Interpolação

4.1 Introdução:

Muitas vezes, uma função é conhecida apenas por um conjunto de pontos discretos, conforme tabela:

i	x_i	$f(x_i)$
0	x_0	$f(x_0)$
1	x_1	$f(x_1)$
2	x_2	$f(x_2)$
...	...	...
n	x_n	$f(x_n)$

Interpolar uma função consiste em substituir a função discreta $f(x)$ por uma função analítica $g(x)$, com o objetivo de facilitar as operações matemáticas, tais como: determinar outros pontos, calcular a derivada, a integral e outras operações.

4.2 Problema geral de interpolação:

Considerando $(n+1)$ pontos de interpolação distintos: $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, ... , $(x_n, f(x_n))$, interpolar consiste em determinar uma função analítica $g(x)$, tal que:

$$g(x_0) = f(x_0)$$
$$g(x_1) = f(x_1)$$
$$\ldots$$
$$g(x_n) = f(x_n)$$

Note que, obrigatoriamente, a função $g(x_i)$ deve passar por todos os pontos de interpolação, $f(x_i)$.

4.3 Interpolação polinomial:

Dados os pontos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, ... , $(x_n, f(x_n))$, aproxima-se $f(x)$ por um polinômio de grau $\leq n$, $P_n(x)$, tal que

$p_n(x_i) = f(x_i)$ onde $i = 0, 1, 2, ..., n$.

4.3 Interpolação polinomial:

Dados os pontos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, ... , $(x_n, f(x_n))$, aproxima-se $f(x)$ por um polinômio de grau $\leq n$, $P_n(x)$, tal que

$p_n(x_i) = f(x_i)$ onde $i = 0, 1, 2, ..., n$.

Sendo $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$.

Obter $P_n(x)$ significa determinar os coeficientes a_0, a_1, a_2, ... , a_n.

4.3 Interpolação polinomial:

Dados os pontos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, ... , $(x_n, f(x_n))$, aproxima-se $f(x)$ por um polinômio de grau $\leq n$, $P_n(x)$, tal que

$p_n(x_i) = f(x_i)$ onde $i = 0, 1, 2, ..., n$.

Sendo $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$.

Obter $P_n(x)$ significa determinar os coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Da condição $p_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, obtém-se um sistema de equações lineares do tipo:

4.3 Interpolação polinomial:

Dados os pontos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, ... , $(x_n, f(x_n))$, aproxima-se $f(x)$ por um polinômio de grau $\leq n$, $P_n(x)$, tal que

$p_n(x_i) = f(x_i)$ onde $i = 0, 1, 2, ..., n$.

Sendo $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$.

Obter $P_n(x)$ significa determinar os coeficientes a_0, a_1, a_2, ... , a_n.

Da condição $p_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, ..., n$, obtém-se um sistema de equações lineares do tipo:

$$\overbrace{a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3 + ... + a_n x_0^n} = \overbrace{f(x_0)}$$

Para $i = 0$ substitui-se, na condição $p_n(x_i) = f(x_i)$, o ponto $(x_0, f(x_0))$.

4.3 Interpolação polinomial:

Dados os pontos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, ... , $(x_n, f(x_n))$, aproxima-se $f(x)$ por um polinômio de grau $\leq n$, $P_n(x)$, tal que

$p_n(x_i) = f(x_i)$ onde $i = 0, 1, 2, ..., n$.

Sendo $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$.

Obter $P_n(x)$ significa determinar os coeficientes a_0, a_1, a_2, ... , a_n.

Da condição $p_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, ..., n$, obtém-se um sistema de equações lineares do tipo:

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3 + ... + a_n x_0^n = f(x_0)$$

$$a_1 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 + ... + a_n x_1^n = f(x_1)$$

Para $i = 1$ substitui-se, na condição $p_n(x_i) = f(x_i)$, o ponto $(x_1, f(x_1))$, e, assim, segue até a substituição do ponto $(x_n, f(x_n))$.

4.3 Interpolação polinomial:

Dados os pontos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, ... , $(x_n, f(x_n))$, aproxima-se $f(x)$ por um polinômio de grau $\le n$, $P_n(x)$, tal que

$p_n(x_i) = f(x_i)$ onde $i = 0, 1, 2, ..., n$.

Sendo $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$.

Obter $P_n(x)$ significa determinar os coeficientes $a_0, a_1, a_2, ... , a_n$.

Da condição $p_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, ..., n$, obtém-se um sistema de equações lineares do tipo:

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3 + ... + a_n x_0^n = f(x_0)$$

$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 + ... + a_n x_1^n = f(x_1)$$

...

$$a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + a_3 x_n^3 + ... + a_n x_n^n = f(x_n)$$

Na forma matricial $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, fica:

$$\left\{\begin{matrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{matrix}\right\} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

É a matriz dos coeficientes do sistema, formada pela substituição das coordenadas x_i dos pontos de interpolação.

É o vetor dos termos independentes, formado pela substituição das coordenadas $f(x_i)$ dos pontos de interpolação.

É o vetor das incógnitas, os coeficientes do polinômio $P_n(x)$.

Na forma matricial $\boldsymbol{Ax = b}$, fica:

$$\left\{\begin{matrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{matrix}\right\} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema de equações, obtém-se os coeficientes do polinômio $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$.

Na forma matricial $\boldsymbol{Ax = b}$, fica:

$$\begin{Bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

A matriz $\boldsymbol{A}$ é chamada de matriz de Vandermonde.

Na forma matricial $\boldsymbol{Ax = b}$, fica:

$$\left\{\begin{matrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{matrix}\right\} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

A matriz $\boldsymbol{A}$ é chamada de matriz de Vandermonde.

Se $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ são distintos, o det $\boldsymbol{A} \neq 0$, logo, o sistema linear tem solução única.

Na forma matricial $\boldsymbol{Ax = b}$, fica:

$$\begin{Bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

A matriz $\boldsymbol{A}$ é chamada de matriz de Vandermonde.

Se $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ são distintos, o det $\boldsymbol{A} \neq 0$, logo, o sistema linear tem solução única.

Segundo Vandermonde, o det $\boldsymbol{A}$ pode ser calculado por:

$$\det A = \prod_{i>j} (x_i - x_j), \; i, \; j = 0, 1, 2, \dots, n$$

Exemplo:

Dados os valores: $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, determinar a matriz de Vandermonde e calcular o determinante:

Exemplo:

Dados os valores: $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, determinar a matriz de Vandermonde e calcular o determinante:

Matriz de Vandermonde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \end{bmatrix}$$

Como se tem 4 pontos, a matriz de Vandermonde, matriz dos coeficientes do sistema, é de ordem 4 x 4.

Exemplo:

Dados os valores: x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, determinar a matriz de Vandermonde e calcular o determinante:

Matriz de Vandermonde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \end{bmatrix}$$

Substituindo-se os valores dos respectivos x_i, (x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1 e x_3 = 2) *obtém-se os coeficientes da matriz* ***A***.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Exemplo:

Dados os valores: $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, determinar a matriz de Vandermonde e calcular o determinante:

$$\det A = \prod_{i>j} (x_i - x_j),\ \ i,\ j = 0, 1, 2, 3$$

Símbolo do produtório.
Note que: os termos do produtório são tais que, o valor do índice i é maior do que j.

Exemplo:

Dados os valores: x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, determinar a matriz de Vandermonde e calcular o determinante:

$$\det A = \prod_{i>j} (x_i - x_j), \; i, \; j = 0, 1, 2, 3$$

$$\det A = \underbrace{(x_1 - x_0)}$$

Para o índice i = 1, o índice j = 0, visto que i > j.

Exemplo:

Dados os valores: x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, determinar a matriz de Vandermonde e calcular o determinante:

$$\det A = \prod_{i>j} (x_i - x_j), \;\; i, \;\; j = 0, 1, 2, 3$$

$$\det A = (x_1 - x_0)\underbrace{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Para o índice i = 2, o índice j = 0 e j = 1, visto que i > j.

Exemplo:

Dados os valores: $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, determinar a matriz de Vandermonde e calcular o determinante:

$$\det A = \prod_{i>j} (x_i - x_j), \;\; i, \; j = 0, 1, 2, 3$$

$$\det A = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)\underbrace{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

Para o índice i = 3, o índice j = 0, j = 1 e j = 2.
Assim, o produtório ficou definido.

Exemplo:

Dados os valores: $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, determinar a matriz de Vandermonde e calcular o determinante:

$$\det A = \prod_{i>j} (x_i - x_j), \; i, \; j = 0, 1, 2, 3$$

$$\det A = \underbrace{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

Substituindo os respectivos x_i ($x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 2$) *obtém-se o valor do determinante da matriz* ***A***.

Exemplo:

Dados os valores: $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, determinar a matriz de Vandermonde e calcular o determinante:

$$\det A = \prod_{i>j} (x_i - x_j), \ \ i, \ j = 0, 1, 2, 3$$

$$\det A = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

$$\det A = (0+1)(1+1)(1-0)(2+1)(2-0)(2-1)$$

Exemplo:

Dados os valores: $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, determinar a matriz de Vandermonde e calcular o determinante:

$$\det A = \prod_{i>j} (x_i - x_j),\ \ i,\ j = 0, 1, 2, 3$$

$$\det A = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

$$\det A = (0+1)(1+1)(1-0)(2+1)(2-0)(2-1)$$

$$\det A = (1)(2)(1)(3)(2)(1)$$

$$\det A = 12$$

Interpolação Linear

4.4 Interpolação linear:

A interpolação linear consiste em determinar o polinômio $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$, resolvendo o sistema originado pela condição $p_n(x_i) = f(x_i), i = 0,\ 1,\ 2,\ ...\ , n.$

4.4 Interpolação linear:

A interpolação linear consiste em determinar o polinômio $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$, resolvendo o sistema originado pela condição $p_n(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, 2, ... , n.$

$$\overbrace{a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + ... + a_n x_i^n}^{p_n(x_i)} = f(x_i), i = 0, 1, 2, ..., n$$

4.4 Interpolação linear:

A interpolação linear consiste em determinar o polinômio $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$, resolvendo o sistema originado pela condição $p_n(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

$$a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \ldots + a_n x_i^n = f(x_i), i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = f(x_0) & \leftarrow \text{para } i = 0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = f(x_1) & \leftarrow \text{para } i = 1 \\ \ldots & \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = f(x_n) & \leftarrow \text{para } i = n \end{cases}$$

Exercícios:

1) Encontrar o polinômio de grau $n = 2$ que interpola os pontos:

x_i	-1	0	2
$f(x_i)$	4	1	-1

Exercícios:

1) Encontrar o polinômio de grau $n = 2$ que interpola os pontos:

x_i	-1	0	2
$f(x_i)$	4	1	-1

$$\text{número de pontos } (n+1) = 3$$

$$P_n(x) = P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Exercícios:

1) Encontrar o polinômio de grau $n = 2$ que interpola os pontos:

x_i	-1	0	2
$f(x_i)$	4	1	-1

$$\text{número de pontos } (n+1) = 3$$

$$P_n(x) = P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$p_2(x_i) = f(x_i), i = 0,\ 1,\ 2$$

Exercícios:

1) Encontrar o polinômio de grau $n = 2$ que interpola os pontos:

x_i	-1	0	2
$f(x_i)$	4	1	-1

$$\text{número de pontos } (n+1) = 3$$

$$P_n(x) = P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$p_2(x_i) = f(x_i),\ i = 0,\ 1,\ 2$$

$$S = \begin{cases} p_2(x_0) = f(x_0) & \rightarrow & a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 = f(x_0) \\ p_2(x_1) = f(x_1) & \rightarrow & a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 = f(x_1) \\ p_2(x_2) = f(x_2) & \rightarrow & \underbrace{a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 = f(x_2)}_{Ax = b} \end{cases}$$

$$Ax = b$$

$$\begin{Bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \end{bmatrix}$$

$$Ax = b$$

$$\begin{Bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \end{bmatrix}$$

x_i	-1	0	2
$f(x_i)$	4	1	-1

Substituindo os pontos, obtém-se:

$$Ax = b$$

$$\begin{Bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \end{bmatrix}$$

x_i	-1	0	2
$f(x_i)$	4	1	-1

Substituindo os pontos, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b$$

$$\begin{Bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \end{bmatrix}$$

x_i	-1	0	2
$f(x_i)$	4	1	-1

Substituindo os pontos, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Para resolver o sistema de equações, aplica-se o método de Gauss.

Linha	Multiplicadores	Matriz completa	Transformações
1		$1 \quad -1 \quad 1 \quad 4$	
2		$1 \quad 0 \quad 0 \quad 1$	
3		$1 \quad 2 \quad 4 \quad -1$	
4			
5			
6			
7			
8			
9			

Linha	Multiplicadores	Matriz completa	Transformações
1 2 3	 $m_{21} = -a_{21}/a_{11} = -1$ $m_{31} = -a_{31}/a_{11} = -1$	1 -1 1 4 1 0 0 1 1 2 4 -1	
4 5 6			
7 8 9			

Linha	Multiplicadores	Matriz completa	Transformações
1 2 3	 $m_{21}= -a_{21}/a_{11} = -1$ $m_{31}= -a_{31}/a_{11} = -1$	1 −1 1 4 1 0 0 1 1 2 4 −1	
4 5 6		1 −1 1 4 0 1 −1 −3 0 3 3 −5	L_1 $m_{21}L_1 + L_2$ $m_{31}L_1 + L_3$
7 8 9			

Linha	Multiplicadores	Matriz completa				Transformações
1		1	−1	1	4	
2	$m_{21} = -a_{21}/a_{11} = -1$	1	0	0	1	
3	$m_{31} = -a_{31}/a_{11} = -1$	1	2	4	−1	
4		1	−1	1	4	L_1
5		0	1	−1	−3	$m_{21}L_1 + L_2$
6	$m_{32} = -a_{32}/a_{22} = -3$	0	3	3	−5	$m_{31}L_1 + L_3$
7		1	−1	1	4	L_4
8		0	1	−1	−3	L_5
9		0	0	6	4	$m_{32}L_5 + L_6$

Linha	Multiplicadores	Matriz completa	Transformações
1		1 −1 1 4	
2	$m_{21} = -a_{21}/a_{11} = -1$	1 0 0 1	
3	$m_{31} = -a_{31}/a_{11} = -1$	1 2 4 −1	
4		1 −1 1 4	L_1
5		0 1 −1 −3	$m_{21}L_1 + L_2$
6	$m_{32} = -a_{32}/a_{22} = -3$	0 3 3 −5	$m_{31}L_1 + L_3$
7		1 −1 1 4	L_4
8		0 1 −1 −3	L_5
9		0 0 6 4	$m_{32}L_5 + L_6$

$$\begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 = 4 \\ a_1 - a_2 = -3 \\ 6a_2 = 4 \end{cases}$$

Linha	Multiplicadores	Matriz completa				Transformações
1		1	−1	1	4	
2	$m_{21} = -a_{21}/a_{11} = -1$	1	0	0	1	
3	$m_{31} = -a_{31}/a_{11} = -1$	1	2	4	−1	
4		1	−1	1	4	L_1
5		0	1	−1	−3	$m_{21}L_1 + L_2$
6	$m_{32} = -a_{32}/a_{22} = -3$	0	3	3	−5	$m_{31}L_1 + L_3$
7		1	−1	1	4	L_4
8		0	1	−1	−3	L_5
9		0	0	6	4	$m_{32}L_5 + L_6$

$$\begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 = 4 \\ a_1 - a_2 = -3 \\ 6a_2 = 4 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema triangular :

$$a_2 = 2/3$$

$$a_1 = -3 + a_2 = -3 + 2/3 = -7/3$$

$$a_0 = 4 + a_1 - a_2 = 4 - 7/3 - 2/3 = 1$$

Linha	Multiplicadores	Matriz completa				Transformações
1		1	−1	1	4	
2	$m_{21} = -a_{21}/a_{11} = -1$	1	0	0	1	
3	$m_{31} = -a_{31}/a_{11} = -1$	1	2	4	−1	
4		1	−1	1	4	L_1
5		0	1	−1	−3	$m_{21}L_1 + L_2$
6	$m_{32} = -a_{32}/a_{22} = -3$	0	3	3	−5	$m_{31}L_1 + L_3$
7		1	−1	1	4	L_4
8		0	1	−1	−3	L_5
9		0	0	6	4	$m_{32}L_5 + L_6$

$$\begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 = 4 \\ a_1 - a_2 = -3 \\ 6a_2 = 4 \end{cases}$$

Resolvendo:

$$a_2 = 2/3$$

$$a_1 = -3 + a_2 = -3 + 2/3 = -7/3$$

$$a_0 = 4 + a_1 - a_2 = 4 - 7/3 - 2/3 = 1$$

$$\rightarrow \left\{ \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & -7/3 & 2/3 \end{bmatrix}^T \right.$$

Linha	Multiplicadores	Matriz completa				Transformações
1		1	−1	1	4	
2	$m_{21} = -a_{21}/a_{11} = -1$	1	0	0	1	
3	$m_{31} = -a_{31}/a_{11} = -1$	1	2	4	−1	
4		1	−1	1	4	L_1
5		0	1	−1	−3	$m_{21}L_1 + L_2$
6	$m_{32} = -a_{32}/a_{22} = -3$	0	3	3	−5	$m_{31}L_1 + L_3$
7		1	−1	1	4	L_4
8		0	1	−1	−3	L_5
9		0	0	6	4	$m_{32}L_5 + L_6$

$$\begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 = 4 \\ a_1 - a_2 = -3 \\ 6a_2 = 4 \end{cases}$$

Resolvendo:

$$a_2 = 2/3$$

$$a_1 = -3 + a_2 = -3 + 2/3 = -7/3$$

$$a_0 = 4 + a_1 - a_2 = 4 - 7/3 - 2/3 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & -7/3 & 2/3 \end{bmatrix}^T \\ P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \end{cases}$$

Linha	Multiplicadores	Matriz completa				Transformações
1		1	−1	1	4	
2	$m_{21} = -a_{21}/a_{11} = -1$	1	0	0	1	
3	$m_{31} = -a_{31}/a_{11} = -1$	1	2	4	−1	
4		1	−1	1	4	L_1
5		0	1	−1	−3	$m_{21}L_1 + L_2$
6	$m_{32} = -a_{32}/a_{22} = -3$	0	3	3	−5	$m_{31}L_1 + L_3$
7		1	−1	1	4	L_4
8		0	1	−1	−3	L_5
9		0	0	6	4	$m_{32}L_5 + L_6$

$$\begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 = 4 \\ a_1 - a_2 = -3 \\ 6a_2 = 4 \end{cases}$$

Resolvendo:

$$a_2 = 2/3$$

$$a_1 = -3 + a_2 = -3 + 2/3 = -7/3$$

$$a_0 = 4 + a_1 - a_2 = 4 - 7/3 - 2/3 = 1$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & -7/3 & 2/3 \end{bmatrix}^T \\ P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \\ P_2(x) = 1 - \dfrac{7}{3}x + \dfrac{2}{3}x^2 \end{cases}$$

Observações:

Considerando os pontos que foram interpolados:

x_i	-1	0	2
$f(x_i)$	4	1	-1

e o polinômio encontrado:

$$P_2(x) = 1 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x^2$$

pode-se verificar se os cálculos foram executados corretamente, basta substituir os valores de x_i em polinômio e encontrar-se-á o valor igual ao da função, ou seja, $P(x_i) = f(x_i)$.

Observações:

Considerando os pontos que foram interpolados:

x_i	-1	0	2
$f(x_i)$	4	1	-1

e o polinômio encontrado:

$$P_2(x) = 1 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x^2$$

pode-se verificar se os cálculos foram executados corretamente, basta substituir os valores de x_i em polinômio e encontrar-se-á o valor igual ao da função, ou seja, $P(x_i) = f(x_i)$.

Exemplo: (substituindo o $x_0 = -1$ no polinômio)

$P_2(-1) = 1 - (7/3)(-1) + (2/3)(-1)^2 = 4$

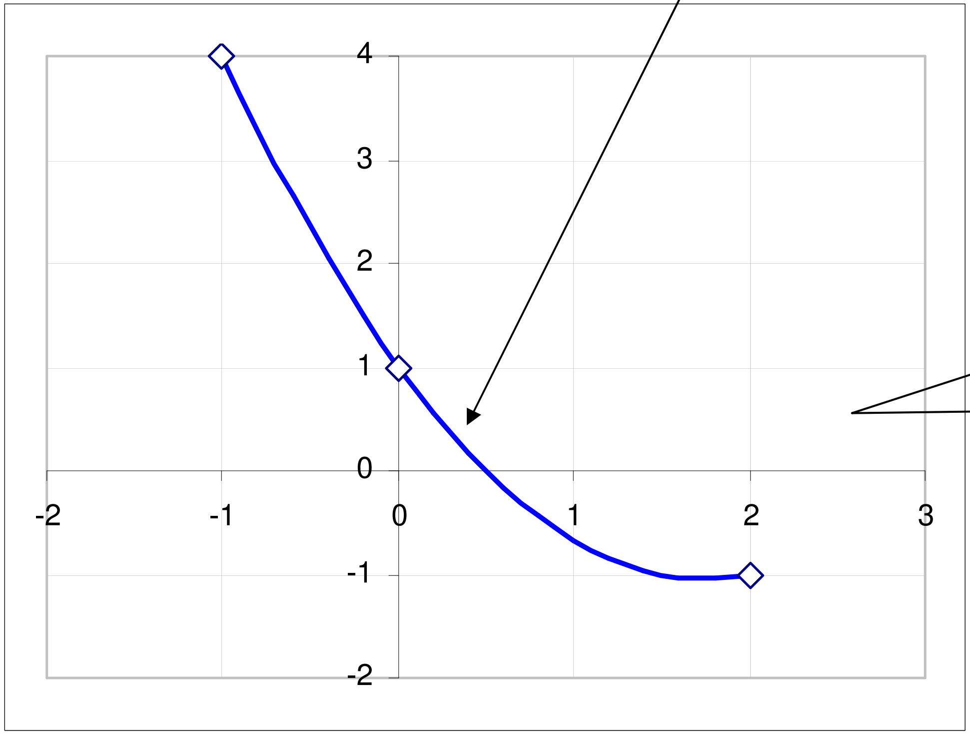
$P_2(-1) = f(-1)$

Observações:

Considerando os pontos que foram interpolados:

x_i	-1	0	2
$f(x_i)$	4	1	-1

e o polinômio encontrado: $P_2(x) = 1 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x^2$



Verifica-se graficamente que, realmente, o polinômio encontrado passa por todos os pontos interpolados.

2) Determinar o polinômio $P_3(x)$ que interpola $f(x)$ nos pontos abaixo e calcular $P(1)$:

x	-1	0	2	3
$f(x)$	0	-5	-3	2

2) Determinar o polinômio $P_3(x)$ que interpola $f(x)$ nos pontos abaixo:

x	-1	0	2	3
$f(x)$	0	-5	-3	2

$$\text{número de pontos } (n+1) = 4$$

$$P_n(x) = P_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

2) Determinar o polinômio $P_3(x)$ que interpola $f(x)$ nos pontos abaixo:

x	-1	0	2	3
$f(x)$	0	-5	-3	2

$$\text{número de pontos } (n+1) = 4$$

$$P_n(x) = P_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$p_3(x_i) = f(x_i),\ i = 0,\ 1,\ 2,\ 3$$

2) Determinar o polinômio $P_3(x)$ que interpola $f(x)$ nos pontos abaixo:

x	-1	0	2	3
$f(x)$	0	-5	-3	2

número de pontos $(n+1)=4$

$$P_n(x)=P_3(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$$

$$p_3(x_i)=f(x_i),\ i=0,\ 1,\ 2,3$$

$$a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+a_3x_0^3=f(x_0)$$
$$a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+a_3x_1^3=f(x_1)$$
$$a_0+a_1x_2+a_2x_2^2+a_3x_2^3=f(x_2)$$
$$a_0+a_1x_3+a_2x_3^2+a_3x_3^3=f(x_3)$$

$$Ax = b$$

$$\begin{Bmatrix} 1 & x_0^1 & x_0^2 & x_0^3 \\ 1 & x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3^1 & x_3^2 & x_3^3 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \end{bmatrix}$$

$$Ax = b$$

$$\begin{Bmatrix} 1 & x_0^1 & x_0^2 & x_0^3 \\ 1 & x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3^1 & x_3^2 & x_3^3 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \end{bmatrix}$$

Substituindo os pontos, obtém-se:

x	-1	0	2	3
$f(x)$	0	-5	-3	2

$$Ax = b$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0^1 & x_0^2 & x_0^3 \\ 1 & x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3^1 & x_3^2 & x_3^3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \end{bmatrix}$$

x	-1	0	2	3
$f(x)$	0	-5	-3	2

Substituindo os pontos, obtém-se:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b$$

$$\begin{Bmatrix} 1 & x_0^1 & x_0^2 & x_0^3 \\ 1 & x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3^1 & x_3^2 & x_3^3 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \end{bmatrix}$$

Substituindo os pontos, obtém-se:

x	-1	0	2	3
$f(x)$	0	-5	-3	2

$$\begin{Bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema, obtém-se: $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -5 & -16/6 & 13/6 & -1/6 \end{bmatrix}^T$

$$Ax = b$$

$$\begin{Bmatrix} 1 & x_0^1 & x_0^2 & x_0^3 \\ 1 & x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3^1 & x_3^2 & x_3^3 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \end{bmatrix}$$

x	-1	0	2	3
$f(x)$	0	-5	-3	2

Substituindo os pontos, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema, obtém-se: $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -5 & -{}^{16}\!/_{6} & {}^{13}\!/_{6} & -{}^{1}\!/_{6} \end{bmatrix}^T$

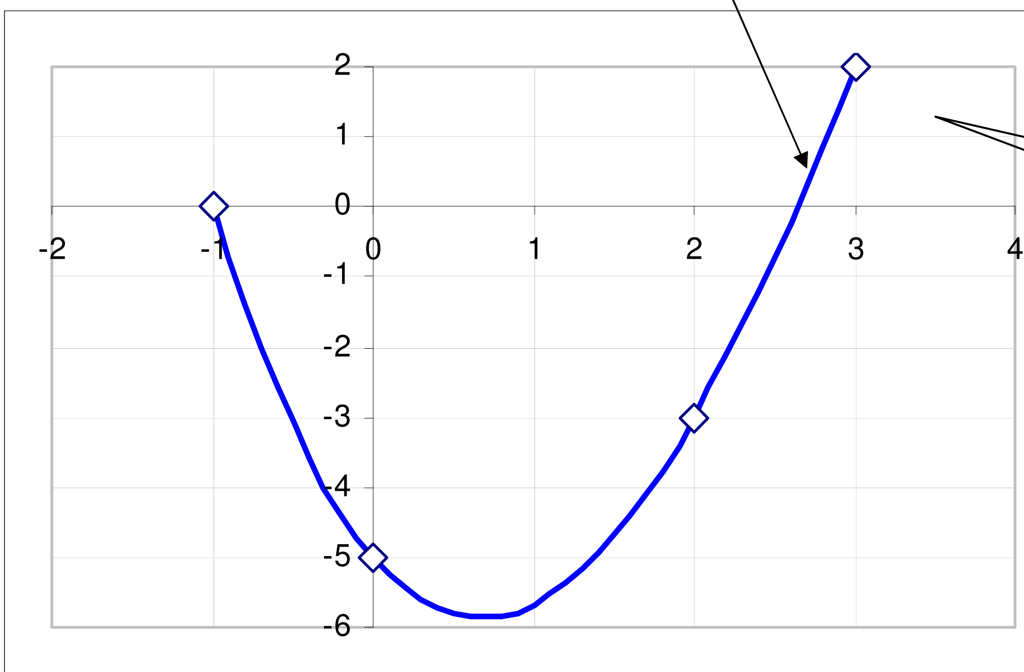
$$P_3(x) = -5 - \frac{16}{6}x + \frac{13}{6}x^2 - \frac{x^3}{6}$$

Observações:

Considerando os pontos que foram interpolados:

x	-1	0	2	3
$f(x)$	0	-5	-3	2

e o polinômio encontrado: $P_3(x) = -5 - \dfrac{16}{6}x + \dfrac{13}{6}x^2 - \dfrac{x^3}{6}$



Verifica-se graficamente que, realmente, o polinômio encontrado passa por todos os pontos interpolados.

3) Determinar o polinômio $P_3(x)$ que interpola $f(x)$ nos pontos abaixo:

x	-1	0	1	3
$f(x)$	1	1	5	49

(Exercício complementar)

Resposta: $P_3(x) = 1 + x + 2x^2 + x^3$

Obrigado.