# Cálculo e Aplicações II

## Material da Unidade IV

**Lineia Schütz**

# Conteúdo

**UNIDADE IV**

# 1 Integral Definida

## 1.1 Introdução

Nesta unidade vamos trabalhar o conceito Integral Definida. Vamos iniciar apresentando a Integral Definida por meio das Somas de Riemann. Em seguida discutiremos o Teorema Fundamental do Cálculo.

## 1.2 Integral Definida

Nessa seção, vamos utilizar as *somas de Riemann* para definir a Integral Definida. Estas somas, em homenagem a Georg F. B. Riemann, são obtidas de um modo particular. Nós vamos desenvolver a construção de uma forma mais geral, que não nos limita a funções não negativas.

Para isso, considere uma função contínua $f$ definida em um intervalo real $I=[a,b]$ (Figura 7)

.

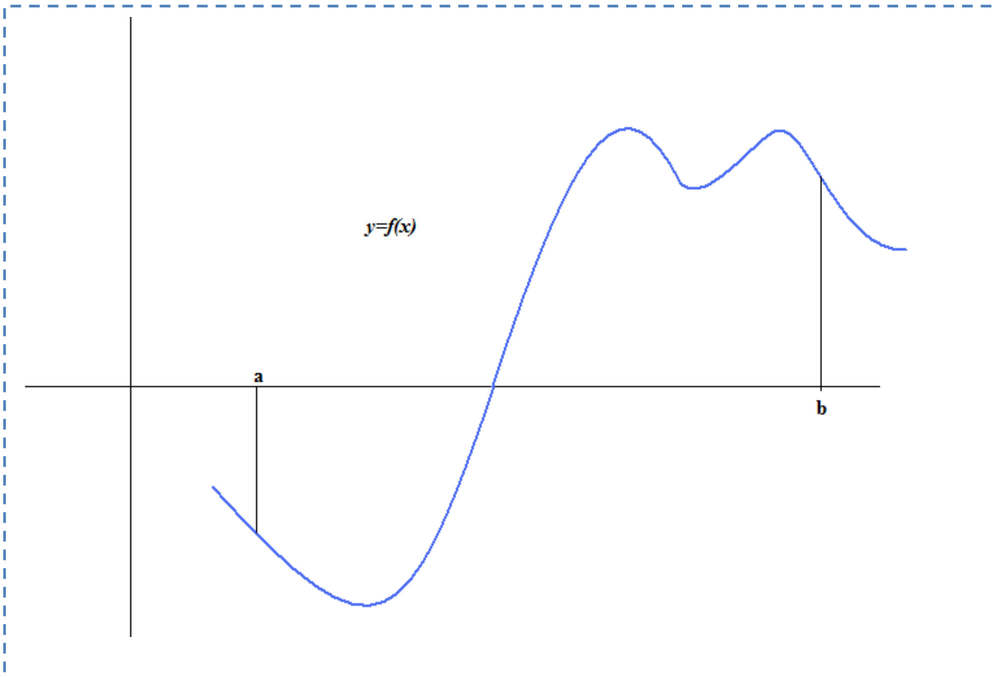


Figura 7

Escolhendo $n-1$ pontos no intervalo $[a,b]$, por exemplo $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ com $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < b$, dividimos $[a,b]$ em $n$ subintervalos fechados $[a, x_1][x_1, x_2],[x_2, x_3], \ldots ,[x_{n-1}, b]$.

Chamamos de **k-ésimo subintervalo** ao subintervalo qualquer $[x_{k-1}, x_k]$, onde

$$[x_{k-1}, x_k] \in \{[a = x_0, x_1][x_1, x_2],[x_2, x_3], \ldots[x_{n-1}, b = x_n]\}.$$

O comprimento do k-ésimo subintervalo é $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

Em cada subintervalo selecionamos algum número e denotamos tal número por $c_k$. Em seguida, para cada subintervalo, desenhamos um retângulo com base no eixo $x$ e que toca a curva $(c_k, f(c_k))$, conforme a Figura 8.

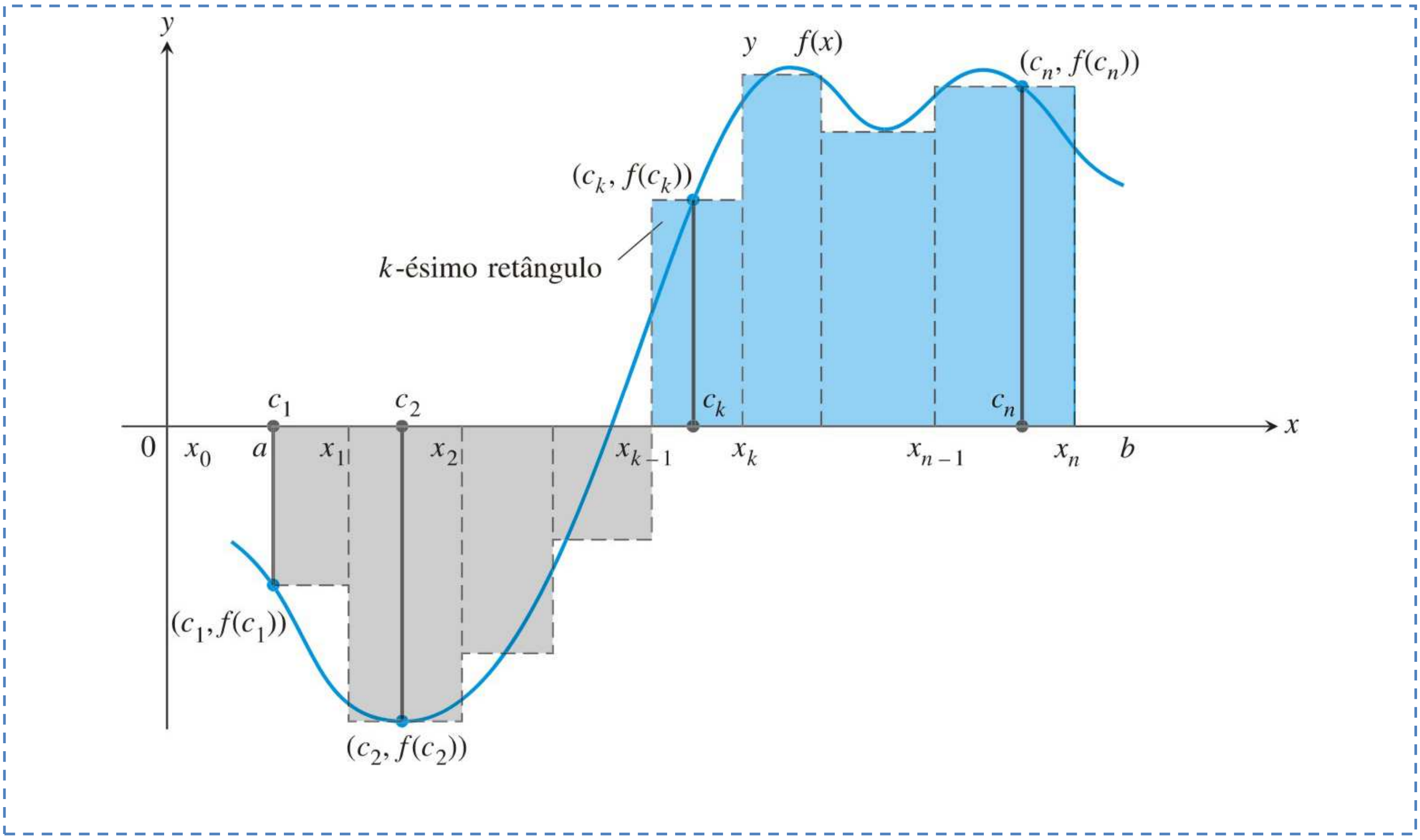


Figura 8 (extraída do site http://www.aw-bc.com/thomas_br/)

Para cada subintervalo, consideramos o produto $\Delta x_k f(c_k)$. Por fim somamos esses produtos, obtendo:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \,.$$

Esta soma, que depende da escolha dos subintervalos, é chamada Soma de Riemann para $f$ no intervalo $[a,b]$.

**Observe que, com o aumento do número de subintervalos *n*, ou seja, ao** $x_{k-1} \to x_k \; (\Leftrightarrow \Delta x_k \to 0)$ **os retângulos vão se aproximando da região *R* limitada pelo eixo *x*, pelas retas verticais** $x = a$, $x = b$ **e pela curva** $y = f(x)$ **(Figura 9) .**

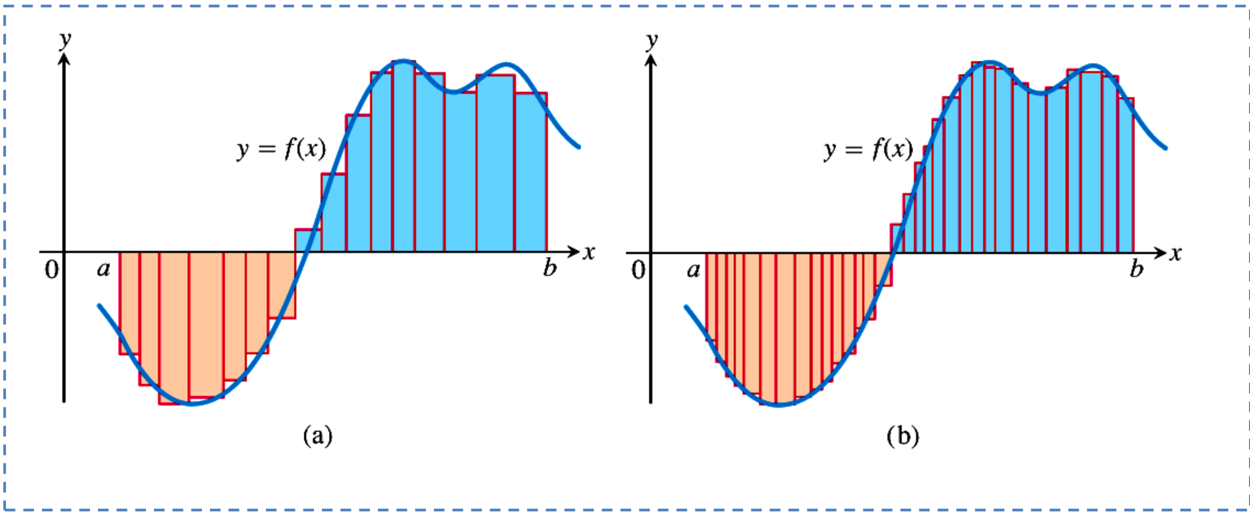


**Figura 9 (extraída do site http://www.aw-bc.com/thomas_br/)**

Assim, chegamos a seguinte definição:

### Definição (Integral Definida como Limite de Somas de Riemann)

Seja $f$ uma função contínua definida em um intervalo real $I$=[$a$,$b$]. Dividindo o intervalo em n subintervalos, como feito acima. Se o limite

$$\lim_{n\to\infty} = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

convergir para um valor real, dizemos que este valor é a Integral Definida da função $f$ no intervalo [$a$,$b$].

Neste caso, denotamos a integral Definida por

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \, .$$

**Notação:**

O símbolo $\int_a^b f(x)dx$ é representa " a integral de $a$ até $b$ da função $f(x)$ em relação a $x$" .

$a$ é o limite de integração inferior e $b$ é o limite de integração superior.

Como já conhecemos a definição de Integral Definida estamos interessados em resolvê-la. Vamos utilizar os teoremas que serão enunciados abaixo para calcular essas integrais.

**Teorema Fundamental do Cálculo (Parte 1)**

Se $f$ é uma função contínua definida em um intervalo real $I=[a,b]$ e se $F$ é uma primitiva de $f$ em $[a,b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big]_a^b$$

**Teorema Fundamental do Cálculo (Parte 2)**

Se $f$ é uma função contínua definida em um intervalo real $I=[a,b]$, então

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

é derivável em $[a,b]$ e

$$\frac{d}{dx}\left[F(x)\right] = \frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x).$$

Vamos omitir a demonstração dos teoremas acima, pois necessitamos do Teorema do Valor Médio para Derivadas. Vocês encontram esse resultado juntamente com a prova dos teoremas em livros de Cálculo

**Observação 1:**

O Teorema Fundamental do Cálculo (Parte 1) nos diz que podemos calcular a integral definida através da integral indefinida!

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big]_a^b = \int f(x)dx\Big]_a^b$$

Vejamos alguns exemplos.

**Exemplos:**

**a)** Calcule a integral definida $\int_{-1}^{3}(x^3+1)dx$ através do Teorema Fundamental do Cálculo (Parte 1).

**Resolução:**

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo (Parte 1), temos:

$$\int_{-1}^{3}(x^3+1)dx = F(3)-F(-1) = F(x)\Big]_{-1}^{3} = \int (x^3+1)dx\Big]_{-1}^{3}.$$

Assim,

$$\int_{-1}^{3}(x^3+1)dx = \int (x^3+1)dx\Big]_{-1}^{3} = \left(\frac{x^4}{4}+x+C\right)\Bigg]_{-1}^{3} = \underbrace{\left(\frac{x^4}{4}+x+C\right)}_{x=3} - \underbrace{\left(\frac{x^4}{4}+x+C\right)}_{x=-1}$$

$$= \left(\underbrace{\frac{3^4}{4}+3}_{F(3)}+C\right) - \left(\underbrace{\frac{(-1)^4}{4}-1}_{F(-1)}+C\right) = \left(\frac{81}{4}+3\right)-\left(\frac{1}{4}-1\right) = 24.$$

**b)** Calcule a integral definida $\int_{0}^{\pi/2}\cos(x)dx$ através do Teorema Fundamental do Cálculo (Parte 1).

**Resolução:**

Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo (Parte 1), obtemos:

$$\int_{0}^{\pi/2}\cos(x)dx = F\left(\pi/2\right) - F(0) = F(x)\Big]_{0}^{\pi/2} = \int \cos(x)dx\Big]_{0}^{\pi/2}.$$

Assim,

$$\int_{0}^{\pi/2}\cos(x)dx = \int \cos(x)dx\Big]_{0}^{\pi/2} = \left(sen(x)+C\right)\Big]_{0}^{\pi/2} = \underbrace{\left(sen(x)+C\right)}_{x=\pi/2} - \underbrace{\left(sen(x)+C\right)}_{x=0}$$

$$= \left(\underbrace{sen(\pi/2)}_{F(\pi/2)}+C\right) - \left(\underbrace{sen(0)}_{F(0)}+C\right) = 1-0 = 1.$$

**c)** Calcule a integral definida $\int_{0}^{3}\sqrt{x+1}dx$ através do Teorema Fundamental do Cálculo (Parte 1).

**Resolução:**

$$\int_{0}^{3}\sqrt{x+1}dx = F(3)-F(0) = F(x)\Big]_{0}^{3} = \int \sqrt{x+1}dx\Big]_{0}^{3}.$$

Observe que neste exemplo, para encontrarmos a integral indefinida precisamos utilizar um método de integração, pois ela não é uma integral direta como nos exemplos anteriores!

## Observação 2:

**Quando necessitamos do método de Integração por Substituição ou o método de Integração por Partes para resolver a integral indefinida, precisamos tomar cuidado com os limites de integração, pois se mudarmos a variável de integração os limites de integração também mudam!**

**Para simplificar, podemos resolver separadamente a integral indefinida através do método necessário, escrever a resposta da integral indefinida na variável original e então aplicar os limites de integração na variável original (dessa forma não precisamos alterar os limites de integração).**

**É exatamente dessa forma que vamos preceder para resolver o exemplo 3.**

Vamos calcular a integral indefinida $\int \sqrt{x+1}dx$ separadamente. Esta integral podemos resolver por substituição.

---

Resolvendo a integral $\int \sqrt{x+1}dx$ por Integração por Substituição:

Escolhendo $u = x+1$, $du = dx$ e assim,

$$\int \sqrt{x+1}dx = \int \sqrt{u}du = \int u^{1/2}du = \frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3}u^{3/2} + C = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C.$$

---

Como $F(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C$, a integral definida $\int_0^3 \sqrt{x+1}dx$ é

$$\int_0^3 \sqrt{x+1}dx = F(x)\Big]_0^3 = \left(\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C\right)\Bigg]_0^3 = \underbrace{\left(\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C\right)}_{x=3} - \underbrace{\left(\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C\right)}_{x=0}$$

$$= \left(\frac{2}{3}(3+1)^{3/2} + C\right) - \left(\frac{2}{3}(0+1)^{3/2} + C\right) = \left(\frac{2}{3}(4)^{3/2} + C\right) - \left(\frac{2}{3}(1)^{3/2} + C\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left(\sqrt{4^3} - 1\right)$$

**d)** Calcule a integral definida $\int_1^2 xe^x dx$ através do Teorema Fundamental do Cálculo (Parte 1).

**Resolução:**

$$\int_1^2 xe^x dx = F(2) - F(1) = F(x)\Big]_1^2 = \int xe^x dx\Big]_1^2.$$

Observe que neste exemplo, para encontrarmos a integral definida precisamos novamente utilizar um método de integração, pois ela não é uma integral direta. Dessa forma, vamos calcular a integral indefinida $\int xe^x dx$ separadamente pelo método de Integração por Partes. Observe que esta integral foi calculada na Unidade III [pg. 29]

Assim, pela Unidade III,

$$\int xe^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C.$$

Portanto, a integral definida $\int_1^2 xe^x dx$ é

$$\int_1^2 xe^x dx = \int xe^x dx\Bigg]_1^2 = \left(e^x(x-1)+C\right)\Big]_1^2 = \underbrace{\left(e^x(x-1)+C\right)}_{x=2} - \underbrace{\left(e^x(x-1)+C\right)}_{x=1}$$

$$= \left(\underbrace{e^2(2-1)+C}_{F(2)}\right) - \left(\underbrace{e^1(1-1)+C}_{F(1)}\right) = e^2.$$

**e)** Calcule a integral definida $\int_1^e x^2 \ln(x)dx$ através do Teorema Fundamental do Cálculo (Parte 1).

**Resolução:**

Pelo teorema Fundamental do Cálculo (Parte I),

$$\int_1^e x^2 \ln(x)dx = F(e) - F(1) = F(x)\Big]_1^e, \text{onde } F(x) = \int x^2 \ln(x)dx,$$

ou seja,

$$\int_1^e x^2 \ln(x)dx = \int x^2 \ln(x)dx\Big]_1^e.$$

Observe que neste exemplo, para encontrarmos a integral indefinida precisamos novamente utilizar um método de integração, pois ela não é uma integral direta. Dessa forma, vamos calcular a integral indefinida $\int x^2 \ln(x)dx$ separadamente pelo método de Integração por Partes.

---

Resolvendo a integral indefinida $\int x^2 \ln(x)dx$ por Integração por Partes:

A regra de Integração por Partes nos diz que $\int udv = uv - \int vdu$, para aplicá-la, precisamos encontrar $v$ e $du$. Escolhendo $u = \ln(x)$ e $dv = x^2dx$, temos:

- se $u = \ln(x)$ então $du = \frac{1}{x}dx$;
- se $dv = x^2 dx$, então $v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C \rightarrow v = \frac{x^3}{3}$

  Aplicando a regra de Integração por Partes, otemos:

$$\int x^2 \ln(x)dx = \frac{x^3}{3}\ln(x) - \int \frac{x^3}{3}\frac{1}{x}dx = \frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3} + C$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{x^3}{9} + C$$

---

Assim, a integral definida $\int_1^e x^2 \ln(x)dx$ é

$$\int_1^e x^2 \ln(x)dx = \int x^2 \ln(x)dx \Bigg]_1^e = \underbrace{\left(\frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{x^3}{9} + C\right)}_{x=e} - \underbrace{\left(\frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{x^3}{9} + C\right)}_{x=1}$$

$$= \left(\underbrace{\frac{e^3}{3}\ln(e) - \frac{e^3}{9}}_{F(e)} + C\right) - \left(\underbrace{\frac{1^3}{3}\ln(1) - \frac{1^3}{9}}_{F(1)} + C\right)$$

$$= \left(\underbrace{\frac{e^3}{3}1 - \frac{e^3}{9}}_{F(e)} + C\right) - \left(\underbrace{\frac{1^3}{3}0 - \frac{1^3}{9}}_{F(1)} + C\right)$$

$$= \frac{2}{9}e^3 - \frac{1}{9}.$$

Utilize o Teorema Fundamental do Cálculo (Parte 1) para resolver os exercícios da Lista de Exercícios V.

## Lista de Exercícios V

Mostre que:

**1)** $\int_{0}^{1}(2x+3)^{2}dx=\frac{49}{3}$

**2)** $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}(x^{5}-4x^{3}+2x)dx=-\frac{5}{6}$

**3)** $\int_{0}^{\pi/4}\cos(2x)dx=\frac{1}{2}$

**4)** $\int_{1}^{e}\frac{dt}{t}=1$

**5)** $\int_{0}^{1}e^{y}dy=e-1\cong 1{,}718$

**6)** $\int_{-2}^{2}\frac{dy}{y^{2}+4}=\frac{\pi}{4}\cong 0{,}78$

**7)** $\int_{2}^{4}(3t^{2}-6t+1)dt=22$

**8)** $\int_{1}^{2}\sqrt{t}\,dt\cong 1{,}218-\frac{5}{6}$

**9)** $\int_{-1}^{0}\sqrt{y+1}\,dy=\frac{2}{3}$

**10)** $\int_{0}^{3}\frac{dt}{\sqrt{1+t}}=2$

**11)** $\int_{0}^{2}e^{y/2}dy=2(e-1)$

Calcule as integrais definidas abaixo.

**12)** $\int_0^{\pi} 3\cos^2(x)sen(x)dx$

**13)** $\int_0^{1} \frac{5r}{\left(4+r^2\right)^2} dr$

**14)** $\int_0^{\pi/2} e^{sen(x)}\cos(x)dx$

**15)** $\int_0^{\pi/2} x^2\cos(2x)dx$

**16)** $\int_0^{2} xe^{2x}dx$

**17)** $\int_{-2}^{2} \ln(x+3)dx$

## 2 Bibliografia


ANTON, H. *Cálculo: Um Novo Horizonte*. Porto Alegre: Bookman, vol. 1, 2000.
STEWART, J. *Cálculo.* São Paulo: Pioneira Thomson Learning, vol. 1 2003.
THOMAS, G. B.. *Cálculo*. São Paulo: Pearson Addison Wesley, vol. 1 2002.