

## Um Novo Critério de Adaptação de Malhas

Tales Luiz Popiolek e Maria Angela Vaz dos Santos

Fundação Universidade Federal do Rio Grande - Pós-Graduação em Engenharia Oceânica - Caixa Postal 474  
96201-900 Rio Grande, RS - [dmttales@super.furg.br](mailto:dmttales@super.furg.br) e [angela@dmc.furg.br](mailto:angela@dmc.furg.br)

Recebido: 28/06/00 - revisão: 10/10/00 - aceito: 24/04/01

### RESUMO

*Este trabalho apresenta um novo critério de adaptação de malhas, fundamentado na teoria estatística de distribuições normais, aplicado como uma ferramenta de análise da qualidade de soluções numéricas, obtidas através do método dos elementos finitos. O novo critério de adaptação tem características decisivas e automáticas na análise dos indicadores de erro, permitindo, assim, identificar minuciosamente as sub-regiões da malha que necessitam ser adaptadas, a fim de obter-se soluções de melhor qualidade. Para discretizar o domínio do problema, é empregada uma malha não estruturada, com elementos triangulares de três nós uniformemente distribuídos. Na adaptação é utilizado o processo h-refinamento. Após cada nível de refinamento, a malha é suavizada pelo processo de realocação nodal. Os procedimentos implementados foram incorporados a um programa de elementos finitos, com o propósito de simular problemas de escoamentos em corpos d'água rasos. Desta forma, é construída uma estratégia de adaptação automática de malhas, integrada pelo programa de elementos finitos, pelo novo critério de adaptação, pelo h-refinamento e pela realocação nodal, a qual é executada simultaneamente e interativamente com o cálculo da solução numérica. Isto propiciará determinar com maior precisão os principais fenômenos da dinâmica de fluidos incompressíveis. Objetivando avaliar, com ênfase, o desempenho do novo critério de adaptação de malhas em identificar regiões que devem ser refinadas, aplicações de escoamentos em corpos d'água rasos são simuladas.*

**Palavras-chave:** hidráulica computacional; métodos numéricos; elementos finitos; malhas.

### INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, vários trabalhos de pesquisa foram dedicados ao desenvolvimento de técnicas de adaptação automática de malhas, em grande parte objetivando melhorar a qualidade de soluções numéricas obtidas através do Método dos Elementos Finitos (MEF).

A eficiência do MEF está fortemente vinculada à discretização do domínio computacional do problema. Para obter qualidade na solução, pode-se adotar uma malha fina, ou utilizar uma malha inicial grosseira e adaptar somente as sub-regiões onde realmente se faz necessário. Em consequência, minimiza-se o custo computacional.

Dentre os métodos de adaptação, destacam-se o método "h", que se caracteriza pelo refinamento e desrefinamento de malhas; o método "p", o qual fundamenta-se na melhoria das funções de interpolação; o método "r", o qual utiliza-se da realocação dos nós; e o método do remalhamento ou redefinição de malhas, que se baseia na reconstrução total ou parcial da malha.

Para adaptar adequadamente uma malha, é necessário conhecer as características físicas do

problema simulado que, *a priori*, em geral são desconhecidas. Portanto, evidencia-se que só é possível proporcionar uma adequada adaptação, quando realizada simultaneamente e interativamente com o cálculo da solução numérica. Assim, durante o processamento da solução, estima-se a sua qualidade através de indicadores de erro. Estes levam em consideração as principais variáveis de estado das equações que governam a dinâmica do sistema. Subsídios importantes sobre indicadores de erro podem ser encontrados em Zienkiewicz e Zhu (1987), Argyris et al. (1990) e Fuenmayor e Oliver (1996).

Por sua vez, os indicadores de erro devem ser analisados por um critério de adaptação de malhas, a fim de identificar as sub-regiões da malha que necessitam ser submetidas à adaptação. Na literatura, vários critérios de adaptação têm sido apresentados, tais como os de Oden et al. (1986), Devloo et al. (1987) e Argyris et al. (1990).

Entretanto, visando analisar os indicadores de erro com uma ferramenta mais sólida, é proposto um novo critério de adaptação de malhas. O novo critério tem características decisivas e auto-

máticas nos processos adaptativos, as quais são apresentadas no decorrer deste trabalho.

A malha inicial, com elementos triangulares uniformemente distribuídos, gerada conforme Alquati e Groehs (1994), é adaptada através da utilização do processo h-refinamento. A realocação nodal é usada com o propósito de suavizar as possíveis distorções causadas pelos refinamentos.

Visando analisar a eficiência dos procedimentos desenvolvidos para implementar o novo critério de adaptação e a estratégia de adaptação automática de malhas, estes foram incorporados a um programa de elementos finitos, o qual simula escoamentos em corpos d'água rasos. Desta forma, aplicações envolvendo a dinâmica de fluidos incompressíveis são realizadas e suas soluções devidamente analisadas.

## NOVO CRITÉRIO DE ADAPTAÇÃO DE MALHAS

Para que o processo de adaptação de malhas tenha um eficiente desempenho quanto à discretização do domínio computacional, bem como uma equidistribuição uniforme do erro, é de fundamental importância que os valores do indicador de erro sejam analisados por um adequado critério de adaptação de malhas. Este critério deve ser capaz de identificar minuciosamente os elementos da malha que necessitam ser ajustados (submetidos a um processo de adaptação de malhas), quando estes não proporcionam a obtenção precisa das características físicas do problema simulado.

O novo critério de adaptação de malhas, proposto neste trabalho, tem apresentado bom desempenho nas aplicações relacionadas com o estudo do escoamento em corpos d'água rasos, sempre proporcionando uma adequada distribuição de elementos naquelas regiões do domínio que necessitam de uma malha mais refinada.

Uma vez calculados os indicadores de erro, para todos os elementos da malha, este conjunto de dados é submetido a um tratamento estatístico, a fim de identificar, de uma forma quantitativa e qualitativa, quais são os elementos da malha que se encontram fora dos limites considerados padrão, isto é, elementos de má qualidade. Posteriormente, com o propósito de melhorar a qualidade destes elementos, os mesmos são adequadamente modificados através de uma estratégia de adaptação automática de malhas.

Na literatura, vários critérios de adaptação de malhas têm sido apresentados, tais como os de Oden et al. (1986), Argyris et al. (1990) e Azevedo et al. (1994). Para a maioria dos critérios, é calculado o valor máximo dos indicadores de erro,  $\theta_{\text{máx}}$ . Em seguida, todos os elementos da malha que possuem um indicador que não satisfaz à precisão desejada, ou seja  $\theta_i > \delta\theta_{\text{máx}}$ , são submetidos a um processo de adaptação. A expressão lógica acima é denominada de critério de adaptação, onde  $\theta_i$  é o indicador de erro do  $i$ -ésimo elemento da malha, e o coeficiente  $\delta$  é arbitrário e quantifica a necessidade de efetuar ou não as adaptações.

O novo critério de adaptação de malhas proposto, está fundamentado numa ferramenta estatística denominada de distribuição normal, a qual, neste caso particular, é utilizada para quantificar a qualidade dos indicadores de erro. Então, neste sentido, a malha é analisada em função dos indicadores de erro, a fim de quantificar a qualidade individual de cada elemento.

Este critério pode ser utilizado para qualquer indicador de erro e também para qualquer método de adaptação de malhas, pois o mesmo não apresenta nenhuma restrição quanto à sua aplicação.

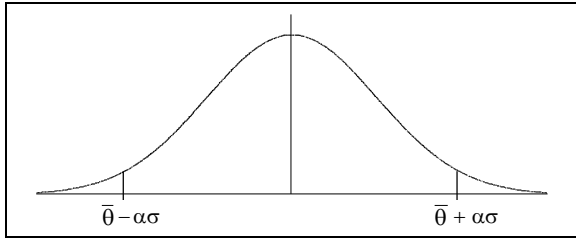
Na implementação do novo critério de adaptação, primeiramente é calculado o desvio padrão dos indicadores de erro, através da expressão:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{nel} (\theta_i - \bar{\theta})^2}{nel}} \quad (1)$$

onde  $nel$  representa o número de elementos da malha,  $\theta_i$  caracteriza o indicador de erro do  $i$ -ésimo elemento e  $\bar{\theta}$  é a média aritmética dos indicadores de erro da malha.

Em seguida, levando-se em consideração as propriedades de uma distribuição normal, representada através da Figura 1, pode-se identificar e separar os elementos de uma malha em três grupos distintos, em função dos indicadores de erro.

O primeiro grupo é formado pelos elementos que se encontram à esquerda de  $\bar{\theta} - \alpha\sigma$ , os quais são considerados como elementos de alta qualidade. O segundo grupo é dos elementos considerados de boa qualidade que estão representados na parte central da curva normal, ou seja, no intervalo definido por  $[\bar{\theta} - \alpha\sigma, \bar{\theta} + \alpha\sigma]$ . Por sua vez, o terceiro grupo, que neste trabalho tem trata-



**Figura 1. Distribuição normal.**

mento especial, é formado pelos elementos que se encontram à direita de  $\bar{\theta} + \alpha\sigma$ , os quais são considerados elementos de má qualidade. Portanto, estes elementos possuem características fora do padrão de qualidade, ou seja, são elementos com indicador de erro  $\theta_i > (\bar{\theta} + \alpha\sigma)$  e conseqüentemente devem ser submetidos a um processo de adaptação de malha. Desta forma, a adaptação tem o propósito de deslocar estes elementos para o interior do intervalo limitado por  $[\bar{\theta} - \alpha\sigma, \bar{\theta} + \alpha\sigma]$ , que passam a ser considerados, a princípio, elementos de boa qualidade.

O coeficiente  $\alpha$ , que aparece multiplicando o desvio padrão ( $\sigma$ ), controla qualitativa e quantitativamente as adaptações da malha. Para o caso específico do processo de refinamento, são obtidos bons resultados, quando atribuídos para  $\alpha$  valores no intervalo de  $0.7 \leq \alpha \leq 1.5$ . No entanto, melhores resultados têm sido obtidos para valores do coeficiente  $\alpha$  próximos da unidade, quando a distribuição é normal ou próxima da normal.

A aplicação do novo critério de adaptação de malha não preconiza que a distribuição dos indicadores de erro deva ser normal. Pois, se a distribuição não for normal, isto significa simplesmente que o percentual de elementos à direita de  $\bar{\theta} + \alpha\sigma$  é diferente daquele previsto para uma distribuição normal, o que não tem nenhum significado importante, a não ser pelo número de elementos que necessitam ser adaptados.

Como o processo de desrefinamento de malha não é implementado, os elementos que se encontram à esquerda de  $\bar{\theta} - \alpha\sigma$  não serão analisados. No entanto, nada se pode afirmar quanto ao desrefinamento destes elementos, uma vez que os indicadores de erro, para este caso, devem ser analisados pela soma dos indicadores de erro pertinentes a um grupo de elementos gerados por um único refinamento, ou simplesmente a dois ou mais elementos, dependendo da estratégia de desrefinamento empregada.

Estatisticamente, o processo de adaptação tem a finalidade de desnormalizar a distribuição dos indicadores de erro, ou seja, a adaptação consiste em tomar os elementos que se encontram à direita de  $\bar{\theta} + \alpha\sigma$ , melhorar sua qualidade, adaptando-os para enquadrá-los dentro dos limites de qualidade padrão, no intervalo  $[\bar{\theta} - \alpha\sigma, \bar{\theta} + \alpha\sigma]$ .

Portanto, um bom processo de refinamento é aquele que, através de um ou mais indicadores de erro e um critério de adaptação de malhas, proporcione distribuir os indicadores de erro de forma que à direita de  $\bar{\theta} + \alpha\sigma$  contenha o mínimo de elementos.

Quanto ao tempo computacional despendido para o cálculo das variáveis pertinentes ao novo critério de adaptação de malhas, em comparação com os demais critérios, é praticamente desprezível, uma vez que são executadas apenas  $3 \cdot nel + 2$  operações adicionais a cada indicador de erro (considerando o critério que calcula o valor médio dos indicadores de erro), onde  $nel$  é o número de elementos da malha. Considerando a velocidade dos computadores atuais, o tempo necessário para executar estas operações não passa de alguns segundos.

Com o objetivo de avaliar o desempenho do novo critério de adaptação de malhas, os procedimentos propostos foram incorporados a uma estratégia de adaptação automática de malhas, conforme Popiolek (1999).

## ESTRATÉGIA DE ADAPTAÇÃO AUTOMÁTICA DE MALHAS

A estratégia de adaptação automática de malhas é realizada através da utilização de uma combinação dos métodos “h” (refinamento) e “r” (realocação nodal), onde os elementos da malha, que possuem baixa qualidade, são adequadamente subdivididos, com o objetivo de melhorar a qualidade dos mesmos. Em seguida, a malha é submetida a um processo de realocação nodal, com o propósito de melhorar as propriedades geométricas dos elementos, bem como suavizar a transição entre as regiões de baixa e alta densidade de elementos.

Em síntese, o processo de adaptação automática de malhas tem como objetivo avaliar qualitativamente a solução numérica obtida sob uma malha inicial, e outras intermediárias, através da utilização de adequados indicadores de erro. Em função deles, se necessário, deve-se modificar os

elementos da malha de uma forma seletiva e organizada, com o propósito de melhorar a qualidade desta e, em conseqüência, obter uma solução numérica de melhor qualidade.

O algoritmo consiste nos seguintes passos:

- Passo 1.* Construir uma malha inicial;  
*Passo 2.* Calcular uma solução inicial (para n passos de tempo);  
*Passo 3.* Estimar a precisão da solução (usando um ou mais indicadores de erro);  
*Passo 4.* Em função dos indicadores de erro, refinar todos os elementos da malha que o novo critério de adaptação determinar;  
*Passo 5.* Suavizar os elementos da nova malha;  
*Passo 6.* Se o número de níveis de refinamentos for menor que o número máximo de níveis de refinamentos previstos  
 Então:  
*Passo 7.* Calcular uma nova solução (para mais n passos de tempo);  
 Voltar ao *Passo 3*;  
 Caso contrário:  
*Passo 8.* Calcular a solução final;  
*Passo 9.* Fim do algoritmo.

## Indicadores de erro

A obtenção de soluções de qualidade, através da utilização de processos adaptativos, preconiza a utilização de indicadores de erro eficientes e adequados, a fim de propiciar a identificação das sub-regiões da malha cuja solução encontra-se aquém da precisão desejada e aplicar-lhes um processo de adequação de malhas.

Na literatura, vários indicadores de erro têm sido propostos. Aqui são utilizados os indicadores de erro apresentados por Argyris et al. (1990). Estes indicadores permitem identificar regiões de elevados gradientes de velocidade, regiões de baixas velocidades e regiões de vórtices. Além destes, é utilizado um indicador de erro que leva em consideração o gradiente da profundidade.

Reconhecidamente estes são os principais fenômenos físicos que ocorrem no escoamento em corpos d'água rasos. Portanto, devem ser convenientemente identificados, com o propósito de melhorar a qualidade da malha nas regiões onde os fenômenos descritos ocorrem com maior intensidade. Agindo desta forma, haverá uma contribuição para que a solução numérica reproduza eficientemente todos os efeitos característicos do escoamento simulado.

A expressão do indicador de erro, que leva em consideração os gradientes da velocidade na direção x, pode ser escrita da seguinte forma:

$$\theta_i^2 = \left\{ \left| \frac{\partial u_1}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial u_2}{\partial x} \right| \right\} \bar{l}_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, \text{ nel} \quad (2)$$

onde: i representa o número do elemento;  $u_1$  e  $u_2$  são, respectivamente, as componentes da velocidade nas direções x e y; nel é o número de elementos da malha; e  $\bar{l}_i$  é a média aritmética do comprimento dos lados i-ésimo elemento.

Por sua vez, o indicador de erro que identifica as regiões do domínio computacional do problema com baixas velocidades, para um elemento triangular, é caracterizado pela expressão:

$$\theta_i = \left( |V_1| + |V_2| + |V_3| \right)^{-n} \quad i = 1, 2, \dots, \text{ nel} \quad (3)$$

onde  $V_1$ ,  $V_2$  e  $V_3$  são as velocidades nodais do i-ésimo elemento da malha e o expoente n é um valor prefixado que, no caso deste trabalho, é tomado igual a um (normalmente é utilizado um dos seguintes valores,  $n = \{1, 2, 3\}$ ).

A medida que quantifica a mudança de direção da velocidade no interior de um elemento triangular é dada por:

$$\theta_i = |\varphi_1 - \varphi_2| + |\varphi_2 - \varphi_3| \quad i = 1, 2, \dots, \text{ nel} \quad (4)$$

onde  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  e  $\varphi_3$  são os ângulos dos vetores da velocidade resultante em cada nó do i-ésimo elemento, ao longo da direção x.

Utiliza-se ainda um indicador de erro baseado no gradiente da profundidade, o qual é calculado através da expressão:

$$\theta_i^2 = \left\{ \left| \frac{\partial h}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial h}{\partial y} \right| \right\} \bar{l}_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, \text{ nel} \quad (5)$$

onde i representa o número do elemento da malha, x e y são as direções principais, h é a profundidade total da coluna d'água, nel é o número total de elementos da malha e  $\bar{l}_i$  é a média aritmética do comprimento dos lados do i-ésimo elemento.

Nas aplicações, muitas vezes com o objetivo de identificar as principais características do

escoamento em corpos d'água rasos e propiciar que todos os seus efeitos sejam representados na solução numérica, são utilizados simultaneamente vários indicadores de erro, onde cada um deles identifica individualmente as características inerentes às variáveis que a ele foram atribuídas na sua definição.

Quando for selecionado um único indicador de erro, o mesmo é calculado para todos os elementos da malha. Em seguida, os dados resultantes do cálculo do indicador são analisados pelo novo critério de adaptação de malhas, com o objetivo de identificar os elementos que deverão ser submetidos ao processo de adaptação, por não atender às condições necessários para produzir uma solução de qualidade.

Da mesma forma, quando forem selecionados dois ou mais indicadores de erro, o cálculo dos mesmos é efetuado separadamente e simultaneamente para cada elemento da malha. Para o propósito da adaptação, se pelo menos um dos indicadores de erro não atender às condições de qualidade definidas pelo novo critério de adaptação, o processo de adaptação é direcionado para proceder à adequação do elemento da malha que está sendo analisado. Observa-se que, a cada nível de refinamento, mesmo utilizando vários indicadores de erro, os elementos só serão subdivididos uma única vez.

### Subdivisão dos elementos

Para adaptar a malha, é utilizado o método h-refinamento. Os elementos a serem adaptados são identificados em função de indicadores de erro, os quais são analisados minuciosamente pelo novo critério de adaptação. Os elementos selecionados para serem refinados são subdivididos em dois novos elementos.

No refinamento, para garantir que os novos elementos gerados possuam aspectos geométricos de qualidade, o novo lado é definido pelo segmento de reta que une o ponto médio do maior lado do elemento de malha a ser refinado e o vértice oposto. Na implementação deste esquema de subdivisão de elementos, duas situações podem ocorrer: a primeira acontece quando o maior lado do elemento a ser subdividido pertence ao contorno do domínio. Neste caso, cessa-se o refinamento após a criação do nó de contorno e a geração dos dois novos elementos da malha; a segunda situação ocorre quando o maior lado do elemento a ser refinado for interno. Então, o elemento que compartilha do mesmo lado (elemento vizinho) também será subdividido. A subdivisão do elemento vizinho é feita devido à necessidade de manter a consistência da malha.

Para um mesmo nível de refinamento, cuidados especiais são tomados, para evitar que elementos sejam subdivididos mais de uma vez, a não ser em situações especiais, quando impeçam elementos de serem refinados pela primeira vez.

### Realocação nodal

O processo de refinamento de malhas muitas vezes conduz à geração de elementos distorcidos e ainda pode causar uma variação brusca entre elementos de diferentes tamanhos, prejudicando a qualidade da malha e, conseqüentemente, a precisão da solução numérica.

Em vista disto, o processo de refinamento de malhas é combinado com o processo de realocação nodal. Desta forma, as propriedades geométricas dos elementos são melhoradas, além de proporcionar que a transição entre os elementos de diferentes tamanhos seja suavizada.

Por razões de eficiência, o algoritmo é estruturado com uma seqüência de passos de realocação nodal, onde em cada passo apenas um nó é movimentado e, portanto, somente os elementos adjacentes (que têm em comum o nó que está sendo realocado) ao nó terão a geometria alterada.

Os nós são realocados através da utilização de um esquema chamado de realocação centroidal, o qual permite melhorar a qualidade da malha através da uniformização da área dos elementos que compartilham de um mesmo nó. Este esquema foi proposto originalmente por Winslow (1967).

Denominando as coordenadas de posição de um nó P, por  $X_p$ , a nova posição deste nó é calculada pela expressão:

$$X_p = \frac{\sum_{e=1}^{ne} A_e X_e}{\sum_{e=1}^{ne} A_e} \quad (6)$$

onde  $ne$  é o número de elementos que compartilham o nó P, e  $A_e$  e  $X_e$  representam, respectivamente, a área e as coordenadas ( $x_e$ ,  $y_e$ ) do centróide do  $e$ -ésimo elemento.

No processo de suavização, todos os nós são submetidos ao esquema de realocação centroi-

dal, com exceção dos nós de contorno, que são mantidos nas posições originais, devido à necessidade de preservar a configuração geométrica e as condições de contorno. Ainda se, por algum motivo, nós no interior do domínio não devam ser realocados, isto pode ser facilmente pré-estabelecido.

Toda vez que um nó é realocado, os valores das variáveis referentes a ele são recalculados através de uma interpolação linear. Para tal, são tomados os valores das variáveis dos três vértices do elemento que abriga a nova posição do nó. A expressão geral de interpolação utilizada, quando um nó P é realocado para uma nova posição P', conforme mostrado na Figura 2, pode ser escrita da seguinte forma:

$$v = \frac{\sum_{i=1}^3 A_i v_i}{A} \quad (7)$$

onde A representa a área do elemento triangular que abriga a nova posição do nó, A<sub>i</sub> são as três sub-áreas formadas pelos lados do elemento que abriga o novo nó e os segmentos de reta que une seus vértices ao novo nó, e v<sub>i</sub> são os valores da variável que estão sendo interpolados, correspondentes aos três nós do elemento.

### EQUAÇÕES DE ÁGUAS RASAS

Com o objetivo de analisar a eficiência dos procedimentos desenvolvidos para implementar o novo critério de adaptação de malhas, bem como avaliar o desempenho da estratégia de adaptação automática de malhas, os procedimentos foram incorporados a um programa de elementos finitos, desenvolvido por Martinez e Vaz dos Santos (1999). Este programa é utilizado para simular escoamentos em corpos d'água rasos.

As equações de águas rasas do modelo matemático são obtidas por integração na profundidade das equações da conservação da massa e da quantidade de movimento, originadas das equações tridimensionais de Navier-Stokes. As equações são integradas, utilizando o método explícito de dois passos de tempo de Taylor-Galerkin. O mesmo consiste em discretizar o problema no domínio do tempo, através de uma expansão das equações em série de Taylor e após realizar uma discretização espacial, usando a técnica de Galerkin.

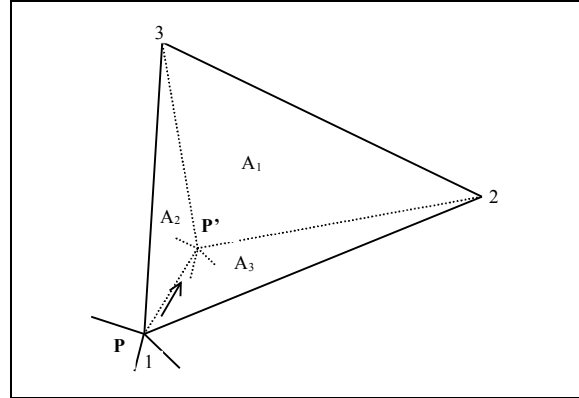


Figura 2. O nó P realocado para posição P'.

A aplicação do método é conduzida em dois passos de tempo sob a equação de águas rasas na forma matricial, conforme Martinez e Vaz dos Santos (1999):

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = R_s + \frac{\partial R_{di}}{\partial x_i}, i = 1, 2 \quad (8)$$

onde:

$$U = \begin{bmatrix} h \\ h u_1 \\ h u_2 \end{bmatrix}, \quad F_1 = \begin{bmatrix} h u_1 \\ h u_1^2 + g(h^2 - H^2)/2 \\ h u_1 u_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} h u_2 \\ h u_1 u_2 \\ h u_2^2 + g(h^2 - H^2)/2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$R_s = \begin{bmatrix} 0 \\ fh u_2 + g(h-H) \frac{\partial H}{\partial x_1} + \frac{\tau_1}{\rho} - \frac{g|u|u_1}{C^2} - \frac{h}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial x_1} \\ -fh u_1 + g(h-H) \frac{\partial H}{\partial x_2} + \frac{\tau_2}{\rho} - \frac{g|u|u_2}{C^2} - \frac{h}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$R_{d1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2 \mu_H h}{\rho} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\mu_H h}{\rho} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \end{bmatrix}, \quad R_{d2} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\mu_H h}{\rho} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \\ \frac{2 \mu_H h}{\rho} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (12)$$

onde:  $h$  e  $H$  são, respectivamente, a profundidade total e a profundidade média da coluna d'água;  $u_1$  e  $u_2$  são as componentes da velocidade média ao longo da profundidade;  $|u|$  o módulo da velocidade;  $\tau_1$  e  $\tau_2$  são as componentes da tensão do vento na superfície d'água;  $g$  representa a aceleração da gravidade;  $\rho$  corresponde à massa específica;  $C$  o coeficiente de Chezy;  $\mu_H$  é a viscosidade turbulenta;  $p_a$  representa a pressão atmosférica; e  $f$  a aceleração de Coriolis.

## APLICAÇÕES

Objetivando avaliar o desempenho dos procedimentos desenvolvidos, são executadas duas aplicações envolvendo escoamentos em corpos d'água rasos. Foram selecionados exemplos, cujas soluções representam as principais características da dinâmica de fluidos computacional. Desta forma, são utilizados os indicadores de erro descritos neste trabalho, permitindo, assim, avaliar eficientemente o novo critério de adaptação de malhas proposto, bem como a estratégia de adaptação automática de malhas.

Nas aplicações, são utilizados indicadores de erro integrados com o novo critério de adaptação que, em conjunto, proporcionam identificar as sub-regiões da malha que possuem elevados gradientes da velocidade e da profundidade  $e$ , também, os locais de baixas velocidades e de vórtices. Simultaneamente, nestes locais, são aplicados os processos de refinamento e de suavização de malhas, com o propósito de melhorar a qualidade da malha e, conseqüentemente, a precisão da solução numérica.

A escolha dos indicadores de erro utilizados nas aplicações está associada à geometria do corpo d'água, a qual define o comportamento do escoamento do fluido, bem como as características que se deseja evidenciar com mais precisão na solução do problema.

Destaca-se que, na segunda aplicação, o corpo d'água descrito foi exclusivamente idealizado para ser apresentado neste trabalho, com o objetivo de analisar simultaneamente os quatro indicadores de erro definidos anteriormente.

O objetivo principal das aplicações apresentadas é analisar a capacidade do novo critério de adaptação em identificar e gerenciar os refinamentos das regiões da malha de baixa precisão, avaliar a qualidade da malha refinada e suavizada, analisar a precisão da solução numérica e o tempo computacional despendido para produzir soluções de qualidade.

Para averiguar se os refinamentos foram realizados corretamente nas regiões críticas, basta confrontá-los com as características do escoamento obtidas na solução numérica. Quanto à verificação

da qualidade da malha adaptada, a mesma é feita através da análise da qualidade geométrica dos elementos triangulares, da suavização entre as regiões de diferentes densidades de elementos e da qualidade da solução numérica.

No que diz respeito à qualidade das soluções numéricas, estas são comparadas com soluções existentes na literatura. Da mesma forma, o tempo computacional é avaliado, fazendo-se uma comparação entre o número de elementos utilizados para a obtenção da solução de problemas constantes na literatura, com o número de elementos utilizados neste trabalho, para produzir uma solução de qualidade equivalente àquela apresentada nas aplicações simuladas.

Portanto, nesta seção são definidas, solucionadas e analisadas duas aplicações de escoamento em corpos d'água rasos, visando os objetivos deste trabalho.

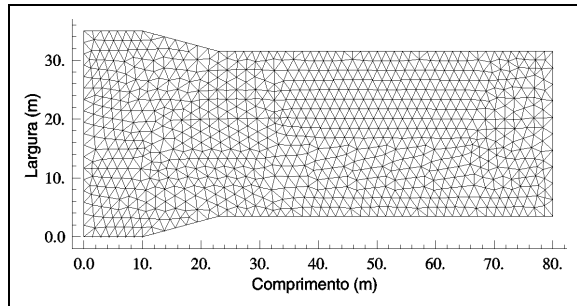
### Canal com estreitamento simétrico

Nesta primeira aplicação, é considerado o escoamento d'água em um canal simétrico, com uma variação gradual na largura de 15 graus, cujas dimensões estão mostradas na Figura 3.

A profundidade d'água inicial é de 1.0 m e a velocidade do fluxo na entrada do canal, lado esquerdo, é equivalente ao número de Froude 2.5. Na saída, as componentes da velocidade e a superfície d'água são livres, enquanto nas laterais do canal, as velocidades normais são impostas como sendo nulas e as velocidades tangenciais e a altura da superfície do fluido são livres.

O domínio do problema foi discretizado inicialmente com 940 nós e 1742 elementos, os quais encontram-se uniformemente distribuídos em todas as regiões deste domínio, como pode ser visto na Figura 3.

Para a adaptação da malha, foi utilizado o indicador de erro que leva em consideração o gradiente da profundidade d'água, devido à geometria do problema e, em conseqüência, as características do fluxo. Os seis níveis de refinamentos suavizados



**Figura 3. Domínio computacional discretizado inicialmente com 940 nós e 1742 elementos.**

foram realizados simultaneamente com o processamento da solução, utilizando-se, para o novo critério de adaptação de malhas, o coeficiente  $\alpha$  unitário. A malha adaptada pelo esquema descrito, que contém 3152 nós e 6137 elementos, é mostrada na Figura 4.

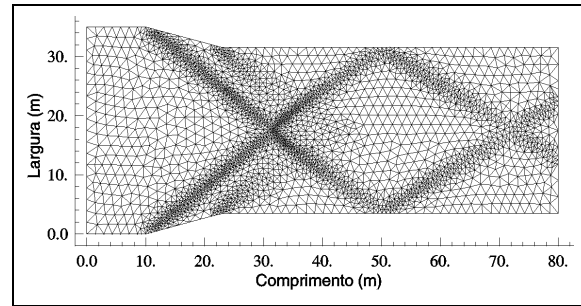
Na malha refinada, verifica-se a existência de uma transição uniforme entre as regiões de diferentes densidades de elementos, bem como elementos de boa qualidade geométrica, indicando que a suavização produz bons resultados.

É importante observar que, a cada nível de refinamento realizado, é aplicado um único nível de realocação nodal, pois aumentando o número de realocações, serão causadas distorções nos elementos da malha, ao invés de melhorar a qualidade geométrica dos mesmos.

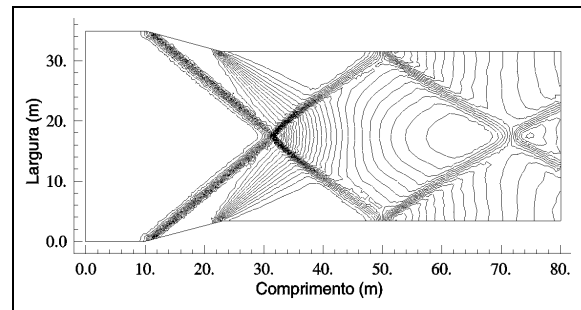
As isolinhas da profundidade total d'água, para a solução no regime permanente, podem ser vistas na Figura 5. Nesta representação gráfica, observa-se a presença de ondas de choque cruzadas (também chamados de saltos hidráulicos), as quais coincidem perfeitamente com as regiões de refinamento da malha, caracterizando a eficiência do novo critério de adaptação em analisar os indicadores de erro, a fim de identificar minuciosamente a presença de elevados gradientes da profundidade.

Na Figura 6, é mostrada a solução relativa à elevação da superfície livre d'água ao longo da margem direita do canal, a qual é perfeitamente compreendida, quando associada com a geometria do domínio computacional do problema e com as ondas de choque.

Estes resultados, encontrados na aplicação, são consistentes em comparação com os obtidos por Zienkiewicz e Ortiz (1995), e com os apresentados por Lyra (1996). Entretanto, neste trabalho, são utilizados cerca de 32% e 40%, respectivamente, do número de elementos empregados nos trabalhos



**Figura 4. Malha refinada, contendo 3152 nós e 6137 elementos.**



**Figura 5. Isolinhas da profundidade total d'água.**

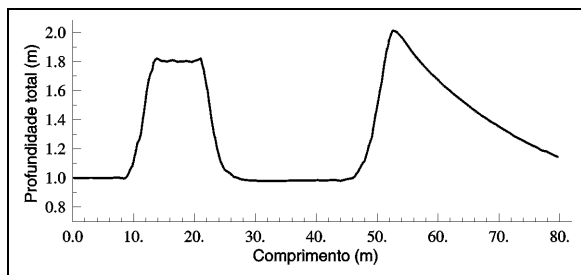
acima citados, que não usam técnicas de adaptação de malhas.

### **Canal com dois estreitamentos intermediários**

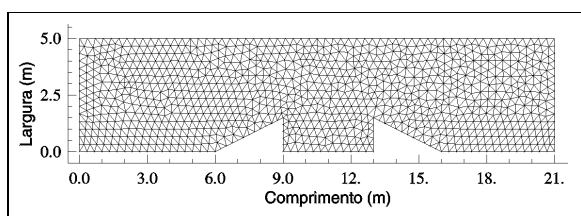
Visando analisar simultaneamente vários efeitos de um escoamento supercrítico, em uma única aplicação, foi idealizado um canal retangular, com dois estreitamentos intermediários na lateral direita. Para consolidar os estreitamentos, foram projetadas duas cunhas triangulares, ambas com base medindo 3.0 m e a altura 1.5 m, colocadas ao longo do canal, conforme Figura 7. Desta forma projeta-se, na sua margem, uma cavidade. O contorno a montante localiza-se a 6.0 m da primeira cunha, enquanto a jusante distancia-se a 5.0 m da segunda. Para produzir efeitos significativos, dimensionou-se a largura do canal em 5.0 m.

Foi definido que o escoamento d'água ocorre da esquerda para a direita. Nos nós de contorno, a montante do canal, foi adotada uma velocidade equivalente ao número de Froude 2.6 e uma profundidade d'água fixa de 1.0 m, e a jusante, tanto a velocidade quanto a superfície livre d'água foram adotadas livres. As condições de contorno nas late-





**Figura 6. Profundidade total d'água ao longo da margem direita do canal.**



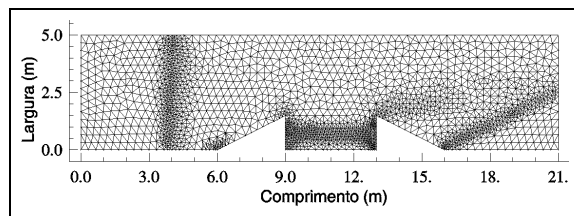
**Figura 7. Domínio computacional discretizado com 1010 nós e 1849 elementos.**

rais do canal foram impostas como sendo: velocidades normais nulas, velocidades tangenciais e superfície livre d'água.

O domínio computacional discretizado pela malha inicial, conforme a Figura 7, foi submetido à solução e adaptações conforme o algoritmo descrito, sendo que, para os quatro níveis de refinamentos e suavizações, foram utilizados os quatro indicadores de erro: o primeiro permite identificar os gradientes da profundidade; o segundo, os gradientes da velocidade; o terceiro tem o objetivo de revelar as regiões de baixas velocidades; e o quarto, os locais em que ocorrem mudanças nas direções das velocidades nos nós de cada elemento da malha, ou seja aonde há vórtices.

Para analisar os indicadores de erro, utilizaram-se, para o novo critério de adaptação de malhas, os coeficientes  $\alpha = 1.0$ , com exceção para o gradiente da velocidade, adotado como  $\alpha = 1.5$ , por não necessitar de maiores refinamentos nas regiões onde ocorrem estes efeitos. Desta forma, foi obtida uma malha com 2367 nós e 4502 elementos, mostrada na Figura 8, a qual proporcionou uma solução numérica de alta qualidade, contendo todos os efeitos que eram estimados (saltos hidráulicos, baixas velocidades e os vórtices).

Com referência à malha refinada, identificam-se seis regiões bem definidas, onde ocorrem as adaptações: a primeira encontra-se a 3.80 m da entrada do canal; a segunda, no início do estreita-



**Figura 8. Malha refinada através dos quatro indicadores de erro, contendo 2367 nós e 4502 elementos.**

mento do canal; a terceira, sobre a primeira cunha de estreitamento; a quarta, na região da cavidade (entre as duas cunhas); a quinta sobre a segunda cunha; e a última obliquamente, no intervalo dos 16.0 m aos 21.0 m.

Com o objetivo de mostrar a atuação de cada um dos indicadores de erro, utilizados nesta aplicação, são mostrados nas Figuras 9, 10, 11 e 12, respectivamente, os refinamentos individuais proporcionados pelos gradientes da profundidade, pelos gradientes da velocidade e pelos indicadores de erro que levam em consideração as baixas velocidades e os vórtices. Com isto pode-se identificar a contribuição de cada um destes indicadores de erro na adaptação final da malha, a qual foi utilizada na obtenção da solução numérica do problema simulado. Ainda são destacados a quantidade de nós e de elementos de cada uma das malhas refinadas parcialmente pelos indicadores de erro referenciados.

Nas Figuras 13, 14 e 15 são apresentadas, respectivamente, as soluções relativas ao campo de velocidades, as linhas de fluxo das partículas d'água e as isolinhas da profundidade total. Estas soluções foram obtidas sob a malha refinada, em função dos quatro indicadores de erro, após 20000 passos de tempo, para o regime permanente.

Para visualizar com nitidez o comportamento da superfície livre d'água, é traçado o gráfico da profundidade total, ao longo da coordenada  $y = 2.0$  m do canal. Assim, é possível associar as isolinhas da profundidade total, da Figura 15, com as profundidades, mostradas na Figura 16.

Analisando a solução numérica através da representação gráfica (Figuras 13 a 16), pode-se afirmar que esta é de boa qualidade. Como o estreitamento do canal foi projetado com um ângulo elevado (26.56 graus) e ainda fechando 3/10 da sua largura, o choque das partículas d'água ocorre com grande intensidade próximo da primeira cunha e praticamente perpendicular às margens, conforme mostrado nas Figuras 15 e 16.

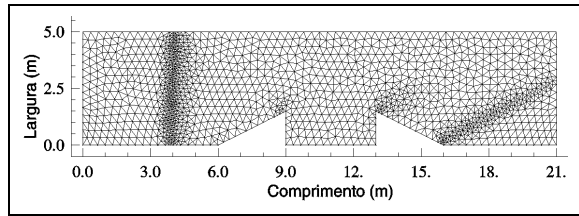


Figura 9. Malha refinada através do indicador de erro, que leva em consideração o gradiente da profundidade, com 1585 nós e 2987 elementos.

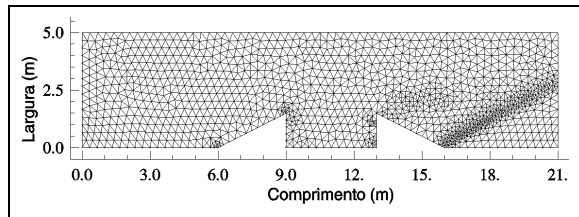


Figura 10. Malha refinada através do indicador que leva em consideração o gradiente da velocidade, com 1366 nós e 2546 elementos.

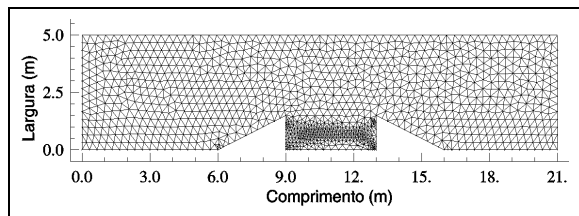


Figura 11. Malha refinada através do indicador de erro, que leva em consideração as baixas velocidades, com 1320 nós e 2449 elementos.

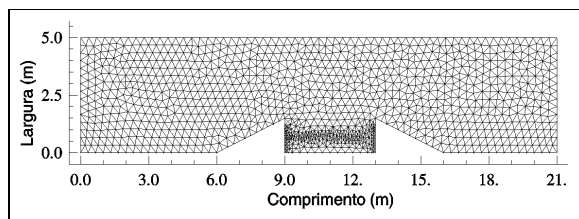


Figura 12. Malha refinada através do indicador de erro, que leva em consideração os vórtices, com 1235 nós e 2271 elementos.

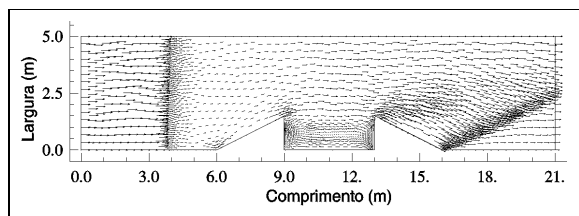


Figura 13. Campo de velocidades.

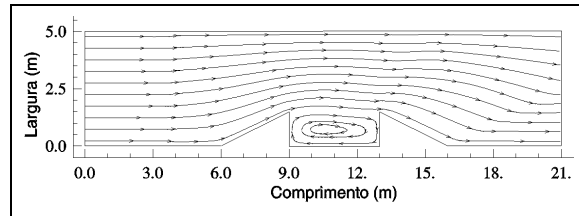


Figura 14. Linhas de fluxo das partículas d'água.

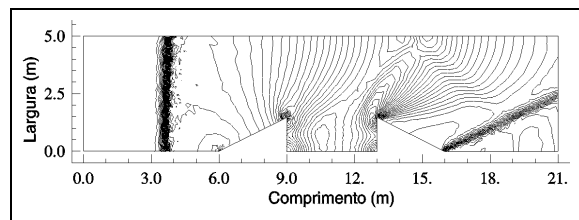


Figura 15. Isolinhas da profundidade total d'água.

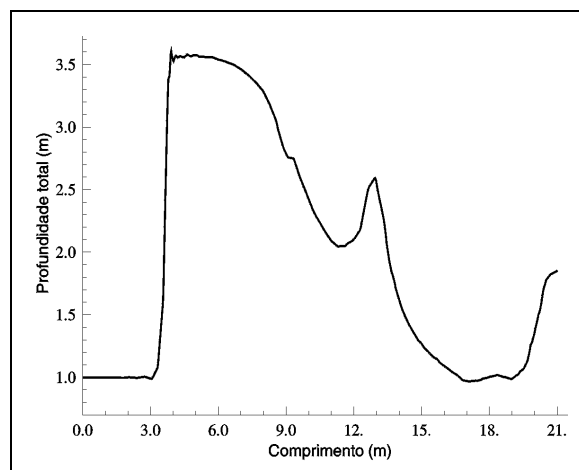


Figura 16. Gráfico da profundidade total d'água ao longo da coordenada  $y = 2.0$  m do canal.

Na região da cavidade do canal, entre as duas cunhas, ocorrem os efeitos de baixas velocidades e de vórtices, que podem ser visualizados nas Figuras 13 e 14. Finalmente, nos últimos 6.0 m do canal, identifica-se uma onda de choque oblíqua à margem direita, que pode ser vista no gráfico das isolinhas da profundidade total e no gráfico da profundidade total d'água ao longo da coordenada  $y = 2.0$  m do canal.

Considerando as soluções obtidas, os indicadores de erro utilizados e os refinamentos efetuados, conclui-se que o novo critério de adaptação da malhas foi eficiente na identificação dos principais efeitos físicos do escoamento do problema simulado e no gerenciamento dos refinamentos.

## CONCLUSÕES

A análise das soluções numéricas e da qualidade dos refinamentos obtidos nas aplicações mostrou que os objetivos propostos neste trabalho foram alcançados.

O novo critério de adaptação de malha mostrou ser eficiente na análise dos indicadores de erro e no processo decisivo de gerenciar os refinamentos nas sub-regiões onde, realmente, se faziam necessários. Além disso, o coeficiente  $\alpha$ , utilizado no critério, permite prever com facilidade a intensidade de refinamentos e, conseqüentemente, a quantidade de elementos da malha final gerada.

Os resultados obtidos com o modelo matemático utilizado, combinado com o novo critério de adaptação de malhas e a estratégia de adaptação automática de malhas, apresentam soluções de qualidade.

Quanto ao tempo computacional, é obtida redução razoavelmente elevada, conforme comprovado na primeira aplicação, pois foi utilizado um número de elementos inferiores aos empregados na literatura referenciada.

Ainda, destaca-se que o novo critério de adaptação pode ser facilmente incorporado a modelos matemáticos que usam processos adaptativos para proporcionar a obtenção de soluções numéricas de melhor qualidade.

## REFERÊNCIAS

- ALQUATI, E. L. G.; GROEHS, A. G. (1994). *Geração automática de malhas não estruturadas de elementos triangulares*. In: XV Congresso Ibero Latino-americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia, *Anais*: 1, p. 483-492.
- ARGYRIS, J.; DOLTSINIS, T. S.; FRIZ, H. (1990). Studies on computational reentry aerodynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.81, p. 257-289.
- AZEVEDO, R. L.; VAZ DOS SANTOS, M. A.; AWRUCH, A. M. (1994). Malhas adaptativas de elementos finitos em escoamento compressíveis. In: XV Congresso Ibero Latino-americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia, *Anais*: v.1, p. 493-502.
- DEVLOO, P.; ODEN, J. T.; STROUBOULIS, T. (1987). Implementation of an adaptive refinement technique for the SUPG algorithm. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.61, p. 339-358.
- FUENMAYOR, F. J.; OLIVER, J. L. (1996). Criteria to achieve nearly optimal meshes in the  $h$ -adaptive finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.39, p. 4039-4061.
- LYRA, P. R. M. (1996). Algoritmos adaptativos de alta-resolução no estudo de escoamentos supercríticos com discretizações não estruturadas. *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, v.1, p. 5-17.
- ODEN, J. T.; STROUBOULIS, T.; DEVLOO, P. (1986). Adaptive finite element methods for the analysis of inviscid compressible flows: Part I. Fast refinement/unrefinement and moving mesh methods for unstructured meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.59, p. 327-362.
- POIOLEK, T. L. (1999). *Adaptação automática de malhas não estruturadas no estudo de escoamentos em águas rasas*. Tese de Mestrado em Engenharia Oceânica, Fundação Universidade Federal do Rio Grande, p. 92.
- MARTINEZ, D. M. V.; VAZ DOS SANTOS, M. (1999). Uma formulação explícita para a solução de escoamentos em águas rasas. *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, v.4, p. 63-73.
- WINSLOW, A. M. (1967). Numerical solution of the quasilinear Poisson equation in a nonuniform triangular mesh. *Journal of Computational Physics*, 2, 149-172.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; ZHU, J. Z. (1987). A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.24, p. 337-357.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; ORTIZ, P. (1995). A split-characteristic based finite element model for the shallow water equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v.20, p. 1061-1080.

## ***A New Mesh Adaptation Approach***

### ***ABSTRACT***

*A new mesh adaptation approach for finite element analysis, based on the normal distribution theory, is presented. It is applied as tool to analyze the quality of a numerical solution. The new adaptation approach has decisive and automatic characteristics to analyze error indicators, enabling the identification of the sub-regions of the mesh that need to be adapted, in order to obtain a quality solution. An unstructured mesh is used, with triangular elements of three uniformly distributed nodes, for the discretization of the problem domain. The h-refinement process is used for the adaptation. After each refinement level the mesh is smoothed. The implemented procedures were incorporated in a finite element program for the purpose of simulating flow problems in shallow water bodies. In this way, an automatic mesh adaptation strategy is built, consisting of the finite element program, the new adaptation mesh approach, the h-refinement and the smoothing, which is executed simultaneously and interactively while obtaining the numerical solution. This enables the accurate determination of the main effects of incompressible fluid dynamics. Applications are presented for an emphatic evaluation of the performance of the new adaptation mesh approach.*

*Key-words: computational hydraulics; numerical methods; finite elements; mesh.*