UNIDADE 3 - Retas no Espaço Tridimensional

Nesta unidade, abordaremos retas no espaço tridimensional. Estudaremos as equações vetoriais, simétricas e reduzidas da reta, identificaremos o ângulo entre duas retas, a condição de paralelismo, ortogonalidade e coplanaridade, as posições relativas e a intersecção entre duas retas.

Equação vetorial da reta

Considere uma reta s que passa pelo ponto $A(a_1, a_2, a_3)$ e possui a direção de um vetor $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \neq 0$. Seja $P\ (x, y, z)$ um ponto qualquer no espaço, para P pertencer a s, os vetores $\vec{u}$ e $\overrightarrow{AP}$ devem ser colineares, ou seja:

$$\overrightarrow{AP} = t\vec{u}$$

onde $t \in R$. Como $\overrightarrow{AP} = P - A$ temos:

$$P - A = t\vec{u}$$

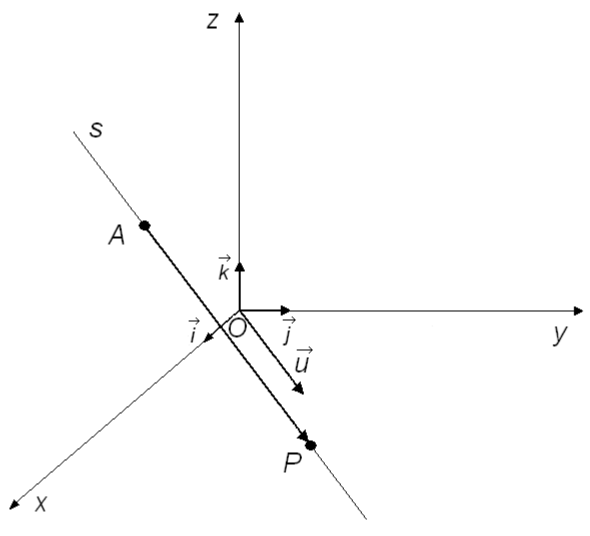
ou ainda:

$$P = A + t\vec{u}$$

$$\boxed{\underbrace{(x, y, z)}_{P} = \underbrace{(a_1, a_2, a_3)}_{A} + t\,\underbrace{(u_1, u_2, u_3)}_{\vec{u}}}$$

EQUAÇÃO VETORIAL DA RETA s

Geometricamente:



A equação $(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + t(u_1, u_2, u_3)$ chama-se **equação vetorial da reta** $\boldsymbol{s}$, que passa no **ponto** $A(a_1, a_2, a_3)$, tem **vetor diretor** $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e **parâmetro** t.

Exemplo: Determinar a equação vetorial da reta s que passa no ponto $A(1,3,4)$ e tem a direção do vetor $\vec{u} = (-1,2,5)$.

Resolução

Forma geral da equação vetorial: $(x, y, z) = A + t\vec{u}$

Ao substituir o ponto $A(1,3,4)$ e o vetor $\vec{u} = (-1,2,5)$, obtemos:

$$(x, y, z) = (1,3,4) + t(-1,2,5)$$

Ao atribuir valores ao parâmetro t, obtemos diferentes pontos pertencentes à reta s. Por exemplo, se $t = 2$ temos:

$$(x, y, z) = (1,3,4) + 2.(-1,2,5)$$

$$(x, y, z) = (1,3,4) + \left(\underbrace{2.(-1)}_{-2}, \underbrace{2.2}_{4}, \underbrace{2.5}_{10}\right) = (1,3,4) + (-2, 4, 10)$$

$$(x, y, z) = \left(\underbrace{1-2}_{-1}, \underbrace{3+4}_{7}, \underbrace{4+10}_{14}\right) = (-1, 7, 14).$$

Logo, (-1,7,14) é um ponto que pertence à reta s.

Por outro lado, se considerarmos $t = -3$ temos:

$$(x, y, z) = (1,3,4) + (-3).(-1,2,5)$$

$$(x, y, z) = (1,3,4) + \left(\underbrace{(-3).(-1)}_{3}, \underbrace{(-3).2}_{-6}, \underbrace{(-3).5}_{-15}\right) = (1,3,4) + (3, -6, -15)$$

$$(x, y, z) = \left(\underbrace{1+3}_{4}, \underbrace{3-6}_{-3}, \underbrace{4-15}_{-11}\right) = (4, -3, -11).$$

Logo, (4,-3,-11) é um ponto que pertence à reta s.

Exemplo: Identifique o parâmetro t associado ao ponto $P(-1,7,14)$ pertencente à reta $s: (x, y, z) = (1,3,4) + t(-1,2,5)$.

Resolução

Como $P \in s$, devemos substituir (x, y, z) por $(-1, 7, 14)$ na equação da reta, ou seja,

$$\underbrace{(-1,7,14)}_{P} = (1,3,4) + t(-1,2,5)$$

$$(-1,7,14) = (1,3,4) + (-t, 2t, 5t)$$

$$(-1,7,14) = (1 - t, 3 + 2t, 4 + 5t)$$

Então, igualando as coordenadas:

1ª coordenada	2ª coordenada	3ª coordenada
$-1 = 1 - t$ $1 - t = -1$ $-t = -1 -$ $-t = -2$ $t = 2$	$7 = 3 + 2t$ $3 + 2t = 7$ $2t = 7 - 3$ $2t = 4$ $t = \frac{4}{2}$ $t = 2$	$14 = 4 + 5t$ $5t = 14 - 4$ $5t = 10$ $t = \frac{10}{5}$ $t = 2$

Observe que, como $P \in s$, então, o valor de t deve ser o mesmo na comparação de cada uma das coordenadas. Nesse caso, $t = 2$.

Equações paramétricas da reta

A equação vetorial da reta $s: (x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + t(u_1, u_2, u_3)$ pode ser reescrita da seguinte forma:

$$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + t(u_1, u_2, u_3)$$

$$(x, y, z) = (a_1 + tu_1, a_2 + tu_2, a_3 + tu_3)$$

ou ainda:

$$\boxed{s: \begin{cases} x = a_1 + t \,.\, u_1 \\ y = a_2 + t \,.\, u_2 \\ z = a_3 + t \,.\, u_3 \end{cases}}$$

EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DA RETA s

As equações $\begin{cases} x = a_1 + t \,.\, u_1 \\ y = a_2 + t \,.\, u_2 \\ z = a_3 + t \,.\, u_3 \end{cases}$ são chamadas de **equações paramétricas da reta s** que passa no ponto $A(a_1, a_2, a_3)$, tem **vetor diretor** $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e **parâmetro** t.

Exemplo: Determinar as equações paramétricas da reta r que passa no ponto $B(1,3,5)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = (2,4,3)$.

Resolução

Forma geral das equações paramétricas: $\begin{cases} x = a_1 + t\,.u_1 \\ y = a_2 + t\,.u_2 \\ z = a_3 + t\,.u_3 \end{cases}$

Substituindo o ponto $B(1,3,5)$ e o vetor $\vec{v} = (2,4,3)$, obtemos:

$$s: \begin{cases} x = 1 + 2.t \\ y = 3 + 4.t. \\ z = 5 + 3.t \end{cases}$$

Exemplo: Determine as equações paramétricas da reta s que passa pelos pontos $M(8,-3,0)$ e $N(2,5,7)$.

Resolução

Para escrever as equações da reta s, precisamos de um ponto que pertence à reta (M ou N) e de um vetor diretor. Como a reta s passa pelos pontos M e N, então, o vetor $\overrightarrow{MN}$ é um vetor diretor de s (qualquer vetor colinear a $\overrightarrow{MN}$ também é vetor diretor de s). Assim,

$$\overrightarrow{MN} = N - M = (2,5,7) - (8,-3,0)$$

$$\overrightarrow{MN} = \left(\underbrace{2-8}_{-6}, \underbrace{5-(-3)}_{8}, \underbrace{7-0}_{7}\right) = (-6,8,7)$$

Vamos escolher um ponto que pertence à reta s, por exemplo, o ponto M (poderíamos ter escolhido o ponto N). Dessa forma, podemos escrever as equações da reta s:

$$s: \begin{cases} x = 8 - 6.t \\ y = -3 + 8.t \\ z = 0 + 7.t \end{cases}$$

Podemos também fazer uma pergunta: será que o ponto N pertence à reta s? Para responder a essa pergunta, vamos substituir as coordenadas de N nas equações da reta s.

$$2 = 8 - 6t$$
$$5 = -3 + 8t$$
$$7 = 0 + 7t$$

Ao isolar t em cada uma das equações acima, temos:

$2 = 8 - 6t$	$5 = -3 + 8t$	$7 = 0 + 7t$
$6t = 8 - 2$	$-8t = -5 - 3$	$-7t = -7$
$6t = 6$	$-8t = -8$	$7t = 7$
$t = \frac{6}{6}$	$8t = 8$	$t = \frac{7}{7}$
$t = 1$	$t = \frac{8}{8}$	$t = 1$
	$t = 1$	

Como o valor obtido para t foi o mesmo nos três casos ($t = 1$), significa que o ponto N pertence à reta s.

Equações simétricas da reta

As equações da reta s: $\begin{cases} x = a_1 + t\,.\,u_1 \\ y = a_2 + t\,.\,u_2 \\ z = a_3 + t\,.\,u_3 \end{cases}$ podem ser reescritas da seguinte forma:

$x - a_1 = tu_1$ ou ainda $t = \frac{x-a_1}{u_1}$

$y - a_2 = tu_2$ ou ainda $t = \frac{y-a_2}{u_2}$

$z - a_3 = tu_3$ ou ainda $t = \frac{z-a_3}{u_3}$

Logo:

$$\boxed{\frac{x - a_1}{u_1} = \frac{y - a_2}{u_2} = \frac{z - a_3}{u_3}}$$

EQUAÇÕES SIMÉTRICAS DA RETA s

Podemos observar que u_1, u_2 e u_3 devem ser não nulos, para evitar a divisão por zero. As equações $\frac{x-a_1}{u_1} = \frac{y-a_2}{u_2} = \frac{z-a_3}{u_3}$ são chamadas **equações simétricas da reta s** que passa no ponto $A(a_1, a_2, a_3)$ e possui **vetor diretor** $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$.

Exemplo: Determinar as equações simétricas da reta que passa no ponto $A(2,1,5)$ e tem a direção do vetor $\vec{n} = (3,4,6)$.

Resolução

Forma geral das equações simétricas: $\frac{x-a_1}{u_1} = \frac{y-a_2}{u_2} = \frac{z-a_3}{u_3}$

Ao substituir o ponto $A\ (2,1,5)$ e o vetor $\vec{n} = (3,4,6)$, obtemos:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{x-5}{6}$$

Equações reduzidas da reta

Dadas as equações da reta s: $\frac{x-a_1}{u_1} = \frac{y-a_2}{u_2} = \frac{z-a_3}{u_3}$, podemos isolar duas variáveis em função de uma terceira. Por exemplo, vamos isolar y e z em função de x.

$$\frac{y-a_2}{u_2} = \frac{x-a_3}{u_3}$$
$$y - a_2 = \frac{u_2}{u_1}(x - a_1)$$
$$y - a_2 = \frac{u_2}{u_1}x - \frac{u_2}{u_1}a_1$$
$$y = \frac{u_2}{u_1}x - \frac{u_2}{u_1}a_1 + a_2$$

Considerando

$$\frac{u_2}{u_1} = m$$

e

$$-\frac{u_2}{u_1}a_1 + a_2 = n$$

temos

$$y = mx + n$$

$$\frac{z-a_3}{u_3} = \frac{x-a_1}{u_1}$$
$$z - a_3 = \frac{u_3}{u_1}(x - a_1)$$
$$z - a_3 = \frac{u_3}{u_1}x - \frac{u_3}{u_1}a_1$$
$$z = \frac{u_3}{u_1}x - \frac{u_2}{u_1}a_1 + a_3$$

Considerando

$$\frac{u_3}{u_1} = p$$

e

$$-\frac{u_3}{u_1}a_1 + a_3 = q$$

temos

$$y = px + q$$

Portanto, temos as seguintes equações reduzidas da reta s em função da variável x (variável livre):

$$\boxed{\begin{cases} y = mx + n \\ z = px + q \end{cases}}$$

EQUAÇÕES REDUZIDAS DA RETA s

Exemplo: Escrever as equações reduzidas da reta r que passa no ponto $A(1,3,4)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = (2,-6,10)$.

Resolução

Vamos, primeiramente, escrever as equações da reta na forma simétrica:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-6} = \frac{z-4}{10}$$

Agora, vamos isolar duas variáveis em função de uma terceira, por exemplo, a variável x:

Isolando y em função de x

$$\frac{y-3}{-6} = \frac{x-1}{2}$$
$$y-3 = \frac{-6}{2}(x-1)$$
$$y-3 = -3(x-1)$$
$$y-3 = -3x+3$$
$$y = -3x+3+3$$
$$y = -3x+6$$

Isolando z em função de x

$$\frac{z-4}{10} = \frac{x-1}{2}$$
$$z-4 = \frac{10}{2}(x-1)$$
$$z-4 = 5(x-1)$$
$$z-4 = 5x-5$$
$$z = 5x-5+4$$
$$z = 5x-1$$

Portanto, temos as equações reduzidas da reta r:

$$\begin{cases} y = -3x+6 \\ z = 5x-1 \end{cases}$$

Observação: Para identificar um ponto e o vetor diretor de uma reta cujas equações estão na forma reduzida, igualamos a variável livre a um parâmetro, ou seja:

CASO 1) Se x é variável livre, ou seja, y e z estão em função de x, então, consideremos $x = t$ que resulta:

$$\begin{cases} y = m.x+n \\ z = p.x+q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \quad t \\ y = m.t+n \\ z = p.t+q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1.t + 0 \\ y = m.t + n \\ z = p.t + q \end{cases}$$

Vetor diretor: obtido a partir dos coeficientes de t: $\vec{u} = (1, m, p)$.

Ponto: obtido a partir dos termos independentes: $A(0, n, q)$.

CASO 2) Se y é variável livre, ou seja, x e z estão em função de y, então, consideremos $y = t$ que resulta:

$$\begin{cases} x = m.y + n \\ z = p.y + q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m.y + n \\ y = \quad t \\ z = p.y + q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m.t \ + n \\ y = 1.t \ + 0 \\ z = p.t \ + \ q \end{cases}$$

Vetor diretor: obtido nos coeficientes de x: $\vec{v} = (m, 1, p)$.

Ponto: obtido nos termos independentes: $B(n, 0, q)$.

CASO 3) Se z é variável livre, ou seja, x e y estão em função de z, então, consideremos $z = t$ que resulta:

$$\begin{cases} x = m.z + n \\ y = p.z + q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m.z + n \\ y = p.z + q \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m.t + n \\ y = p.t + q \\ z = 1.t + 0 \end{cases}$$

Vetor diretor: obtido nos coeficientes de x: $\vec{w} = (m, p, 1)$.

Ponto: obtido nos termos independentes: $C(n, q, 0)$.

Exemplos: Identifique um ponto e o vetor diretor de cada uma das retas a seguir:

a) $r: \begin{cases} y = 2x + 1 \\ z = -3x + 5 \end{cases}$ b) $s: \begin{cases} x = 4y - 7 \\ z = 2y + 3 \end{cases}$ c) $p: \begin{cases} x = -z + 4 \\ y = 3z + 1 \end{cases}$

Resolução

a) $r: \begin{cases} y = 2x + 1 \\ z = -3x + 5 \end{cases}$

Vamos igualar a variável livre x ao parâmetro t.

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2.t + 1 \\ z = -3.t + 5 \end{cases} \quad \text{ou ainda} \quad \begin{cases} x = 1.t + 0 \\ y = 2.t + 1 \\ z = -3.t + 5 \end{cases}$$

Vetor diretor: $\vec{w} = (1,2,-3)$; **ponto:** $A(0,1,5)$

b) $s: \begin{cases} x = 4y - 7 \\ z = 2y + 3 \end{cases}$

Vamos igualar a variável livre y ao parâmetro t.

$$\begin{cases} x = 4.t - 7 \\ y = t \\ z = 2.t + 3 \end{cases} \quad \text{ou ainda} \quad \begin{cases} x = 4.t - 7 \\ y = 1.t + 0 \\ z = 2.t + 3 \end{cases}$$

Vetor diretor: $\vec{w} = (4,1,2)$; **ponto:** $A(-7,0,3)$

c) $p: \begin{cases} x = -z + 4 \\ y = 3z + 1 \end{cases}$

Vamos igualar a variável livre z ao parâmetro t.

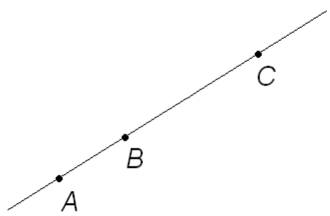
$$\begin{cases} x = -1.t + 4 \\ y = 3.t + 1 \\ z = t \end{cases} \quad \text{ou ainda} \quad \begin{cases} x = -1.t + 4 \\ y = \quad 3.t + 1 \\ z = \quad 1.t + 0 \end{cases}$$

Vetor diretor: $\vec{w} = (-1,3,1)$; **ponto:** $A(4,1,0)$

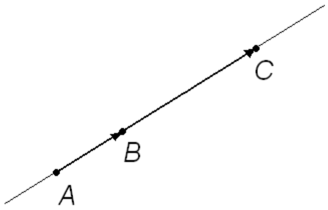
Exemplo: Verifique se os pontos $A(1,-1,3)$, $B(3,2,-2)$ e $C(5,5,-7)$ estão em linha reta.

Resolução

Geometricamente, 3 pontos podem estar alinhados da seguinte forma:



Dessa forma, devemos ter: $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ colineares:



ou seja, deve existir $n \in R$ tal que:

$$\overrightarrow{AB} = n.\overrightarrow{AC}.$$

Voltando agora ao caso específico do exemplo em que $A(1,-1{,}3)$, $B(3{,}2,-2)$, $C(5{,}5,-7)$, vamos identificar os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (3{,}2,-2) - (1,-1{,}3) = \left(\underbrace{3-1}_{2}, \underbrace{2-(-1)}_{3}, \underbrace{-2-3}_{-5}\right)$$

$$\overrightarrow{AB} = (2{,}3,-5)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (7{,}8,-12) - (1,-1{,}3) = \left(\underbrace{7-1}_{6}, \underbrace{8-(-1)}_{9}, \underbrace{-12-3}_{-15}\right)$$

$$\overrightarrow{AC} = (6{,}9,-15)$$

$$\overrightarrow{AB} = n.\overrightarrow{AC}$$

$$(2{,}3,-5) = n.(6{,}9,-15)$$

$$6n = 2$$
$$n = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$9n = 3$$
$$n = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

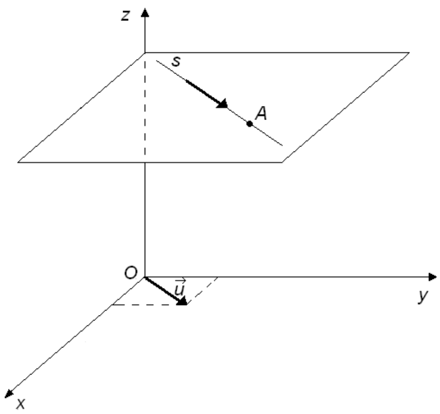
$$-15n = -5$$
$$15n = 5$$
$$n = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

Como existe um único $n = \frac{1}{3}$, tal que $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}.\overrightarrow{AC}$, logo, os pontos A, B e C estão alinhados.

Posições particulares de uma reta no espaço

<table>
<tr>
<td>

Reta paralela ao plano xOy



</td>
<td>

Ponto: $A(a_1, a_2, a_3)$

Vetor diretor: $\vec{u} = (u_1, u_2, 0)$

Equações paramétricas:

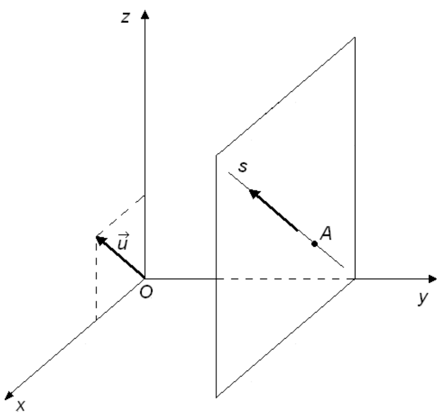
$$s: \begin{cases} x = a_1 + u_1 t \\ y = a_2 + u_2 t \\ z = a_3 \end{cases}$$

Equações simétricas:

$$s: \begin{cases} \dfrac{x - a_1}{u_1} = \dfrac{y - a_2}{u_2} \\ z = a_3 \end{cases}$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Reta paralela ao plano xOz



</td>
<td>

Ponto: $A(a_1, a_2, a_3)$

Vetor diretor: $\vec{u} = (u_1, 0, u_3)$

Equações paramétricas:

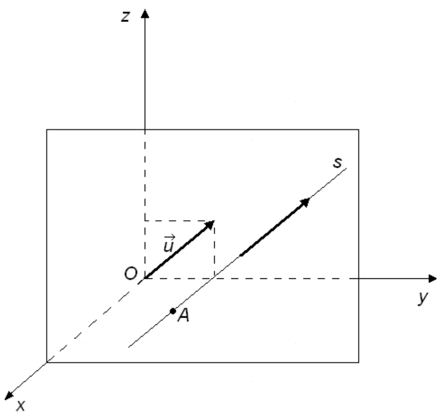
$$s: \begin{cases} x = a_1 + u_1 t \\ y = a_2 \\ z = a_3 + u_3 t \end{cases}$$

Equações simétricas:

$$s: \begin{cases} \dfrac{x - a_1}{u_1} = \dfrac{z - a_3}{u_3} \\ y = a_2 \end{cases}$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Reta paralela ao plano yOz



</td>
<td>

Ponto: $A(a_1, a_2, a_3)$

Vetor diretor: $\vec{u} = (0, u_2, u_3)$

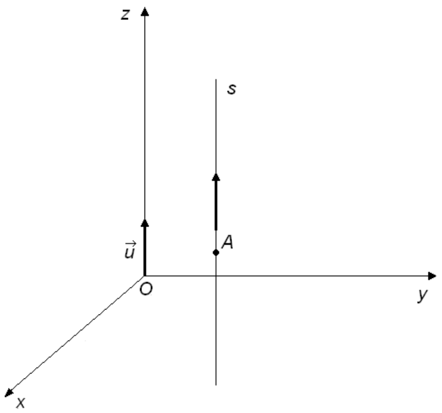
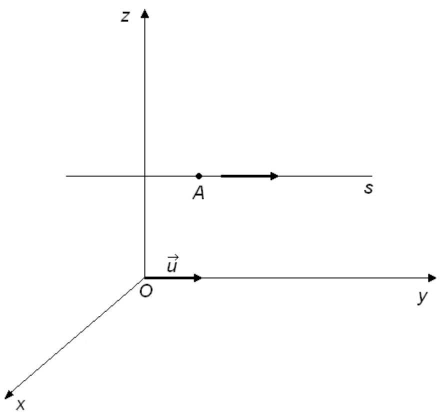
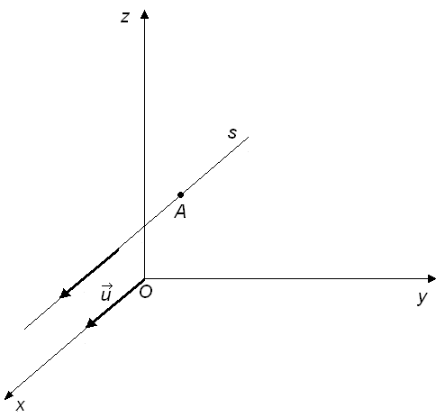
Equações paramétricas:

$$s: \begin{cases} x = a_1 \\ y = a_2 + u_2 t \\ z = a_3 + u_3 t \end{cases}$$

Equações simétricas:

$$s: \begin{cases} \dfrac{y - a_2}{u_2} = \dfrac{z - a_3}{u_3} \\ x = a_1 \end{cases}$$

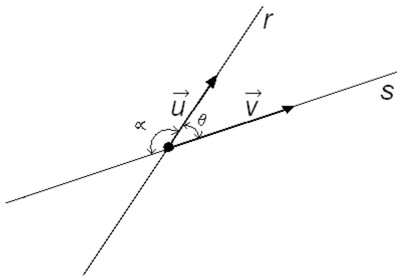
</td>
</tr>
</table>

Reta paralela ao eixo Oz  	**Ponto:** $A(a_1, a_2, a_3)$ **Vetor diretor:** $\vec{u} = (0{,}0, u_3)$ **Equações paramétricas:** $s\colon \begin{cases} x = a_1 \\ y = a_2 \\ z = a_3 + u_3 t \end{cases}$ ou $s\colon \begin{cases} x = a_1 \\ y = a_2 \end{cases}$ **Equações simétricas:** $s\colon \begin{cases} x = a_1 \\ y = a_2 \end{cases}$ z pode assumir qualquer valor.
Reta paralela ao eixo Oy  	**Ponto:** $A(a_1, a_2, a_3)$ **Vetor diretor:** $\vec{u} = (0, u_2, 0)$ **Equações paramétricas:** $s\colon \begin{cases} x = a_1 \\ y = a_2 + u_2 t \\ z = a_3 \end{cases}$ ou $s\colon \begin{cases} x = a_1 \\ z = a_3 \end{cases}$ **Equações simétricas:** $s\colon \begin{cases} x = a_1 \\ z = a_3 \end{cases}$ y pode assumir qualquer valor.
Reta paralela ao eixo Ox  	**Ponto:** $A(a_1, a_2, a_3)$ **Vetor diretor:** $\vec{u} = (0{,}0, u_3)$ **Equações paramétricas:** $s\colon \begin{cases} x = a_1 + u_1 t \\ y = a_2 \\ z = a_3 \end{cases}$ ou $s\colon \begin{cases} y = a_2 \\ z = a_3 \end{cases}$ **Equações simétricas:** $s\colon \begin{cases} y = a_2 \\ z = a_3 \end{cases}$ x pode assumir qualquer valor.

Ângulo entre duas retas

Definimos o ângulo θ entre as retas r e s como sendo o menor ângulo formado pelos seus respectivos vetores diretores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Calculamos o ângulo θ através da seguinte fórmula:

$$\cos\theta = \frac{|\vec{u}.\vec{v}|}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}, \qquad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$



Observe que $|\vec{u}.\vec{v}| \neq |\vec{u}|.|\vec{v}|$. Em $|\vec{u}.\vec{v}|$, primeiro, calcula-se o produto escalar para, depois, calcular o módulo e, em $|\vec{u}|.|\vec{v}|$, calcula-se o módulo para, depois, calcular o produto entre números reais.

Exemplo: Calcular o ângulo formado pelas retas $r: (x, y, z) = (-2,1,3) + t.(2,1-1)$ e $s: \frac{x+5}{1} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+7}{-2}$.

Resolução

Para calcular o ângulo entre r e s, precisamos identificar os vetores diretores das duas retas.

Vetor diretor da reta r: $\vec{u} = (2,1,-1)$

Vetor diretor da reta s: $\vec{v} = (1,-1,-2)$

Fórmula para cálculo do ângulo entre retas: $\cos\theta = \frac{|\vec{u}.\vec{v}|}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$

então:

$$\cos\theta = \frac{|\vec{u}.\vec{v}|}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} = \frac{|(2,1,-1).(1,-1,-2)|}{|(2,1,-1)|.|(1,-1,-2)|}$$

$$\cos\theta = \frac{|2.1 + 1.(-1) + (-1).(-2)|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}.\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{|2 - 1 + 2|}{\sqrt{4 + 1 + 1}.\sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{|3|}{\sqrt{6}.\sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

ou seja,

$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

então:

$$\theta = 60°.$$

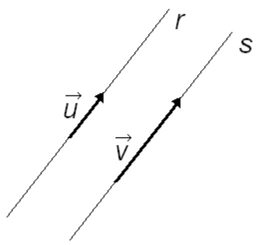
Condição de paralelismo, ortogonalidade e coplanaridade entre retas

Seja r uma reta que passa pelo ponto $A(a_1, a_2, a_3)$ e tem a direção do vetor $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e a reta s que passa pelo ponto $B(b_1, b_2, b_3)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

Condição de paralelismo

As retas r e s são paralelas se $\vec{u} = m\vec{v}$, em que $m \in R$. Em outras palavras existe $m \in R$ tal que:

$$(u_1, u_2, u_3) = m(v_1, v_2, v_3)$$



Exemplo: Verifique se as retas r e s são paralelas, nas quais:

$$r: (x, y, z) = (2, -1, 0) + t.(2,10,8)$$

$$s: (x, y, z) = (4, -3, 2) + t.(1,5,4)$$

Resolução

Vetor diretor da reta r: $\vec{u} = (2,10,8)$

Vetor diretor da reta s: $\vec{v} = (1,5,4)$

Condição de paralelismo: $\vec{u} = m\vec{v}$

Substituindo os valores:

$$(2,10,8) = m.(1,5,4)$$

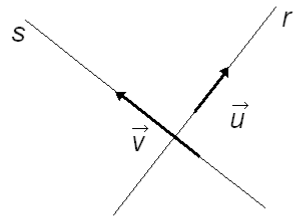
$$(2,10,8) = (m, 5m, 4m)$$

ou seja, $m = 2$, logo $\vec{v} = 2.\vec{u}$, portanto, as retas r e s são paralelas.

Condição de ortogonalidade

As retas r e s são ortogonais se $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Torna-se importante perceber que r e s não estão, necessariamente, no mesmo plano. No caso de r e s serem ortogonais e estarem no mesmo plano, dizemos que r e s são perpendiculares.



Exemplo: Verifique se as retas r e s são ortogonais, nas quais:

$$r: \frac{x}{3} = y + 1 = \frac{z-4}{5}$$

$$s: \begin{cases} y = 2x + 1 \\ z = -x + 3 \end{cases}$$

Resolução

Vetor diretor da reta r: $\vec{u} = (3,1,5)$

Vetor diretor da reta s: $\vec{v} = (1,2,-1)$

Condição de ortogonalidade: $\vec{u}.\vec{v} = 0$

Substituindo os valores:

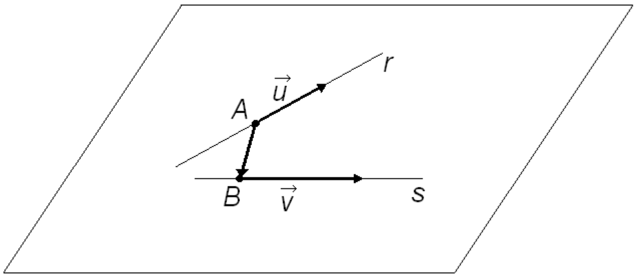
$$\vec{u}.\vec{v} = (3,-1,5).(1,2,-1) = \underbrace{3.1}_{3} + \underbrace{1.2}_{2} + \underbrace{5(-1)}_{-5}$$

$$\vec{u}.\vec{v} = 3 + 2 - 5 = 0$$

ou seja, $\vec{u}.\vec{v} = 0$, logo as retas r e s são ortogonais.

Condição de coplanaridade

As retas r e s são coplanares se: $(\vec{u},\ \vec{v},\ \overrightarrow{AB}) = 0$.



Exemplo: Verifique se as retas r e s são coplanares:

$$r: x - 2 = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$$

$$s: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

Resolução

Vetor diretor da reta r: $\vec{u} = (1,2,3)$

Ponto da reta r: $A = (2,-1,0)$

Vetor diretor da reta s: $\vec{v} = (-1,1,2)$

Ponto da reta s: $B = (1,0,2)$

Condição de coplanaridade: $(\vec{u},\ \vec{v},\ \overrightarrow{AB}) = 0$

Vamos calcular o vetor $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1,0,2) - (2,-1,0) = \left(\underbrace{1-2}_{-1}, \underbrace{0-(-1)}_{1}, \underbrace{2-0}_{2}\right)$$

$$\overrightarrow{AB} = (-1,1,2)$$

Vamos calcular o produto misto $(\vec{u},\ \vec{v},\ \overrightarrow{AB})$:

$$(\vec{u}, \vec{v},\ \overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Por meio da regra de Sarrus:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{matrix}$$

$$(\vec{u}, \vec{v},\ \overrightarrow{AB}) = \left[\underbrace{1.1.2}_{2} + \underbrace{2.2.(-1)}_{-4} + \underbrace{3.(-1).1}_{-3}\right] - \left[\underbrace{3.1.(-1)}_{-3} + \underbrace{1.2.1}_{2} + \underbrace{2.(-1).2}_{-4}\right]$$

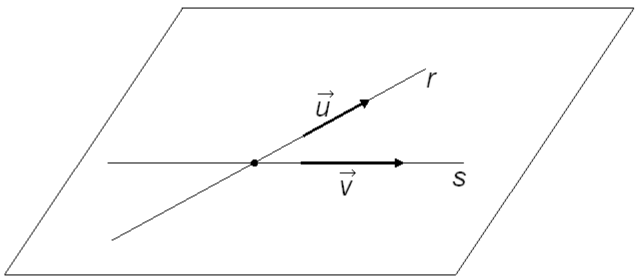
$$(\vec{u}, \vec{v},\ \overrightarrow{AB}) = \left[\underbrace{2-4-3}_{-5}\right] - \left[\underbrace{-3+2-4}_{-5}\right] = -5-(-5) = -5+5 = 0$$

Posição relativa de duas retas

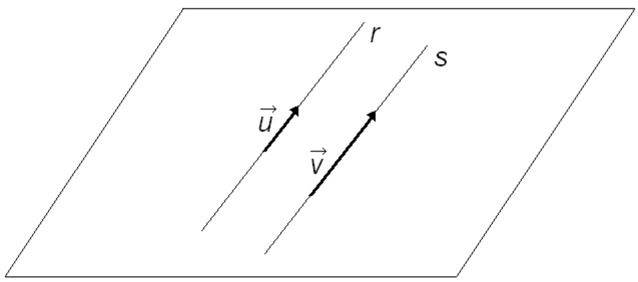
Duas retas r e s, no espaço, podem ser coplanares ou reversas.

COPLANARES: são retas situadas no mesmo plano. Podemos ter retas coplanares (concorrentes ou paralelas):

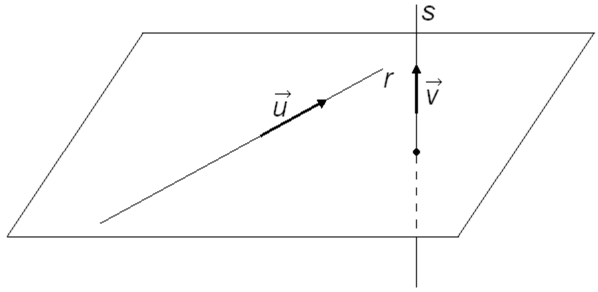
Concorrentes: são retas coplanares que têm um ponto de intersecção.



Paralelas: são retas coplanares que não têm ponto de intersecção.



REVERSAS: são retas que não estão situadas no mesmo plano, ou seja, $(\vec{u},\ \vec{v},\ \overrightarrow{AB}) \neq 0$.



Para estudar a posição de duas retas, primeiro, identificamos se estas são coplanares ou reversas. Se forem coplanares precisamos, ainda, verificar se são paralelas ou concorrentes.

Exemplo: Estudar a posição relativa das retas:

a) $r: x = \frac{y+1}{2} = \frac{z-7}{-1}$ e $s: \frac{x-1}{-3} = \frac{y-4}{-6} = \frac{z}{3}$

b) $r: (x,y,z) = (1,3,0) + t.(2,-1,1)$ e $s: \begin{cases} x = t+2 \\ y = 3-t \\ z = t \end{cases}$

c) $r: \begin{cases} x = 2y \\ z = 1+3y \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x = 3+t \\ y = -1+2t \\ z = -t \end{cases}$

Resolução

a) $r: x = \frac{y+1}{2} = \frac{z-7}{-1}$ e $s: \frac{x-1}{-3} = \frac{y-4}{-6} = \frac{z}{3}$;

Vamos identificar se as retas r e s são coplanares ou reversas.

PASSO 1: identificar um ponto e o vetor diretor de cada uma das retas.

Vetor diretor da reta r: $\vec{u} = (1,2,-1)$

Ponto da reta r: $A = (0,-1,7)$

Vetor diretor da reta s: $\vec{v} = (-3,-6,3)$

Ponto da reta s: $B = (1,4,0)$

PASSO 2: calcular o produto misto: $\left(\vec{u},\ \vec{v},\ \overrightarrow{AB}\right)$

Vamos calcular o vetor $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1,4,0) - (0,-1,7) = (1-0,4-(-1),0-7)$$

$$\overrightarrow{AB} = (1,5,-7)$$

Logo:

$$\left(\vec{u},\vec{v},\ \overrightarrow{AB}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -6 & 3 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$$

Por meio da regra de Sarrus:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -6 & 3 \\ 1 & 5 & -7 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \\ 1 & 5 \end{matrix}$$

$$\left(\vec{u},\vec{v},\ \overrightarrow{AB}\right) = \left[\underbrace{1.(-6).(-7)}_{42} + \underbrace{2.3.1}_{6} + \underbrace{(-1).(-3).5}_{15}\right]$$
$$- \left[\underbrace{(-1).(-6).1}_{6} + \underbrace{1.3.5}_{15} + \underbrace{2.(-3).(-7)}_{42}\right]$$

$$\left(\vec{u},\vec{v},\ \overrightarrow{AB}\right) = \left[\underbrace{42+6+15}_{63}\right] - \left[\underbrace{6+15+42}_{63}\right] = 63 - 63 = 0$$

Como $\left(\vec{u},\vec{v},\ \overrightarrow{AB}\right) = 0$, então, as retas r e s são **coplanares**. Agora, precisamos identificar se essas retas são paralelas ou concorrentes.

PASSO 3: verificar se retas r e s são paralelas ou concorrentes;

Relembrando: $\vec{u} = (1,2,-1)$ e $\vec{v} = (-3,-6,3)$

Condição de paralelismo: $\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3} = m$

$$\frac{1}{-3} = \frac{2}{-6} = \frac{-1}{3}$$

Portanto, as retas r e s são **paralelas**, mais ainda, $\vec{v} = -3.\vec{u}$.

b) $r: (x, y, z) = (1,3,0) + t.(2, -1,1)$ e $s: \begin{cases} x = t + 2 \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases}$;

Vamos identificar se as retas r e s são coplanares ou reversas.

PASSO 1: Identificar um ponto e o vetor diretor de cada uma das retas.

Vetor diretor da reta r: $\vec{u} = (2, -1,1)$

Ponto da reta r: $A = (1,3,0)$

Vetor diretor da reta s: $\vec{v} = (1, -1,1)$

Ponto da reta s: $B = (2,3,0)$

PASSO 2: Calcular o produto misto: $(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB})$

Vamos calcular o vetor $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2,3,0) - (1,3,0) = (2 - 1,3 - 3,0 - 0)$$

$$\overrightarrow{AB} = (1,0,0)$$

Logo:

$$(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Por meio da regra de Sarrus:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}) = \left[\underbrace{2.(-1).0}_{0} + \underbrace{(-1).1.1}_{-1} + \underbrace{1.1.0}_{0}\right] - \left[\underbrace{1.(-1).1}_{-1} + \underbrace{2.1.0}_{0} + \underbrace{(-1).1.0}_{0}\right]$$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}) = \left[\underbrace{0 - 1 + 0}_{-1}\right] - \left[\underbrace{-1 + 0 + 0}_{-1}\right] = -1 - (-1) = -1 + 1 = 0$$

Como $(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}) = 0$, então, as retas r e s são **coplanares**. Agora, precisamos identificar se essas retas são paralelas ou concorrentes.

PASSO 3: verificar se retas r e s são paralelas ou concorrentes;

Relembrando: $\vec{u} = (2,-1,1)$ e $\vec{v} = (1,-1,1)$

Condição de paralelismo: $\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3} = m$

$$\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{-1} = \frac{1}{1}$$

Portanto, as retas r e s são **concorrentes**.

c) $r: \begin{cases} x = 2y \\ z = 1 + 3y \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = -t \end{cases}$

Vamos identificar se as retas r e s são coplanares ou reversas.

PASSO 1: identificar um ponto e o vetor diretor de cada uma das retas.

Vetor diretor da reta r:

Ao igualar a variável livre y ao parâmetro t, temos:

$r: \begin{cases} x = 2y \\ z = 1 + 3y \end{cases}$ ou ainda $r: \begin{cases} x = 0 + 2t \\ y = t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$ $\vec{u} = (2,1,3)$

Ponto da reta r: $A(0,0,1)$

Vetor diretor da reta s: $\vec{u} = (1,2,-1)$

Ponto da reta s: $B(3,-1,0)$

PASSO 2: calcular o produto misto: $(\vec{u},\ \vec{v},\ \overrightarrow{AB})$

Vamos calcular o vetor $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (3,-1,0) - (0,0,1) = (3-0,-1-0,0-1)$$

$$\overrightarrow{AB} = (3,-1,-1)$$

Vamos calcular o produto misto $(\vec{u},\ \vec{v},\ \overrightarrow{AB})$:

$$(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

Por meio da regra de Sarrus:

$$\left[\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{array}\right]\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{array}$$

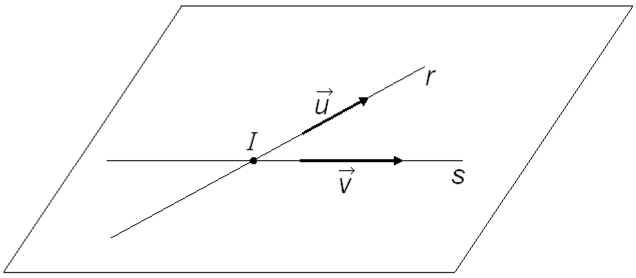
$$\left(\vec{u}, \vec{v},\ \overrightarrow{AB}\right) = \left[\underbrace{2.2.(-1)}_{-4} + \underbrace{1.(-1).3}_{-3} + \underbrace{3.1.(-1)}_{-3}\right] - \left[\underbrace{3.2.3}_{18} + \underbrace{2.(-1).(-1)}_{2} + \underbrace{1.1.(-1)}_{-1}\right]$$

$$\left(\vec{u}, \vec{v},\ \overrightarrow{AB}\right) = \left[\underbrace{-4-3-3}_{-10}\right] - \left[\underbrace{18+2-1}_{19}\right] = -10 - 19 = -29$$

Como $\left(\vec{u}, \vec{v},\ \overrightarrow{AB}\right) \neq 0$, então, as retas r e s são **reversas**.

Intersecção de duas retas

Dadas duas retas r e s, I é ponto de intersecção de r e s, se suas coordenadas satisfazem simultaneamente as equações dessas retas.



Exemplo: Calcule o ponto de intersecção das retas:

$$r: \begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = -z + 3 \end{cases} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} x = z + 2 \\ y = 3 - z \end{cases}$$

Resolução

Como o ponto de intersecção deve pertencer a ambas as retas, então, para obtê-lo, precisamos resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x = 2z + 1 & (1) \\ y = -z + 3 & (2) \\ x = z + 2 & (3) \\ y = 3 - z & (4) \end{cases}$$

A partir das equações (1) e (3), temos:

$$x = 2z + 1 \quad \text{e} \quad x = z + 2$$

então:

$$2z + 1 = z + 2$$

$$2z - z = 2 - 1$$

$$z = 1$$

Ao substituir $z = 1$ nas equações (2) e (3), obtemos os valores de x e y, ou seja,

$$x = 1 + 2 = 3$$

$$x = 3$$

$$y = -1 + 3 = 2$$

$$y = 2$$

Portanto, $x = 3$, $y = 2$ e $z = 1$, ou seja, $I\left(\underbrace{3}_{x}, \underbrace{2}_{y}, \underbrace{1}_{z}\right)$ é o ponto de intersecção. Vamos verificar se as coordenadas de I satisfazem as equações de r e s.

Equações de r: $\begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = -z + 3 \end{cases}$

Verificação: $3 = \underbrace{2.1 + 1}_{3}$ (verifica)

$2 = \underbrace{-1 + 3}_{2}$ (verifica)

Equações de s: $\begin{cases} x = z + 2 \\ y = 3 - z \end{cases}$

Verificação: $3 = \underbrace{1 + 2}_{3}$ (verifica)

$2 = \underbrace{3 - 1}_{2}$ (verifica)

Referências Bibliográficas

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. *Geometria Analítica*. 2 ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.

BOULOS, Paulo; CAMARGO, Ivan de. *Geometria Analítica*: Um tratamento Vetorial. 3 ed. São Paulo: Prentice Hall, 2005.