As derivadas das funções exponenciais e logarítmicas:

As derivadas das funções exponenciais e logarítmicas são dadas no quadro abaixo:

1) $(b^x)' = b^x \cdot \ln x$

Caso particular: Se a base *b* for o número *e*, como ln *e* = 1, temos:

$(e^x)' = e^x$

2) $(\log_b x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln b}$

Caso particular: Se a base *b* for o número *e*, como ln *e* = 1, temos:

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

Exemplo 1: Diferencie as seguintes funções:

a) $f(x) = 2^x$

b) $f(x) = x^2 + e^x$

c) $f(x) = x^3 . e^x$

d) $f(x) = \log_2 x$

e) $f(x) = 2 + \ln x$

f) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

Solução:

a) $f(x) = 2^x$

$f'(x) = 2^x . \ln 2$

b) $f'(x) = (x^2 + e^x)'$

$f'(x) = (x^2)' + (e^x)'$

$f'(x) = 2x + e^x$

c) $f(x) = x^3 . e^x$

$f'(x) = (x^3 . e^x)' = x^3.(e^x)' + (x^3)' . e^x$

$f'(x) = x^3 . e^x + 3.x^2.e^x = x^3 e^x + 3x^2 e^x$

d) $f(x) = \log_2 x$

$f'(x) = \dfrac{1}{x \cdot \ln 2}$

e) $f(x) = 2 + \ln x$

$f'(x) = (2 + \ln x)'$

$f'(x) = (2)' + (\ln x)'$

$f'(x) = 0 + 1/x = 1/x$

f) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

$f'(x) = \dfrac{(\ln x)'.x - (x)'.\ln x}{x^2}$

$f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}.x - 1.\ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

Exemplo 2: Diferencie as seguintes funções:

a) $y = e^{3x-1}$

b) $y = \ln (x^2 + 3x + 2)$

c) $y = \ln^2 x$

Solução:

a) $f(x) = e^{3x-1}$

Sendo $y = e^u$ e $u = 3x - 1$, temos:

$$\frac{dy}{du} = e^u$$

$$\frac{du}{dx} = 3$$

Pela **regra da cadeia**, temos:

$$\frac{dy}{du} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{du} = e^u \cdot 3$$

Substituindo u por 3x - 1, temos:

$$\frac{dy}{du} = 3.e^{3x-1}$$

b) $y = \ln (x^2 + 3x + 2)$

Sendo $y = \ln u$ e $u = x^2 + 3x + 2$, temos:

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u}$$

$$\frac{du}{dx} = 2x + 3$$

Pela **regra da cadeia**, temos:

$$\frac{dy}{du} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u} \cdot (2x + 3) = \frac{2x + 3}{u}$$

Substituindo u por $x^2 + 3x + 2$, temos:

$$\frac{dy}{du} = \frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 2}$$

c) $y = \ln^3 x = (\ln x)^3$

Sendo $y = u^3$ e $u = \ln x$, temos:

$$\frac{dy}{du} = 3u^2$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$$

Pela **regra da cadeia**, temos:

$$\frac{dy}{du} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{du} = 3u^2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{3u^2}{x}$$

Substituindo u por ln x, temos:

$$\frac{dy}{du} = \frac{3\cdot(\ln x)^2}{x}$$

Exercícios:

1) Determine a derivada das seguintes funções:

a) $y = e^x + x^3$ b) $y = x^2.e^x$ c) $y = 4.e^{2x}$

d) $y = (2x^2 - 2x + 1).e^{2x}$ e) $y = 1 + 4x + e^{-2x}$ f) $y = (e^x + 1)^3$

2) Encontre a derivada de:

a) $y = \ln 2x$ b) $y = \ln (e^x + 2)$ c) $y = \ln (\ln x)$

d) $y = (\ln x)^2 + \ln (x^2)$ e) $y = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

Respostas:

1) a) $y' = e^x + 3.x^2$ b) $y' = (x^2 + 2x).e^x$

c) $y' = 8e^{2x}$ d) $y' = 4x^2.e^{2x}$

e) $y' = 4 - 2e^{-2x}$ f) $y' = 3.e^x.(e^x + 1)^2$

4) a) $y = \frac{1}{x}$ b) $y = \frac{e^x}{e^x + 2}$

c) $y = \frac{1}{x.\ln x}$ d) $y = \frac{2.\ln x}{x} + \frac{2}{x}$

e) $y = \frac{2}{x^2 - 1}$

Referências bibliográficas:

1. Goldstein, L. J., Lay, D. C., Schneider, D. I., Matemática Aplicada: Economia, Administração e Contabilidade – Editora Bookman
2. George B. Thomas, Cálculo, volume I, Pearson, 10ª edição. 2002.
3. George F. Simmons, Cálculo com Geometria Analítica, Vol. 1, McGraw-Hill, 1987.
4. Howard Anton, Cálculo, volume 1. Bookman, 2007.