Os Poliedros Platônicos

Por que existem só 5 sólidos platônicos?

Introdução

- O sufixo *edro* vem da palavra grega *hédra* que significa face.
- Os prefixos, também oriundos do grego, indicam a quantidade de faces de cada poliedro: *tetra* (4), *hexa* (6), *octa* (8), *dodeca* (12) e *icosa* (20).

- Os cinco sólidos platônicos são: o *tetraedro,* o *cubo* ou *hexaedro regular*, o *octaedro* , o *dodecaedro* e o *icosaedro regular* .

- Apresentaremos aqui duas justificativas que verificam que não existem outros sólidos platônicos. A primeira, mais geométrica, segue a demonstração dada originalmente por Euclides. A segunda faz uso da fórmula de Euler.

Um poliedro é chamado de poliedro de Platão se satisfaz as seguintes condições:

- Todas as faces têm o mesmo número de aresta,
- Todos os ângulos poliédricos têm o mesmo número de arestas
- Vale a relação de Euler $V - A + F = 2$

(Veja as definições de ângulos diedros, triedos e poliedros em http://www.somatematica.com.br/emedio/espacial/espacial6.php)

Demonstração geométrica

- Usaremos a seguinte propriedade fundamental: a soma dos ângulos dos polígonos em volta de cada vértice de um poliedro é sempre menor do que 360°.
- Esta é a proposição 21 do Livro XI - *Os Elementos* de Euclides.

Vamos agora analisar as diversas possibilidades de união de faces em torno de cada vértice, lembrando que (1) em um sólido platônico as faces são polígonos regulares congruentes e (2) são necessárias pelo menos três faces unidas em cada vértice para formar um sólido.

Número de Triângulos Equiláteros	Soma dos Ângulos	Formato
3	180°	Tetraedro
4	240°	Octaedro
5	300°	Icosaedro
≥6	≥360°	Não existe

As faces são triângulos equiláteros com ângulos internos de 60°.

Número de Quadrados	Soma dos Ângulos	Formato
3	270°	Cubo
≥4	≥360°	Não existe

As faces são quadrados com ângulos internos de 90°.

Número de Pentágonos	Soma dos Ângulos	Formato
3	324°	Dodecaedro
≥4	≥360°	Não existe

As faces são pentágonos regulares com ângulos internos de 108°.

Se as faces são polígonos regulares com $n \geq 6$ lados, então a soma dos ângulos dos polígonos em torno de cada vértice é $\geq 360°$. Sendo assim, não existe nenhum sólido platônico com faces hexagonais, heptagonais, etc.

Demonstração Topológica

$$V - A + F = 2$$

Considere então um sólido platônico cujas faces são polígonos regulares de *n* lados. Como cada aresta do poliedro é definida pela interseção dos lados de dois polígonos adjacentes, segue-se que se contarmos todos os lados de todos os polígonos, iremos contar duas vezes cada aresta do poliedro:

$$n.F = 2.A \qquad \textbf{(1)}$$

Seja *p* o número de arestas do poliedro que concorrem em um mesmo vértice. Cada uma destas arestas, a exemplo das faces, se conecta a dois vértices.

Assim, se contarmos todos os lados de todos os polígonos iremos contar duas vezes cada aresta do poliedro, portanto

$$p.V = 2.A \qquad \textbf{(2)}$$

- Pelas equações (1) e (2) sabemos que:

$$F = \frac{2A}{n} \textbf{ e } V = \frac{2A}{p}$$

- Substituindo na equação *V-A+F=2* ,

$$\frac{2A}{p} - A + \frac{2A}{n} = 2$$

- Simplificando a equação anterior

$$\frac{1}{p}-\frac{1}{2}+\frac{1}{n}=\frac{1}{A} \quad \textbf{ou}$$

$$\frac{1}{p}-\frac{1}{A}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}$$

- Consequentemente

$$\frac{1}{A}=\frac{2n+2p-np}{2pn} \qquad \textbf{(3)}$$

- Portanto,

$$A = \frac{(2pn)}{(2n + 2p - np)} \quad \mathbf{(4)}$$

- Como o número *A* de arestas deve ser positivo,

$$(2n + 2p - np) > \mathbf{0}$$

- Ou ainda

$$\frac{2n}{n-2} > p$$

- Uma vez que *p* ≥ *3*, concluímos que, obrigatoriamente, *n* < 6. As possibilidades são então as seguintes:
- Se *n* = 3, então

$$A = \frac{(2.3.p)}{(2.3 + 2p - 3p)} = \frac{6p}{6 - p}$$

- E, portanto,

$$F = \frac{2A}{n} = \frac{12p}{18 - 3p} = \frac{4p}{6 - p}$$

- Desta última fórmula segue-se que *p* < 6.

- Se $p = 3$, então $F = 4$. Neste caso, o poliedro formado é o tetraedro.

- Se $p = 4$, então $F = 8$. Neste caso, o poliedro formado é o octaedro.

- Se $p = 5$, então $F = 20$. Neste caso, o poliedro formado é o icosaedro.

- Se n = 4, então

$$A = \frac{(2.4.p)}{(2.4 + 2p - 4p)} = \frac{4p}{4 - p}$$

- E, portanto,

$$F = \frac{2A}{n} = \frac{8p}{16 - 4p} = \frac{2p}{4 - p}$$

- Desta última fórmula segue-se que p < 4.

- Sendo assim, se *p* = 3 e, portanto, *F* = 6. Neste caso, o poliedro formado é o cubo.

- E, finalmente, se *n* = 5,

$$A = \frac{(2.5.p)}{(2.5 + 2p - 5p)} = \frac{10p}{10 - 3p}$$

- Então,

$$F = \frac{2A}{n} = \frac{20p}{50 - 15p} = \frac{4p}{10 - 3p}$$

- Desta última relação tem-se que $p < 10/3$. Portanto, se $p = 3$, $F = 12$. E o poliedro formado é o dodecaedro.

Referências Bibliográficas

- DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar, 10:Geometria Espacial, Posição e métrica.* 6° Ed. São Paulo: Atual, 2005.
- DANTE, L. R. *Matemática Contexto e Aplicações*. 1° Ed. São Paulo: Editora Ática, 2000.
- BORTOLOSSI, H. Os Sólidos Platônicos. Disponível em: http://www.uff.br/cdme/platonicos/platonicos-html/solidos-platonicos-br.html. Acesso: 14/10/2010.