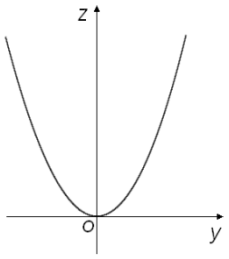
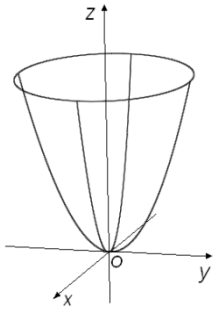
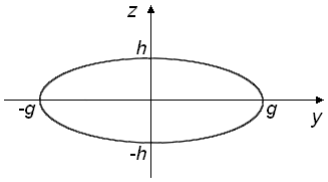
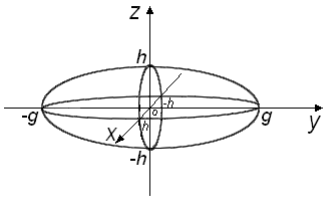
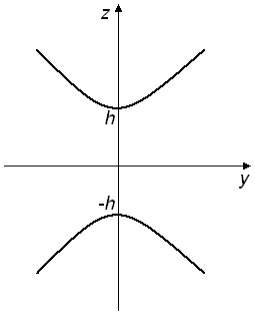
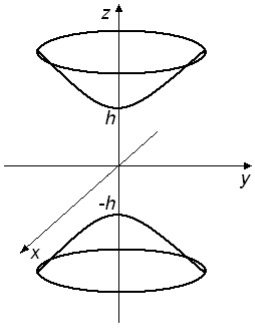
UNIDADE 6 – Superfícies

Nessa unidade estudaremos as superfícies quádricas: elipsóide, parabolóide elíptico, superfícies cilíndricas e cônicas, tendo como objetivo principal reconhecer e representar geometricamente tais superfícies.

Superfícies quádricas

A partir de uma curva cônica, fazendo uma rotação em torno de um eixo, obtemos o que chamamos de superfícies de rotação. A seguir ilustraremos alguns exemplos de superfícies de rotação em torno de um dos eixos coordenados:

Curva cônica (em R^2)	Rotacão	Superfície de rotação (em R^3)
 $z = y^2$	Em torno de Oz	 $z = x^2 + y^2$
 $\frac{y^2}{g^2} + \frac{z^2}{h^2} = 1$	Em torno de Oy	 $\frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{g^2} + \frac{z^2}{h^2} = 1$
 $\frac{z^2}{h^2} - \frac{y^2}{g^2} = 1$	Em torno de Oz	 $\frac{z^2}{h^2} - \frac{x^2}{g^2} - \frac{y^2}{g^2} = 1$

Desta forma, obtemos muitas outras superfícies, porém nem todas as superfícies são geradas a partir de rotação de curvas cônicas.

Consideremos a equação geral do $2°$ grau nas variáveis x, y e z:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + Mx + Ny + Pz + Q = 0 \qquad (1)$$

em que pelo menos um dos coeficientes A, B, C, D, E ou F é não nulo. Essa equação representa uma **superfície quádrica** ou simplesmente uma **quádrica**.

A intersecção, quando existe, de uma superfície quádrica dada pela equação (1) com um dos planos coordenados ou um plano paralelo a eles é uma cônica. A intersecção de uma superfície com um plano é chamada **traço da superfície** no plano.

Através de mudança de coordenadas (rotação e/ou translação) podemos reescrever a equação (1) em uma das seguintes formas:

$$\bar{A}x^2 + \bar{B}y^2 + \bar{C}z^2 = \bar{S}$$

$$\bar{A}x^2 + \bar{B}y^2 + \bar{R}z = 0$$

$$\bar{A}x^2 + \bar{R}y + \bar{C}z^2 = 0$$

$$\bar{R}x + \bar{B}y^2 + \bar{C}z^2 = 0$$

A seguir, estudaremos algumas superfícies determinadas pelas equações acima.

ELIPSÓIDE

É uma superfície quádrica cuja equação é da forma:

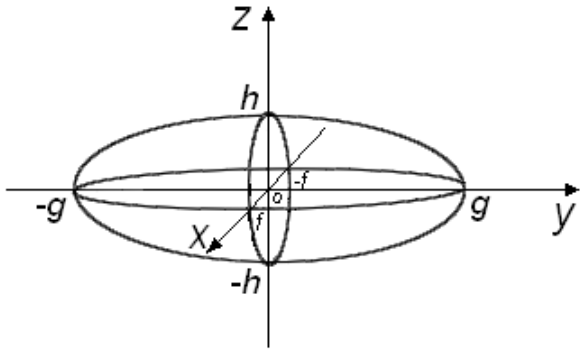
$$\bar{A}x^2 + \bar{B}y^2 + \bar{C}z^2 = \bar{S}$$

sendo que os coeficientes $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ e $\bar{S}$ devem ser não nulos e de mesmo sinal. Reescrevendo a equação acima resulta:

$$\frac{x^2}{f^2} + \frac{y^2}{g^2} + \frac{z^2}{h^2} = 1$$

chamada **forma canônica ou padrão do elipsóide**.

Geometricamente, sua representação é da forma:



Os traços dessa superfície nos planos coordenados são dados por:

Traço no plano xOy

$$z = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{f^2} + \frac{y^2}{g^2} = 1$$

Traço no plano xOz

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{f^2} + \frac{z^2}{h^2} = 1$$

Traço no plano yOz

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{g^2} + \frac{z^2}{h^2} = 1$$

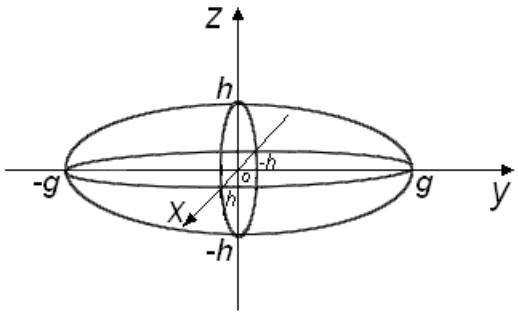
Se pelo menos dois dos valores de f, g e h são iguais na equação do elipsóide, o elipsóide é de revolução. Por exemplo, se $f = h$ a equação do elisóide é dada por:

$$\frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{g^2} + \frac{z^2}{h^2} = 1$$

O que significa que o elipsóide foi obtido girando a elipse

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{g^2} + \dfrac{z^2}{h^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

em torno do eixo Oy. Geometricamente, se $g > h$, temos:



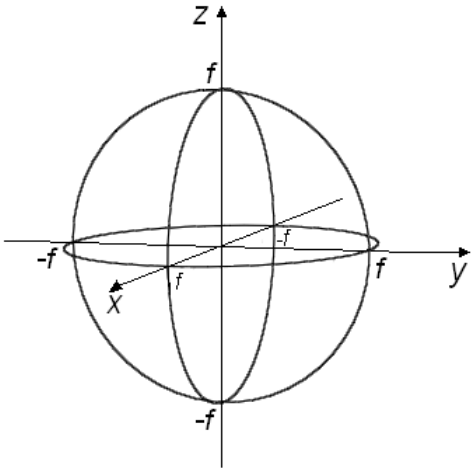
Se os valores de f, g e h são iguais $(f = g = h)$ na equação do elipsóide $\frac{x^2}{f^2} + \frac{y^2}{g^2} + \frac{z^2}{h^2} = 1$, a superfície é dita uma **esfera**, cuja equação é dada por:

$$\frac{x^2}{f^2} + \frac{y^2}{f^2} + \frac{z^2}{f^2} = 1$$

ou ainda

$$x^2 + y^2 + z^2 = f^2$$

em que f representa o raio da esfera. Geometricamente temos:



Exemplo: Representar geometricamente a superfície

$$225x^2 + 100y^2 + 36z^2 = 900.$$

Resolução

Vamos escrever a equação acima na forma padrão, dividindo ambos os membros por 900.

$$\frac{225x^2}{900} + \frac{100y^2}{900} + \frac{36z^2}{900} = \frac{900}{900}$$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1$$

Traço no plano xOy

$$z=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1 \qquad \text{(ELIPSE)}$$

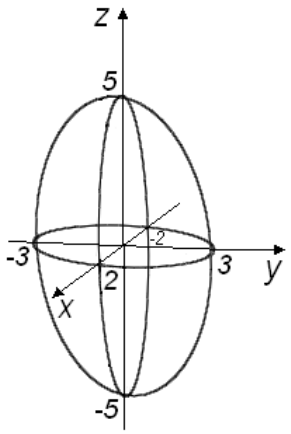
Traço no plano xOz

$$y=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{25}=1 \qquad \text{(ELIPSE)}$$

Traço no plano yOz

$$x=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1 \qquad \text{(ELIPSE)}$$

Geometricamente:



Ao considerar a equação e observar a figura, temos que, se:

$$x=2 \quad \Rightarrow \quad \frac{2^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1-1 \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=0 \quad \Rightarrow \quad y=z=0$$

Logo, temos o ponto $(2,0,0)$.

$$x=-2 \quad \Rightarrow \quad \frac{(-2)^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1-1 \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=0 \quad \Rightarrow \quad y=z=0$$

Logo, temos o ponto $(-2,0,0)$.

Da mesma maneira, se:

$y=3 \quad \Rightarrow \quad x=z=0$ logo, temos o ponto $(0,3,0)$.

$y=-3 \quad \Rightarrow \quad x=z=0$ logo, temos o ponto $(0,-3,0)$.

$z = 5 \quad \Rightarrow \quad x = y = 0$ logo, temos o ponto $(0,0,5)$.

$z = -5 \quad \Rightarrow \quad x = y = 0$ logo, temos o ponto $(0,0,-5)$.

Se $-2 < x < 2$ temos elipses. Por exemplo, se:

$$x = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1 - \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = \frac{3}{4} \qquad \text{(ELIPSE)}$$

Se $x < -2$ ou $x > 2$ temos conjunto vazio. Por exemplo, se:

$$x = 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{3^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1 - \frac{9}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = -\frac{5}{4} \qquad \text{(VAZIO)}$$

Analogamente temos:

Se $-3 < y < 3$ temos elipses e se $y < -3$ ou $y > 3$ temos conjunto vazio.

Se $-5 < z < 5$ temos elipses e se $z < -5$ ou $z > 5$ temos conjunto vazio.

PARABOLÓIDE ELÍPTICO

É uma superfície quádrica cuja equação tem uma das formas:

$\bar{A}x^2 + \bar{B}y^2 + \bar{R}z = 0$ $\quad$ $\bar{A}$, $\bar{B}$ e $\bar{R}$ são não nulos e $\bar{A}$ e $\bar{B}$ com mesmo sinal;

$\bar{A}x^2 + \bar{R}y + \bar{C}z^2 = 0$ $\quad$ $\bar{A}$, $\bar{R}$ e $\bar{C}$ são não nulos e $\bar{A}$ e $\bar{C}$ com mesmo sinal;

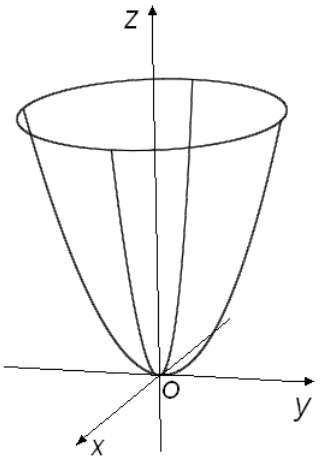
$\bar{R}x + \bar{B}y^2 + \bar{C}z^2 = 0$ $\quad$ $\bar{R}$, $\bar{B}$ e $\bar{C}$ são não nulos e $\bar{B}$ e $\bar{C}$ com mesmo sinal;

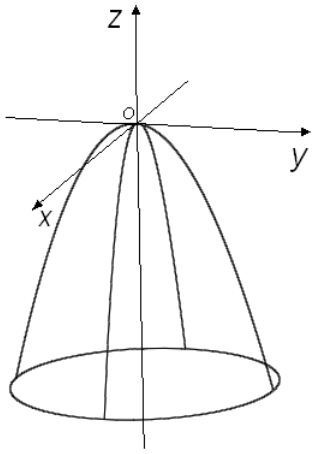
Reescrevendo a equação $\bar{A}x^2 + \bar{B}y^2 + \bar{R}z = 0$, resulta:

$$\frac{x^2}{f^2} + \frac{y^2}{g^2} = hz$$

chamada **forma canônica ou padrão do parabolóide elíptico ao longo do eixo Oz**.

Geometricamente temos:





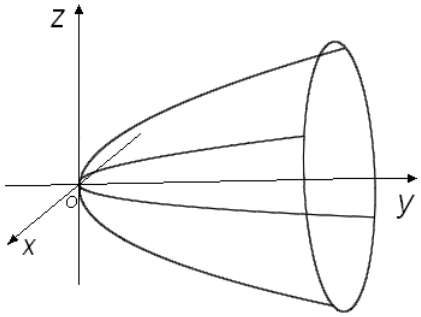
$h > 0$ $\qquad\qquad$ $h < 0$

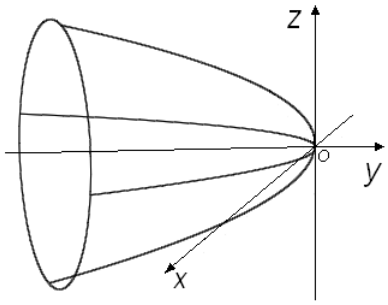
Da mesma forma podemos reescrever a equação $\bar{A}x^2 + \bar{B}y + \bar{C}z^2 = 0$, que resulta em:

$$\frac{x^2}{f^2} + \frac{z^2}{h^2} = gy$$

chamada **forma canônica ou padrão do parabolóide elíptico ao longo do eixo $\boldsymbol{Oy}$**.

Geometricamente temos:





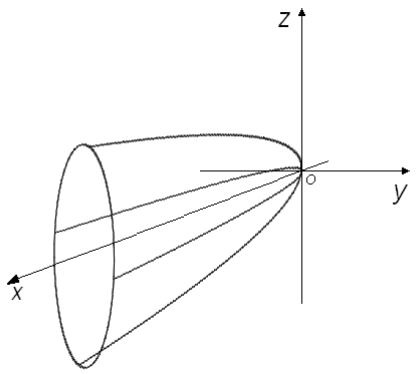
$g > 0$ $\qquad\qquad$ $g < 0$

Finalmente, podemos reescrever a equação $\bar{R}x + \bar{B}y^2 + \bar{C}z^2 = 0$, que resulta em:

$$\frac{y^2}{g^2} + \frac{z^2}{h^2} = fx$$

chamada **forma canônica ou padrão do parabolóide elíptico ao longo do eixo $\boldsymbol{Ox}$**.

Geometricamente:



$f > 0$

Se $f < 0$ o parabolóide se desenvolve ao longo da parte negativa do eixo Ox.

Voltamos a considerar a equação

$$\frac{x^2}{f^2} + \frac{y^2}{g^2} = hz.$$

Essa equação representa um parabolóide eliptico ao longo do eixo Oz. Vamos supor que $h > 0$. Os traços dessa superfície nos planos coordenados são dados por:

traço no plano xOy	$z = 0$	$\Rightarrow$ $\frac{x^2}{f^2} + \frac{y^2}{g^2} = 0$	ponto $(0,0)$
traço no plano xOz	$y = 0$	$\Rightarrow$ $\frac{x^2}{f^2} = hz$	uma parábola
traço no plano yOz	$x = 0$	$\Rightarrow$ $\frac{y^2}{g^2} = hz$	uma parábola

Os traços nos planos $z = k$, sendo $k > 0$ são elipses cujos eixos (comprimento dos segmentos $A_1 A_2$ e $B_1 B_2$, sendo A_1, A_2, B_1 e B_2 vértices da elipse) aumentam de comprimento na medida em que os planos $z = k$ se afastam da origem do sistema. Observe a seguir, os casos particulares em que $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$.

Se $z = k = 1$ temos $\frac{x^2}{f^2} + \frac{y^2}{g^2} = h$ ou equivalentemente $\frac{x^2}{hf^2} + \frac{y^2}{hg^2} = 1$ (ELIPSE).

Se $z = k = 2$ temos $\frac{x^2}{f^2} + \frac{y^2}{g^2} = 2h$ ou equivalentemente $\frac{x^2}{2hf^2} + \frac{y^2}{2hg^2} = 1$ (ELIPSE).

Se $z = k = 3$ temos $\frac{x^2}{f^2} + \frac{y^2}{g^2} = 3h$ ou equivalentemente $\frac{x^2}{3hf^2} + \frac{y^2}{3hg^2} = 1$ (ELIPSE).

Se $k < 0$, por exemplo, $z = k = -1$ temos $\frac{x^2}{f^2} + \frac{y^2}{g^2} = -1h$ (impossível, visto que temos a soma de dois quadrados igual a um número negativo).

Agora vamos identificar os traços nos planos $x = k$ e $y = k$, sendo k um número real. Temos que:

$x = k \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{g^2} = hz - \frac{k^2}{f^2}$ parábolas

$y = k \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{f^2} = hz - \frac{k^2}{g^2}$ parábolas

Exemplo: Representar geometricamente o parabolóide dado pela equação

$$4x^2 + z^2 = y\ .$$

Resolução

Essa equação representa um parabolóide elíptico ao longo do eixo Oy. Dividindo toda a equação por 4, obtemos sua forma padrão:

$$x^2 + \frac{z^2}{4} = \frac{y}{4}$$

Os traços dessa superfície nos planos coordenados são dados por:

traço no plano xOy $\quad z = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{y}{4}$ uma parábola

traço no plano xOz $\quad y = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + \frac{z^2}{4} = 0$ um ponto $(0,0)$

traço no plano yOz $\quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{z^2}{4} = \frac{y}{4}$ uma parábola

Os traços nos planos $y = k$, sendo $k > 0$ são elipses cujos eixos (comprimento dos segmentos $A_1 A_2$ e $B_1 B_2$, sendo A_1, A_2, B_1 e B_2 vértices da elipse) aumentam de comprimento na medida em que os planos $y = k$ se afastam da origem do sistema. Observe a seguir, os casos particulares em que $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$.

Se $y = k = 1$ temos $x^2 + \frac{z^2}{4} = \frac{1}{4}$ ou equivalentemente $\frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{z^2}{1} = 1$ (ELIPSE).

Se $y = k = 2$ temos $x^2 + \frac{z^2}{4} = \frac{2}{4}$ ou equivalentemente $\frac{x^2}{\frac{1}{2}} + \frac{z^2}{2} = 1$ (ELIPSE).

Se $y = k = 3$ temos $x^2 + \frac{z^2}{4} = \frac{3}{4}$ ou equivalentemente $\frac{x^2}{\frac{3}{4}} + \frac{z^2}{3} = 1$ (ELIPSE).

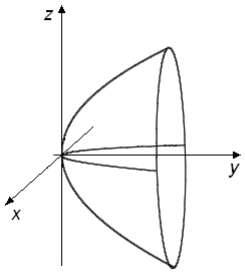
Se $k < 0$, por exemplo, $z = k = -1$ temos $x^2 + \frac{z^2}{4} = \frac{-1}{4}$ (impossível, visto que temos a soma de dois quadrados igual a um número negativo).

Agora vamos identificar os traços nos planos $x = k$ e $z = k$, sendo k um número real. Temos que:

$x = k \quad \Rightarrow \quad \frac{z^2}{4} = \frac{y}{4} - k^2$ parábolas

$z = k \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{y}{4} - \frac{k^2}{4}$ parábolas

Geometricamente, temos:

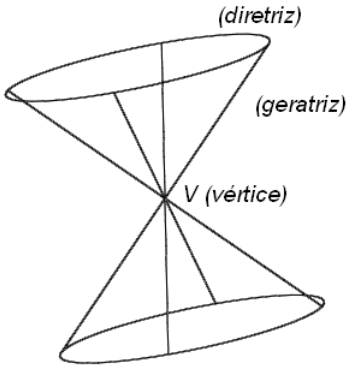


Superfícies cônicas

Superfície cônica é uma superfície obtida a partir de uma reta que se move no espaço passando por uma curva plana qualquer e por um ponto dado (fixo) não situado no plano da curva.

A reta é denominada **geratriz**, a curva plana é a **diretriz** e o ponto fixo é o **vértice** da superfície cônica.

Geometricamente:



A equação

$$\frac{x^2}{f^2}+\frac{y^2}{g^2}-\frac{z^2}{h^2}=0$$

representa uma superfície cônica com eixo Oz, vértice $V(0,0,0)$ e cuja diretriz é uma elipse.

Os traços dessa superfície nos planos coordenados são dados por:

traço no plano xOy

$z=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{f^2}+\frac{y^2}{g^2}=0$ ponto $(0,0)$ (vértice)

traço no plano xOz

$y=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{f^2}-\frac{z^2}{h^2}=0 \quad \Rightarrow \quad x=\pm\sqrt{\frac{f^2z^2}{h^2}} \quad \Rightarrow \quad x=\pm\frac{fz}{h}$ um par de retas

traço no plano yOz

$x=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{g^2}-\frac{z^2}{h^2}=0 \quad \Rightarrow \quad y=\pm\sqrt{\frac{g^2z^2}{h^2}} \quad \Rightarrow \quad y=\pm\frac{gz}{h}$ um par de retas

Os traços nos planos $z=k$, sendo $k\neq 0$ são elipses cujos eixos (comprimento dos segmentos A_1A_2 e B_1B_2, sendo A_1, A_2, B_1 e B_2 vértices da elipse) aumentam de comprimento na medida em que os planos $z=k$ se afastam da origem do sistema. Observe a seguir, os casos particulares em que $k=1$, $k=2$, $k=-3$.

Se $z=k=1$ temos $\frac{x^2}{f^2}+\frac{y^2}{g^2}=\frac{1}{h^2}$ (ELIPSE)

Se $z=k=2$ temos $\frac{x^2}{f^2}+\frac{y^2}{g^2}=\frac{4}{h^2}$ (ELIPSE)

Se $z=k=-3$ temos $\frac{x^2}{f^2}+\frac{y^2}{g^2}=\frac{9}{h^2}$ (ELIPSE)

Agora, vamos identificar os traços nos planos $x = k$ e $y = k$, sendo k um número real. Temos que:

$x = k \quad \Rightarrow \quad \frac{z^2}{h^2} - \frac{y^2}{g^2} = \frac{k^2}{f^2}$ (HIPÉRBOLE)

$y = k \quad \Rightarrow \quad \frac{z^2}{h^2} - \frac{x^2}{f^2} = \frac{k^2}{g^2}$ (HIPÉRBOLE)

Exemplo: Identificar e representar geometricamente a superfície representada pela equação

$$324x^2 + 36y^2 + 144z^2 = 0$$

Resolução

Vamos escrever a equação na forma padrão, dividindo ambos os membros por 36:

$$\frac{324x^2}{36} + \frac{36y^2}{36} - \frac{144z^2}{36} = 0$$

$$9x^2 + y^2 - 4z^2 = 0$$

Vamos dividir novamente ambos os membros da equação por 36:

$$\frac{9x^2}{36} + \frac{y^2}{36} - \frac{4z^2}{36} = 0$$

Resulta:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{36} - \frac{z^2}{9} = 0.$$

A equação dada representa uma superfície cônica (cone). Vamos fazer o estudo dos traços dessa superfície para em seguida representá-la geometricamente.

Os traços dessa superfície nos planos coordenados são dados por:

traço no plano xOy

$z = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{36} = 0$ ponto $(0,0)$ (vértice)

traço no plano xOz

$y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{4z^2}{9}} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{2z}{3}$ um par de retas

traço no plano yOz

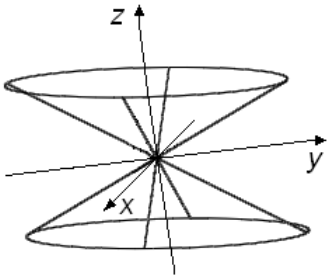
$x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{36} - \frac{z^2}{9} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{\frac{36z^2}{9}} \quad \Rightarrow \quad y = \pm 2z$ um par de retas

Os traços nos planos $z = k$, sendo $k \neq 0$ são elipses cujos eixos (comprimento dos segmentos $A_1 A_2$ e $B_1 B_2$, sendo A_1, A_2, B_1 e B_2 vértices da elipse) aumentam de comprimento na medida em que os planos $z = k$ se afastam da origem do sistema. Observe a seguir, os casos particulares em que $k = 1$, $k = 2$, $k = -3$.

Se $z = k = 1$ temos $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{36} = \frac{1}{9}$ (ELIPSE)

Se $z = k = 2$ temos $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{36} = \frac{4}{9}$ (ELIPSE)

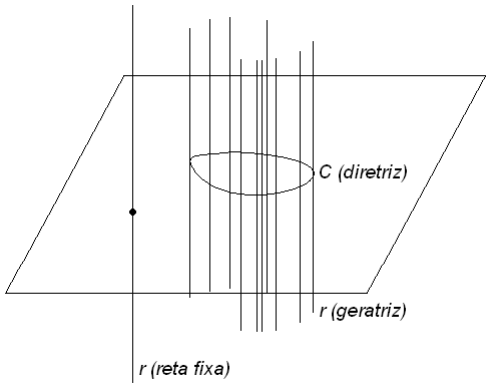
Se $z = k = -3$ temos $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{36} = \frac{9}{9}$ (ELIPSE)



Superfícies cilíndricas

Superfície cilíndrica é uma superfície obtida a partir de uma curva plana C qualquer e uma reta r que se move paralelamente a uma reta fixa s (não pertencente ao plano que contém C). Se a curva plana é uma curva cônica a superfície cilíndrica será uma superfície quádrica.

A reta r (reta que se move) é denominada **geratriz** e a curva C é a **diretriz** da superfície cilíndrica.



Neste texto, vamos considerar superfícies cilíndricas em que a diretriz é uma curva que pertence a um plano paralelo a um dos planos coordenados e a geratriz é uma reta paralela ao eixo coordenado perpendicular ao plano que contém a diretriz.

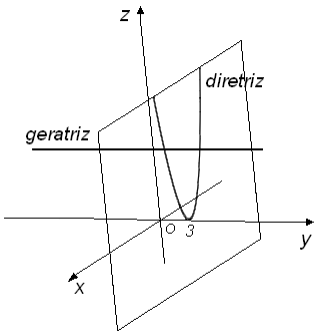
Exemplo: Determinar a equação e representar geometricamente a superfície cilíndrica cuja diretriz é a curva

$$\begin{cases} x^2 = z \\ y = 3 \end{cases}$$

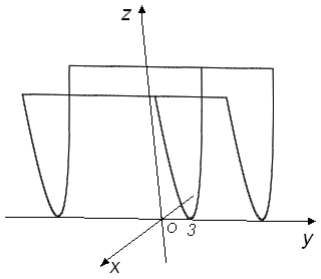
e a geratriz é uma reta paralela ao eixo Oy.

Resolução

Observando a equação $\begin{cases} x^2 = z \\ y = 3 \end{cases}$, percebe-se que a diretriz da superfície é uma parábola $(x^2 = z)$ no plano $y = 3$. A figura a seguir ilustra geometricamente a diretriz e a geratriz.



Na medida em que a geratriz se move paralelamente ao eixo Oy passando pela diretriz, obtém-se a superfície cilíndrica conforme representação geométrica a seguir:



A equação dessa superfície é dada por

$$x^2 = z$$

sendo que y admite qualquer valor real.

OBSERVAÇÃO: 1) Em qualquer plano paralelo ao plano xOz **,** $x^2 = z$ representa uma parábola enquanto que no espaço tridimensional $x^2 = z$ representa uma superfície cilíndrica cuja geratriz é paralela ao eixo Oy .

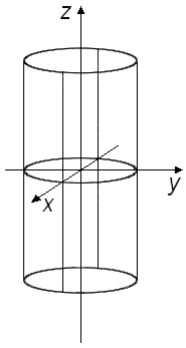
2) No caso em que a diretriz seja uma parábola, circunferência, elipse ou hipérbole, a superfície cilíndrica é dita parabólica, circular, elíptica ou hiperbólica, respectivamente.

Exemplo: Representar geometricamente a superfície determinada pela equação

$$x^2 + y^2 = 25$$

Resolução

A equação $x^2 + y^2 = 25$ representa uma circunferência no plano xOy. Nesse caso, a geratriz é uma reta perpendicular ao plano xOy (ou seja, paralela ao eixo Oz). Geometricamente, temos:



Referências Bibliográficas

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. *Geometria Analítica*. 2 ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.

BOULOS, Paulo; CAMARGO, Ivan de. *Geometria Analítica*: Um tratamento Vetorial. 3 ed. São Paulo: Prentice Hall, 2005.