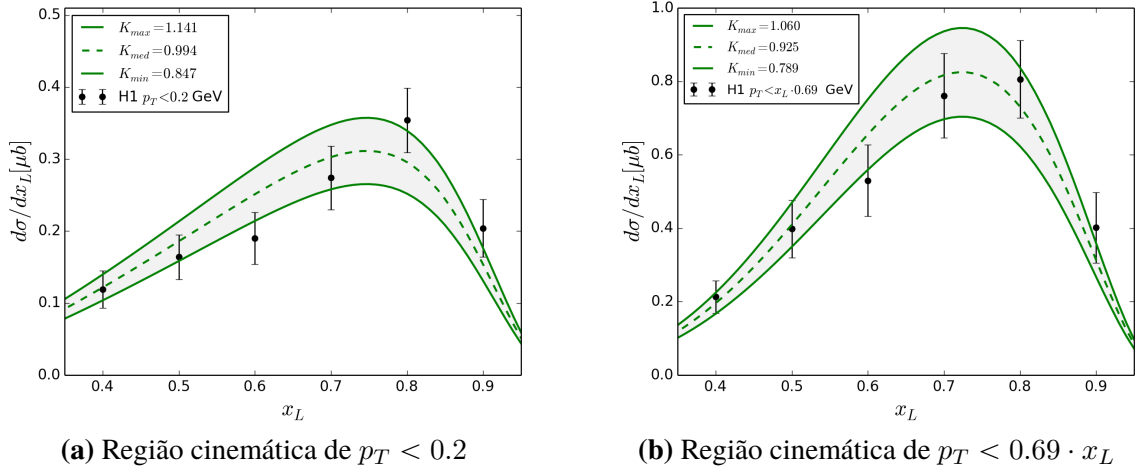
Fonte: O autor

Figura A.5 – Espectro de nêutron dominante na produção exclusiva do méson vetorial ρ^0 obtido pelo fluxo f_5 considerando o modelo BG. Todos os valores possíveis para o fator K são apresentados.



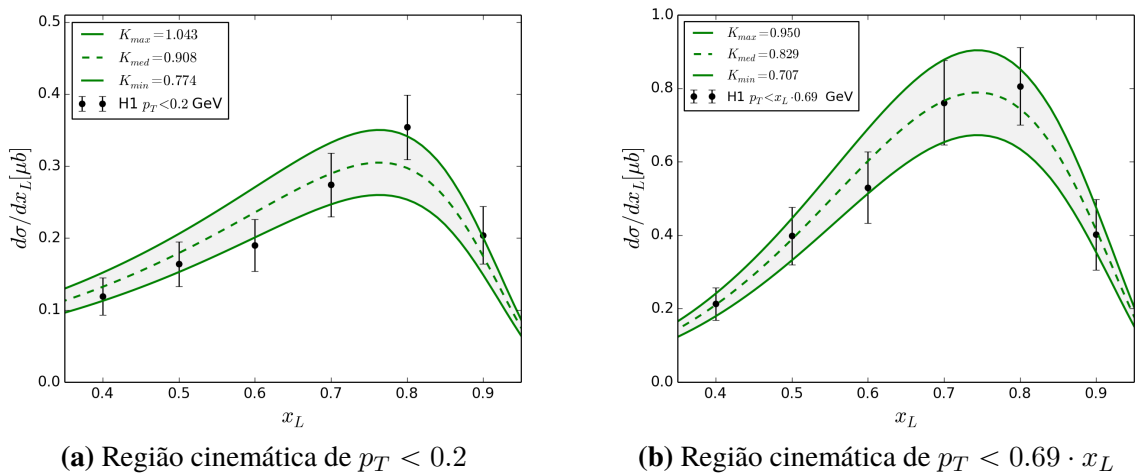
Fonte: O autor

Figura A.6 – Espectro de nêutron dominante na produção exclusiva do méson vetorial ρ^0 obtido pelo fluxo f_1 considerando o modelo LCG. Todos os valores possíveis para o fator K são apresentados.



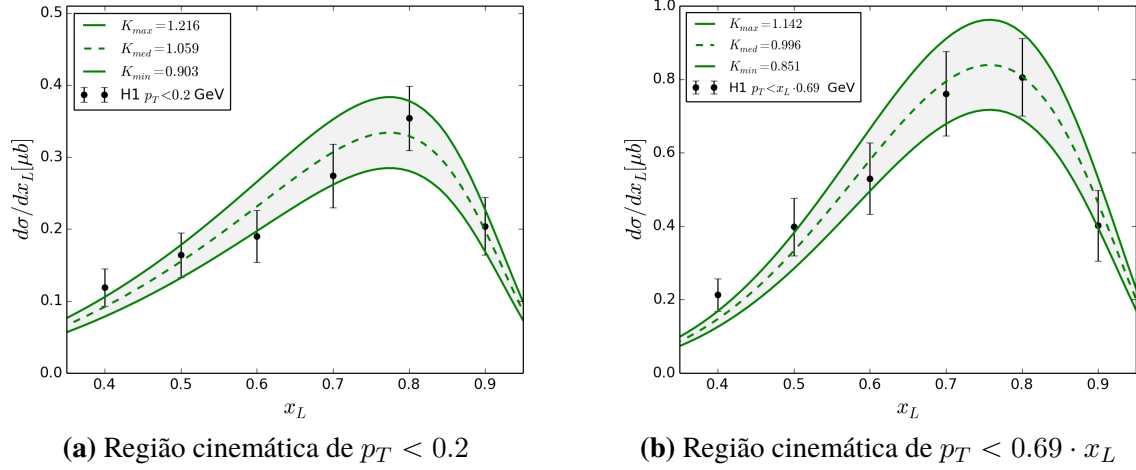
Fonte: O autor

Figura A.7 – Espectro de nêutron dominante na produção exclusiva do méson vetorial ρ^0 obtido pelo fluxo f_2 considerando o modelo LCG. Todos os valores possíveis para o fator K são apresentados.



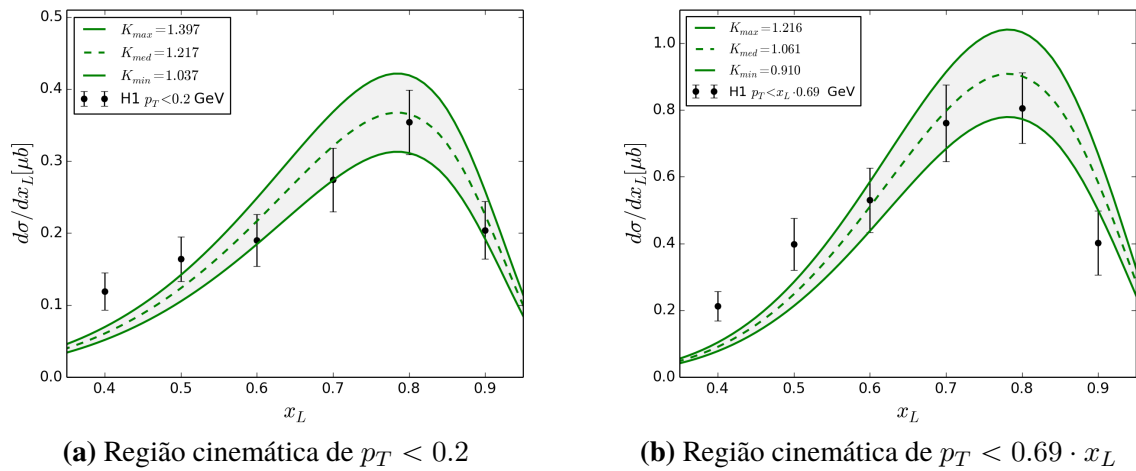
Fonte: O autor

Figura A.8 – Espectro de nêutron dominante na produção exclusiva do méson vetorial ρ^0 obtido pelo fluxo f_3 considerando o modelo LCG. Todos os valores possíveis para o fator K são apresentados.



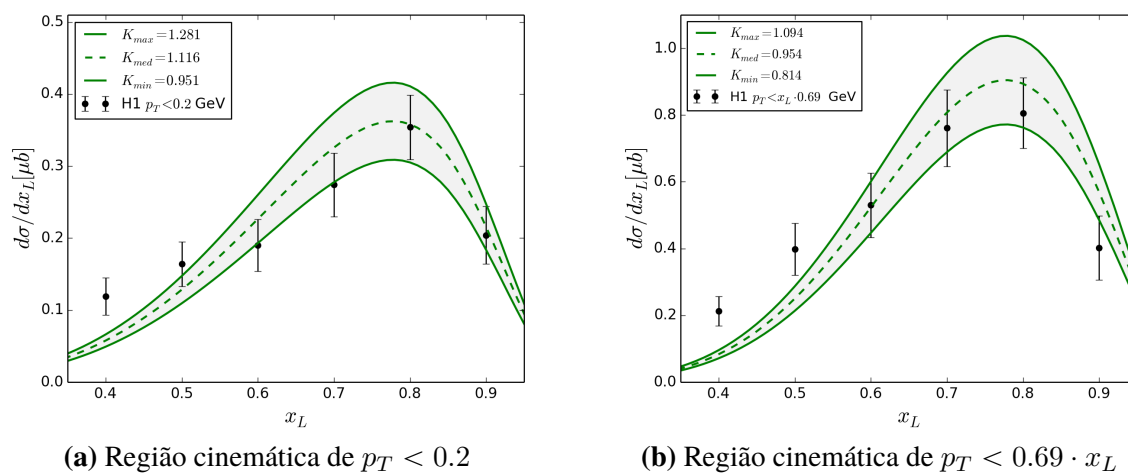
Fonte: O autor

Figura A.9 – Espectro de nêutron dominante na produção exclusiva do méson vetorial ρ^0 obtido pelo fluxo f_4 considerando o modelo LCG. Todos os valores possíveis para o fator K são apresentados.



Fonte: O autor

Figura A.10 – Espectro de nêutron dominante na produção exclusiva do méson vetorial ρ^0 obtido pelo fluxo f_5 considerando o modelo LCG. Todos os valores possíveis para o fator K são apresentados.



Fonte: O autor