As derivadas das funções trigonométricas:

Nosso estudo de cálculo com as funções trigonométricas inicia com duas fórmulas muito importantes:

$$(\text{sen } x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\text{ sen } x$$

Exemplo 1: Mostre que:

$i.\ (\tan x)' = \sec^2 x$

$ii.\ (\cot x)' = -\csc^2 x$

$iii.\ (\sec x)' = \sec x \cdot \tan x$

$iv.\ (\csc x)' = -\csc x \cdot \cot x$

Solução

$i.\ (\tan x)' = \left(\dfrac{sen\ \ x}{\cos x}\right)'$

Aplicando a regra do quociente, temos:

$$= \frac{(sen\ \ x)' \cdot \cos x - (senx).(\cos x)'}{(\cos x)^2} =$$

$$= \frac{(\cos\ \ x) \cdot \cos x - (senx).(-sen\ \ x)}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos^2 x + sen^2 x}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{1}{(\cos x)^2}$$

$$= \sec^2 x$$

$ii.\ (\cot x)' = \left(\dfrac{\cos\ \ x}{sen\ \ x}\right)'$

Aplicando a regra do quociente, temos:

$$= \frac{(\cos x)' \cdot sen\ x - (\cos x).(sen\ x)'}{(sen\ x)^2} =$$

$$= \frac{(-sen\ x) \cdot sen\ x - (\cos x).(\cos x)}{(sen\ x)^2}$$

$$= \frac{-sen^2 x - \cos^2 x}{(sen\ x)^2}$$

$$= -\frac{1}{sen^2 x}$$

$$= -\csc^2 x$$

$iii.\ (\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)'$

Aplicando a regra do quociente, temos:

$$= \frac{(1)' \cdot \cos x - (1).(\cos x)'}{(\cos x)^2} =$$

$$= \frac{0 \cdot \cos x - (1).(-sen\ x)}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{sen\ x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos\ x} \cdot \frac{sen\ x}{\cos\ x} = \sec x \cdot \tan x$$

$iii.\ (\csc x)' = \left(\frac{1}{sen\ x}\right)'$

Aplicando a regra do quociente, temos:

$$= \frac{(1)' \cdot sen\ x - (1).(sen\ x)'}{(sen\ x)^2} =$$

$$= \frac{0 \cdot sen\ x - (1).(\cos x)}{sen^2 x}$$

$$= -\frac{\cos x}{sen^2 x}$$

$$= -\frac{1}{sen\ x} \cdot \frac{\cos x}{sen\ x} = -\csc x \cdot \cot x$$

Exemplo 2: Diferencie as seguintes funções compostas[1]:

a) f(x) = sen (2x – 3)

b) f(x) = cos (x^2 + 2x – 1)

c) f(x) = $\text{sen}^2 x$

d) f(x) = $\cos^3(2x – 1)$

Solução:

a) y = sen (2x – 3)

Sendo y = sen u e u = 2x – 3, temos:

$$\frac{dy}{du} = \cos u$$

$$\frac{du}{dx} = 2$$

Pela **regra da cadeia**, temos:

$$\frac{dy}{du} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{du} = \cos u \cdot 2 = 2\cos u$$

Substituindo u por 2x - 3, temos:

$$\frac{dy}{du} = 2\cos(2x - 3)$$

[1] Lembre-se que para diferenciar funções compostas é necessário aplicar a regra da cadeia.

b) y = cos (x^2 + 2x – 1)

Sendo y = cos u e u = x^2 + 2x – 1, temos:

$$\frac{dy}{du} = -sen \ \ x$$

$$\frac{du}{dx} = 2x + 2$$

Pela **regra da cadeia**, temos:

$$\frac{dy}{du} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{du} = -sen \ \ u \cdot (2x + 2)$$

Substituindo u por x^2 + 2x – 1, temos:

$$\frac{dy}{du} = -sen \ \ (x^2 + 2x - 1) \cdot (2x + 2)$$

c) f(x) = sen^2x = $(sen\ x)^2$

Sendo y = u^2 e u = sen x, temos:

$$\frac{dy}{du} = 2.u$$

$$\frac{du}{dx} = \cos x$$

Pela **regra da cadeia**, temos:

$$\frac{dy}{du} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{du} = 2u \cdot \cos x$$

Substituindo u por sen x, temos:

$$\frac{dy}{du} = 2 \cdot sen\ \ x \cdot \cos x$$

d) f(x) = $\cos^3(2x - 1)$ = $[\cos(2x - 1)]^3$

Sendo y = u^3, u = cos t e t = 2x - 1, temos:

$$\frac{dy}{du} = 3.u^2$$

$$\frac{du}{dt} = -sen\ \ t$$

$$\frac{dt}{dx} = 2$$

Pela **regra da cadeia**, temos:

$$\frac{dy}{du} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$\frac{dy}{du} = 3u^2 \cdot (-sen\ \ t) \cdot 2$$

$$\frac{dy}{du} = -6u^2 \cdot sen\ \ t$$

Substituindo **u** por **cos t** e **t** por **2x – 1**, temos:

$$\frac{dy}{dx} = -6 \cdot (\cos(2x-1))^2 \cdot sen\ \ (2x-1)$$

Exercícios:

1) Lembrando que:

(sen x)' = cos x

(cos x)' = - sen x

(tan x)' = sec^2x

(cot x)'= - csc^2x

(sec x)' = sec x . tan x

(csc x)' = -csc x . cot x

encontre a derivada de cada uma das seguintes funções:

a) y = 2.cos x – 3.sen x

b) y = $\frac{sen\ \ x}{x}$

c) y = x^3. sen x – 5.cos x

d) y = sec x – $\sqrt{2}$. tg x

e) y = sec x . tg x

f) y = cossec x . cotg x

2) Usando a regra da cadeia, derive as seguintes funções compostas:

a) y = sen (2x)

b) f(x) = 4.cos (x^3)

c) y = tg (x^2 + 1)

d) y = sen^3x

e) y = cos (x^2 + 9)

Respostas:

1) a) – 2.sen x – 3.cos x

b) $\frac{x.\cos x - sen\ x}{x^2}$

c) $x^3 \cos x + (3x^2 + 5).\text{sen } x$

d) sec x . tg x - $\sqrt{2}$. $\sec^2 x$

e) $\sec^3 x + \sec x \,.\, tg^2 x$

f) $-\ \text{cossec}^3 x - \text{cossec } x.\text{cotg}^2 x$

2)

a) 2.cos (2x)

b) $-12x^2\ \text{sen}\ (x^3)$

c) $2x.\sec^2 (x^2 + 1)$

d) $3.\text{sen}^2 x\ .\ \cos x$

e) $-\ 2x.\text{sen}\ (x^2 + 9)$

Referências bibliográficas:

1. Goldstein, L. J., Lay, D. C., Schneider, D. I., Matemática Aplicada: Economia, Administração e Contabilidade – Editora Bookman
2. George B. Thomas, Cálculo, volume I, Pearson, 10ª edição. 2002.
3. George F. Simmons, Cálculo com Geometria Analítica, Vol. 1, McGraw-Hill, 1987.
4. Howard Anton, Cálculo, volume 1. Bookman, 2007.