Integração Numérica

6 Integração Numérica

6.1 Introdução:

Se uma função *f(x)* é contínua em um intervalo [*a*, *b*] e sua primitiva *F*(*x*) é conhecida, então, a integral definida desta função é dada por:

6 Integração Numérica

6.1 Introdução:

Se uma função $f(x)$ é contínua em um intervalo $[a, b]$ e sua primitiva $F(x)$ é conhecida, então, a integral definida desta função é dada por:

$$\int_a^b f(x)\,dx =$$

6 Integração Numérica

6.1 Introdução:

Se uma função *f(x)* é contínua em um intervalo [*a*, *b*] e sua primitiva *F*(*x*) é conhecida, então a integral definida desta função é dada por:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b =$$

Substituindo os limites de integração, obtém-se:

6 Integração Numérica

6.1 Introdução:

Se uma função *f(x)* é contínua em um intervalo [*a*, *b*] e sua primitiva *F*(*x*) é conhecida, então, a integral definida desta função é dada por:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

6 Integração Numérica

6.1 Introdução:

Se uma função *f(x)* é contínua em um intervalo [a, b] e sua primitiva $F(x)$ é conhecida, então, a integral definida desta função é dada por:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = \underbrace{F(b) - F(a)}$$

Lembramos que, o resultado de uma integral definida representa a área abaixo da função com o eixo x, no intervalo de a até b.

6 Integração Numérica

6.1 Introdução:

Se uma função *f(x)* é contínua em um intervalo [*a*, *b*] e sua primitiva *F*(*x*) é conhecida, então, a integral definida desta função é dada por:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Frequentemente, para calcular a integral definida, utilizam-se métodos numéricos, por exemplo, se *F*(*x*) é de difícil ou impossível obtenção.

6 Integração Numérica

6.1 Introdução:

Se uma função $f(x)$ é contínua em um intervalo $[a, b]$ e sua primitiva $F(x)$ é conhecida, então, a integral definida desta função é dada por:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Frequentemente, para calcular a integral definida, utilizam-se métodos numéricos, por exemplo, se $F(x)$ é de difícil ou impossível obtenção.

Um dos métodos utilizados é através das fórmulas de Newton-Côtes que utiliza o polinômio de Gregory-Newton e emprega valores de $f(x)$, onde os valores de x são igualmente espaçados.

Para a obtenção das fórmulas de Newton-Côtes é utilizado o polinômio interpolador de Gregory-Newton, como segue:

$$P_n(x) = y_0 + z\Delta y_0 + \frac{z(z-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{z(z-1)(z-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \dots$$

$$+ \frac{z(z-1)\dots(z-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 + R_n \qquad (1)$$

Para a obtenção das fórmulas de Newton-Côtes é utilizado o polinômio interpolador de Gregory-Newton, como segue:

$$P_n(x) = y_0 + z\Delta y_0 + \frac{z(z-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{z(z-1)(z-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots$$

$$+ \frac{z(z-1)\ldots(z-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 + R_n \qquad (1)$$

com

$$z = \frac{x - x_0}{h} \quad \text{e} \quad R_n = \frac{z(z-1)\ldots(z-n)}{(n+1)!} h^{n+1} f^{(n+1)}(\varepsilon) \qquad (2)$$

Para a obtenção das fórmulas de Newton-Côtes é utilizado o polinômio interpolador de Gregory-Newton, como segue:

$$P_n(x) = y_0 + z\Delta y_0 + \frac{z(z-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{z(z-1)(z-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots$$
$$+ \frac{z(z-1)\ldots(z-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 + R_n \qquad (1)$$

com

$$z = \frac{x - x_0}{h} \quad \text{e} \quad R_n = \frac{z(z-1)\ldots(z-n)}{(n+1)!} h^{n+1} f^{(n+1)}(\varepsilon) \qquad (2)$$

Assim, aproximando a função pelo polinômio de Gregory-Newton no intervalo de $a \le x \le b$, e, através da integração, obtém-se as fórmulas de Newton-Côtes.

Para a obtenção da fórmula de Newton-Côtes é utilizado o polinômio interpolador de Gregory-Newton, como segue:

$$P_n(x) = y_0 + z\Delta y_0 + \frac{z(z-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{z(z-1)(z-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots$$
$$+ \frac{z(z-1)\ldots(z-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 + R_n \qquad (1)$$

com

$$z = \frac{x-x_0}{h} \quad \text{e} \quad R_n = \frac{z(z-1)\ldots(z-n)}{(n+1)!} h^{n+1} f^{(n+1)}(\varepsilon) \qquad (2)$$

Assim, aproximando a função pelo polinômio de Gregory-Newton no intervalo de $a \leq x \leq b$, e, através da integração, obtém-se as fórmulas de Newton-Côtes.

OBS: O método de Newton-Côtes consiste em substituir a função $f(x)$, de difícil integração, por uma função de fácil integração $P_n(x)$.

6.2 Regra dos Trapézios

6.2.1 Obtenção da Fórmula

Para determinar a fórmula da Regra dos Trapézios é utilizado o polinômio de Gregory-Newton de primeira ordem, ou seja, uma reta.

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (3)$$

6.2 Regra dos Trapézios

6.2.1 Obtenção da Fórmula

Para determinar a fórmula da Regra dos Trapézios é utilizado o polinômio de Gregory-Newton de primeira ordem, ou seja, uma reta.

$$I = \int_a^b f(x)\, dx \qquad (3)$$

Da equação (1), obtém-se a aproximação para $f(x)$, da forma:

$$f(x) = P_1(x) = y_0 + z\Delta y_0$$

6.2 Regra dos Trapézios

6.2.1 Obtenção da Fórmula

Para determinar a fórmula da Regra dos Trapézios é utilizado o polinômio de Gregory-Newton de primeira ordem, ou seja, uma reta.

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (3)$$

Da eq.(1), obtém-se a aproximação para $f(x)$, da forma:

$$f(x) = P_1(x) = y_0 + z\Delta y_0$$

$$I = \int_a^b (y_0 + z\Delta y_0)dx \qquad (4)$$

Foi substituída a função f(x) por um polinômio de primeira ordem que é função de z, logo, deve-se realizar a troca de variável para dx e os limites de integração. Veja a seguir ...

6.2 Regra dos Trapézios

6.2.1 Obtenção da Fórmula

Para determinar a fórmula da Regra dos Trapézios é utilizado o polinômio de Gregory-Newton de primeira ordem, ou seja, uma reta.

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (3)$$

Da equação (1), obtém-se a aproximação para $f(x)$, da forma:

$$f(x) = P_1(x) = y_0 + z\Delta y_0$$

$$I = \int_a^b (y_0 + z\Delta y_0)\,dx \qquad (4)$$

$$z = \frac{x - x_0}{h}$$

6.2 Regra dos Trapézios

6.2.1 Obtenção da Fórmula

Para determinar a fórmula da Regra dos Trapézios é utilizado o polinômio de Gregory-Newton de primeira ordem, ou seja uma reta.

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \tag{3}$$

Da equação (1) obtem-se a aproximação para $f(x)$, da forma:

$$f(x) = P_1(x) = y_0 + z\Delta y_0$$

$$I = \int_a^b (y_0 + z\Delta y_0)\,dx \tag{4}$$

$$z = \frac{x - x_0}{h} \quad \rightarrow \quad x = hz + x_0$$

Foi explicitado x da expressão a esquerda.

6.2 Regra dos Trapézios

6.2.1 Obtenção da Fórmula

Para determinar a fórmula da Regra dos Trapézios é utilizado o polinômio de Gregory-Newton de primeira ordem, ou seja, uma reta.

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \tag{3}$$

Da equação (1), obtém-se a aproximação para $f(x)$, da forma:

$$f(x) = P_1(x) = y_0 + z\Delta y_0$$

$$I = \int_a^b (y_0 + z\Delta y_0)dx \tag{4}$$

$$z = \frac{x - x_0}{h} \quad \rightarrow \quad x = hz + x_0 \text{ diferenciando } dx = hdz \tag{5}$$

Então, na integral, o dx será substituído por hdz.

6.2 Regra dos Trapézios

6.2.1 Obtenção da Fórmula

Para determinar a fórmula da Regra dos Trapézios é utilizado o polinômio de Gregory-Newton de primeira ordem, ou seja, uma reta.

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (3)$$

Da equação (1), obtém-se a aproximação para $f(x)$, da forma:

$$f(x) = P_1(x) = y_0 + z\Delta y_0$$

$$I = \int_a^b (y_0 + z\Delta y_0)\,dx \qquad (4)$$

$$z = \frac{x - x_0}{h} \quad \rightarrow \quad x = hz + x_0 \ \text{ diferenciando } \ dx = hdz \qquad (5)$$

$$z = \frac{x - a}{h}$$

Foi substituído o x_0 por a, que é o limite inferior da integral.

6.2 Regra dos Trapézios

6.2.1 Obtenção da Fórmula

Para determinar a fórmula da Regra dos Trapézios é utilizado o polinômio de Gregory-Newton de primeira ordem, ou seja, uma reta.

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \tag{3}$$

Da equação (1), obtém-se a aproximação para $f(x)$, da forma:

$$f(x) = P_1(x) = y_0 + z\Delta y_0$$

$$I = \int_a^b (y_0 + z\Delta y_0)\,dx \tag{4}$$

$$z = \frac{x - x_0}{h} \quad \rightarrow \quad x = hz + x_0 \text{ diferenciando } dx = hdz \tag{5}$$

$$z = \frac{x-a}{h} \text{ quando } \begin{cases} x = a & \rightarrow \quad z = 0 \\ x = b & \rightarrow \quad z = 1 \end{cases} \tag{6}$$

Veja:

$$z = \frac{a-a}{h} = 0$$

6.2 Regra dos Trapézios

6.2.1 Obtenção da Fórmula

Para determinar a fórmula da Regra dos Trapézios é utilizado o polinômio de Gregory-Newton de primeira ordem, ou seja, uma reta.

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \tag{3}$$

Da equação (1), obtém-se a aproximação para *f*(*x*), da forma:

$$f(x) = P_1(x) = y_0 + z\Delta y_0$$

$$I = \int_a^b (y_0 + z\Delta y_0)dx \tag{4}$$

$$z = \frac{x - x_0}{h} \quad \rightarrow \quad x = hz + x_0 \ \text{ diferenciando } dx = hdz \tag{5}$$

$$z = \frac{x-a}{h} \text{ quando } \begin{cases} x = a \rightarrow z = 0 \\ x = b \rightarrow z = 1 \end{cases} \tag{6}$$

Veja:

$$z = \frac{b-a}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

6.2 Regra dos Trapézios

6.2.1 Obtenção da Fórmula

Para determinar a fórmula da Regra dos Trapézios é utilizado o polinômio de Gregory-Newton de primeira ordem, ou seja, uma reta.

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \tag{3}$$

Da equação (1), obtém-se a aproximação para $f(x)$, da forma:

$$f(x) = P_1(x) = y_0 + z\Delta y_0$$

$$I = \int_a^b (y_0 + z\Delta y_0)\,dx \tag{4}$$

$$z = \frac{x - x_0}{h} \quad \rightarrow \quad x = hz + x_0 \ \text{ diferenciando } dx = h\,dz \tag{5}$$

$$z = \frac{x-a}{h} \text{ quando } \left\{ \begin{matrix} x = a & \rightarrow & z = 0 \\ x = b & \rightarrow & z = 1 \end{matrix} \right\} \tag{6}$$

São os novos limites da integral.

Fazendo as substituições das eqs.(5) e (6) na eq. (4), a integral fica:

$$I = \int_0^1 (y_0 + z\Delta y_0) h dz$$

Fazendo as substituições das eqs.(5) e (6) na eq. (4), a integral fica:

$$I = \int_0^1 (y_0 + z\Delta y_0) h dz$$

Resolvendo a integral, obtém-se:

Fazendo as substituições das eqs.(5) e (6) na eq. (4), a integral fica:

$$I = \int_0^1 (y_0 + z\Delta y_0) h dz$$

Resolvendo a integral, obtém-se:

$$I = \left[y_0 z + \frac{z^2}{2} \Delta y_0 \right]_0^1 h$$

Fazendo as substituições das eqs.(5) e (6) na eq. (4), a integral fica:

$$I = \int_0^1 (y_0 + z\Delta y_0)hdz$$

Resolvendo, obtém-se:

$$I = \left[y_0 z + \frac{z^2}{2}\Delta y_0 \right]_0^1 h$$

$$I = \left\{ y_0 + \frac{1}{2}\Delta y_0 \right\} h$$

Foram substituídos os limites de integração (1 e 0).

Fazendo as substituições das eqs.(5) e (6) na eq. (4), a integral fica:

$$I = \int_0^1 (y_0 + z\Delta y_0)hdz$$

Resolvendo, obtém-se:

$$I = \left[y_0 z + \frac{z^2}{2}\Delta y_0 \right]_0^1 h$$

$$I = \left\{ y_0 + \frac{1}{2}\Delta y_0 \right\} h$$

$$I = h\left\{ y_0 + \frac{1}{2}(y_1 - y_0) \right\}$$

Foi substituída a expressão de diferenças finitas, Δy_0.

Fazendo as substituições das eqs.(5) e (6) na eq. (4), a integral fica:

$$I = \int_0^1 (y_0 + z\Delta y_0) h dz$$

Resolvendo, obtém-se:

$$I = \left[y_0 z + \frac{z^2}{2} \Delta y_0 \right]_0^1 h$$

$$I = \left\{ y_0 + \frac{1}{2} \Delta y_0 \right\} h$$

$$I = h \left\{ y_0 + \frac{1}{2} (y_1 - y_0) \right\}$$

Após o mínimo múltiplo comum, a expressão fica:

Fazendo as substituições das eqs.(5) e (6) na eq. (4), a integral fica:

$$I = \int_0^1 (y_0 + z\Delta y_0) h dz$$

Resolvendo, obtém-se:

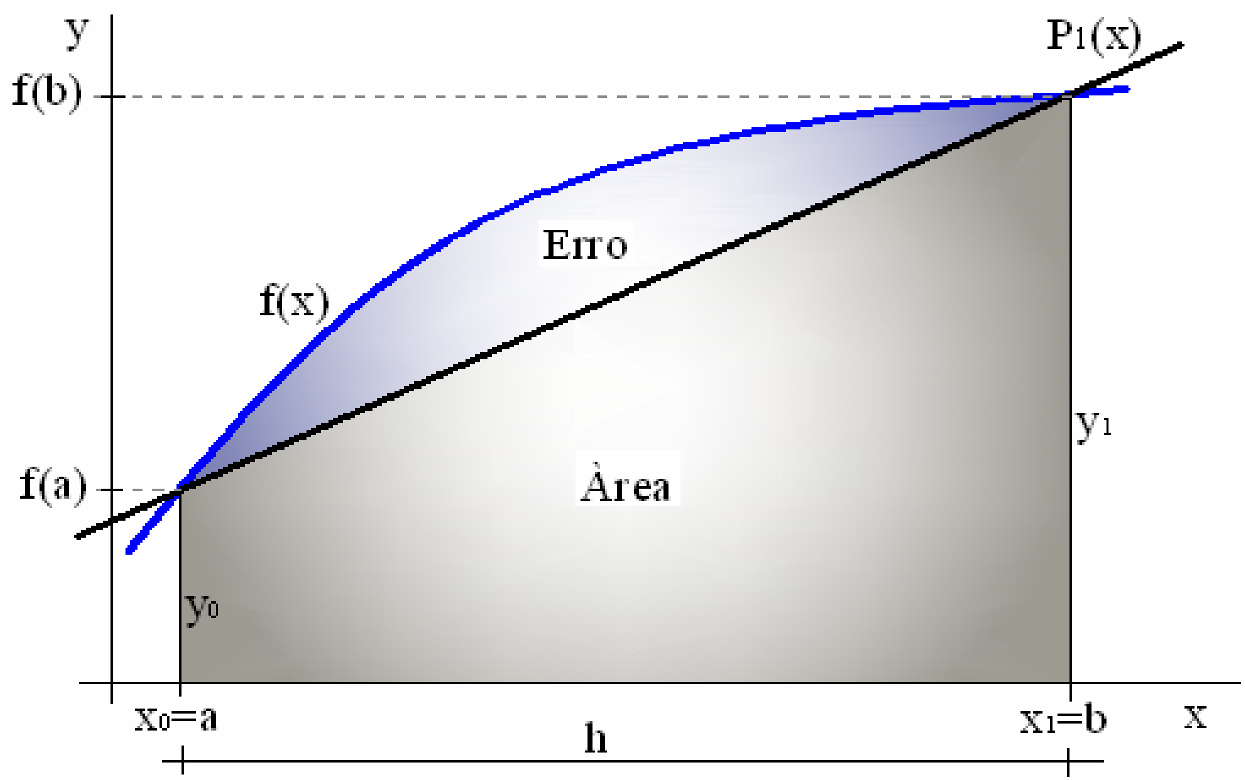
$$I = \left[y_0 z + \frac{z^2}{2} \Delta y_0 \right]_0^1 h$$

$$I = \left\{ y_0 + \frac{1}{2} \Delta y_0 \right\} h$$

$$I = h \left\{ y_0 + \frac{1}{2} (y_1 - y_0) \right\}$$

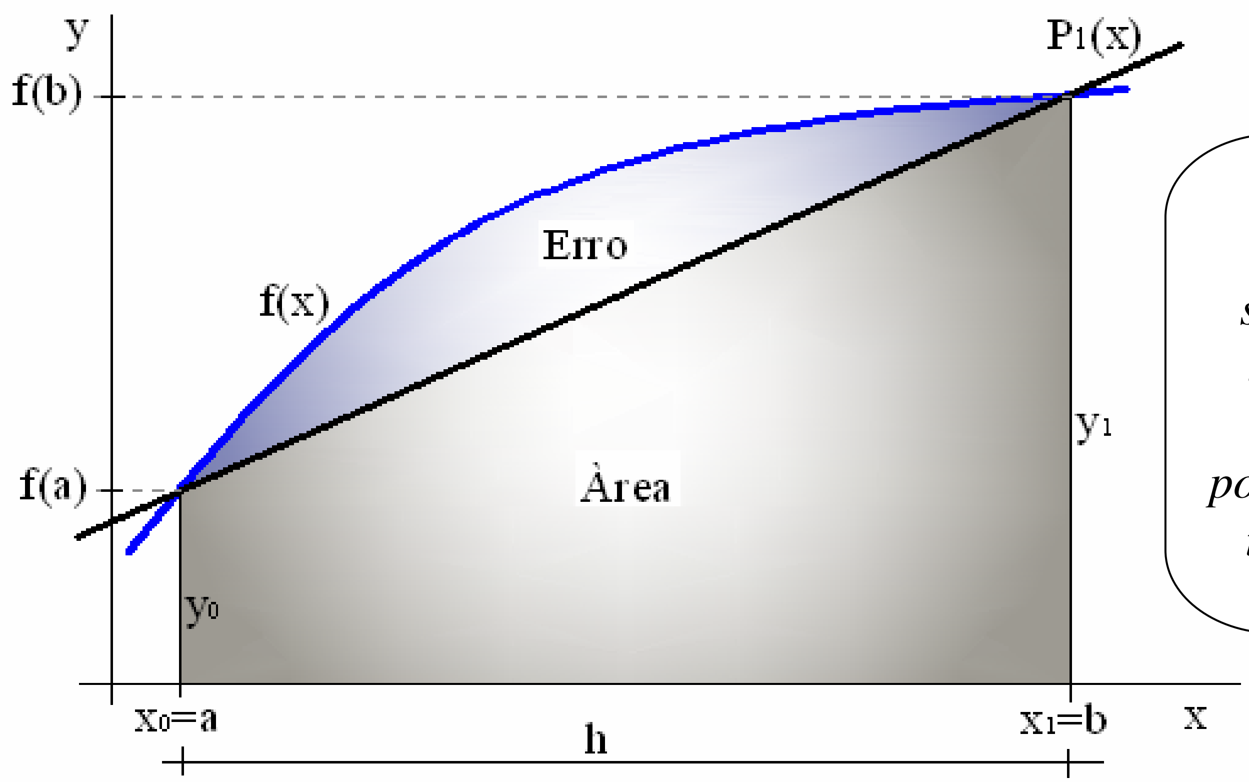
$$I = \frac{h}{2} \{ y_0 + y_1 \} \longrightarrow$$ **É a fórmula da Regra dos Trapézios.** (7)

6.2.2 Interpretação Geométrica



$$I = \frac{h}{2}\{y_0 + y_1\}$$

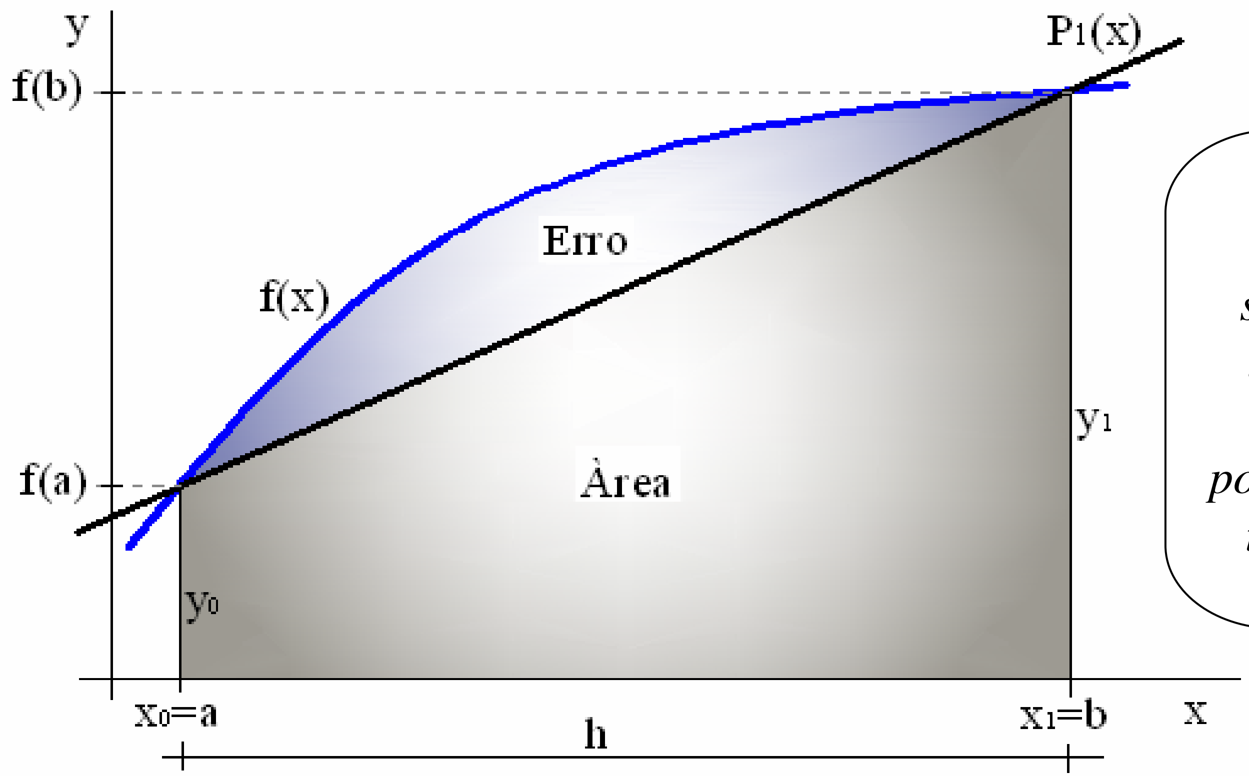
6.2.2 Interpretação Geométrica



*Note que a **Regra dos Trapézios** consiste em substituir a função f(x) por um polinômio de primeira ordem $P_1(x)$. Logo, como pode ser observado na figura, tem-se a **Área** (**I**) formada por um trapézio.*

$$I = \frac{h}{2}\{y_0 + y_1\}$$

6.2.2 Interpretação Geométrica

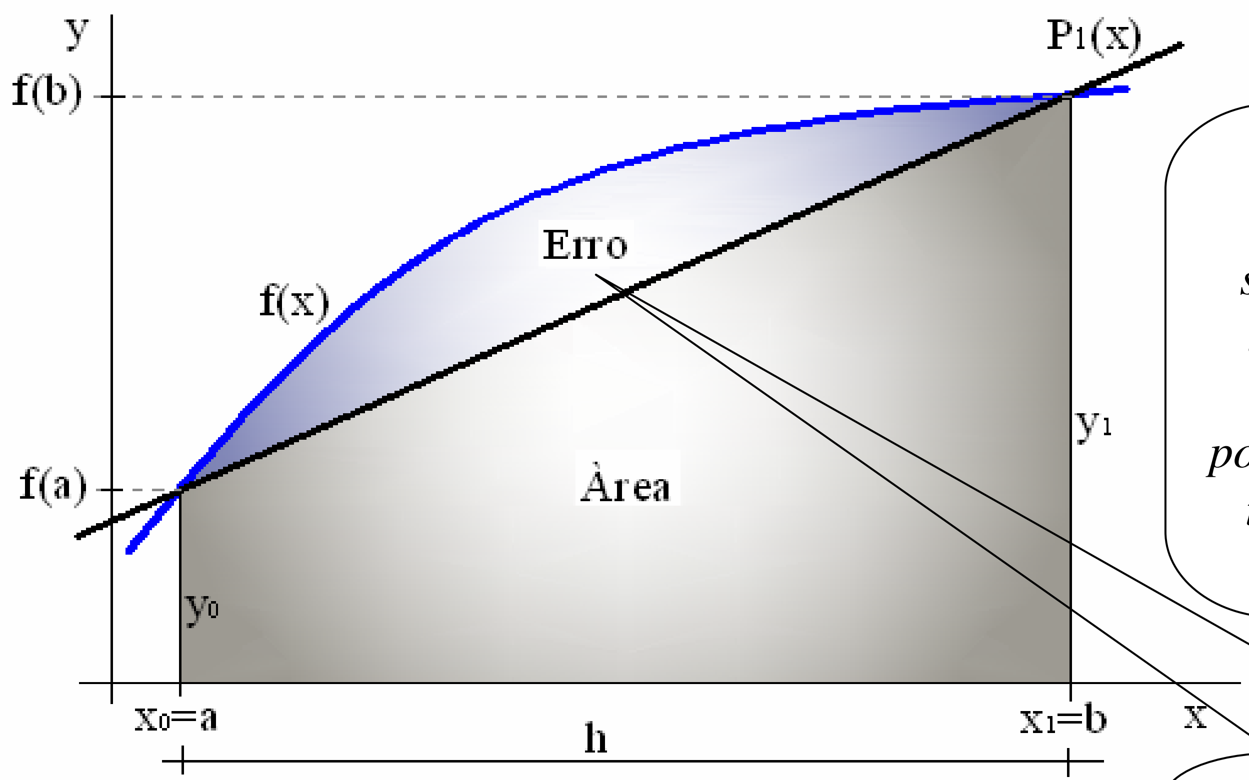


*Note que a **Regra dos Trapézios** consiste em substituir a função f(x) por um polinômio de primeira ordem $P_1(x)$. Logo, como pode ser observado na figura, tem-se a **Área** (**I**) formada por um trapézio.*

$$I = \frac{h}{2}\{y_0 + y_1\}$$

A área de um trapézio é calculada pelo produto da base (h) pela média das alturas em a e b ($(y_0+y_1)/2$).

6.2.2 Interpretação Geométrica



*Note que a Regra dos Trapézios consiste em substituir a função f(x) por um polinômio de primeira ordem $P_1(x)$. Logo, como pode ser observado na figura, tem-se a **Área** (**I**) formada por um trapézio.*

É o erro de truncamento cometido, quando a função f(x) é substituída pelo polinômio $P_1(x)$.

$$I = \frac{h}{2}\{y_0 + y_1\}$$

A área de um trapézio é calculada pelo produto da base (h) pela média das alturas em a e b $((y_0+y_1)/2)$.

6.2.3 Erro de Truncamento:

O erro de truncamento é a diferença entre a solução exata da integral de $f(x)$ e a solução da integral aproximada, calculado por:

$$E = \int_a^b R_1 dx \tag{7}$$

6.2.3 Erro de Truncamento:

O erro de truncamento é a diferença entre a solução exata da integral de $f(x)$ e a solução da integral aproximada, calculado por:

$$E = \int_a^b R_1 dx \tag{7}$$

onde R_1 é o resíduo, conforme eq. (2), é expresso por:

$$R_1 = z\frac{(z-1)}{2!}h^2 f''(\varepsilon) \tag{8}$$

6.2.3 Erro de Truncamento:

O erro de truncamento é a diferença entre a solução exata da integral de $f(x)$ e a solução da integral aproximada, calculado por:

$$E = \int_a^b R_1 dx \tag{7}$$

onde R_1 é o resíduo, conforme eq. (2), é expresso por:

$$R_1 = z\frac{(z-1)}{2!}h^2 f''(\varepsilon) \tag{8}$$

então, substituindo a eq. (8) na eq. (7), tem-se:

$$E = \int_a^b z\frac{(z-1)}{2}h^2 f''(\varepsilon)\,dx$$

6.2.3 Erro de Truncamento:

O erro de truncamento é a diferença entre a solução exata da integral de $f(x)$ e a solução da integral aproximada, calculado por

$$E = \int_a^b R_1 dx \tag{7}$$

onde R_1 é o resíduo, conforme eq. (2), é expresso por:

$$R_1 = z\frac{(z-1)}{2!}h^2 f''(\varepsilon) \tag{8}$$

então, substituindo a eq. (8) na eq. (7), tem-se:

$$E = \int_a^b z\frac{(z-1)}{2}h^2 f''(\varepsilon)\, dx$$

Substituindo os limites de integração e o *dx* por *hdz*, conforme eqs. (5) e (6), obtém-se:

$$E = \int_0^1 z\frac{(z-1)}{2}h^2 f''(\varepsilon)\, hdz$$

$$E = \int_0^1 z \frac{(z-1)}{2} h^2 f''(\varepsilon)\, hdz = \frac{h^3 f''(\varepsilon)}{2} \int_0^1 (z^2 - z) dz$$

$$E = \int_0^1 z \frac{(z-1)}{2} h^2 f''(\varepsilon)\, h dz = \frac{h^3 f''(\varepsilon)}{2} \int_0^1 (z^2 - z) dz$$

Integrando a equação acima, tem-se:

$$E = \frac{1}{2} h^3 f''(\varepsilon) \left[\frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2} \right]_0^1$$

$$E = \int_0^1 z \frac{(z-1)}{2} h^2 f''(\varepsilon)\, h dz = \frac{h^3 f''(\varepsilon)}{2} \int_0^1 (z^2 - z) dz$$

Integrando a equação acima tem-se:

$$E = \frac{1}{2} h^3 f''(\varepsilon) \left[\frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2} \right]_0^1$$

$$E = \frac{1}{2} h^3 f''(\varepsilon) \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right\}$$

Substituído os limites de integração.

$$E=\int_0^1 z\frac{(z-1)}{2}h^2 f''(\varepsilon)\,h dz=\frac{h^3 f''(\varepsilon)}{2}\int_0^1 (z^2-z)dz$$

Integrando a equação acima, tem-se:

$$E=\frac{1}{2}h^3 f''(\varepsilon)\left[\frac{z^3}{3}-\frac{z^2}{2}\right]_0^1$$

$$E=\frac{1}{2}h^3 f''(\varepsilon)\left\{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right\}$$

$$E=\frac{1}{2}h^3 f''(\varepsilon)\left\{\frac{2-3}{6}\right\}$$

$$E = \int_0^1 z\,\frac{(z-1)}{2}\,h^2 f''(\varepsilon)\,h\,dz = \frac{h^3 f''(\varepsilon)}{2}\int_0^1 (z^2 - z)\,dz$$

Integrando a equação acima, tem-se:

$$E = \frac{1}{2}h^3 f''(\varepsilon)\left[\frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2}\right]_0^1$$

$$E = \frac{1}{2}h^3 f''(\varepsilon)\left\{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right\}$$

$$E = \frac{1}{2}h^3 f''(\varepsilon)\left\{\frac{2-3}{6}\right\}$$

$$E = -\frac{h^3}{12} f''(\varepsilon) \qquad (9)$$

$$E = \int_0^1 z\frac{(z-1)}{2}h^2 f''(\varepsilon)\, h dz = \frac{h^3 f''(\varepsilon)}{2}\int_0^1 (z^2 - z)dz$$

Integrando a equação acima tem-se:

$$E = \frac{1}{2}h^3 f''(\varepsilon)\left[\frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2}\right]_0^1$$

$$E = \frac{1}{2}h^3 f''(\varepsilon)\left\{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right\}$$

$$E = \frac{1}{2}h^3 f''(\varepsilon)\left\{\frac{2-3}{6}\right\}$$

$$E = -\frac{h^3}{12} f''(\varepsilon) \qquad (9)$$

onde E é o erro de truncamento da Regra dos Trapézios e ε é um valor entre $a \leq \varepsilon \leq b$, para gerar um valor máximo de $f''(\varepsilon)$.

Exemplo:

1) Calcular, pela Regra dos Trapézios e analiticamente, o valor da integral definida por $I = \int_{3,0}^{3,6} \frac{1}{x}\, dx$ e comparar os resultados:

Exemplo:

1) Calcular, pela Regra dos Trapézios e analiticamente, o valor da integral definida por $I = \int_{3,0}^{3,6} \frac{1}{x}\, dx$ e comparar os resultados:

Solução numérica:

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + y_1)$$

Fórmula da Regra dos Trapézios.

Exemplo:

1) Calcular, pela Regra dos Trapézios e analiticamente, o valor da integral definida por $I = \int_{3,0}^{3,6} \frac{1}{x}\,dx$ e comparar os resultados:

Solução numérica:

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + y_1)$$

Primeiramente, necessita-se calcular os valores de h, y_0 e y_1, veja:

Exemplo:

1) Calcular, pela Regra dos Trapézios e analiticamente, o valor da integral definida por $I = \int_{3,0}^{3,6} \frac{1}{x}\, dx$ e comparar os resultados:

Solução numérica:

$$f(x_i) = y_i = \frac{1}{x_i}$$

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + y_1)$$

Função de integração.

Exemplo:

1) Calcular, pela Regra dos Trapézios e analiticamente, o valor da integral definida por $I = \int_{3,0}^{3,6} \frac{1}{x}\, dx$ e comparar os resultados:

Solução numérica:

$$f(x_i) = y_i = \frac{1}{x_i} \quad \therefore \quad x_0 = 3,0$$

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + y_1)$$

Limite inferior da integral.

Exemplo:

1) Calcular, pela Regra dos Trapézios e analiticamente, o valor da integral definida por $I = \int_{3,0}^{3,6} \frac{1}{x}\,dx$ e comparar os resultados:

Solução numérica:

$$f(x_i) = y_i = \frac{1}{x_i} \quad \therefore \; x_0 = 3{,}0 \text{ e } x_1 = 3{,}6$$

Limite superior da integral.

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + y_1)$$

Exemplo:

1) Calcular, pela Regra dos Trapézios e analiticamente, o valor da integral definida por $I = \int_{3,0}^{3,6} \frac{1}{x}\, dx$ e comparar os resultados:

Solução numérica:

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + y_1)$$

$$\begin{cases} f(x_i) = y_i = \dfrac{1}{x_i} \quad \therefore \; x_0 = 3,0 \text{ e } x_1 = 3,6 \\ y_0 = \dfrac{1}{x_0} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Cálculo do y_0.

Exemplo:

1) Calcular, pela Regra dos Trapézios e analiticamente, o valor da integral definida por $I = \int_{3,0}^{3,6} \frac{1}{x}\, dx$ e comparar os resultados:

Solução numérica:

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + y_1)$$

$$\begin{cases} f(x_i) = y_i = \dfrac{1}{x_i} \quad \therefore \; x_0 = 3,0 \text{ e } x_1 = 3,6 \\[2ex] y_0 = \dfrac{1}{x_0} = \dfrac{1}{3} \text{ e } y_1 = \dfrac{1}{x_1} = \dfrac{1}{3,6} \end{cases}$$

Cálculo do y_1.

Exemplo:

1) Calcular, pela Regra dos Trapézios e analiticamente, o valor da integral definida por $I=\int_{3,0}^{3,6}\frac{1}{x}\,dx$ e comparar os resultados:

Solução numérica:

$$I=\frac{h}{2}(y_0+y_1)$$

$$\begin{cases} f(x_i)=y_i=\dfrac{1}{x_i} \quad \therefore\ x_0=3,0 \text{ e } x_1=3,6 \\[2ex] y_0=\dfrac{1}{x_0}=\dfrac{1}{3} \text{ e } y_1=\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{1}{3,6} \\[2ex] h=x_1-x_0=3,6-3,0=0,6 \end{cases}$$

Cálculo do h.

Exemplo:

1) Calcular, pela Regra dos Trapézios e analiticamente, o valor da integral definida por $I = \int_{3,0}^{3,6} \frac{1}{x}\,dx$ e comparar os resultados:

Solução numérica:

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + y_1)$$

$$f(x_i) = y_i = \frac{1}{x_i} \quad \therefore \; x_0 = 3{,}0 \text{ e } x_1 = 3{,}6$$

$$y_0 = \frac{1}{x_0} = \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad y_1 = \frac{1}{x_1} = \frac{1}{3{,}6}$$

$$h = x_1 - x_0 = 3{,}6 - 3{,}0 = 0{,}6$$

Substituindo h, y_0 e y_1, obtém-se:

Exemplo:

1) Calcular, pela Regra dos Trapézios e analiticamente, o valor da integral definida por $I = \int_{3,0}^{3,6} \frac{1}{x}\, dx$ e comparar os resultados:

Solução numérica:

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + y_1)$$

$$I = \frac{0,6}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3,6}\right) = 0,183333$$

$$\begin{cases} f(x_i) = y_i = \dfrac{1}{x_i} \quad \therefore \; x_0 = 3,0 \text{ e } x_1 = 3,6 \\ y_0 = \dfrac{1}{x_0} = \dfrac{1}{3} \quad \text{e} \quad y_1 = \dfrac{1}{x_1} = \dfrac{1}{3,6} \\ h = x_1 - x_0 = 3,6 - 3,0 = 0,6 \end{cases}$$

É o valor da solução numérica, sem considerar o erro de truncamento.

Exemplo:

1) Calcular, pela Regra dos Trapézios e analiticamente, o valor da integral definida por $I = \int_{3,0}^{3,6} \frac{1}{x}\, dx$ e comparar os resultados:

Solução numérica:

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + y_1)$$

$$I = \frac{0,6}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3,6}\right) = 0,183333$$

$$\begin{cases} f(x_i) = y_i = \dfrac{1}{x_i} \quad \therefore\ x_0 = 3,0 \text{ e } x_1 = 3,6 \\ y_0 = \dfrac{1}{x_0} = \dfrac{1}{3} \quad \text{e} \quad y_1 = \dfrac{1}{x_1} = \dfrac{1}{3,6} \\ h = x_1 - x_0 = 3,6 - 3,0 = 0,6 \end{cases}$$

Erro de truncamento:

$$E = -\frac{h^3}{12} f''(\varepsilon)$$

Exemplo:

1) Calcular, pela Regra dos Trapézios e analiticamente, o valor da integral definida por $I = \int_{3,0}^{3,6} \frac{1}{x}\, dx$ e comparar os resultados:

Solução numérica:

$$\begin{cases} f(x_i) = y_i = \dfrac{1}{x_i} \quad \therefore\ x_0 = 3,0 \text{ e } x_1 = 3,6 \\[2ex] y_0 = \dfrac{1}{x_0} = \dfrac{1}{3} \quad \text{e} \quad y_1 = \dfrac{1}{x_1} = \dfrac{1}{3,6} \\[2ex] h = x_1 - x_0 = 3,6 - 3,0 = 0,6 \end{cases}$$

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + y_1)$$

$$I = \frac{0,6}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3,6}\right) = 0,183333$$

Erro de truncamento:

$$E = -\frac{h^3}{12} f''(\varepsilon)$$

Necessita-se calcular o valor máximo da segunda derivada da função f(x), onde ε é um valor qualquer que pertence ao intervalo de integração.

Exemplo:

1) Calcular, pela Regra dos Trapézios e analiticamente, o valor da integral definida por $I = \int_{3,0}^{3,6} \frac{1}{x}\, dx$ e comparar os resultados:

Solução numérica:

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + y_1)$$

$$I = \frac{0,6}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3,6}\right) = 0,183333$$

$$\begin{cases} f(x_i) = y_i = \dfrac{1}{x_i} \quad \therefore \; x_0 = 3,0 \text{ e } x_1 = 3,6 \\ y_0 = \dfrac{1}{x_0} = \dfrac{1}{3} \quad \text{e} \quad y_1 = \dfrac{1}{x_1} = \dfrac{1}{3,6} \\ h = x_1 - x_0 = 3,6 - 3,0 = 0,6 \end{cases}$$

Erro de truncamento:

$$E = -\frac{h^3}{12} f''(\varepsilon)$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Exemplo:

1) Calcular, pela Regra dos Trapézios e analiticamente, o valor da integral definida por $I = \int_{3,0}^{3,6} \frac{1}{x}\, dx$ e comparar os resultados:

Solução numérica:

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + y_1)$$

$$I = \frac{0,6}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3,6}\right) = 0,183333$$

$$\begin{cases} f(x_i) = y_i = \dfrac{1}{x_i} \quad \therefore \; x_0 = 3,0 \text{ e } x_1 = 3,6 \\ y_0 = \dfrac{1}{x_0} = \dfrac{1}{3} \quad \text{e} \quad y_1 = \dfrac{1}{x_1} = \dfrac{1}{3,6} \\ h = x_1 - x_0 = 3,6 - 3,0 = 0,6 \end{cases}$$

Erro de truncamento:

$$E = -\frac{h^3}{12} f''(\varepsilon)$$

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x} \\ f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \end{cases}$$

Exemplo:

1) Calcular, pela Regra dos Trapézios e analiticamente, o valor da integral definida por $I = \int_{3,0}^{3,6} \frac{1}{x}\, dx$ e comparar os resultados:

Solução numérica:

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + y_1)$$

$$I = \frac{0,6}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3,6}\right) = 0,183333$$

$$\begin{cases} f(x_i) = y_i = \dfrac{1}{x_i} \quad \therefore\ x_0 = 3,0 \text{ e } x_1 = 3,6 \\ y_0 = \dfrac{1}{x_0} = \dfrac{1}{3} \quad \text{e} \quad y_1 = \dfrac{1}{x_1} = \dfrac{1}{3,6} \\ h = x_1 - x_0 = 3,6 - 3,0 = 0,6 \end{cases}$$

Erro de truncamento:

$$E = -\frac{h^3}{12} f''(\varepsilon)$$

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x} \\ f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \\ f''(x) = \dfrac{2}{x^3} \end{cases}$$

Exemplo:

1) Calcular, pela Regra dos Trapézios e analiticamente, o valor da integral definida por $I = \int_{3,0}^{3,6} \frac{1}{x}\, dx$ e comparar os resultados:

Solução numérica:

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + y_1)$$

$$I = \frac{0,6}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3,6}\right) = 0,183333$$

$$\begin{cases} f(x_i) = y_i = \dfrac{1}{x_i} \quad \therefore \; x_0 = 3,0 \text{ e } x_1 = 3,6 \\ y_0 = \dfrac{1}{x_0} = \dfrac{1}{3} \quad \text{e} \quad y_1 = \dfrac{1}{x_1} = \dfrac{1}{3,6} \\ h = x_1 - x_0 = 3,6 - 3,0 = 0,6 \end{cases}$$

Erro de truncamento:

$$E = -\frac{h^3}{12} f''(\varepsilon)$$

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x} \\ f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \\ f''(x) = \dfrac{2}{x^3} = \dfrac{2}{3^3} \end{cases}$$

O valor máximo da segunda derivada, neste caso, é quando substitui-se $x = 3$.

Exemplo:

1) Calcular, pela Regra dos Trapézios e analiticamente, o valor da integral definida por $I = \int_{3,0}^{3,6} \frac{1}{x}\,dx$ e comparar os resultados:

Solução numérica:

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + y_1)$$

$$I = \frac{0,6}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3,6}\right) = 0,183333$$

$$\begin{cases} f(x_i) = y_i = \dfrac{1}{x_i} \quad \therefore\ x_0 = 3,0 \text{ e } x_1 = 3,6 \\ y_0 = \dfrac{1}{x_0} = \dfrac{1}{3} \quad \text{e} \quad y_1 = \dfrac{1}{x_1} = \dfrac{1}{3,6} \\ h = x_1 - x_0 = 3,6 - 3,0 = 0,6 \end{cases}$$

Erro de truncamento:

$$E = -\frac{h^3}{12} f''(\varepsilon) = -\frac{h^3}{12}\frac{2}{x^3}$$

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x} \\ f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \\ f''(x) = \dfrac{2}{x^3} = \dfrac{2}{3^3} \end{cases}$$

Exemplo:

1) Calcular, pela Regra dos Trapézios e analiticamente, o valor da integral definida por $I = \int_{3,0}^{3,6} \frac{1}{x}\,dx$ e comparar os resultados:

Solução numérica:

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + y_1)$$

$$I = \frac{0,6}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3,6}\right) = 0,183333$$

$$\begin{cases} f(x_i) = y_i = \dfrac{1}{x_i} \quad \therefore\ x_0 = 3,0 \text{ e } x_1 = 3,6 \\ y_0 = \dfrac{1}{x_0} = \dfrac{1}{3} \quad \text{e} \quad y_1 = \dfrac{1}{x_1} = \dfrac{1}{3,6} \\ h = x_1 - x_0 = 3,6 - 3,0 = 0,6 \end{cases}$$

Erro de truncamento:

$$E = -\frac{h^3}{12} f''(\varepsilon) = -\frac{h^3}{12}\frac{2}{x^3} = -\frac{(0,6)^3}{12}\left(\frac{2}{3^3}\right)$$

$$E = -0,0013333$$

É o erro de truncamento.

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x} \\ f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \\ f''(x) = \dfrac{2}{x^3} = \dfrac{2}{3^3} \end{cases}$$

Exemplo:

1) Calcular, pela Regra dos Trapézios e analiticamente, o valor da integral definida por $I = \int_{3,0}^{3,6} \frac{1}{x}\, dx$ e comparar os resultados:

Solução numérica:

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + y_1)$$

$$I = \frac{0,6}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3,6}\right) = 0,183333$$

$$\begin{cases} f(x_i) = y_i = \dfrac{1}{x_i} \quad \therefore \; x_0 = 3,0 \text{ e } x_1 = 3,6 \\ y_0 = \dfrac{1}{x_0} = \dfrac{1}{3} \quad \text{e} \quad y_1 = \dfrac{1}{x_1} = \dfrac{1}{3,6} \\ h = x_1 - x_0 = 3,6 - 3,0 = 0,6 \end{cases}$$

Erro de truncamento:

$$E = -\frac{h^3}{12} f''(\varepsilon) = -\frac{h^3}{12}\frac{2}{x^3} = -\frac{(0,6)^3}{12}\left(\frac{2}{3^3}\right)$$

$$E = -0,0013333$$

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x} \\ f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \\ f''(x) = \dfrac{2}{x^3} = \dfrac{2}{3^3} \end{cases}$$

Solução aproximada:

$$I_{aprox} = I + E = 0,183333 - 0,0013333$$

$$I_{aprox} = 0,182$$

Solução analítica ou exata:

$$I_{exata} = \int_{3,0}^{3,6} \frac{1}{x} dx$$

Solução analítica ou exata:

$$I_{exata} = \int_{3,0}^{3,6} \frac{1}{x} dx$$

Resolvendo a integral, obtém-se:

Solução analítica ou exata:

$$I_{exata} = \int_{3,0}^{3.6} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_{3,0}^{3,6} = \ln 3,6 - \ln 3,0$$

$$I_{exata} = 0,182321$$

É a solução exata da integral.

Solução analítica ou exata:

$$I_{exata} = \int_{3,0}^{3.6} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_{3,0}^{3,6} = \ln 3,6 - \ln 3,0$$

$$I_{exata} = 0,182321$$

Comparação entre as duas soluções:

$$\left.\begin{aligned} I_{aprox} &= 0,182 \\ I_{exata} &= 0,182321 \end{aligned}\right\}$$

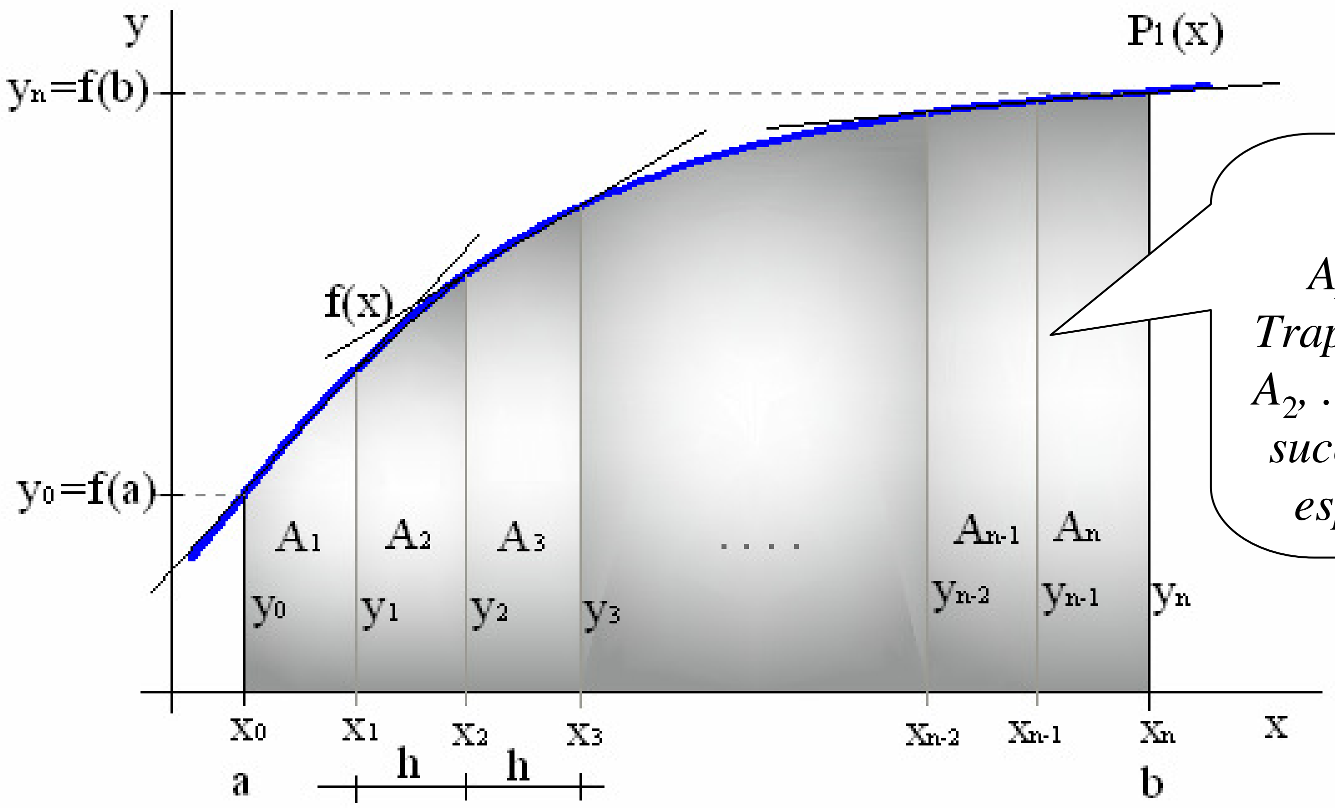
Comparando-se duas soluções, verifica-se que se obteve uma boa precisão. No entanto, esta precisão pode ser melhorada se a Regra dos Trapézios for aplicada a pequenos intervalos de h. Veja a seguir ...

6.2.4 Fórmula composta:

Uma forma de melhorar os resultados da Regra dos Trapézios é subdividir o intervalo de integração $[a, b]$ em n subintervalos de largura h e, a cada subintervalo, aplicar a Regra dos Trapézios.

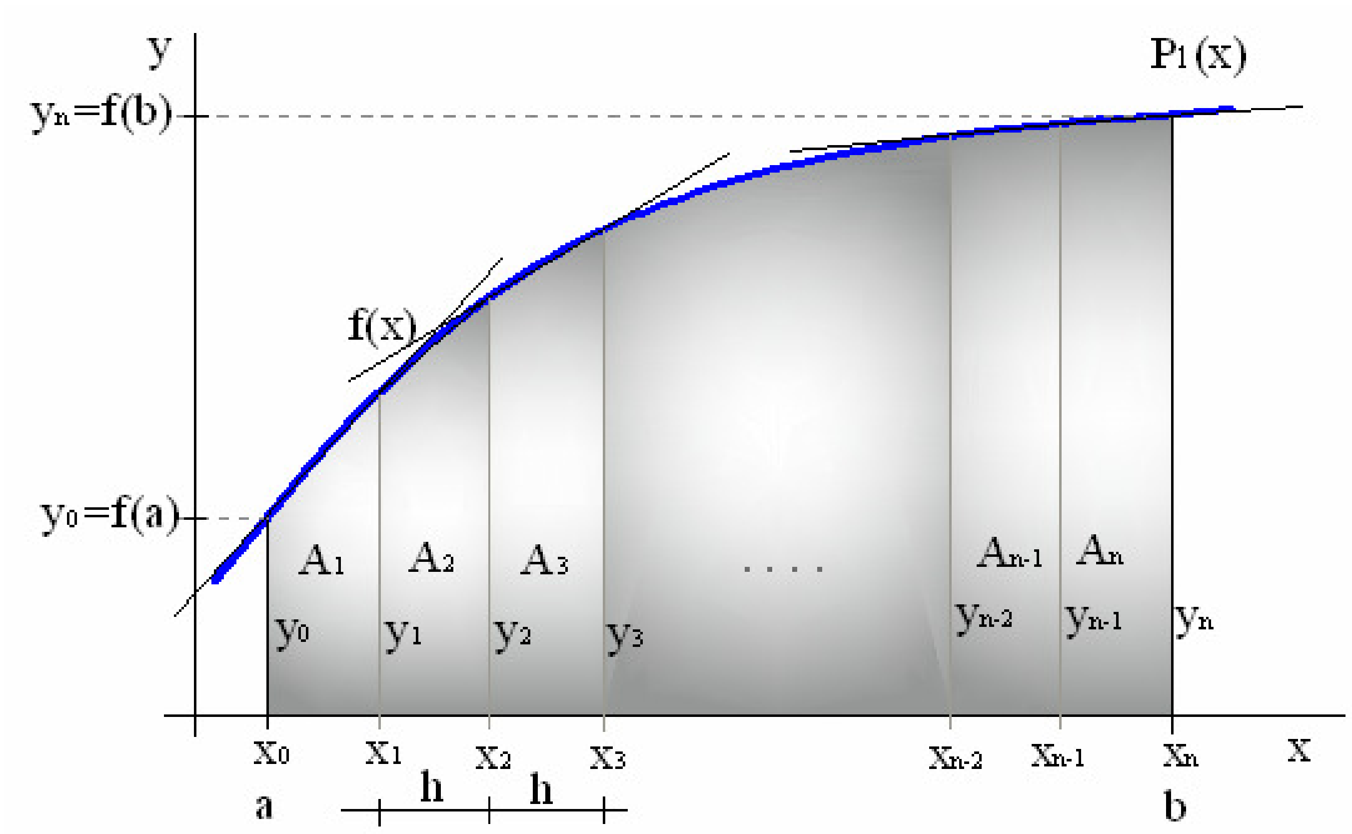
6.2.4 Fórmula composta:

Uma forma de melhorar os resultados da Regra dos Trapézios é subdividir o intervalo de integração [*a*, *b*] em *n* subintervalos de largura *h* e, a cada subintervalo, aplicar a Regra dos Trapézios.



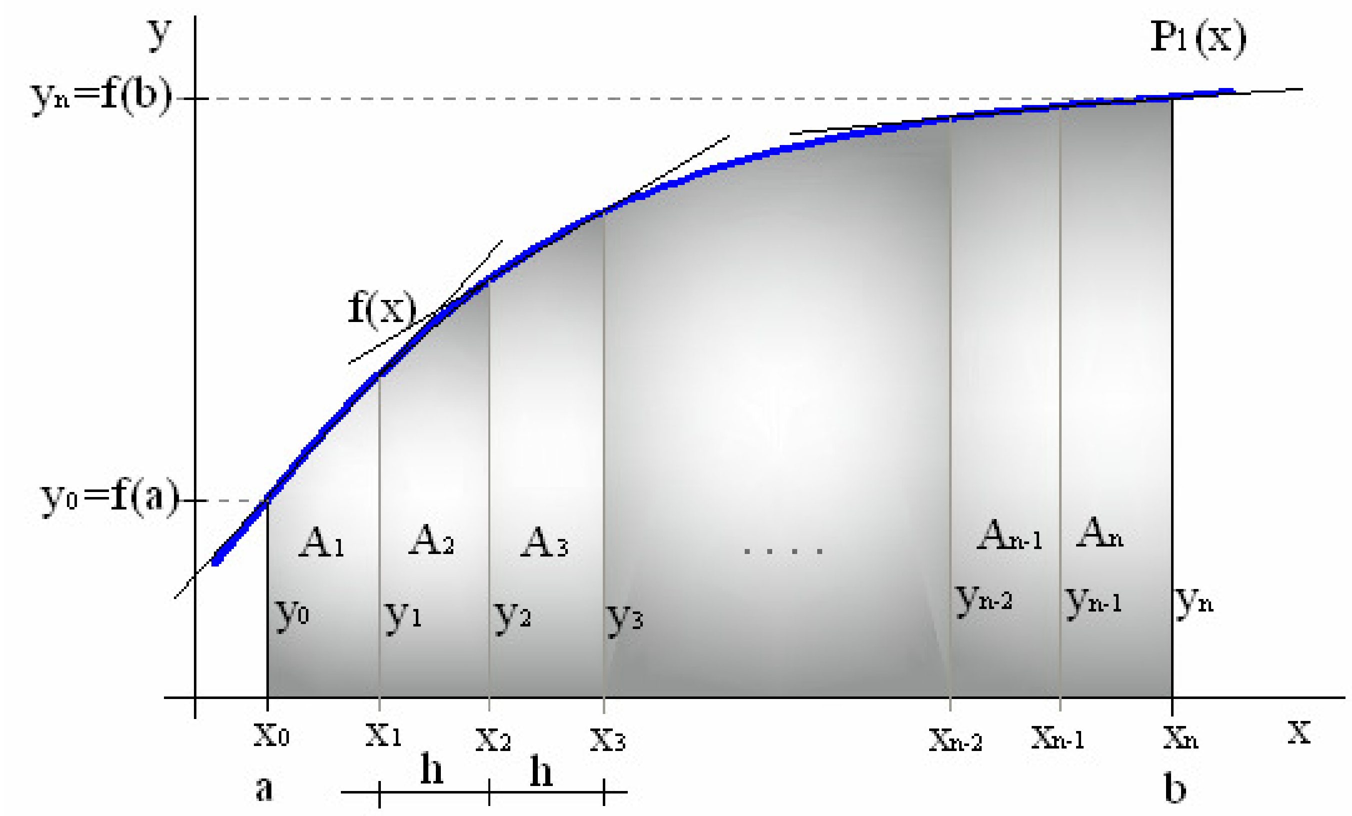
Observe a figura.

Aplica-se a Regra dos Trapézios para calcular A_1, A_2, ... , A_n, *onde dois pontos sucessivos são igualmente espaçados de h. Veja ...*



$$I = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$$

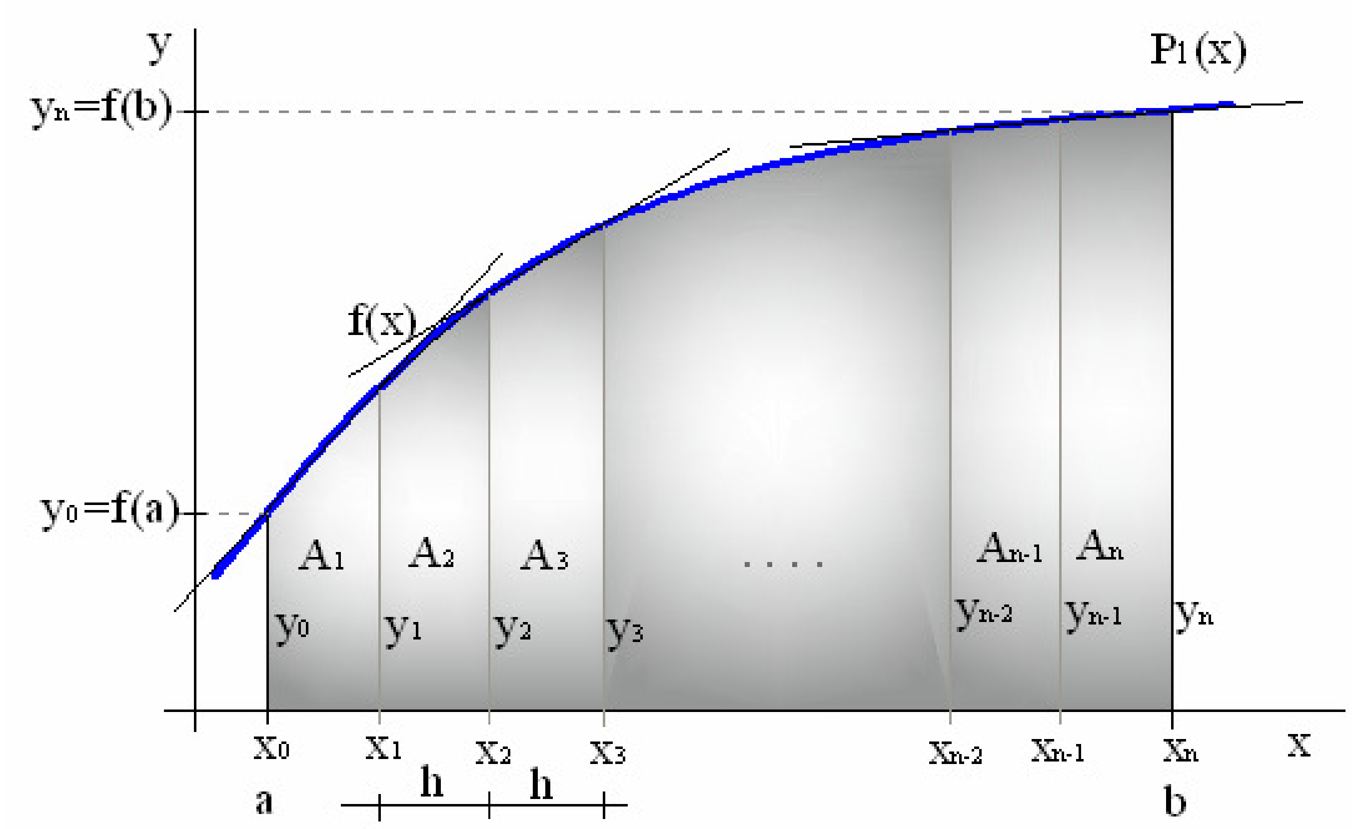
A área total é igual ao somatório das pequenas áreas, A_1, A_2, ... , A_n, calculadas através da Regra dos Trapézios.



$$I = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$$

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h}{2}(y_1 + y_2) + \ldots + \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n)$$

Foi aplicada a Regra dos Trapézios.



$$I = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$$

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h}{2}(y_1 + y_2) + \ldots + \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n)$$

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n)$$

Reorganizado os termos, obteve-se a fórmula composta da Regra dos Trapézios.

6.2.5 Erro de truncamento da fórmula composta

É a soma dos erros cometidos na aplicação da Regra dos Trapézios, nos subintervalos de integração.

6.2.5 Erro de truncamento da fórmula composta

É a soma dos erros cometidos na aplicação da Regra dos Trapézios, nos subintervalos de integração.

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots + E_n$$

6.2.5 Erro de truncamento da fórmula composta

É a soma dos erros cometidos na aplicação da Regra dos Trapézios, nos subintervalos de integração.

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots + E_n$$

$$E = -n\frac{h^3 f''(\varepsilon)}{12}$$

O erro de truncamento da fórmula simples da Regra dos Trapézios é multiplicado por n.

6.2.5 Erro de truncamento da fórmula composta

É a soma dos erros cometidos na aplicação da Regra dos Trapézios, nos subintervalos de integração.

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots + E_n$$

$$E = -n\frac{h^3 f''(\varepsilon)}{12} = -\frac{n}{12}\left(\frac{b-a}{n}\right)^3 f''(\varepsilon)$$

$$E = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\varepsilon)$$

É o erro de truncamento da fórmula composta da Regra dos Trapézios.

Exercícios:

2) Calcular numericamente a integral abaixo, utilizando a regra dos trapézios composta, subdividindo o intervalo de integração em 6 subintervalos:

$$I = \int_{3,0}^{3,6} \frac{1}{x} dx$$

Exercícios:

2) Calcular numericamente a integral abaixo, utilizando a regra dos trapézios composta, subdividindo o intervalo de integração em 6 subintervalos:

$$I = \int_{3,0}^{3,6} \frac{1}{x} dx$$

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n)$$

Solução numérica:

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 + y_6)$$

Exercícios:

2) Calcular numericamente a integral abaixo utilizando a regra dos trapézios composta, subdividindo o intervalo de integração em 6 subintervalos:

$$I = \int_{3,0}^{3,6} \frac{1}{x} dx \qquad\qquad I = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n)$$

Solução numérica:

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 + y_6)$$

Note que, para calcular I, é necessário determinar os valores de h e y_0, y_1, y_2, ... , y_6.

Exercícios:

2) Calcular numericamente a integral abaixo, utilizando a regra dos trapézios composta, subdividindo o intervalo de integração em 6 subintervalos:

$$I = \int_{3,0}^{3,6} \frac{1}{x}\,dx$$

Solução numérica:

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 + y_6)$$

A função é $y_i = f(x_i) = \dfrac{1}{x_i}\,, \qquad i = 0,1,2,\ldots,n$

O h é definido por: $h = \dfrac{b-a}{n}$

Note que a é o limite inferior da integral, b é o limite superior e n é o número de subintervalos.

Exercícios:

2) Calcular numericamente a integral abaixo, utilizando a regra dos trapézios composta, subdividindo o intervalo de integração em 6 subintervalos:

$$I = \int_{3,0}^{3,6} \frac{1}{x} dx$$

Solução numérica:

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 + y_6)$$

A função é $y_i = f(x_i) = \dfrac{1}{x_i}$, $\qquad i = 0,1,2,\ldots,n$

O h é definido por: $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{3,6-3,0}{6} = 0,1$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	$m_i{*}y_i$

Para facilitar o cálculo da integral aproximada (I), pode-se montar uma tabela, conforme apresentada acima.

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	$m_i * y_i$

A tabela tem as seguintes colunas: i que representa os índices, x_i contém os valores das coordenadas x, y_i contém os valores das coordenadas y, m_i contém os multiplicadores de y_i e a coluna m_i*y_i que contém o resultado deste produto.

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	$m_i{*}y_i$
0				

É o primeiro valor de i.

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 + y_6) \quad \therefore y_i = \frac{1}{x_i}$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	$m_i * y_i$
0	3,0			

O primeiro valor de x_i é $x_0 = 3{,}0$ que é o valor do limite inferior da integral.

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 + y_6) \quad \therefore y_i = \frac{1}{x_i}$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	m_i*y_i
0	3,0	0,33333333		

O valor de y_i é obtido substituindo x_i na função de integração $y_0 = 1/x_0 = 1/3 = 0{,}33333333.$

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 + y_6) \quad \therefore y_i = \frac{1}{x_i}$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	$m_i{*}y_i$
0	3,0	0,33333333	1	

É o multiplicador de y_0. Veja na fórmula abaixo.

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 + y_6) \quad \therefore y_i = \frac{1}{x_i}$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	$m_i * y_i$
0	3,0	0,33333333	1	0,33333333

É o resultado do produto $m_0 * y_0$.

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 + y_6) \quad \therefore y_i = \frac{1}{x_i}$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	$m_i * y_i$
0	3,0	0,33333333	1	0,33333333
1	3,1			

O valor de x_i é obtido pela expressão:

$x_i = x_{i-1} + h$ logo $x_1 = x_0 + h = 3{,}0 + 0{,}1 = 3{,}1$

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 + y_6) \quad \therefore y_i = \frac{1}{x_i}$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	m_i*y_i
0	3,0	0,33333333	1	0,33333333
1	3,1	0,32258065		

O valor de y_i é obtido substituindo x_i na função de integração:

$$y_1 = 1/x_1 = 1/3{,}1 = 0{,}32258065.$$

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 + y_6) \quad \therefore y_i = \frac{1}{x_i}$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	m_i*y_i
0	3,0	0,33333333	1	0,33333333
1	3,1	0,32258065	2	

É o multiplicador de y_1. Veja na fórmula abaixo.

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 + y_6) \qquad \therefore\ y_i = \frac{1}{x_i}$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	$m_i * y_i$
0	3,0	0,33333333	1	0,33333333
1	3,1	0,32258065	2	0,64516129

É o resultado do produto $m_1 * y_1$.

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 + y_6) \qquad \therefore y_i = \frac{1}{x_i}$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	m_i*y_i
0	3,0	0,33333333	1	0,33333333
1	3,1	0,32258065	2	0,64516129

É importante acompanhar as operações.

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 + y_6) \qquad \therefore\ y_i = \frac{1}{x_i}$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	$m_i * y_i$
0	3,0	0,33333333	1	0,33333333
1	3,1	0,32258065	2	0,64516129
2	3,2			

$x_2 = x_1 + h$

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 + y_6) \quad \therefore y_i = \frac{1}{x_i}$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	m_i*y_i
0	3,0	0,33333333	1	0,33333333
1	3,1	0,32258065	2	0,64516129
2	3,2	0,31250000		

$$y_2 = \frac{1}{x_2}$$

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 + y_6) \qquad \therefore\ y_i = \frac{1}{x_i}$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	m_i*y_i
0	3,0	0,33333333	1	0,33333333
1	3,1	0,32258065	2	0,64516129
2	3,2	0,31250000	2	

É o multiplicador de y_2. Veja na fórmula abaixo.

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 + y_6) \qquad \therefore y_i = \frac{1}{x_i}$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	$m_i{*}y_i$
0	3,0	0,33333333	1	0,33333333
1	3,1	0,32258065	2	0,64516129
2	3,2	0,31250000	2	0,62500000

$m_2 * y_2$

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 + y_6) \qquad \therefore\ y_i = \frac{1}{x_i}$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	$m_i * y_i$
0	3,0	0,33333333	1	0,33333333
1	3,1	0,32258065	2	0,64516129
2	3,2	0,31250000	2	0,62500000
3	3,3			

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 + y_6) \qquad \therefore\ y_i = \frac{1}{x_i}$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	$m_i * y_i$
0	3,0	0,33333333	1	0,33333333
1	3,1	0,32258065	2	0,64516129
2	3,2	0,31250000	2	0,62500000
3	3,3	0,30303030		

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 + y_6) \qquad \therefore\ y_i = \frac{1}{x_i}$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	$m_i * y_i$
0	3,0	0,33333333	1	0,33333333
1	3,1	0,32258065	2	0,64516129
2	3,2	0,31250000	2	0,62500000
3	3,3	0,30303030	2	

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 + y_6) \qquad \therefore\ y_i = \frac{1}{x_i}$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	m_i*y_i
0	3,0	0,33333333	1	0,33333333
1	3,1	0,32258065	2	0,64516129
2	3,2	0,31250000	2	0,62500000
3	3,3	0,30303030	2	0,60606061

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 + y_6) \qquad \therefore\ y_i = \frac{1}{x_i}$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	$m_i{*}y_i$
0	3,0	0,33333333	1	0,33333333
1	3,1	0,32258065	2	0,64516129
2	3,2	0,31250000	2	0,62500000
3	3,3	0,30303030	2	0,60606061
4	3,4	0,29411765	2	0,58823529
5	3,5	0,28571429	2	0,57142857
6	3,6	0,27777778	1	0,27777778

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 + y_6) \qquad \therefore\ y_i = \frac{1}{x_i}$$

Observa-se que o último valor de x, ou seja x_n, deve ser igual ao valor do limite superior da integral.

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	$m_i{*}y_i$
0	3,0	0,33333333	1	0,33333333
1	3,1	0,32258065	2	0,64516129
2	3,2	0,31250000	2	0,62500000
3	3,3	0,30303030	2	0,60606061
4	3,4	0,29411765	2	0,58823529
5	3,5	0,28571429	2	0,57142857
6	3,6	0,27777778	1	0,27777778

$$I = \frac{h}{2}\left(\underbrace{y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 + y_6}\right) \qquad \therefore\ y_i = \frac{1}{x_i}$$

Para obter a soma destes termos, basta fazer o somatório dos termos da coluna denominada por $m_i y_i$.

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	$m_i * y_i$
0	3,0	0,33333333	1	0,33333333
1	3,1	0,32258065	2	0,64516129
2	3,2	0,31250000	2	0,62500000
3	3,3	0,30303030	2	0,60606061
4	3,4	0,29411765	2	0,58823529
5	3,5	0,28571429	2	0,57142857
6	3,6	0,27777778	1	0,27777778
Somatório de $m_i * y_i$				3,64699687

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 + y_6) \qquad \therefore y_i = \frac{1}{x_i}$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	$m_i{*}y_i$
0	3,0	0,33333333	1	0,33333333
1	3,1	0,32258065	2	0,64516129
2	3,2	0,31250000	2	0,62500000
3	3,3	0,30303030	2	0,60606061
4	3,4	0,29411765	2	0,58823529
5	3,5	0,28571429	2	0,57142857
6	3,6	0,27777778	1	0,27777778
Somatório de $m_i{*}y_i$				3,64699687

$$I = \frac{h}{2}\underbrace{(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 + y_6)} \qquad \therefore\ y_i = \frac{1}{x_i}$$

$$I = \frac{0{,}1}{2}(3{,}64699687)$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	m_i*y_i
0	3,0	0,33333333	1	0,33333333
1	3,1	0,32258065	2	0,64516129
2	3,2	0,31250000	2	0,62500000
3	3,3	0,30303030	2	0,60606061
4	3,4	0,29411765	2	0,58823529
5	3,5	0,28571429	2	0,57142857
6	3,6	0,27777778	1	0,27777778
Somatório de m_i*y_i				3,64699687

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 + y_6) \qquad \therefore\ y_i = \frac{1}{x_i}$$

$$I = \frac{0,1}{2}(3,64699687)$$

$$I = 0,18234984$$

É a solução numérica.

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	m_i*y_i
0	3,0	0,33333333	1	0,33333333
1	3,1	0,32258065	2	0,64516129
2	3,2	0,31250000	2	0,62500000
3	3,3	0,30303030	2	0,60606061
4	3,4	0,29411765	2	0,58823529
5	3,5	0,28571429	2	0,57142857
6	3,6	0,27777778	1	0,27777778
Somatório de m_i*y_i				3,64699687

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 + y_6) \qquad \therefore\ y_i = \frac{1}{x_i}$$

$$I = \frac{0{,}1}{2}(3{,}64699687)$$

É a solução exata, calculada anteriormente.

$$I = 0{,}18234984 \qquad I_{exata} = 0{,}182321$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	$m_i{*}y_i$
0	3,0	0,33333333	1	0,33333333
1	3,1	0,32258065	2	0,64516129
2	3,2	0,31250000	2	0,62500000
3	3,3	0,30303030	2	0,60606061
4	3,4	0,29411765	2	0,58823529
5	3,5	0,28571429	2	0,57142857
6	3,6	0,27777778	1	0,27777778
Somatório de $m_i{*}y_i$				3,64699687

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 + y_6) \qquad \therefore\ y_i = \frac{1}{x_i}$$

$$I = \frac{0{,}1}{2}(3{,}64699687)$$

$$I = 0{,}18234984 \qquad I_{exata} = 0{,}182321$$

Comparando a solução numérica com a exata, verifica-se que as duas soluções são semelhantes.

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	m_i*y_i
0	3,0	0,33333333	1	0,33333333
1	3,1	0,32258065	2	0,64516129
2	3,2	0,31250000	2	0,62500000
3	3,3	0,30303030	2	0,60606061
4	3,4	0,29411765	2	0,58823529
5	3,5	0,28571429	2	0,57142857
6	3,6	0,27777778	1	0,27777778
Somatório de m_i*y_i				3,64699687

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 + y_6) \quad \therefore y_i = \frac{1}{x_i}$$

$$I = \frac{0,1}{2}(3,64699687)$$

Quando utilizamos a fórmula composta, não calculamos o erro de truncamento, por ser pequeno.

$$I = 0,18234984 \qquad I_{exata} = 0,182321$$

3) Calcular numericamente a integral abaixo, utilizando a regra dos trapézios composta, subdividindo o intervalo de integração em 5 subintervalos:

$$I = \int_0^{0,5} x\,e^x dx$$

3) Calcular numericamente a integral abaixo, utilizando a regra dos trapézios composta, subdividindo o intervalo de integração em 5 subintervalos:

$$I = \int_0^{0,5} x\,e^x dx$$

Solução numérica:

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + y_5)$$

3) Calcular numericamente a integral abaixo, utilizando a regra dos trapézios composta, subdividindo o intervalo de integração em 5 subintervalos:

$$I = \int_0^{0,5} x\, e^x dx$$

Solução numérica:

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + y_5)$$

com $y_i = f(x_i) = x_i\, e^{x_i}$, $\quad i = 0,1,2,\ldots,5$

3) Calcular numericamente a integral abaixo, utilizando a regra dos trapézios composta, subdividindo o intervalo de integração em 5 subintervalos:

$$I = \int_0^{0,5} x\,e^x dx$$

Solução numérica:

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + y_5)$$

com $y_i = f(x_i) = x_i\,e^{x_i}$, $\quad i = 0,1,2,\ldots,5$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

3) Calcular numericamente a integral abaixo, utilizando a regra dos trapézios composta, subdividindo o intervalo de integração em 5 subintervalos:

$$I = \int_0^{0,5} x\,e^x dx$$

Solução numérica:

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + y_5)$$

com $y_i = f(x_i) = x_i\,e^{x_i}$, $\qquad i = 0,1,2,\ldots,5$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{0,5-0,0}{5} = 0,1$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	$m_i * y_i$

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + y_5) \qquad \therefore\ y_i = x_i\, e^{x_i}$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	$m_i * y_i$
0	0,0			

O primeiro valor de x_i é $x_0 = 0{,}0$ que é o valor do limite inferior da integral.

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + y_5) \qquad \therefore\ y_i = x_i\, e^{x_i}$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	$m_i * y_i$
0	0,0	0,00000000		

O valor de y_i é obtido substituindo x_i na função de integração. Neste caso, $y_0 = x_0\, e^{x_0}$

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + y_5) \qquad \therefore\ y_i = x_i\, e^{x_i}$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	m_i*y_i
0	0,0	0,00000000	1	

É o multiplicador de y_0. Veja na fórmula abaixo.

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + y_5) \qquad \therefore\ y_i = x_i\, e^{x_i}$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	$m_i{*}y_i$
0	0,0	0,00000000	1	0,00000000

É o resultado do produto $m_0{*}y_0$.

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + y_5) \qquad \therefore\ y_i = x_i\, e^{x_i}$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	$m_i * y_i$
0	0,0	0,00000000	1	0,00000000
1	0,1			

O valor de x_i é obtido pela expressão:

$$x_i = x_{i-1} + h$$

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + y_5) \qquad \therefore\ y_i = x_i\, e^{x_i}$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	$m_i{*}y_i$
0	0,0	0,00000000	1	0,00000000
1	0,1	0,11051709		

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + y_5)$$

$$\therefore\ y_i = x_i\, e^{x_i}$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	m_i*y_i
0	0,0	0,00000000	1	0,00000000
1	0,1	0,11051709	2	

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + y_5)$$

$$\therefore\ y_i = x_i\, e^{x_i}$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	$m_i * y_i$
0	0,0	0,00000000	1	0,00000000
1	0,1	0,11051709	2	0,22103418

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + y_5)$$

$$\therefore\ y_i = x_i\, e^{x_i}$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	m_i*y_i
0	0,0	0,00000000	1	0,00000000
1	0,1	0,11051709	2	0,22103418
2	0,2	0,24428055	2	0,48856110

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + y_5)$$

$$\therefore\ y_i = x_i\, e^{x_i}$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	$m_i * y_i$
0	0,0	0,00000000	1	0,00000000
1	0,1	0,11051709	2	0,22103418
2	0,2	0,24428055	2	0,48856110
3	0,3	0,40495764	2	0,80991528

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + y_5) \qquad \therefore\ y_i = x_i\, e^{x_i}$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	m_i*y_i
0	0,0	0,00000000	1	0,00000000
1	0,1	0,11051709	2	0,22103418
2	0,2	0,24428055	2	0,48856110
3	0,3	0,40495764	2	0,80991528
4	0,4	0,59672988	2	1,19345976
5	0,5	0,82436064	1	0,82436064
Somatório de m_i*y_i				3,53733096

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + y_5) \qquad \therefore\ y_i = x_i\, e^{x_i}$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	m_i*y_i
0	0,0	0,00000000	1	0,00000000
1	0,1	0,11051709	2	0,22103418
2	0,2	0,24428055	2	0,48856110
3	0,3	0,40495764	2	0,80991528
4	0,4	0,59672988	2	1,19345976
5	0,5	0,82436064	1	0,82436064
Somatório de m_i*y_i				3,53733096

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + y_5) \qquad \therefore\ y_i = x_i\, e^{x_i}$$

$$I = \frac{0{,}1}{2}(3{,}53733096)$$

Tabela auxiliar:

i	x_i	y_i	m_i	m_i*y_i
0	0,0	0,00000000	1	0,00000000
1	0,1	0,11051709	2	0,22103418
2	0,2	0,24428055	2	0,48856110
3	0,3	0,40495764	2	0,80991528
4	0,4	0,59672988	2	1,19345976
5	0,5	0,82436064	1	0,82436064
Somatório de m_i*y_i				3,53733096

$$I = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + y_5) \qquad \therefore\ y_i = x_i\, e^{x_i}$$

$$I = \frac{0{,}1}{2}(3{,}53733096)$$

$$I = 0{,}17686655$$

É a solução numérica.

4) Calcular numericamente a integral abaixo, utilizando a regra dos trapézios composta, subdividindo o intervalo de integração em 10 subintervalos:

a) $$I = \int_0^1 e^x dx = 1{,}719713$$

b) $$I = \int_0^1 \frac{\cos(x)}{1+x} dx = 0{,}601414$$

Obrigado.