Ajuste de Curva

5 Ajuste de Curvas

5.1 Ajuste de Curvas por Funções Polinomiais

O ajuste de curvas consiste em determinar uma função que melhor represente pontos discretos, acompanhe a tendência deles e satisfaça algum critério.

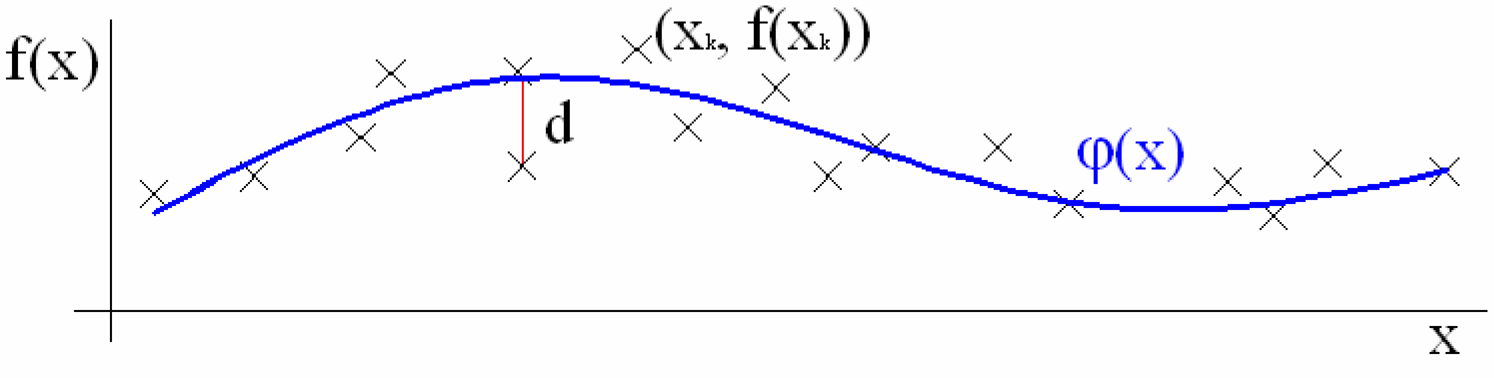
5 Ajuste de Curvas

5.1 Ajuste de Curvas por Funções Polinomiais

O ajuste de curvas consiste em determinar uma função que melhor represente pontos discretos, acompanhe a tendência deles e que satisfaça algum critério.

Método dos Mínimos Quadrados

Considerando os dados da figura mostrada abaixo:



onde $(x_k, f(x_k))$ são os pontos distintos e $\varphi(x)$ é a função procurada para representar os pontos.

Uma das formas de ajuste de curvas consiste em minimizar o somatório dos quadrados das distâncias dos pontos $(x_k\ ,\ f(x_k))$ $k = 1, 2, \ldots, m$ à curva $\varphi(x)$, conforme expressão:

$$\sum_{k=1}^{m} d_k^2 = \sum_{k=1}^{m} [f(x_k) - \varphi(x_k)]^2. \qquad (1)$$

Uma das formas de ajuste de curvas consiste em minimizar o somatório dos quadrados das distâncias dos pontos $(x_k,\ f(x_k))$ $k = 1, 2, \ldots, m$ à curva $\varphi(x)$, conforme expressão:

$$\sum_{k=1}^{m} d_k^2 = \sum_{k=1}^{m} [f(x_k) - \varphi(x_k)]^2. \qquad (1)$$

Pode-se determinar $\varphi(x)$ como uma combinação linear de funções $g_i(x)$ $i = 1, 2, \ldots, n$ da seguinte forma:

$$\varphi(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) + \ldots + \alpha_n g_n(x) \qquad (2)$$

Uma das formas de ajuste de curvas consiste em minimizar o somatório dos quadrados das distâncias dos pontos $(x_k\ ,\ f(x_k))$ $k = 1, 2, \ldots, m$ à curva $\varphi(x)$, conforme expressão:

$$\sum_{k=1}^{m} d_k^2 = \sum_{k=1}^{m} [f(x_k) - \varphi(x_k)]^2. \qquad (1)$$

Pode-se determinar $\varphi(x)$ como uma combinação linear de funções $g_i(x)$ $i = 1, 2, \ldots, n$ da seguinte forma:

$$\varphi(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) + \ldots + \alpha_n g_n(x) \qquad (2)$$

Definindo:

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \sum_{k=1}^{m} [f(x_k) - \varphi(x_k)]^2 \qquad (3)$$

Substituindo a equação (2) em (3), obtém-se:

$$F(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \sum_{k=1}^{m} [f(x_k) - \alpha_1 g_1(x) - \alpha_2 g_2(x) - ... - \alpha_n g_n(x)]^2 \qquad (4)$$

Substituindo a equação (2) em (3), obtém-se:

$$F(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \sum_{k=1}^{m} [f(x_k) - \alpha_1 g_1(x) - \alpha_2 g_2(x) - ... - \alpha_n g_n(x)]^2 \qquad (4)$$

onde:

m é o número de pontos $(x_k, f(x_k))$ com $k = 1, 2, ..., m$;

n é o número de funções $g_i(x)$ e de coeficientes α_i com $i = 1, 2, ..., n$;

$g_1(x), g_2(x), ..., g_n(x)$ são funções conhecidas e

$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ são os coeficientes a determinar.

Substituindo a equação (2) em (3), obtém-se:

$$F(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \sum_{k=1}^{m} [f(x_k) - \alpha_1 g_1(x) - \alpha_2 g_2(x) - ... - \alpha_n g_n(x)]^2 \qquad (4)$$

onde:

m é o número de pontos $(x_k, f(x_k))$ com $k = 1, 2, \ldots, m$;

n é o número de funções $g_i(x)$ e de coeficientes α_i com $i = 1, 2, \ldots, n$;

$g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x)$ são funções conhecidas e

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ são os coeficientes a determinar.

Minimizar a função $F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ consiste em determinar os valores de α_i quando:

$$\frac{\partial F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}{\partial \alpha_j} = 0 \text{ com } j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (5)$$

Derivando a eq. (4) e igualando a zero, obtém-se:

$$2\sum_{k=1}^{m}\left\{[f(x_k)-\alpha_1 g_1(x_k)-\alpha_2 g_2(x_k)-...-\alpha_n g_n(x_k)][-g_j(x_k)]\right\}=0 \qquad (6)$$

Derivando a eq. (4) e igualando a zero, obtém-se:

$$2\sum_{k=1}^{m}\{[f(x_k)-\alpha_1 g_1(x_k)-\alpha_2 g_2(x_k)-...-\alpha_n g_n(x_k)][-g_j(x_k)]\}=0 \qquad (6)$$

Fazendo j = 1, 2, ... , n obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\sum_{k=1}^{m}\{[f(x_k)-\alpha_1 g_1(x_k)-\alpha_2 g_2(x_k)-...-\alpha_n g_n(x_k)]g_1(x_k)\}=0$$

$$\sum_{k=1}^{m}\{[f(x_k)-\alpha_1 g_1(x_k)-\alpha_2 g_2(x_k)-...-\alpha_n g_n(x_k)]g_2(x_k)\}=0 \qquad (7)$$

$$\cdots$$

$$\sum_{k=1}^{m}\{[f(x_k)-\alpha_1 g_1(x_k)-\alpha_2 g_2(x_k)-...-\alpha_n g_n(x_k)]g_n(x_k)\}=0$$

Realizando algumas operações algébricas, as eqs. (7) ficam:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{m}(g_1(x_k)g_1(x_k))\alpha_1+\sum_{k=1}^{m}(g_1(x_k)g_2(x_k))\alpha_2+\ldots+\sum_{k=1}^{m}(g_1(x_k)g_n(x_k))\alpha_n=\sum_{k=1}^{m}(f(x_k)g_1(x_k))\\
&\sum_{k=1}^{m}(g_2(x_k)g_1(x_k))\alpha_1+\sum_{k=1}^{m}(g_2(x_k)g_2(x_k))\alpha_2+\ldots+\sum_{k=1}^{m}(g_2(x_k)g_n(x_k))\alpha_n=\sum_{k=1}^{m}(f(x_k)g_2(x_k)) \quad (8)\\
&\ldots\\
&\sum_{k=1}^{m}(g_n(x_k)g_1(x_k))\alpha_1+\sum_{k=1}^{m}(g_n(x_k)g_2(x_k))\alpha_2+\ldots+\sum_{k=1}^{m}(g_n(x_k)g_n(x_k))\alpha_n=\sum_{k=1}^{m}(f(x_k)g_n(x_k))
\end{aligned}$$

Realizando algumas operações algébricas, as eqs. (7) ficam:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{m}(g_1(x_k)g_1(x_k))\alpha_1+\sum_{k=1}^{m}(g_1(x_k)g_2(x_k))\alpha_2+\ldots+\sum_{k=1}^{m}(g_1(x_k)g_n(x_k))\alpha_n=\sum_{k=1}^{m}(f(x_k)g_1(x_k))\\
&\sum_{k=1}^{m}(g_2(x_k)g_1(x_k))\alpha_1+\sum_{k=1}^{m}(g_2(x_k)g_2(x_k))\alpha_2+\ldots+\sum_{k=1}^{m}(g_2(x_k)g_n(x_k))\alpha_n=\sum_{k=1}^{m}(f(x_k)g_2(x_k)) \quad (8)\\
&\ldots\\
&\sum_{k=1}^{m}(g_n(x_k)g_1(x_k))\alpha_1+\sum_{k=1}^{m}(g_n(x_k)g_2(x_k))\alpha_2+\ldots+\sum_{k=1}^{m}(g_n(x_k)g_n(x_k))\alpha_n=\sum_{k=1}^{m}(f(x_k)g_n(x_k))
\end{aligned}$$

As equações (8) constituem um sistema de equações lineares da forma $A\alpha = b$, onde:

Realizando algumas operações algébricas, as eqs. (7) ficam:

$$\sum_{k=1}^{m}(g_1(x_k)g_1(x_k))\alpha_1+\sum_{k=1}^{m}(g_1(x_k)g_2(x_k))\alpha_2+\ldots+\sum_{k=1}^{m}(g_1(x_k)g_n(x_k))\alpha_n=\sum_{k=1}^{m}(f(x_k)g_1(x_k))$$

$$\sum_{k=1}^{m}(g_2(x_k)g_1(x_k))\alpha_1+\sum_{k=1}^{m}(g_2(x_k)g_2(x_k))\alpha_2+\ldots+\sum_{k=1}^{m}(g_2(x_k)g_n(x_k))\alpha_n=\sum_{k=1}^{m}(f(x_k)g_2(x_k)) \quad (8)$$

$$\ldots$$

$$\sum_{k=1}^{m}(g_n(x_k)g_1(x_k))\alpha_1+\sum_{k=1}^{m}(g_n(x_k)g_2(x_k))\alpha_2+\ldots+\sum_{k=1}^{m}(g_n(x_k)g_n(x_k))\alpha_n=\sum_{k=1}^{m}(f(x_k)g_n(x_k))$$

As equações (8) constituem um sistema de equações lineares da forma $A\alpha = b$, onde:

$A = \underbrace{a_{ij} = \sum_{k=1}^{m} g_i(x_k)g_j(x_k)}$ é a matriz dos coeficientes;

Observa-se que, o índice i de a_{ij} é igual ao índice 1ª função, $g_i(x_k)$ e o índice j de a_{ij} é igual ao índice da 2ª função, $g_j(x_k)$.

Realizando algumas operações algébricas, as eqs. (7) ficam:

$$\sum_{k=1}^{m}(g_1(x_k)g_1(x_k))\alpha_1+\sum_{k=1}^{m}(g_1(x_k)g_2(x_k))\alpha_2+\ldots+\sum_{k=1}^{m}(g_1(x_k)g_n(x_k))\alpha_n=\sum_{k=1}^{m}(f(x_k)g_1(x_k))$$

$$\sum_{k=1}^{m}(g_2(x_k)g_1(x_k))\alpha_1+\sum_{k=1}^{m}(g_2(x_k)g_2(x_k))\alpha_2+\ldots+\sum_{k=1}^{m}(g_2(x_k)g_n(x_k))\alpha_n=\sum_{k=1}^{m}(f(x_k)g_2(x_k)) \quad (8)$$

$$\ldots$$

$$\sum_{k=1}^{m}(g_n(x_k)g_1(x_k))\alpha_1+\sum_{k=1}^{m}(g_n(x_k)g_2(x_k))\alpha_2+\ldots+\sum_{k=1}^{m}(g_n(x_k)g_n(x_k))\alpha_n=\sum_{k=1}^{m}(f(x_k)g_n(x_k))$$

As equações (8) constituem um sistema de equações lineares da forma $A\alpha = b$, onde:

$A = a_{ij} = \sum_{k=1}^{m} g_i(x_k)g_j(x_k)$ é a matriz dos coeficientes;

$\alpha_i = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \ldots \quad \alpha_n]^{\mathrm{T}}$ é o vetor das incógnitas;

Realizando algumas operações algébricas, as eqs. (7) ficam:

$$\sum_{k=1}^{m}(g_1(x_k)g_1(x_k))\alpha_1+\sum_{k=1}^{m}(g_1(x_k)g_2(x_k))\alpha_2+\ldots+\sum_{k=1}^{m}(g_1(x_k)g_n(x_k))\alpha_n=\sum_{k=1}^{m}(f(x_k)g_1(x_k))$$

$$\sum_{k=1}^{m}(g_2(x_k)g_1(x_k))\alpha_1+\sum_{k=1}^{m}(g_2(x_k)g_2(x_k))\alpha_2+\ldots+\sum_{k=1}^{m}(g_2(x_k)g_n(x_k))\alpha_n=\sum_{k=1}^{m}(f(x_k)g_2(x_k)) \quad (8)$$

$$\ldots$$

$$\sum_{k=1}^{m}(g_n(x_k)g_1(x_k))\alpha_1+\sum_{k=1}^{m}(g_n(x_k)g_2(x_k))\alpha_2+\ldots+\sum_{k=1}^{m}(g_n(x_k)g_n(x_k))\alpha_n=\sum_{k=1}^{m}(f(x_k)g_n(x_k))$$

As equações (8) constituem um sistema de equações lineares da forma $A\alpha = b$, onde:

$A = a_{ij} = \sum_{k=1}^{m} g_i(x_k)g_j(x_k)$ é a matriz dos coeficientes;

$\alpha_i = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \ldots \quad \alpha_n]^T$ é o vetor das incógnitas;

$b_i = \sum_{k=1}^{m} f(x_k)g_i(x_k)$ é o vetor dos termos independentes.

Resolvendo o sistema de equações (8), obtém-se as incógnitas da eq. (2), ou seja, da função $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) + \dots + \alpha_n g_n(x)$$

Resolvendo o sistema de equações (8) obtém-se as incógnitas da eq. (2), ou seja, da função $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) + ... + \alpha_n g_n(x)$$

Por exemplo, considerando que o objetivo é ajustar alguns pontos a um polinômio de 3ª ordem, a função $\varphi(x)$ tem a seguinte forma:

$$\varphi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 \qquad (9)$$

Resolvendo o sistema de equações (8) obtém-se as incógnitas da eq. (2), ou seja, da função $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) + \ldots + \alpha_n g_n(x)$$

Por exemplo, considerando que o objetivo é ajustar alguns pontos a um polinômio de 3ª ordem, a função $\varphi(x)$ tem a seguinte forma:

$$\varphi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 \qquad (9)$$

Comparando a eq. (9) com a eq. (2), conclui-se que as funções conhecidas são:

$$g_1(x) = 1, \quad g_2(x) = x, \quad g_3(x) = x^2 \quad \text{e} \quad g_4(x) = x^3 \qquad (10)$$

Exercícios:

1) Observações em um determinado fenômeno físico originaram 6 pontos, conforme tabela abaixo. Assim, determine um **polinômio de terceira ordem** que se ajuste aos pontos.

x_k	1	2	3	4	5	6
$f(x_k)$	3,14	1,76	4,08	7,32	6,48	8,41

Exercícios:

1) Observações em um determinado fenômeno físico originaram 6 pontos, conforme tabela abaixo. Assim, determine um **polinômio de terceira ordem** que se ajuste aos pontos.

x_k	1	2	3	4	5	6
$f(x_k)$	3,14	1,76	4,08	7,32	6,48	8,41

Observações:

- *Em ajuste de curvas o usuário escolhe a ordem do polinômio, não necessita deverá ser de ordem n, por exemplo neste exercício;*
- *Se o polinômio escolhido for de ordem n, o polinômio que encontraremos será igual ao dos métodos de interpolação, estudados anteriormente;*
- *Um polinômio obtido por ajuste de curvas não necessariamente passa pelos pontos da função, podem passar próximos aos pontos – quando a ordem do polinômio for menor que n;*
- *Todos os exercícios resolvidos através de interpolações polinomiais podem ser resolvidos, também, por ajuste de curvas polinomiais – escolhendo a ordem do polinômio igual a n obter-se-á o mesmo resultado.*

Exercícios:

1) Observações em um determinado fenômeno físico originaram 6 pontos, conforme tabela abaixo. Assim, determine um **polinômio de terceira ordem** que se ajuste aos pontos.

x_k	1	2	3	4	5	6
$f(x_k)$	3,14	1,76	4,08	7,32	6,48	8,41

O polinômio é da forma:

$$\varphi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3$$

Observe que, para determinar o polinômio necessita-se calcular as incógnitas: α_1, α_2, α_3 e α_4.

Exercícios:

1) Observações em um determinado fenômeno físico originaram 6 pontos, conforme tabela abaixo. Assim, determine um polinômio de terceira ordem que se ajuste aos pontos.

x_k	1	2	3	4	5	6
$f(x_k)$	3,14	1,76	4,08	7,32	6,48	8,41

O polinômio é da forma:

$$\varphi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3$$

As funções são:

$$g_1(x) = 1; \quad g_2(x) = x; \quad g_3(x) = x^2 \text{ e } g_4(x) = x^3$$

Exercícios:

1) Observações em um determinado fenômeno físico originaram 6 pontos, conforme tabela abaixo. Assim, determine um polinômio de terceira ordem que se ajuste aos pontos.

x_k	1	2	3	4	5	6
$f(x_k)$	3,14	1,76	4,08	7,32	6,48	8,41

O polinômio é da forma:

$$\varphi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3$$

As funções são:

$$g_1(x) = 1; \quad g_2(x) = x; \quad g_3(x) = x^2 \text{ e } g_4(x) = x^3$$

Sistema de equações lineares $A\alpha = b$:

Sistema de equações lineares $A\alpha = b$ (4x4):

$$\sum_{k=1}^{m}(g_1(x_k)g_1(x_k))\alpha_1 + \sum_{k=1}^{m}(g_1(x_k)g_2(x_k))\alpha_2 + \ldots + \sum_{k=1}^{m}(g_1(x_k)g_n(x_k))\alpha_n = \sum_{k=1}^{m}(f(x_k)g_1(x_k))$$

$$\sum_{k=1}^{m}(g_2(x_k)g_1(x_k))\alpha_1 + \sum_{k=1}^{m}(g_2(x_k)g_2(x_k))\alpha_2 + \ldots + \sum_{k=1}^{m}(g_2(x_k)g_n(x_k))\alpha_n = \sum_{k=1}^{m}(f(x_k)g_2(x_k))$$

$\ldots$

$$\sum_{k=1}^{m}(g_n(x_k)g_1(x_k))\alpha_1 + \sum_{k=1}^{m}(g_n(x_k)g_2(x_k))\alpha_2 + \ldots + \sum_{k=1}^{m}(g_n(x_k)g_n(x_k))\alpha_n = \sum_{k=1}^{m}(f(x_k)g_n(x_k))$$

Sistema de equações lineares $A\alpha = b$ (4x4):

$$\sum_{k=1}^{m}(g_1(x_k)g_1(x_k))\alpha_1 + \sum_{k=1}^{m}(g_1(x_k)g_2(x_k))\alpha_2 + \ldots + \sum_{k=1}^{m}(g_1(x_k)g_n(x_k))\alpha_n = \sum_{k=1}^{m}(f(x_k)g_1(x_k))$$

$$\sum_{k=1}^{m}(g_2(x_k)g_1(x_k))\alpha_1 + \sum_{k=1}^{m}(g_2(x_k)g_2(x_k))\alpha_2 + \ldots + \sum_{k=1}^{m}(g_2(x_k)g_n(x_k))\alpha_n = \sum_{k=1}^{m}(f(x_k)g_2(x_k))$$

$\ldots$

$$\sum_{k=1}^{m}(g_n(x_k)g_1(x_k))\alpha_1 + \sum_{k=1}^{m}(g_n(x_k)g_2(x_k))\alpha_2 + \ldots + \sum_{k=1}^{m}(g_n(x_k)g_n(x_k))\alpha_n = \sum_{k=1}^{m}(f(x_k)g_n(x_k))$$

Matriz dos coeficientes:

$$a_{11} = \underbrace{\sum_{k=1}^{6} g_1(x_k)g_1(x_k)}_{} =$$

Observações:

- *k varia de* 1 *até* 6, *porque são* 6 *pontos;*
- *a função* $g_1(x_k) = 1$, *definida anteriormente.*

Sistema de equações lineares $A\alpha = b$ (4x4):

$$\sum_{k=1}^{m}(g_1(x_k)g_1(x_k))\alpha_1 + \sum_{k=1}^{m}(g_1(x_k)g_2(x_k))\alpha_2 + \ldots + \sum_{k=1}^{m}(g_1(x_k)g_n(x_k))\alpha_n = \sum_{k=1}^{m}(f(x_k)g_1(x_k))$$

$$\sum_{k=1}^{m}(g_2(x_k)g_1(x_k))\alpha_1 + \sum_{k=1}^{m}(g_2(x_k)g_2(x_k))\alpha_2 + \ldots + \sum_{k=1}^{m}(g_2(x_k)g_n(x_k))\alpha_n = \sum_{k=1}^{m}(f(x_k)g_2(x_k))$$

$$\ldots$$

$$\sum_{k=1}^{m}(g_n(x_k)g_1(x_k))\alpha_1 + \sum_{k=1}^{m}(g_n(x_k)g_2(x_k))\alpha_2 + \ldots + \sum_{k=1}^{m}(g_n(x_k)g_n(x_k))\alpha_n = \sum_{k=1}^{m}(f(x_k)g_n(x_k))$$

Matriz dos coeficientes:

$$a_{11} = \sum_{k=1}^{6} g_1(x_k)g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{6} 1 =$$

Sistema de equações lineares $A\alpha = b$ (4x4):

$$\sum_{k=1}^{m}(g_1(x_k)g_1(x_k))\alpha_1 + \sum_{k=1}^{m}(g_1(x_k)g_2(x_k))\alpha_2 + \ldots + \sum_{k=1}^{m}(g_1(x_k)g_n(x_k))\alpha_n = \sum_{k=1}^{m}(f(x_k)g_1(x_k))$$

$$\sum_{k=1}^{m}(g_2(x_k)g_1(x_k))\alpha_1 + \sum_{k=1}^{m}(g_2(x_k)g_2(x_k))\alpha_2 + \ldots + \sum_{k=1}^{m}(g_2(x_k)g_n(x_k))\alpha_n = \sum_{k=1}^{m}(f(x_k)g_2(x_k))$$

...

$$\sum_{k=1}^{m}(g_n(x_k)g_1(x_k))\alpha_1 + \sum_{k=1}^{m}(g_n(x_k)g_2(x_k))\alpha_2 + \ldots + \sum_{k=1}^{m}(g_n(x_k)g_n(x_k))\alpha_n = \sum_{k=1}^{m}(f(x_k)g_n(x_k))$$

Matriz dos coeficientes:

$$a_{11} = \sum_{k=1}^{6} g_1(x_k)g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{6} 1 = 1+1+1+1+1+1 = 6$$

Sistema de equações lineares $A\alpha = b$ (4x4):

$$\sum_{k=1}^{m}(g_1(x_k)g_1(x_k))\alpha_1 + \sum_{k=1}^{m}(g_1(x_k)g_2(x_k))\alpha_2 + \ldots + \sum_{k=1}^{m}(g_1(x_k)g_n(x_k))\alpha_n = \sum_{k=1}^{m}(f(x_k)g_1(x_k))$$

$$\sum_{k=1}^{m}(g_2(x_k)g_1(x_k))\alpha_1 + \sum_{k=1}^{m}(g_2(x_k)g_2(x_k))\alpha_2 + \ldots + \sum_{k=1}^{m}(g_2(x_k)g_n(x_k))\alpha_n = \sum_{k=1}^{m}(f(x_k)g_2(x_k))$$

...

$$\sum_{k=1}^{m}(g_n(x_k)g_1(x_k))\alpha_1 + \sum_{k=1}^{m}(g_n(x_k)g_2(x_k))\alpha_2 + \ldots + \sum_{k=1}^{m}(g_n(x_k)g_n(x_k))\alpha_n = \sum_{k=1}^{m}(f(x_k)g_n(x_k))$$

Matriz dos coeficientes:

$$a_{11} = \sum_{k=1}^{6} g_1(x_k)g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{6} 1 = 1+1+1+1+1+1 = 6$$

$$a_{12} = \sum_{k=1}^{6} \underbrace{g_1(x_k)g_2(x_k)} = \sum_{k=1}^{6} x_k =$$

Observa-se que, as funções $g_1(x_k) = 1$ e $g_2(x_k) = x_k$, conforme foram definidas anteriormente.

Sistema de equações lineares $A\alpha = b$ (4x4):

$$\sum_{k=1}^{m}(g_1(x_k)g_1(x_k))\alpha_1 + \sum_{k=1}^{m}(g_1(x_k)g_2(x_k))\alpha_2 + \ldots + \sum_{k=1}^{m}(g_1(x_k)g_n(x_k))\alpha_n = \sum_{k=1}^{m}(f(x_k)g_1(x_k))$$

$$\sum_{k=1}^{m}(g_2(x_k)g_1(x_k))\alpha_1 + \sum_{k=1}^{m}(g_2(x_k)g_2(x_k))\alpha_2 + \ldots + \sum_{k=1}^{m}(g_2(x_k)g_n(x_k))\alpha_n = \sum_{k=1}^{m}(f(x_k)g_2(x_k))$$

...

$$\sum_{k=1}^{m}(g_n(x_k)g_1(x_k))\alpha_1 + \sum_{k=1}^{m}(g_n(x_k)g_2(x_k))\alpha_2 + \ldots + \sum_{k=1}^{m}(g_n(x_k)g_n(x_k))\alpha_n = \sum_{k=1}^{m}(f(x_k)g_n(x_k))$$

Matriz dos coeficientes:

$$a_{11} = \sum_{k=1}^{6} g_1(x_k)g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{6} 1 = 1+1+1+1+1+1 = 6$$

$$a_{12} = \sum_{k=1}^{6} g_1(x_k)g_2(x_k) = \sum_{k=1}^{6} x_k = \underbrace{1+2+3+4+5+6}_{} = 21$$

São os valores de x dos pontos, x_k, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, ou seja, os valores de x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 e x_6.

Sistema de equações lineares $A\alpha = b$ (4x4):

$$\sum_{k=1}^{m}(g_1(x_k)g_1(x_k))\alpha_1 + \sum_{k=1}^{m}(g_1(x_k)g_2(x_k))\alpha_2 + \ldots + \sum_{k=1}^{m}(g_1(x_k)g_n(x_k))\alpha_n = \sum_{k=1}^{m}(f(x_k)g_1(x_k))$$

$$\sum_{k=1}^{m}(g_2(x_k)g_1(x_k))\alpha_1 + \sum_{k=1}^{m}(g_2(x_k)g_2(x_k))\alpha_2 + \ldots + \sum_{k=1}^{m}(g_2(x_k)g_n(x_k))\alpha_n = \sum_{k=1}^{m}(f(x_k)g_2(x_k))$$

...

$$\sum_{k=1}^{m}(g_n(x_k)g_1(x_k))\alpha_1 + \sum_{k=1}^{m}(g_n(x_k)g_2(x_k))\alpha_2 + \ldots + \sum_{k=1}^{m}(g_n(x_k)g_n(x_k))\alpha_n = \sum_{k=1}^{m}(f(x_k)g_n(x_k))$$

Matriz dos coeficientes:

$$a_{11} = \sum_{k=1}^{6} g_1(x_k)g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{6} 1 = 1+1+1+1+1+1 = 6$$

$$a_{12} = \sum_{k=1}^{6} g_1(x_k)g_2(x_k) = \sum_{k=1}^{6} x_k = 1+2+3+4+5+6 = 21$$

$$a_{13} = \sum_{k=1}^{6} \underbrace{g_1(x_k)g_3(x_k)} = \sum_{k=1}^{6} x_k^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2 = 91$$

Observa-se que as funções $g_1(x_k) = 1$ e $g_3(x_k) = x_k^2$.

Sistema de equações lineares $A\alpha = b$ (4x4):

$$\sum_{k=1}^{m}(g_1(x_k)g_1(x_k))\alpha_1+\sum_{k=1}^{m}(g_1(x_k)g_2(x_k))\alpha_2+\ldots+\sum_{k=1}^{m}(g_1(x_k)g_n(x_k))\alpha_n=\sum_{k=1}^{m}(f(x_k)g_1(x_k))$$

$$\sum_{k=1}^{m}(g_2(x_k)g_1(x_k))\alpha_1+\sum_{k=1}^{m}(g_2(x_k)g_2(x_k))\alpha_2+\ldots+\sum_{k=1}^{m}(g_2(x_k)g_n(x_k))\alpha_n=\sum_{k=1}^{m}(f(x_k)g_2(x_k))$$

...

$$\sum_{k=1}^{m}(g_n(x_k)g_1(x_k))\alpha_1+\sum_{k=1}^{m}(g_n(x_k)g_2(x_k))\alpha_2+\ldots+\sum_{k=1}^{m}(g_n(x_k)g_n(x_k))\alpha_n=\sum_{k=1}^{m}(f(x_k)g_n(x_k))$$

Matriz dos coeficientes:

$$a_{11}=\sum_{k=1}^{6}g_1(x_k)g_1(x_k)=\sum_{k=1}^{6}1=1+1+1+1+1+1=6$$

$$a_{12}=\sum_{k=1}^{6}g_1(x_k)g_2(x_k)=\sum_{k=1}^{6}x_k=1+2+3+4+5+6=21$$

$$a_{13}=\sum_{k=1}^{6}g_1(x_k)g_3(x_k)=\sum_{k=1}^{6}x_k^2=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2=91$$

$$a_{14}=\sum_{k=1}^{6}g_1(x_k)g_4(x_k)=\sum_{k=1}^{6}x_k^3=1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3=441$$

$$a_{21} = \sum_{k=1}^{6} g_2(x_k)\, g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{6} x_k = a_{12} = 21$$

Este somatório já foi calculado.

$$a_{21} = \sum_{k=1}^{6} g_2(x_k) g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{6} x_k = a_{12} = 21$$

$$a_{22} = \sum_{k=1}^{6} g_2(x_k) g_2(x_k) = \sum_{k=1}^{6} x_k^2 = a_{13} = 91$$

Este somatório já foi calculado.

$$a_{21} = \sum_{k=1}^{6} g_2(x_k)\,g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{6} x_k = a_{12} = 21$$

$$a_{22} = \sum_{k=1}^{6} g_2(x_k)\,g_2(x_k) = \sum_{k=1}^{6} x_k^2 = a_{13} = 91$$

$$a_{23} = \sum_{k=1}^{6} g_2(x_k)\,g_3(x_k) = \sum_{k=1}^{6} x_k^3 = a_{14} = 441$$

Este somatório já foi calculado.

$$a_{21} = \sum_{k=1}^{6} g_2(x_k) g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{6} x_k = a_{12} = 21$$

$$a_{22} = \sum_{k=1}^{6} g_2(x_k) g_2(x_k) = \sum_{k=1}^{6} x_k^2 = a_{13} = 91$$

$$a_{23} = \sum_{k=1}^{6} g_2(x_k) g_3(x_k) = \sum_{k=1}^{6} x_k^3 = a_{14} = 441$$

$$a_{24} = \sum_{k=1}^{6} g_2(x_k) g_4(x_k) = \sum_{k=1}^{6} x_k^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 + 6^4 = 2275$$

$$a_{21} = \sum_{k=1}^{6} g_2(x_k) g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{6} x_k = a_{12} = 21$$

$$a_{22} = \sum_{k=1}^{6} g_2(x_k) g_2(x_k) = \sum_{k=1}^{6} x_k^2 = a_{13} = 91$$

$$a_{23} = \sum_{k=1}^{6} g_2(x_k) g_3(x_k) = \sum_{k=1}^{6} x_k^3 = a_{14} = 441$$

$$a_{24} = \sum_{k=1}^{6} g_2(x_k) g_4(x_k) = \sum_{k=1}^{6} x_k^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 + 6^4 = 2275$$

$$a_{31} = \sum_{k=1}^{6} g_3(x_k) g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{6} x_k^2 = a_{13} = 91$$

Note que a matriz dos coeficientes é simétrica ($a_{ij} = a_{ji}$).

$$a_{21}=\sum_{k=1}^{6} g_2(x_k)g_1(x_k)=\sum_{k=1}^{6} x_k=a_{12}=21$$

$$a_{22}=\sum_{k=1}^{6} g_2(x_k)g_2(x_k)=\sum_{k=1}^{6} x_k^2=a_{13}=91$$

$$a_{23}=\sum_{k=1}^{6} g_2(x_k)g_3(x_k)=\sum_{k=1}^{6} x_k^3=a_{14}=441$$

$$a_{24}=\sum_{k=1}^{6} g_2(x_k)g_4(x_k)=\sum_{k=1}^{6} x_k^4=1^4+2^4+3^4+4^4+5^4+6^4=2275$$

$$a_{31}=\sum_{k=1}^{6} g_3(x_k)g_1(x_k)=\sum_{k=1}^{6} x_k^2=a_{13}=91$$

$$a_{32}=\sum_{k=1}^{6} g_3(x_k)g_2(x_k)=\sum_{k=1}^{6} x_k^3=a_{23}=441$$

$$a_{21} = \sum_{k=1}^{6} g_2(x_k) g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{6} x_k = a_{12} = 21$$

$$a_{22} = \sum_{k=1}^{6} g_2(x_k) g_2(x_k) = \sum_{k=1}^{6} x_k^2 = a_{13} = 91$$

$$a_{23} = \sum_{k=1}^{6} g_2(x_k) g_3(x_k) = \sum_{k=1}^{6} x_k^3 = a_{14} = 441$$

$$a_{24} = \sum_{k=1}^{6} g_2(x_k) g_4(x_k) = \sum_{k=1}^{6} x_k^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 + 6^4 = 2275$$

$$a_{31} = \sum_{k=1}^{6} g_3(x_k) g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{6} x_k^2 = a_{13} = 91$$

$$a_{32} = \sum_{k=1}^{6} g_3(x_k) g_2(x_k) = \sum_{k=1}^{6} x_k^3 = a_{23} = 441$$

$$a_{33} = \sum_{k=1}^{6} g_3(x_k) g_3(x_k) = \sum_{k=1}^{6} x_k^4 = a_{24} = 2275$$

$$a_{21} = \sum_{k=1}^{6} g_2(x_k)g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{6} x_k = a_{12} = 21$$

$$a_{22} = \sum_{k=1}^{6} g_2(x_k)g_2(x_k) = \sum_{k=1}^{6} x_k^2 = a_{13} = 91$$

$$a_{23} = \sum_{k=1}^{6} g_2(x_k)g_3(x_k) = \sum_{k=1}^{6} x_k^3 = a_{14} = 441$$

$$a_{24} = \sum_{k=1}^{6} g_2(x_k)g_4(x_k) = \sum_{k=1}^{6} x_k^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 + 6^4 = 2275$$

$$a_{31} = \sum_{k=1}^{6} g_3(x_k)g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{6} x_k^2 = a_{13} = 91$$

$$a_{32} = \sum_{k=1}^{6} g_3(x_k)g_2(x_k) = \sum_{k=1}^{6} x_k^3 = a_{23} = 441$$

$$a_{33} = \sum_{k=1}^{6} g_3(x_k)g_3(x_k) = \sum_{k=1}^{6} x_k^4 = a_{24} = 2275$$

$$a_{34} = \sum_{k=1}^{6} g_3(x_k)g_4(x_k) = \sum_{k=1}^{6} x_k^5 = 1^5 + 2^5 + 3^5 + 4^5 + 5^5 + 6^5 = 12201$$

$$a_{41} = \sum_{k=1}^{6} g_4(x_k)\, g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{6} x_k^3 = a_{14} = 441$$

$$a_{41} = \sum_{k=1}^{6} g_4(x_k) g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{6} x_k^3 = a_{14} = 441$$

$$a_{42} = \sum_{k=1}^{6} g_4(x_k) g_2(x_k) = \sum_{k=1}^{6} x_k^4 = a_{24} = 2275$$

$$a_{41} = \sum_{k=1}^{6} g_4(x_k) g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{6} x_k^3 = a_{14} = 441$$

$$a_{42} = \sum_{k=1}^{6} g_4(x_k) g_2(x_k) = \sum_{k=1}^{6} x_k^4 = a_{24} = 2275$$

$$a_{43} = \sum_{k=1}^{6} g_4(x_k) g_3(x_k) = \sum_{k=1}^{6} x_k^5 = a_{34} = 12201$$

$$a_{41} = \sum_{k=1}^{6} g_4(x_k) g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{6} x_k^3 = a_{14} = 441$$

$$a_{42} = \sum_{k=1}^{6} g_4(x_k) g_2(x_k) = \sum_{k=1}^{6} x_k^4 = a_{24} = 2275$$

$$a_{43} = \sum_{k=1}^{6} g_4(x_k) g_3(x_k) = \sum_{k=1}^{6} x_k^5 = a_{34} = 12201$$

$$a_{44} = \sum_{k=1}^{6} g_4(x_k) g_4(x_k) = \sum_{k=1}^{6} x_k^6 = 1^6 + 2^6 + 3^6 + 4^6 + 5^6 + 6^6 = 67171$$

$$a_{41}=\sum_{k=1}^{6} g_4(x_k)g_1(x_k)=\sum_{k=1}^{6} x_k^3=a_{14}=441$$

$$a_{42}=\sum_{k=1}^{6} g_4(x_k)g_2(x_k)=\sum_{k=1}^{6} x_k^4=a_{24}=2275$$

$$a_{43}=\sum_{k=1}^{6} g_4(x_k)g_3(x_k)=\sum_{k=1}^{6} x_k^5=a_{34}=12201$$

$$a_{44}=\sum_{k=1}^{6} g_4(x_k)g_4(x_k)=\sum_{k=1}^{6} x_k^6=1^6+2^6+3^6+4^6+5^6+6^6=67171$$

$$A=\begin{bmatrix} 6 & 21 & 91 & 441 \\ 21 & 91 & 441 & 2275 \\ 91 & 441 & 2275 & 12201 \\ 441 & 2275 & 12201 & 67171 \end{bmatrix}$$

Note que a matriz dos coeficientes é sempre simétrica ($a_{ij} = a_{ji}$).

Vetor dos termos independentes:

$$b_1 = \sum_{k=1}^{6} f(x_k)\, g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{6} f(x_k) =$$

Vetor dos termos independentes:

$$b_1 = \sum_{k=1}^{6} f(x_k) g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{6} f(x_k) = \underbrace{3{,}14 + 1{,}76 + 4{,}08 + 7{,}32 + 6{,}48 + 8{,}41}_{\text{É o somatório dos valores de } f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3),\ f(x_4),\ f(x_5) \text{ e } f(x_6) \text{ dos pontos.}} = 31{,}19$$

Vetor dos termos independentes:

$$b_1 = \sum_{k=1}^{6} f(x_k) g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{6} f(x_k) = 3{,}14 + 1{,}76 + 4{,}08 + 7{,}32 + 6{,}48 + 8{,}41 = 31{,}19$$

$$b_2 = \sum_{k=1}^{6} f(x_k) g_2(x_k) = \sum_{k=1}^{6} f(x_k) x_k = 3{,}14(1) + 1{,}76(2) + 4{,}08(3) + 7{,}32(4) +$$

$$\underbrace{6{,}48(5) + 8{,}41(6) = 131{,}04}$$

É o somatório dos valores de

$f(x_1)x_1 + f(x_2)x_2 + f(x_3)x_3 + \ \ldots + f(x_6)x_6$

Vetor dos termos independentes:

$$b_1 = \sum_{k=1}^{6} f(x_k) g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{6} f(x_k) = 3{,}14 + 1{,}76 + 4{,}08 + 7{,}32 + 6{,}48 + 8{,}41 = 31{,}19$$

$$b_2 = \sum_{k=1}^{6} f(x_k) g_2(x_k) = \sum_{k=1}^{6} f(x_k) x_k = 3{,}14(1) + 1{,}76(2) + 4{,}08(3) + 7{,}32(4) +$$

$$6{,}48(5) + 8{,}41(6) = 131{,}04$$

$$b_3 = \sum_{k=1}^{6} f(x_k) g_3(x_k) = \sum_{k=1}^{6} f(x_k) x_k^2 = 3{,}14(1)^2 + 1{,}76(2)^2 + 4{,}08(3)^2 + 7{,}32(4)^2 +$$

$$6{,}48(5)^2 + 8{,}41(6)^2 = 628{,}78$$

Vetor dos termos independentes:

$$b_1 = \sum_{k=1}^{6} f(x_k) g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{6} f(x_k) = 3{,}14 + 1{,}76 + 4{,}08 + 7{,}32 + 6{,}48 + 8{,}41 = 31{,}19$$

$$b_2 = \sum_{k=1}^{6} f(x_k) g_2(x_k) = \sum_{k=1}^{6} f(x_k) x_k = 3{,}14(1) + 1{,}76(2) + 4{,}08(3) + 7{,}32(4) + 6{,}48(5) + 8{,}41(6) = 131{,}04$$

$$b_3 = \sum_{k=1}^{6} f(x_k) g_3(x_k) = \sum_{k=1}^{6} f(x_k) x_k^2 = 3{,}14(1)^2 + 1{,}76(2)^2 + 4{,}08(3)^2 + 7{,}32(4)^2 + 6{,}48(5)^2 + 8{,}41(6)^2 = 628{,}78$$

$$b_4 = \sum_{k=1}^{6} f(x_k) g_4(x_k) = \sum_{k=1}^{6} f(x_k) x_k^3 = 3{,}14(1)^3 + 1{,}76(2)^3 + 4{,}08(3)^3 + 7{,}32(4)^3 + 6{,}48(5)^3 + 8{,}41(6)^3 = 3222{,}42$$

Sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} 6 & 21 & 91 & 441 \\ 21 & 91 & 441 & 2275 \\ 91 & 441 & 2275 & 12201 \\ 441 & 2275 & 12201 & 67171 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 31{,}19 \\ 131{,}04 \\ 628{,}78 \\ 3222{,}42 \end{Bmatrix}$$

Para resolver o sistema, basta aplicar o método de Gauss, estudado anteriormente.

No entanto, os cálculos para determinar a solução destes sistemas é trabalhoso, porque os multiplicadores e uma boa parte dos coeficientes serão valores reais.

Em vista disto, será disponibilizado na plataforma moodle o programa do método de Gauss, para resolver estes sistemas.

Sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} 6 & 21 & 91 & 441 \\ 21 & 91 & 441 & 2275 \\ 91 & 441 & 2275 & 12201 \\ 441 & 2275 & 12201 & 67171 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 31,19 \\ 131,04 \\ 628,78 \\ 3222,42 \end{Bmatrix}$$

Solução do sistema:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6,06 \\ -5,00639 \\ 1,98024 \\ -0,18194 \end{Bmatrix}$$

Use o programa do método de Gauss disponibilizado na plataforma moodle para confirmar a solução do sistema.

Sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} 6 & 21 & 91 & 441 \\ 21 & 91 & 441 & 2275 \\ 91 & 441 & 2275 & 12201 \\ 441 & 2275 & 12201 & 67171 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 31{,}19 \\ 131{,}04 \\ 628{,}78 \\ 3222{,}42 \end{Bmatrix}$$

Solução do sistema:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6{,}06 \\ -5{,}00639 \\ 1{,}98024 \\ -0{,}18194 \end{Bmatrix}$$

Então, o polinômio de terceira ordem que se ajusta aos pontos é:

$$\varphi(x) = 6{,}06 - 5{,}00639x + 1{,}98024x^2 - 0{,}18194x^3$$

Sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} 6 & 21 & 91 & 441 \\ 21 & 91 & 441 & 2275 \\ 91 & 441 & 2275 & 12201 \\ 441 & 2275 & 12201 & 67171 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 31{,}19 \\ 131{,}04 \\ 628{,}78 \\ 3222{,}42 \end{Bmatrix}$$

Solução do sistema:

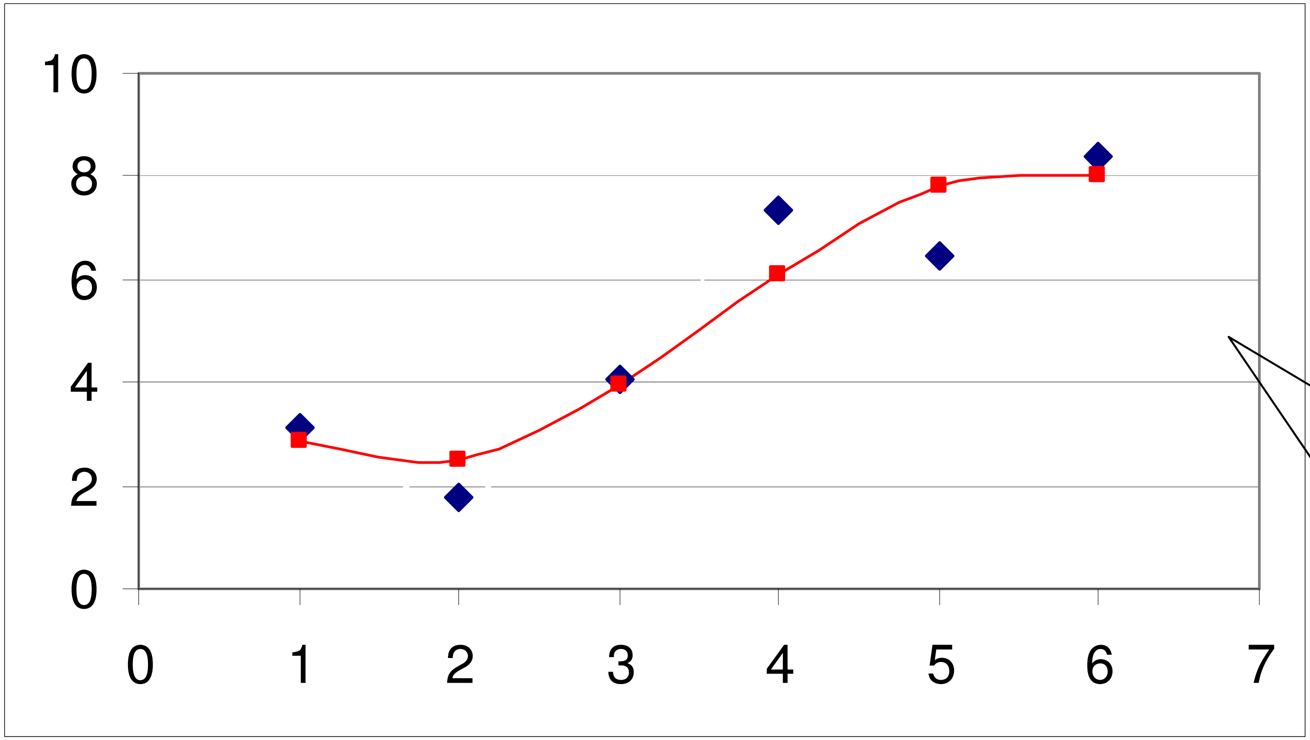
$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6{,}0599 \\ -5{,}0064 \\ 1{,}9802 \\ -0{,}1819 \end{Bmatrix}$$

Observa-se que, em ajuste de curvas o polinômio não necessariamente passa pelos pontos de interpolação.

Então, o polinômio de terceira ordem que se ajusta aos pontos é:

$$\varphi(x) = 6{,}06 - 5{,}00639x + 1{,}98024x^2 - 0{,}18194x^3$$

Para ilustrar, na figura, são apresentados os pontos e o polinômio, com o objetivo de visualizar e avaliar a aproximação do polinômio aos pontos interpolados.



Note que, em ***ajuste de curvas****, o polinômio não necessita passar pelos pontos de interpolação.*

$$\varphi(x) = 6{,}06 - 5{,}00639x + 1{,}98024x^2 - 0{,}18194x^3$$

2) Considerando os dados da tabela abaixo, determine um polinômio de segunda ordem que melhor se ajuste aos pontos.

x_k	1	2	4	6
$f(x_k)$	10	5	2	1

2) Considerando os dados da tabela abaixo, determine um polinômio de segunda ordem que melhor se ajuste aos pontos.

x_k	1	2	4	6
$f(x_k)$	10	5	2	1

O polinômio é da forma:

$$\varphi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2$$

2) Considerando os dados da tabela abaixo, determine um polinômio de segunda ordem que melhor se ajuste aos pontos. .

x_k	1	2	4	6
$f(x_k)$	10	5	2	1

O polinômio é da forma:

$$\varphi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2$$

Funções:

$$g_1(x) = 1; \quad g_2(x) = x; \quad g_3(x) = x^2$$

2) Considerando os dados da tabela abaixo, determine um polinômio de segunda ordem que melhor se ajuste aos pontos. .

x_k	1	2	4	6
$f(x_k)$	10	5	2	1

O polinômio é da forma:

$$\varphi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2$$

Funções:

$$g_1(x) = 1; \quad g_2(x) = x; \quad g_3(x) = x^2$$

Sistema de equações lineares $A\alpha = b$ (3x3):

Matriz dos coeficientes, A(3x3):

$$a_{11} = \sum_{k=1}^{4} g_1(x_k) g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{4} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

Matriz dos coeficientes, $A(3x3)$:

$$a_{11} = \sum_{k=1}^{4} g_1(x_k) g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{4} 1 = 1+1+1+1 = 4$$

$$a_{12} = \sum_{k=1}^{4} g_1(x_k) g_2(x_k) = \sum_{k=1}^{4} x_k = 1+2+4+6 = 13$$

Matriz dos coeficientes, A(3x3):

$$a_{11} = \sum_{k=1}^{4} g_1(x_k) g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{4} 1 = 1+1+1+1 = 4$$

$$a_{12} = \sum_{k=1}^{4} g_1(x_k) g_2(x_k) = \sum_{k=1}^{4} x_k = 1+2+4+6 = 13$$

$$a_{13} = \sum_{k=1}^{4} g_1(x_k) g_3(x_k) = \sum_{k=1}^{4} x_k^2 = 1^2+2^2+4^2+6^2 = 57$$

Matriz dos coeficientes, A(3x3):

$$a_{11} = \sum_{k=1}^{4} g_1(x_k) g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{4} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$a_{12} = \sum_{k=1}^{4} g_1(x_k) g_2(x_k) = \sum_{k=1}^{4} x_k = 1 + 2 + 4 + 6 = 13$$

$$a_{13} = \sum_{k=1}^{4} g_1(x_k) g_3(x_k) = \sum_{k=1}^{4} x_k^2 = 1^2 + 2^2 + 4^2 + 6^2 = 57$$

$$a_{21} = \sum_{k=1}^{4} g_2(x_k) g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{4} x_k = a_{12} = 13$$

Matriz dos coeficientes, A(3x3):

$$a_{11} = \sum_{k=1}^{4} g_1(x_k) g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{4} 1 = 1+1+1+1 = 4$$

$$a_{12} = \sum_{k=1}^{4} g_1(x_k) g_2(x_k) = \sum_{k=1}^{4} x_k = 1+2+4+6 = 13$$

$$a_{13} = \sum_{k=1}^{4} g_1(x_k) g_3(x_k) = \sum_{k=1}^{4} x_k^2 = 1^2 + 2^2 + 4^2 + 6^2 = 57$$

$$a_{21} = \sum_{k=1}^{4} g_2(x_k) g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{4} x_k = a_{12} = 13$$

$$a_{22} = \sum_{k=1}^{4} g_2(x_k) g_2(x_k) = \sum_{k=1}^{4} x_k^2 = a_{13} = 57$$

Matriz dos coeficientes, A(3x3):

$$a_{11} = \sum_{k=1}^{4} g_1(x_k) g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{4} 1 = 1+1+1+1 = 4$$

$$a_{12} = \sum_{k=1}^{4} g_1(x_k) g_2(x_k) = \sum_{k=1}^{4} x_k = 1+2+4+6 = 13$$

$$a_{13} = \sum_{k=1}^{4} g_1(x_k) g_3(x_k) = \sum_{k=1}^{4} x_k^2 = 1^2 + 2^2 + 4^2 + 6^2 = 57$$

$$a_{21} = \sum_{k=1}^{4} g_2(x_k) g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{4} x_k = a_{12} = 13$$

$$a_{22} = \sum_{k=1}^{4} g_2(x_k) g_2(x_k) = \sum_{k=1}^{4} x_k^2 = a_{13} = 57$$

$$a_{23} = \sum_{k=1}^{4} g_2(x_k) g_3(x_k) = \sum_{k=1}^{4} x_k^3 = 1^3 + 2^3 + 4^3 + 6^3 = 289$$

$$a_{31}=\sum_{k=1}^{4} g_3(x_k)g_1(x_k)=\sum_{k=1}^{4} x_k^2=a_{13}=57$$

$$a_{31} = \sum_{k=1}^{4} g_3(x_k) g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{4} x_k^2 = a_{13} = 57$$

$$a_{32} = \sum_{k=1}^{4} g_3(x_k) g_2(x_k) = \sum_{k=1}^{4} x_k^3 = a_{23} = 289$$

$$a_{31}=\sum_{k=1}^{4} g_3(x_k)g_1(x_k)=\sum_{k=1}^{4} x_k^2=a_{13}=57$$

$$a_{32}=\sum_{k=1}^{4} g_3(x_k)g_2(x_k)=\sum_{k=1}^{4} x_k^3=a_{23}=289$$

$$a_{33}=\sum_{k=1}^{4} g_3(x_k)g_3(x_k)=\sum_{k=1}^{4} x_k^4=1^4+2^4+4^4+6^4=1569$$

$$a_{31} = \sum_{k=1}^{4} g_3(x_k) g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{4} x_k^2 = a_{13} = 57$$

$$a_{32} = \sum_{k=1}^{4} g_3(x_k) g_2(x_k) = \sum_{k=1}^{4} x_k^3 = a_{23} = 289$$

$$a_{33} = \sum_{k=1}^{4} g_3(x_k) g_3(x_k) = \sum_{k=1}^{4} x_k^4 = 1^4 + 2^4 + 4^4 + 6^4 = 1569$$

Vetor dos termos independentes:

$$a_{31} = \sum_{k=1}^{4} g_3(x_k) g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{4} x_k^2 = a_{13} = 57$$

$$a_{32} = \sum_{k=1}^{4} g_3(x_k) g_2(x_k) = \sum_{k=1}^{4} x_k^3 = a_{23} = 289$$

$$a_{33} = \sum_{k=1}^{4} g_3(x_k) g_3(x_k) = \sum_{k=1}^{4} x_k^4 = 1^4 + 2^4 + 4^4 + 6^4 = 1569$$

Vetor dos termos independentes:

$$b_1 = \sum_{k=1}^{4} f(x_k) g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{4} f(x_k) = 10 + 5 + 2 + 1 = 18$$

$$a_{31} = \sum_{k=1}^{4} g_3(x_k) g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{4} x_k^2 = a_{13} = 57$$

$$a_{32} = \sum_{k=1}^{4} g_3(x_k) g_2(x_k) = \sum_{k=1}^{4} x_k^3 = a_{23} = 289$$

$$a_{33} = \sum_{k=1}^{4} g_3(x_k) g_3(x_k) = \sum_{k=1}^{4} x_k^4 = 1^4 + 2^4 + 4^4 + 6^4 = 1569$$

Vetor dos termos independentes:

$$b_1 = \sum_{k=1}^{4} f(x_k) g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{4} f(x_k) = 10 + 5 + 2 + 1 = 18$$

$$b_2 = \sum_{k=1}^{4} f(x_k) g_2(x_k) = \sum_{k=1}^{4} f(x_k) x_k = 10(1) + 5(2) + 2(4) + 1(6) = 34$$

$$a_{31} = \sum_{k=1}^{4} g_3(x_k)g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{4} x_k^2 = a_{13} = 57$$

$$a_{32} = \sum_{k=1}^{4} g_3(x_k)g_2(x_k) = \sum_{k=1}^{4} x_k^3 = a_{23} = 289$$

$$a_{33} = \sum_{k=1}^{4} g_3(x_k)g_3(x_k) = \sum_{k=1}^{4} x_k^4 = 1^4 + 2^4 + 4^4 + 6^4 = 1569$$

Vetor dos termos independentes:

$$b_1 = \sum_{k=1}^{4} f(x_k)g_1(x_k) = \sum_{k=1}^{4} f(x_k) = 10 + 5 + 2 + 1 = 18$$

$$b_2 = \sum_{k=1}^{4} f(x_k)g_2(x_k) = \sum_{k=1}^{4} f(x_k)x_k = 10(1) + 5(2) + 2(4) + 1(6) = 34$$

$$b_3 = \sum_{k=1}^{4} f(x_k)g_3(x_k) = \sum_{k=1}^{4} f(x_k)x_k^2 = 10(1)^2 + 5(2)^2 + 2(4)^2 + 1(6)^2 = 98$$

Sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} 4 & 13 & 57 \\ 13 & 57 & 289 \\ 57 & 289 & 1569 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 18 \\ 34 \\ 98 \end{Bmatrix}$$

Sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} 4 & 13 & 57 \\ 13 & 57 & 289 \\ 57 & 289 & 1569 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 18 \\ 34 \\ 98 \end{Bmatrix}$$

Solução de sistema:

$$\alpha = \begin{bmatrix} 14{,}311527 & -5{,}266309 & 0{,}512559 \end{bmatrix}^T$$

Sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} 4 & 13 & 57 \\ 13 & 57 & 289 \\ 57 & 289 & 1569 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 18 \\ 34 \\ 98 \end{Bmatrix}$$

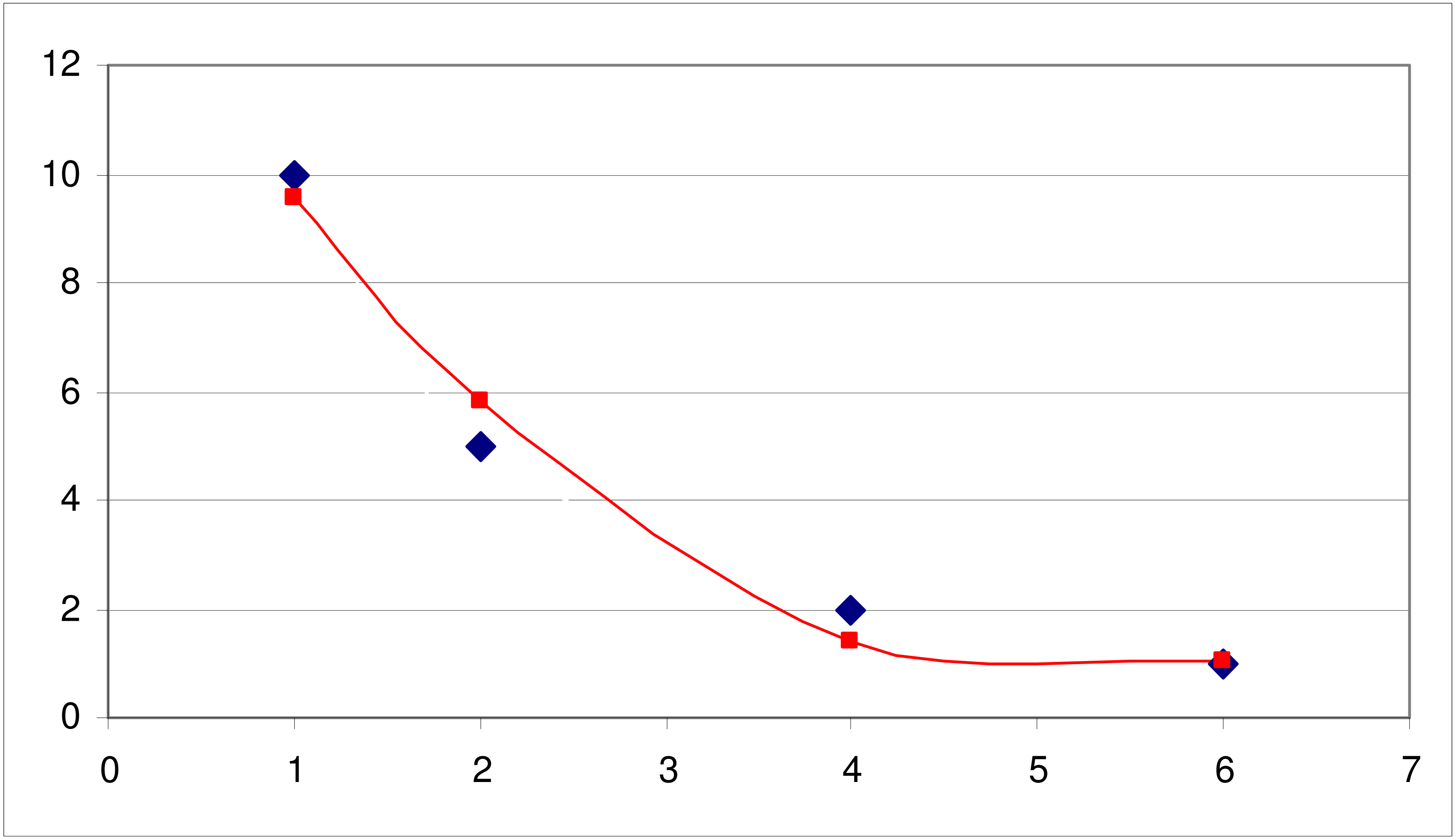
Solução de sistema:

$$\alpha = \begin{bmatrix} 14{,}311527 & -5{,}266309 & 0{,}512559 \end{bmatrix}^T$$

Polinômio:

$$\varphi(x) = 14{,}311527 - 5{,}266309\, x + 0{,}512559\, x^2$$

Ajuste de Curvas – Polinômio de Segunda Ordem



$$\varphi(x) = 14{,}311527 - 5{,}266309x + 0{,}512559x^2$$

3) Considerando os dados da tabela abaixo, determine polinômios de primeira, segunda e terceira ordem para representar os pontos, usando ajuste de curvas.

x_k	-1,6	-1,2	-0,8	-0,4	0,0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,8
$f(x_k)$	-6,0	-1,0	0,8	2,2	2,0	1,0	0,2	-0,7	0,3	0,5	3,0	4,0

(Exercício complementar)

3) Considerando os dados da tabela abaixo, determine polinômios de primeira, segunda e terceira ordem para representar os pontos, usando ajuste de curvas.

x_k	-1,6	-1,2	-0,8	-0,4	0,0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,8
$f(x_k)$	-6,0	-1,0	0,8	2,2	2,0	1,0	0,2	-0,7	0,3	0,5	3,0	4,0

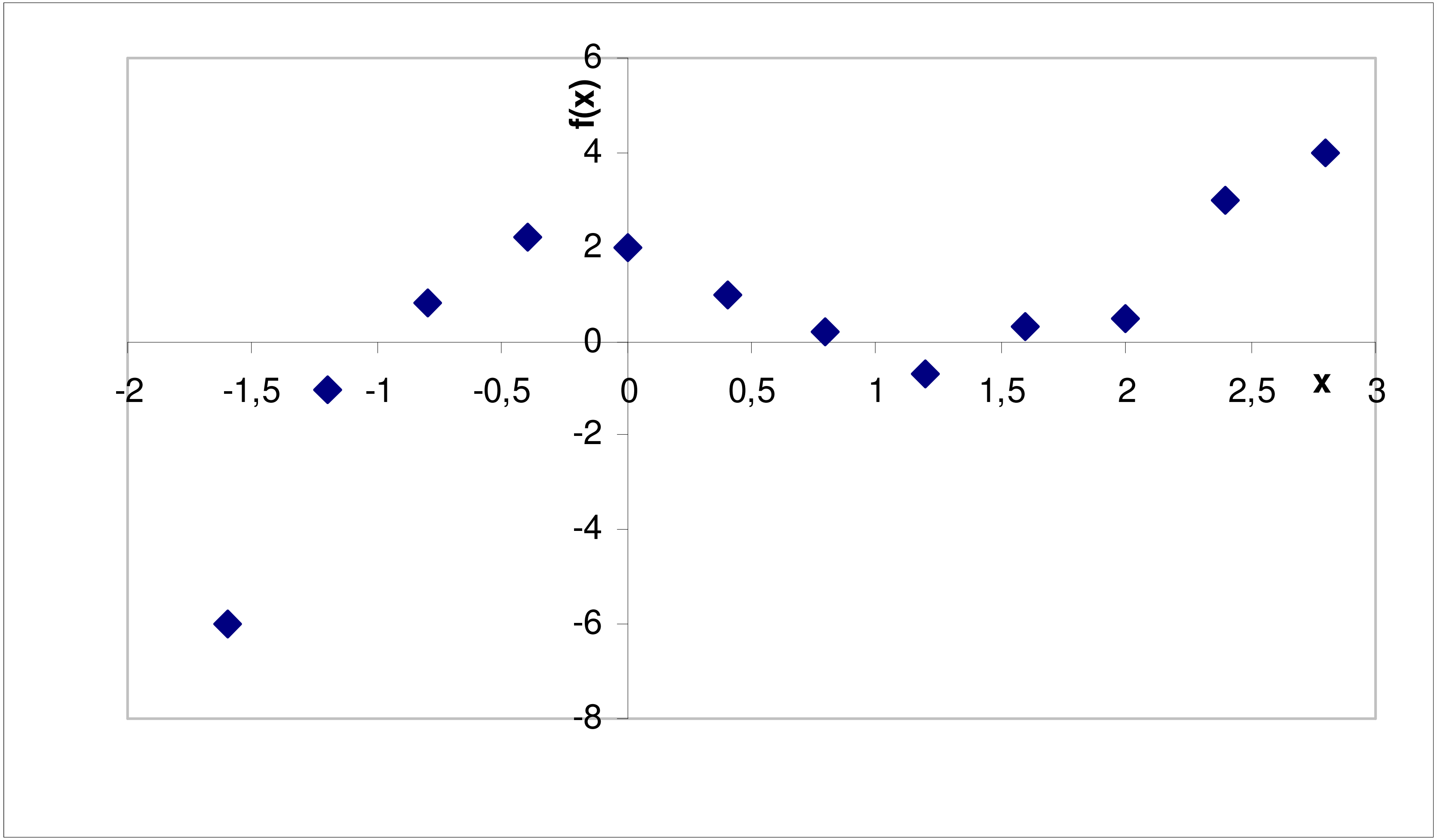
Soluções:

$$\varphi_1(x) = -0{,}133 + 1{,}097x$$

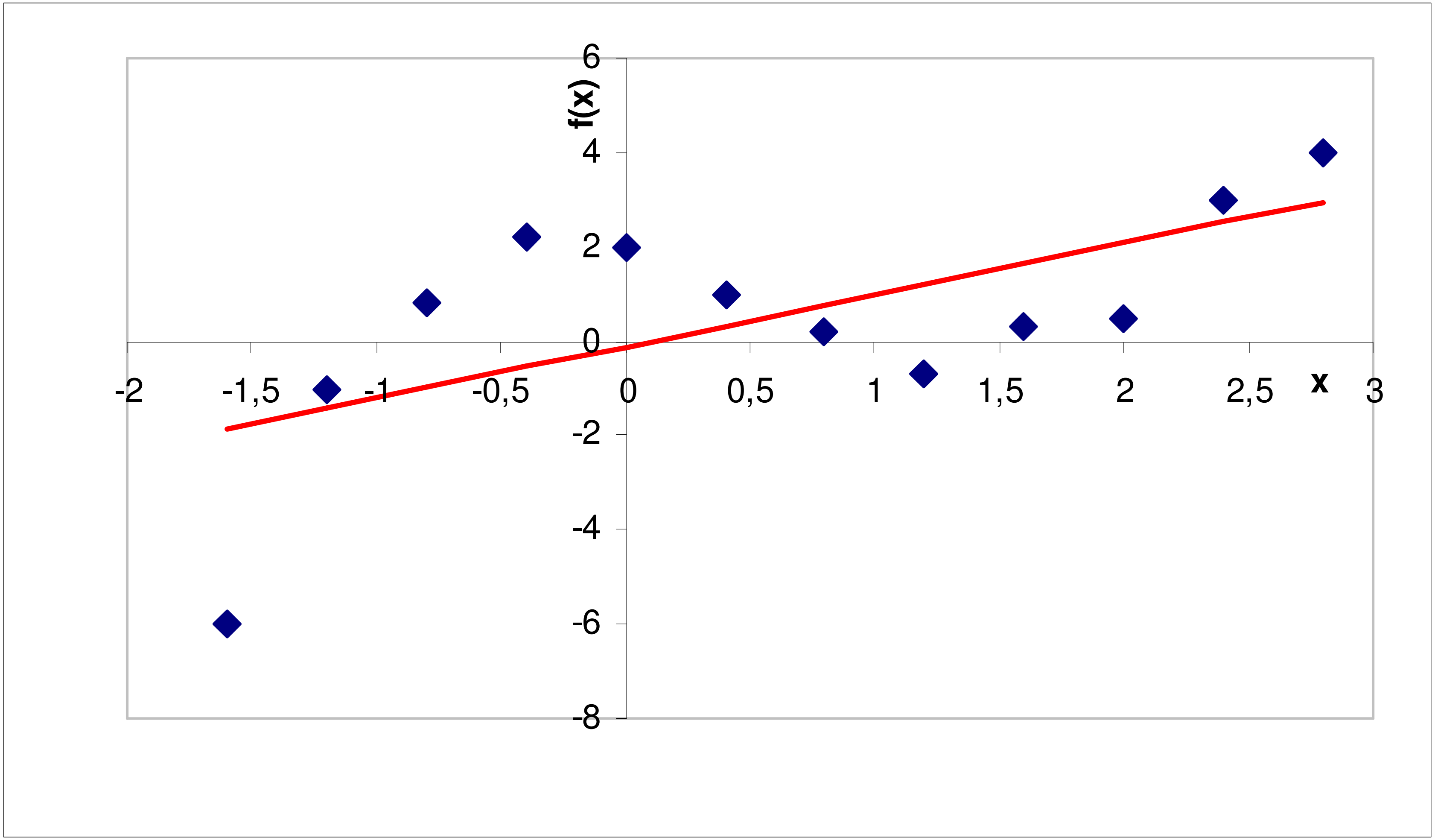
$$\varphi_2(x) = 0{,}304 + 1{,}436x - 0{,}282x^2$$

$$\varphi_3(x) = 1{,}886 - 0{,}577x - 1{,}884x^2 + 0{,}867x^3$$

Representação dos pontos

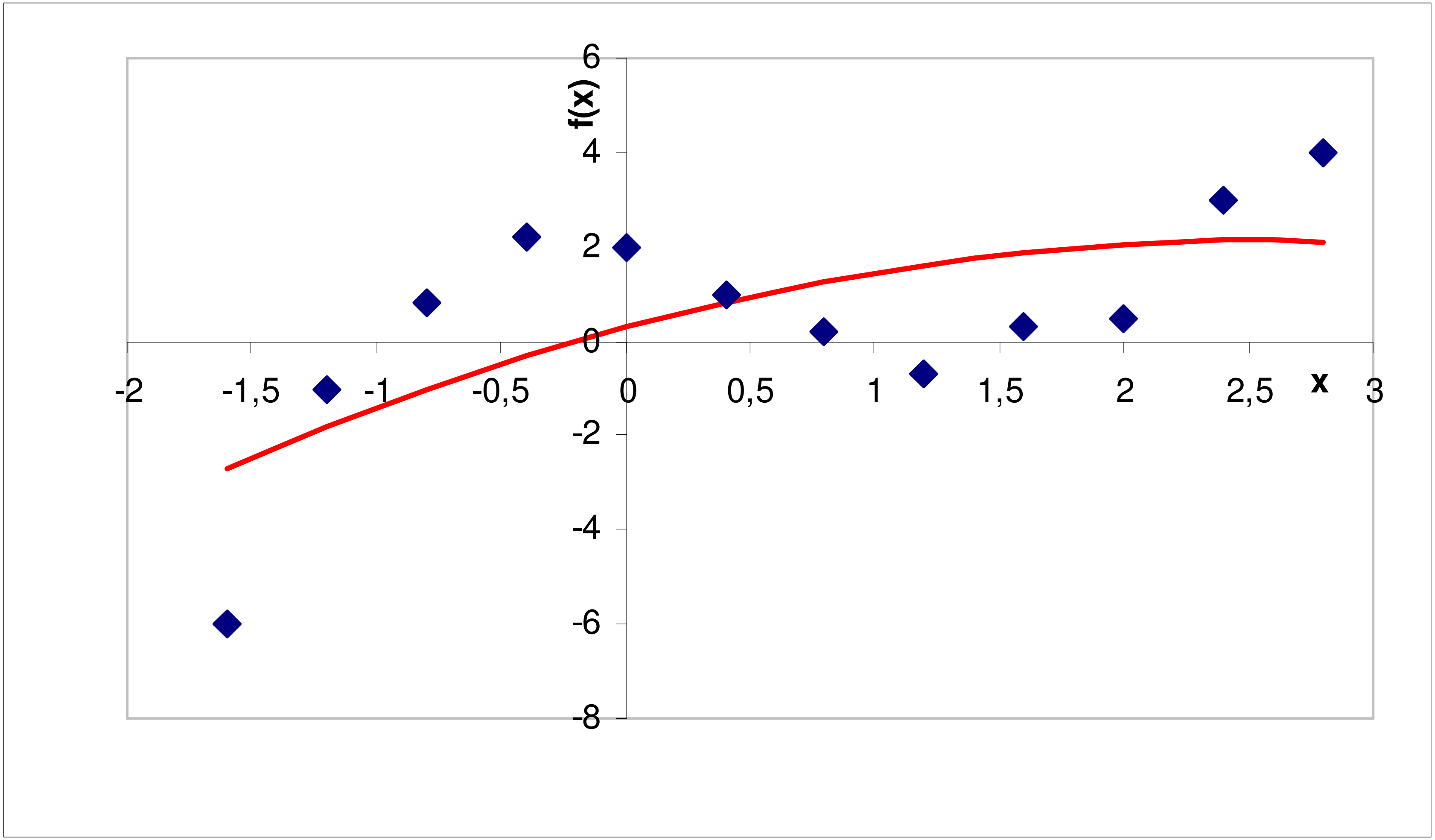


Ajuste de Curvas – Polinômio de Primeira Ordem



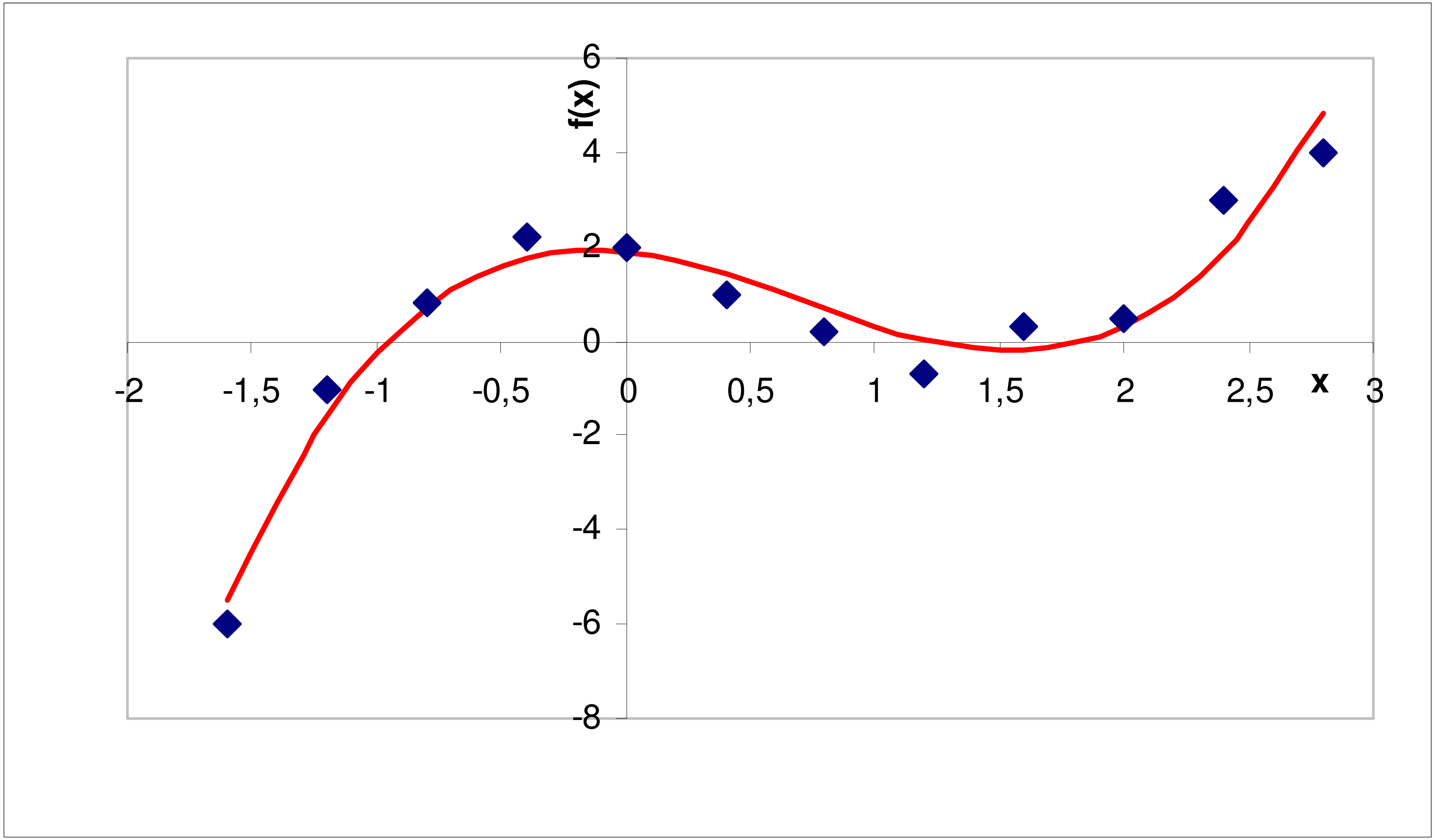
$$\varphi_1(x) = -0,133 + 1,097x$$

Ajuste de Curvas – Polinômio de Segunda Ordem



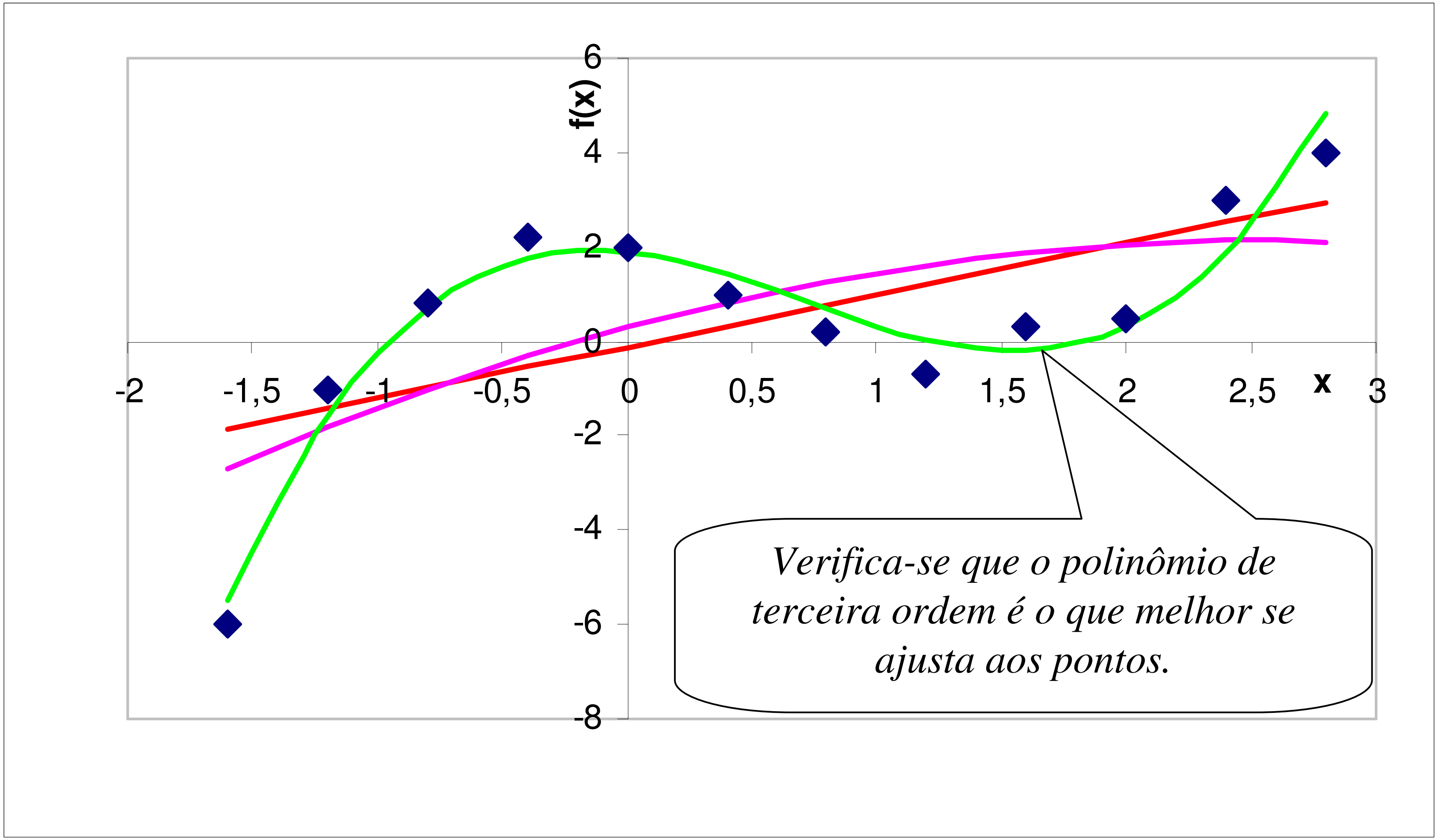
$$\varphi_2(x) = 0{,}304 + 1{,}436x - 0{,}282x^2$$

Ajuste de Curvas – Polinômio de Terceira Ordem



$$\varphi_3(x) = 1{,}886 - 0{,}577x - 1{,}884x^2 + 0{,}867x^3$$

Ajuste de Curvas – Primeira, Segunda e Terceira Ordens



Obrigado.