Cálculo e Aplicações II

Material da Unidade II

Lineia Schütz

Conteúdo

UNIDADE II

1 Métodos de Integração

1.1 Introdução

No capítulo anterior estudamos como resolver integrais indefinidas utilizando as suas propriedades e a lista de integrais imediatas. No entanto, nem sempre é possível resolver integrais indefinidas dessa forma. Em geral, não é imediato reverter um processo de diferenciação. Durante o andamento da disciplina, trabalharemos com o método de *Integração por Substituição* e o método de *Integração por Partes*.

Estudaremos nesta unidade a Integração por Substituição.

1.2 Integração por Substituição

Muitas integrais indefinidas não são solúveis apenas através do uso de suas propriedades e da lista de integrais imediatas. Porém, em alguns casos, por meio de uma determinada mudança de variável no integrando, a integral indefinida escrita na nova variável pode ser resolvida como fazíamos na Unidade I. Essa é a idéia geral do método de Integração por Substituição. Para entendermos tal método, precisamos responder as seguintes questões:

- Como saber quando o método é aplicável?
- Como escolher a tal mudança de variável?

Para respondermos essas questões, vamos analisar a regra da cadeia do ponto de vista da "antiderivação". A derivada da função composta $F(h(x))$, pela regra da cadeia, é

$$\frac{d}{dx}\left[F(h(x))\right] = F^{'}(h(x))h^{'}(x).$$

Pela observação 2.2 b) [pg. 11], temos

$$\int F^{'}(h(x))h^{'}(x)dx = \int \frac{d}{dx}\left[F(h(x))\right]dx = F(h(x)) + C,$$

onde F é uma primitiva para uma determinada função f.

Assim,

$$\int f(h(x))h^{'}(x)dx = F(h(x)) + C.$$

Se chamarmos $h(x)$ de u, então $h^{'}(x)dx = du$. Dessa forma,

$$\int f(h(x))h^{'}(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C.$$

Eq. 1

Portanto, podemos resolver a integral $\int f(h(x))h'(x)dx$ através da mudança de variável $u = h(x)$ [Eq. 1]. Este método de integração é chamado Integração por Substituição.

Antes de responder as questões acima, vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo 1: Calcule a integral indefinida $\int 3x(x^2+4)^5 dx$ pelo método de integração por substituição.

<u>Resolução:</u>

Como a motivação para o método de integração por substituição está na derivação de uma função composta pela regra da cadeia, para resolver a integral acima precisamos identificar a composição de funções. Observe que o objetivo do método é fazer uma mudança de variável de tal forma que a integral na nova variável (que é equivalente a original) seja uma integral direta[1]. Assim, olhando para o integrando do exemplo, vemos que $(x^2+4)^5$ é a composição da função $f(x) = x^5$ com a função $h(x) = x^2+4$. Se fizermos a mudança de variável $u = h(x) = (x^2+4)$, então $du = h'(x)dx = 2xdx$.

Observe que

$$\int 3x(x^2+4)^5 dx = \int (x^2+4)^5 3xdx = \int (x^2+4)^5 3\frac{2}{2}xdx = \frac{3}{2}\int (x^2+4)^5 2xdx = \frac{3}{2}\int f(u)du.$$

Utilizando a lista de integrais imediatas, temos:

$$\frac{3}{2}\int f(u)du = \frac{3}{2}\int u^5 du = \frac{3}{2}\frac{u^{(5+1)}}{(5+1)} + C = \frac{3}{2}\frac{u^6}{6} + C = \frac{u^6}{4} + C.$$

Como $u = x^2 + 4$, obtemos:

$$\int 3x(x^2+4)^5 dx = \frac{u^6}{4} + C = \frac{(x^2+4)^6}{4} + C.$$

Portanto,

$$\int 3x(x^2+4)^5 dx = \frac{(x^2+4)^6}{4} + C.$$

[1] Uma integral indefinida é dita direta quando ela pode ser resolvida por meio da lista das integrais imediatas e das propriedades das integrais indefinidas.

Conclusão

Analisando a resolução do exemplo anterior, e respondendo as questões iniciais, vemos que o método de substituição é aplicável quando a mudança de variável $u = h(x)$ gera uma integral direta (na variável u). Esta conclusão nos leva a seguinte questão:

Questão: Para quais integrais existe uma mudança de variável com essa propriedade e como encontrar tal mudança de variável?

A resposta informal para esta pergunta é a seguinte:

A mudança de variável com a propriedade desejada existe quando identificamos no integrando uma composição de funções com as seguintes características:

I. Para a composição de funções deve ser possível escolher uma mudança de variável $u = h(x)$ em que ao substituirmos u na integral, o que resta no integrando, a menos de constantes multiplicativas, seja a derivada de u.

II. A integral na variável u deve ser uma integral direta.

1.2.1 Integração por Substituição – Algorítmo

1º Identifique a composição de funções;
2º Escolha a mudança de variável $u = h(x)$ que gera uma integral direta (na variável u) ;
3º Substitua $u = h(x)$ e $du = h'(x)dx$ no integrando;
4º Calcule a integral na variável u por meio da lista de integrais imediatas e das propriedades da integral indefinida, se possível. Caso não seja possível, faça outra escolha para a mudança de variável $u = h(x)$;
5º Substitua u por $h(x)$ para que a resposta final esteja na variável x.

Vamos utilizar a item 1.2.1 acima para resolver as integrais abaixo. Observe que em cada exemplo vamos recair, através da mudança de variável adequada, em uma integral da lista de integrais imediatas [Seção 2.1 da Unidade I].

Exemplos

Calcule as integrais indefinidas abaixo pelo método de integração por substituição.

2) $\int sen(9 + 2x)dx$

Resolução:

O primeiro passo é identificar a composição de funções. Observando o integrando vemos que $sen(9+2x)$ é a composição da função $f(x)=sen(x)$ com a função $h(x)=9+2x$.

Então, vamos escolher $u=h(x)=9+2x$. Dessa forma, $du=h'(x)dx=2dx$, ou seja, $dx=\frac{1}{2}du$.

Fazendo a substituição no integrando temos:

$$\int sen(9+2x)dx=\int sen(u)\frac{1}{2}du=\frac{1}{2}\int sen(u)du.$$

Observe que $\frac{1}{2}\int sen(u)du$ é uma integral direta!

Assim,

$$\frac{1}{2}\int sen(u)du=-\frac{1}{2}\cos(u)+C.$$

Como $u=9+2x$, obtemos:

$$\int sen(9+2x)dx=\frac{1}{2}\int sen(u)du=-\frac{1}{2}\cos(9+2x)+C.$$

Lembre que a substituição escolhida $u=h(x)=9+2x$ gerou uma integral direta $\frac{1}{2}\int sen(u)du$, pois ao substituir $h(x)$ por u obtemos $\int sen(u)dx$ e o que ainda resta no integrando escrito na variável x é a derivada de u (em relação a variável x) a menos da constante multiplicativa 2**.**

3) $\int \cos^2(x)sen(x)dx$

Resolução:

Observando o integrando identificamos a composição da função $f(x)=x^2$ com a função $h(x)=\cos(x)$, pois $f(h(x))=\cos^2(x)$.

Então, vamos escolher $u=h(x)=\cos(x)$. Dessa forma, $du=-sen(x)dx$, ou seja, $sen(x)dx=-du$ (*du* é exatamente "o está no integrando e não faz parte da composição de funções a menos da constante multiplicativa *-1*" e essa é a situação em que a escolha de *u* "funciona"!).

Substituindo $\cos(x)$ por u e $sen(x)dx$ por $-du$, temos:

$$\int \cos^2(x)sen(x)dx=\int u^2(-du)=-\int u^2du.$$

Observe que $-\int u^2du$ é uma integral direta!

Como

$$-\int u^2du=-\frac{u^{2+1}}{2+1}+C=-\frac{u^3}{3}+C,$$

obtemos:

$$\int \cos^2(x)sen(x)dx = \int u^2(-du) = -\int u^2 du = -\frac{u^3}{3} + C = -\frac{\cos^3(x)}{3} + C .$$

4) $\int \frac{t^2}{\sqrt{1+t^3}} dt$, $t > 0$

Resolução:

Olhando para o integrando identificamos a composição da função $f(t) = \sqrt{t}$ com a função $h(t) = 1+t^3$, pois $f(h(t)) = \sqrt{1+t^3}$.

Então, vamos escolher $u = h(t) = 1+t^3$. Dessa forma, $du = 3t^2 dt$, ou seja, $t^2 dt = \frac{1}{3} du$ (du é exatamente "o que está no integrando e não faz parte da composição de funções a menos da constante multiplicativa 3" e essa é a situação em que a escolha de *u* "funciona"!).

Realizando a substituição de variável, temos:

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{1+t^3}} dt = \int \frac{1}{\sqrt{u}} \frac{1}{3} du = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{3} \int u^{-\frac{1}{2}} du \ .$$

Observe que $\frac{1}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} du$ é uma integral direta!

Como

$$\frac{1}{3} \int u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{1}{3} \frac{u^{\left(-\frac{1}{2}+1\right)}}{\left(-\frac{1}{2}+1\right)} + C = \frac{1}{3} \frac{u^{\left(\frac{1}{2}\right)}}{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}\sqrt{u} + C ,$$

obtemos:

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{1+t^3}} dt = \frac{1}{3} \int u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{2}{3}\sqrt{u} + C = \frac{2}{3}\sqrt{(1+t^3)} + C \ .$$

5) $\int x e^{x^2} dx$

Resolução:

Olhando para o integrando identificamos a composição da função $f(x) = e^x$ com a função $h(x) = x^2$, pois $f(h(x)) = e^{x^2}$.

Então, vamos escolher $u = h(x) = x^2$. Dessa forma, $du = 2xdx$, ou seja, $xdx = \frac{1}{2} du$ (du é exatamente "o que está no integrando e não faz parte da composição de funções a menos da constante multiplicativa 2" e essa é a situação em que a escolha de *u* "funciona"!)

Realizando a substituição de variável, temos:

$$\int xe^{x^2}dx = \int e^u \frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int e^u du .$$

Observe que $\frac{1}{2}\int e^u du$ é uma integral direta!

Como

$$\frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^u + C ,$$

obtemos:

$$\int xe^{x^2}dx = \int e^u \frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C .$$

6) $\int \frac{\ln(x)}{x}dx$, $x > 0$

Resolução:

Olhando para o integrando identificamos a composição da função $f(x) = x$ com a função $h(x) = \ln(x)$, pois $f(h(x)) = \ln(x)$. Observe que $\frac{d}{dx}[\ln(x)] = \frac{1}{x}$.

Então, vamos escolher $u = h(x) = \ln(x)$. Dessa forma, $du = \frac{1}{x}dx$, (du é exatamente "o que está no integrando e não faz parte da composição de funções e essa é a situação em que a escolha de u "funciona"!)

Realizando a substituição de variável, temos:

$$\int \frac{\ln(x)}{x}dx = \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{(\ln(x))^2}{2} + C .$$

7) $\int \frac{tg(x)}{\cos(x)}dx$

Resolução:

O objetivo do método de Integração por Substituição é obter uma integral direta na variável *u*. Para isso vamos precisar reescrever o integrando. Lembre que $tg(x) = \frac{sen(x)}{\cos(x)}$. Dessa forma,

$$\int \frac{tg(x)}{\cos(x)}dx = \int \frac{sen(x)}{\cos(x)}\frac{1}{\cos(x)}dx = \int \frac{sen(x)}{\cos^2(x)}dx .$$

Vamos realizar a substituição em $\int \frac{sen(x)}{\cos^2(x)}dx$.

Olhando para o integrando identificamos a composição da função $f(x) = x^2$ com a função $h(x) = \cos(x)$, pois $f(h(x)) = \cos^2(x)$. Observe que $\frac{d}{dx}[\cos(x)] = -sen(x)$.

Então, escolhendo $u = h(x) = \cos(x)$, $du = -sen(x)dx$, (du é exatamente "o que está no integrando e não faz parte da composição de funções a menos da constante multiplicativa *-1*" e essa é a situação em que a escolha de *u* "funciona"!)

Realizando a substituição de variável, temos:

$$\int \frac{sen(x)}{\cos^2(x)}dx = -\int \frac{1}{u^2}du = -\int u^{-2}du = -\frac{u^{-2+1}}{-2+1} + C = -\frac{u^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{\cos(x)} + C \ .$$

Utilize a Integração por Substituição para resolver os exercícios da Lista de Exercícios III.

Lista de Exercícios III

Resolva as seguintes integrais indefinidas:

1. $\int \frac{(2t-1)}{t^2 - t + 1}dt$
2. $\int e^{7x}dx$
3. $\int sen(3x)dx$
4. $\int \frac{5x}{\sqrt{1-x^2}}dx$
5. $\int \frac{2x}{\sqrt[3]{x^2+1}}dx$
6. $\int \frac{3\cos(x)}{1+2sen(x)}dx$
7. $\int sen^3(x)\cos(x)dx$
8. $\int \sec^2(3x+1)dx$
9. $\int y^2\sqrt{2+y^3}dy$
10. $\int \frac{2}{x\ln(x)}dx$
11. $\int \frac{e^x}{2e^x+1}dx$
12. $\int xe^{-3x^2}dx$
13. $\int x\cos(2x^2+6)dx$
14. $\int \sec(2x)tg(2x)dx$
15. $\int \frac{\ln(\sqrt{x})}{x}dx$

2 Bibliografia

ANTON, H. *Cálculo: Um Novo Horizonte*. Porto Alegre: Bookman, vol. 1, 2000.
STEWART, J. *Cálculo.* São Paulo: Pioneira Thomson Learning, vol. 1 2003.
THOMAS, G. B.. *Cálculo*. São Paulo: Pearson Addison Wesley, vol. 1 2002.