



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE
INSTITUTO DE OCEANOGRAFIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
OCEANOGRAFIA FÍSICA, QUÍMICA
E GEOLÓGICA



UM ESTUDO ANALÍTICO DO ENCONTRO DE VÓRTICES ANTICICLÔNICOS COM A BORDA CONTINENTAL

JOSÉ LUIZ LIMA DE AZEVEDO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Oceanografia Física, Química e Geológica da Universidade Federal do Rio Grande, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor.

Orientador: Prof. Dr. Maurício Magalhães Mata (FURG)

Co-orientador: Prof. Dr. Doron Nof (FSU)

RIO GRANDE

Agosto 2009



ATA ESPECIAL P/DEFESA DE TESE DE DOUTORADO 003/09

Às nove horas do dia dezessete de agosto do ano dois mil e nove, no Anfiteatro da Escola de Engenharia – Pav. K, anexo 02 – Campus Carreiros/FURG reuniu-se a Comissão Examinadora da Tese de Doutorado de **JOSÉ LUIZ LIMA DE AZEVEDO**, composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. Mauricio Magalhães Mata Orientador/Presidente – IO/FURG, Prof. Dr. Ivan Dias Soares - IO/FURG, Prof. Dr. Carlos Alberto Eiras Garcia – IO/FURG, Prof^a. Dr^a. Elisa Helena Leão Fernandes – IO/FURG e Prof. Dr. Ilson Carlos Almeida da Silveira, IO-USP. Título da tese: “**UM ESTUDO ANALÍTICO DO ENCONTRO DE VÓRTICES ANTICICLÔNICOS COM A BORDA CONTINENTAL**”. Dando início à reunião, o Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Oceanografia Física, Química e Geológica e Presidente da sessão, Prof. Dr. Mauricio Magalhães Mata, agradeceu a presença de todos e fez a apresentação da Comissão Examinadora. Logo após esclareceu que o candidato terá um tempo de 45 a 60 min. para explanação do tema, e cada membro da Comissão, um máximo de 30 min. para perguntas. A seguir, passou a palavra ao candidato que apresentou o tema e respondeu às perguntas formuladas. Após ampla explanação a Comissão reuniu-se na Sala da Secretaria da Coordenação do Programa, para discussão do conceito a ser atribuído ao candidato. Durante este encontro ficou estabelecido o que segue: As sugestões de todos os membros da Banca Examinadora, que seguem em pareceres em anexo, foram aceitas pelo orientador/candidato para incorporação na versão final a qual deverá ser encaminhada a Secretaria do Programa até o dia 16/09/2009. Foi atribuído a candidata o conceito de **APROVADO**. Nada mais havendo a tratar, lavro a presente ata que após lida e aprovado, será assinada pela Comissão Examinadora, pelo candidato e pelo Coordenador do Programa.

Prof. Dr. Ivan Dias Soares

Prof. Dr. Mauricio Magalhães Mata
Presidente

Prof. Dr. Carlos Alberto Eiras Garcia

Prof. Dr. Elisa Helena Leão Fernandes

Prof. Dr. Ilson Carlos Almeida da Silveira

Acad. José Luiz Lima de Azevedo

AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi realizado graças ao apoio e incentivo de órgãos nacionais e internacionais e de inúmeras pessoas. Peço antecipadamente desculpas se me esqueço de citar algumas. Gostaria de agradecer muito:

- ❖ a Deus e a toda espiritualidade, que me deram forças para chegar até o fim desta jornada (e que trabalhão tiveram.....).
- ❖ a minha esposa Jaqueline por seu amor, fé, apoio, carinho, amizade e companheirismo e por ter suportado todo este período de curso, onde muitas vezes não devo ter sido uma boa companhia.
- ❖ a minha família (Jaque, Júlia e Virgínia) que, com certeza, torceu muito por mim e que também soube me tolerar neste período, esperando pacientemente o término da minha jornada. Desculpem meu mau humor muitas vezes
- ❖ ao meu orientador Maurício Mata por sua orientação, amizade e por ter me convencido a encarar um ano de doutorado na *Florida State University*. Maurício, tu estava certo, valeu muito a pena Teu acompanhamento e dedicação, nos períodos finais de meu trabalho, foram muito importantes para o sucesso atingido. Valeu, grande amigo
- ❖ ao meu co-orientador Doron Nof por suas aulas, orientação, amizade e, principalmente, por sua infinita paciência com meu inglês. Amigo Doron, aprendi demais de DFG e de vórtices com você, tenha certeza disso
- ❖ aos amigo(a)s Roberta e Deloir (pais da Lalá), Laci, Roberto, Jeanete, Gerson, Flávia, Amauri, Sônia e Franco pela amizade e também pelo apoio que deram a minha família enquanto eu estava no exterior.
- ❖ aos meus “irmãos” Isaac e Ana que me acolheram em Tallahassee (FL) como se já me conhecessem há muito tempo. Sem vocês minha estada nos Estados Unidos teria sido bem mais árdua. Valeu amigos
- ❖ a Donna Samaan, secretária da Oceanografia Física da FSU, que sempre me ajudava em meus momentos difíceis e a Tania Schaad, coordenadora do *International Center* (IC) da FSU, por sua valiosa ajuda, principalmente quando de minha chegada nos EUA.

- ❖ aos colegas Steve Van Gorder e Volodymyr Zharkov da FSU pela ajuda na implementação e nas dúvidas que tive com o modelo numérico Bleck & Boudra.
- ❖ aos colegas de Tallahassee: Marcus (grande colega de futebol), Gisele, Cleyde, Joel, Moisés, Maristela, Lúcia e Lauber, pelos momentos compartilhados.
- ❖ ao meu grande colega e amigo José Francisco por sua amizade e pelas inúmeras discussões que tivemos envolvendo aspectos pertinentes ao meu trabalho. Por favor, desculpe a minha teimosia algumas vezes
- ❖ ao professor Ivan Soares, por sua ajuda e por ter me despertado o entusiasmo pela dinâmica de fluidos geofísicos, o qual me acompanhou até o final deste trabalho e me motivou a realizar um trabalho teórico em DFG. Valeu, Ivan
- ❖ as professoras Elisa e Sílvia Botelho por terem me acolhido quando de meu primeiro contato na Oceanografia Física. É fundamental se encontrar um rosto amigo e receptivo quando se está chegando em terreno desconhecido. Valeu, meninas
- ❖ aos professores Osmar e Garcia pelo apoio e disponibilidade. O que interessa muitas vezes não é a ajuda em si, mas a disponibilidade em querer ajudar. Obrigado pelas cartas náuticas, livros, apostilas, explicações, pelas JGR, etc, etc
- ❖ aos membros de minha banca (Ilson, Ivan, Garcia, Elisa e Maurício) pelos comentários construtivos que, certamente, aprimoraram muito o meu trabalho. Um agradecimento especial para o professor Ilson Silveira (IO-USP), para Ronald Buss (INPE, Santa Maria), que já havia aceitado o convite para participar de minha banca mas não pode comparecer de última hora por problemas particulares, e a professora Elisa, que topou substituir o colega Ronald dias antes da defesa.
- ❖ a Alberto Piola, Ricardo Matano, J. Whitehead, Dudley Chelton (suas animações com dados de SSH foram fundamentais para o meu trabalho), Deirdre Byrne (ótimas indicações de artigos para ler), Anne-Marie Treguier, Will de Ruijter e Thierry Penduff (enviou-me ótimos bancos de dados) pela ajuda, documentos e sugestões apresentadas que, certamente, enriqueceram muito este trabalho.
- ❖ aos colegas Leopoldo (paizão novo que boas discussões tivemos), André Vitta (baita curso de Matlab aquele), Fernando Hirata (nunca me deixou ganhar um jogo de tênis), Giovanni, Igor e Rafael (o trio da sala lá do fundo, sempre dispostos a compartilhar de uma boa discussão... desculpem por tê-los incomodado tanto), Fernando (que foi para

a Petrobrás), Leticia, Matias, Rafael Guedes, Pedro, Eduardo (estes três últimos lá do LOG), Willian, Débora, Rodrigo, Priscila, Elisângela, Paula, Fujita (valeu o suporte de informática), Ana Cristina, Suzana, Ana, Marquinho, Hugo, Curiri, Pará, Marcelo, Amá-bile, Ricardo e tantos outros... valeu pela convivência e pela amizade de vocês.

- ❖ as amigas Magda e Ângela pelo apoio espiritual que nunca me deixaram faltar. Este trio (com mais minha esposa) foi demais. Muito obrigado mesmo... Descansem um pouco agora, vocês merecem ...
- ❖ aos amigos Bulla e Rosa, que embarcaram neste doutorado comigo. Parabéns por terem enfrentado o desafio até o fim apesar das grandes dificuldades iniciais que sei que vocês tiveram.
- ❖ ao grande Clabisnei, sempre solícito quando precisei da COMCUR.
- ❖ ao casal Cláudio e Anúbia, pela simpatia e dedicação com que tocam o bar mais antigo e animado da FURG, aonde muitas vezes me dirigia para desafogar a cabeça do meu trabalho de tese. Que este bar e vocês tenham vida longa
- ❖ à Direção do CTI pelo apoio e aos meus colegas que me substituíram em minhas aulas enquanto estive em afastamento.
- ❖ ao pessoal da SUPPOSG, sempre prestativos e solícitos, principalmente naqueles dias que antecederam minha ida para os Estados Unidos. Valeu mesmo
- ❖ a CAPES, pelo apoio financeiro (processo BEX 2097.07-9) que possibilitou a realização de meu doutorado sanduíche na *Florida State University*, e, não menos importante, pelo sempre atencioso atendimento de seu pessoal.
- ❖ ao *Inter-American Institute for Global Change Research*/(IAI) CRN 2076, o qual tem apoio da *US National Science Foundation* (NSF/grant/GRO-0452325), pelo auxílio prestado para a realização deste trabalho.
- ❖ ao povo americano, que me acolheu sem discriminação alguma, e que permitiu que eu conhecesse e compartilhasse um pouco de sua história, de seus costumes e de seu *way of life*. Foi uma experiência inesquecível
- ❖ ao Governo Federal, muitas vezes tão criticado, mas que me proporcionou todas as condições (afastamento de minhas atividades, bolsa de estudos, suporte da FURG, CAPES, etc, etc) para que esta minha jornada se concluísse com êxito.

Dedicatória

Dedico este trabalho a ti, minha esposa Jaqueline. Foram tantas as vezes que tu evitaste minhas quedas, e outras tantas que tu me levantaste do chão, que nem dá para contar... Por isso que sempre te disse que este doutorado foi sendo escrito a quatro mãos. Sem teu amor e apoio não teria chegado ao fim desta caminhada.... Te amo muito!

Dedicatória

Dedico também este trabalho a minha avó Cenira (in memoriam) e a meus tios Jara e Américo. Vocês sempre me disseram que com Educação a chance da pessoa ir mais longe é muito maior. Vocês estavam realmente certíssimos... Obrigado pelo exemplo.

ÍNDICE

	Página
Resumo	xii
Abstract	xiv
Lista de Figuras	xvi
Lista de Tabelas	xxxii
Simbologia	xxxiii
Lista de Abreviaturas	xl
Capítulo 1	
<u>Introdução</u>	01
1.1. Vórtices	01
1.2. A Interação dos Vórtices com as Bordas Continentais	11
1.3. A Proposta deste Trabalho	13
Capítulo 2	
<u>A Interação de Vórtices com Bordas Continentais</u>	19
Capítulo 3	
<u>Equações Governantes</u>	30
3.1. As Equações Integradas do Momentum	30
3.1.1. Domínio de Estudo com uma Parede Meridional	31
3.1.2. Domínio de Estudo com uma Parede Inclinada	36
3.2. A Equação Integrada da Massa	41
3.3. Sumário das Equações	42
3.4. Vórtices e suas Principais Equações no Plano-f	44

3.4.1. Vórtices com Vorticidade Potencial Nula	46
--	----

Capítulo 4

O Encontro de um "Trem" de Vórtices do Tipo Lente com a Borda Continental **47**

4.1. A Corrente de Dupla Frente	47
4.2. O Encontro Corrente-Parede	49
4.3. Domínio de Estudo com uma Parede Meridional	51
4.3.1. A Equação Integrada do Momentum Meridional	52
4.3.2. Análise de Escala	55
4.3.3. O Momentum da Corrente Meridional	62
4.3.4. O Transporte da Corrente Meridional	67
4.3.5. O Momentum do Vórtice Estacionário	67
4.3.6. O Raio do Vórtice Estacionário	70
4.4. Domínio de Estudo com uma Parede Inclinada	71
4.4.1. Análise de Escala	74
4.4.2. A Equação Integrada do Momentum Paralelo à Parede	77
4.4.3. O Raio do Vórtice Estacionário	79
4.5. Sumário	80

Capítulo 5

Estudo Comparativo entre os Modelos Analítico e Numérico **82**

5.1. O Modelo Bleck & Boudra	82
5.2. O Canhão de Vórtices	84
5.3. Estudo Comparativo entre os Modelos Analítico e Numérico	88
Experimento 1	89
Experimento 2	96

Experimento 3	104
5.4. Sumário	111
Capítulo 6	
O Encontro de um "Trem" de Vórtices do Tipo Não-Lente com a Borda Continental	114
6.1. Domínio de Estudo com uma Parede Meridional	114
6.1.1. A Equação Integrada do Momentum Meridional	115
6.1.2. Análise de Escala	118
6.1.3. O Momentum da Corrente Meridional para Norte	122
6.1.4. O Transporte da Corrente Meridional para Norte	128
6.1.5. O Momentum da Corrente Meridional para Sul	129
6.1.6. O Transporte da Corrente Meridional para Sul	134
6.1.7. O Ponto de Divisão	134
6.1.8. O Momentum do Vórtice Estacionário	135
6.1.9. O Raio do Vórtice Estacionário	138
6.2. Domínio de Estudo com uma Parede Inclinada	140
6.2.1. A Equação Integrada do Momentum Paralelo à Parede	141
6.2.2. Análise de Escala	143
6.2.3. O Raio do Vórtice Estacionário	145
6.3. Sumário	145
Capítulo 7	
Discussão e Conclusão	148
7.1. Discussão	148
7.2. Conclusão e Considerações Finais	157
7.3. Sugestão de Trabalhos Futuros	163

Bibliografia **164**

Anexo A

Equações em Coordenadas Cilíndricas **172**

A.1. Novos Operadores 172

A.2. A Relação entre as Velocidades 174

A.3. As Equações do Momentum e da Continuidade 175

A.4. A Equação da Conservação da Vorticidade Potencial 178

A.5. A Função Transporte 179

Anexo B

Função Corrente e Transporte **181**

RESUMO

O encontro de vórtices com bordas continentais é inevitável devido a dois processos aos quais estas feições estão sujeitas. O primeiro, a variação do parâmetro de Coriolis com a latitude, ocasiona o movimento dos vórtices para oeste. Um segundo processo, devido à advecção por correntes ou à propulsão induzida por vórtices próximos, também arremessa estas feições contra as fronteiras continentais.

Este trabalho investiga analiticamente a interação entre um "trem" de vórtices anticiclônicos não-lineares e a borda continental no plano- β . Considera-se um "trem" de vórtices uma seqüência de feições idênticas e sucessivas, igualmente espaçadas, com movimento puramente zonal dirigido para oeste. O estudo é realizado no hemisfério sul e está focado na investigação do processo de interação vórtice-parede. O "trem" de vórtices é modelado analiticamente com a utilização de uma corrente zonal de dupla frente com mesma vorticidade e transporte. A borda continental é considerada como uma parede vertical e possui duas configurações, ou seja, uma meridional e outra inclinada com relação ao norte geográfico. Os vórtices, por sua vez, são investigados no formato lente, onde a feição possui profundidade nula em suas bordas, e no formato não-lente, onde esta profundidade é não nula. A combinação destes fatores resulta em quatro diferentes cenários. Os cenários com feições do tipo lente foram também modelados numericamente em um modelo isopicnal Bleck & Boudra de 1,5 camadas.

Este estudo analítico mostrou que feições do tipo lente ao colidirem com a borda continental geram um fluxo paralelo à parede no sentido do Equador, o que sinaliza para um enfraquecimento do transporte à montante da respectiva corrente de contorno oeste. Um vórtice estacionário é gerado na região de contato vórtices-parede cujo tamanho depende do transporte do "trem" de vórtices e do ângulo de inclinação da borda continental com relação ao norte geográfico. Estas conclusões foram comprovadas pela modelagem numérica. A interação de vórtices do tipo não-lente com a borda continental resulta em dois vazamentos paralelos à parede, um no sentido do Equador e outro para o pólo. A intensidade deste último transporte depende da profundidade na borda do vórtice. Estes transportes sinalizam para um enfraquecimento da corrente de con-

torno ao norte da zona de interação e um fortalecimento ao sul. Novamente um vórtice estacionário é gerado na região de contato cujo tamanho depende dos mesmos fatores anteriores e ainda da profundidade na borda do vórtice. As equações desenvolvidas para vórtices do tipo não-lente reproduzem o cenário com vórtices do tipo lente quando as características destes últimos são impostas. Dependendo do tamanho dos vórtices estes podem ser diretamente advectados pela corrente de contorno aumentando o seu transporte na direção do pólo independentemente do formato da feição. A aplicação desta modelagem analítica no encontro dos vórtices provenientes da Corrente das Agulhas com a borda continental brasileira é discutida ao final do trabalho. Próximos à borda, estes vórtices são caracterizados a partir de imagens de SSH. O trabalho conclui que o transporte da Corrente do Brasil no sentido do pólo é fortalecido por este encontro, o que pode ter repercussões na Zona da Confluência Brasil-Malvinas.

ABSTRACT

The encounter between eddies and continental borders is inevitable due to two processes in which these features are subject. The first, the variation of the Coriolis parameter with latitude, causes the movement of the eddies towards the west. A second process, due to advection by currents or the propulsion induced by others eddies, also throws these features towards the continental borders.

This work investigates analytically the interaction between a "train" of nonlinear anticyclonic eddies and continental borders in a β -plane. A train of eddies is a sequence of identical and successive eddies, with zonal movement towards the west. The study is carried out in the southern hemisphere and it is limited to research the eddy-wall interaction process. The "train" of eddies is modeled analytically using a double front current with the same vorticity and transport. The continental border is considered as a vertical wall and it has two shapes, i.e., a meridional wall and a wall tilted with respect to the north. In this study, two types of eddies are modeled: (i) the lens-like eddies, features which their depth vanish in the borders and, conversely, (ii) the non lens-like eddies. The combination of these factors results in four different scenarios. The scenarios with lens-like eddies were also modeled numerically in an isopycnal Bleck & Boudra model with 1.5 layers.

This study has concluded that the interaction between lens-like eddies and a wall generates a flow parallel to the wall towards the Equator, which indicates a weakening in the upstream transport of the associated western boundary current. A stationary eddy is generated in the region of contact eddies-wall and its size depends on the transport of the "train" of eddies and the meridional tilt-angle of the wall. These conclusions were supported by numerical modeling. The interaction of non lens-like eddies with the continental border results in two leaks parallel to the wall, one towards the Equator and one for the pole. The intensity of the latter depends on the depth at the edge of the eddies. These transports indicate a weakening of the upstream transport of the western boundary current and a strengthening of its downstream transport. Again a stationary eddy is generated in the contact region. Its size depends on the same factors cited

above and on the depth at the edge of the eddy. The equations derived for non lens-like eddies reproduce the scenario with lens-like eddies, when the characteristics of the latter are imposed. Depending on the size of the eddies they can be directly advected by the current increasing its transport regardless of their shapes. The application of this analytical modeling in the encounter between Agulhas Rings and the Brazilian continental border is discussed at the end of this work. Close to the Brazilian continental border, the eddies are marginally characterized from SSH images. This work concludes that the downstream transport of the Brazil Current is strengthened by this encounter, which may have consequences in the Brazil-Malvinas Confluence Zone.

LISTA DE FIGURAS

	Página
Figura 1.1	02
<p>Seção transversal de um vórtice de núcleo quente (anticiclônico). Os círculos indicam o sentido de movimento da água interna do vórtice. Figura retirada de Nof (2000).</p>	
Figura 1.2	03
<p>Perfis de vórtices de núcleo quente (ab) e frio (cd), para o hemisfério norte, conforme Flierl (1979). A camada hachurada corresponde à camada inferior suposta em repouso. A linha tracejada indica o centro da feição e o sentido da corrente interna também é mostrado. Nesta figura a variável r_0 assinala a distância entre o centro do vórtice e a interface entre as camadas na superfície.</p>	
Figura 1.3	04
<p>Principais variáveis associadas com um vórtice (ver texto) em um modelo de duas camadas.</p>	
Figura 1.4	05
<p>Estrutura horizontal de vórtices no plano-f e no plano-β. As cotas verticais iguais assinaladas na feição da esquerda, a qual foi gerada analiticamente, mostram que no plano-f o vórtice é totalmente simétrico com relação ao eixo x. Na situação do plano-β (direita) as duas cotas verticais iguais mostram que o hemisfério norte da feição possui uma maior extensão latitudinal do que o seu hemisfério sul, ou seja, o vórtice é assimétrico com relação ao eixo x. A figura da direita é oriunda do modelo Bleck & Boudra introduzido no Capítulo 5 deste trabalho. As duas feições possuem simetria com relação ao eixo y. Nos experimentos apresentados no Capítulo 5, em que o parâmetro β é aumentado para acelerar as modelagens numéricas, esta diferença entre os dois hemisférios do vórtice se acentua mais ainda.</p>	
Figura 1.5	06
<p>Um vórtice anticiclônico no hemisfério sul e as forças de Coriolis FC que atuam em cada hemisfério da feição, as quais estão representadas por setas largas. Em seu</p>	

lado norte, onde o parâmetro de Coriolis f é menor (lado mais próximo do Equador), a força integrada amarela dirigida para sul, que reúne a soma de todas as forças individuais em vermelho que agem nas partículas de fluido quando elas passam por este lado do vórtice, é menor do que a correspondente força integrada verde dirigida para norte, que surge no hemisfério sul da feição resultante da soma de todas as forças azuis que agem nas partículas de fluido quando elas passam no lado sul do vórtice. Como resultado final uma força de Coriolis líquida, dirigida para norte, devida unicamente ao efeito β no interior da feição, é estabelecida dentro do vórtice.

Figura 1.6

07

Forças meridionais (sem proporção entre si) que agem sobre vórtices no Hemisfério Sul. O vórtice (a) da figura é uma “lente”, ou seja, uma feição com profundidade nula em seu contorno na superfície do oceano. Os vórtices (b) e (c), por sua vez, possuem esta profundidade não nula. As feições transladam para oeste, autopropulsionadas pelo efeito β , com uma velocidade c . As forças de Coriolis que agem nas partículas de fluido no hemisfério sul do vórtice são maiores que aquelas que agem no seu hemisfério norte, logo, há uma força líquida chamada força β que é dirigida para norte no caso anticiclônico e para sul na situação ciclônica. A força ambiente é sempre dirigida para a linha do Equador (para norte), pois a profundidade ao sul da feição é maior que aquela ao norte para vórtices que não são do tipo lente. Esta força inexistente na situação das lentes. A força de Coriolis atua sempre à esquerda (para sul) do movimento translacional do vórtice (para oeste).

Figura 1.7

08

(a) Características globais da propagação para oeste de vórtices ciclônicos e anticiclônicos com tempo de vida igual ou superior a 12 semanas. A figura esquerda superior (inferior) mostra que os vórtices ciclônicos (anticiclônicos) sofrem, em sua maioria, desvios no sentido dos pólos (do Equador). A figura superior (inferior) da direita mostra que 58% (60%) dos vórtices ciclônicos (anticiclônicos) estudados possuíam este desvio. (b) Número de vórtices analisados. Figuras retiradas do trabalho de Chelton et al. (2007).

Figura 1.8

09

(Superior) Diâmetro médio e (Inferior) amplitude média dos vórtices, analisados para uma grade com 1° de resolução. Cinco importantes zonas do oceano global de origem de vórtices destacam-se claramente na figura inferior (ver texto). Figuras retiradas do trabalho de Chelton et al. (2007).

Figura 1.9 **12**

Corte lateral do contato de um vórtice com a quebra de plataforma, onde a inclinação do talude é muito superior àquela da interface da feição, o que faz que a consideração da borda continental como uma parede vertical seja apropriada como uma primeira aproximação. Figura adaptada de Nof (1999).

Figura 1.10 **13**

Trajatórias de vórtices individuais a partir de dados Geosat, conforme estudos de Byrne et al. (1995) e Byrne (2000). A batimetria está contornada com intervalos de 1000 metros. As trajetórias estão suavizadas a partir da estimativa do centro de cada feição. O espaçamento temporal entre duas posições sucessivas dos vórtices, nas trajetórias estudadas, é de 34 dias. O encontro dos vórtices com a borda continental brasileira parece ser iminente. A figura foi retirada de Byrne (2000).

Figura 1.11 **15**

Localização da isóbata de 200 m ao longo da costa brasileira representando a quebra de plataforma. Duas configurações de paredes verticais, representadas por retângulos, com as quais os vórtices (círculos cinza) que se propagam para oeste (seta branca) podem interagir, são apresentadas. A parede vertical verde é meridional enquanto a amarela é latitudinalmente inclinada. A consideração da quebra de plataforma como uma parede vertical é explicada no texto. A quebra de plataforma é ligeiramente inclinada onde foi exemplificada uma parede considerada meridional.

Figura 2.1 **21**

Interação entre um vórtice barotrópico e uma parede no hemisfério norte. Como resultado deste processo o vórtice perde parte de sua massa interior na forma de um vazamento ao longo da parede. Para feições anticiclônicas (painel superior da figura) o vazamento ocorre à direita do ponto da zona de contato (olhando-se da parede para o oceano aberto) e para vórtices ciclônicos, situação mostrada no painel inferior da figura, este vazamento ocorre para o lado esquerdo. Os resultados são simétricos. Esta figura foi retirada de Nof (1988a).

Figura 2.2 **22**

Esquema do vórtice anticiclônico estudado por Nof (1988b) no hemisfério norte. A área delimitada por BCC'DEFGGB foi alvo da aplicação das equações integradas do momentum e da continuidade. O vazamento ocorre pelo segmento ED.

Figura 2.3 **23**

Resultado esperado para o encontro entre um vórtice ciclônico e uma parede no hemisfério norte, conforme mostra o estudo de Nof (1988ab). O vórtice foi dividido em duas regiões. A região periférica da feição que “penetra” a parede é chamada de “*annulus*”, enquanto a região que compreende a porção que não “penetra” a parede é chamada de “*interior*”. Este resultado não se verifica, contudo, para aquelas situações em que o contato é realizado de forma violenta, conforme cita o texto. A figura foi adaptada de Shi & Nof (1993).

Figura 2.4 **24**

Divisão de um vórtice ciclônico em duas feições de vorticidades opostas após o seu violento contato com uma parede no hemisfério norte. A figura foi adaptada de Shi & Nof (1993).

Figura 2.5 **25**

Efeitos que atuam no contato de um vórtice com uma parede. A simbologia de cores das setas está indicada na legenda no canto inferior esquerdo da figura.

Figura 2.6 **28**

Esquema do vórtice anticiclônico utilizado no estudo de Nof (1999), o qual foi desenvolvido no hemisfério norte. As integrações realizadas neste estudo são feitas sobre a seção tracejada ABCDEFGA. O parâmetro ϵ , definido por $\epsilon = \beta R_{De}/f$, mede a variação do parâmetro de Coriolis ao longo da feição. O vórtice perde líquido no sentido da linha do Equador após o seu encontro com a parede. Simultaneamente, sua velocidade de deriva zonal vai sendo drasticamente reduzida.

Figura 3.1 **31**

O domínio de estudo D_o tomado como exemplo mostra uma corrente zonal (seta laranja), que entra em contato com uma parede meridional (retângulo cinza), e duas outras correntes (setas amarelas) nos contornos norte e sul, os quais possuem coordenadas meridionais y_N e y_S , respectivamente. O contorno do domínio é designado pela variável \emptyset . Os números de 1 a 4 estão associados com os quatro contornos individuais, os quais são delimitados por duas letras, cada um. O sistema retangular de referência é mostrado com setas escuras. As setas amarelas contemplam as duas possibilidades de sentido para as correntes meridionais.

Figura 3.2 **35**

Forças que atuam zonalmente no cenário em que o domínio de estudo possui uma parede meridional e uma corrente zonal penetra em D_o pelo seu contorno leste (ver figura 3.1). A seta amarela indica a reação da parede e corresponde à integral da direita da equação (3.14). A seta verde assinala a força aplicada em D_o pela corrente zonal que nele penetra, o que corresponde à integral da esquerda da expressão (3.14).

Figura 3.3 **35**

Forças que atuam meridionalmente no cenário em que o domínio de estudo possui uma parede meridional e uma corrente zonal penetra em D_o pelo seu contorno leste (ver figura 3.1). Independentemente do sentido das correntes meridionais (saindo ou entrando no domínio) a força que elas aplicam no domínio é sempre exercida para dentro deste. A seta verde (amarela) da figura indica a força aplicada em D_o pela corrente meridional que flui para sul (norte) e que corresponde à primeira (segunda) integral da equação (3.15). A seta vermelha, correspondente à terceira integral da expressão (3.15), indica uma força devida ao efeito β em alguma feição interna do domínio de estudo (a origem e o sentido desta força será detalhada no Capítulo 4).

Figura 3.4 **36**

(Esquerda) Cenário com uma borda continental (parede) inclinada de um ângulo θ medido em sentido horário com relação a uma linha imaginária vertical (meridiano). Dois sistemas de coordenadas retangulares xy e XY estão presentes. (Direita) Decomposição da velocidade da corrente zonal em componentes paralelas aos eixos do sistema de coordenadas xy .

Figura 3.5 **39**

Ampliação do contorno leste do domínio de estudo D_o . A linha sólida azul indica a largura meridional da corrente zonal que é representada pela seta amarela, enquanto a linha sólida vermelha corresponde à extensão desta corrente que está atravessando o contorno leste (inclinado) do domínio de estudo, ou seja, o lado BC (leste) da figura 3.4, representado pela linha vermelha tracejada. Os quadrados azul e vermelho indicam os pontos em que a profundidade da corrente é máxima.

Figura 3.6

41

Forças que atuam paralelas à parede no cenário em que o domínio de estudo possui uma borda continental (parede) inclinada e uma corrente zonal penetra em D_0 pelo seu contorno leste (ver figura 3.4). A seta laranja mostra a componente paralela à parede da força (seta cinza) exercida em D_0 pela corrente zonal, que corresponde a primeira integral da equação (3.29). A seta verde (amarela) da figura indica a força aplicada em D_0 pela corrente paralela à costa que flui para sudoeste (nordeste) e que corresponde à segunda (terceira) integral da expressão (3.29). A seta vermelha, correspondente à quarta integral da equação (3.29), indica a componente paralela à parede de uma força (seta azul) devida ao efeito β em alguma feição interna do domínio de estudo (cujas origem e sentido será detalhada no Capítulo 4). As forças brancas fazem parte do equilíbrio de forças perpendicular à parede, onde a reação da parede não é mostrada na figura.

Figura 3.7

42

Transportes no domínio de estudo em que o cenário possui uma parede meridional e onde uma corrente zonal penetra em D_0 pelo seu contorno leste. A seta vermelha é o transporte da corrente zonal, correspondente à primeira integral da equação (3.32). A seta verde (amarela) da figura indica o transporte da corrente meridional que circula no contorno sul (norte) e que corresponde à segunda (terceira) integral da expressão (3.32).

Figura 3.8

42

Transportes no domínio de estudo em que o cenário possui uma parede inclinada e uma corrente zonal penetra em D_0 pelo seu contorno leste. A seta vermelha é o transporte da corrente zonal, correspondente à primeira integral da equação (3.33), a qual está escrita no sistema de coordenadas XY (ver seção 3.1.2). A seta verde (amarela) da figura indica o transporte da corrente paralela à parede que circula no contorno sul (norte) do domínio de estudo e que corresponde à segunda (terceira) integral da expressão (3.33).

Figura 4.1

48

Perfil de profundidade da corrente zonal de dupla frente utilizada neste trabalho, que representará o “trem” de vórtices anticiclônicos, vista da borda continental em direção ao oceano aberto. As coordenadas y_5 e y_8 indicam a posição das frentes da corrente e o sentido do fluxo é indicado pelos círculos.

Figura 4.2 **52**

Cenário resultante do encontro da corrente de dupla frente com uma parede meridional. A profundidade nas duas frentes da corrente é nula, pois ela está representando um “trem” de vórtices do tipo lente. A função corrente é assumida ser nula na frente sul da corrente zonal. A figura mostra uma corrente meridional dirigida para norte e um vórtice estacionário oriundos do encontro da corrente com a parede. O texto detalhará este encontro assim como justificará a necessidade do surgimento do vórtice para que o equilíbrio meridional de forças se estabeleça.

Figura 4.3 **55**

Detalhamento do perfil de profundidade da corrente zonal de dupla frente. O transporte entre os pontos 7 e 8 é nulo. O transporte líquido da corrente ocorre na área hachurada entre os pontos 5 e 7. A largura desta seção é d_{57} e sua profundidade é h_7 . A função corrente ψ_8 foi suposta nula na frente sul da corrente zonal. Como esta corrente representa um “trem” de lentes a profundidade em suas duas frentes (h_5 e h_8) é nula.

Figura 4.4 **63**

Destaque do encontro da corrente de dupla frente com uma parede meridional. As setas largas azuis indicam as forças meridionais que agem no domínio de estudo. A área vermelha entre os pontos 5 e 7 indica a região de transporte líquido da corrente zonal o qual equivale ao transporte da corrente meridional delimitado entre os pontos 1 e 2 (também em vermelho).

Figura 4.5 **69**

Esboço do perfil norte-sul do vórtice estacionário gerado no domínio de estudo. A área hachurada indica a seção por onde circula a corrente circunvizinha ao vórtice.

Figura 4.6 **73**

Domínio de estudo com uma parede inclinada de um ângulo θ medido em sentido horário a partir da direção norte. Destaca-se neste cenário a presença de dois sistemas de coordenadas, sendo um deles alinhado com os eixos cardeais e o outro tem os seus eixos alinhados com as fronteiras norte e leste do domínio de estudo. O sistema XY corresponde ao sistema utilizado na seção anterior.

Figura 4.7**75**

Forças atuantes no domínio de estudo no cenário de uma borda continental inclinada de um ângulo θ , medido a partir do norte em sentido horário. As setas azuis correspondem às forças que participam da equação integrada do momentum paralela à parede enquanto as setas amarela e verde correspondem àquelas que atuam na equação integrada do momentum perpendicular à parede (não utilizada neste trabalho). A sigla “cn” indica a corrente meridional para nordeste e “cz” a corrente zonal, ambos fluxos indicados por setas pretas, assim como a força β oriunda do vórtice estacionário.

Figura 4.8**76**

Forças que atuam paralelas à parede durante o encontro entre a corrente de dupla frente e uma parede inclinada de um ângulo θ com relação à vertical, onde $[\sin\theta] \sim O(\varepsilon)$. Neste cenário as três forças envolvidas (ver texto) no balanço paralelo à parede atuam simultaneamente, pois todos os termos da equação integrada do momentum paralela à parede possuem mesma ordem, dada por $O(\varepsilon g' H_{cz}^2 R_D)$. Um vórtice estacionário (círculo tracejado) é necessário no domínio de estudo, pois somente a componente paralela à parede (seta vermelha) da sua força interna devida ao efeito β (seta azul) pode equilibrar a soma da componente (seta laranja) da força da corrente zonal (seta cinza) com a força da corrente para nordeste (seta amarela), aplicadas em D_o .

Figura 4.9**77**

Forças que atuam paralelas à parede durante o encontro entre a corrente de dupla frente e uma parede inclinada de um ângulo θ com relação à vertical, e onde $\sin\theta \gg \varepsilon$. Neste cenário somente duas forças atuam simultaneamente no balanço paralelo à parede, pois a ordem da força exercida pela corrente para nordeste é muito pequena e pode ser negligenciada (ver texto). Um vórtice estacionário (círculo tracejado) é necessário no domínio de estudo, pois somente a componente paralela à parede (seta vermelha) da sua força interna devida ao efeito β (seta azul) pode equilibrar a componente (seta laranja) da força aplicada em D_o pela corrente zonal (seta cinza).

Figura 5.1**85**

Cenário do canhão de vórtices proposto em Pichevin & Nof (1996) e adaptado para o hemisfério sul. A linha preta mais grossa representa o cabo geográfico. Uma corren-

te zonal penetra no domínio pelo lado norte do cabo, dirigida para oeste, o contorna, voltando no sentido leste pela parte sul do cabo. A corrente é representada pelas setas pretas e as setas amarelas representam as forças aplicadas no domínio pela corrente zonal. Figura adaptada de Pichevin & Nof (1996).

Figura 5.2

86

Profundidade da camada superior, durante a geração de um vórtice pelo canhão de vórtices, para um período de simulação no MBB de um ano, no plano-f. A linha grossa preta da figura representa o cabo geográfico. O intervalo entre as linhas de contorno é de 300 m. Parâmetros utilizados: $\nu = 400 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $f_0 = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $g' = 0,01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ e $\Delta t = 864 \text{ s}$.

Figura 5.3

87

Profundidade da camada superior, durante a geração de um vórtice pelo canhão de vórtices, para um período de simulação no MBB de seis anos, no plano-f. A linha grossa preta da figura representa o cabo geográfico. O intervalo entre as linhas de contorno é de 300 m. A ausência de um mecanismo de remoção faz com que o vórtice cresça continuamente na ponta do cabo. Parâmetros utilizados: $\nu = 400 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $f_0 = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $g' = 0,01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ e $\Delta t = 864 \text{ s}$.

Figura 5.4

88

Bifurcação dos vetores de velocidade que compõem o fluxo que está sendo reconectado à parede sul do cabo após ter contornado a sua ponta. A linha grossa na parte superior da figura representa o cabo geográfico. Parâmetros: $\nu = 400 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $f_0 = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $g' = 0,01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ e $\Delta t = 864 \text{ s}$.

Figura 5.5

90

Profundidade (m) da camada superior no experimento 1 para um período de simulação no MBB de 148 dias, no plano- β . Percebe-se um vórtice V_1 já liberado pelo cabo geográfico (representado pela linha preta grossa) e uma segunda feição V_2 em processo de formação. O intervalo entre os contornos de profundidade é de 300 m. Parâmetros: $\nu = 400 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $f_0 = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\beta = 8 \cdot 10^{-11} \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, $g' = 0,01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ e $\Delta t = 288 \text{ s}$.

Figura 5.6

91

Isóbatas (com intervalo de 300 m) do experimento 1 para um tempo de simulação no MBB de 224 dias onde se destaca o encontro do vórtice V_1 e a borda continental. A

segunda feição V_2 está por ser liberada do cabo (o que ocorrerá no dia 228) e uma terceira feição V_3 está começando a ser criada. Observa-se o vazamento de fluido do interior do vórtice V_1 no sentido da linha do Equador conforme previsto na modelagem analítica. A linha preta grossa representa o cabo geográfico. Três linhas pretas tracejadas A, B e C são mostradas na figura, as quais demarcam as seções da camada superior onde serão calculados os transportes pelo MBB. Parâmetros: $\nu = 400 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$, $f_0 = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\beta = 8.10^{-11} \text{ m}^{-1}.\text{s}^{-1}$, $g' = 0,01 \text{ m}.\text{s}^{-2}$ e $\Delta t = 288 \text{ s}$.

Figura 5.7

92

Transporte (S_v) da corrente zonal que entra no domínio de estudo pela seção B (reta vermelha) do domínio de estudo e transporte da corrente zonal que sai do domínio pelo lado sul do cabo geográfico (curva azul), cujo valor é obtido pela diferença dos transportes entre as seções C e B, conforme seções definidas na figura 5.6. A reta preta mostra a média deste transporte para os últimos dois anos de modelagem. O transporte pela seção B é constante. Parâmetros: $\nu = 400 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$, $f_0 = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\beta = 8.10^{-11} \text{ m}^{-1}.\text{s}^{-1}$, $g' = 0,01 \text{ m}.\text{s}^{-2}$ e $\Delta t = 288 \text{ s}$.

Figura 5.8

93

Transporte da corrente meridional (curva azul) que passa pela seção A da figura 5.6 e média deste transporte nos últimos dois anos de modelagem numérica (reta preta). Parâmetros utilizados: $\nu = 400 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$, $f_0 = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\beta = 8.10^{-11} \text{ m}^{-1}.\text{s}^{-1}$, $g' = 0,01 \text{ m}.\text{s}^{-2}$ e $\Delta t = 288 \text{ s}$.

Figura 5.9

94

Variação da energia do domínio de estudo no período de simulação de quatro anos no MBB. A energia predominante no domínio é a energia potencial (em azul). Pode-se perceber que as energias cinética e potencial se estabilizaram nos últimos dois anos da simulação. Parâmetros utilizados: $\nu = 400 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$, $f_0 = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\beta = 8.10^{-11} \text{ m}^{-1}.\text{s}^{-1}$, $g' = 0,01 \text{ m}.\text{s}^{-2}$ e $\Delta t = 288 \text{ s}$.

Figura 5.10

95

Visualização do vórtice estacionário a partir do perfil médio de profundidade da camada superior (m), calculado desde o dia 220, em que o primeiro vórtice entrou em contato com a borda continental, até o final dos quatro anos de simulação no MBB. As linhas de contorno possuem um intervalo de 300 m. A linha preta grossa repre-

senta o cabo geográfico. Parâmetros: $\nu = 400 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $f_0 = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\beta = 8 \cdot 10^{-11} \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, $g' = 0,01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ e $\Delta t = 288 \text{ s}$.

Figura 5.11

97

Estimativa da velocidade de translação do vórtice V_1 a partir da superposição de saídas do MBB para os dias 136 e 196. O número entre parênteses assinala o dia da posição do vórtice. As duas posições sucessivas do vórtice V_1 permitem que a distância percorrida pela feição seja avaliada o que propicia a estimativa de sua velocidade de translação. A linha azul grossa representa o cabo geográfico. Parâmetros utilizados: $\nu = 400 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $f_0 = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\beta = 8 \cdot 10^{-11} \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, $g' = 0,01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ e $\Delta t = 288 \text{ s}$.

Figura 5.12

99

Profundidade (m) da camada superior para um tempo de simulação de 224 dias, mostrando o encontro do vórtice V_1 com a borda continental inclinada. A segunda feição V_2 está por ser liberada, o que ocorrerá no dia 228. O intervalo entre as linhas de contorno é de 300 m. Observa-se o vazamento de fluido do interior do vórtice no sentido da linha do Equador. A linha preta grossa representa o cabo geográfico e a reta inclinada representa a parede.

Figura 5.13

99

Módulo dos transportes em várias seções do domínio. A reta vermelha mostra o transporte da corrente zonal que entra no domínio pelo lado norte do cabo, a curva azul assinala o transporte da corrente zonal que deixa o domínio pelo lado sul do cabo, enquanto a reta preta cheia indica o seu valor médio nos últimos 2 anos. A curva magenta indica o transporte do “trem” de vórtices pelo “corredor” imaginário situado na trilha destas feições e a reta preta tracejada indica o seu valor médio nos últimos dois anos. Parâmetros utilizados: $\nu = 400 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $f_0 = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\beta = 8 \cdot 10^{-11} \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, $g' = 0,01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ e $\Delta t = 288 \text{ s}$.

Figura 5.14

100

Transporte da corrente paralela à parede, dirigida para nordeste, que passa pela seção A da figura 5.8 (curva azul) e média deste transporte nos últimos dois anos de modelagem numérica (reta preta). Os picos de transporte assinalam o “vazamento” dos vórtices que transitaram pela bacia do domínio de estudo após o seu encontro com a borda continental. Parâmetros utilizados: $\nu = 400 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $f_0 = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\beta = 8 \cdot 10^{-11} \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, $g' = 0,01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ e $\Delta t = 288 \text{ s}$.

Figura 5.15 **101**

Vórtice estacionário criado junto à borda continental no experimento 2. A figura mostra o perfil médio de profundidade (m) da camada superior obtida desde o dia 220, em que o primeiro vórtice entrou em contato com a parede, até o final dos quatro anos de simulação no MBB. As linhas de contorno possuem intervalo de 300 m. A linha preta grossa representa o cabo geográfico e a reta inclinada representa a parede. Parâmetros utilizados: $\nu = 400 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $f_0 = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\beta = 8 \cdot 10^{-11} \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, $g' = 0,01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ e $\Delta t = 288 \text{ s}$.

Figura 5.16 **102**

Velocidades do experimento 2 na região do vórtice estacionário da figura 5.15. O diâmetro da feição foi estimado em 260 km conforme delimita o círculo vermelho tracejado. A linha preta assinala um trecho da borda continental. Parâmetros utilizados: $\nu = 400 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $f_0 = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\beta = 8 \cdot 10^{-11} \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, $g' = 0,01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ e $\Delta t = 288 \text{ s}$.

Figura 5.17 **103**

Evolução do contato do vórtice com a borda continental inclinada no experimento 2. Os círculos vermelhos indicam o centro da feição a intervalos de 24 dias. A primeira interação do vórtice com a parede ocorre numa parte do seu hemisfério norte. A inércia de movimento da feição faz com que o seu hemisfério sul, que ainda não contactou com a parede, continue em movimento (desacelerado), o que ocasiona o deslocamento do seu centro para sul. Este fato não ocorreu com uma borda continental meridional, pois o vórtice colide com a parede praticamente no ponto mais a oeste da linha que divide seus dois hemisférios.

Figura 5.18 **103**

Varição da energia do domínio de estudo no experimento 2 no período de simulação de 4 anos no MBB. A energia predominante no domínio é a energia potencial (em azul). As energias se estabilizaram nos últimos dois anos da simulação. Parâmetros utilizados: $\nu = 400 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $f_0 = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\beta = 8 \cdot 10^{-11} \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, $g' = 0,01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ e $\Delta t = 288 \text{ s}$.

Figura 5.19 **106**

Profundidade (m) da camada superior no tempo zero do experimento 3 onde o primeiro vórtice gerado analiticamente, e já estabilizado no plano- β , é clonado no

domínio de estudo. O intervalo das linhas de contorno é de 75 m. O transporte das seções A e B é calculado pelo MBB. A cada intervalo de aproximadamente um ano um novo vórtice será clonado no domínio. Parâmetros utilizados: $\nu = 200 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$, $f_0 = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\beta = 4.10^{-11} \text{ m}^{-1}.\text{s}^{-1}$, $g' = 0,01 \text{ m}.\text{s}^{-2}$ e $\Delta t = 72 \text{ s}$.

Figura 5.20 **106**

Profundidade (m) da camada superior no dia 156 em que o primeiro vórtice entra em contato com a borda continental meridional. O intervalo das linhas de contorno é de 75 m. Parâmetros utilizados: $\nu = 200 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$, $f_0 = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\beta = 4.10^{-11} \text{ m}^{-1}.\text{s}^{-1}$, $g' = 0,01 \text{ m}.\text{s}^{-2}$ e $\Delta t = 72 \text{ s}$.

Figura 5.21 **107**

Profundidade (m) da camada superior no instante em que o segundo vórtice é clonado no domínio de estudo. O intervalo das linhas de contorno é de 75 m. Percebe-se que o decaimento do primeiro vórtice encontra-se em estágio avançado. Este vórtice irá imediatamente interagir com o novo vórtice clonado no domínio. Parâmetros utilizados: $\nu = 200 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$, $f_0 = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\beta = 4.10^{-11} \text{ m}^{-1}.\text{s}^{-1}$, $g' = 0,01 \text{ m}.\text{s}^{-2}$ e $\Delta t = 72 \text{ s}$.

Figura 5.22 **107**

Transporte zonal calculado na seção B da figura 5.19. Este transporte (curva vermelha) é realizado pelos vórtices clonados no domínio de estudo e que passam por esta seção em seu movimento dirigido para oeste. A linha preta mostra o transporte médio nesta seção para os últimos três anos de modelagem o qual vale 0,54 Sv. Parâmetros utilizados: $\nu = 200 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$, $f_0 = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\beta = 4.10^{-11} \text{ m}^{-1}.\text{s}^{-1}$, $g' = 0,01 \text{ m}.\text{s}^{-2}$ e $\Delta t = 72 \text{ s}$.

Figura 5.23 **108**

Transporte da corrente meridional na seção A da figura 5.19 (curva em azul). A linha preta assinala o transporte médio de 0,53 Sv nesta seção para os últimos três anos da modelagem. Parâmetros utilizados: $\nu = 200 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$, $f_0 = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\beta = 4.10^{-11} \text{ m}^{-1}.\text{s}^{-1}$, $g' = 0,01 \text{ m}.\text{s}^{-2}$ e $\Delta t = 72 \text{ s}$.

Figura 5.24 **109**

Variação da energia no experimento 3 para um período de simulação de quatro anos no MBB. Parâmetros utilizados: $\nu = 200 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$, $f_0 = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\beta = 4.10^{-11} \text{ m}^{-1}.\text{s}^{-1}$, $g' = 0,01 \text{ m}.\text{s}^{-2}$ e $\Delta t = 72 \text{ s}$.

Figura 5.25 **110**

Vórtice estacionário visualizado a partir do perfil médio de profundidade (m) da camada superior, obtido do dia em que o primeiro vórtice entrou em contato com a borda continental até o final dos quatro anos de modelagem. O intervalo das linhas de contorno é de 75 m. Parâmetros: $\nu = 200 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$, $f_0 = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\beta = 4.10^{-11} \text{ m}^{-1}.\text{s}^{-1}$, $g' = 0,01 \text{ m}.\text{s}^{-2}$ e $\Delta t = 72 \text{ s}$.

Figura 6.1 **115**

Cenário resultante do encontro da corrente zonal com profundidade não nula em suas bordas com uma borda continental meridional. A corrente está representando um “trem” de vórtices formado por feições que não são do tipo lente. A figura mostra duas corrente meridionais dirigidas para norte e para sul e um vórtice estacionário oriundos do encontro da corrente com a parede. O texto detalhará este encontro assim como justificará a necessidade do surgimento do vórtice para o equilíbrio das forças meridionais.

Figura 6.2 **118**

Detalhamento do perfil de profundidade da corrente zonal com profundidade não nula em suas bordas. A área hachurada corresponde ao espaço onde ocorre o transporte líquido da corrente.

Figura 6.3 **123**

Destaque do encontro da corrente de dupla frente com a borda continental meridional. As setas largas azuis indicam as forças meridionais que agem no domínio de estudo. A área vermelha entre os pontos 5 e 7 indica a região do transporte líquido da corrente zonal o qual equivale à soma dos transportes das duas correntes meridionais, delimitados pelos pontos 1 e 2 na corrente para norte e pelos pontos 9 e 10 na corrente para sul, que também estão em vermelho.

Figura 6.4 **136**

Esboço do perfil leste-oeste do vórtice estacionário gerado no domínio de estudo.

Figura 6.5 142

Cenário resultante do encontro da corrente zonal com profundidade não nula em suas bordas com uma parede inclinada. A figura mostra o surgimento de dois fluxos paralelos à parede e um vórtice estacionário. O texto detalha este cenário.

Figura 6.6 144

Forças que atuam paralelas à parede durante o encontro entre a corrente de dupla frente, com profundidade não nula em suas bordas, e uma borda continental inclinada de um ângulo θ com relação à vertical, onde $[\text{sen}\theta] \sim O(\epsilon)$. Neste cenário as quatro forças envolvidas (ver texto) no balanço paralelo à parede atuam simultaneamente, pois todos os termos da equação integrada do momentum paralela à parede possuem mesma ordem, dada por $O(\epsilon g' H_{cz}^2 R_D)$. Um vórtice estacionário (círculo tracejado) é necessário no domínio de estudo, pois somente a componente paralela à parede (seta vermelha) da sua força interna devida ao efeito β (seta azul) pode equilibrar a diferença entre a soma da componente (seta laranja) da força da corrente zonal (seta cinza) e da força da corrente para nordeste (seta amarela) com relação à força da corrente para sudoeste (seta verde), todas aplicadas em D_o .

Figura 7.1 152

Corredor imaginário (entre as linhas tracejadas vermelhas da figura) por onde a grande maioria dos vórtices provenientes da Corrente das Agulhas (representados pelos círculos azuis) se aproxima da borda continental brasileira e da Corrente do Brasil (ver texto). A faixa de latitude deste corredor, obtida a partir da análise de 14 anos de dados de SSH disponibilizados pelo Dr. Chelton (OSU), vai de 24° S até 32° S. A figura foi adaptada de Mata & Garcia (1996).

Figura 7.2 160

Variação do percentual do transporte total ao longo da borda continental que se dirige no sentido da Linha do Equador em função das profundidades máxima da corrente zonal e da espessura da camada superior. Percebe-se que este percentual diminui à medida que a espessura da camada superior aumenta. A inclinação da parede, em relação ao norte, é nula.

Figura 7.3 161

Variação do raio do vórtice estacionário em função das profundidades associadas com a corrente zonal para vórtices do tipo não-lente.

Figura 7.4 **162**

Percentual de cada momentum ao longo da borda continental em função de pequenos ângulos de inclinação. Novamente o momentum do vórtice estacionário é necessário praticamente somente para o equilíbrio da componente do momentum da corrente zonal paralela à borda. A figura foi obtida a partir de vórtices do tipo não-lente. Para lentes a situação é praticamente a mesma, porém, neste caso a curva azul inexistente.

Figura A.1 **172**

Sistemas de coordenadas retangular e cilíndrico. Os eixos do sistema retangular são (X,Y,Z) enquanto os do sistema cilíndrico sistema são (R,θ,Z) , sendo que o eixo em θ é considerado positivo no sentido anti-horário. As coordenadas de um ponto P qualquer são (x,y,z) no sistema retangular, assinaladas em azul na figura, e (r,θ,z) no cilíndrico, assinaladas em vermelho. As relações entre as coordenadas dos dois sistemas são mostradas no texto.

Figura A.2 **174**

Velocidade \mathbf{V} (vetor preto) de um corpo A e suas componentes (u,v) no sistema retangular, indicadas por vetores azuis, e (u_r,v_θ) no sistema cilíndrico, indicadas por vetores vermelhos. A figura possibilita a obtenção da relação entre as velocidades descritas nos dois sistemas de coordenadas. O quadro no canto inferior esquerdo da figura mostra as componentes numeradas dos vetores u e v nas direções radial (1 e 3) e tangencial (2 e 4).

Figura B.1 **181**

Transportes no domínio de estudo. O transporte líquido da corrente zonal (cz) entre os pontos 5 e 6 (seta vermelha) corresponde ao transporte da corrente meridional para norte (cn) entre os pontos 1 e 2 (seta amarela). O transporte líquido da corrente zonal entre os pontos 6 e 7 (seta laranja) corresponde ao transporte da corrente meridional para sul (cs) entre os pontos 9 e 10 (seta verde). O sinal matemático envolvido na correspondência entre estes transportes deve ser avaliado com cuidado (ver texto deste anexo). O transporte da corrente zonal entre os pontos 7 e 8 é nulo.

LISTA DE TABELAS

	Página
Tabela 5.1	111
Comparativo entre as modelagens analíticas e numéricas realizadas	

SIMBOLOGIA

VARIÁVEIS E UNIDADES

c	velocidade translacional do vórtice
C	constante matemática
cm	centímetros
d_{57}	largura da zona de transporte líquido da corrente zonal de dupla frente
E	leste (do inglês <i>east</i>)
ε	parâmetro adimensional
f	parâmetro de Coriolis a uma dada latitude
f_N	parâmetro de Coriolis no contorno norte do domínio de estudo
f_S	parâmetro de Coriolis no contorno sul do domínio de estudo
f_0	parâmetro de Coriolis na latitude central y_0
$f_{1,2,3\dots}$	parâmetro de Coriolis no ponto 1,2,3....
FC	força de Coriolis
FC_N	força de Coriolis integrada no hemisfério norte do vórtice
FC_S	força de Coriolis integrada no hemisfério sul do vórtice
g'	gravidade reduzida
h	profundidade da camada superior em função de (x,y)
h^*	profundidade da camada superior em função de (X,Y)
H	profundidade utilizada no cálculo da vorticidade potencial
h_B	profundidade na borda do vórtice tipo não-lente
h_{cn}	profundidade da corrente paralela à parede que flui no sentido da linha do Equador (para norte ou nordeste)

h_{cs}	profundidade da corrente paralela à parede que flui no sentido do Pólo Sul (para sul ou sudoeste)
h_{cz}	profundidade da corrente zonal de dupla frente no sistema (x,y)
h_{cz}^*	profundidade da corrente zonal de dupla frente no sistema (X,Y)
H_{cz}	profundidade máxima da corrente zonal de dupla frente
h_i	profundidade do vórtice estacionário na interface com a corrente "líquida"
h_{inf}	profundidade da camada inferior
h_{sup}	profundidade da camada superior
h_v	profundidade do vórtice
H_v	profundidade máxima do vórtice
h_∞	profundidade do domínio de estudo quando $x \rightarrow \infty$
H_0	profundidade de referência para o cálculo da vorticidade potencial
$h_{1,2,3,\dots}$	profundidade no ponto 1,2,3....
$h_{5\infty}$	profundidade no ponto 5 do domínio de estudo quando $x \rightarrow \infty$
$h_{8\infty}$	profundidade no ponto 8 do domínio de estudo quando $x \rightarrow \infty$
J	joule
kg	quilograma
km	quilômetro
l	comprimento do lado do domínio de estudo D_0
L	largura da corrente zonal do canhão de vórtices
L_{cn}	largura da corrente paralela à parede que flui no sentido da linha do Equador (para norte ou nordeste)
L_{cs}	largura da corrente paralela à parede que flui no sentido do Pólo Sul (para sul ou sudoeste)
L_{cz}	largura da corrente zonal de dupla frente
m	metros

M	potencial de Montgomery
M_{ocn}	momentum da corrente paralela à parede que flui no sentido da linha do Equador (para norte ou nordeste)
M_{ocs}	momentum da corrente paralela à parede que flui no sentido do Pólo Sul (para sul ou sudoeste)
M_{ocz}	componente paralela à parede do momentum da corrente zonal de dupla frente
M_{ov}	momentum do vórtice estacionário
η	deslocamento vertical da superfície do vórtice
N	norte
NE	nordeste (do inglês <i>northeast</i>)
p	pressão
PW	petawatt (10^{15} watts)
r	coordenada radial do sistema de coordenadas cilíndricas
R	distância do centro do vórtice estacionário até a interface com a corrente "líquida" e raio final do vórtice estacionário
R_D	raio de Rossby da corrente de dupla frente
R_{De}	raio de Rossby do vórtice
r_o	raio do vórtice
R_o	número de Rossby
r_v	raio do vórtice a partir do qual a vorticidade inverte o seu sinal
s	segundos
S	sul (quando associada com uma latitude)
S	área horizontal do domínio de estudo (quando associada a uma integral)
S_{cn}	área horizontal da corrente paralela à parede que flui no sentido da linha do Equador (para norte ou nordeste)

S_{cs}	área horizontal da corrente paralela à parede que flui no sentido do Pólo Sul (para sul ou sudoeste)
S_{cz}	área horizontal da corrente zonal de dupla frente
S_v	Sverdrup ($10^6 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$)
S_v	área horizontal do vórtice estacionário
SW	sudoeste (do inglês <i>southwest</i>)
t	tempo
T_{cn}	transporte da corrente paralela à parede que flui no sentido da linha do Equador (para norte ou nordeste)
T_{cs}	transporte da corrente paralela à parede que flui no sentido do Pólo Sul (para sul ou sudoeste)
T_{cz}	transporte da corrente zonal de dupla frente
u	velocidade horizontal na direção zonal no sistema (x,y)
u^*	componente perpendicular à parede de U^*
U^*	velocidade horizontal da corrente de dupla frente na direção zonal no sistema (X,Y)
u_{cz}	velocidade zonal da corrente de dupla frente
u_p	velocidade zonal, rente à parede do cabo, da corrente imposta no lado norte do cabo geográfico quando da utilização do canhão de vórtices.
u_r	velocidade radial no sistema de coordenadas cilíndrico
$u_{1,2,3...}$	velocidade zonal no ponto 1,2,3....
v	velocidade horizontal na direção meridional no sistema (x,y)
v^*	componente paralela à parede de U^*
V	módulo da velocidade horizontal
v_{cn}	velocidade meridional da corrente paralela à parede que flui no sentido da linha do Equador (para norte ou nordeste)

V_{cs}	velocidade meridional da corrente paralela à parede que flui no sentido do Pólo Sul (para sul ou sudoeste)
$V_{1,2,3...}$	velocidade meridional no ponto 1,2,3....
v_{θ}	velocidade tangencial no sistema de coordenadas cilíndrico e velocidade orbital do vórtice
W	oeste (do inglês <i>west</i>)
x	coordenada horizontal (zonal) do sistema de coordenadas retangular medida de forma perpendicular à parede
X	coordenada horizontal (zonal) do sistema de coordenadas retangular medida ao longo do eixo oeste-leste
x_e	coordenada horizontal (zonal) do contorno leste do domínio de estudo na situação de uma parede inclinada
y	coordenada horizontal (meridional) do sistema de coordenadas retangular medida de forma paralela à parede
Y	coordenada horizontal (meridional) do sistema de coordenadas retangular medida ao longo do eixo sul-norte
$y_{A,B...}$	coordenada meridional do ponto A,B... no sistema (x,y)
$Y_{A,B...}$	coordenada meridional do ponto A,B... no sistema (X,Y)
y_M	coordenada meridional do ponto em que a corrente zonal de dupla frente possui máxima profundidade (medida no eixo y)
y_N	coordenada meridional no limite norte do domínio de estudo
y_S	coordenada meridional no limite sul do domínio de estudo
y_o	coordenada meridional central do plano- β no sistema (x,y)
Y_o	coordenada meridional central do plano- β no sistema (X,Y)
$y_{1,2,3...}$	coordenada meridional do ponto 1,2,3... no sistema (x,y)
$Y_{1,2,3...}$	coordenada meridional do ponto 1,2,3... no sistema (X,Y)

y_6	coordenada do ponto de divisão da zona de transporte líquido da corrente zonal de dupla frente
z	coordenada vertical dos sistemas de coordenadas retangular e cilíndrico

VARIÁVEIS GREGAS E OUTRAS

α	volume específico
β	variação latitudinal do parâmetro de Coriolis
Δh	variação de profundidade
ΔM	variação do potencial de Montgomery
Δt	passo de tempo na modelagem numérica
Δx	dimensão horizontal zonal do elemento de grade no modelo Bleck & Boudra
Δy	dimensão horizontal meridional do elemento de grade no modelo Bleck & Boudra
$\Delta \alpha$	variação do volume específico
$\Delta \rho$	variação de densidade
θ	ângulo ou deslocamento angular no sistema de coordenadas cilíndricas
ν	viscosidade lateral
ξ	vorticidade potencial
ρ	densidade
\emptyset	contorno do domínio de estudo
ψ	função (corrente) transporte
ψ_{cz}	função transporte da corrente zonal de dupla frente
ψ_v	função transporte do vórtice
ψ_{vc}	função transporte do vórtice estacionário na interface desta feição com a corrente “líquida”

ψ_∞	função transporte para $x \rightarrow \infty$
$\psi_{1,2,3\dots}$	função transporte no ponto 1,2,3...
ξ	deslocamento vertical da interface entre as camadas (no modelo de duas camadas)

VETORES

i	vetor unitário na direção zonal no sistema de coordenadas retangular
j	vetor unitário na direção meridional no sistema de coordenadas retangular
r	vetor unitário na direção radial no sistema de coordenadas cilíndrico
t	vetor unitário na direção tangencial no sistema de coordenadas cilíndrico
V	vetor velocidade no elemento de grade do modelo Bleck & Boudra
V_m	vetor velocidade média no elemento de grade do modelo Bleck & Boudra

OPERADORES MATEMÁTICOS

Δ	variação
∂	operador derivada parcial
∇	operador gradiente

LISTA DE ABREVIATURAS

CCO	corrente de contorno oeste
cn	corrente paralela à parede que flui no sentido da linha do Equador (para norte ou nordeste)
cs	corrente paralela à parede que flui no sentido do Pólo Sul (para sul ou sudoeste)
cz	corrente zonal de dupla frente
CZDF	corrente zonal de dupla frente
D _o	domínio de estudo
EC	energia cinética
EP	energia potencial
EPT	energia potencial turbulenta
EXP	experimento
F	função matemática
FCT	transporte do fluxo corrigido (do inglês <i>flux corrected transport</i>)
FSU	<i>Florida State University</i>
FURG	Universidade Federal do Rio Grande
MBB	modelo Bleck & Boudra
OSU	<i>Oregon State University</i>
PI _n	parede inclinada
PM	parede meridional
SSH	elevação da superfície do mar (do inglês <i>sea surface height</i>)
TSM	temperatura superficial do mar
VE	vórtice estacionário

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1. VÓRTICES

Vórtices são feições oceânicas caracterizadas por linhas de corrente fechadas. Um vórtice superposto a um escoamento básico caracteriza um meandro. Quando ocorre o estrangulamento de um destes meandros estes podem ser chamados de anéis ou de vórtices isolados. Generalizando, meandros e anéis são vórtices (Calado, 2006). Vórtices isolados possuem fluxos estruturados associados com uma massa isolada de água com características anômalas (mais especificamente quanto à temperatura e salinidade) daquelas que circundam a feição (Flierl, 1979). A partir deste ponto a utilização do termo vórtice, salvo se ressaltado em contrário, indica um vórtice isolado. Enquanto as ondas são efetivas transportadoras de energia os vórtices transportam energia e massa através dos oceanos (e.g., Olson, 1991). Com maior rigor, os vórtices transportam momentum, calor, massa e características químicas das águas de seu ponto de origem, contribuindo na circulação global, na distribuição de larga escala de massas d'água e na biologia dos oceanos (e.g., Robinson, 1983). A influência dos vórtices na circulação oceânica de larga escala envolve não somente a transferência de energia e de propriedades associadas com o seu local de origem, mas também o seu impacto em processos de mistura (e.g., Olson, 1991).

De modo geral, os vórtices possuem um núcleo (ou interior) que carrega determinadas propriedades (associadas com o seu ponto de origem), o qual é cercado por uma região onde o vórtice produz intensa agitação no ambiente a qual, por sua vez, é rodeada, mais ao longe, por águas mais calmas. Regiões ricas em vórtices possuem a tendência de serem bem misturadas tendo em vista a mistura induzida por estas feições no fluido circunvizinho (e.g., Olson, 1991).

A comparação da temperatura das águas deste núcleo com àquela das águas que circundam o vórtice é utilizada para classificar a feição. Vórtices de núcleo quente (frio) são caracterizados por transportar em seu núcleo águas mais quentes (frias) que aque-

las que se situam fora do vórtice. Vórtices de núcleo frio causam uma ressurgência de águas profundas para a superfície enquanto as feições de núcleo quente causam um rebaixamento da profundidade da termoclina. Em termos biológicos, a ressurgência associada à formação de vórtices de núcleo frio, originados em águas mais frias (e mais produtivas), torna o centro da feição rico em nutrientes, o que favorece um aumento na concentração de organismos fitoplanctônicos (Lentini & Souza, in: Souza, 2005). Vórtices de núcleo quente (frio) são anticiclônicos (cyclônicos). Feições anticiclônicas possuem correntes circulando ao redor do seu centro em sentido horário (anti-horário) no hemisfério norte (sul) enquanto feições ciclônicas possuem estes fluxos em sentidos opostos. A figura 1.1 mostra a seção transversal de um vórtice da Corrente do Golfo de núcleo quente (anticiclônico).

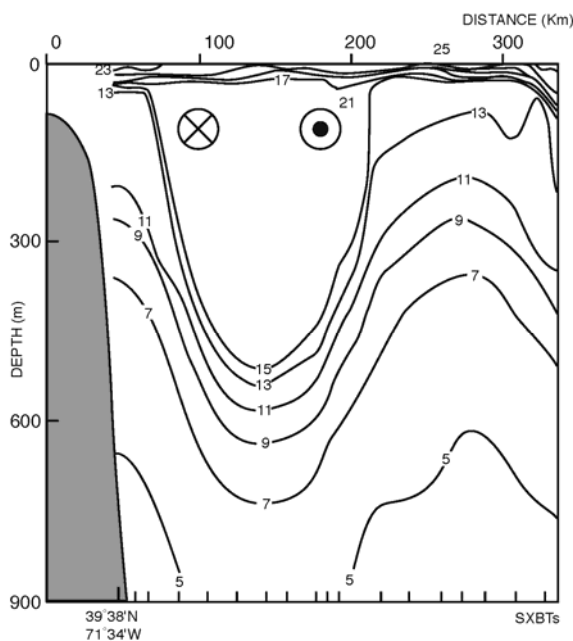
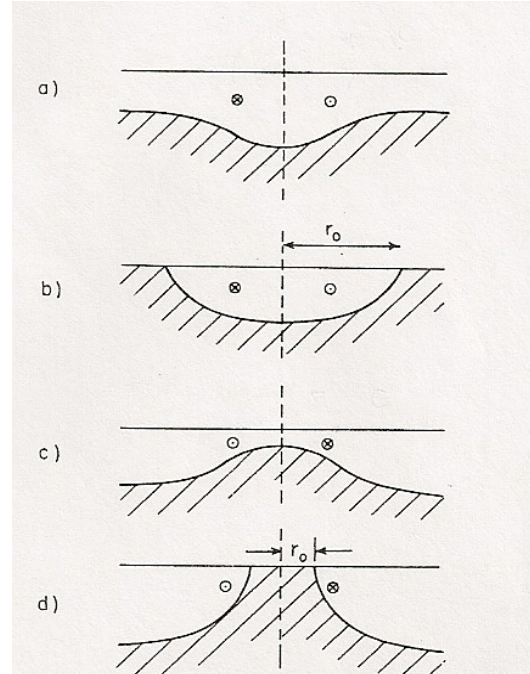


Figura 1.1 - Seção transversal de um vórtice de núcleo quente (anticiclônico). Os círculos indicam o sentido de movimento da água interna do vórtice. Figura retirada de Nof (2000).

Flierl (1979), partindo de um modelo rotacional de duas camadas, onde a camada inferior foi considerada em repouso e a superior com vorticidade potencial constante, após supor movimentos radialmente simétricos e resolver as equações do movimento (invíscidas) e da conservação da vorticidade para a camada superior, obteve os possíveis perfis de vórtices de núcleo quente e frio (para o hemisfério norte) que são mostrados na figura 1.2. Nesta figura o vórtice (b) possui uma característica peculiar, ou seja, a profundidade na periferia do vórtice é zero, o que não ocorre nos outros perfis. Este

tipo de vórtice é chamado de “lente” tendo em vista o perfil da feição. Este termo será muito utilizado no decorrer deste trabalho.

Figura 1.2 - Perfis de vórtices de núcleo quente (ab) e frio (cd), para o hemisfério norte, conforme Flierl (1979). A camada hachurada corresponde à camada inferior suposta em repouso. A linha tracejada indica o centro da feição e o sentido da corrente interna também é mostrado. Nesta figura a variável r_0 assinala a distância entre o centro do vórtice e a interface entre as camadas na superfície.



A figura 1.3 mostra as principais variáveis associadas com um vórtice em um modelo de duas camadas. A altura H é a profundidade circunvizinha ao vórtice com água de mesma densidade (ρ) daquela de seu interior. O deslocamento vertical (η) da superfície do vórtice, medido a partir da cota vertical delimitada por H , é considerado positivo no sentido positivo do eixo z (cuja origem na figura coincide com a interface entre as duas camadas externa ao vórtice). O deslocamento vertical (ξ) da interface entre as duas camadas, é considerado positivo no sentido negativo do eixo z . Caso $H = 0$ o vórtice é do tipo lente e, em caso contrário, será considerado do tipo não-lente.

A figura 1.2 não mostra o deslocamento vertical (η) da superfície do vórtice, a qual apresenta um valor de SSH¹ negativo (positivo) para vórtices ciclônicos (anticiclônicos), o que torna os vórtices passíveis de detecção por altimetria por satélite, conforme pode ser constatado, por exemplo, nos trabalhos de Hwang et al. (2004) e Lentini et al. (2006). Uma outra assinatura do vórtice é a diferença de temperatura entre as águas de seu núcleo e aquela que cerca a feição, o que torna o vórtice passível de detecção

¹ Do original em inglês *sea surface height* ou elevação da superfície do mar.

por satélites que medem a temperatura superficial do mar (TSM). Os trabalhos de [Kampel & Souza \(2005\)](#) e [Souza et al. \(2006\)](#) são bons exemplos desta atividade.

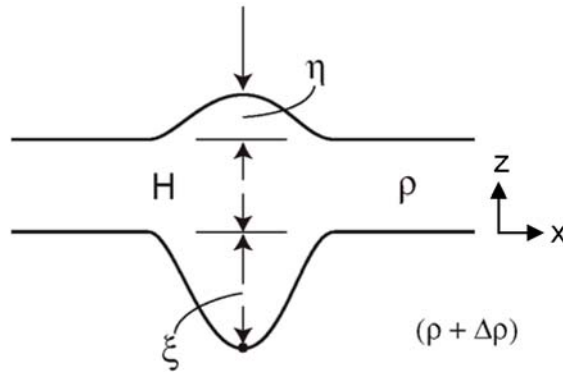


Figura 1.3 - Principais variáveis associadas com um vórtice (ver texto) em um modelo de duas camadas.

Em termos teóricos as linhas de corrente associadas a um vórtice no plano- f são simétricas com relação aos eixos x e y (supostos com origem no centro da feição). As equações que descrevem o movimento dos vórtices apresentam soluções radialmente simétricas nesta situação, o que corresponde a movimentos puramente circulares ([Nof, 1982](#)). Na condição em que se considera a influência do parâmetro β , o qual ocasiona a variação meridional do parâmetro de Coriolis, as linhas de corrente do vórtice não serão mais simétricas com relação ao eixo x em virtude da atuação de β . A feição adquire então o aspecto de círculos ligeiramente distorcidos ([Killworth, 1983](#)). A atuação de forçantes externas sobre o vórtice (correntes, ventos e outras) tem como efeito imediato a distorção da forma quase circular da feição. Conforme citado em [Nof \(1982\)](#) o conhecimento da estrutura do vórtice no plano- f é suficiente para a estimativa da sua velocidade de translação no plano- β . A figura 1.4 mostra vórtices no plano- f e no plano- β , onde as distorções da feição ao longo do eixo norte-sul, neste último plano, tornam-se evidentes.

A complexidade envolvida com a solução das equações que descrevem o vórtice no plano- β fica evidenciada no trabalho de [Killworth \(1983\)](#), o qual apresenta esta solução para a situação de um vórtice com perfil de profundidade quadrático. O autor cita ainda que todos os vórtices devem ter um raio mínimo de $2^{3/2}R_{De}$, onde R_{De} é o raio de deformação do vórtice.

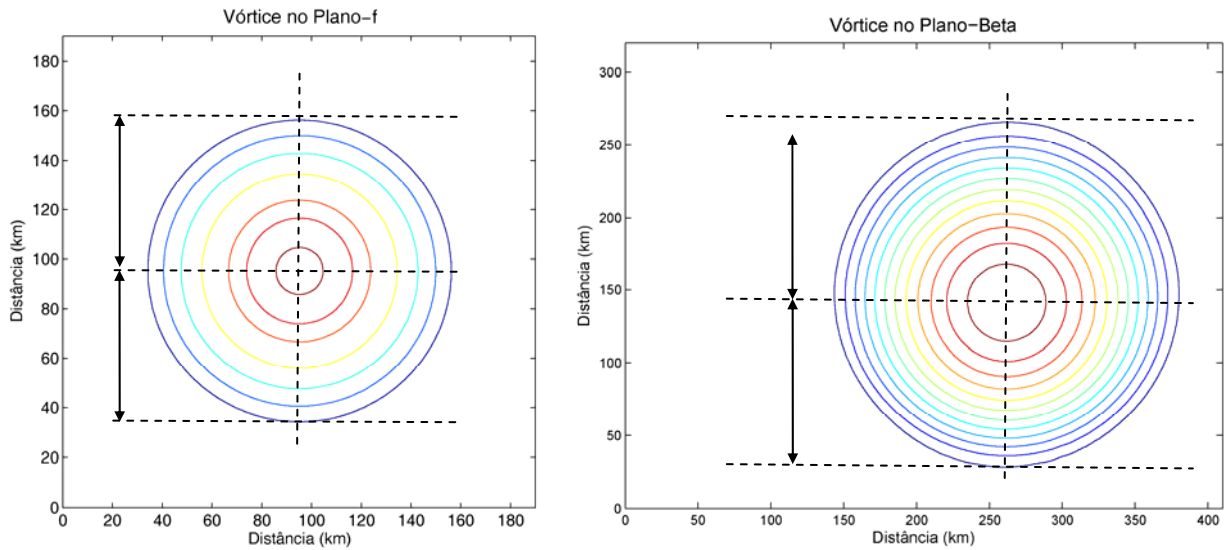


Figura 1.4 - Estrutura horizontal de vórtices no plano-f e no plano- β . As cotas verticais iguais assinaladas na feição da esquerda, a qual foi gerada analiticamente, mostram que no plano-f o vórtice é totalmente simétrico com relação ao eixo x. Na situação do plano- β (direita) as duas cotas verticais iguais mostram que o hemisfério norte da feição possui uma maior extensão latitudinal do que o seu hemisfério sul, ou seja, o vórtice é assimétrico com relação ao eixo x. A figura da direita é oriunda do modelo Bleck & Boudra introduzido no Capítulo 5 deste trabalho. As duas feições possuem simetria com relação ao eixo y. Nos experimentos apresentados no Capítulo 5, em que o parâmetro β é aumentado para acelerar as modelagens numéricas, esta diferença entre os dois hemisférios do vórtice se acentua mais ainda.

No plano- β um vórtice isolado é “autopropulsionado” no sentido oeste² (e.g., Nof, 1982; Killworth, 1983 e Cushman-Roisin et al., 1989). Enquanto o vórtice translada no sentido oeste toda a sua anomalia de massa é carregada junto com ele (Nof, 1982). Caso efeitos advectivos externos não sejam considerados (correntes ou influência de outros vórtices) o movimento do vórtice se deverá unicamente a sua autopropulsão, onde as não-linearidades da feição provocarão um desvio com relação a um movimento puramente zonal. A inclinação do fundo também pode induzir movimento nos vórtices. Neste caso ela atua analogamente ao efeito β sobre a feição (e.g., Nof, 1983; Shi & Nof, 1994 e Nof, 2008), a qual poderá então se mover mesmo estando no plano-f.

O trabalho de Nof (1982) mostra que lentes não lineares, i.e., com número de Rossby (R_0) de $O(1)$, transladam consideravelmente mais rápido do que as lentes lineares (com $R_0 \ll 1$). Esta velocidade de translação é, contudo, consideravelmente menor que a

² É possível que um par de vórtices [modons, ver Stern (1975)] esteja imóvel no plano- β , quando então $\beta \iint \psi dx dy = 0$, em que ψ é a função corrente no interior da feição (Nof, 2008). Vórtices isolados não verificam esta expressão de imobilidade total no plano β , logo, sempre terão movimento.

velocidade de uma simples onda de Rossby (βR_{De}^2), a qual limita a velocidade de translação dos vórtices (Killworth, 1983). Vórtices com baixo número de Rossby, com um perfil de velocidade tangencial que cresce monotonicamente a partir do centro da feição, transladam no sentido oeste com uma velocidade de aproximadamente $\beta R_{De}^2/3$, enquanto vórtices não lineares transladam a $2\beta R_{De}^2/3$ (Nof, 1982).

Na direção meridional um vórtice isolado em movimento está sujeito à ação de três principais forças, que são a força de Coriolis, a força devida ao efeito β e a força devida à ação do ambiente externo ao vórtice sobre ele próprio (Azevedo & Mata, 2009). Estas forças estão em equilíbrio. A força de Coriolis, decorrente da rotação do planeta, age no sentido de desviar o movimento para a direita (esquerda) no hemisfério norte (sul). A força devida ao efeito β deve a sua existência à diferença entre o parâmetro de Coriolis nos dois hemisférios do vórtice, visto que este parâmetro é menor próximo da linha do Equador. Esta diferença acaba por criar uma força líquida no interior da feição, conforme mostra a figura 1.5. A força devida à ação do ambiente externo, a qual não existe na situação de lentes, é sempre dirigida no sentido do Equador, e resulta do fato de que as profundidades da coluna d'água não são as mesmas nos lados norte e sul externos ao vórtice quando este se move para oeste.

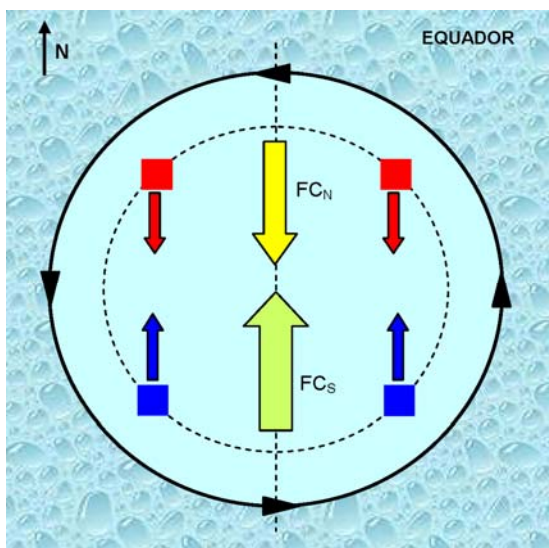


Figura 1.5 – Um vórtice anticiclônico no hemisfério sul e as forças de Coriolis FC que atuam em cada hemisfério da feição, as quais estão representadas por setas largas. Em seu lado norte, onde o parâmetro de Coriolis f é menor (lado mais próximo do Equador), a força integrada amarela dirigida para sul, que reúne a soma de todas as forças individuais em vermelho que agem nas partículas de fluido quando elas passam por este lado do vórtice, é menor do que a correspondente força integrada verde dirigida para norte, que surge no hemisfério sul da feição resultante da soma de todas as forças azuis que agem nas partículas de fluido quando elas passam no lado sul do vórtice. Como resultado final uma força de Coriolis líquida, dirigida para norte, devida unicamente ao efeito β no interior da feição, é estabelecida dentro do vórtice.

A figura 1.6 mostra as forças meridionais (em equilíbrio) que atuam sobre vórtices ciclônicos e anticiclônicos, em movimento de translação para oeste, no hemisfério sul do planeta. A desconsideração da força exercida pelo ambiente (e.g., Nof, 1983 e Nof,

2008) levou Rossby a concluir, erroneamente, que vórtices ciclônicos mover-se-iam para leste no Hemisfério Norte (Nof, 2000).

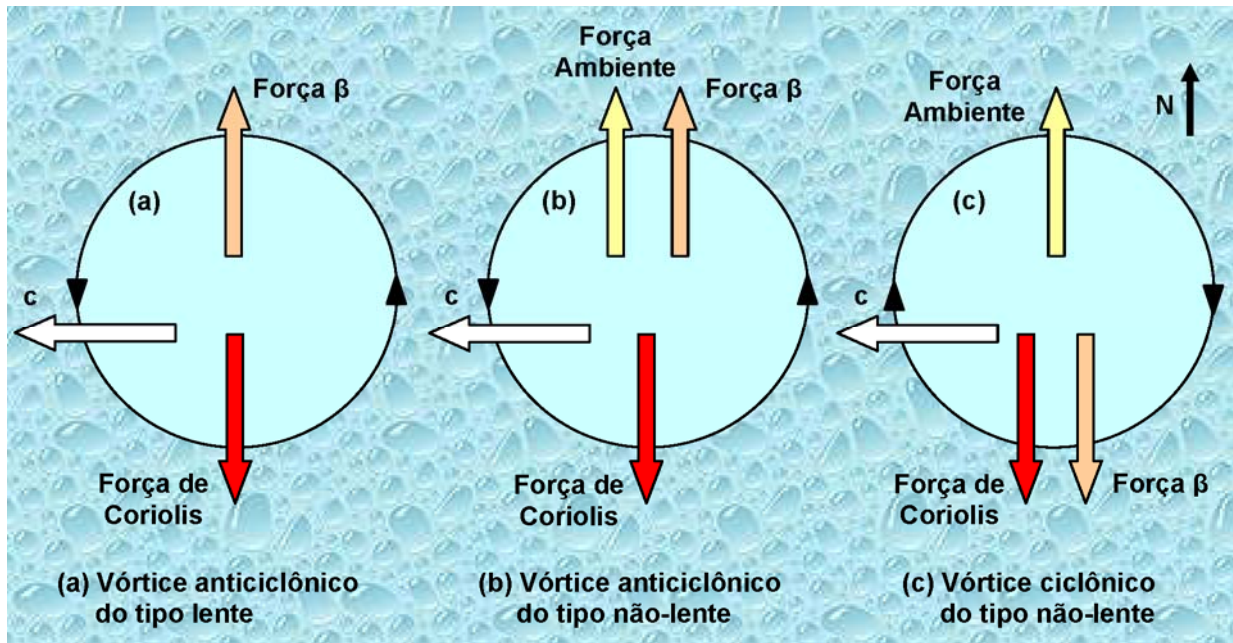


Figura 1.6 – Forças meridionais (sem proporção entre si) que agem sobre vórtices no Hemisfério Sul. O vórtice (a) da figura é uma “lente”, ou seja, uma feição com profundidade nula em seu contorno na superfície do oceano. Os vórtices (b) e (c), por sua vez, possuem esta profundidade não nula, e são feições do tipo não-lente. As feições transladam para oeste, autopropulsionadas pelo efeito β , com uma velocidade c . As forças de Coriolis que agem nas partículas de fluido no hemisfério sul do vórtice são maiores que aquelas que agem no seu hemisfério norte, logo, há uma força líquida chamada força β que é dirigida para norte no caso anticiclônico e para sul na situação ciclônica. A força ambiente é sempre dirigida para a linha do Equador (para norte), pois a profundidade ao sul da feição é maior que aquela ao norte para vórtices que são do tipo não-lente. Esta força inexistente na situação das lentes. A força de Coriolis atua sempre à esquerda (para sul) do movimento translacional do vórtice (para oeste).

O recente trabalho de Chelton et al. (2007) analisa dez anos de dados de SSH, obtidos a partir de satélites, objetivando o estudo da variabilidade de mesoescala (escala de dezenas a centenas de quilômetros e de dezenas a centenas de dias) do oceano global. A alta resolução dos dados analisados permitiu aos autores concluir que mais de 50% da variabilidade observada se deve a vórtices com assinatura na superfície do mar de 5 a 25 cm e diâmetros de 100 a 200 km. Estes vórtices, segundo os autores, propagam-se para oeste com uma velocidade aproximada daquela das ondas de Rossby baroclínicas (1º modo), mostrando, em alguns casos, uma pequena deflexão no sentido dos pólos (Equador) para vórtices ciclônicos (anticiclônicos).

A figura 1.7 mostra as características globais da propagação de vórtices com tempo de vida igual ou superior a 12 semanas conforme o estudo de [Chelton et al. \(2007\)](#). A figura mostra ainda a distribuição do número de vórtices pelo oceano global. A figura 1.8 mostra os diâmetros médios e as amplitudes médias das feições analisadas no estudo para grades com resolução de 1°. Destacam-se claramente na figura cinco zonas do oceano global de origem de vórtices, ou seja, as Correntes do Golfo, Kuroshio, Leste Australiana e das Agulhas e a Zona da Confluência Brasil-Malvinas. Estas duas figuras foram retiradas do trabalho de [Chelton et al. \(2007\)](#). Os autores destacam ainda que a grande maioria dos vórtices analisados é não linear.

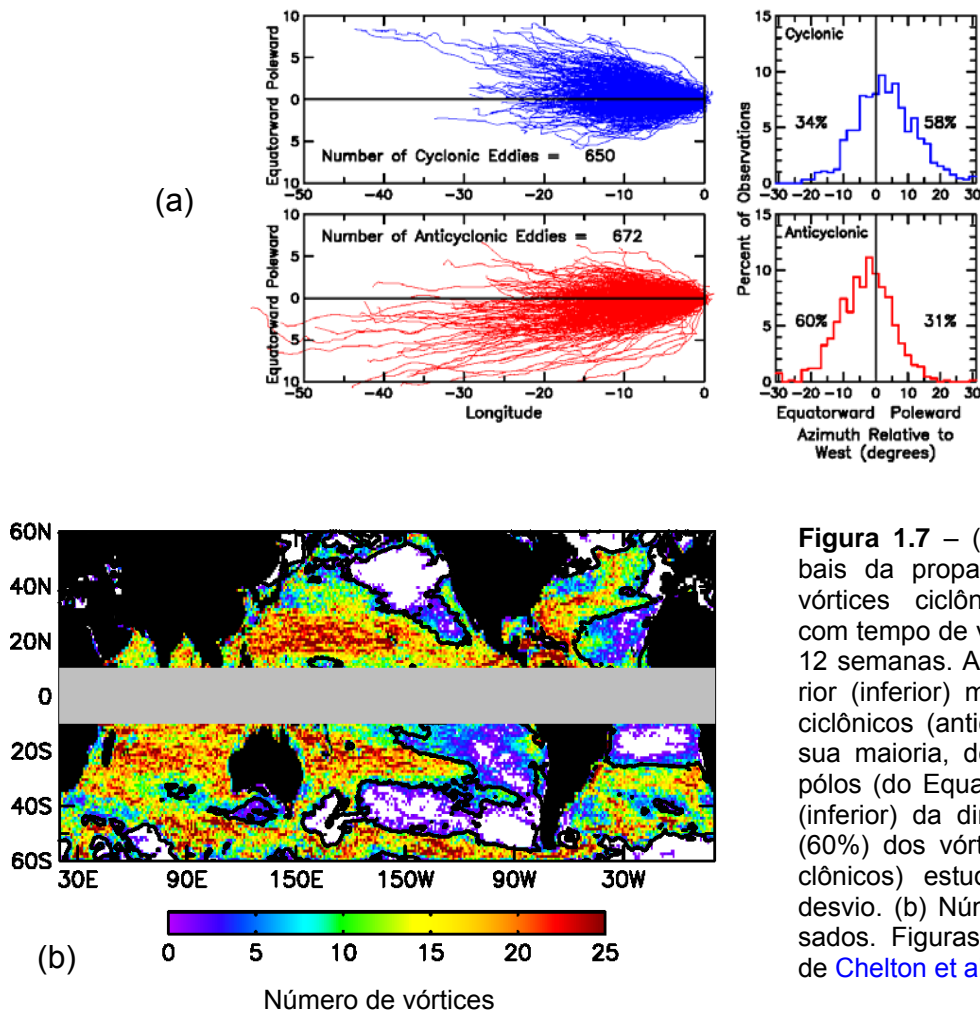


Figura 1.7 – (a) Características globais da propagação para oeste de vórtices ciclônicos e anticiclônicos com tempo de vida igual ou superior a 12 semanas. A figura esquerda superior (inferior) mostra que os vórtices ciclônicos (anticiclônicos) sofrem, em sua maioria, desvios no sentido dos pólos (do Equador). A figura superior (inferior) da direita mostra que 58% (60%) dos vórtices ciclônicos (anticiclônicos) estudados possuíam este desvio. (b) Número de vórtices analisados. Figuras retiradas do trabalho de [Chelton et al. \(2007\)](#).

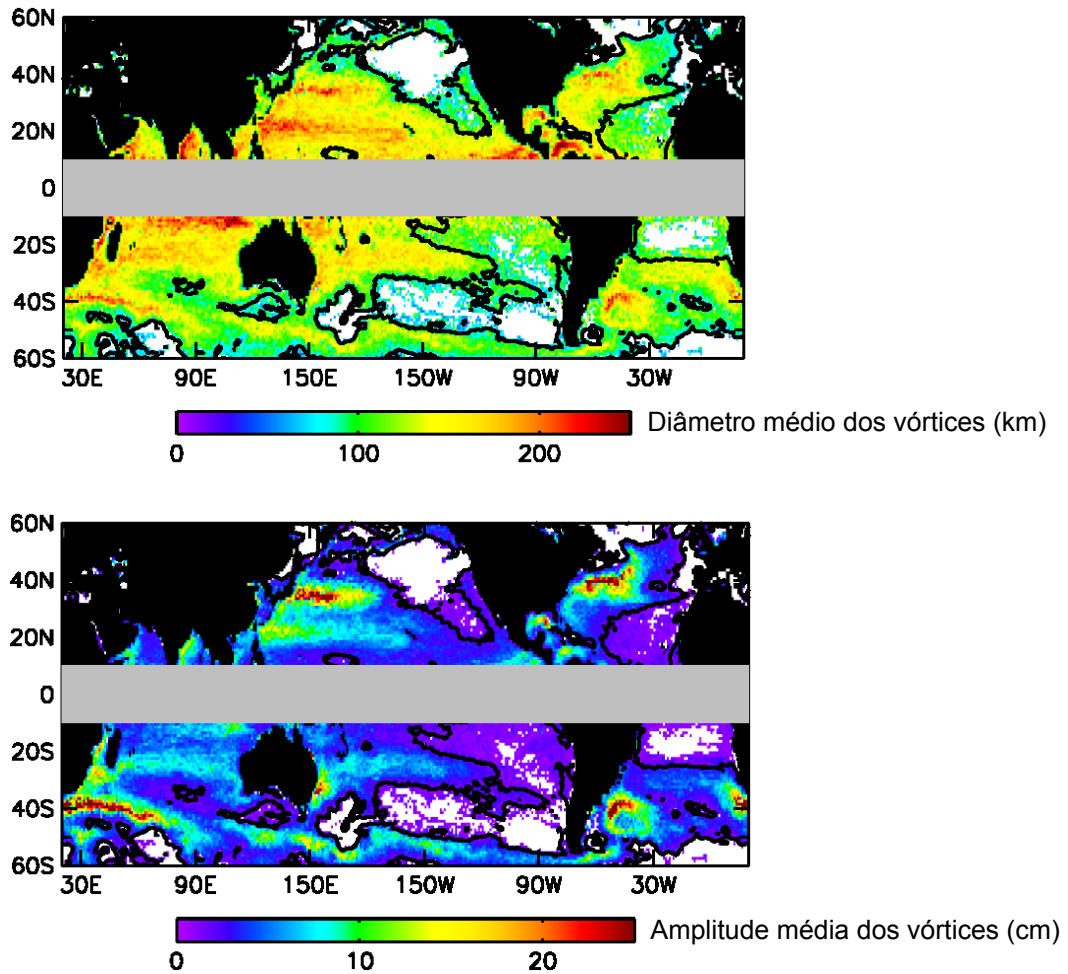


Figura 1.8 – (Superior) Diâmetro médio e (Inferior) amplitude média dos vórtices, analisados para uma grade com 1° de resolução. Cinco importantes zonas do oceano global de origem de vórtices destacam-se claramente na figura inferior (ver texto). Figuras retiradas do trabalho de [Chelton et al. \(2007\)](#).

Os números associados com alguns vórtices são impressionantes, com maior destaque para aquelas feições provenientes da zona de retroflexão da Corrente das Agulhas. O trabalho de [Byrne et al. \(1995\)](#) ilustra muito bem este aspecto, estimando o transporte do Oceano Índico para o Oceano Atlântico Sul através destas feições, para uma média de 6 vórtices/ano, em 7 Sv. O estudo de [Gordon \(1985\)](#) estimou este mesmo transporte em 15 Sv. O aporte de sal entre os oceanos é estimado em 2500 toneladas por segundo e uma injeção de 0,045 PW de calor total no Oceano Atlântico Sul é proporcionada por estes mesmos vórtices ([Byrne et al., 1995](#)).

O trabalho de [Olson & Evans \(1986\)](#) cita que o aporte de energia de um único vórtice proveniente da Corrente das Agulhas para o Oceano Atlântico Sul é equivalente a 7%

da energia anual oriunda do vento que é transferida para o giro subtropical (comparativo feito na faixa de latitude compreendida entre 10° S e 45° S). Citam ainda os autores que a estimativa da energia potencial turbulenta (EPT) armazenada no Oceano Atlântico Sul é da ordem de $44 \cdot 10^{16}$ J. A EPT de um único vórtice proveniente da Corrente das Agulhas é da ordem de $5 \cdot 10^{16}$ J, ou 11,36% da EPT total. O trabalho conclui que estes vórtices dominam completamente a energia turbulenta do giro inteiro.

Ainda neste estudo os autores comparam os volumes de dois vórtices da região das Agulhas ($19,2 \cdot 10^{12}$ m³ e $15,2 \cdot 10^{12}$ m³) com o volume de um vórtice de núcleo quente oriundo da Corrente do Golfo (com $3,9 \cdot 10^{12}$ m³), tornando-se clara a magnitude dos dois primeiros. O diâmetro de um vórtice oriundo da zona de retroflexão da Corrente das Agulhas é de 200 a 280 km, chegando a profundidades de até 1100 m, conforme [Duncombe Rae \(1991\)](#).

[Pichevin et al. \(1999\)](#) citam que a velocidade de translação destes vórtices é de 5 a 8 km/dia. Já o trabalho de [Byrne et al. \(1995\)](#) estima a velocidade de deslocamento dos vórtices em 4,1 km/dia para os casos em que a feição se desloca sobre topografia profunda e suave e de 2,9 km/dia quando sobre topografia acentuada e em águas mais rasas, mostrando o efeito da topografia sobre a velocidade da feição. Os autores destacam ainda que aproximadamente metade das velocidades translacionais observadas em seu estudo é devida à autopropulsão da feição, sendo o remanescente devido aos processos advectivos decorrentes de fluxos médios. Outros trabalhos (e.g., [Dewar & Gaillard, 1994](#) e [Radko & Stern, 1998](#)) citam que este percentual seria de apenas 20%, sendo o restante devido a outras causas externas. O tempo de residência dos vórtices provenientes da Corrente das Agulhas no Oceano Atlântico Sul foi estimado em 3 a 4 anos por [Byrne et al. \(1995\)](#).

O decaimento de um vórtice ao longo de sua trajetória está fortemente associado à ação de forças friccionais. A ação do entranhamento de fluidos ambientais no corpo do vórtice, outra possível causa deste decaimento, é considerada negligenciável no estudo de [Csanady \(1979\)](#).

1.2. A INTERAÇÃO DOS VÓRTICES COM AS BORDAS CONTINENTAIS

A interação entre vórtices e bordas continentais é inevitável devido a dois processos aos quais estas feições estão sujeitas (Nof, 1988b). Primeiramente, a variação do parâmetro de Coriolis com a latitude ocasiona o movimento dos vórtices no sentido do contorno oeste dos oceanos. Um segundo processo, devido à advecção por correntes ou à propulsão induzida por vórtices próximos, também arremessa estas feições contra as fronteiras continentais.

O primeiro processo, tendo em vista que a velocidade induzida no vórtice pelo efeito β é relativamente pequena [$O(\beta R_{De}^2)$], e que são necessários vários dias [$O(\beta R_{De})^{-1}$] para que uma significativa fração do vórtice seja colocada em contato com a parede, tende a ocasionar um processo de contato vórtice-parede mais suave. O segundo processo, por sua vez, tendo em vista as maiores velocidades oriundas da advecção, pode gerar encontros mais violentos, podendo a estrutura do vórtice ser grandemente alterada em poucos dias (Shi & Nof, 1993). Como resultado imediato da colisão de um vórtice com a borda continental parte de sua circulação interna é bloqueada devido à impossibilidade de penetrar a parede. Este bloqueio afeta a estrutura do vórtice próxima da parede e um complexo processo de interação passa a atuar (Nof, 1988b).

A utilização do termo "parede" sugere o contato do vórtice com uma margem continental vertical. Cabe destacar que a inclinação de um talude é muito superior à inclinação da interface do vórtice que dele se aproxima, o que torna a consideração da borda continental como uma parede perfeitamente plausível (Nof, 1999). A figura 1.9, adaptada de Nof (1999), ilustra estas considerações. Conforme a figura mostra, o contato vórtice-parede ocorre abaixo da superfície do oceano, o que dificulta sobremaneira a visualização destes processos de interação, em especial o vazamento do líquido interno do vórtice.

O encontro entre vórtices e bordas continentais não envolve apenas a colisão de uma única feição por vez com uma parede, conforme modelado em alguns trabalhos encontrados na literatura científica que investigam este tipo de encontro (e.g., Nof, 1988ab e Nof, 1999). Para a discussão deste aspecto a Corrente das Agulhas é um bom ponto de partida. Esta corrente introduz em torno de 6 vórtices por ano no Oceano Atlântico

Sul, os quais possuem um tempo de residência neste oceano de 3 a 4 anos [Byrne et al. \(1995\)](#). Alguns destes vórtices devem chegar até o continente sul americano (visto que são autopropulsionados para oeste) e interagir com a sua borda continental e com a corrente de contorno oeste associada, a Corrente do Brasil.

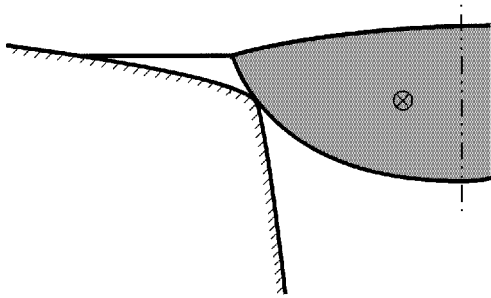


Figura 1.9 - Corte lateral do contato de um vórtice com a quebra de plataforma, onde a inclinação do talude é muito superior àquela da interface da feição, o que faz que a consideração da borda continental como uma parede vertical seja apropriada como uma primeira aproximação. Figura adaptada de [Nof \(1999\)](#).

O trabalho pioneiro de [Byrne et al. \(1995\)](#), que rastreou vórtices provenientes da região da Corrente das Agulhas até uma longitude de aproximadamente 40° W, parece confirmar que a interação destes vórtices com a borda continental brasileira e, conseqüentemente com a Corrente do Brasil, é realmente iminente, apesar deste encontro não ter sido ainda documentado. A figura 1.10, retirada de [Byrne \(2000\)](#), mostra a trajetória de alguns vórtices isolados, provenientes da zona de retroflexão da Corrente das Agulhas, a partir de dados Geosat.

Numa previsão hipotética de que todos estes vórtices se dirigissem para oeste (na realidade vários vórtices desaparecem enquanto outros ficam sujeitos à advecção do giro oceânico local e a influência de outros vórtices e são conduzidos em outras direções), em torno de 21 vórtices estariam em trânsito pelo Oceano Atlântico Sul na direção da costa brasileira. A cada dois meses, aproximadamente, um vórtice estaria entrando em contato com a borda continental brasileira. Este intervalo de tempo é muito inferior ao tempo de decaimento de uma lente que entra em contato com uma parede, obtido com a utilização da expressão desenvolvida em [Nof \(1999\)](#), o qual pode atingir intervalos de tempo superiores há 12 meses.

Mesmo com a relaxação da previsão citada anteriormente, e que poucos vórtices atinjam a borda continental brasileira, o intervalo de tempo entre a chegada de dois vórtices sucessivos ainda seria inferior ao tempo de decaimento de um único vórtice

proveniente da Corrente das Agulhas após o seu encontro com esta mesma borda (desconsidera-se neste instante a corrente de contorno oeste), para um meio considerado invíscido³. Torna-se claro que o processo de interação entre vórtices e bordas continentais envolve mais de uma feição simultaneamente.

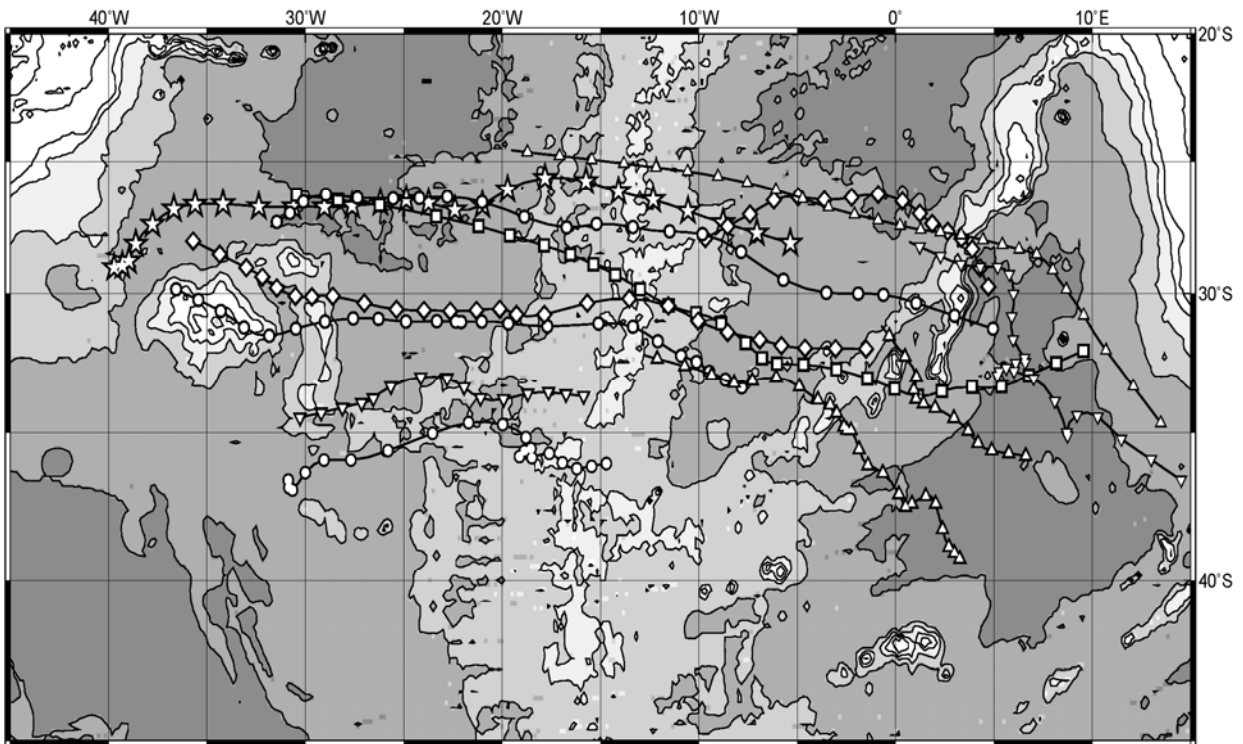


Figura 1.10 - Trajetórias de vórtices individuais a partir de dados Geosat, conforme estudos de [Byrne et al. \(1995\)](#) e [Byrne \(2000\)](#). A batimetria está contornada com intervalos de 1000 metros. As trajetórias estão suavizadas a partir da estimativa do centro de cada feição. O espaçamento temporal entre duas posições sucessivas dos vórtices, nas trajetórias estudadas, é de 34 dias. O encontro dos vórtices com a borda continental brasileira parece ser iminente. A figura foi retirada de [Byrne \(2000\)](#).

1.3. A PROPOSTA DESTE TRABALHO

A análise de vários trabalhos encontrados na literatura científica sobre encontros entre vórtices e bordas continentais (ver Capítulo 2), com ênfase naqueles estudos que apresentaram modelagens analíticas, mostra que alguns questionamentos relativos a estes encontros carecem de respostas, onde se destaca:

³ Destaca-se que este tempo é muito menor no oceano real tendo em vista a atuação das forças friccionais sobre a feição (desconsideradas em [Nof, 1999](#)).

1. Supondo-se que vários vórtices atinjam uma borda continental no mesmo ponto, e a intervalos regulares, o que ocorrerá na zona de encontro destes vórtices com a parede?
2. Quais as forças que irão competir meridionalmente nesta zona de contato e quais serão as forças dominantes?
3. Alguma nova feição será criada próxima da borda continental resultante do processo de interação entre os vários vórtices e a parede?

A modelagem analítica necessária para a resposta destes questionamentos conduz a um novo desafio, ou seja:

4. Como representar matematicamente um “trem” de vórtices⁴, tendo em vista a necessidade da escolha de um referencial único para o sistema de coordenadas, o qual, em geral, é colocado no centro do vórtice (e.g., [Nof, 1999](#)).

Este trabalho tem como objetivo geral responder a todos estes questionamentos, tendo em vista que as questões levantadas buscam a compreensão de um fenômeno real do oceano global, ou seja, o encontro de um “trem” de vórtices anticiclônicos com uma borda continental. A escolha pelas feições anticiclônicas reside numa futura aplicação deste trabalho no encontro entre os vórtices de núcleo quente (anticiclônicos) provenientes da zona de retroflexão da Corrente das Agulhas com a borda continental brasileira. O estudo analítico será realizado com vórtices do tipo lente. [Nof \(1999\)](#) ressalta que estes vórtices são robustos, quando do seu encontro com a parede todos os movimentos ficam confinados ao interior do vórtice e o fluido que circunvizinha o vórtice permanecerá em repouso, facilitando toda a análise. As lentes utilizadas na modelagem analítica desenvolvida neste trabalho terão vorticidade potencial nula e $R_o = \frac{1}{2}$, conforme [Nof \(1999\)](#).

Como os vórtices oceânicos são autopropulsionados para oeste e o seu encontro com a borda continental leste dos continentes é inevitável, e tendo em vista que nestes locais temos a presença de correntes de contorno oeste (CCO), é imprescindível a aná-

⁴ Considera-se neste trabalho como um “trem” de vórtices uma seqüência de feições idênticas e sucessivas, igualmente espaçadas, com movimento puramente zonal dirigido para oeste.

lise do transporte ao longo da borda, decorrente do vazamento do líquido interior dos vórtices, o qual interagirá com o transporte da respectiva CCO. Este passa a ser um dos objetivos específicos deste trabalho, ou seja, a quantificação do transporte ao longo da parede que tem como origem o vazamento proveniente dos vórtices que entram em contato com esta parede. Com a definição deste objetivo específico cabe destacar que aspectos energéticos decorrentes do encontro vórtice-parede, onde parte da energia cinética turbulenta do vórtice pode migrar para outro compartimento do Diagrama de Lorenz (Azevedo et al., 2008) e ser utilizada para acelerar o fluxo médio, não serão abordados neste trabalho.

A parede com a qual o vórtice interage pode ser inclinada com relação ao norte geográfico, conforme mostra o retângulo amarelo da figura 1.11. Com esta consideração um novo questionamento surge, ou seja: o que se modifica na zona de encontro vórtice-parede se esta parede for inclinada? O estudo da influência desta inclinação no processo de contato vórtice-parede passa a ser outro objetivo específico deste trabalho. Cabe destacar que, na realidade, os questionamentos 2 e 3 citados anteriormente, repetir-se-iam na situação de um cenário com uma parede inclinada.

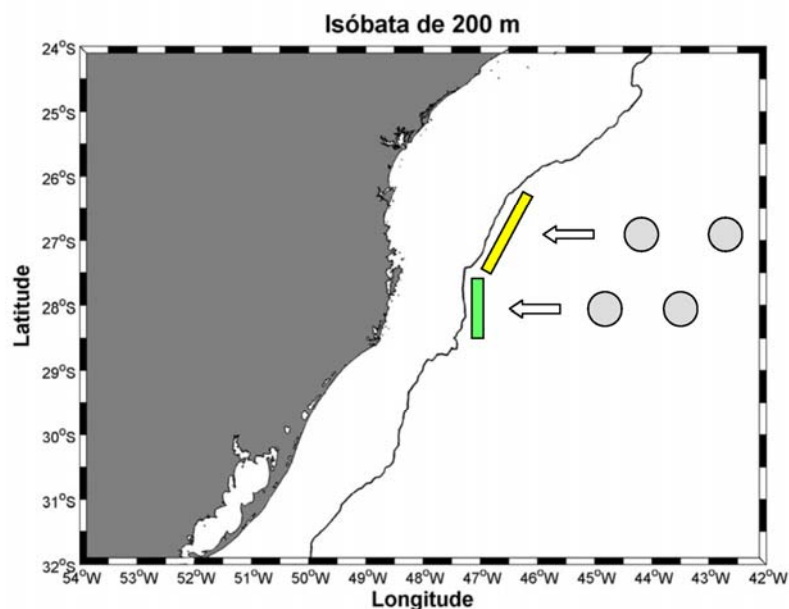


Figura 1.11 - Localização da isóbata de 200 m ao longo da costa brasileira representando a quebra de plataforma (borda continental). Duas configurações de paredes verticais, representadas por retângulos, com as quais os vórtices (círculos cinza) que se propagam para oeste (seta branca) podem interagir, são apresentadas. A parede vertical verde é meridional enquanto a parede vertical amarela é inclinada com relação ao norte geográfico. A consideração da quebra de plataforma como uma parede vertical é explicada no texto (ver figura 1.9).

A utilização ao longo deste trabalho do termo "parede meridional" indica uma parede vertical alinhada com o eixo norte-sul, conforme mostra o retângulo verde na figura 1.11, enquanto o termo "parede inclinada" indica sempre uma parede vertical inclinada com relação ao norte geográfico (parede com orientação SW-NE), conforme mostra o retângulo amarelo na figura 1.11). Cabe ainda destacar que a utilização do termo "transporte" neste trabalho (salvo indicação em contrário) se referirá sempre a um transporte de volume, em geral associado com vórtices ou com correntes.

Os objetivos específicos deste trabalho passam a ser então:

- Quantificação do transporte ao longo da parede decorrente do vazamento do líquido interior dos vórtices após o seu contato com esta parede;
- Estudo da influência da inclinação da parede no processo de contato vórtice-parede.

Algumas hipóteses podem ser assumidas após os questionamentos apresentados anteriormente. Os vazamentos provenientes do encontro vórtice-parede deverão ser agora contínuos, ou seja, a "tira" de líquido interior do vórtice que circula ao longo de determinado trecho da parede, decorrente do vazamento, não deve cessar após um certo tempo [e.g., [Nof \(1988ab\)](#), [Shi & Nof \(1993\)](#) e [Nof \(1999\)](#)], tendo em vista que o processo de contato (com escalas diferentes) deverá estar ocorrendo todo o tempo. A força "foguetes"⁵, decorrente deste vazamento contínuo, necessitará ser equilibrada, o que parece sugerir a existência de uma feição estacionária (vórtice) na zona de contato dos vórtices com a parede. A inclinação da parede vertical deve influenciar o encontro vórtice-parede tendo em vista que uma nova componente paralela à parede, oriunda do momentum zonal do "trem" de vórtices, será introduzida na equação do momentum paralelo à parede. Isto ocorrerá somente no caso de uma parede inclinada.

A modelagem analítica desenvolvida em alguns trabalhos encontrados na literatura científica sobre o encontro vórtice-parede muitas vezes apresenta resultados que se

⁵ O termo força "foguetes" é uma tradução literal do original em inglês "*rocket force*". A utilização deste termo se deve ao fato de que a força aplicada sobre o domínio de estudo pela corrente que deixa este domínio é análoga à força aplicada em um foguete pelos gases de combustão que deixam o foguete (princípio da ação e reação da 3ª Lei de Newton).

mostraram contra intuitivos, ou seja, o cenário resultante não era o cenário esperado, o que pode ocorrer novamente quando as respostas aos questionamentos feitos forem obtidas. Contudo, as hipóteses aqui apresentadas (intuitivas) parecem lógicas e deverão ser confirmadas nas modelagens analíticas e numéricas a serem desenvolvidas ao longo deste trabalho.

A metodologia de trabalho utilizada consistirá, inicialmente, na modelagem analítica do encontro de um "trem" de lentes com as duas situações de borda continental. A modelagem teórica, desenvolvida em um oceano suposto invíscido, possibilitará para cada situação de parede: (1) a verificação de quais as forças paralelas à borda continental que atuam durante o encontro dos vórtices com a parede, (2) a verificação se alguma feição estacionária será estabelecida na zona de contato e (3) o cálculo dos transportes paralelos à parede oriundos do encontro dos vórtices com a parede. Destaca-se que, para a representação da seqüência zonal de vórtices, será introduzida uma corrente zonal de dupla frente, com mesma vorticidade potencial e transporte líquido do fluxo de vórtices. Esta técnica não foi encontrada em outros trabalhos. Em um segundo momento, a situação modelada em teoria será confrontada com a modelagem numérica, objetivando-se validar os resultados obtidos pela primeira. Colateralmente, a eficácia na utilização da corrente de dupla frente na representação dos vórtices também será avaliada neste comparativo. Um modelo isopical de 1,5 camadas, o qual será apresentado no Capítulo 5, será utilizado para esta comparação.

O Capítulo 6 deste trabalho apresenta a modelagem analítica do encontro de um "trem" de vórtices do tipo não-lente com as duas situações de parede. Esta modelagem, apesar de não ter sido inicialmente programada, acabou sendo desenvolvida para servir como material de pesquisa para trabalhos futuros. Por questões de tempo, relacionadas ao período máximo para a apresentação deste trabalho, e também devido a maior dificuldade encontrada na reprodução destas feições no modelo numérico, a modelagem numérica deste encontro não pode ser concluída, não sendo então apresentada. Cabe destacar que o vórtice tipo lente é uma situação especial do vórtice que possui profundidade não nula em sua borda. No caso das lentes esta profundidade será tomada como nula. A utilização das novas equações desenvolvidas no Capítulo 6, com a consideração de uma profundidade nula na borda do vórtice, reproduz o resultado

encontrado com as equações do Capítulo 4, onde a modelagem analítica do encontro do “trem” de lentes com a borda continental é desenvolvida.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: o Capítulo 1 apresenta aspectos gerais relacionados com vórtices e a proposta de trabalho (objetivo geral, específicos, hipóteses e metodologia de trabalho); o Capítulo 2 apresenta uma revisão bibliográfica sobre o encontro vórtice-parede; o Capítulo 3 apresenta e desenvolve as principais equações governantes utilizadas nas modelagens analíticas; o Capítulo 4 apresenta a modelagem analítica do encontro de um “trem” de lentes com as duas situações de parede; o Capítulo 5 apresenta a modelagem numérica do encontro do “trem” de lentes com as duas situações de parede onde os resultados das duas formas de modelagem são confrontados e previamente discutidos; o Capítulo 6 é semelhante ao quarto, porém apresenta a modelagem teórica para vórtices com profundidade finita e não zero no contorno superficial das feições. Finalmente, o Capítulo 7 apresenta comentários, discussões e conclusões do estudo realizado neste trabalho, assim como sugestões para a realização de trabalhos futuros. Terminando esta tese a bibliografia empregada é apresentada, seguida de dois anexos. O Anexo A apresenta a transformação de várias equações de coordenadas retangulares para cilíndricas enquanto o Anexo B apresenta aspectos relacionados com função corrente e transporte.

CAPÍTULO 2

A INTERAÇÃO DE VÓRTICES COM BORDAS CONTINENTAIS

A interação de vórtices e bordas continentais é um processo inevitável decorrente do movimento destas feições no sentido oeste, motivado por sua autopropulsão devido ao efeito β e também à advecção por outras feições oceanográficas (correntes e/ou outros vórtices). No estudo desta interação a borda continental será assumida como uma parede vertical, conforme já explicado no capítulo anterior.

Este Capítulo 2 se dedica à apresentação de uma revisão bibliográfica a respeito do processo de interação vórtice-parede. Nesta revisão foram priorizados os trabalhos científicos que apresentam modelagens analíticas que descrevem este processo. Na maioria deles o estudo analítico foi complementado por uma modelagem numérica que permitiu a verificação dos resultados encontrados analiticamente.

Estudos analíticos da interação vórtice-parede não são comuns na literatura científica. Contudo, alguns autores se dedicaram a este complexo tema. Podem ser citadas as publicações de [Lamb \(1932\)](#), [Saffman \(1979\)](#), [Minato \(1982,1983\)](#), [Wu et al. \(1984\)](#), [Yasuda et al. \(1986\)](#), [Masuda et al. \(1987\)](#), [Umatani e Yamagata \(1987\)](#) e [Masuda \(1988\)](#), as quais abordam, em maioria, o processo de interação vórtice-parede para feições lineares e quase-geostróficas. Muitos destes trabalhos destacam que estes vórtices quando próximos de uma parede ficam sujeitos ao chamado "efeito imagem" (e.g., [Vennard & Street, 1978](#) e [Kundu & Cohen, 2008](#)). Próximo de uma parede as linhas de corrente da feição devem se ajustar ao contorno da parede. Esta condição é satisfeita quando o vórtice "sente" a presença de um vórtice idêntico, mas de vorticidade oposta (a imagem do vórtice original), atrás da parede ([Nof, 1999](#)). Nesta situação, por advecção mútua, o par se move ao longo da parede. Vórtices anticiclônicos se moveriam no sentido dos pólos e as feições ciclônicas, por sua vez, se deslocariam ao longo da parede no sentido da linha do Equador. As publicações citadas no início deste parágrafo desenvolvem estudos no plano-f (com exceção de [Yasuda et al., 1986](#)).

O trabalho de [Nof \(1988a\)](#) investiga a interação entre um vórtice barotrópico, com número de Rossby $R_o \ll 1$, e uma parede no plano-f. Neste estudo o vórtice já é posicionado em contato com a parede e o oceano externo à feição é considerado estagnado. O autor utiliza as equações integradas do momentum o que possibilita a modelagem analítica do processo de contato sem detalhar os aspectos internos que ocorrem no interior do vórtice. Para que o processo de contato vórtice-parede seja iniciado uma parede é “inserida” a uma distância εr_o do centro da feição, onde o parâmetro ε (de mesma ordem de R_o) é a distância entre a parede e o contorno não perturbado do vórtice e r_o é o raio da feição.

As conclusões apresentadas em [Nof \(1988a\)](#) mostram que nesta situação o vórtice experimentará um vazamento de seu líquido interior, onde para feições anticiclônicas este vazamento ocorre à direita do vórtice (olhando-se no sentido do oceano aberto) e para vórtices ciclônicos o vazamento se dá para a esquerda. Todo o processo é não linear tendo em vista que a condição de contorno do problema, que relaciona a velocidade periférica do vórtice e a velocidade do vazamento, é uma função quadrática. A figura 2.1, retirada do estudo, mostra estes vazamentos.

[Nof \(1988a\)](#) cita ainda que, ao final do processo de contato, ou seja, quando o tempo tender ao infinito, o vórtice estará tocando na parede em um único ponto (o autor usa a expressão⁶ “*kissing the wall*”), quando então uma “tira” de líquido anômalo estará escorrendo ao longo da parede se distanciando da feição. O vórtice deve experimentar um movimento de translação ao longo da parede tendo em vista a ocorrência do vazamento, o qual exerce sobre a feição uma força estilo “foguetes”, dirigida em sentido contrário ao do vazamento. O autor destaca que este movimento dos vórtices é similar ao efeito imagem comentado anteriormente. A figura 2.1 mostra que vórtices anticiclônicos (ciclônicos) se movimentariam no sentido dos pólos (do Equador) o que condiz com o movimento relatado devido ao efeito imagem.

⁶ Tradução literal: beijando a parede.

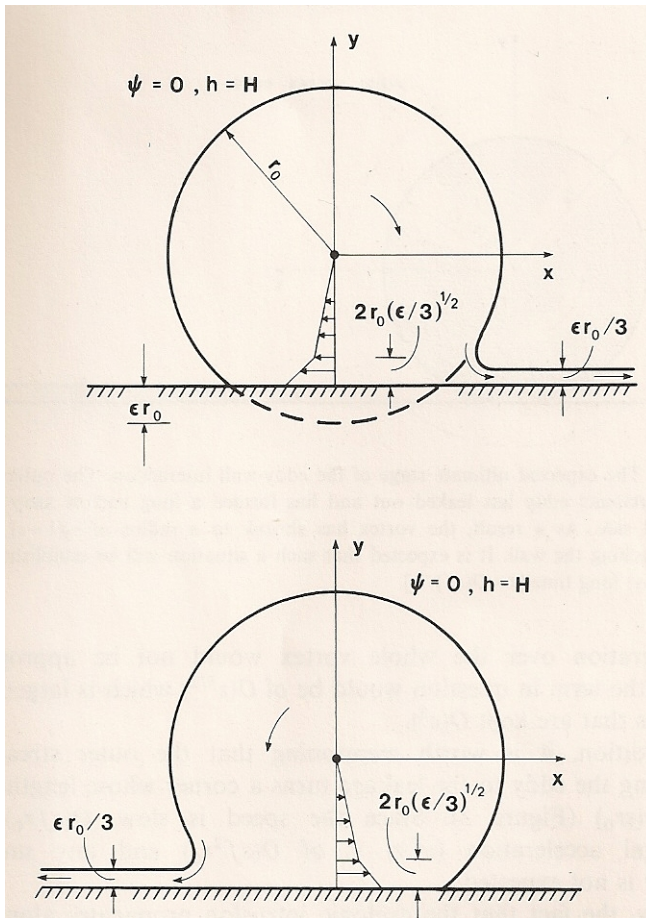
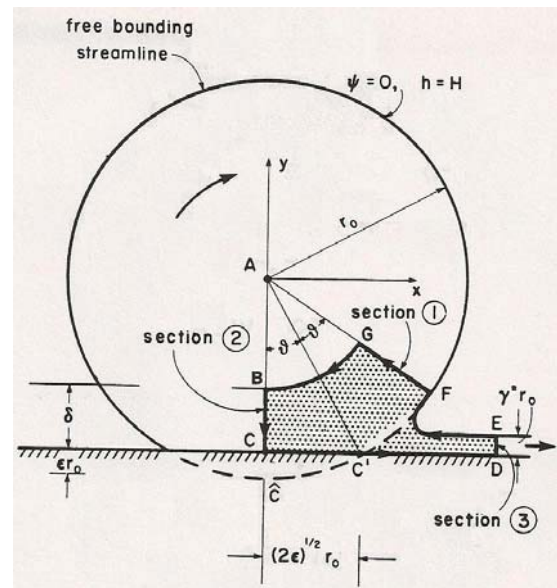


Figura 2.1 – Interação entre um vórtice barotrópico e uma parede no hemisfério norte. Como resultado deste processo o vórtice perde parte de sua massa interior na forma de um vazamento ao longo da parede. Para feições anticiclônicas (painel superior da figura) o vazamento ocorre à direita do ponto da zona de contato (olhando-se da parede para o oceano aberto) e para vórtices ciclônicos, situação mostrada no painel inferior da figura, este vazamento ocorre para o lado esquerdo. Os resultados são simétricos. Esta figura foi retirada de [Nof \(1988a\)](#).

O estudo analítico desenvolvido em [Nof \(1988b\)](#) estende a análise realizada em [Nof \(1988a\)](#) para a interação entre vórtices baroclínicos e paredes. Este novo trabalho contempla dois tipos de feições, ou seja, os vórtices lineares quase-geostróficos (de pequena amplitude e baixa circulação) e vórtices moderadamente não lineares (amplitude relativamente alta e alta circulação). A figura 2.2 mostra o modelo de vórtice analisado neste trabalho.

Novamente é assumido que os vórtices estão interagindo fracamente com a parede, tendo em vista que a “penetração” na parede é muito pequena. Para os vórtices lineares quase-geostróficos repetiram-se os resultados encontrados para as feições barotrópicas, ou seja, após interagirem com a parede um vórtice anticiclônico (ciclônico) perde massa na forma de um vazamento para a direita (esquerda). Novamente o vórtice experimentaria um suave movimento ao longo da parede em sentido contrário ao do vazamento.

Figura 2.2 – Esquema do vórtice anticiclônico estudado por Nof (1988b) no hemisfério norte. A área delimitada por BCC'DEFGB foi alvo da aplicação das equações integradas do momentum e da continuidade. O vazamento ocorre pelo segmento ED.



Nof (1988b) comenta que, com surpresa, a interação entre vórtices moderadamente não lineares e a parede não resulta em um vazamento. O autor credits este fato à alta inércia das partículas ao longo da periferia do vórtice o que as impede de modificar a direção de sua trajetória e vazar para fora da feição. A ausência de vazamento ocasiona um aumento na largura da corrente de contorno interna do vórtice.

O contato de um vórtice com uma parede, devido unicamente ao efeito β , se dá de forma suave, tendo em vista que a velocidade de translação dos vórtices, a qual possui ordem βR_{De}^2 , é muito pequena nestes casos, algo em torno de 1 km/dia. Muitos dias serão necessários, visto que o tempo de contato possui ordem $(\beta R_{De})^{-1}$, para que uma considerável fração do vórtice seja posta em contato com a parede. Esta fração refere-se a distância que o vórtice “penetrou” na parede com relação ao seu raio, correspondendo ao parâmetro ϵ utilizado em Nof (1988ab).

A advecção de um vórtice por correntes externas com velocidades elevadas ou pelo efeito de outros vórtices pode ocasionar um violento contato da feição com uma parede, pois nestes casos a velocidade translacional do vórtice pode resultar elevada, da ordem de 10 a 100 km/dia. Neste caso uma grande distorção na forma e na estrutura do vórtice pode ocorrer em poucos dias (Shi & Nof, 1993).

O trabalho de Shi & Nof (1993), desenvolvido no plano-f, aborda este encontro violento entre um vórtice e uma parede. Os autores mostram que o resultado intuitivo do vórtice

perder parte de sua massa e permanecer apenas tocando a parede em um único ponto, enquanto desloca-se ao longo desta (ver figura 2.3), conforme os estudos de [Nof \(1988ab\)](#), não mais ocorre. Este violento encontro resulta na perda excessiva de massa pelo vórtice e a sua divisão em dois novos vórtices. Na situação em que um vórtice ciclônico (anticiclônico) colide violentamente com uma parede um vórtice anticiclônico (ciclônico) é gerado. A interação violenta entre um vórtice e uma parede sempre resulta na formação de uma feição anticiclônica à esquerda da zona de contato e outra feição ciclônica à direita. A interação mútua entre estes dois vórtices os coloca em movimento em sentidos opostos, ao longo da parede, quando então eles se afastam um do outro, cada vez mais, devido ao efeito imagem ([Shi & Nof, 1993](#)).

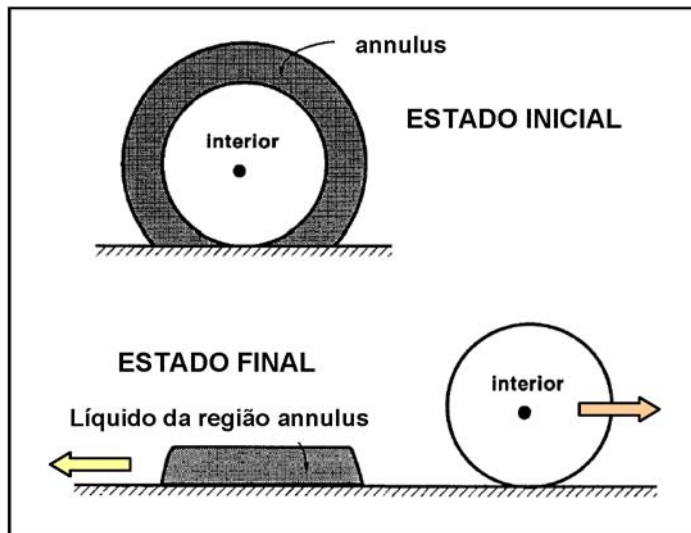


Figura 2.3 – Resultado esperado para o encontro entre um vórtice ciclônico e uma parede no hemisfério norte, conforme mostra o estudo de [Nof \(1988ab\)](#). O vórtice foi dividido em duas regiões. A região periférica da feição que “penetra” a parede é chamada de “annulus”, enquanto a região que compreende a porção que não “penetra” a parede é chamada de “interior”. Este resultado não se verifica, contudo, para aquelas situações em que o contato é realizado de forma violenta, conforme cita o texto. A figura foi adaptada de [Shi & Nof \(1993\)](#).

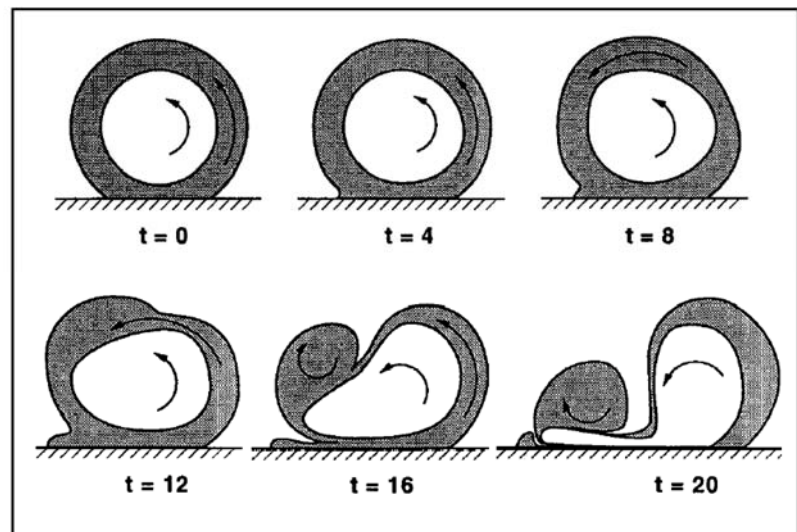
A figura 2.3 mostra o resultado intuitivo esperado para o encontro entre um vórtice ciclônico e uma parede, seguindo-se os resultados obtidos em [Nof \(1988ab\)](#). Conforme relatado anteriormente, o estado final deste encontro envolveria uma massa de líquido, que vazaria da região do interior do vórtice chamada de “annulus” em [Shi & Nof \(1993\)](#), que se moveria na direção dos pólos, e o vórtice resultante, o qual tocaria na parede em apenas um único ponto, e que transladaria na direção da linha do Equador.

A figura 2.4 mostra em detalhe o que realmente ocorre no encontro violento entre um vórtice ciclônico e uma parede. Deste encontro resulta a formação de duas novas feições que apresentam vorticidades opostas. Percebe-se que o líquido contido na região chamada de “annulus” (ver figura 2.3) vaza para a esquerda adquirindo vorticidade

anticiclônica. No último estágio mostrado na figura 2.4 um pequeno vórtice anticiclônico já pode ser percebido à esquerda da feição ciclônica original. O líquido do vórtice original, contido na região chamada de “interior” (ver figura 2.3), continua vazando para a esquerda, sendo ainda advectado pela feição anticiclônica recém formada. Ao final, devido ao efeito imagem, o vórtice formado pela porção residual do interior do vórtice original translada para a direita, enquanto o vórtice recém criado translada, ao longo da parede, em sentido oposto. À medida que os dois vórtices se afastam suas velocidades translacionais diminuem (Shi & Nof, 1993).

O subsequente trabalho de Shi & Nof (1994), que avalia a interação suave entre um vórtice e uma parede, é desenvolvido parcialmente no plano- β . Citam os autores que três fatores influenciam a migração meridional de um vórtice neste plano quando ele entra em contato com uma parede, que são: o efeito imagem, o efeito β e o efeito “foguetes”.

Figura 2.4 – Divisão de um vórtice ciclônico em duas feições de vorticidades opostas após o seu violento contato com uma parede no hemisfério norte. A figura foi adaptada de Shi & Nof (1993).



O efeito imagem, que resulta na advecção do vórtice ao longo da parede devido a sua própria imagem, age no sentido de mover um vórtice anticiclônico (ciclônico) no sentido dos pólos (da linha do Equador). O efeito β , devido à diferença entre o parâmetro de Coriolis nos dois hemisférios do vórtice, move um vórtice anticiclônico (ciclônico) no sentido da linha do Equador (dos pólos). O efeito “foguetes” ocorre devido ao fato de que um vórtice anticiclônico (ciclônico) perde parte de sua massa no sentido da linha do Equador (dos pólos) o que acarreta uma força “foguetes” que atua no vórtice no sentido dos pólos (da linha do Equador). A figura 2.5 mostra todos estes efeitos atuando

nos dois tipos de vórtices (cyclônicos e anticiclônicos), após o seu contato com uma parede meridional, nos dois hemisférios terrestres.

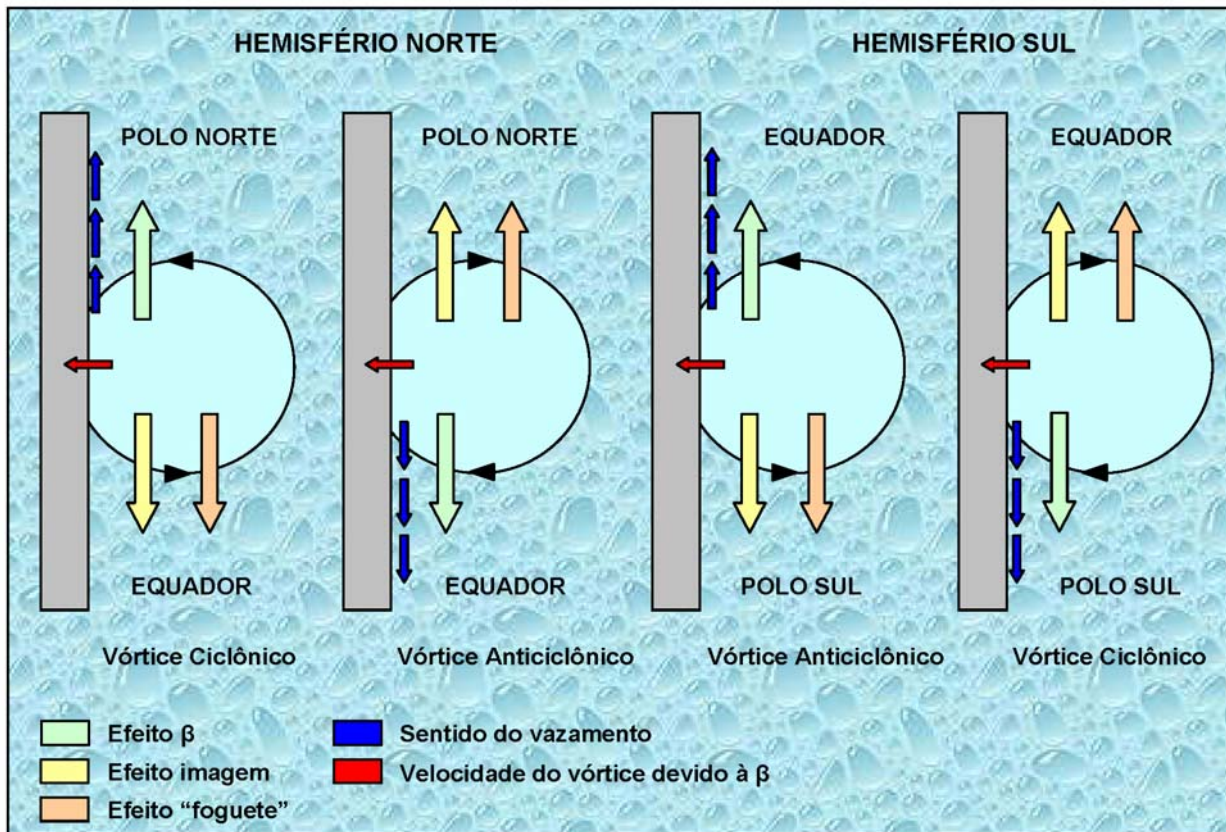


Figura 2.5 – Efeitos que atuam no contato de um vórtice com uma parede. A simbologia de cores das setas está indicada na legenda no canto inferior esquerdo da figura.

Shi & Nof (1994) destacam que o efeito combinado destes três fatores é um processo extremamente complicado e que os resultados encontrados vão, muitas vezes, de encontro ao esperado. Uma análise de escala mostra que, para números de Rossby R_0 de ordem aproximadamente unitária, as velocidades induzidas por estes três mecanismos possuem a mesma ordem, o que sugere que a complexidade da migração de vórtices ao longo de paredes não depende somente destas escalas (Shi & Nof, 1994). Para exemplificar este fato os autores analisam a situação de uma lente que se move sobre um fundo que é inclinado na direção norte-sul (mais raso no norte), onde a inclinação do fundo simula a ação de β . A feição se move para oeste, com a parte mais rasa à sua direita, reproduzindo o movimento de uma onda topográfica. Quando esta lente encontra uma parede meridional perpendicular a sua direção de movimento, seria

intuitivo esperar que a ação da gravidade arrastasse a feição para a parte mais funda do declive. Contudo, o resultado observado é o movimento da lente no sentido da parte mais rasa do declive. Destacam os autores que este movimento bizarro é compensado pelo vazamento de fluido do interior da lente ao longo da parede, o qual gradualmente destrói a feição.

O trabalho de [Shi & Nof \(1994\)](#) também examina o comportamento de vórtices quase-geostróficos com profundidade finita em sua periferia, quando em contato com uma parede, no plano-f. É relatado no estudo que, após o contato com a parede, o vórtice assume uma estrutura semicircular (chamada de “*wodon*” pelos autores), a qual difere completamente da estrutura demonstrada pela feição em oceano aberto, a qual translada ao longo da parede. Os autores concluem que este tipo de vórtice será sempre convertido em um “*wodon*”, descrito no plano-f, após o seu processo de ajuste à parede ter sido completado. É destacado ainda que, em contraste ao comportamento das lentes, os “*wodons*” não apresentam vazamento, implicando que para baixos valores do número de Rossby R_0 , o vazamento de líquido interno do vórtice não desempenha um papel tão importante na interação vórtice-parede. Os autores concluem então que a importância do vazamento neste processo de interação cresce com o aumento da não linearidade das feições postas em contato com a parede.

O estudo analítico apresentado em [Nof \(1999\)](#) analisa o encontro de lentes anticiclônicas com paredes meridionais no plano- β . Em contraste com o conhecimento convencional de que após este encontro a feição se moveria no sentido dos pólos, em virtude do efeito imagem, o vórtice permaneceu praticamente parado em uma latitude fixa. Este fato motivou o autor a dar ao seu trabalho o título⁷ “*Strange Encounters of Eddies with Walls*”. Após o primeiro contato com a parede, e enquanto a feição ainda se movimenta no sentido da parede devido à deriva zonal do vórtice em virtude da presença de β , ela gradualmente perde líquido no sentido da linha do Equador até ter perdido toda a sua massa interna.

A utilização de lentes, vórtices altamente não lineares, cuja interface encontra a superfície do oceano em sua periferia, isolando uma quantidade finita de líquido anômalo,

⁷ Tradução literal: Estranhos Encontros de Vórtices com Paredes.

facilita o estudo da sua interação com uma parede, pois todos os movimentos ficam confinados ao interior do vórtice. Desde que não há fluido ao redor do vórtice com a mesma densidade daquela do interior da feição nenhuma radiação é permitida e o fluido que circunvizinha o vórtice permanecerá em repouso (Nof, 1999). O autor analisa feições com $R_0 = \frac{1}{2}$ e com vorticidade potencial nula.

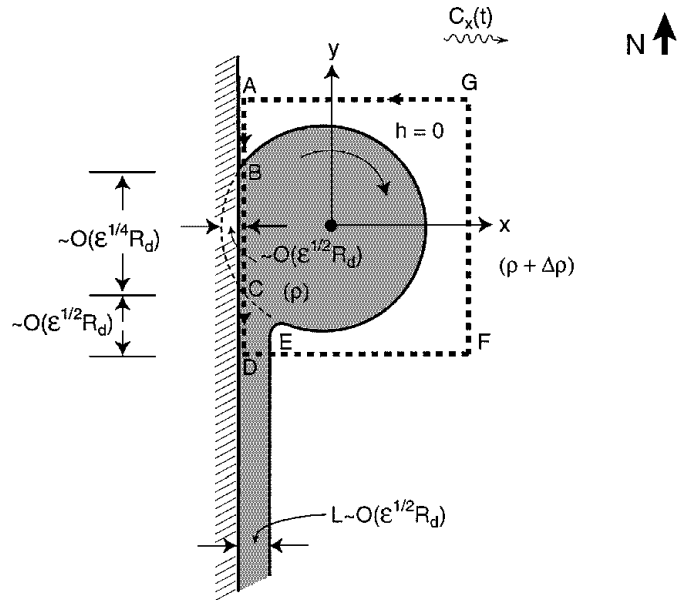
Na modelagem analítica desenvolvida em Nof (1999) o efeito imagem é negligenciado. Explica o autor que a importância deste efeito no processo de interação vórticeparede está diretamente vinculada à inércia do vórtice. No caso de lentes altamente não lineares, a inércia associada com o movimento orbital das partículas do vórtice é muito superior do que a inércia relacionada com a deriva da feição no sentido oeste, fazendo com que o efeito da parede (imagem) sobre a feição seja muito reduzido. A distorção apresentada pelo vórtice quando este encontra a parede é pequena. Nesta situação o papel da parede é unicamente o de frear a deriva zonal da feição, o que tem pouco efeito sobre o vórtice em si. Já no caso de vórtices quase geostróficos (e.g., Shi & Nof, 1994) as duas velocidades (orbital e deriva zonal) são de mesma ordem, conseqüentemente as inércias associadas também terão mesma ordem, e o efeito da parede será de ordem unitária, ou seja, de grande importância sobre o vórtice (Nof, 1999).

O trabalho de Shi & Nof (1994) contemplou vórtices quase-geostróficos que não apresentavam vazamento, enquanto o estudo de Nof (1988ab) envolveu vórtices quase-geostróficos que apresentaram vazamento mas que não estavam sujeitos à β . O trabalho de Nof (1999) apresenta a primeira solução analítica dependente do tempo para lentes não lineares, a qual envolve os três processos simultaneamente (efeito imagem, beta e “foguetes”). A alta não linearidade das lentes, entretanto, não permite que a solução encontrada seja estendida até o limite quase-geostrófico.

O autor destaca ainda que o processo invíscido de contato vórtice-parede envolve duas escalas de tempo, ou seja, uma escala rápida e outra lenta. A primeira, que é de $O(f^{-1})$, está associada ao tempo gasto para uma partícula dar uma volta completa dentro do vórtice, enquanto a segunda, de $O(\beta R_{De})^{-1}$, está associada com a resposta do vórtice ao seu contato com a parede. O tempo de drenagem da feição, até que esta perca totalmente a sua identidade estrutural, também possui $O(\beta R_{De})^{-1}$, conforme citado no

trabalho de [Nof \(1999\)](#). Cabe destacar que um vórtice fraco, quase-geostrófico (de pequena circulação), não possuirá estas duas escalas distintas de tempo. A figura 2.6 mostra o diagrama esquemático do vórtice anticiclônico investigado neste trabalho pioneiro, assim como algumas escalas espaciais associadas com a feição.

Figura 2.6 – Esquema do vórtice anticiclônico utilizado no estudo de [Nof \(1999\)](#), o qual foi desenvolvido no hemisfério norte. As integrações realizadas neste estudo são feitas sobre a seção tracejada ABCDEFGA. O parâmetro ε , definido por $\varepsilon = \beta R_{De}/f$, mede a variação do parâmetro de Coriolis ao longo da feição. O vórtice perde líquido no sentido da linha do Equador após o seu encontro com a parede. Simultaneamente, sua velocidade de deriva zonal vai sendo drasticamente reduzida.



Após uma troca de coordenadas nas equações do momentum e da continuidade, onde a origem do novo sistema de coordenadas é fixada no centro da feição, e a integração destas equações⁸ na seção demarcada na figura 2.6, o autor conclui que três forças atuam meridionalmente no vórtice: (1) a força devida ao efeito β , (2) força de Coriolis e (3) uma força “foguetes”. A força devida ao efeito β aponta para a linha do Equador. A força “foguetes”, que é oriunda da reação do vazamento sobre o vórtice, e a força de Coriolis, que atua à direita do deslocamento zonal da feição na direção da parede, são dirigidas para o pólo.

O trabalho de [Nof \(1999\)](#), ao final, apresenta várias fórmulas matemáticas que possibilitam calcular o decaimento do raio de Rossby, profundidade, raio e massa do vórtice em função do tempo. Foi observada na modelagem numérica uma migração meridional do vórtice ao longo da parede e no sentido da linha do Equador, mas com intensidade

⁸ Após uma análise de escala, mostrada pelo autor, as derivadas com relação ao tempo foram negligenciadas nas equações do momentum. Na equação da continuidade esta derivada foi mantida. Para a situação de vórtices fracos (quase-geostróficos), onde as escalas de tempo de uma revolução simples e aquela associada ao ajuste da feição à parede são similares, as derivadas temporais das equações do momentum não poderiam ter sido negligenciadas e o estudo de [Nof \(1999\)](#) não mais se aplicaria.

muito reduzida. A escala da velocidade da feição ao longo da parede é menor do que aquela prevista na modelagem analítica, ou seja, a migração meridional observada não é parte da solução analítica encontrada.

Nof (1999) comenta que seu estudo teria aplicação no encontro entre vórtices e a margem oeste dos continentes. Destaca ainda a impossibilidade da detecção por satélite do processo de interação entre vórtices e bordas continentais (que ocorre abaixo da superfície do oceano), o qual é, por natureza, também de difícil detecção por medições *in situ*, tendo em vista a pequena escala espacial do vazamento. A largura máxima destes vazamentos⁹, de $O(\varepsilon^{1/2}R_{De})$ conforme mostra a figura 2.6, é de aproximadamente 1,5 km, se considerados invíscidos.

⁹ Para vórtices com raio de deformação de 21 km. Utilizou-se a relação $R_{De} = 2^{-3/2}r_o$ (ver Capítulo 1) para vórtices de aproximadamente 120 km de diâmetro.

CAPÍTULO 3

EQUAÇÕES GOVERNANTES

Este capítulo tem como objetivo principal a apresentação das equações integradas do momentum e da massa aplicadas a um determinado domínio de estudo. Estas equações têm ampla utilização neste trabalho.

A inclusão deste capítulo ao longo do corpo de texto deste trabalho, ao invés de expor o seu conteúdo na forma de um anexo, se deve ao fato de que a utilização destas equações integradas não é comum na literatura científica nacional. Além disso, estas equações são aqui desenvolvidas de modo a torná-las prontas para a sua aplicação imediata na modelagem analítica a ser desenvolvida nos capítulos 4 e 6. Para tal, elas são apresentadas para as duas orientações de borda continental (parede) que serão abordadas, ou seja, meridional e inclinada. A borda continental é suposta como uma parede vertical conforme já explicado no Capítulo 1. A grande vantagem da utilização das equações integradas é que elas possibilitam a análise de processos oceanográficos sem a resolução de complexas equações não-lineares dentro do domínio de estudo, o que será mostrado ao longo deste trabalho. Ao ser assumida a estacionaridade do processo em análise, tem-se como desvantagem que o período transiente deste processo não é equacionado. Tendo em vista que trabalhos teóricos envolvendo vórtices também não são comuns na literatura científica nacional, também serão aqui apresentadas as principais equações que descrevem estas feições, com ênfase principal no plano-f.

3.1. AS EQUAÇÕES INTEGRADAS DO MOMENTUM

As equações integradas do momentum serão desenvolvidas nesta seção e, para tal, um domínio de estudo D_0 será adotado como exemplo¹⁰ (ver figura 3.1). Neste domínio uma corrente zonal dirigida para oeste entra em contato com uma parede. Além desta

¹⁰ A sigla D_0 será utilizada ao longo de todo este trabalho para designar o domínio de estudo em análise.

corrente o domínio D_o terá ainda duas outras correntes paralelas à parede, uma no contorno norte e outra no contorno sul do domínio. Este cenário é similar ao que será utilizado ao longo deste trabalho, o que motivou a sua escolha. É importante destacar ainda que estas duas correntes paralelas à parede poderiam estar representando dois segmentos de uma corrente de contorno oeste (CCO), fluxos decorrentes de uma separação da corrente zonal após o seu contato com a borda continental ou fluxos decorrentes da interação entre a CCO e as ramificações da corrente zonal.

Os desenvolvimentos serão feitos para as duas orientações de parede, ou seja, um mais simples, que supõe a parede meridional e um segundo, mais complexo, com uma parede inclinada de um ângulo θ medido em sentido horário com relação aos meridianos, onde $0 \leq \theta \leq 90^\circ$. O primeiro cenário é um caso particular do segundo (onde faz-se $\theta = 0^\circ$).

3.1.1. DOMÍNIO DE ESTUDO COM UMA PAREDE MERIDIONAL

O cenário de um domínio de estudo com uma borda continental (parede) meridional, mesmo sendo um caso contemplado no estudo com uma parede inclinada, será abordado primeiramente por ser o caso mais simples, o que facilitará um melhor entendimento do leitor quando o caso mais complexo ($\theta > 0^\circ$) for abordado. A figura 3.1 apresenta o domínio de estudo D_o que será utilizado como exemplo para o desenvolvimento das equações.

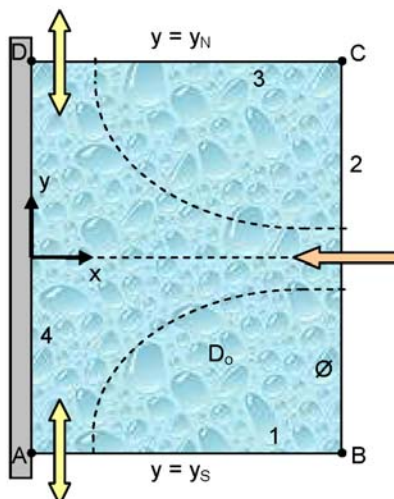


Figura 3.1 – O domínio de estudo D_o tomado como exemplo mostra uma corrente zonal (seta laranja), que entra em contato com uma parede meridional (retângulo cinza), e duas outras correntes (setas amarelas) nos contornos norte e sul, os quais possuem coordenadas meridionais y_N e y_S , respectivamente. O contorno do domínio é designado pela variável \emptyset . Os números de 1 a 4 estão associados com os quatro contornos individuais, os quais são delimitados por duas letras, cada um. O sistema retangular de referência é mostrado com setas escuras. As setas amarelas contemplam as duas possibilidades de sentido para as correntes meridionais.

As equações do momentum serão desenvolvidas assumindo-se um modelo de águas rasas de gravidade reduzida, em estado estacionário e invíscido, onde a camada superior, que possui densidade ρ e profundidade $h_{\text{sup}}(x,y)$, se move sobre uma camada inferior de profundidade h_{inf} muito maior que a primeira ($h_{\text{inf}} \gg h_{\text{sup}}$), suposta com densidade $\rho + \Delta\rho$ e sem movimento, onde $\Delta\rho/\rho \ll 1$. Informações mais detalhadas quanto a modelos de camadas podem ser encontradas no Capítulo 12 do livro de [Cushman-Roisin \(1994\)](#).

As equações estacionárias não-lineares do momentum e da continuidade, de águas rasas (e.g., [Pedlosky, 1987](#); [Gill, 1982](#) e [Kundu & Cohen, 2008](#)), aplicadas na camada superior, são expressas por (o subíndice da profundidade h_{sup} foi retirado por facilidade notacional):

$$\text{Momentum Zonal:} \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv = -g' \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (3.1)$$

$$\text{Momentum Meridional:} \quad u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu = -g' \frac{\partial h}{\partial y} \quad \text{e} \quad (3.2)$$

$$\text{Continuidade} \quad \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0. \quad (3.3)$$

Nestas equações g' é a gravidade reduzida, definida por $g' = g\Delta\rho/\rho$, (x,y) são as coordenadas retangulares, $u(x,y)$ e $v(x,y)$ são as velocidades zonal e meridional, respectivamente, $h(x,y)$ é a profundidade da camada superior e f é o parâmetro de Coriolis. As equações do momentum serão desenvolvidas no plano- β , sendo o parâmetro de Coriolis f expresso por

$$f = f_0 + \beta(y - y_0), \quad (3.4)$$

onde f_0 é o parâmetro de Coriolis em uma latitude central y_0 , e β é a variação latitudinal deste parâmetro que o corrige conforme a latitude considerada, que é expressa por y na equação (3.4), varia ao longo de D_0 .

A equação (3.3) permite a definição das expressões (e.g., [Fox & McDonald, 1978](#)):

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = vh \quad \text{e} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -uh, \quad (3.5ab)$$

onde ψ é uma função (corrente) de transporte, sendo $\psi = F(x,y)$, em que F representa uma função matemática.

A multiplicação das expressões (3.1) e (3.2) pela profundidade da camada, após algumas manipulações algébricas, e considerando-se ainda as equações (3.3) a (3.5) com $y_0 = 0$, fornece

$$\frac{\partial(hu^2)}{\partial x} + \frac{\partial(huv)}{\partial y} - (f_0 + \beta y) \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{g'}{2} \frac{\partial h^2}{\partial x} \quad \text{e} \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial(huv)}{\partial x} + \frac{\partial(hv^2)}{\partial y} - (f_0 + \beta y) \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{g'}{2} \frac{\partial h^2}{\partial y}. \quad (3.7)$$

É importante destacar que o domínio de estudo D_0 possui dimensões supostas constantes com o tempo e que suas fronteiras fixas são definidas por \emptyset . Integrando-se as expressões (3.6) e (3.7) sobre toda a extensão horizontal do domínio, a qual possui seção S, obtém-se como resultado

$$\iint_S \frac{\partial(hu^2)}{\partial x} dx dy + \iint_S \frac{\partial(huv)}{\partial y} dx dy - \iint_S (f_0 + \beta y) \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dy = -\frac{g'}{2} \iint_S \frac{\partial h^2}{\partial x} dx dy \quad \text{e} \quad (3.8)$$

$$\iint_S \frac{\partial(huv)}{\partial x} dx dy + \iint_S \frac{\partial(hv^2)}{\partial y} dx dy - \iint_S (f_0 + \beta y) \frac{\partial \psi}{\partial y} dx dy = -\frac{g'}{2} \iint_S \frac{\partial h^2}{\partial y} dx dy. \quad (3.9)$$

A expansão do terceiro termo de (3.8) e (3.9) fornece

$$\begin{aligned} & \iint_S \frac{\partial(hu^2)}{\partial x} dx dy + \iint_S \frac{\partial(huv)}{\partial y} dx dy - f_0 \iint_S \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dy - \dots \\ & \dots - \beta \iint_S \frac{\partial(y\psi)}{\partial x} dx dy + \frac{g'}{2} \iint_S \frac{\partial h^2}{\partial x} dx dy = 0 \end{aligned} \quad \text{e} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned}
 & \iint_S \frac{\partial(huv)}{\partial x} dx dy + \iint_S \frac{\partial(hv^2)}{\partial y} dx dy - f_0 \iint_S \frac{\partial\psi}{\partial y} dx dy - \dots \\
 & \dots - \beta \iint_S \frac{\partial(y\psi)}{\partial y} dx dy + \beta \iint_S \psi dx dy + \frac{g'}{2} \iint_S \frac{\partial h^2}{\partial y} dx dy = 0 .
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

O Teorema de Stokes (e.g., [Milne-Thomson, 1968](#)), que pode ser definido por (onde m e n são funções)

$$\iint (\partial m / \partial x - \partial n / \partial y) dx dy = \oint (n dx + m dy) ,$$

permite transformar as integrais de superfície em integrais de linha ao longo do contorno de D_0 . A aplicação deste teorema nas expressões (3.10) e (3.11) resulta

$$\oint_{\phi} huv dx - \oint_{\phi} [hu^2 + g'h^2/2 - (f_0 + \beta y)\psi] dy = 0 \quad \text{e} \tag{3.12}$$

$$\oint_{\phi} huv dy - \oint_{\phi} [hv^2 + g'h^2/2 - (f_0 + \beta y)\psi] dx + \beta \iint_S \psi dx dy = 0 . \tag{3.13}$$

Os círculos com flechas nas equações (3.12) e (3.13) indicam que as integrais de linha foram realizadas no sentido anti-horário. Considerando-se que o contorno \emptyset possui quatro seções distintas (numeradas de 1 a 4, ver figura 3.1), a equação (3.12) pode ser expandida na forma

$$\int_B^C [hu^2 + g'h^2/2 - (f_0 + \beta y)\psi] dy + \int_D^A [hu^2 + g'h^2/2 - (f_0 + \beta y)\psi] dy = 0 . \tag{3.14}$$

Na obtenção da expressão (3.14) foi considerado que o primeiro termo da equação (3.12) é nulo, tendo-se em vista que pelo menos uma das duas velocidades u e v é nula em cada um dos quatro contornos. Além disso, tem-se que $dy = 0$ nos contornos 1 (AB) e 3 (CD). A equação integrada do momentum zonal (3.14) mostra que a força aplicada no domínio de estudo D_0 pela corrente zonal que nele penetra é balanceada pela reação da parede à força que o domínio nela exerce, a qual é aplicada em D_0 . Este equilíbrio zonal de forças é mostrado na figura 3.2.

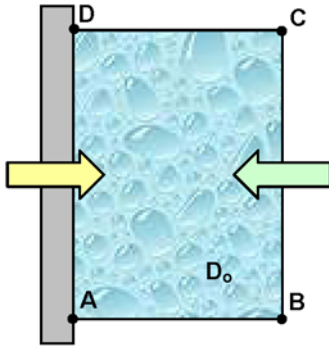


Figura 3.2 – Forças que atuam zonalmente no cenário em que o domínio de estudo possui uma parede meridional e uma corrente zonal penetra em D_0 pelo seu contorno leste (ver figura 3.1). A seta amarela indica a reação da parede e corresponde à integral da direita da equação (3.14). A seta verde assinala a força aplicada em D_0 pela corrente zonal que nele penetra, o que corresponde à integral da esquerda da expressão (3.14).

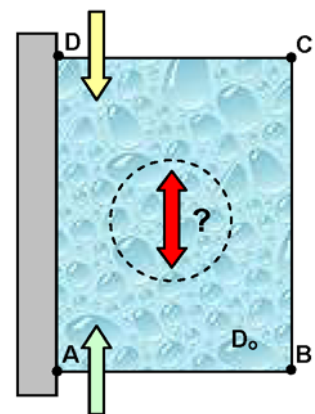
Aplicando-se desenvolvimento similar na equação meridional (3.13), e considerando-se ainda $dx = 0$ nos contornos 2 (BC) e 4 (DA), obtém-se como resultado:

$$\int_A^B \left[hv^2 + g'h^2/2 - (f_0 + \beta y)\psi \right] dx + \int_C^D \left[hv^2 + g'h^2/2 - (f_0 + \beta y)\psi \right] dx - \dots \quad (3.15)$$

$$\dots - \iint_S \beta \psi dx dy = 0 .$$

A equação integrada do momentum meridional (3.15) possui três termos. Os dois primeiros são devidos às forças “foguetes” aplicadas no domínio de estudo por correntes que deixam D_0 ou que nele penetram. Nas duas situações as forças possuem o mesmo sentido, ou seja, são dirigidas para dentro do domínio. O terceiro termo, o qual incide sobre a região de estudo inteira, se deve à influência do parâmetro β sobre determinadas feições internas ao domínio (onde obrigatoriamente existe uma função corrente ψ não nula). Este termo, o qual é vital para o desenvolvimento deste trabalho, será abordado em maiores detalhes no próximo capítulo. Este equilíbrio meridional de forças é mostrado na figura 3.3.

Figura 3.3 – Forças que atuam meridionalmente no cenário em que o domínio de estudo possui uma parede meridional e uma corrente zonal penetra em D_0 pelo seu contorno leste (ver figura 3.1). Independentemente do sentido das correntes meridionais (saindo ou entrando no domínio) a força que elas aplicam no domínio é sempre exercida para dentro deste. A seta verde (amarela) da figura indica a força aplicada em D_0 pela corrente meridional que flui para sul (norte) e que corresponde à primeira (segunda) integral da equação (3.15). A seta vermelha, correspondente à terceira integral da expressão (3.15), indica uma força devida ao efeito β em alguma feição interna do domínio de estudo (a origem e o sentido desta força será detalhada no Capítulo 4).



3.1.2. DOMÍNIO DE ESTUDO COM UMA PAREDE INCLINADA

As equações integradas do momentum zonal e meridional¹¹ serão agora desenvolvidas para um domínio de estudo D_o que possui uma borda continental (parede) inclinada. A figura 3.4 mostra este domínio para o mesmo exemplo da seção anterior. A convenção de cores das setas foi mantida. Cabe destacar a existência de dois sistemas de coordenadas retangulares xy e XY os quais possuem um ângulo θ entre eles. Na seção anterior foram desenvolvidas equações para a situação em que o ângulo θ é nulo e onde os sistemas xy e XY se confundiriam.

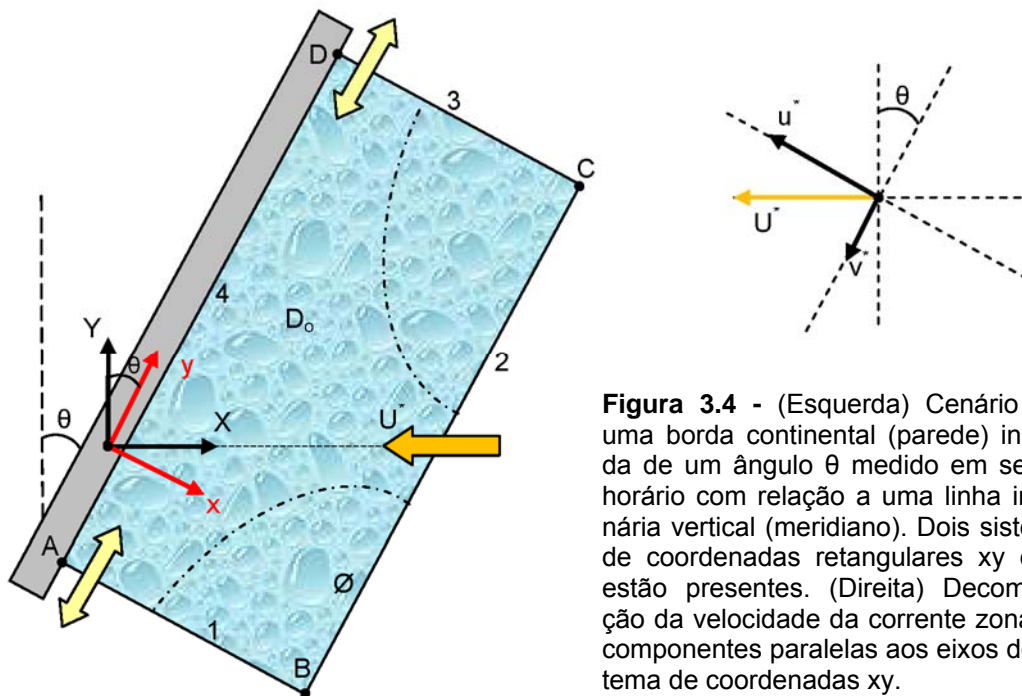


Figura 3.4 - (Esquerda) Cenário com uma borda continental (parede) inclinada de um ângulo θ medido em sentido horário com relação a uma linha imaginária vertical (meridiano). Dois sistemas de coordenadas retangulares xy e XY estão presentes. (Direita) Decomposição da velocidade da corrente zonal em componentes paralelos aos eixos do sistema de coordenadas xy .

As variáveis associadas ao sistema de coordenadas XY serão sempre diferenciadas das outras pela presença de uma estrela no símbolo da variável (como a velocidade da corrente zonal U^* , por exemplo). O parâmetro de Coriolis f é agora expresso por

$$f = f_0 + \beta(Y - Y_0), \quad (3.16)$$

onde Y_0 é a coordenada da latitude central do domínio no sistema de coordenadas XY . A variação do parâmetro de Coriolis ocorre, de forma direta, neste sistema de coordenadas.

¹¹ Neste cenário a equação integrada do momentum na direção y é aplicada paralelamente à parede.

As equações (3.8) e (3.9) são ainda válidas no novo sistema de coordenadas xy da figura 3.4. Elas são aqui reproduzidas por conveniência, onde a equação (3.16) foi empregada assumindo-se que $Y_0 = 0$.

$$\iint_s \frac{\partial(hu^2)}{\partial x} dx dy + \iint_s \frac{\partial(huv)}{\partial y} dx dy - \iint_s (f_0 + \beta Y) \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dy = -\frac{g'}{2} \iint_s \frac{\partial h^2}{\partial x} dx dy, \quad (3.17)$$

$$\iint_s \frac{\partial(huv)}{\partial x} dx dy + \iint_s \frac{\partial(hv^2)}{\partial y} dx dy - \iint_s (f_0 + \beta Y) \frac{\partial \psi}{\partial y} dx dy = -\frac{g'}{2} \iint_s \frac{\partial h^2}{\partial y} dx dy. \quad (3.18)$$

Como a coordenada Y é uma função de (x,y) , ou seja, $Y(x,y) = -x \operatorname{sen} \theta + y \operatorname{cos} \theta$, as equações (3.17) e (3.18) resultam

$$\begin{aligned} & \iint_s \frac{\partial(hu^2)}{\partial x} dx dy + \iint_s \frac{\partial(huv)}{\partial y} dx dy - f_0 \iint_s \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dy - \dots \\ & \dots - \beta \iint_s \frac{\partial Y \psi}{\partial x} dx dy + \beta \iint_s \psi \frac{\partial Y}{\partial x} dx dy = -\frac{g'}{2} \iint_s \frac{\partial h^2}{\partial x} dx dy \end{aligned} \quad \text{e} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} & \iint_s \frac{\partial(huv)}{\partial x} dx dy + \iint_s \frac{\partial(hv^2)}{\partial y} dx dy - f_0 \iint_s \frac{\partial \psi}{\partial y} dx dy - \dots \\ & \dots - \beta \iint_s \frac{\partial Y \psi}{\partial y} dx dy + \beta \iint_s \psi \frac{\partial Y}{\partial y} dx dy = -\frac{g'}{2} \iint_s \frac{\partial h^2}{\partial y} dx dy. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Aplicando-se o Teorema de Stokes nas equações (3.19) e (3.20), e utilizando-se ainda a expressão de $Y(x,y)$ anterior, obtém-se

$$\oint_{\phi} huv dx - \oint_{\phi} \left[hu^2 + g'h^2/2 - (f_0 + \beta Y)\psi \right] dy + \beta \operatorname{sen} \theta \iint_s \psi dx dy = 0 \quad \text{e} \quad (3.21)$$

$$\oint_{\phi} huv dy - \oint_{\phi} \left[hv^2 + g'h^2/2 - (f_0 + \beta Y)\psi \right] dx + \beta \operatorname{cos} \theta \iint_s \psi dx dy = 0. \quad (3.22)$$

Caso $\theta = 0^\circ$ resultaria $Y = y$ e as expressões (3.21) e (3.22) teriam a mesma forma que as equações (3.12) e (3.13) desenvolvidas na seção anterior (para uma parede meridional). A equação (3.21) com os seus contornos discriminados tem como forma

$$\int_B^C [hu^2 + g'h^2/2 - (f_0 + \beta Y)\psi] dy + \int_D^A [hu^2 + g'h^2/2 - (f_0 + \beta Y)\psi] dy - \dots \quad (3.23)$$

$$\dots - \beta \sin\theta \iint_S \psi dx dy = 0 .$$

A equação (3.23) mostra uma parcela extra (terceira integral) com relação à equação análoga da seção anterior, que é uma componente perpendicular à parede da força devida à influência do parâmetro β em alguma feição no interior de D_0 . Para uma parede meridional este termo extra não existe. Esta nova parcela influenciará o balanço zonal juntamente com aquelas devidas à força aplicada em D_0 pela componente em x da corrente zonal e pela reação da parede.

Analogamente, a equação (3.22), com seus contornos discriminados, resulta

$$\int_B^C huv dy - \int_A^B [hv^2 + g'h^2/2 - (f_0 + \beta Y)\psi] - \dots \quad (3.24)$$

$$\dots - \int_C^D [hv^2 + g'h^2/2 - (f_0 + \beta Y)\psi] dx + \beta \cos\theta \iint_S \psi dx dy = 0 .$$

De mesma forma que a equação zonal, a expressão (3.24) também apresenta um termo extra, pois agora o produto “huv” não é mais nulo no contorno 2. Com $\theta = 0^\circ$ este termo desapareceria, pois a velocidade meridional v seria nula. Outra diferença reside no seu último termo que agora é uma componente do termo original (com a parede meridional).

A partir deste ponto cabe destacar que, apesar das duas equações integradas do momentum zonal e meridional terem sido desenvolvidas para um melhor entendimento do leitor, o interesse para este trabalho reside apenas na utilização da equação meridional¹². O primeiro termo da equação (3.24) é o foco de atenção agora, pois ele está escrito no sistema de coordenadas xy e a velocidade zonal é conhecida no sistema XY .

A figura 3.5 mostra uma ampliação da seção leste do domínio de estudo D_0 , onde são destacadas as coordenadas relacionadas com a corrente zonal nos dois sistemas de coordenadas xy e XY .

¹² O foco deste trabalho reside no encontro entre vórtices e uma borda continental (parede) e a consequente repercussão deste encontro ao longo da parede, conforme será visto no Capítulo 4.

A primeira integral do lado esquerdo de (3.24) pode ser escrita como:

$$\int_B^C h u v dy = \int_{y_B}^{y_C} h(x_e, y) u(x_e, y) v(x_e, y) dy. \quad (3.25)$$

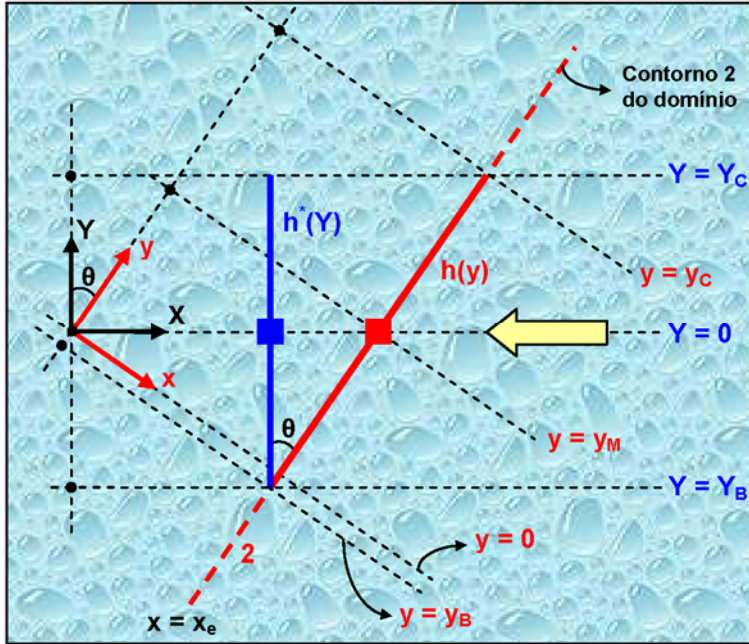


Figura 3.5 – Ampliação do contorno leste do domínio de estudo D_0 . A linha sólida azul indica a largura meridional da corrente zonal que é representada pela seta amarela, enquanto a linha sólida vermelha corresponde à extensão desta corrente que está atravessando o contorno leste (inclinado) do domínio de estudo, ou seja, o lado BC (leste) da figura 3.4, representado pela linha vermelha tracejada. Os quadrados azul e vermelho indicam os pontos em que a profundidade da corrente é máxima.

Na equação (3.25) os termos dentro da integral da direita desenvolvem-se ao longo da linha sólida vermelha mostrada na figura 3.5, ou seja, estão escritos no sistema de coordenadas xy . A coordenada zonal x_e indica a posição do contorno leste (BC) do domínio. O objetivo agora é transformar esta expressão (3.25), deixando-a em função das variáveis que descrevem a corrente zonal, as quais estão escritas no sistema XY . Esta transformação não é nada trivial. Deve-se recordar que as variáveis escritas no sistema XY possuem uma estrela em sua notação.

A figura 3.4 (direita) mostra que $u(y) = U^*(Y)\cos\theta$ e $v(y) = U^*(Y)\sin\theta$. Focando-se agora nos pontos destacados pelos quadrados da figura 3.5 pode-se escrever para o quadrado azul $h^* = H$ e $Y = 0$, onde H é a máxima profundidade da corrente zonal (escrita sem estrela, pois esta profundidade vale para os dois sistemas de coordenadas). De forma similar, no quadrado vermelho, $h = H$ e $y = y_M$. A observação da figura 3.5 deixa claro que as profundidades nos quadrados são iguais nos dois sistemas de coordenadas, o que se estende ao longo das linhas azul e vermelha, ou seja, $h^*(Y) = h(y)$. A análise da figura 3.5 permite escrever

$$Y(x_e, y) = \cos\theta(y - y_M). \quad (3.26)$$

Com esta expressão (3.26) os limites de integração aplicados em (3.25) resultam $y_C = y_M + Y_C / \cos\theta$ e $y_B = y_M + Y_B / \cos\theta$. Com todas estas considerações a integral descrita em (3.25) pode ser expressa na forma

$$\int_{y_B}^{y_C} h_2(y)u_2(y)v_2(y)dy = \sin\theta\cos\theta \int_{y_M+Y_B/\cos\theta}^{y_M+Y_C/\cos\theta} h^* [\cos\theta(y - y_M)] \dots \dots U^* [\cos\theta(y - y)] U^* [\cos\theta(y - y_M)] dy. \quad (3.27)$$

Na equação (3.27) as expressões $\text{var}^*[\dots]$ que fazem parte da integral da direita indicam que var^* é uma função de [...], ou seja, $\text{var}^* = \text{var}^*[\dots]$. O índice 2 do lado esquerdo indica que as variáveis pertencem ao contorno 2 (BC) do domínio de estudo.

A relação entre os elementos diferenciais dos dois sistemas de coordenadas é dada por $dy = (\cos\theta)^{-1}dY$, a qual, aplicada em (3.27) transforma esta expressão em

$$\int_{y_B}^{y_C} h_2(y)u_2(y)v_2(y)dy = \sin\theta \int_{Y_B}^{Y_C} h^*(Y) [U^*(Y)]^2 dY. \quad (3.28)$$

Esta equação (3.28) mostra que a primeira integral do lado esquerdo da expressão (3.25) pode ser facilmente calculada, não sendo necessária nenhuma conversão do sistema original, que descreve as equações da corrente zonal no sistema XY, para o novo sistema de coordenadas xy. Com a utilização de (3.28) a equação integrada do momentum paralelo à parede (3.24) assume a sua forma final, descrita por

$$\begin{aligned} & \sin\theta \int_{Y_B}^{Y_C} h^* U^{*2} dY - \int_A^B [hv^2 + g'h^2/2 - (f_0 + \beta Y)\psi] dx - \dots \\ & \dots - \int_C^D [hv^2 + g'h^2/2 - (f_0 + \beta Y)\psi] + \beta \cos\theta \iint_S \psi dx dy = 0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

A primeira integral de (3.29) representa a componente paralela à parede (dirigida para sudoeste) da força dirigida para oeste exercida no domínio pela corrente zonal que penetra em D_0 , a qual se soma às forças paralelas á parede exercidas em D_0 pelas correntes que circulam pelos contornos sul e norte do domínio (segunda e terceiras integrais) e também à componente paralela à parede da força oriunda do efeito β que age

sobre feições internas do domínio de estudo (que serão discutidas com maiores detalhes no Capítulo 4). Fazendo-se $\theta = 0^\circ$ na expressão (3.29) obtém-se a equação meridional desenvolvida na seção anterior (com uma parede meridional). Este equilíbrio de forças na direção paralela à parede, na situação de uma parede inclinada, é mostrado na figura 3.6.

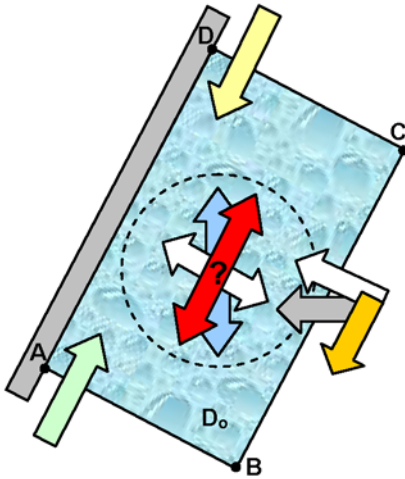


Figura 3.6 – Forças que atuam paralelas à parede no cenário em que o domínio de estudo possui uma borda continental (parede) inclinada e uma corrente zonal penetra em D_0 pelo seu contorno leste (ver figura 3.4). A seta laranja mostra a componente paralela à parede da força (seta cinza) exercida em D_0 pela corrente zonal, que corresponde a primeira integral da equação (3.29). A seta verde (amarela) da figura indica a força aplicada em D_0 pela corrente paralela à costa que flui para sudoeste (nordeste) e que corresponde a segunda (terceira) integral da expressão (3.29). A seta vermelha, correspondente à quarta integral da equação (3.29), indica a componente paralela à parede de uma força (seta azul) devida ao efeito β em alguma feição interna do domínio de estudo (cuja origem e sentido será detalhada no Capítulo 4). As forças brancas fazem parte do equilíbrio de forças perpendicular à parede, onde a reação da parede não é mostrada na figura.

3.2. A EQUAÇÃO INTEGRADA DA MASSA

A equação integrada da massa será desenvolvida nesta seção. A equação da continuidade de águas rasas para um sistema em estado estacionário é dada por

$$\frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0. \quad (3.30)$$

A integração da equação (3.30) sobre toda a extensão horizontal do domínio de estudo, seguida da aplicação do Teorema de Stokes, resulta

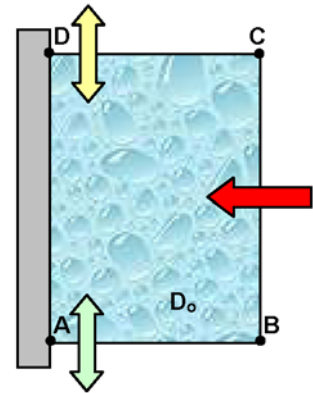
$$\oint_{\phi} hudy - \oint_{\phi} hvdx = 0. \quad (3.31)$$

Expandindo-se a equação (3.31) nas quatro seções do contorno ϕ tem-se como resultado, na situação de uma parede meridional, a expressão

$$\int_B^C hudy - \int_A^B hvdx - \int_C^D hvdx = 0. \quad (3.32)$$

A figura 3.7 mostra os transportes associados com os termos da equação (3.32):

Figura 3.7 – Transportes no domínio de estudo em que o cenário possui uma parede meridional e onde uma corrente zonal penetra em D_o pelo seu contorno leste. A seta vermelha é o transporte da corrente zonal, correspondente à primeira integral da equação (3.32). A seta verde (amarela) da figura indica o transporte da corrente meridional que circula no contorno sul (norte) e que corresponde à segunda (terceira) integral da expressão (3.32).



[37] Na situação de uma parede inclinada, e aplicando-se o mesmo procedimento utilizado na equação integrada do momentum, a expressão (3.32) transforma-se em

$$\int_{Y_B}^{Y_C} h^* U^* dY - \int_A^B h v dx - \int_C^D h v dx = 0. \quad (3.33)$$

A figura 3.8 mostra os transportes associados com os termos da equação (3.33):

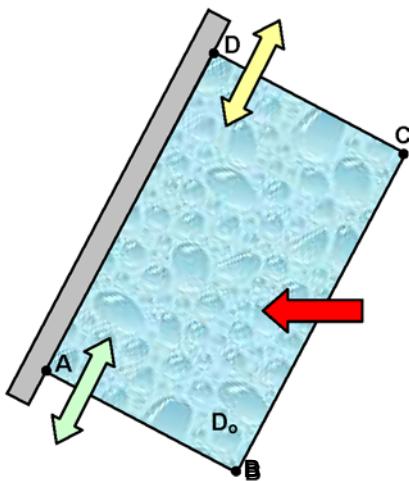


Figura 3.8 – Transportes no domínio de estudo em que o cenário possui uma parede inclinada e uma corrente zonal penetra em D_o pelo seu contorno leste. A seta vermelha é o transporte da corrente zonal, correspondente à primeira integral da equação (3.33), a qual está escrita no sistema de coordenadas XY (ver seção 3.1.2). A seta verde (amarela) da figura indica o transporte da corrente paralela à parede que circula no contorno sul (norte) do domínio de estudo e que corresponde à segunda (terceira) integral da expressão (3.33).

3.3. SUMÁRIO DAS EQUAÇÕES

Nas seções 3.1 e 3.2 as equações integradas do momentum e da massa foram desenvolvidas. Duas situações foram contempladas, ou seja, com uma parede meridional e depois suposta inclinada. As equações que serão utilizadas neste trabalho são agora

repetidas neste sumário, visando facilitar o acesso rápido do leitor sempre que isto se fizer necessário. As equações que foram desenvolvidas neste Capítulo 3 são:

(a) Equação integrada do momentum zonal com uma parede meridional

$$\int_B^C [hu^2 + g'h^2/2 - (f_0 + \beta y)\psi] dy + \int_D^A [hu^2 + g'h^2/2 - (f_0 + \beta y)\psi] dy = 0. \quad (3.34)$$

(b) Equação integrada do momentum meridional com uma parede meridional

$$\int_A^B [hv^2 + g'h^2/2 - (f_0 + \beta y)\psi] dx + \int_C^D [hv^2 + g'h^2/2 - (f_0 + \beta y)\psi] dx - \dots \\ \dots - \iint_S \beta \psi dx dy = 0. \quad (3.35)$$

(c) Equação integrada do momentum paralelo à parede com uma parede inclinada

$$\text{sen}\theta \int_{Y_B}^{Y_C} h^* U^{*2} dY - \int_A^B [hv^2 + g'h^2/2 - (f_0 + \beta Y)\psi] dx - \dots \\ \dots - \int_C^D [hv^2 + g'h^2/2 - (f_0 + \beta Y)\psi] dx + \beta \cos\theta \iint_S \psi dx dy = 0. \quad (3.36)$$

(d) Equação integrada da massa com uma parede meridional

$$\int_B^C hudy - \int_A^B hvdx - \int_C^D hvdx = 0. \quad (3.37)$$

(e) Equação integrada da massa com uma parede inclinada

$$\int_{Y_B}^{Y_C} h^* U^* dY - \int_A^B hvdx - \int_C^D hvdx = 0. \quad (3.38)$$

Nas equações (3.36) e (3.38) a variável Y é dada por $Y = -x\text{sen}\theta + y\text{cos}\theta$, onde θ é o ângulo de inclinação da parede medido no sentido horário, a partir do norte, com relação a uma linha vertical imaginária (meridiano).

3.4. VÓRTICES E SUAS PRINCIPAIS EQUAÇÕES NO PLANO-f

Tendo em vista a escassa literatura nacional a respeito de vórtices, esta seção visa apresentar ao leitor as principais equações que descrevem o comportamento de vórtices no plano-f. O trabalho de [Flierl \(1979\)](#) continua sendo uma ótima referência para o leitor interessado em expandir seus conhecimentos sobre vórtices. Devido à geometria dos vórtices é conveniente que as equações que descrevem a dinâmica destas feições sejam expressas em coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , onde r é o raio, θ o deslocamento angular medido em sentido anti-horário (convenção) e z é a altura (profundidade). O Anexo A deste trabalho mostra a transformação das equações do momentum, da continuidade, da conservação da vorticidade potencial e das funções corrente, originalmente escritas em coordenadas retangulares, para coordenadas cilíndricas.

As equações do momentum e da continuidade, em coordenadas cilíndricas, são expressas por:

$$\text{Momentum (1)} \quad u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} - f v_\theta + g' \frac{\partial h}{\partial r} = 0, \quad (3.39)$$

$$\text{Momentum (2)} \quad u_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{u_r v_\theta}{r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + f u_r + \frac{g'}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} = 0 \text{ e} \quad (3.40)$$

$$\text{Continuidade} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial (r h u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (h v_\theta)}{\partial \theta} = 0. \quad (3.41)$$

A figura 1.2 (página 3) mostra um esboço dos vórtices que representam possíveis soluções para este sistema de equações (no hemisfério norte). A combinação das equações (3.39) a (3.41) possibilita a obtenção da equação da conservação da vorticidade potencial¹³ ξ , o que resulta

¹³ Alternativamente, a equação da conservação da vorticidade potencial ξ em coordenadas retangulares, dada por $d\xi / dt = 0$ onde $\xi = [\partial v / \partial x - \partial u / \partial y + (f_0 + \beta y)]/h$, também pode ser convertida para coordenadas cilíndricas usando-se a mesma metodologia empregada para as equações do momentum e da continuidade, conforme pode ser visto no Anexo A.

$$\left[u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \left[\frac{\partial v_\theta / \partial r - (1/r)(\partial u_r / \partial \theta) + (v_\theta / r) + f}{h} \right] = 0. \quad (3.42)$$

A equação da continuidade (3.42) permite a definição de funções (corrente) de transporte similares àquelas que foram utilizadas em coordenadas retangulares (ver Anexo A). Suas expressões são (Flierl, 1979)

$$uh = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad \text{e} \quad v_\theta h = \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (3.43)$$

Cabe destacar que os vórtices possuem linhas de corrente fechadas. Supondo-se vórtices radialmente simétricos¹⁴, o que é uma característica destas feições no plano-f (Killworth, 1983), com vorticidade potencial constante, dada por $\xi = f/H_0$, onde H_0 é uma profundidade de referência, as equações (3.39), (3.40), (3.42) e (3.43) se resumem a

$$\text{Momentum} \quad \frac{v_\theta^2}{r} + fv_\theta - g' \frac{\partial h}{\partial r} = 0, \quad (3.44)$$

$$\text{Função (corrente) de transporte:} \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = v_\theta h \quad \text{e} \quad (3.45)$$

$$\text{Vorticidade} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial (rv_\theta)}{\partial r} + f = f \frac{h}{H_0}. \quad (3.46)$$

O primeiro termo do lado esquerdo de (3.44), chamado de termo ciclostrófico, está relacionado à força centrífuga que atua nas partículas de fluido que estão em movimento rotacional à volta do centro do vórtice. Quando este termo é significativo com relação aos outros dois não temos um fluxo geostrófico no interior do vórtice e sim um fluxo gradiente (do termo em inglês *gradient flow*), caracterizado por um equilíbrio entre um termo de curvatura (força centrífuga), a força de Coriolis e o gradiente de pressão (e.g., Neumann & Pierson Jr., 1966).

¹⁴ Feições radialmente simétricas possuem velocidade radial e derivadas $\partial(*)/\partial\theta$ nulas (Nof, 1981).

3.4.1. VÓRTICES COM VORTICIDADE POTENCIAL NULA

[47] Solucionando-se a equação (3.46) com o seu lado direito igual a zero obtém-se a expressão do perfil de velocidade tangencial (orbital) de vórtices que possuem vorticidade potencial nula ($\xi = 0$), a qual resulta (Nof, 1981)

$$v_{\theta} = -f_0 r / 2. \quad (3.47)$$

A equação (3.44), conjuntamente com a utilização da expressão (3.47), fornece o perfil da profundidade h_v deste vórtice cuja equação é

$$h_v = \frac{f_0^2 (r_0^2 - r^2)}{8g'}. \quad (3.48)$$

Na equação (3.48) r_0 é o raio do vórtice. Quando $r = r_0$ a profundidade do vórtice será nula o que caracteriza o vórtice tipo lente. A profundidade máxima H_v desta feição (quando então $r = 0$) é expressa por

$$H_v = f_0^2 r_0^2 / 8g'. \quad (3.49)$$

O raio de deformação do vórtice é expresso por

$$R_{De} = \sqrt{g'H_v} / f_0. \quad (3.50)$$

A utilização da expressão (3.49) em (3.50) permite o estabelecimento de uma relação entre o raio do vórtice e o seu raio de deformação, que resulta na relação já citada no Capítulo 1:

$$r_0 = 2\sqrt{2}R_{De}. \quad (3.51)$$

CAPÍTULO 4

O ENCONTRO DE UM “TREM” DE VÓRTICES DO TIPO LENTE COM A BORDA CONTINENTAL

Este capítulo tem como objetivo principal o estudo da interação entre um “trem” de vórtices anticiclônicos, não-lineares, do tipo lente e a borda continental (parede) no plano- β . A quantificação do transporte de volume ao longo da borda, decorrentes deste encontro, é um dos objetivos específicos deste estudo, assim como a influência do tipo de parede (meridional ou inclinada) neste processo de interação. A modelagem analítica apresentada neste capítulo será realizada com feições do tipo lente. Todas as equações serão desenvolvidas com as variáveis em sua forma dimensional visando o melhor entendimento do leitor.

A representação analítica de um “trem” de vórtices é uma tarefa bastante complicada tendo em vista que estas feições movem-se como corpos isolados, o que dificulta o estabelecimento de um sistema de referência para a situação em que vários vórtices movem-se simultaneamente, uma vez que o movimento destas feições é uma mistura de rotação e translação. Geralmente o sistema de referência é fixado no centro da feição (e.g., [Nof, 1988ab](#) e [Nof, 1999](#)). Nesta situação o transporte líquido do vórtice será nulo e a equação meridional do momentum ganhará um termo extra fc , em que c é a velocidade translacional do vórtice (e.g., [Nof, 1982](#)). Como a ênfase deste trabalho é justamente na questão do transporte uma nova metodologia para a representação do “trem” de vórtices será empregada: uma corrente de dupla frente.

4.1. A CORRENTE DE DUPLA FRENTE

Uma corrente (teórica) geostrófica de dupla frente será utilizada neste trabalho para a representação do “trem” de vórtices. Esta metodologia foi adotada tendo em vista que o trabalho está focado na influência do transporte oriundo destas feições ao longo da borda continental (para futura comparação com o transporte da corrente de contorno

oeste), após o seu contato com a parede, e esta corrente conterà a mesma vorticidade e transporte do “trem” de vórtices. A grande vantagem da adoção desta corrente é que ela permitirá facilmente que um referencial fixo seja instalado dentro do domínio de estudo. Cabe destacar que esta corrente não conterà todas as características do “trem” de vórtices que ela representará, ou seja, mesmo transporte, vorticidade, energia e momentum (linear e angular). Nestas condições não seria possível a adoção deste tipo de corrente. A modelagem analítica de um “trem” de vórtices não foi encontrada na literatura especializada e a utilização desta metodologia parece ser uma primeira tentativa em tal sentido.

A figura 4.1 mostra a corrente zonal de dupla frente utilizada neste trabalho, a qual possui profundidade máxima H_{cz} e largura $L_{cz} = y_5 - y_8$, sendo que as coordenadas meridionais y_5 e y_8 indicam a posição das suas frentes. Os dois lados da corrente são assimétricos, ou seja, tem-se $|y_5| > |y_8|$ devido à consideração do plano- β . Esta característica física da corrente zonal garante que o seu transporte líquido será dirigido para oeste, reproduzindo-se então o transporte líquido do “trem” de vórtices que também é neste sentido¹⁵.

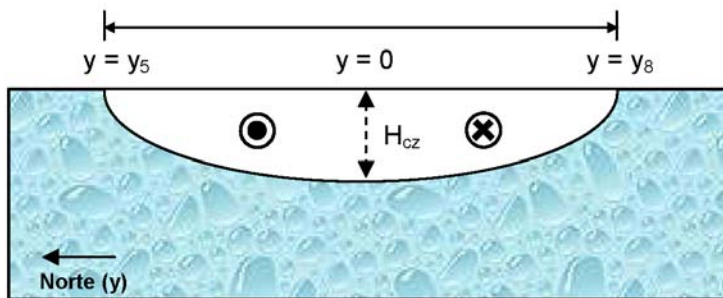


Figura 4.1 – Perfil de profundidade da corrente zonal de dupla frente utilizada neste trabalho, que representará o “trem” de vórtices anticiclônicos, vista da borda continental em direção ao oceano aberto. As coordenadas y_5 e y_8 indicam a posição das frentes da corrente e o sentido do fluxo é indicado pelos círculos.

A força centrífuga que atua no interior dos vórtices faz com que o movimento no interior destas feições não seja geostrófico (ver Capítulo 3). A utilização de uma corrente zonal de dupla frente geostrófica tem como consequência imediata que os seus perfis de velocidade e de profundidade serão diferentes daqueles exibidos pelos vórtices que ela representa. A desconsideração do termo ciclostrófico no estudo de vórtices (e.g., [Csanady, 1979](#)) introduz alguns desvios nos perfis de velocidade e profundidade da

¹⁵ Supondo-se que os vórtices não estão sujeitos à advecção externa de correntes ou à ação de outros vórtices próximos.

feição, fato destacado em [Flierl \(1979\)](#). Este desvio está diretamente associado ao número de Rossby (R_o) do vórtice, pois a importância do termo ciclostrófico cresce com o aumento do valor deste parâmetro. Como a modelagem analítica será desenvolvida com uma corrente que possui o mesmo transporte e vorticidade do “trem” de vórtices, e não com estas feições em si, o fato de estarmos considerando a corrente geostrófica (o que facilita sobremaneira a sua modelagem analítica) parece ser plausível, o que será atestado pela modelagem numérica apresentada no Capítulo 5.

A modelagem analítica desenvolvida neste capítulo considerará vórtices cuja vorticidade de potencial ξ é nula, logo, a corrente de dupla frente utilizada também possuirá esta vorticidade. Partindo-se então da expressão $\xi = \partial v / \partial x - \partial u / \partial y + f = 0$ seguida de integração, e considerando-se a velocidade meridional nula, obtém-se uma expressão para o perfil de velocidade desta corrente, o qual é praticamente linear tendo em vista a magnitude do parâmetro β . A equação desta velocidade é dada por

$$u_{cz} = f_0 y + \beta y^2 / 2. \quad (4.1)$$

Utilizando-se agora a relação geostrófica $f u = -g' \partial h / \partial y$ a equação da profundidade da corrente zonal resulta

$$h_{cz} = H_{cz} - f_0^2 y^2 / 2g' - f_0 \beta y^3 / 2g' - \beta^2 y^4 / 8g'. \quad (4.2)$$

Na equação (4.1) u_{cz} é a velocidade zonal da corrente de dupla frente. Utilizou-se como condição de contorno que $u_{cz} = 0$ em $y = 0$. Na expressão (4.2) h_{cz} é a profundidade da corrente zonal e H_{cz} a sua máxima profundidade (ver figura 4.1). A condição de contorno neste caso estabelece que $h_{cz} = H_{cz}$ em $y = 0$. Resolvendo-se a equação (4.2) para $h_{cz} = 0$ e um dado valor de H_{cz} obtém-se as coordenadas y_8 e y_5 que posicionam as duas frentes da corrente

4.2. O ENCONTRO CORRENTE-PAREDE

Nas condições pré-estabelecidas na seção anterior pode-se então dizer que uma corrente zonal de dupla frente, com um fluxo dirigido para oeste em sua parte norte e um

fluxo para leste em sua parte sul incidirá sobre uma parede (a qual representa a borda continental) no hemisfério sul.

Duas situações serão analisadas no plano- β , sendo o primeiro cenário, chamado de modelo-1, aquele onde uma corrente zonal de dupla frente representará um “trem” de vórtices do tipo “lente”, i.e., vórtices que estão cercados por fluido de densidade diferente daquela do seu interior. Estes vórtices são obrigatoriamente anticiclônicos. Na segunda situação, chamada de modelo-2, a corrente zonal representará uma sequência de vórtices cercados por fluido de mesma densidade daquela de seu interior até uma determinada profundidade. Estes vórtices podem ser ciclônicos ou anticiclônicos [é indicado ao leitor rever a figura 1.2 (página 3) que mostra os perfis destes vórtices]. O transporte líquido destas correntes será sempre dirigido para oeste em virtude do movimento de vórtices isolados ser sempre neste sentido no plano- β .

As equações pertinentes ao encontro da corrente com a parede para o modelo-1 serão desenvolvidas neste capítulo. No Capítulo 6 as equações relativas a este encontro no cenário do modelo-2 serão abordadas. As equações governantes apresentadas no Capítulo 3 serão uma referência para os desenvolvimentos aqui apresentados.

Como será demonstrado ao longo deste capítulo será necessária a geração de um vórtice estacionário na zona de encontro corrente-parede para que as forças aplicadas no domínio de estudo pelas correntes meridionais (oriundas da divisão da corrente zonal quando esta encontra a borda continental e/ou da decomposição desta mesma corrente quando ela penetra o domínio com uma parede inclinada) possam ser equilibradas. O desenvolvimento analítico apresentado neste capítulo conduzirá a expressões matemáticas que permitirão o cálculo do raio do vórtice estacionário e dos transportes gerados ao longo da parede.

Dois cenários de borda continental (parede) serão contemplados neste estudo, ou seja, a corrente zonal encontrará, numa primeira instância, uma parede meridional e, em um segundo momento, este encontro se dará diante de uma borda inclinada. A primeira situação é um caso particular da segunda, mas mesmo assim a parede meridional será exemplificada em separado, pois isto facilitará o entendimento do leitor para o caso mais complexo envolvendo uma parede inclinada.

Na modelagem analítica desenvolvida neste trabalho será adotado um modelo de águas rasas de duas camadas, invíscido, em estado estacionário, onde a camada inferior, suposta imóvel, possui uma espessura h_2 muito superior à espessura h_1 da camada superior ($h_2 \gg h_1$). O estado estacionário suposto em nossa modelagem analítica será confrontado com a modelagem numérica desenvolvida no Capítulo 5 deste trabalho. O fluido da camada superior tem densidade ρ e o da camada abissal inferior $\rho + \Delta\rho$, sendo a gravidade “reduzida” g' dada por $g' = g\Delta\rho/\rho$ e onde $\Delta\rho/\rho \ll 1$. Maiores explicações de modelos de camadas podem ser encontradas em [Cushman-Roisin \(1994\)](#).

4.3. DOMÍNIO DE ESTUDO COM UMA PAREDE MERIDIONAL

O encontro entre uma corrente de dupla frente e uma parede meridional ocorre dentro do domínio de estudo ABCDA, o qual tem um esboço prévio apresentado na figura 4.2. O braço meridional dirigido para norte, resultante deste encontro, e o vórtice anticiclônico estacionário gerado na zona de encontro já são apresentados nesta mesma figura. As equações apresentadas neste capítulo sustentarão a necessidade do aparecimento desta nova feição no domínio de estudo. Os limites meridionais do domínio são $y = y_N$ ao norte e $y = y_S$ no seu extremo sul. Não há nenhuma proporção entre as larguras das duas correntes apresentadas nesta figura.

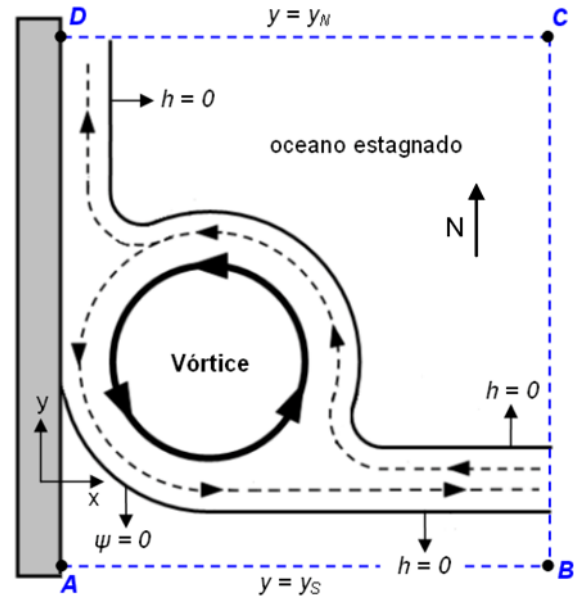
A figura 4.2 destaca ainda uma grande porção de oceano estagnado na parte superior do domínio de estudo. Outra porção existe também na parte sul abaixo da linha cheia onde a função transporte ψ foi assumida como zero. Para o leitor menos familiarizado com modelos de duas camadas cabe destacar que estas porções correspondem à camada inferior do modelo, pois nestes locais a camada superior inexistente.

Cabe destacar que no cenário do modelo-1 a única opção possível após o encontro da corrente com a borda continental é o surgimento de um fluxo meridional para norte, visto que o fluxo para sul é inviável¹⁶ para uma corrente de dupla frente que está representando uma seqüência de lentes, tendo em vista que este fluxo não teria uma seção perpendicular à parede finita. Este fluxo meridional equivale ao vazamento de uma len-

¹⁶ O que já não ocorre com o cenário do modelo-2, conforme será visto no Capítulo 6.

te anticiclônica que colide com uma parede, o qual ocorre no sentido da linha do Equador (e.g., Nof, 1999). O transporte do braço meridional dirigido para norte, que passa pela fronteira CD do domínio de estudo D_0 , é idêntico ao transporte líquido da corrente zonal que penetra em D_0 por BC.

Figura 4.2 – Cenário resultante do encontro da corrente de dupla frente com uma parede meridional. A profundidade nas duas frentes da corrente é nula, pois ela está representando um “trem” de vórtices do tipo lente. A função corrente é assumida ser nula na frente sul da corrente zonal. A figura mostra uma corrente meridional dirigida para norte e um vórtice estacionário oriundos do encontro da corrente com a parede. O texto detalhará este encontro assim como justificará a necessidade do surgimento do vórtice para que o equilíbrio meridional de forças se estabeleça.



4.3.1. A EQUAÇÃO INTEGRADA DO MOMENTUM MERIDIONAL

A equação (3.35, página 43) desenvolvida no Capítulo 3, a qual representa a equação integrada do momentum meridional (cenário com parede meridional), é aqui reproduzida por conveniência. O fluxo meridional através da seção AB é nulo (ver o esboço da figura 4.2), o que faz com que a equação (3.35, página 43) resulte

$$-\int_C^D \left[hv^2 + g'h^2/2 - (f_0 + \beta y)\psi \right] dx + \iint_S \beta \psi dx dy = 0. \quad (4.3)$$

O objetivo agora é encontrar uma relação entre os termos $g'h^2/2$ e $(f_0 + \beta y)\psi$ da equação (4.3). Assumindo-se que a corrente zonal é geostrófica quando $x \rightarrow \infty$ (x cresce para leste conforme o referencial na figura 4.2) pode-se escrever a relação

$$-(f_0 + \beta y) \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{g'}{2} \frac{\partial h^2}{\partial y}. \quad (4.4)$$

Integrando-se a equação (4.4) ao longo dos limites meridionais do domínio de estudo, dados por y_N e y_S (ver figura 4.2), resulta

$$(f_0 + \beta y)\psi \Big|_{y_S}^{y_N} - \beta \int_{y_S}^{y_N} \psi dy = g'h^2/2 \Big|_{y_S}^{y_N}. \quad (4.5)$$

Assumindo-se que $\psi = \psi_\infty$ e $h = h_\infty$ quando $x \rightarrow \infty$ (Arruda, 2002 e Arruda et al., 2004), onde os parâmetros ψ_∞ e h_∞ são função apenas de y , pode-se escrever a equação (4.5) na forma

$$(f_0 + \beta y)\psi_\infty \Big|_{y_S}^{y_N} - \beta \int_{y_S}^{y_N} \psi_\infty dy = g'h_\infty^2/2 \Big|_{y_S}^{y_N} \quad x \rightarrow \infty. \quad (4.6)$$

A consideração de vórtices do tipo lente faz com que o lado direito da equação (4.6) se torne nulo visto que a corrente zonal equivalente também possui profundidade nula em suas duas frentes. Além disso, por conveniência, optou-se por escolher $\psi_\infty = 0$ na porção de oceano estagnado situada do lado sul do domínio de estudo (ver figura 4.2). Com estas considerações a equação (4.6) transforma-se em

$$(f_0 + \beta y)\psi_\infty \Big|_{y_N} = \beta \int_{y_S}^{y_N} \psi_\infty dy. \quad (4.7)$$

Esta equação (4.7) será novamente utilizada em breve. Continuando-se com a aplicação da metodologia desenvolvida em Arruda (2002) e Arruda et al. (2004) será agora assumido que a corrente meridional que passa pela fronteira CD do domínio de estudo também é geostrófica, podendo-se então escrever a expressão

$$(f_0 + \beta y) \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{g'}{2} \frac{\partial h^2}{\partial x}. \quad (4.8)$$

A integração da equação (4.8) resulta em

$$(f_0 + \beta y)\psi + C = g'h^2/2. \quad (4.9)$$

Na expressão (4.9) C é uma constante de integração a ser determinada. Esta equação também é válida no ponto do domínio de estudo em que as coordenadas retangulares

são dadas por (∞, y_N) . Lembrando-se que a profundidade da camada superior é zero neste ponto a equação (4.9) transforma-se em

$$(f_0 + \beta y)\psi_\infty \Big|_{y_N} + C = 0. \quad (4.10)$$

Retornando-se à equação (4.7) e utilizando-se a expressão (4.10) chega-se à conclusão que a constante de integração C tem como expressão

$$C = -\beta \int_{y_S}^{y_N} \psi_\infty dy. \quad (4.11)$$

Aplicando-se (4.11) na equação (4.9) esta se transforma em

$$(f_0 + \beta y)\psi = g'h^2/2 + \beta \int_{y_S}^{y_N} \psi_\infty dy. \quad (4.12)$$

A utilização da equação (4.12) na expressão (4.3) resulta em

$$-\int_C^D \left[hv^2 - \beta \int_{y_S}^{y_N} \psi_\infty dy \right] dx + \iint_S \beta \psi dx dy = 0. \quad (4.13)$$

A equação integrada do momentum meridional (4.13) para o domínio de estudo ABCDA, assumindo-se que a largura da corrente meridional é L_{cn} , tem como expressão final

$$\int_0^{L_{cn}} hv^2 dx + \beta \iint_S (\psi - \psi_\infty) dx dy = 0. \quad (4.14)$$

Esta expressão é similar àquela apresentada em [Arruda \(2002\)](#) e [Arruda et al. \(2004\)](#). O primeiro termo da equação (4.14) representa a força “foguetes” dirigida para sul que é aplicada no domínio de estudo pela corrente meridional que deixa o domínio pela sua fronteira norte (correspondente à seta amarela da figura 3.3, página 35).

Uma análise de escala se faz necessária para um melhor entendimento do segundo termo da equação (4.14), o qual incide sobre toda a extensão do domínio de estudo, ou seja, é um somatório dos termos correspondentes às correntes zonal e meridional, ao

oceano estagnado e ao vórtice estacionário gerado no interior do domínio. Aliás, este termo que justificará a necessidade da presença deste vórtice em D_0 , conforme será demonstrado na seção seguinte.

4.3.2. ANÁLISE DE ESCALA

As escalas de alguns parâmetros da corrente zonal serão analisadas nesta seção, em especial a daqueles parâmetros relacionados com o transporte líquido desta corrente. Além disso, também será avaliada a ordem de cada termo que compõe a equação integrada do momentum meridional (4.14) buscando-se concluir quais termos desta equação são os mais relevantes no balanço meridional de forças. Um novo perfil da corrente zonal, mais detalhado, é apresentado na figura 4.3, onde algumas novas variáveis são introduzidas.

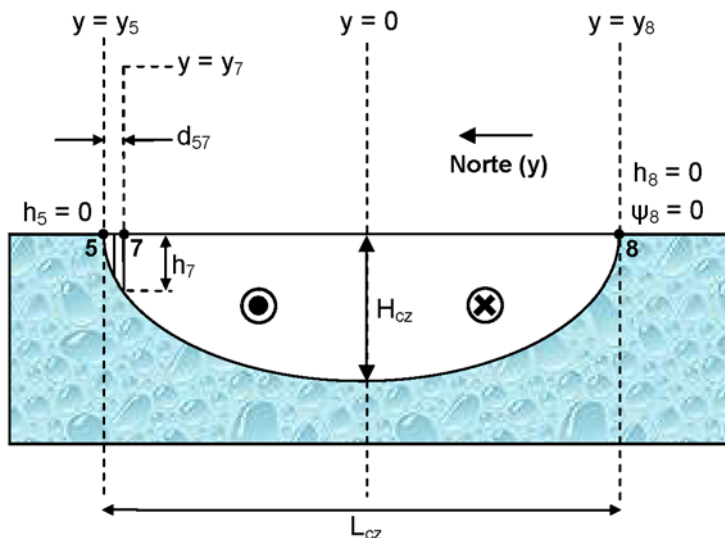


Figura 4.3 – Detalhamento do perfil de profundidade da corrente zonal de dupla frente. O transporte entre os pontos 7 e 8 é nulo. O transporte líquido da corrente ocorre na área hachurada entre os pontos 5 e 7. A largura desta seção é d_{57} e sua profundidade é h_7 . A função corrente ψ_8 foi suposta nula na frente sul da corrente zonal. Como esta corrente representa um “trem” de lentes a profundidade em suas duas frentes (h_5 e h_8) é nula.

Na figura 4.3 a largura L_{cz} da corrente zonal é assumida ser de¹⁷ $O(R_D)$, onde o raio de Rossby R_D da corrente é definido por $R_D = (g'H_{cz})^{1/2}/|f_0|$, onde H_{cz} é a sua máxima profundidade, a qual define a escala de profundidade para as correntes do domínio de estudo. O transporte que ocorre na área hachurada da corrente zonal entre os pontos 5 e 7, destacada no lado esquerdo do perfil mostrado na figura 4.3, a qual tem h_7 como sua máxima profundidade e largura d_{57} , corresponde ao transporte líquido da corrente no

¹⁷ A simbologia $O(*)$ indica a ordem da variável como uma função de (*).

plano- β . Este transporte líquido, por balanço de massa aplicado ao domínio de estudo, é o mesmo transporte que possui a corrente meridional que flui para norte pela seção CD. Conseqüentemente, o transporte proporcionado pela corrente zonal entre as coordenadas meridionais y_7 e y_8 deve ser nulo.

Tem-se como objetivo agora o desenvolvimento de expressões para as escalas dos parâmetros d_{57} e h_7 da área do transporte líquido. Para tal, uma expressão para o transporte da corrente zonal entre os pontos 7 e 8 será agora desenvolvida. A equação meridional geostrófica, depois de multiplicada pela profundidade, resulta

$$(f_0 + \beta y) \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{g'}{2} \frac{\partial h^2}{\partial y}. \quad (4.15)$$

A integração da equação (4.15) entre os pontos 7 e 8, considerando-se que $\psi_8 = 0$, $h_8 = 0$ e que ψ_7 deve também ser nulo, fornece como resultado

$$g'h_7^2/2 + \beta \int_8^7 \psi dy = 0. \quad (4.16)$$

Será assumido agora que as escalas para a corrente zonal de dupla frente são dadas por $[h] \sim O(H_{cz})$, $[y] \sim O(R_D)$ e $[\psi] \sim O(g'H_{cz}^2/|f_0|)$, onde a escala da função transporte ψ pode ser obtida a partir da expressão $\partial\psi/\partial y = -uh$. A escala da velocidade zonal é $[u] \sim O(g'H_{cz})^{1/2}$. A simbologia $[var]$ indica ordem de var.

A expressão $\varepsilon = \beta R_D / |f_0|$ é também introduzida, onde ε é um pequeno parâmetro adimensional ($\varepsilon \ll 1$) que define a razão entre a variação do parâmetro de Coriolis (dada por βR_D) ao longo da extensão meridional da corrente, a qual tem $O(R_D)$, e o próprio parâmetro de Coriolis f_0 (Nof, 1999). O parâmetro ε é nulo, por definição, no plano-f.

A ordem da profundidade h_7 (ver figura 4.3) pode ser desenvolvida agora a partir da equação (4.16). Comparando-se a ordem dos dois termos desta equação obtém-se:

$$g'[h_7]^2 = R_D \left| \frac{\varepsilon f_0}{R_D} \right| \frac{g'H_{cz}^2}{|f_0|},$$

e com esta identidade pode-se concluir que a referida ordem resulta

$$[h_7] \sim O(\varepsilon^{1/2} H_{cz}). \quad (4.17)$$

A ordem da distância d_{57} pode ser desenvolvida assumindo-se que a velocidade da corrente zonal é constante ao longo da zona entre os pontos 5 e 7. Esta velocidade é realmente praticamente constante tendo-se em vista que a largura da referida zona é muito pequena¹⁸. A relação geostrófica aplicada a esta pequena área entre as coordenadas meridionais y_5 e y_7 é dada por

$$(f_0 + \beta y)u = -g' \frac{\partial h}{\partial y}. \quad (4.18)$$

Como a distância d_{57} é muito pequena será assumido que a relação $\partial h / \partial y \approx h_7 / d_{57}$ é válida ao longo desta distância (deve-se lembrar que $h_5 = 0$). A ordem de d_{57} é obtida a partir das ordens dos termos da equação (4.18) que resulta na identidade

$$f_0 (g' H_{cz})^{1/2} = g' (\varepsilon^{1/2} H_{cz}) / [d_{57}]. \quad (4.19)$$

A partir da identidade (4.19), considerando-se $f_0 + \beta y \approx f_0$, obtém-se então para a ordem da distância d_{57}

$$[d_{57}] \sim O(\varepsilon^{1/2} R_D). \quad (4.20)$$

Conforme mostra a análise da ordem dos parâmetros associados com a zona correspondente ao transporte líquido da corrente zonal (largura e profundidade máxima) ambos possuem $O(\varepsilon^{1/2})$.

Um importante comparativo pode agora ser feito envolvendo a seção de transporte líquido da corrente zonal de dupla frente, a corrente meridional oriunda de seu contato com a parede (ambas abordadas neste trabalho) e o vazamento oriundo do contato de uma lente com uma parede analisado em [Nof \(1999\)](#). A ordem de d_{57} corresponde à

¹⁸ A velocidade de translação de um vórtice, conforme visto no Capítulo 1, depende de β , logo, o transporte da feição também é função deste parâmetro. Espera-se que a largura da seção do transporte líquido, em consequência, seja pequena.

ordem da largura da corrente meridional para norte, pois o transporte entre os pontos 5 e 7 da corrente zonal equivale ao transporte da corrente meridional. De mesma forma, a ordem da profundidade da corrente meridional deve ser a mesma de h_7 . Como nesta modelagem analítica a corrente meridional equivale ao vazamento oriundo das lentes quando elas entram em contato com a borda continental, que ocorre na direção da linha do Equador, espera-se que esta ordem seja a mesma utilizada em [Nof \(1999\)](#), que investigou o encontro de uma lente anticiclônica com uma parede. A figura 2.6 (página 28), retirada de [Nof \(1999\)](#), mostra que a largura do vazamento também possui $O(\epsilon^{1/2})$, confirmando então que as larguras da corrente meridional e do vazamento das lentes, após estas feições entrarem em contato com uma parede, possuem ordens semelhantes. A profundidade do vazamento da lente analisada em [Nof \(1999\)](#) também possui $O(\epsilon^{1/2})$, a mesma encontrada para h_7 . Cabe destacar que este trabalho estende o estudo de [Nof \(1999\)](#) ao encontro de um "trem" de vórtices com a borda continental e ainda investiga cenários com lentes e não-lentes e com a consideração de uma parede meridional e inclinada.

Como segunda tarefa desta seção os termos da equação (4.14) terão suas escalas analisadas. Por conveniência, esta equação é aqui reproduzida e renumerada:

$$\int_0^{L_{cn}} h v^2 dx + \beta \iint_S (\psi - \psi_\infty) dx dy = 0. \quad (4.21)$$

Antes desta análise de escala alguns destaques serão feitos:

1. Será assumida a priori a existência de um vórtice estacionário dentro do domínio de estudo, o qual possui uma profundidade máxima H_v . A escala da função transporte ψ_v deste vórtice será dada por $[\psi_v] \sim O(g'H_v^2 / |f_0|)$.
2. Definindo-se o raio de deformação deste vórtice como sendo $R_{De} = (g'H_v)^{1/2} / |f_0|$, a relação entre os raios de deformação do vórtice e da corrente zonal tem como resultado $H_v/H_{cz} = (R_{De}/R_D)^2$.
3. As escalas horizontais envolvidas em nosso domínio de estudo dependem unicamente da feição em análise e de sua localização. Assim a escala zonal da corrente

meridional que flui para norte é dada por $[x] \sim O(\varepsilon^{1/2}R_D)$, pois sua largura é da mesma ordem de d_{57} , mas tem-se $[x] \sim O(\ell)$ para a corrente zonal, onde ℓ é o comprimento do lado do domínio de estudo D_o , e ainda $[x] \sim O(R_{De})$ para o vórtice.

4. De mesma forma as escalas meridionais são dadas por $[y] \sim O(R_D)$ para a corrente zonal, $[y] \sim O(\ell)$ para a corrente meridional e $[y] \sim O(R_{De})$ para o vórtice.

Após estas considerações a análise dos termos da equação (4.21) pode ser agora iniciada. O primeiro termo do lado esquerdo desta equação, o qual corresponde ao momentum integrado da corrente meridional que flui para norte ao longo da borda continental, tem $O(\varepsilon g' H_{cz}^2 R_D)$.

O segundo termo do lado esquerdo de (4.21) exige um maior cuidado, visto que ele deve ser analisado sobre o domínio de estudo inteiro. Existem quatro lugares distintos para este termo dentro do domínio ABCDA, que são: (1) as áreas de oceano estagnado, que se encontram a norte e a sul de D_o , e as áreas onde: (2) a corrente zonal, (3) a corrente meridional e (4) o vórtice dominam (ver figura 4.2). Nas áreas de oceano estagnado este termo é obviamente nulo. Para as outras três áreas este segundo termo pode ser expandido em

$$\beta \iint_S (\psi - \psi_\infty) dx dy = \underbrace{\beta \iint_{S_{cz}} (\psi - \psi_\infty) dx dy}_{(a) \text{ corrente zonal}} + \underbrace{\beta \iint_{S_{cn}} (\psi - \psi_\infty) dx dy}_{(b) \text{ corrente meridional}} + \underbrace{\beta \iint_{S_v} (\psi - \psi_\infty) dx dy}_{(c) \text{ vórtice}}. \quad (4.22)$$

onde S_{cz} compreende a seção ocupada pela corrente zonal de dupla frente, S_{cn} é a seção ocupada pela corrente meridional para norte e S_v reúne a seção ocupada pelo vórtice estacionário. Todas estas seções são horizontais.

O termo (a) da equação (4.22) é nulo pela geometria das linhas de corrente ao longo da corrente zonal. Os termos (b) e (c) têm duas parcelas cada um, ou seja, uma parcela que é função de $\psi(x,y)$ e uma outra parte que depende de $\psi_\infty(y)$. As ordens das parcelas que dependem de $\psi(x,y)$ nos termos (b) e (c) da expressão (4.22) são demonstradas pelas expressões (4.23):

Termo (b) da corrente meridional [parcela dependente de $\psi(x,y)$]:

$$\left[\frac{\varepsilon |f_0|}{R_D} \right] \left[\frac{g'(\varepsilon^{1/2} H_{cz})^2}{|f_0|} \right] (\varepsilon^{1/2} R_D) \ell = \varepsilon^{5/2} g' H_{cz}^2 \ell. \quad (4.23a)$$

Termo (c) do vórtice estacionário [parcela dependente de $\psi(x,y)$]:

$$\left[\frac{\varepsilon |f_0|}{R_D} \right] \left[\frac{g' H_e^2}{|f_0|} \right] R_{De}^2 = \frac{\varepsilon g' R_{De}^2}{R_D} \left[\frac{R_{De}^4 H_{cz}^2}{R_D^4} \right] = \varepsilon g' H_{cz}^2 R_{De} \left[\frac{R_{De}}{R_D} \right]^5. \quad (4.23b)$$

Para facilitar a análise da ordem das parcelas dependentes de $\psi(x,y)$ destes dois últimos termos de (4.22) calcular-se-á separadamente a razão entre as duas ordens desenvolvidas nas equações (4.23) e a ordem do primeiro termo de (4.21). A razão entre a ordem de (4.23a) e aquela do primeiro termo da equação (4.21) tem como resultado $\varepsilon^{3/2} \ell / R_D$ enquanto a razão entre a expressão (4.23b) e o mesmo primeiro termo resulta $(R_{De}/R_D)^6$.

As ordens das parcelas dos dois últimos termos de (4.22) que são função de $\psi_\infty(y)$ serão agora analisadas. O transporte líquido da corrente zonal é oriundo do produto “hu” integrado entre os pontos 5 e 7. Como neste intervalo a profundidade e a largura da corrente zonal possuem $O(\varepsilon^{1/2})$ o transporte deverá ter $O(\varepsilon)$. Cabe destacar agora que este transporte é dado por $\psi_5 - \psi_8 = \psi_5$ e que ψ_5 é a própria função transporte ψ_∞ da segunda parcela dos termos (b) e (c) da equação (4.22). Estas parcelas terão então $O(\varepsilon^{5/2})$ para a corrente meridional e $O(\varepsilon^2)$ para o vórtice estacionário. A razão entre a ordem destas parcelas dependentes de $\psi_\infty(y)$ e a ordem do primeiro termo da expressão (4.21) resulta em expressões dependentes de $\varepsilon^{3/2}$ e ε , respectivamente.

Como se pode concluir, o termo correspondente à corrente meridional na expressão (4.22) não é capaz de equilibrar o primeiro termo da equação (4.21), pois a razão entre as duas ordens resulta uma função de $\varepsilon^{3/2}$. Esta tarefa só é capaz de ser efetuada pelo termo oriundo do vórtice estacionário dependente de $\psi(x,y)$, caso a relação abaixo se verifique:

$$[R_{De}] \sim O(R_D). \quad (4.24)$$

A expressão (4.24) informa que o raio de Rossby R_{De} do vórtice estacionário tem aproximadamente a mesma ordem que o raio de Rossby R_D da corrente zonal. Negligenciando-se o termo da corrente meridional e a segunda parcela do termo do vórtice estacionário, que possuem ordens muito pequenas, a equação (4.21) pode ser reescrita na forma (onde a função transporte do vórtice está expressa como ψ_v)

$$\int_0^{L_{cn}} hv^2 dx + \beta \iint_{S_v} \psi_v dx dy = 0. \quad (4.25)$$

A expressão (4.25), que apresenta a equação integrada do momentum meridional em sua forma final, é de suma importância, pois ela comprova que sem a presença de um vórtice estacionário durante o encontro da corrente de dupla frente e a parede (ou de seu análogo, do “trem” de vórtices com a borda continental) o equilíbrio meridional de forças não pode ser alcançado. A força “foguetes” aplicada no domínio de estudo pela corrente meridional que flui para norte, que corresponde à primeira integral do lado esquerdo de (4.25), só pode ser equilibrada pela força aplicada em D_0 pelo vórtice estacionário, que nele se instala, devida ao efeito β em seu interior. Esta última força corresponde à segunda integral do lado esquerdo da equação (4.25). Esta configuração de forças é mostrada na figura 3.3 (página 35), onde agora a origem da feição interna ao domínio de estudo D_0 e o sentido da força por ela criada são agora conhecidos, ou seja, trata-se de um vórtice estacionário posicionado na zona de contato da corrente (lentes) com a borda continental gerando uma força β dirigida para norte. A origem desta força β é detalhada no Capítulo 1 deste trabalho (ver figura 1.5, página 6).

A geometria das linhas de corrente da corrente de dupla frente mostra que o vórtice estacionário deve ser anticiclônico. A equação (4.25), contudo, confirma isso matematicamente, visto que o seu primeiro termo é obrigatoriamente positivo, exigindo que o seu segundo termo seja conseqüentemente negativo. Um valor médio negativo das funções corrente contidas em seu interior é uma característica de vórtices anticiclônicos no hemisfério sul.

Nas próximas duas seções os dois termos da equação (4.25) serão desenvolvidos visando-se à obtenção de expressões que forneçam o raio do vórtice estacionário e o transporte da corrente meridional.

A figura 4.4, onde não há nenhuma proporção entre os transportes, forças, correntes e vórtice estacionário, mostra de forma mais detalhada o encontro da corrente zonal de dupla frente com uma parede meridional, resumindo todos os resultados até então encontrados. Estão incluídas na figura: (1) as escalas desenvolvidas nesta seção; (2) os perfis de velocidade de cada corrente e (3) as forças meridionais que agem no domínio de estudo. Seis pontos são salientados na figura os quais serão utilizados quando da aplicação da função de Bernoulli (e.g., [Batchelor, 1998](#)) nas equações que serão em breve desenvolvidas.

4.3.3. O MOMENTUM DA CORRENTE MERIDIONAL

Nesta seção o momentum da corrente meridional dirigida para norte (que será identificada daqui para frente pelo índice "cn"), descrito pelo primeiro termo da esquerda da equação (4.25), será desenvolvido. De mesma forma que para a corrente zonal, partindo-se da equação da vorticidade potencial para $\xi = 0$, obtém-se para o perfil de velocidade da corrente meridional a seguinte expressão:

$$v_{cn} = v_1 - f_N x. \quad (4.26)$$

Utilizou-se como condição de contorno para a obtenção de (4.26) que $v_{cn} = v_1$ em $x = 0$ (ou seja, na parede). Além disso, tem-se que $f_N = f_0 + \beta y_N$. O índice 1 da velocidade indica que esta variável situa-se no ponto 1 da figura 4.4. Utilizando-se agora a relação geostrófica $f v = g' \partial h / \partial x$, a equação da profundidade da corrente meridional será dada por (onde h_1 é a profundidade rente à parede)

$$h_{cn} = h_1 + f_N v_1 x / g' - f_N^2 x^2 / 2g'. \quad (4.27)$$

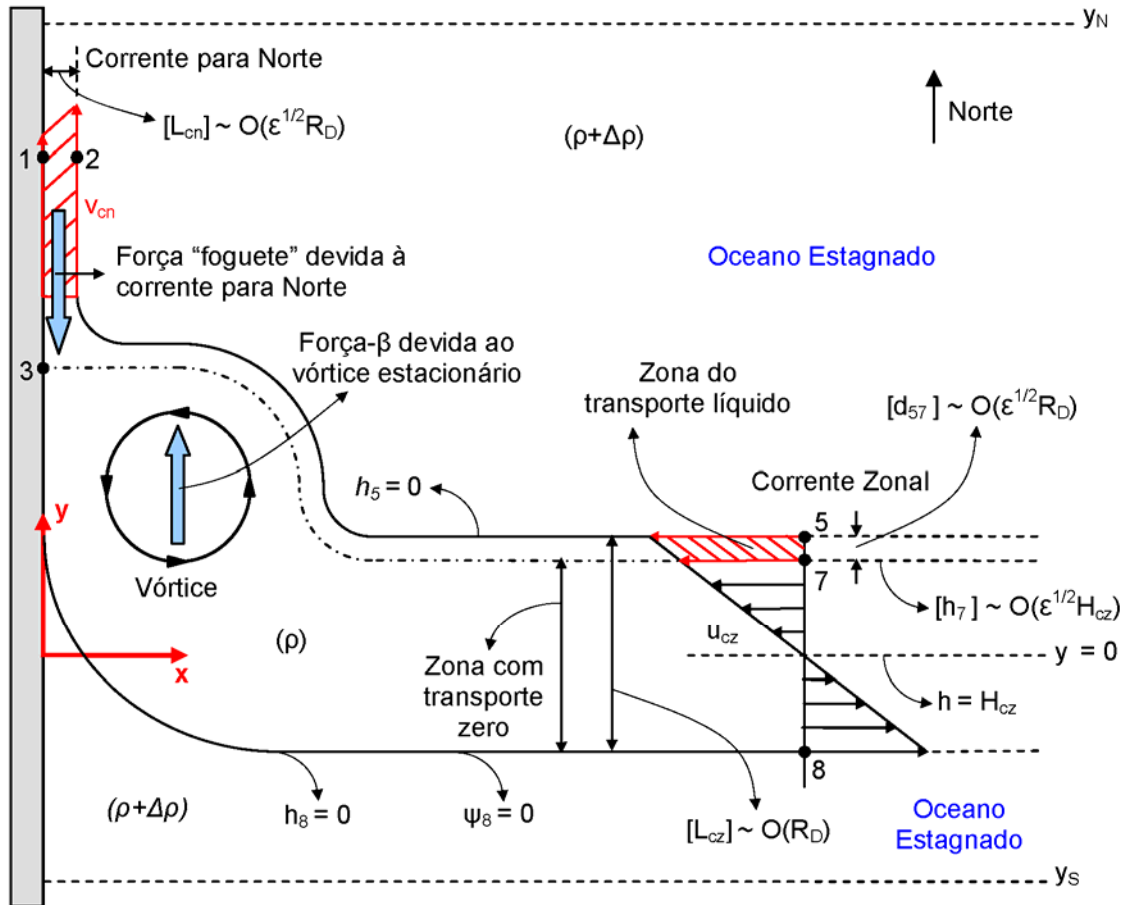


Figura 4.4 – Destaque do encontro da corrente de dupla frente com uma parede meridional. As setas largas azuis indicam as forças meridionais que agem no domínio de estudo. A área vermelha entre os pontos 5 e 7 indica a região de transporte líquido da corrente zonal o qual equivale ao transporte da corrente meridional delimitado entre os pontos 1 e 2 (também em vermelho).

Novamente a condição de contorno para a obtenção de (4.27) é estabelecida na parede, ou seja, $h_{cn} = h_1$ em $x = 0$. Negligenciando-se os termos com ordem superior a ϵ nas duas últimas expressões (4.26) e (4.27) resulta:

$$v_{cn} = v_1 - f_0 x \quad 0 \leq x \leq L_{cn} \quad v_{cn} = 0 \quad x > L_{cn} \quad \text{e} \quad (4.28)$$

$$h_{cn} = h_1 + f_0 v_1 x / g' - f_0^2 x^2 / 2g' \quad 0 \leq x \leq L_{cn} \quad h_{cn} = 0 \quad x > L_{cn}. \quad (4.29)$$

Cabe destacar que somente serão mantidos nas equações os termos com ordem igual ou inferior a ε (ordem do transporte da corrente zonal). Aqueles termos de ordem superior a ε serão sempre negligenciados¹⁹.

Deste ponto em diante a figura 4.4 é essencial para os desenvolvimentos que se seguirão. Aplicando-se a função de Bernoulli entre o ponto 7 da corrente zonal e o ponto 1 da corrente meridional resulta

$$g'h_1 + v_1^2/2 = g'h_7 + u_7^2/2 \quad . \quad (4.30)$$

A equação (4.30) será utilizada novamente em breve. As equações (4.1) e (4.2) definem a corrente zonal de dupla frente e são aqui reproduzidas por conveniência.

$$u_{cz} = f_0 y + \beta y^2/2 \quad \text{e} \quad h_{cz} = H_{cz} - f_0^2 y^2/2g' - f_0 \beta y^3/2g' \quad . \quad (4.31ab)$$

O último termo do lado direito da equação (4.2) foi negligenciado por ter $O(\varepsilon^2)$. Utilizando-se a expressão (4.31a) as variáveis do ponto 7, onde $y = y_7$, serão

$$u_7 = f_0 y_7 + \beta y_7^2/2 \quad \text{e} \quad h_7 = H_{cz} - f_0^2 y_7^2/2g' - f_0 \beta y_7^3/2g' \quad . \quad (4.32ab)$$

Antes de se retornar à equação (4.30) a profundidade do ponto 1 deve ser definida. Por conservação de massa o transporte T_{cz} da corrente zonal e o transporte T_{cn} da corrente meridional devem ser os mesmos. Com esta consideração uma expressão para a profundidade h_1 será desenvolvida. O transporte T_{cn} associado com a corrente meridional pode ser calculado a partir da sua relação geostrófica zonal multiplicada pela profundidade local, o que fornece como resultado

$$f_N \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{g'}{2} \frac{\partial h^2}{\partial x} \quad . \quad (4.33)$$

¹⁹ Para uma maior clareza do leitor a manutenção de um determinado termo em uma equação está associada com a respectiva potência de ε na expressão que previamente definiu a ordem deste termo. Por exemplo, um termo com $O(\varepsilon^3 f_0^2 l / g')$ será sempre negligenciado por estar associado a uma potência 3 em ε . Como o parâmetro ε passa a ser uma referência de escala poder-se-ia dizer que este termo possui ordem 3 ou $O(\varepsilon^3)$.

No desenvolvimento de (4.33) foi utilizada a expressão $\partial\psi/\partial x = v_h$. A integração da expressão (4.33) da parede (ponto 1) até o limite leste da corrente (ponto 2), considerando-se que $h_2 = 0$, $\psi_7 = \psi_1 = 0$ e $T_{cn} = \psi_2$ (ver a figura 4.4), resulta

$$T_{cn} = -g'h_1^2 / 2f_0. \quad (4.34)$$

Para a obtenção do transporte $T_{cz} = \psi_5 - \psi_8 = \psi_5$ é necessário uma expressão para a função transporte ψ_{cz} da corrente zonal. Para tal a relação $\partial\psi/\partial y = -u_h$ será novamente empregada. Utilizando-se então as equações (4.31) e integrando-se esta última relação, obtém-se como resultado

$$\psi_{cz} = \frac{f_0 H_{cz} (y_8^2 - y^2)}{2} - \frac{f_0^3 (y_8^4 - y^4)}{8g'} - \frac{3f_0^2 \beta (y_8^5 - y^5)}{20g'} + \frac{\beta H_{cz} (y_8^3 - y^3)}{6}. \quad (4.35)$$

Na obtenção da expressão (4.35) um termo de $O(\varepsilon^2)$ foi negligenciado. A constante de integração foi solucionada fazendo-se $\psi = 0$ em $y = y_8$. Caso se faça $y = y_5$ na expressão (4.35) resultará ψ_5 que é o próprio transporte T_{cz} da corrente zonal. Com esta consideração em prática e igualando-se (4.34) com (4.35), onde $y = y_5$, obtém-se a expressão desejada para a profundidade h_1 que é dada por

$$h_1 = \left[\frac{f_0^2 H_{cz} (y_5^2 - y_8^2)}{g'} - \frac{f_0^4 (y_5^4 - y_8^4)}{4g'^2} - \frac{3f_0^3 \beta (y_5^5 - y_8^5)}{10g'^2} + \frac{f_0 \beta H_{cz} (y_5^3 - y_8^3)}{3g'} \right]^{1/2}. \quad (4.36)$$

A profundidade da corrente meridional h_1 conforme mostra a expressão (4.34) é obtida por uma raiz quadrada do transporte meridional (ou zonal) os quais são de $O(\varepsilon)$, logo, conforme esperado, esta profundidade possui $O(\varepsilon^{1/2})$, tal qual a profundidade h_7 .

Retornando-se a expressão (4.30) e utilizando-se as expressões (4.32) obtemos uma expressão para a velocidade v_1 que tem a forma

$$v_1 = [2g'(H_{cz} - h_1)]^{1/2}. \quad (4.37)$$

Em (4.37) tem-se $H_{cz} \gg h_1$, mas manteve-se o segundo termo devido ao critério adotado de manutenção dos termos com ordem igual ou inferior a ε e $[h_1] \sim O(\varepsilon^{1/2})$.

Uma expressão para a largura L_{cn} da corrente meridional será desenvolvida agora. Novamente será assumido que a velocidade da corrente se mantém constante ao longo de seu perfil (esta corrente é muito estreita e a velocidade realmente é praticamente constante). Será adotado, por conveniência, como valor constante desta velocidade $v_{cn} = v_1$. A relação $\partial h / \partial x = \Delta h / \Delta x$ será também assumida como válida. Com estas considerações e com a equação geostrófica zonal aplicada a esta corrente resulta

$$f_0 v_1 = g' \Delta h / \Delta x = -g' h_1 / L_{cn}. \quad (4.38)$$

A expressão (4.38) fornece $L_{cn} = -g' h_1 / f_0 v_1$ que com a utilização de (4.37) resulta

$$L_{cn} = -\frac{g' h_1}{f_0 [2g'(H_{cz} - h_1)]^{1/2}}. \quad (4.39)$$

Na equação (4.39) a variável h_1 é calculada a partir da equação (4.36). Há uma outra maneira de desenvolver uma expressão para L_{cn} . Fazendo-se $h = 0$ na expressão (4.29), e solucionando-se a equação resultante para x encontrar-se-á uma fórmula alternativa para a largura da corrente meridional, pois neste caso $x = L_{cn}$. Para tal, as equações (4.36) e (4.37) serão necessárias.

Com (4.28) e (4.29) o momentum da corrente meridional será expresso por

$$\int_0^{L_{cn}} h_{cn} v_{cn}^2 dx = \int_0^{L_{cn}} \left[h_1 + f_0 v_1 x / g' - f_0^2 x^2 / 2g' \right] [v_1 - f_0 x]^2 dx. \quad (4.40)$$

Negligenciando-se na expressão (4.40) os termos com ordem superior a ε resulta

$$\int_0^{L_{cn}} h_{cn} v_{cn}^2 dx = h_1 v_1^2 L_{cn} + f_0 v_1^3 L_{cn}^2 / 2g'. \quad (4.41)$$

Com as expressões (4.36), (4.37) e (4.39) o momentum da corrente meridional que flui para norte pode ser calculado a partir de (4.41). Estas quatro equações contêm apenas parâmetros conhecidos da corrente zonal de dupla frente, ou seja, sua profundidade máxima H_{cz} e as coordenadas meridionais y_5 e y_8 das duas frentes.

4.3.4. O TRANSPORTE DA CORRENTE MERIDIONAL

O transporte T_{cn} da corrente meridional pode ser calculado pela expressão (4.34) utilizando-se a equação (4.36). Este transporte também pode ser calculado em função do produto “ hv ” integrado ao longo dos pontos 1 e 2 que delimitam esta corrente. Este transporte pode ser calculado pela expressão

$$\int_0^{L_{cn}} h_{cn} v_{cn} dx = \int_0^{L_{cn}} \left[h_1 + f_0 v_1 x / g' - f_0^2 x^2 / 2g' \right] [v_1 - f_0 x] dx. \quad (4.42)$$

Na obtenção de (4.42) foram utilizadas as equações (4.28) e (4.29). Após os termos com ordem superior a ε terem sido negligenciados a equação (4.42) resulta em

$$\int_0^{L_{cn}} h_{cn} v_{cn} dx = h_1 v_1 L_{cn} + f_0 v_1^2 L_{cn}^2 / 2g'. \quad (4.43)$$

Novamente, com a utilização das expressões (4.36), (4.37) e (4.39), o transporte da corrente meridional que flui para norte pode ser calculado a partir da equação (4.43). Destaca-se que a expressão (4.34) é mais simples, pois permite calcular o transporte T_{cn} apenas em função de (4.36).

4.3.5. O MOMENTUM DO VÓRTICE ESTACIONÁRIO

Nesta subsecção será desenvolvida uma expressão para o momentum Mo_v proveniente do vórtice estacionário, incluído na equação integrada do momentum meridional (4.25), e que tem como expressão inicial

$$Mo_v = \beta \iint_{S_v} \psi_v dx dy. \quad (4.44)$$

Na expressão (4.44) S_v é a área horizontal do domínio de estudo ocupada pelo vórtice estacionário e ψ_v é a sua função transporte. Para que esta equação possa ser desenvolvida é necessária uma expressão para a função transporte ψ_v no interior do vórtice. Cabe destacar que a corrente que circunvizinha o vórtice também contribui neste mo-

mento, mas a ordem desta contribuição é superior a ε podendo ser então negligenciada. O vórtice estacionário foi suposto ser também uma lente.

A equação (3.45, página 45), aqui repetida por conveniência, permite o cálculo da função transporte ψ_v do vórtice estacionário

$$\partial\psi_v/\partial r = v_\theta h. \quad (4.45)$$

As equações de ordem principal, ou seja, no plano-f ou de $O(1)$, da velocidade orbital v_θ e profundidade h_v de um vórtice com $\xi = 0$ são²⁰ (ver seção 3.4.1, página 46)

$$v_\theta = -f_0 r / 2 \quad \text{e} \quad h_v = f_0^2 (r_0^2 - r^2) / 8g'. \quad (4.46ab)$$

Nas equações (4.46) a variável r_0 corresponde ao raio do vórtice. Com as expressões (4.46) aplicadas na equação (4.45) esta se transforma em

$$\frac{\partial\psi_v}{\partial r} = \left[-\frac{f_0 r}{2} \right] \left[\frac{f_0^2 (r_0^2 - r^2)}{8g'} \right] \rightarrow \psi_v = C + \frac{f_0^3 (r_0^2 - r^2)^2}{64g'}. \quad (4.47)$$

Na expressão (4.47) C é uma constante de integração cujo cálculo passa a ser o objetivo temporário deste estudo.

Um esboço do perfil norte-sul do vórtice estacionário criado em D_0 , visto do oceano para a borda continental, é mostrado na figura 4.5. A área hachurada da direita mostra a seção por onde circula a corrente circunvizinha ao vórtice. Pode-se perceber na figura a presença de três diferentes variáveis associadas com as profundidades da feição, que são: (a) H_v é a máxima profundidade do vórtice, localizada nas coordenadas retangulares centrais do vórtice, (b) h_v é a profundidade da feição associada a um dado raio r do vórtice e (c) h_i é a profundidade na interface vórtice-“corrente líquida”. De mesma forma três variáveis estão associadas com raios do vórtice, ou seja: (a) R é o raio do vórtice medido até a posição da interface com a corrente circunvizinha, (b) r_0 é o legítimo raio do vórtice medido do seu centro até a posição em que a profundidade da feição é nula e (c) r é o raio do vórtice associado à profundidade h_v .

²⁰ Como as ordens neste trabalho estão relacionadas com o parâmetro ε , em um cenário desenvolvido no plano-f (onde β , e conseqüentemente ε , serão nulos) a ordem será 1 ou ε^0 .

Fazendo-se $h_v = h_i$ na expressão (4.46b) equivale a assumir que $r = R$. Este valor de raio para o vórtice estacionário resulta então

$$R = \left[\frac{8g'(H_v - h_i)}{f_0^2} \right]^{1/2}. \quad (4.48)$$

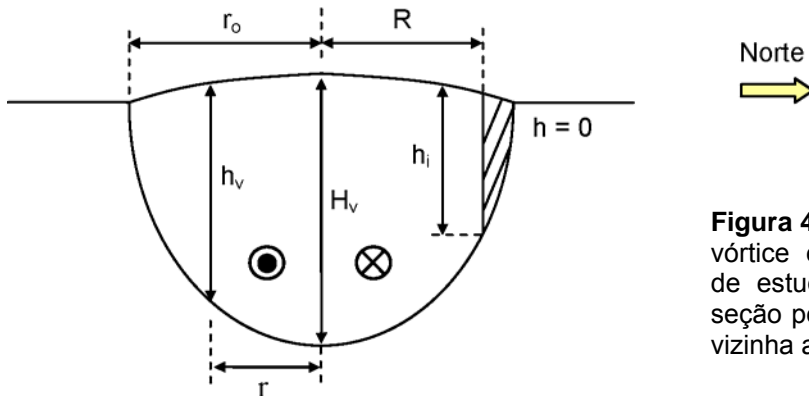


Figura 4.5 – Esboço do perfil norte-sul do vórtice estacionário gerado no domínio de estudo. A área hachurada indica a seção por onde circula a corrente circunvizinha ao vórtice.

Na obtenção da expressão (4.48) foi utilizada a equação (3.49, página 46), a qual estabelece que $H_v = f_0^2 r_0^2 / 8g'$. A consideração de $r = R$ na equação (4.47) equivale a assumir que $\psi_v = \psi_{vc} = 0$, onde ψ_{vc} é a função transporte na interface vórtice-“corrente líquida”. Com esta consideração pode-se agora calcular a constante C desta equação, que agora se transformou na expressão

$$0 = C + \left[\frac{f_0^3 (r_0^2 - R^2)^2}{64g'} \right]. \quad (4.49)$$

Substituindo-se a equação (4.48) na expressão (4.49) resulta

$$0 = C + \frac{f_0^3 \left\{ r_0^2 - \left[8g'(H_v - h_i) / f_0^2 \right] \right\}^2}{64g'} = C + \frac{f_0^3 \left[8g'h_i / f_0^2 \right]^2}{64g'} = C + \frac{g'h_i^2}{f_0}. \quad (4.50)$$

Com esta última equação conclui-se que $C = -g'h_i^2/f_0$ e com este resultado a expressão (4.47) torna-se então

$$\psi_v = \left[\frac{f_0^3 (r_0^2 - r^2)^2}{64g'} \right] - \frac{g'h_i^2}{f_0} \quad r \leq R. \quad (4.51)$$

Retomando-se a relação $H_v / H_{cz} = (R_{De} / R_D)^2$, e lembrando-se que $[R_{De}] \sim O(R_D)$, conclui-se então que $[H_v] \sim O(H_{cz})$, ou, em outras palavras, que $H_v \gg h_i$. Com esta consideração e as equações (3.49, página 46) e (4.48) conclui-se também que $R \approx r_0$. Esta metodologia de cálculo da função transporte ψ_v do vórtice foi utilizada em [Arruda \(2002\)](#).

O momentum do vórtice estacionário pode ser calculado agora se utilizando as expressões (4.44) e (4.51), o que resulta

$$M_{O_v} = \beta \iint_{S_v} \psi_v dx dy = \beta \int_0^{2\pi} \int_0^R \left[\frac{f_0^3 (R^2 - r^2)^2}{64g'} - \frac{g'h_i^2}{2f_0} \right] r dr d\theta. \quad (4.52)$$

Cabe destacar que a consideração de termos de mais alta ordem nas equações da velocidade orbital e profundidade do vórtice estacionário não acarretariam mudanças na expressão (4.52). Todos os termos de mais alta ordem, se incluídos no cálculo da função transporte ψ_v em (4.47), seriam negligenciados em (4.52) após a multiplicação da integral por β , pois deste produto resultariam novos termos com ordem superior à ε . De mesma forma, o segundo termo da integral da expressão (4.52) também pode ser negligenciado. A equação (4.52) transforma-se então em

$$M_{O_v} = \beta \iint_{S_v} \psi_v dx dy = \frac{f_0^3 \beta}{2^7 (3) g'} \int_0^{2\pi} R^6 d\theta = \frac{\pi f_0^3 \beta R^6}{2^6 (3) g'}. \quad (4.53)$$

4.3.6. O RAI DO VÓRTICE ESTACIONÁRIO

[80] A equação integrada do momentum meridional (4.25) aplicada ao domínio de estudo ABCDA é aqui reproduzida por conveniência:

$$\int_0^{L_{cn}} h_{cn} v_{cn}^2 dx + \beta \iint_{S_v} \psi_v dx dy = 0.$$

Com as equações (4.41) e (4.53) esta expressão transforma-se em

$$h_1 v_1^2 L_{cn} + f_0 v_1^3 L_{cn}^2 / 2g' + \frac{\pi f_0^3 \beta R^6}{2^6 (3) g'} = 0. \quad (4.54)$$

A expressão para o cálculo do raio R do vórtice estacionário gerado no domínio de estudo, a partir da equação (4.54), é dada por

$$R = 2 \left\{ - \left[\frac{3g'}{\pi f_0^3 \beta} \right] \left[h_1 v_1^2 L_{cn} + f_0 v_1^3 L_{cn}^2 / 2g' \right] \right\}^{1/6}. \quad (4.55)$$

As equações (4.36), (4.37) e (4.39) desenvolvidas anteriormente devem ser aplicadas em (4.55) para o cálculo deste raio. A expressão (4.55) mostra que o raio do vórtice estacionário depende diretamente do transporte do “trem” de vórtices, o qual influencia o valor do momentum da corrente para norte (entre colchetes na referida equação) e da diferença de densidade entre as camadas (que influencia g'). O tamanho do vórtice estacionário depende também da posição da zona de interação deste “trem” com a borda continental. Neste caso, o raio depende inversamente da raiz quadrada do parâmetro de Coriolis, o qual é modificado de acordo com a latitude central do domínio de estudo D_0 . Na situação em que “trens” de vórtices de mesmo transporte atinjam duas posições diferentes ao longo da borda continental, o vórtice estacionário oriundo deste encontro será maior naquela posição mais próxima da linha do Equador.

4.4. DOMÍNIO DE ESTUDO COM UMA PAREDE INCLINADA

O cenário em que o domínio de estudo possui uma borda continental (parede) inclinada será explorado nesta seção. Será demonstrado novamente que a presença de um vórtice estacionário em D_0 continua necessária para o equilíbrio das forças na direção paralela à parede. É importante destacar que a corrente de dupla frente possui apenas a mesma vorticidade e transporte do “trem” de vórtices, mas não possui o mesmo momentum, o que introduzirá algum erro na representação do “trem” de vórtices por esta corrente. No caso de uma parede meridional este fato não interferia em nada na precisão do resultado alcançado, pois o momentum zonal não tinha nenhuma influência sobre o momentum meridional, o que já não ocorre no cenário com uma parede incli-

nada, quando então uma componente do momentum da corrente zonal será incluída na equação integrada do momentum paralelo à parede (rever a figura 3.6, página 41). O modelo numérico, quando aplicado a um cenário de parede inclinada, permitirá a avaliação deste erro, o que será analisado no Capítulo 5.

Em termos de transporte, um dos focos principais da modelagem analítica deste trabalho, a consideração de uma parede inclinada não afeta o transporte da corrente para norte (na realidade, para nordeste agora), tendo em vista que, por balanço de massa, a massa de água que entra por intermédio da corrente zonal pela fronteira leste do domínio, sendo a parede inclinada ou não, é a mesma, a qual terá que sair pela fronteira norte do domínio.

A inclinação da parede afetará, de fato, é o tamanho do vórtice estacionário que se instala na zona de contato da corrente de dupla frente com a borda continental. Espera-se que o diâmetro deste vórtice seja maior do que aquele apresentado no cenário com uma parede meridional. Esta expectativa se deve ao fato que a força criada pelo efeito β no interior desta feição deverá agora também balancear a componente paralela à parede da força aplicada no domínio de estudo pela corrente zonal, a qual (a componente) é muito maior que a força aplicada pela corrente paralela à parede que flui para nordeste (ver figura 3.6, página 41), tendo em vista que o produto $h v^2 dx$ da corrente paralela à parede possui $O(\epsilon)$. Pode-se dizer antecipadamente que é a componente da corrente zonal que praticamente determinará o tamanho do vórtice estacionário. Cabe destacar que apesar da corrente zonal ter um duplo sentido de fluxo as forças aplicadas no domínio de estudo por esta corrente são sempre dirigidas para oeste. O fato da corrente de dupla frente não ter o mesmo momentum do “trem” de vórtices deverá introduzir algum erro apenas no tamanho do vórtice estacionário, cuja magnitude poderá ser avaliada nos experimentos numéricos realizados no Capítulo 5.

A figura 4.6 mostra o atual cenário de estudo, o qual contém agora dois sistemas de coordenadas. O sistema XY é o mesmo sistema utilizado na seção anterior com uma parede meridional. O novo sistema xy acompanha os contornos norte e oeste do domínio de estudo ABCDA (agora inclinado). Novamente o transporte da corrente paralela à parede para nordeste é o mesmo transporte líquido da corrente zonal.

A expressão (3.36, página 43), a qual representa a equação integrada do momentum paralelo à parede para um domínio de estudo com uma parede inclinada, é reproduzida aqui por conveniência. Novamente cabe destacar que o fluxo pelo contorno AB é nulo para o cenário tipo modelo-1 analisado neste capítulo.

$$\text{sen}\theta \int_{Y_8}^{Y_5} h^* U^{*2} dY + \int_0^{L_{cn}} [hv^2 + g'h^2/2 - (f_0 + \beta Y)\psi] dx + \beta \cos\theta \iint_S \psi dx dy = 0. \quad (4.56)$$

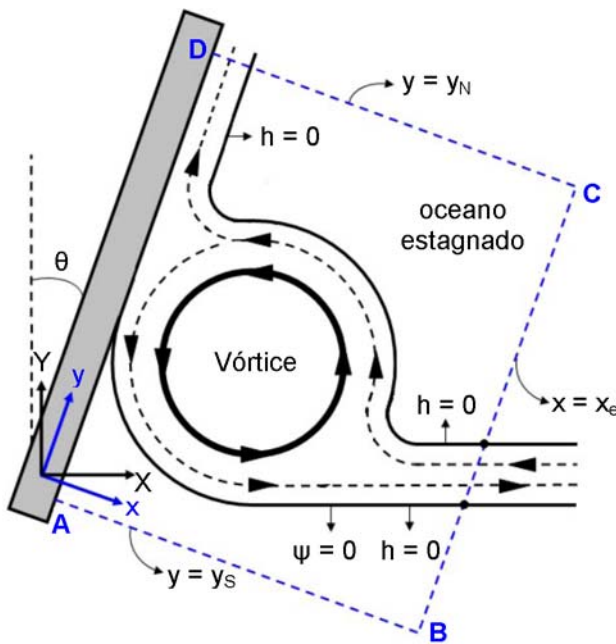


Figura 4.6 – Domínio de estudo com uma parede inclinada de um ângulo θ medido em sentido horário a partir da direção norte. Destaca-se neste cenário a presença de dois sistemas de coordenadas, sendo um deles alinhado com os eixos cardeais e o outro tem os seus eixos alinhados com as fronteiras norte e leste do domínio de estudo. O sistema XY corresponde ao sistema utilizado na seção anterior.

Na equação (4.56) os limites da primeira integral foram modificados para o intervalo entre $Y = Y_8$ e $Y = Y_5$, pois fora deste faixa a integral é sempre nula. Além disso, a segunda integral teve seus limites invertidos e foi ainda considerado que esta integral será nula fora dos domínios da corrente paralela à parede, o que possibilita estabelecer seus novos limites de $x = 0$ até $x = L_{cn}$. A velocidade e a profundidade da corrente zonal, presentes na primeira integral, estão escritas no sistema XY (a notação destas variáveis apresenta uma estrela superior). Cabe destacar que as equações desenvolvidas nesta seção estão escritas no sistema xy.

Algumas considerações já feitas para o cenário de uma parede meridional serão novamente aplicadas aqui, ou seja, a seção anterior é uma referência para esta seção que contempla uma parede inclinada. A aplicação de metodologia similar àquela utilizada

com a parede meridional na análise dos termos que compõem a segunda integral da equação (4.56) transforma esta equação em

$$\sin\theta \int_{Y_8}^{Y_5} h^* U^{*2} dY + \int_0^{L_{cn}} h v^2 dx + \beta \cos\theta \iint_S \psi dx dy = 0. \quad (4.57)$$

Uma maneira rápida e alternativa de se chegar a este mesmo resultado é a consideração de que a segunda e terceira parcelas da segunda integral de (4.56) possuem ordem superior a ε e podem ser negligenciadas. A primeira parcela, contudo, é de $O(\varepsilon)$ e deve ser mantida.

Esta importante equação mostra os termos que compõem a equação integrada do momentum paralelo à parede, ou seja, na mesma ordem dos termos mostrados na equação (4.57) temos: (a) uma componente paralela à parede da força aplicada no domínio de estudo pela corrente zonal, (b) a força “fogueto” aplicada em D_0 pela corrente para nordeste e (c) outra componente paralela à parede da força devida ao efeito β gerada no interior do vórtice estacionário criado dentro do domínio (ver setas azuis da figura 4.7). O terceiro termo cobre toda a extensão do domínio de estudo, mas a sua parcela de ordem relevante é aquela correspondente à região do vórtice estacionário, conforme já demonstrado na seção anterior.

A figura 4.7 mostra o domínio de estudo D_0 no cenário de uma borda continental inclinada, onde estão destacadas: a corrente zonal, a corrente paralela à parede, o vórtice estacionário, as forças que atuam em D_0 e algumas dimensões e escalas envolvidas.

4.4.1. ANÁLISE DE ESCALA

Apesar do fator escala já ter sido considerado na obtenção da equação (4.57) os termos que compõem esta equação terão a sua escala agora avaliada. Utilizando-se as mesmas considerações feitas na análise de escala da seção anterior (com uma parede meridional) pode-se concluir que o primeiro termo do lado esquerdo da expressão (4.57), o qual corresponde à componente paralela à parede do momentum da corrente zonal, possui $O(g'H_{cz}^2 R_D)$. De mesma forma a ordem do termo correspondente à cor-

rente para nordeste (segundo termo) é $O(\varepsilon g'H_{cz}{}^2 R_D)$ e ao vórtice estacionário (terceiro termo) é $O[\varepsilon g'H_{cz}{}^2 R_{De}(R_{De}/R_D)^5]$. A equação (4.58) resume estas ordens:

$$\underbrace{\text{sen}\theta \int_{Y_8}^{Y_5} h^* U^{*2} dY}_{(1) - O(g'H_{cz}{}^2 R_D)} + \underbrace{\int_0^{L_{cn}} h v^2 dx}_{(2) - O(\varepsilon g'H_{cz}{}^2 R_D)} + \underbrace{\cos\theta \beta \iint \psi dx dy}_{(3) - O[\varepsilon g'H_{cz}{}^2 R_{De}(R_{De}/R_D)^5]} = 0 \quad (4.58)$$

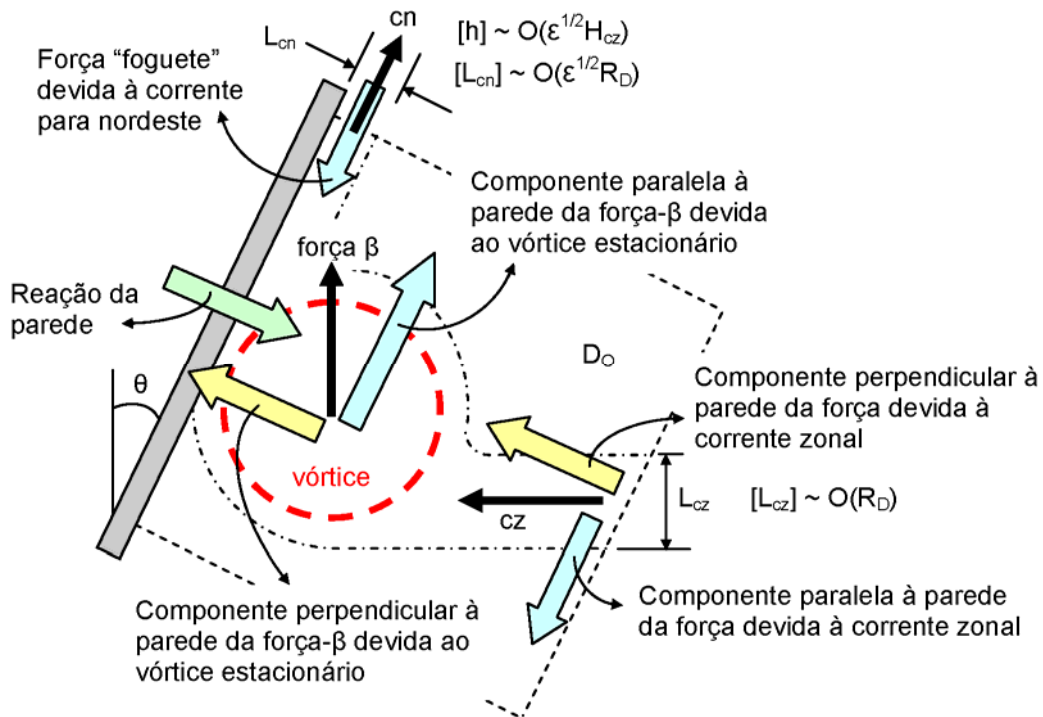


Figura 4.7 – Forças atuantes no domínio de estudo no cenário de uma borda continental inclinada de um ângulo θ , medido a partir do norte em sentido horário. As setas azuis correspondem às forças que participam da equação integrada do momentum paralelo à parede enquanto as setas amarela e verde correspondem àquelas que atuam na equação integrada do momentum perpendicular à parede (não utilizada neste trabalho). A sigla "cn" indica a corrente paralela à parede para nordeste e "cz" a corrente zonal, ambos fluxos indicados por setas pretas, assim como a força β oriunda do vórtice estacionário.

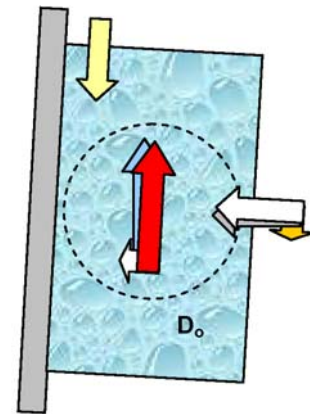
A análise da expressão (4.58) deve ser cuidadosa tendo-se em vista que o primeiro termo não tem ordem dependente de ε . Para a situação em que $[\text{sen}\theta] \sim O(\varepsilon)$ (ou seja, uma parede quase meridional, e onde $\cos\theta \rightarrow 1$) os três termos da equação (4.58) participarão do balanço de forças na direção paralela à parede, quando então $[R_{De}] \sim O(R_D)$, conforme a seção anterior, e os três termos terão então $O(\varepsilon g'H_{cz}{}^2 R_D)$.

A figura 4.8 mostra as forças que atuam paralelas à parede no cenário de um domínio de estudo com uma parede inclinada de um ângulo θ com relação ao norte geográfico, e onde $[\text{sen}\theta] \sim O(\varepsilon)$. Cabe destacar que para este cenário a expressão (4.58) confirma a necessidade de um vórtice estacionário ser criado dentro do domínio de estudo, tendo em vista que o segundo termo da equação (4.58) não poderia compensar o primeiro termo, pois as forças decorrentes destes dois termos têm a mesma direção e sentido (ver setas amarela e laranja na figura 4.8).

EQUAÇÃO INTEGRADA DO MOMENTUM PARALELO À PAREDE PARA $[\text{sen}\theta] \sim O(\varepsilon)$

$$\text{sen}\theta \int_{Y_8}^{Y_5} h^* U^{*2} dY + \int_0^{L_N} h v^2 dx + \beta \cos\theta \iint_{S_e} \psi_v dx dy = 0$$

Figura 4.8 – Forças na direção paralela à parede durante o encontro entre a corrente de dupla frente e uma parede inclinada de um ângulo θ , e onde $[\text{sen}\theta] \sim O(\varepsilon)$. Neste cenário as três forças envolvidas (ver texto) no balanço na direção paralela à parede atuam simultaneamente, pois todos os termos da equação integrada do momentum (acima) possuem mesma ordem, dada por $O(\varepsilon g' H_{cz}^2 R_D)$. Um vórtice estacionário (círculo tracejado) é necessário no domínio de estudo, pois somente a componente paralela à parede (seta vermelha) da sua força interna devida ao efeito β (seta azul) pode equilibrar a soma da componente (seta laranja) da força da corrente zonal (seta cinza) com a força da corrente para nordeste (seta amarela), aplicadas em D_o .



Para inclinações maiores da parede, ou seja, quando $\text{sen}\theta \gg \varepsilon$, o primeiro termo da equação (4.58) só poderá ser balanceado pelo terceiro termo, o que novamente confirma a exigência de um vórtice estacionário dentro do domínio de estudo. Para tal é necessário que a relação entre os raios de deformação da corrente zonal e do vórtice estacionário resulte em

$$[R_{De}] \sim O(R_D / \varepsilon^{1/6}). \quad (4.59)$$

A equação (4.59) confirma a hipótese prévia de que os vórtices estacionários no cenário de uma parede inclinada terão diâmetro superior àqueles criados dentro do domínio de estudo quando a parede é meridional, onde $[R_{De}] \sim O(R_D)$. A figura 4.9 mostra as forças que atuam paralelas à borda continental no cenário de um domínio de estudo

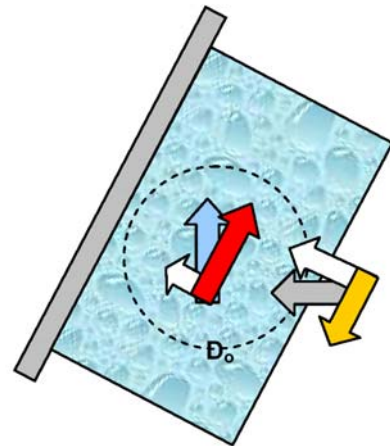
com uma parede inclinada de um ângulo θ com relação ao norte geográfico, e onde $\text{sen}\theta \gg \varepsilon$.

A equação integrada do momentum paralelo à parede para o cenário em que $\text{sen}\theta \gg \varepsilon$, apresentada na figura 4.9, mostra que quanto maior a inclinação da parede maior será o diâmetro do vórtice estacionário. O primeiro termo desta equação é diretamente proporcional ao ângulo θ enquanto o segundo é inversamente proporcional a este parâmetro, o que exige um aumento da força β neste último termo para compensar o crescimento do primeiro termo, o que só ocorre com o aumento do diâmetro do vórtice estacionário.

EQUAÇÃO INTEGRADA DO MOMENTUM PARALELO À PAREDE PARA $[\text{sen}\theta] \gg O(\varepsilon)$

$$\text{sen}\theta \int_{Y_8}^{Y_8} h^* U^{*2} dY + \beta \cos\theta \iint_C \psi_v dx dy = 0$$

Figura 4.9 – Forças na direção paralela à parede durante o encontro entre a corrente de dupla frente e uma parede inclinada de um ângulo θ , e onde $\text{sen}\theta \gg \varepsilon$. Neste cenário somente duas forças atuam simultaneamente no balanço paralelo à parede, pois a ordem da força exercida pela corrente para nordeste é muito pequena e pode ser negligenciada (ver texto). Um vórtice estacionário (círculo tracejado) é necessário no domínio de estudo, pois somente a componente paralela à parede (seta vermelha) da sua força interna devida ao efeito β (seta azul) pode equilibrar a componente (seta laranja) da força aplicada em D_o pela corrente zonal (seta cinza).



Na seção seguinte os termos que compõem a equação integrada do momentum paralelo à parede (4.58) serão desenvolvidos.

4.4.2. A EQUAÇÃO INTEGRADA DO MOMENTUM PARALELO À PAREDE

Para o desenvolvimento do primeiro termo da equação (4.58) as expressões (4.31ab), da velocidade e profundidade da corrente zonal de dupla frente, respectivamente,

serão utilizadas novamente. Estas equações são aqui reproduzidas por conveniência (a notação y das equações originais foi substituída por Y).

$$U_{cz}^* = f_0 Y + \beta Y^2 / 2 \quad \text{e} \quad h_{cz}^* = H_{cz} - f_0^2 Y^2 / 2g' - f_0 \beta Y^3 / 2g'. \quad (4.60ab)$$

A utilização das equações (4.60) no primeiro termo da expressão (4.58), após a exclusão de termos com ordem superior a ε , resulta

$$\begin{aligned} \text{sen}\theta \int_{Y_8}^{Y_5} h^* U^{*2} dY = \text{sen}\theta \left[\frac{f_0^2 H_{cz} (Y_5^3 - Y_8^3)}{3} + \frac{f_0 \beta H_{cz} (Y_5^4 - Y_8^4)}{4} - \dots \right. \\ \left. \dots - \frac{f_0^4 (Y_5^5 - Y_8^5)}{10g'} - \frac{f_0^3 \beta (Y_5^6 - Y_8^6)}{6g'} \right]. \end{aligned} \quad (4.61)$$

As coordenadas meridionais Y_8 e Y_5 definem a posição das duas frentes da corrente zonal. O segundo termo presente na equação (4.58) está associado à corrente meridional que flui pelo contorno norte do domínio de estudo, descrita pelas equações (4.28) e (4.29), aqui reproduzidas.

$$v_{cn} = v_1 - f_0 x \quad 0 \leq x \leq L_{cn} \quad \text{e} \quad (4.62)$$

$$h_{cn} = h_1 + f_0 v_1 x / g' - f_0^2 x^2 / 2g' \quad 0 \leq x \leq L_{cn}. \quad (4.63)$$

Estas equações foram escritas a partir de um parâmetro de Coriolis f constante, pois o contorno era puramente horizontal na fronteira norte do domínio de estudo, o que já não ocorre no caso de uma parede inclinada, pois o contorno norte é perpendicular à parede e, portanto, inclinado. A largura L_{cn} da corrente meridional é muito pequena, logo a variação de f ao longo de sua extensão é mínima. Além disso, o termo βY será excluído das equações da corrente meridional por gerar termos de ordem superior a ε . Com estas considerações o segundo termo da equação (4.58) resulta exatamente na mesma expressão desenvolvida na seção anterior, ou seja:

$$\int_0^{L_{cn}} h_{cn} v_{cn}^2 dx = h_1 v_1^2 L_{cn} + f_0 v_1^3 L_{cn}^2 / 2g'. \quad (4.64)$$

O terceiro termo da equação (4.58) corresponde à expressão (4.53) multiplicada por $\cos\theta$ o que fornece

$$\beta \cos\theta \iint_{S_v} \psi_v dx dy = \frac{\pi f_0^3 \beta R^6 \cos\theta}{2^6 (3) g'}. \quad (4.65)$$

Com (4.61), (4.64) e (4.65) aplicadas na equação (4.58) a expressão final para a equação integrada do momentum paralelo à parede, no cenário de uma parede inclinada, assume a forma

$$\begin{aligned} & \sin\theta \left[f_0^2 H_{cz} (Y_5^3 - Y_8^3) / 3 + f_0 \beta H_{cz} (Y_5^4 - Y_8^4) / 4 - \dots \right. \\ & \left. \dots - f_0^4 (Y_5^5 - Y_8^5) / 10 g' - f_0^3 \beta (Y_5^6 - Y_8^6) / 6 g' \right] + h_1 v_1^2 L_{cn} + \dots \\ & \dots + f_0 v_1^3 L_{cn}^2 / 2 g' + (\pi f_0^3 \beta R^6 \cos\theta) / 2^6 (3) g' = 0. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Na equação (4.66) as variáveis Y_5 , Y_8 e H_{cz} são parâmetros conhecidos da corrente zonal enquanto h_1 , v_1 e L_{cn} são parâmetros calculados para a corrente meridional pelas equações (4.36), (4.37) e (4.39) que dependem de Y_5 , Y_8 e H_{cz} .

4.4.3. O RAI DO VÓRTICE ESTACIONÁRIO

O raio do vórtice estacionário para o cenário de uma parede inclinada, a partir da expressão (4.66), será calculado pela equação

$$R = 2 \left\{ - \left[\frac{3g'}{\pi f_0^3 \beta \cos\theta} \right] \left[Mo_{cz} + h_1 v_1^2 L_{cn} + f_0 v_1^3 L_{cn}^2 / 2g' \right] \right\}^{1/6}. \quad (4.67)$$

Na expressão (4.67) Mo_{cz} é a contribuição do momentum da corrente zonal na equação integrada do momentum paralelo à parede, cuja expressão é dada por (4.61). A equação (4.67) resulta na mesma expressão (4.55) para a situação de uma parede meridional, caso de faça $\theta = 0^\circ$. Neste caso o momentum Mo_{cz} será nulo visto que ele é função de $\sin\theta$. O raio do vórtice estacionário além de depender da intensidade do transporte do “trem” de vórtices, da diferença de densidade entre as camadas e da posição da zona de contato deste “trem” com a borda continental, conforme visto no cenário de

uma parede meridional, ainda depende agora da inclinação desta borda com relação ao norte geográfico. Quanto mais inclinada estiver a borda continental maior será o raio do vórtice estacionário, caso os demais parâmetros dos quais ele depende sejam mantidos constantes.

4.5. SUMÁRIO

A modelagem analítica do encontro de um “trem” de vórtices do tipo lente com a borda continental (parede) foi desenvolvida neste capítulo. Dois cenários foram contemplados no estudo, ou seja, com uma parede meridional e com a parede inclinada de um ângulo θ (medido em sentido horário com relação ao norte). O “trem” de vórtices foi representado por uma corrente de dupla frente com o mesmo transporte e vorticidade da sequência de vórtices. Para a facilidade do leitor as equações utilizam as variáveis em sua forma dimensional. Os termos de cada equação com ordem superior a ε foram negligenciados.

A modelagem apresentada neste capítulo, quando confrontada com os objetivos deste trabalho descritos no Capítulo 1, permite concluir:

- a) A utilização de uma corrente de dupla frente na representação de um “trem” de vórtices do tipo lente facilita a modelagem analítica do processo de interação entre estas feições e a borda continental. Um referencial fixo de coordenadas foi estabelecido no domínio de estudo (os vários estudos analíticos pesquisados utilizam um referencial móvel, instalado no centro do vórtice).
- b) A interação contínua entre vórtices e parede modificou o cenário final das várias modelagens analíticas analisadas (ver Capítulo 2), ou seja, há o estabelecimento de um “vazamento” agora contínuo ao longo da parede, o qual é dirigido para a linha do Equador, oriundo do contato vórtices-parede.
- c) A equação integrada do momentum na direção y , aplicada paralelamente à parede, mostra um equilíbrio entre: (a) a força β interna do vórtice, (b) a força “foguetes” aplicada no domínio de estudo D_0 pela corrente paralela à parede que sai pelo seu

contorno norte e (c) a componente paralela à parede da força aplicada em D_0 pela corrente zonal de dupla frente que atravessa o seu contorno leste. A força (b) é desprezível na situação de uma parede inclinada quando $\sin\theta \gg \varepsilon$. As três forças participam do equilíbrio de forças na direção paralela à parede apenas se $[\sin\theta] \sim O(\varepsilon)$.

- d) A força β interna do vórtice estacionário é a única força capaz de equilibrar as outras forças paralelas à parede descritas no item anterior, as quais são dirigidas para sul, ou seja, este fato justifica a necessidade da existência de um vórtice estacionário dentro do domínio de estudo.
- e) O “vazamento” oriundo da interação da corrente de dupla frente com a parede (análogo ao vazamento que seria proveniente do contato do “trem” de vórtices com a borda continental) se dirige integralmente no sentido da linha do Equador, independentemente da inclinação da parede;
- f) A inclinação da parede influencia o tamanho (raio) do vórtice estacionário visto que aumenta a influência da componente paralela à parede da força aplicada em D_0 pela corrente zonal. No cenário em que $\sin\theta \gg \varepsilon$ o raio deste vórtice aumenta à medida que aumenta o valor desta componente.
- g) O tamanho do vórtice estacionário também depende diretamente da intensidade do transporte do “trem” de vórtices e da diferença de densidade entre as camadas interna e externa do vórtice. Além disso, o raio do vórtice estacionário depende de forma inversa da latitude da zona de contato vórtices-parede, a qual afeta o parâmetro de Coriolis.
- h) As hipóteses contempladas no Capítulo 1 foram verificadas, ou seja, há um vazamento contínuo ao longo da parede oriundo do contato dos vórtices com esta parede, uma nova feição (vórtice estacionário) surgiu dentro do domínio de estudo e a inclinação da parede afeta o tamanho (raio) deste vórtice estacionário.

CAPÍTULO 5

ESTUDO COMPARATIVO ENTRE OS MODELOS ANALÍTICO E NUMÉRICO

O objetivo deste capítulo é a realização de um estudo comparativo entre os resultados dos modelos analítico e numérico para o encontro entre um “trem” de vórtices tipo lente e a borda continental (parede). Este estudo permitirá a avaliação das equações desenvolvidas no Capítulo 4 comparando os seus resultados com aqueles obtidos em um modelo numérico isopicnal de 1,5 camadas.

Este capítulo apresenta inicialmente o modelo isopicnal utilizado neste trabalho. Após, descreve-se o “canhão” de vórtices introduzido em [Pichevin e Nof \(1996\)](#). Este canhão foi utilizado na geração dos vórtices na maioria das modelagens numéricas realizadas neste trabalho. A seguir são apresentados os resultados da modelagem numérica para o cenário com o canhão de vórtices em que o domínio de estudo possui uma parede meridional, seguindo-se a situação com uma parede inclinada. Em um último experimento são utilizados vórtices gerados analiticamente no cenário com uma parede meridional. Ao final os resultados das duas modelagens são comparados e discutidos.

5.1. O MODELO BLECK & BOUDRA

Este trabalho utiliza o modelo isopicnal²¹ desenvolvido por [Bleck & Boudra \(1981, 1986\)](#), doravante chamado de MBB, o qual foi posteriormente melhorado por [Bleck & Smith \(1990\)](#). O modelo consiste, basicamente, de quatro equações: duas equações do momentum, uma equação hidrostática e a equação da continuidade ([Shi & Nof, 1994](#)), que são:

²¹ Ao leitor mais interessado em coordenadas generalizadas e modelos isopicnais recomenda-se a leitura de [Bleck \(1978\)](#), [Bleck \(1979\)](#), [Kowalik & Murty \(1993\)](#), [Haidvogel & Beckmann \(1999\)](#) e [Kantha & Clayson \(2000\)](#).

$$\text{Momentum zonal:} \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv = -\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\nu}{\Delta p} \nabla(\Delta p \nabla u), \quad (5.1)$$

$$\text{Momentum meridional:} \quad \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu = -\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\nu}{\Delta p} \nabla(\Delta p \nabla v), \quad (5.2)$$

$$\text{Balanço hidrostático:} \quad \Delta M = p \Delta \alpha \quad e \quad (5.3)$$

$$\text{Continuidade:} \quad \frac{\partial(\Delta p)}{\partial t} + \frac{\partial(u \Delta p)}{\partial x} + \frac{\partial(v \Delta p)}{\partial y} = 0. \quad (5.4)$$

Nestas equações u e v são as velocidades zonal e meridional, respectivamente, Δp é a profundidade de uma camada de densidade constante, f é o parâmetro de Coriolis, M é o potencial de Montgomery (e.g., [Cushman-Roisin, 1994](#)), ΔM é a diferença entre os potenciais de Montgomery entre as camadas superior e inferior, α é o volume específico, $\Delta \alpha$ é a diferença entre os volumes específicos entre as camadas superior e inferior, ν é a viscosidade lateral e p a pressão. É utilizado o operador $\nabla = i\partial(*)/\partial x + j\partial(*)/\partial y$, onde i e j são vetores unitários na direção zonal e meridional, respectivamente. A comunicação vertical entre as camadas é feita através da pressão que é transmitida hidrostáticamente. O sistema de quatro equações apresentado acima possui quatro incógnitas u, v, p e M e pode ser então solucionado.

O MBB utiliza a grade tipo C de [Arakawa \(1966\)](#), onde o ponto em que a velocidade “ u ” é calculada situa-se a uma distância equivalente à metade da dimensão horizontal de um elemento de grade (que mede Δx vs Δy , onde Δx é o passo horizontal do modelo e Δy o seu passo vertical) à esquerda do ponto onde a profundidade “ h ” é calculada. Já a velocidade “ v ” é calculada a uma distância equivalente à metade da dimensão vertical de um elemento de grade abaixo do ponto de “ h ”. O local onde a vorticidade é calculada situa-se a uma distância equivalente à metade da dimensão vertical de um elemento de grade abaixo do ponto de “ u ” (e.g., [Arruda, 2002](#)).

Uma das grandes vantagens do MBB é a utilização de um algoritmo que explora a técnica FCT (do inglês *flux corrected transport*), desenvolvida por [Boris & Book \(1973\)](#) e [Zalesak \(1979\)](#), e que é utilizado na resolução da equação da continuidade (5.4). A uti-

lização deste algoritmo permite que a profundidade de uma camada seja zerada, tornando o modelo extremamente conveniente para o estudo de vórtices altamente não-lineares do tipo lente (Shi & Nof, 1994).

O modelo utiliza a condição de contorno radiativa de segunda ordem de Orlandi (1976) nos seus contornos abertos. Várias opções estão disponíveis no MBB, tais como a inclusão de paredes (horizontais, verticais e/ou inclinadas), termos fonte ou sumidouros, bóias de deriva e outras.

Os dados de cada simulação são modificados conforme o cenário a ser modelado e serão informados ao longo deste capítulo para cada experimento apresentado. A camada inferior é suposta ser muito mais profunda (abissal) que a superior e é considerada em repouso. O valor do parâmetro β foi aumentado nos experimentos numéricos para se acelerar o andamento do modelo. Para a geração do “trem” de vórtices nos modelos numéricos utilizou-se: (a) feições geradas analiticamente no plano-f e posteriormente estabilizadas no plano- β , e (b) o “canhão de vórtices” (do original em inglês *eddy cannon*), introduzido no trabalho de Pichevin e Nof (1996), o qual será explicado na próxima seção.

5.2. O CANHÃO DE VÓRTICES

O trabalho de Pichevin e Nof (1996) estuda a formação de *meddies* (vórtices provenientes do Mar Mediterrâneo) no Cabo de São Vicente, localizado no extremo sudoeste do continente europeu, a norte da região de encontro do Mar Mediterrâneo com o Oceano Atlântico. No trabalho destes autores um novo processo é introduzido para a explicação da formação dos *meddies*, o qual se baseia no paradoxo da retroflexão apresentado no estudo analítico de Nof & Pichevin (1996).

No cenário teórico desenvolvido para o canhão de vórtices uma corrente flui para oeste ao longo de um dos lados de uma parede (que simula um cabo geográfico), se separa desta na ponta do cabo, é posteriormente reconectada e retorna para leste pelo outro lado da parede. A separação, conforme citado em Pichevin & Nof (1996), se deve ao pequeno raio de curvatura (e.g., Hughes, 1989 e Bormans & Garret, 1989), enquanto a

reconexão à parede se deve ao fato de que a corrente deve ter uma área transversal definida (e.g., [Cherniawsky & LeBlond, 1986](#)) assim como este é o trajeto das ondas de Kelvin. A figura 5.1, adaptada de [Pichevin e Nof \(1996\)](#) para o hemisfério sul, mostra o cabo geográfico e a corrente zonal que o contorna. A corrente que penetra pelo lado norte da parede exerce uma força (ação) sobre o domínio (demarcado pelo retângulo tracejado na figura 5.1) dirigida para oeste, enquanto a corrente que deixa o domínio pelo lado sul da parede faz com que uma outra força (de reação, conforme a 3ª Lei de Newton) seja aplicada no domínio, a qual também é dirigida para oeste. Estas forças estão indicadas pelas setas amarelas na figura 5.1. A essência deste mecanismo de geração de vórtices reside no fato de que as forças aplicadas no domínio de estudo não podem ser equilibradas, o que gera um paradoxo.

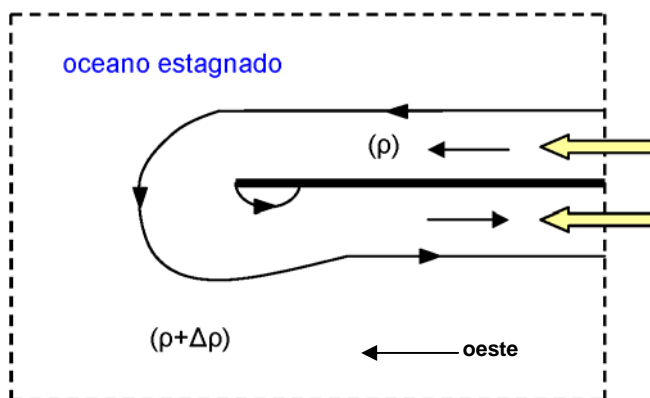


Figura 5.1 – Cenário do canhão de vórtices proposto em [Pichevin & Nof \(1996\)](#) adaptado para o hemisfério sul. A linha preta mais grossa representa o cabo geográfico. Uma corrente zonal penetra no domínio pelo lado norte do cabo, dirigida para oeste, o contorna, voltando no sentido leste pela parte sul do cabo. A corrente é representada pelas setas pretas e as setas amarelas representam as forças aplicadas no domínio pela corrente zonal. Figura adaptada de [Pichevin & Nof \(1996\)](#).

Paradoxo similar é relatado em [Pichevin e Nof \(1997\)](#) quando um canal meridional, por onde circula água no sentido norte, abastece com água anômala um oceano estagnado. Os autores utilizaram neste trabalho o termo “paradoxo do desbalanceamento de momentum” (do original em inglês *momentum imbalance paradox*). Este mesmo paradoxo buscou explicar, em [Pichevin et al. \(1999\)](#), a geração de vórtices na zona de retroflexão da Corrente das Agulhas.

Conforme [Pichevin e Nof \(1996\)](#) a solução para este paradoxo, na situação do canhão de vórtices, requer a geração de vórtices anticiclônicos na ponta do cabo que, ao deixarem o domínio de estudo pelo seu contorno oeste, exerceriam uma força no domínio, dirigida para leste, que equilibraria a força exercida pela corrente zonal que circula pelo cabo. O termo “canhão de vórtices” reside no fato de que os vórtices atuam de forma

similar às balas disparadas por um canhão as quais exercem uma força sobre este canhão ao serem disparadas.

A movimentação dos vórtices para oeste tem como cenário de fundo o plano- β , visto que estas feições são autopropulsionadas neste sentido pelo efeito de β , ou seja, não se moveriam no plano-f (advecção externa desconsiderada e considerando-se fundo plano). Na situação em que β é desconsiderado, em virtude da ausência de um mecanismo de remoção do vórtice, esta feição cresceria continuamente de tamanho na ponta do cabo.

Como a operacionalização do canhão de vórtices no MBB é um dos passos necessários para que os experimentos numéricos necessários a este trabalho possam ser processados, será mostrada a criação do vórtice na ponta do cabo para a situação em que o parâmetro β é nulo. As figuras 5.2 e 5.3 mostram dois instantes de tempo de uma modelagem numérica no MBB com o canhão de vórtices no plano-f.

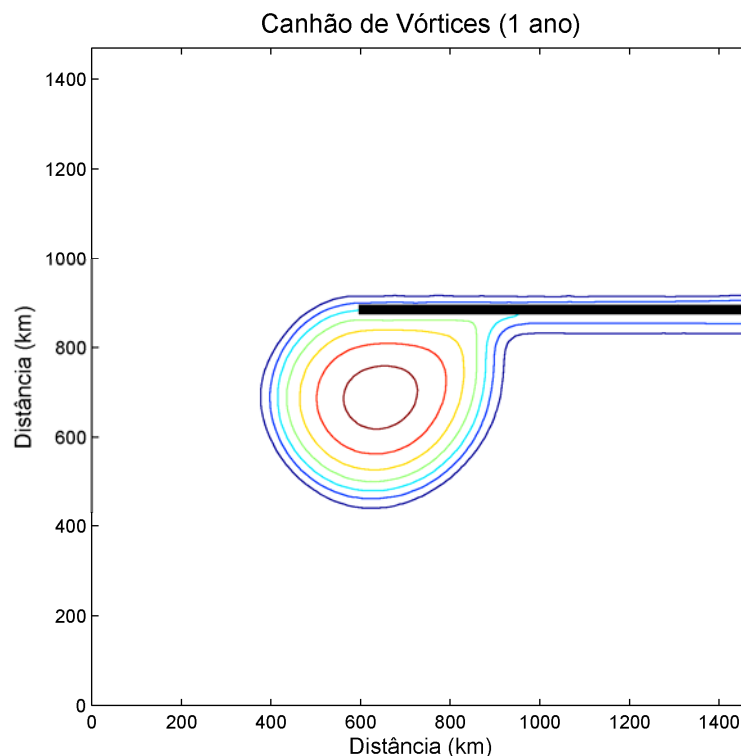


Figura 5.2 – Profundidade da camada superior, durante a geração de um vórtice pelo canhão de vórtices, para um período de simulação no MBB de um ano, no plano-f. A linha grossa preta da figura representa o cabo geográfico. O intervalo entre as linhas de contorno é de 300 m. Parâmetros utilizados: $\nu = 400 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $f_0 = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $g' = 0,01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ e $\Delta t = 864 \text{ s}$.

O domínio possui 100 x 100 elementos de grade de 15 km x 15 km, totalizando uma área de 1500 km x 1500 km. Não se utilizou uma maior resolução visto que a intenção aqui é unicamente mostrar a formação do vórtice na ponta do cabo. Foi adotado um passo de tempo $\Delta t = 864$ s e a corrente zonal foi suposta com 45 km de largura com velocidade nula rente ao cabo. O coeficiente Laplaciano de fricção horizontal ν é $400 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ e $f_0 = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$.

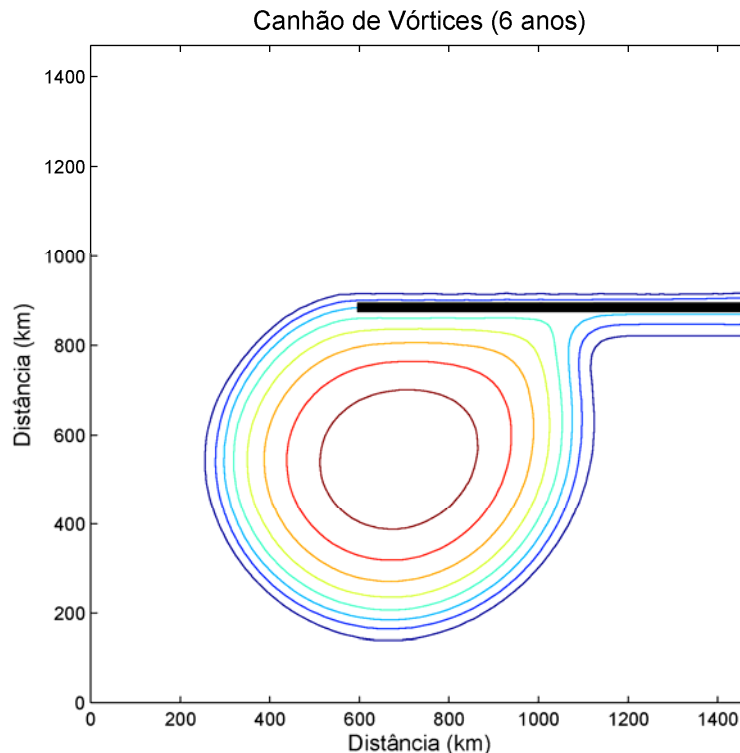


Figura 5.3 – Profundidade da camada superior, durante a geração de um vórtice pelo canhão de vórtices, para um período de simulação no MBB de seis anos, no plano-f. A linha grossa preta da figura representa o cabo geográfico. O intervalo entre as linhas de contorno é de 300 m. A ausência de um mecanismo de remoção faz com que o vórtice cresça continuamente na ponta do cabo. Parâmetros utilizados: $\nu = 400 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $f_0 = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $g' = 0,01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ e $\Delta t = 864$ s.

No período de um ano já poderia ter ocorrido a liberação deste vórtice no plano- β conforme será observado nos experimentos da próxima seção. As figuras 5.2 a 5.3 mostram que o vórtice está crescendo continuamente em virtude da impossibilidade de ser desprendido. O seu centro de massa move-se meridionalmente para sul.

A figura 5.4 mostra a bifurcação do fluxo à leste do vórtice e a sul do cabo geográfico. Estes vetores de velocidade compõem o fluxo que está sendo reconectado à parede sul do cabo após contornar a sua ponta.

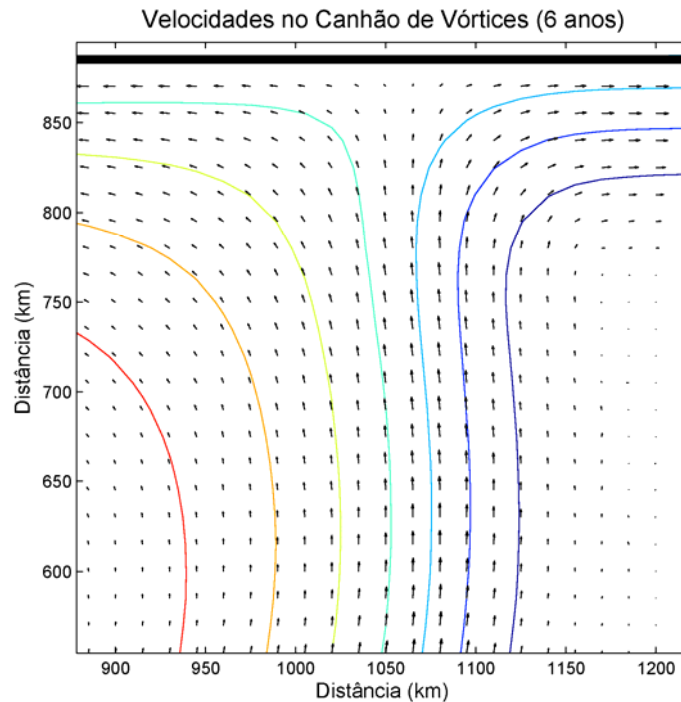


Figura 5.4 – Bifurcação dos vetores de velocidade que compõem o fluxo que está sendo reconectado à parede sul do cabo após ter contornado a sua ponta. A linha grossa na parte superior da figura representa o cabo geográfico. Parâmetros: $\nu = 400 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $f_0 = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $g' = 0,01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ e $\Delta t = 864 \text{ s}$.

5.3. ESTUDO COMPARATIVO ENTRE OS MODELOS ANALÍTICO E NUMÉRICO

Nesta seção serão apresentados os resultados das modelagens numéricas realizadas com o modelo-1 (vórtices com o formato de lentes) e o comparativo destas modelagens com o estudo analítico desenvolvido no Capítulo 4. Na modelagem analítica o “trem” de lentes que incide sobre a borda continental foi representado por uma corrente de dupla frente de mesmo transporte e vorticidade, que penetrava no domínio de estudo pelo seu contorno leste. Cabe destacar que diferenças de 20-30% entre o modelo numérico e analítico são aceitáveis, conforme relata [Pichevin e Nof \(1997\)](#).

Três experimentos numéricos, representativos de vários experimentos realizados, serão apresentados, ou seja: (1) com vórtices tipo lente, gerados por um canhão de vórtices, seguido de contato do “trem” de vórtices com uma parede meridional; (2) idem ao anterior, porém com uma parede inclinada com relação ao norte geográfico e (3)

com vórtices previamente gerados no plano- f , de forma analítica, introduzido no MBB para sua estabilização no plano- β , e posteriormente, numa nova simulação, introduzidos na bacia a intervalos regulares, também com uma parede meridional.

EXPERIMENTO 1

Neste experimento os vórtices serão gerados por um canhão de vórtices criado a partir de um cabo geográfico modelado no MBB por uma parede horizontal, colocada perpendicularmente ao contorno leste do domínio de estudo. O MBB foi rodado para este cenário com os seguintes parâmetros: $f_0 = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\beta = 8 \cdot 10^{-11} \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ (aumentado 4 vezes para a aceleração da modelagem numérica) e $\nu = 400 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. O domínio de estudo possui 320×100 elementos de grade (x vs y) os quais medem $5 \text{ km} \times 10 \text{ km}$, totalizando uma área de $1600 \text{ km} \times 1000 \text{ km}$. Foi utilizado um passo de tempo (Δt) de 288 segundos e a corrente zonal de entrada no canhão de vórtices tem 55 km de largura possuindo vorticidade potencial nula.

Após várias simulações para o ajuste dos parâmetros do canhão e da posição da borda continental, optou-se por uma parede posicionada mais perto do canhão de vórtices de modo que o efeito do atrito seja amenizado sobre as feições enquanto estas transitam pela bacia, além de se reduzir o tamanho do domínio de estudo o que melhora significativamente o tempo de processamento. Propositadamente foram criadas grandes feições anticiclônicas a partir do canhão de vórtices, visto que isto permite: (a) uma menor resolução do domínio de estudo a ser processado no modelo numérico, tendo em vista a maior largura obtida para o braço meridional para norte²² oriundo do encontro do “trem” de vórtices com a borda continental (o que exige menos elementos de grade para ser visualizado) e (b) o aumento do passo de tempo, o que repercute em significativos ganhos em tempo de processamento. Graças a este artifício foi possível a utilização de 5 km como menor dimensão de cada elemento de grade do domínio de estudo e um maior passo de tempo de 288 segundos.

O cenário foi rodado por quatro anos no MBB. Um tempo maior se mostrou desnecessário em face dos resultados obtidos. O modelo numérico mostrou um comportamento

²² Esta corrente meridional para norte tem uma largura de $O(\epsilon^{1/2})$.

rigorosamente repetitivo e estável, ou seja, o intervalo entre a liberação de dois vórtices sucessivos é praticamente constante e as curvas de transporte, energia cinética e energia potencial mostram um perfil padrão neste período de simulação.

A figura 5.5 mostra o resultado do MBB para um período de simulação de 148 dias. O primeiro vórtice V_1 liberado pelo canhão (o que ocorreu no dia 116) está se afastando da zona do cabo geográfico e já um segundo vórtice V_2 está em processo de formação. A feição V_1 possui o seu hemisfério norte exageradamente maior em função da utilização de um parâmetro β maior, o que aumentou a velocidade do vórtice e, conseqüentemente, o seu transporte.

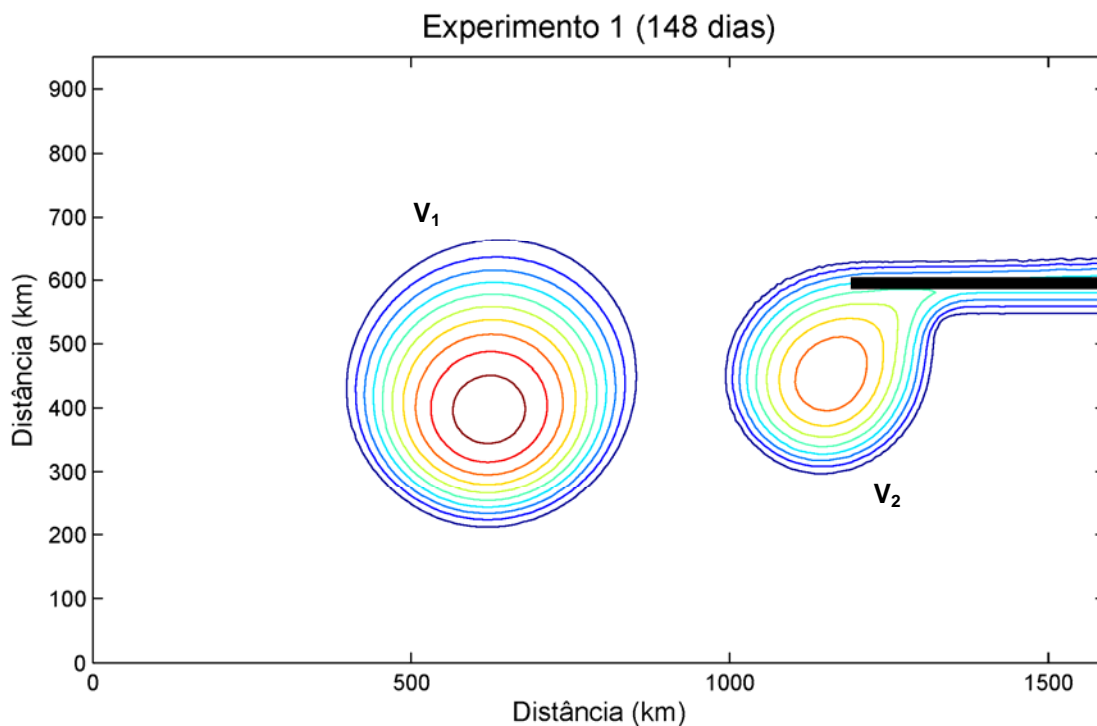


Figura 5.5 – Profundidade (m) da camada superior no experimento 1 para um período de simulação no MBB de 148 dias, no plano- β . Percebe-se um vórtice V_1 já liberado pelo cabo geográfico (representado pela linha preta grossa) e uma segunda feição V_2 em processo de formação. O intervalo entre os contornos de profundidade é de 300 m. Parâmetros: $\nu = 400 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $f_0 = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\beta = 8 \cdot 10^{-11} \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, $g' = 0,01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ e $\Delta t = 288 \text{ s}$.

A figura 5.6 mostra o contato do vórtice V_1 com a borda continental. Percebe-se o “vazamento” do seu líquido interior no sentido da linha do Equador conforme previsto pela modelagem analítica (a qual utiliza uma corrente de dupla frente para a representação dos vórtices) desenvolvida neste trabalho e por [Nof \(1999\)](#). O vórtice V_2 está por ser liberado, o que ocorrerá no dia 228.

A figura 5.6 mostra ainda três linhas tracejadas A, B e C que delimitam seções da camada superior por onde o transporte será calculado pelo MBB. Na seção delimitada pela linha A (seção A) será calculado o transporte da corrente meridional que flui para norte, deixando o domínio de estudo, o qual deverá equivaler praticamente ao transporte do “trem” de vórtices. Na seção B será avaliado o transporte da corrente zonal imposta no contorno leste do domínio de estudo e que penetra no domínio de estudo pela parte norte do cabo geográfico. Uma parcela do fluxo de massa desta corrente é utilizada para a geração do vórtice na ponta do cabo enquanto uma segunda parcela retorna pelo seu lado sul. A seção C permitirá o cálculo da diferença entre os dois transportes, ou seja, entre o transporte da corrente zonal que entra e que sai do domínio de estudo, o qual deve praticamente resultar, ao longo do tempo, no transporte dos vórtices liberados pelo canhão.

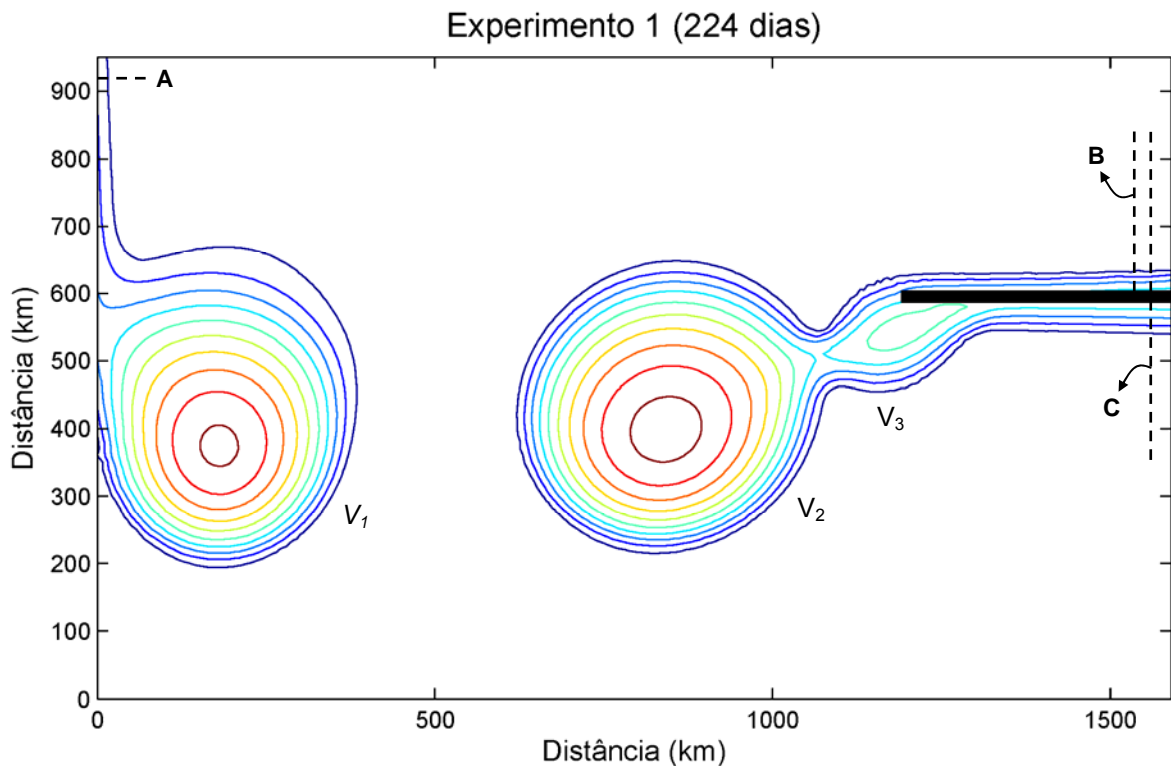


Figura 5.6 – Isóbatas (com intervalo de 300 m) do experimento 1 para um tempo de simulação no MBB de 224 dias onde se destaca o encontro do vórtice V_1 e a borda continental. A segunda feição V_2 está por ser liberada do cabo (o que ocorrerá no dia 228) e uma terceira feição V_3 está começando a ser criada. Observa-se o vazamento de fluido do interior do vórtice V_1 no sentido da linha do Equador conforme previsto na modelagem analítica. A linha preta grossa representa o cabo geográfico. Três linhas pretas tracejadas A, B e C são mostradas na figura, as quais demarcam as seções da camada superior onde serão calculados os transportes pelo MBB. Parâmetros: $\nu = 400 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $f_0 = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\beta = 8 \cdot 10^{-11} \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, $g' = 0,01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ e $\Delta t = 288 \text{ s}$.

A figura 5.7 mostra o módulo dos transportes da corrente zonal: (a) que entra pela parte norte (seção B) do cabo geográfico, que corresponde à reta vermelha da figura, e (b) que sai pela sua parte sul (obtido pela diferença dos transportes entre as seções C e B), ao longo dos quatro anos de simulação do experimento 1 no MBB. Como se pode observar na figura o transporte para leste (curva azul) está estável. Tendo em vista as oscilações no início da modelagem, optou-se por fazer uma média deste transporte (reta preta na figura) nos dois anos finais da simulação numérica, quando a curva obtida mantém um padrão praticamente uniforme.

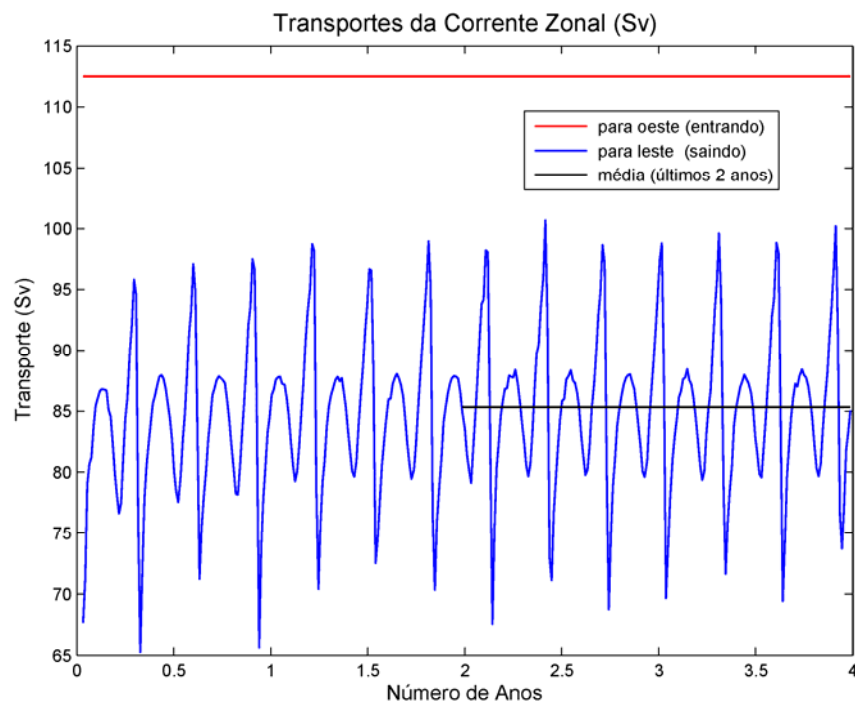


Figura 5.7 – Transporte (Sv) da corrente zonal que entra no domínio de estudo pela seção B (reta vermelha) do domínio de estudo e transporte da corrente zonal que sai do domínio pelo lado sul do cabo geográfico (curva azul), cujo valor é obtido pela diferença dos transportes entre as seções C e B, conforme seções definidas na figura 5.6. A reta preta mostra a média deste transporte para os últimos dois anos de modelagem. O transporte pela seção B é constante. Parâmetros: $\nu = 400 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $f_0 = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\beta = 8 \cdot 10^{-11} \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, $g' = 0,01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ e $\Delta t = 288 \text{ s}$.

O transporte da corrente zonal ao entrar no domínio de estudo (reta vermelha na figura 5.7) pelo contorno norte do cabo, calculado pelo MBB, é de 112,5 Sv e a média do transporte da corrente zonal ao sair do domínio, nos últimos dois anos, é de 85,34 Sv (reta preta na mesma figura). Espera-se então que a média do transporte através da seção A seja de 27,16 Sv, resultado oriundo da diferença entre os transportes das retas vermelha e preta da figura 5.7.

Destaca-se que o transporte da corrente zonal no contorno norte do cabo é muito elevado em virtude da opção de se trabalhar com vórtices grandes para a facilitação da modelagem numérica, conforme já descrito no texto. A geração de grandes vórtices exige uma corrente de grande transporte contornando o cabo do canhão de vórtices. A corrente que entra no domínio de estudo pelo contorno norte do cabo possui uma largura L de 55 km com aproximadamente 1500 m de profundidade rente à parede. O perfil de velocidade desta corrente, obtido da consideração que sua vorticidade potencial ξ é nula, é descrito por $u = f_0 y + u_p$ (onde u_p é a velocidade rente a parede do cabo, assumida como zero, e o termo em β foi desprezado). O perfil de profundidade desta corrente, considerando-se que ela seja geostrófica e o meio invíscido, é expresso por $h = f_0^2(L^2 - y^2)/2g'$. A integral do produto “ hu ” ao longo do intervalo entre $y = 0$ e $y = L$ fornece o transporte desta corrente, que resulta 114,38 Sv, um valor praticamente idêntico ao calculado pelo MBB.

A figura 5.8 apresenta os transportes da corrente meridional que passa pela seção A (ver figura 5.6) assim como a média deste transporte também calculada para os últimos dois anos de modelagem no MBB (reta preta na figura). Este transporte médio vale 27,17 Sv (o que confirma o valor esperado) e equivale ao transporte médio do “trem” de vórtices através da bacia.

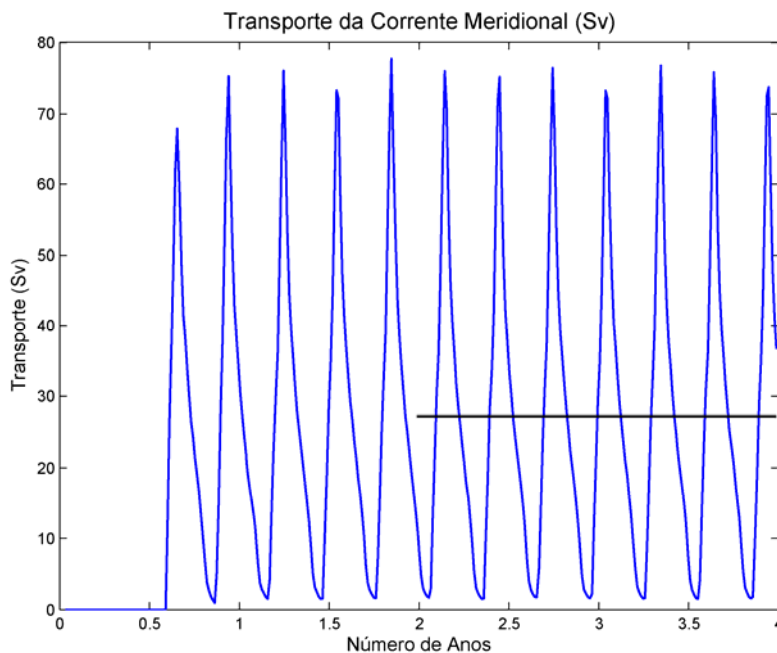


Figura 5.8 – Transporte da corrente meridional (curva azul) que passa pela seção A da figura 5.6 e média deste transporte nos últimos dois anos de modelagem numérica (reta preta). Parâmetros utilizados: $\nu = 400 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $f_0 = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\beta = 8 \cdot 10^{-11} \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, $g' = 0,01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ e $\Delta t = 288 \text{ s}$.

A estável periodicidade na geração de vórtices pelo canhão (um vórtice a cada aproximadamente 112 dias, depois do primeiro ter sido liberado) mostra que em quatro anos de modelagem seriam geradas $[(4 \times 365) - 116] / 112 = 12$ feições. Os 12 picos de transporte da figura 5.8 mostram o vazamento destes 12 vórtices passando pelo contorno norte do domínio de estudo, o qual foi gerado após o contato das feições com a borda continental. A figura 5.9 apresenta as curvas de energia cinética e potencial que foram calculadas sobre todo o domínio de estudo. Percebe-se que as energias estão estabilizadas nos dois últimos anos de simulação.

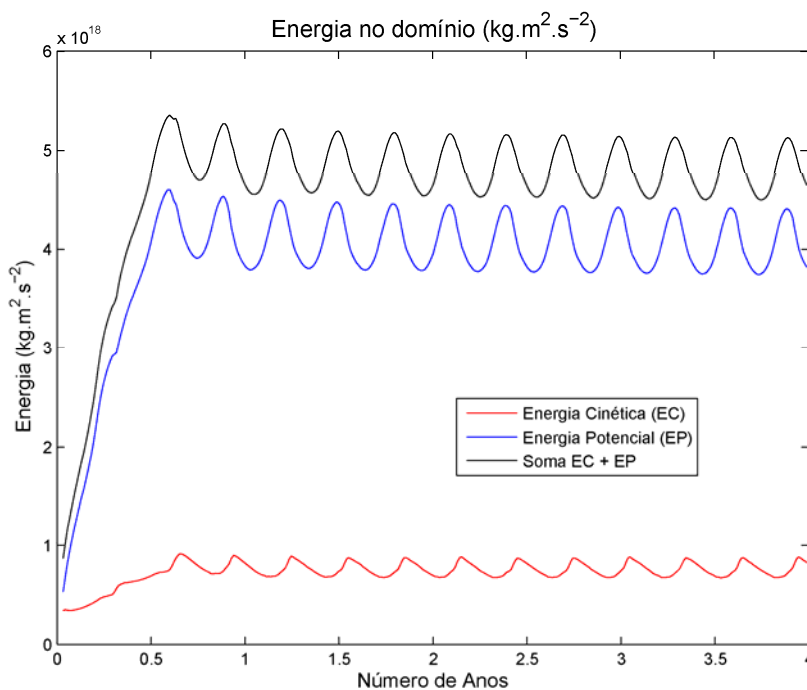


Figura 5.9 – Variação da energia do domínio de estudo no período de simulação de quatro anos no MBB. A energia predominante no domínio é a energia potencial (em azul). Pode-se perceber que as energias cinética e potencial se estabilizaram nos últimos dois anos da simulação. Parâmetros utilizados: $\nu = 400 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$, $f_0 = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\beta = 8.10^{-11} \text{ m}^{-1}.\text{s}^{-1}$, $g' = 0,01 \text{ m}.\text{s}^{-2}$ e $\Delta t = 288 \text{ s}$.

Para a visualização do vórtice estacionário optou-se por fazer a média temporal da velocidade e profundidade ao longo de todo o domínio de estudo, a partir do instante de tempo que o primeiro vórtice entra em contato com a borda continental até o final do período de simulação. O resultado da média das profundidades é mostrado na figura 5.10. O vórtice estacionário possui um diâmetro de aproximadamente 230 km, o qual foi estimado pela avaliação do perfil médio de velocidade calculado em todo o domínio de estudo, onde em cada elemento de grade aplicou-se $\mathbf{V}_m = \sum \mathbf{V}h / \sum h$, onde \mathbf{V}_m é a velocidade média e \mathbf{V} a velocidade total no elemento. Esta expressão foi aplicada para cada uma das componentes (meridional e zonal) da velocidade \mathbf{V} .

A presença deste vórtice estacionário confirma o resultado da modelagem analítica. Esta feição é necessária no domínio de estudo para que a sua força β equilibre a força “foguet” aplicada em D_o pela corrente meridional que deixa o domínio pelo seu contorno norte, conforme mostrou o desenvolvimento analítico apresentado no Capítulo 4 deste trabalho.

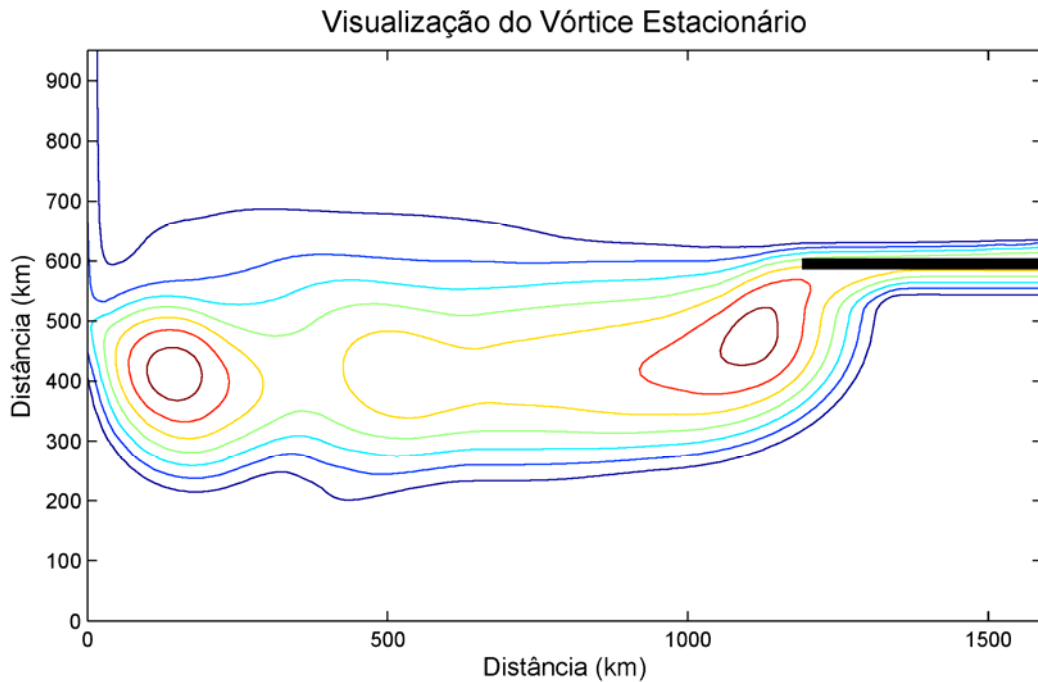


Figura 5.10 – Visualização do vórtice estacionário a partir do perfil médio de profundidade da camada superior (m), calculado desde o dia 220, em que o primeiro vórtice entrou em contato com a borda continental, até o final dos quatro anos de simulação no MBB. As linhas de contorno possuem um intervalo de 300 m. A linha preta grossa representa o cabo geográfico. Parâmetros: $\nu = 400 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $f_o = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\beta = 8 \cdot 10^{-11} \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, $g' = 0,01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ e $\Delta t = 288 \text{ s}$.

A corrente de dupla frente equivalente a este “trem” de vórtices possui as coordenadas meridionais de suas frentes dadas por $y_5 = 78,35 \text{ km}$ e $y_8 = -73,71 \text{ km}$. Estas coordenadas são obtidas solucionando-se o sistema formado pelas equações (4.31b, página 64), para os pontos (h_{cz}, y) dados por $(0, y_5)$ e $(0, y_8)$, e pela equação (4.35, página 65) para $y = y_5$ e $\psi = 27,16 \text{ Sv}$, que corresponde ao transporte do “trem” de vórtices conforme dados do MBB. A equação cúbica é solucionada com metodologia originada do trabalho de [Cardano \(1545 apud Boyer, 1974\)](#). Foram utilizados neste sistema de equações os mesmos parâmetros aplicados nas simulações no MBB, ou seja, $f_o = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\beta = 8 \cdot 10^{-11} \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ e $g' = 0,01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Esta corrente zonal possui uma profundidade H_{cz} de 2.877 m e uma largura L_{cz} de 152,06 km. Seu raio de deformação R_D é de 53,64 km e seu transporte equivale ao do “trem” de vórtices.

A profundidade da corrente meridional na parede pode ser calculada pela expressão (4.36, página 65), que fornece como resultado 737 m (no modelo numérico este valor foi de 670 m). Com este valor aplicado na expressão (4.34, página 65) pode-se calcular o transporte T_{cn} da corrente meridional, que resulta 27,16 Sv, ou seja, o mesmo da corrente zonal. A equação (4.55, página 71) permite o cálculo do raio do vórtice estacionário, o que resulta um raio de 105 km. A modelagem analítica mostrou que todo o transporte do “trem” de vórtices se dirige para norte e que um vórtice estacionário de aproximadamente 210 km de diâmetro é necessário no domínio de estudo para o equilíbrio das forças meridionais que agem sobre o domínio. Estes resultados estão em concordância com a modelagem numérica, onde todo o transporte do “trem” de vórtices também se dirigiu para norte e um vórtice estacionário de 230 km instalou-se no domínio de estudo. A diferença entre as duas modelagens com relação ao raio do vórtice estacionário é de 9% (supondo o resultado do modelo numérico como correto), o que é um bom resultado.

EXPERIMENTO 2

Neste experimento os mesmos vórtices gerados pelo canhão de vórtices no experimento 1 entrarão em contato com uma parede inclinada. Deseja-se confrontar os resultados dos dois cenários entre si e com o desenvolvimento analítico, o qual prevê, além do transporte ser integralmente redirecionado para norte, um aumento no tamanho do vórtice estacionário tendo em vista a presença de uma componente do momentum da corrente zonal na equação integrada do momentum paralelo à parede. Será possível também avaliar a dimensão do erro cometido no tamanho do vórtice estacionário calculado analiticamente, pois a corrente zonal de dupla frente não possui o mesmo momentum do “trem” de vórtices, conforme já comentado no Capítulo 3.

O domínio de estudo terá agora 350 x 100 elementos de grade (x vs y) onde cada um possui 5 km x 10 km. A parede possui uma inclinação de 22,8° com relação ao norte geográfico. Aumentou-se a dimensão zonal do domínio de estudo, com relação ao experimento 1, para que os vórtices dos dois experimentos entrem em contato com a borda continental aproximadamente no mesmo tempo, garantindo-se características semelhantes nos dois encontros, principalmente quanto à interação de feições sucessi-

vas. Este aumento se deve ao fato da parede ser agora inclinada o que a tornaria mais próxima dos vórtices que estão chegando. Outros parâmetros são: $\nu = 400 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $f_0 = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\beta = 8 \cdot 10^{-11} \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, $g' = 0,01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ e $\Delta t = 288 \text{ s}$.

Os vórtices gerados possuem o mesmo tamanho daqueles gerados no experimento 1 anterior. A velocidade de translação dos vórtices que transitam pela bacia pode ser medida fazendo-se a superposição de duas saídas oriundas do modelo numérico. A figura 5.11 mostra estas saídas superpostas, as quais correspondem a períodos de simulação do dia 136 ao dia 196. A distância entre as posições do vórtice V_1 entre os dois períodos de simulação é de aproximadamente 400 km. A velocidade de translação c do vórtice, neste intervalo de tempo, pode ser calculada fazendo-se $c = -400 \cdot 10^5 / (61 \times 86.400) = -7,6 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$. Este valor situa-se na faixa de velocidade entre vórtices lineares e altamente não lineares, prevista em [Nof \(1982\)](#), lembrando-se que a ação do atrito vai reduzindo este valor devido à constante diminuição do raio de Rossby do vórtice. O sinal negativo foi introduzido visto que a velocidade é dirigida para oeste que é o sentido negativo do eixo x.

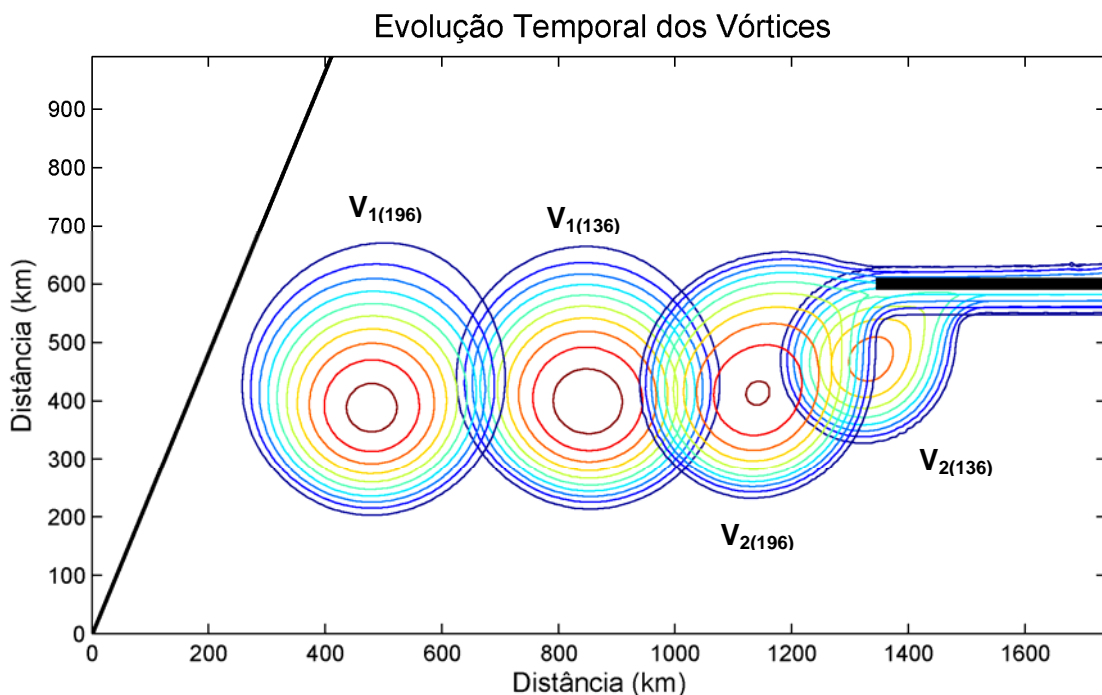


Figura 5.11 – Estimativa da velocidade de translação do vórtice V_1 a partir da superposição de saídas do MBB para os dias 136 e 196. O número entre parênteses assinala o dia da posição do vórtice. As duas posições sucessivas do vórtice V_1 permitem que a distância percorrida pela feição seja avaliada o que propicia a estimativa de sua velocidade de translação. A linha azul grossa representa o cabo geográfico. Parâmetros utilizados: $\nu = 400 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $f_0 = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\beta = 8 \cdot 10^{-11} \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, $g' = 0,01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ e $\Delta t = 288 \text{ s}$.

A ação do atrito sobre vórtices anticiclônicos no hemisfério sul tem como efeito imediato a geração de vorticidade ciclônica a partir de um determinado valor de raio r_v . Na zona interna da feição, compreendida entre $r_o \geq r \geq r_v$, a vorticidade tem sinal contrário àquela da região $r_v \geq r \geq 0$. À medida que o vórtice viaja pela bacia para oeste suas dimensões vão sendo reduzidas e seu raio de Rossby decresce conjuntamente. Cabe destacar que o vórtice que entra em contato com a borda continental não possui $\xi = 0$, o que difere o “trem” de vórtices do modelo numérico daquele que foi utilizado no modelo analítico.

A figura 5.12 mostra o primeiro contato do vórtice anticiclônico V_1 com a parede inclinada, onde novamente está presente o “vazamento” de seu interior no sentido do Equador. A figura mostra ainda quatro linhas tracejadas A, B, C e D que delimitam seções da camada superior por onde o transporte será calculado pelo modelo Bleck & Boudra, de forma idêntica ao que foi desenvolvido no experimento 1. A nova seção D foi introduzida para possibilitar o cálculo do transporte dos vórtices em seu trajeto ao longo da bacia.

A figura 5.13, de forma similar à figura 5.7, mostra os transportes da corrente zonal na sua entrada (reta vermelha) e na sua saída do domínio de estudo (curva azul), assim como o novo transporte (curva magenta) calculado na seção D, correspondente ao transporte do “trem” de vórtices que transitam por um “corredor” imaginário dentro do domínio que é delimitado por esta seção.

A reta preta cheia na figura 5.13 mostra o valor médio do transporte da corrente zonal dirigido para leste e a reta tracejada mostra o transporte do “trem” de vórtices que viajam pelo corredor. Estes valores médios foram novamente calculados para os dois últimos anos de simulação. O transporte da corrente zonal que entra e que sai do domínio de estudo resulta 112,5 Sv e 85,70 Sv, respectivamente. Este último valor praticamente coincide com os 85,34 Sv do experimento 1. O valor médio do transporte do “trem” de vórtices (no “corredor”) resultou 26,2 Sv, um valor muito próximo dos $112,5 - 85,7 = 26,8$ Sv esperados para as seções D e A. Este menor valor se deve à distribuição dos picos da curva do transporte pela seção D (curva magenta na figura 5.13) ao longo dos dois anos.

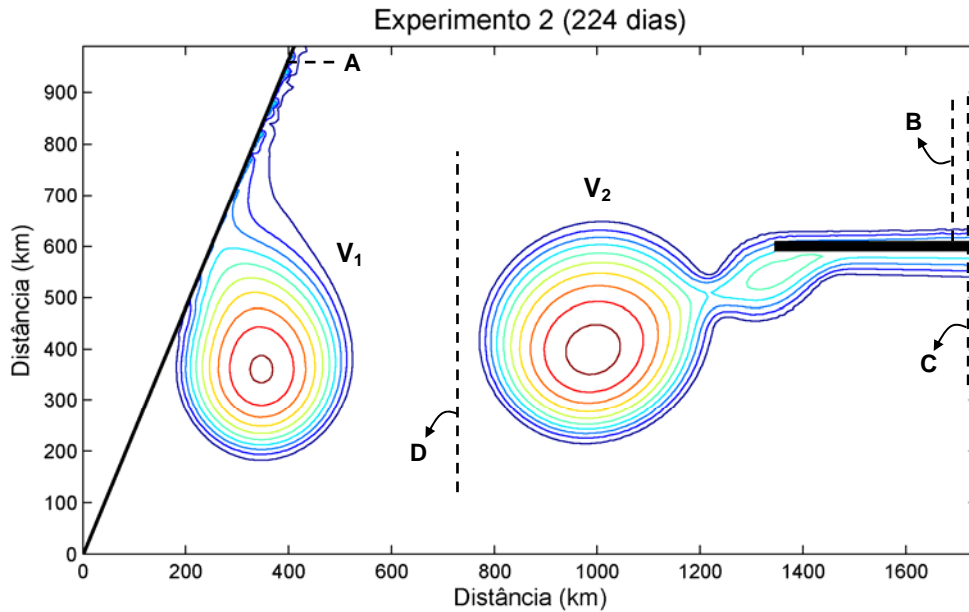


Figura 5.12 – Profundidade (m) da camada superior para um tempo de simulação de 224 dias, mostrando o encontro do vórtice V_1 com a borda continental inclinada. A segunda feição V_2 está por ser liberada, o que ocorrerá no dia 228. O intervalo entre as linhas de contorno é de 300 m. Observa-se o vazamento de fluido do interior do vórtice no sentido da linha do Equador. A linha preta grossa representa o cabo geográfico e a reta inclinada representa a parede.

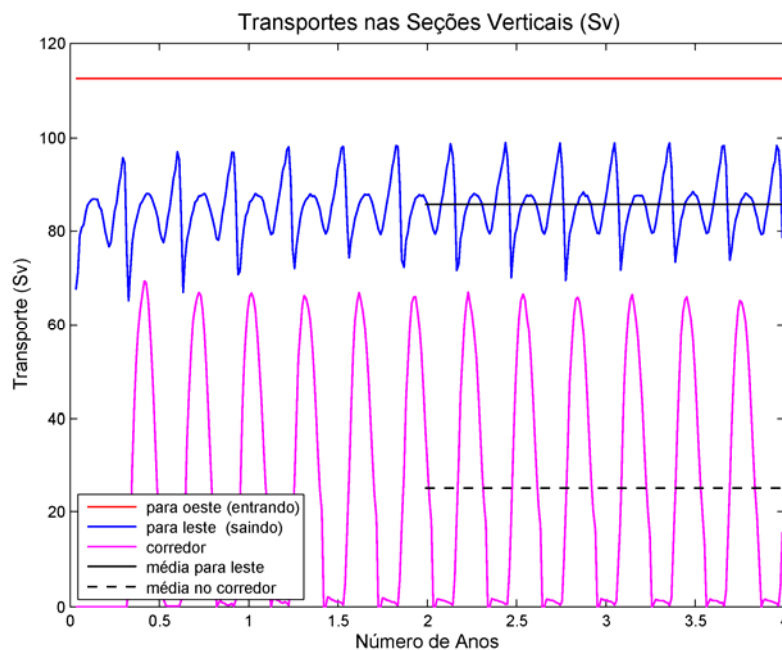


Figura 5.13 – Módulo dos transportes em várias seções do domínio. A reta vermelha mostra o transporte da corrente zonal que entra no domínio pelo lado norte do cabo, a curva azul assinala o transporte da corrente zonal que deixa o domínio pelo lado sul do cabo, enquanto a reta preta cheia indica o seu valor médio nos últimos 2 anos. A curva magenta indica o transporte do “trem” de vórtices pelo “corredor” imaginário situado na trilha destas feições e a reta preta tracejada indica o seu valor médio nos últimos dois anos. Parâmetros utilizados: $\nu = 400 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $f_0 = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\beta = 8 \cdot 10^{-11} \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, $g' = 0,01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ e $\Delta t = 288 \text{ s}$.

A figura 5.14 apresenta os transportes da corrente meridional que passa pela seção A (curva azul) assim como a média deste transporte também calculada para os últimos dois anos da modelagem numérica no MBB (reta preta na figura).

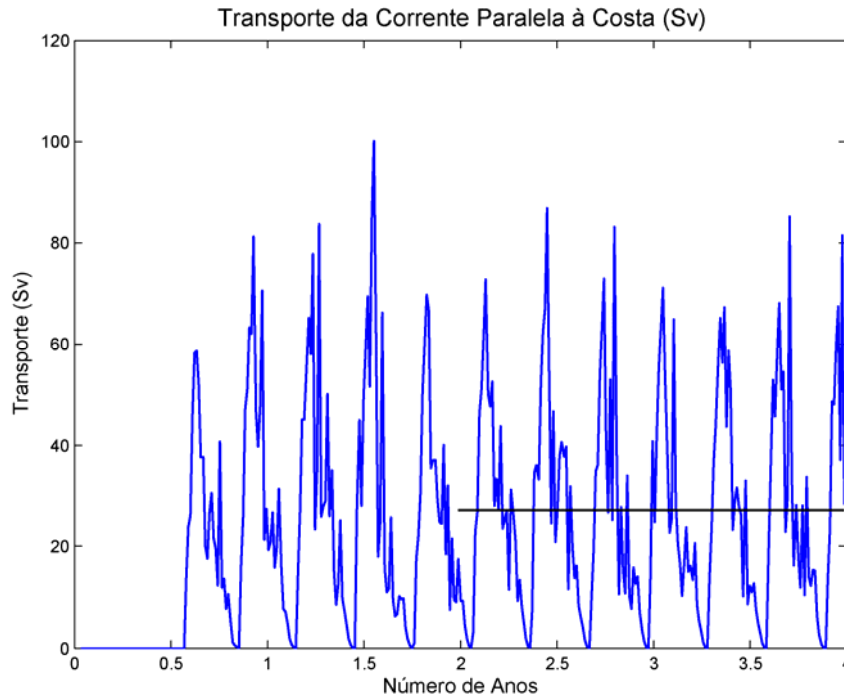


Figura 5.14 – Transporte da corrente paralela à parede, dirigida para nordeste, que passa pela seção A da figura 5.8 (curva azul) e média deste transporte nos últimos dois anos de modelagem numérica (reta preta). Os picos de transporte assinalam o “vazamento” dos vórtices que transitaram pela bacia do domínio de estudo após o seu encontro com a borda continental. Parâmetros utilizados: $\nu = 400 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $f_0 = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\beta = 8 \cdot 10^{-11} \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, $g' = 0,01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ e $\Delta t = 288 \text{ s}$.

Este transporte médio resulta 27 Sv o que confere com o valor esperado de 26,8 Sv para esta seção. A curva do transporte não tem o aspecto comportado daquela obtida no experimento 1, o que deve estar relacionado ao formato da borda continental inclinada que é introduzida no domínio modelado pelo MBB, ou seja, uma parede formada por vários “degraus”. Contudo, o transporte médio possui o valor esperado.

A figura 5.15 mostra o vórtice estacionário criado junto à borda continental para equilibrar as forças que atuam na direção paralela à parede no domínio de estudo, o qual tem um diâmetro aproximado de 260 km. As isóbatas da figura 5.15 foram obtidas de maneira similar ao que foi feito para a obtenção da figura 5.10 relacionada ao experimento 1. A figura 5.16 mostra o perfil da velocidade média na região do vórtice estacionário. Conforme já citado no experimento 1, estas velocidades foram obtidas calculan-

do-se $V_m = \sum V_h / \sum h$ em cada elemento de grade do domínio de estudo para cada uma das componentes (meridional e zonal) da velocidade V .

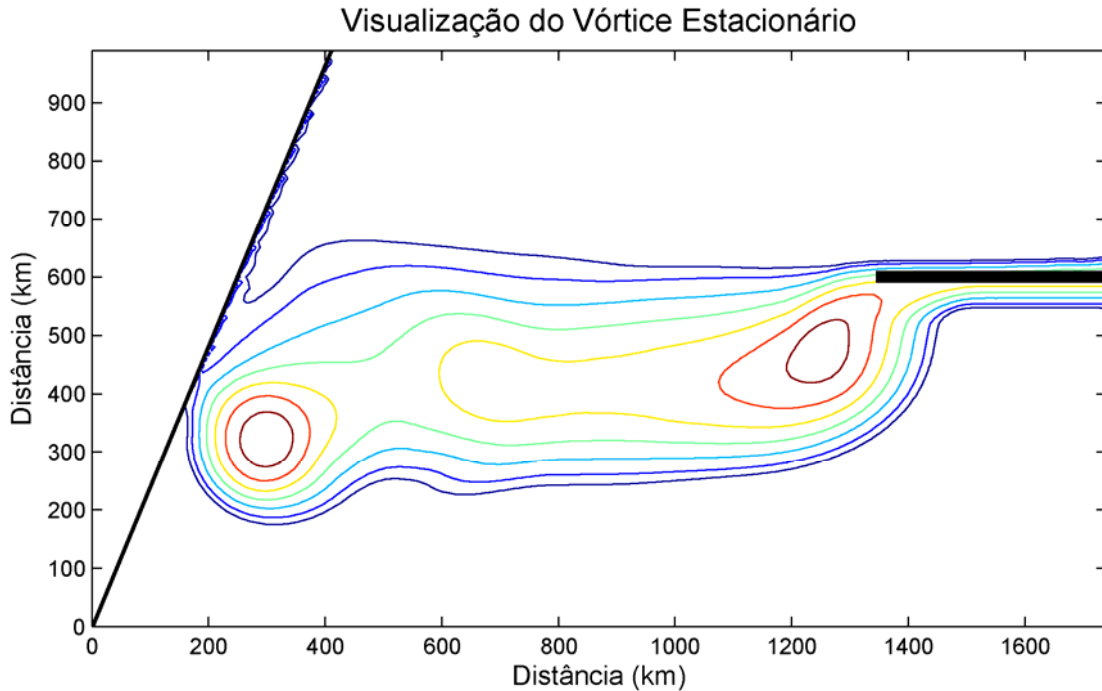


Figura 5.15 – Vórtice estacionário criado junto à borda continental no experimento 2. A figura mostra o perfil médio de profundidade (m) da camada superior obtida desde o dia 220, em que o primeiro vórtice entrou em contato com a parede, até o final dos quatro anos de simulação no MBB. As linhas de contorno possuem intervalo de 300 m. A linha preta grossa representa o cabo geográfico e a reta inclinada representa a parede. Parâmetros utilizados: $\nu = 400 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $f_0 = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\beta = 8 \cdot 10^{-11} \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, $g' = 0,01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ e $\Delta t = 288 \text{ s}$.

Comparando-se os resultados dos raios dos vórtices estacionários dos experimentos 1 e 2 percebe-se que a feição do último experimento é maior, o que foi previsto anteriormente pela modelagem analítica em virtude de que a força β oriunda do interior do vórtice estacionário deve agora equilibrar uma componente paralela à borda continental, a qual é oriunda da decomposição da força aplicada no domínio de estudo pelo “trem” de vórtices (ou pela corrente equivalente de dupla frente) quando este(a) penetra no domínio de estudo.

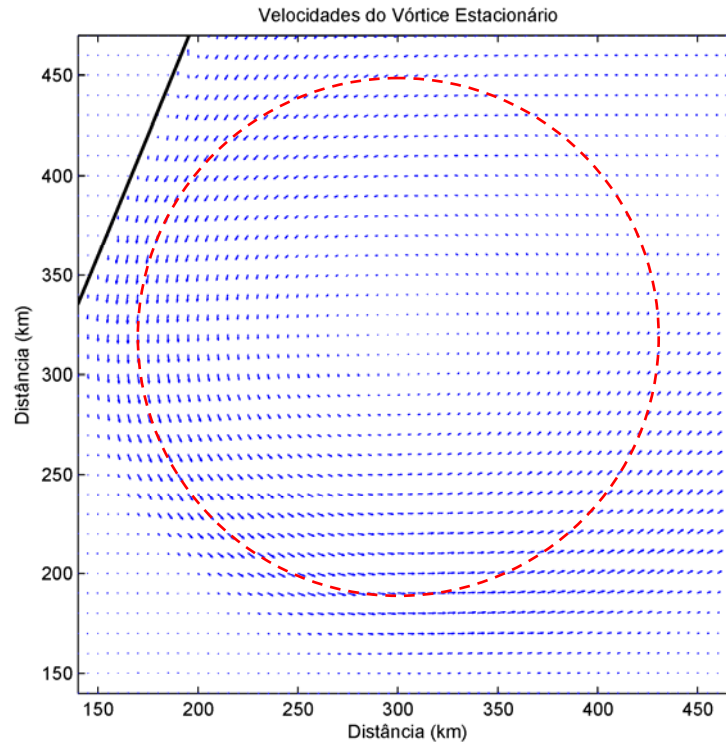


Figura 5.16 – Velocidades do experimento 2 na região do vórtice estacionário da figura 5.15. O diâmetro da feição foi estimado em 260 km conforme delimita o círculo vermelho tracejado. A linha preta assinala um trecho da borda continental. Parâmetros utilizados: $\nu = 400 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$, $f_0 = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\beta = 8.10^{-11} \text{ m}^{-1}.\text{s}^{-1}$, $g' = 0,01 \text{ m}.\text{s}^{-2}$ e $\Delta t = 288 \text{ s}$.

Além do tamanho do vórtice estacionário, de maior diâmetro no caso da borda continental inclinada, percebe-se ainda, ao se comparar as figuras 5.15 e 5.10, que a posição desta feição não é mesma nos dois cenários, tendo o vórtice estacionário se deslocado para sul no caso do experimento 2. A figura 5.17 busca dar uma explicação para este fato, tendo em vista que o primeiro contato de um vórtice com a parede, no cenário em que esta é inclinada, ocorre numa parte do seu hemisfério norte. A inércia de movimento da feição, que se move para oeste devido à autopropulsão ocasionada pelo parâmetro β , faz com que o seu hemisfério sul, que ainda não contactou com a parede, continue em movimento (já desacelerado), o que ocasiona o deslocamento do centro do vórtice para sul. A figura 5.17 destaca os centros do vórtice para intervalos de 24 dias, onde o seu movimento na direção sudoeste é evidenciado. Este fato não ocorreu com uma parede meridional (ver figura 5.10), pois neste cenário o vórtice colide com a parede no ponto mais a oeste da linha que divide seus dois hemisférios, o que desacelerou simultaneamente seus dois hemisférios.

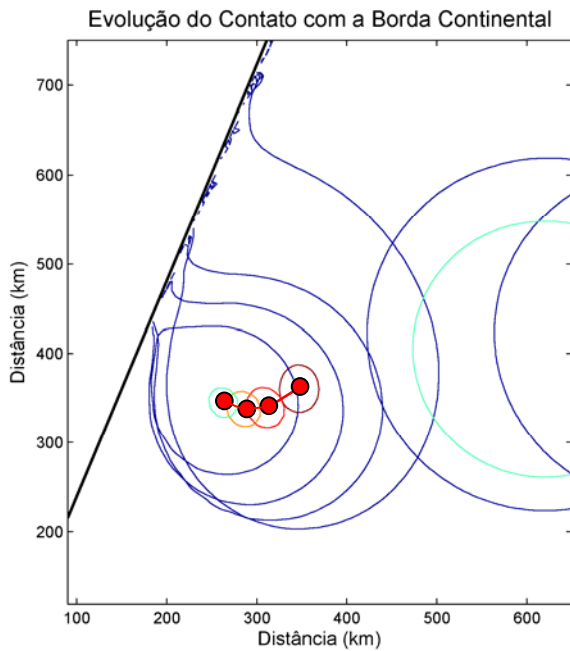


Figura 5.17 – Evolução do contato do vórtice com a borda continental inclinada no experimento 2. Os círculos vermelhos indicam o centro da feição a intervalos de 24 dias. A primeira interação do vórtice com a parede ocorre numa parte do seu hemisfério norte. A inércia de movimento da feição faz com que o seu hemisfério sul, que ainda não contactou com a parede, continue em movimento (desacelerado), o que ocasiona o deslocamento do seu centro para sul. Este fato não ocorreu com uma borda continental meridional, pois o vórtice colide com a parede praticamente no ponto mais a oeste da linha que divide seus dois hemisférios.

A figura 5.18 mostra o perfil das energias em toda a bacia, o qual é praticamente idêntico ao perfil do experimento 1. Os perfis estão estabilizados nos dois últimos anos.

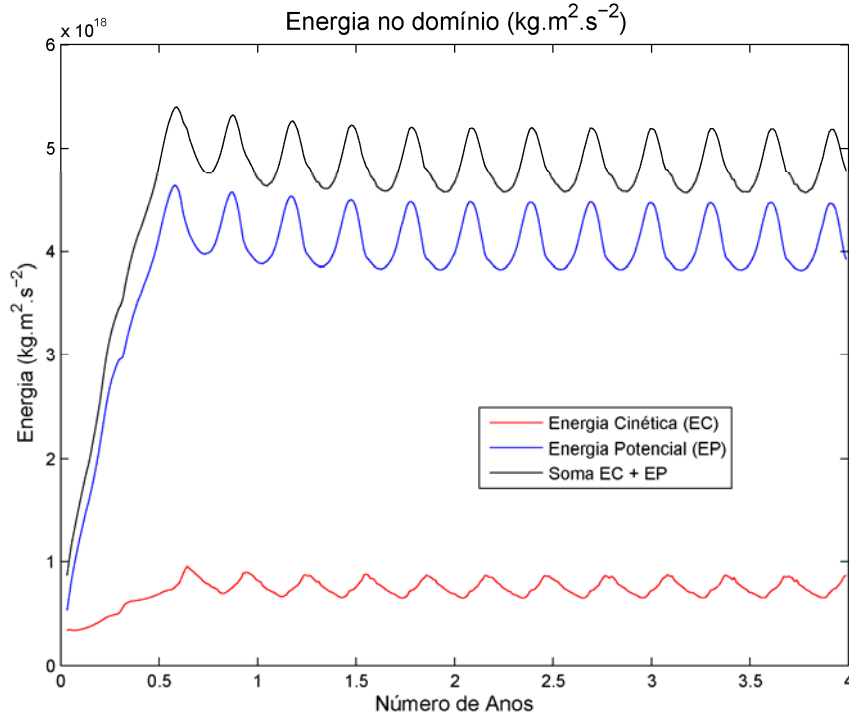


Figura 5.18 – Variação da energia do domínio de estudo no experimento 2 no período de simulação de 4 anos no MBB. A energia predominante no domínio é a energia potencial (em azul). As energias se estabilizaram nos últimos dois anos da simulação. Parâmetros utilizados: $\nu = 400 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $f_0 = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\beta = 8.10^{-11} \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, $g' = 0,01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ e $\Delta t = 288 \text{ s}$.

A corrente de dupla frente equivalente a este “trem” de vórtices possui as mesmas características do experimento 1. A corrente meridional que passa pelo contorno norte do domínio de estudo possui um transporte de 26,7 Sv, praticamente o mesmo da corrente zonal. Utilizando-se a equação (4.67, página 79) o vórtice estacionário, agora maior, possui um raio, calculado analiticamente, de 154,2 km. Cabe destacar que este raio é aproximadamente 50% maior que o valor obtido para o vórtice estacionário no experimento 1. Como no experimento 2 observa-se que $\sin\theta \gg \varepsilon$ a expressão (4.59, página 76) deve ser empregada. O termo $\varepsilon^{-1/6}$ resulta aproximadamente 1,7, ou seja, esperava-se um vórtice estacionário com o raio em torno de 70% maior daquele obtido no experimento 1, o que é atestado pelo percentual de 50% obtido.

Na situação de uma borda continental inclinada a modelagem analítica novamente mostrou que todo o transporte do “trem” de vórtices se dirige para norte e que um vórtice estacionário de aproximadamente 308 km de diâmetro é necessário no domínio de estudo para a manutenção das forças meridionais que agem sobre o domínio. Estes resultados, mais uma vez, estão em concordância com a modelagem numérica, onde todo o transporte do “trem” de vórtices também se dirigiu para norte e um vórtice estacionário de 260 km instalou-se no domínio de estudo. O raio do vórtice estacionário é agora maior, conforme previsto analiticamente e confirmado pelos resultados do MBB, pois uma nova componente foi acrescida ao balanço de forças na direção paralela à parede, oriunda da força aplicada no domínio de estudo pelo “trem” (ou corrente equivalente) que nele penetra pelo seu contorno leste.

EXPERIMENTO 3

Uma das dificuldades de utilização do canhão de vórtices é o grande intervalo de tempo para que haja a liberação de vórtices de menor tamanho. Isto porque a influência do parâmetro β é menor nesta situação. Em [Pichevin e Nof \(1996\)](#), além do efeito β (aumentado), os autores também introduziam um efeito advectivo externo, o que acelerava a remoção de vórtices pequenos da ponta do cabo geográfico.

Para minimizar este problema, e também para verificar a evolução de vórtices menores no MBB, que o experimento 3 foi criado. Esta terceira modelagem numérica envolve a

geração teórica de um vórtice e sua posterior clonagem no domínio de estudos a intervalos regulares. Previamente a sua introdução no domínio D_0 o vórtice foi estabilizado no plano- β . O cenário será modelado com uma borda continental meridional.

O experimento 3 possui várias etapas de execução. Numa primeira etapa, um vórtice menor, com $\xi = 0$, é gerado analiticamente no plano-f com a utilização das equações (3.47, página 46) e (3.48, página 46), para posterior introdução no MBB como condição inicial. A segunda etapa do experimento 3 foi a realização de uma modelagem prévia que permitiu o processo inicial de ajuste da feição em virtude da influência do parâmetro β no domínio de estudo, agora aumentado apenas em duas vezes ($\beta = 4.10^{-11} \text{ m}^{-1}\text{s}^{-1}$), para facilitar o processo de ajuste. Este vórtice já estabilizado será então inserido no domínio de estudos a intervalos regulares. Não haverá a necessidade da utilização do canhão de vórtices neste experimento 3, fato que acelerará a modelagem no MBB. Uma terceira etapa envolveu um segundo experimento prévio para a definição do intervalo de tempo entre dois vórtices sucessivos serem introduzidos no domínio de estudo. O experimento mostrou que este intervalo é de aproximadamente um ano. Este tempo está mais elevado em virtude do parâmetro β utilizado neste experimento 3 estar aumentado apenas duas vezes o que faz com que as feições se movimentem pela bacia de forma mais lenta. Foi utilizado um parâmetro β menor para não dificultar o processo de ajuste do vórtice analítico no domínio.

O domínio de estudo terá agora 410×70 elementos de grade (x vs y) cada um com $1 \text{ km} \times 5 \text{ km}$. Há a necessidade de uma maior resolução zonal neste caso visto que a corrente meridional será bem mais estreita neste cenário do que aquele mostrado no experimento 1, conforme prevê o modelo analítico. O passo de tempo Δt será de 72 segundos e aproximadamente a cada um ano um novo vórtice será “clonado” no domínio de estudo. Reduziu-se a dimensão meridional na tentativa de se acelerar a modelagem numérica. Este experimento demanda um maior tempo de processamento que os anteriores em virtude do baixo valor do passo de tempo e da menor velocidade de translação dos vórtices em função da utilização de um parâmetro β menor que o dos experimentos 1 e 2. Outros parâmetros utilizados são $\nu = 200 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$, $f_0 = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\beta = 4.10^{-11} \text{ m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ e $g' = 0,01 \text{ m}.\text{s}^{-2}$.

A figura 5.19 mostra o instante zero do experimento 3 em que o vórtice gerado analiticamente, após sua estabilização no plano- β , é “clonado” no domínio de estudo. A diferença entre seus dois hemisférios não é tão acentuada pois β é menor agora. Nas seções A e B assinaladas na figura o MBB calculará os respectivos transportes.

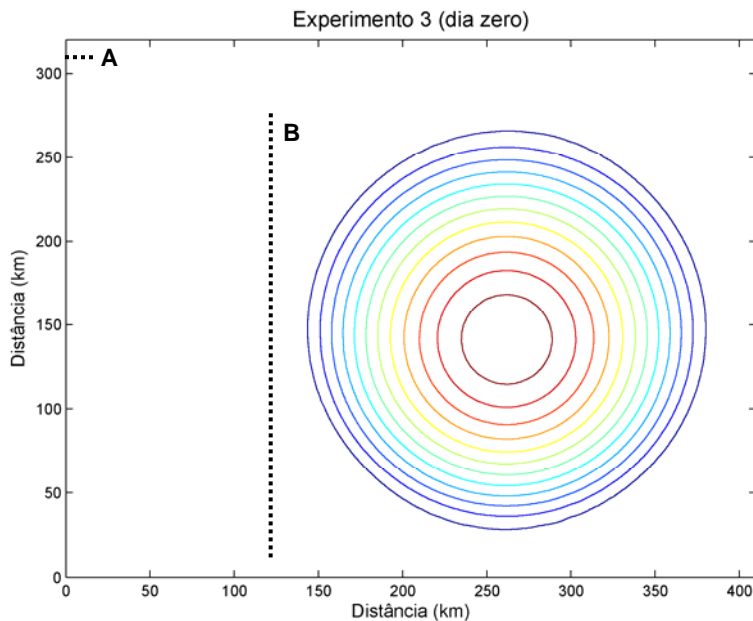
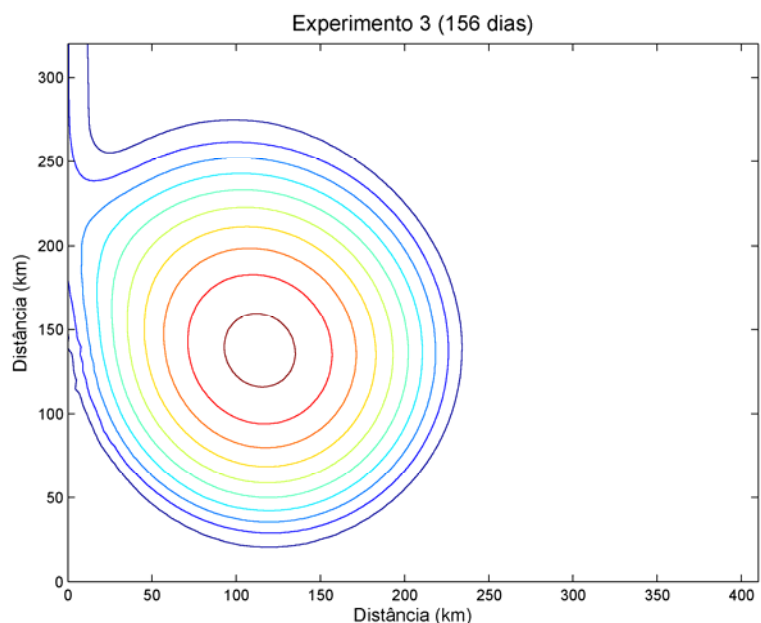


Figura 5.19 – Profundidade (m) da camada superior no tempo zero do experimento 3 onde o primeiro vórtice gerado analiticamente, e já estabilizado no plano- β , é clonado no domínio de estudo. O intervalo das linhas de contorno é de 75 m. O transporte das seções A e B é calculado pelo MBB. A cada intervalo de aproximadamente um ano um novo vórtice será clonado no domínio. Parâmetros utilizados: $\nu = 200 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $f_0 = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\beta = 4 \cdot 10^{-11} \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, $g' = 0,01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ e $\Delta t = 72 \text{ s}$.

A figura 5.20 mostra o primeiro contato do vórtice com a borda continental e a figura 5.21 mostra o instante em que o segundo vórtice é clonado no domínio de estudo.

Figura 5.20 - Profundidade (m) da camada superior no dia 156 em que o primeiro vórtice entra em contato com a borda continental meridional. O intervalo das linhas de contorno é de 75 m. Parâmetros utilizados: $\nu = 200 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $f_0 = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\beta = 4 \cdot 10^{-11} \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, $g' = 0,01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ e $\Delta t = 72 \text{ s}$.



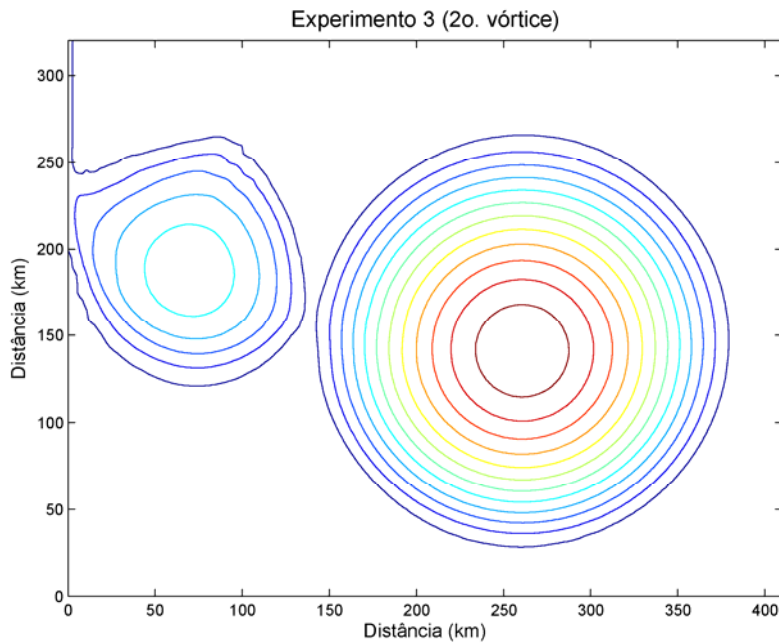


Figura 5.21 – Profundidade (m) da camada superior no instante em que o segundo vórtice é clonado no domínio de estudo. O intervalo das linhas de contorno é de 75 m. Percebe-se que o decaimento do primeiro vórtice encontra-se em estágio avançado. Este vórtice irá imediatamente interagir com o novo vórtice clonado no domínio. Parâmetros utilizados: $\nu = 200 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $f_0 = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\beta = 4 \cdot 10^{-11} \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, $g' = 0,01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ e $\Delta t = 72 \text{ s}$.

A figura 5.22 mostra o transporte zonal na seção B (curva vermelha) por onde passa o “trem” formado por vórtices clonados. A reta preta desta mesma figura assinala o transporte médio nesta seção calculado para os últimos três anos de modelagem, o qual resultou em 0,54 Sv.

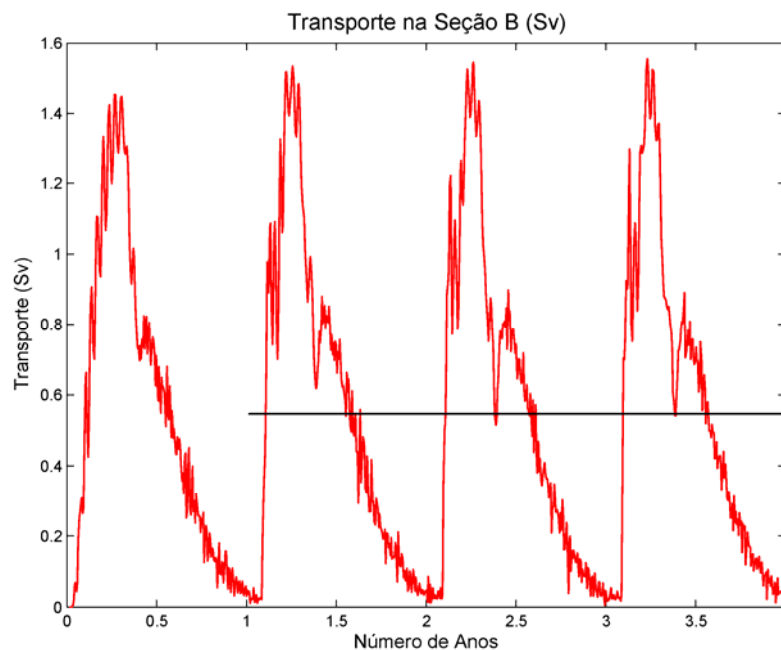


Figura 5.22 - Transporte zonal calculado na seção B da figura 5.19. Este transporte (curva vermelha) é realizado pelos vórtices clonados no domínio de estudo e que passam por esta seção em seu movimento dirigido para oeste. A linha preta mostra o transporte médio nesta seção para os últimos três anos de modelagem o qual vale 0,54 Sv. Parâmetros utilizados: $\nu = 200 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $f_0 = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\beta = 4 \cdot 10^{-11} \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, $g' = 0,01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ e $\Delta t = 72 \text{ s}$.

A figura 5.23 mostra o transporte meridional na seção A (curva vermelha), indicada na figura 5.19, por onde passa a corrente meridional paralela à parede, gerada pelo “vazamento” do líquido interior dos vórtices após o seu contato com a borda continental meridional. A reta preta desta mesma figura assinala o transporte médio nesta seção A, calculado para os últimos três anos de modelagem, o qual resultou em 0,53 Sv.

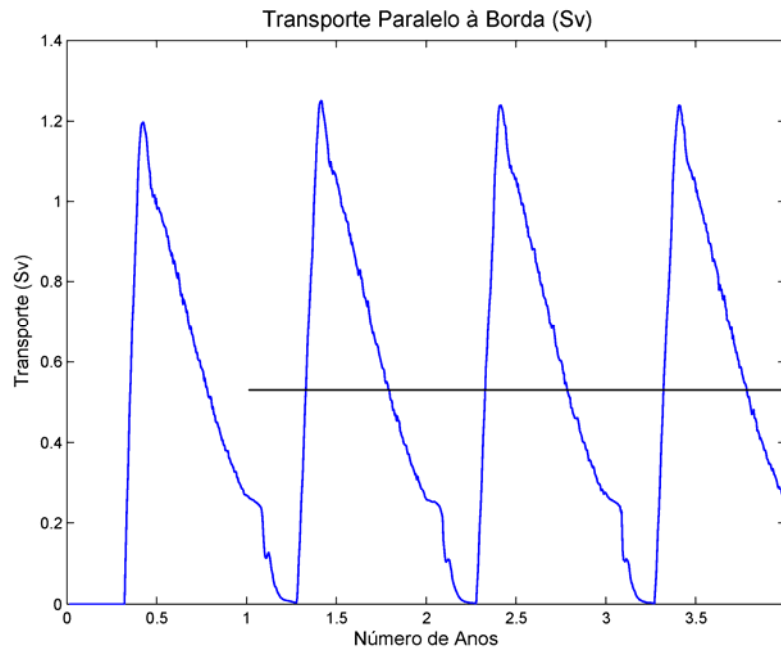


Figura 5.23 - Transporte da corrente meridional na seção A da figura 5.19 (curva em azul). A linha preta assinala o transporte médio de 0,53 Sv nesta seção para os últimos três anos da modelagem. Parâmetros utilizados: $\nu = 200 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $f_0 = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\beta = 4 \cdot 10^{-11} \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, $g' = 0,01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ e $\Delta t = 72 \text{ s}$.

Como mostram as duas últimas figuras 5.22 e 5.23 os transportes nas seções A e B são praticamente idênticos confirmando mais uma vez que todo o transporte do “trem” de vórtices se dirige para norte (para a linha do Equador), paralelamente à borda continental, conforme já previsto na modelagem analítica.

O transporte do “trem” de vórtices de apenas 0,53 Sv é muito menor que o transporte de 27,6 Sv das duas seções anteriores. As feições do experimento 3 possuem um diâmetro aproximadamente duas vezes menor que os vórtices dos experimentos 1 e 2, o que faz com que, intuitivamente, seja esperado um transporte não tão menor. Porém, o volume de lentes depende do raio do vórtice na quarta potência e o parâmetro β possui o dobro do valor nos dois primeiros experimentos (visando a aceleração dos mesmos). Este parâmetro é menor no experimento 3 em virtude da necessidade do vórtice gera-

do analiticamente no plano-f se estabilizar no plano- β . Um maior valor de β dificulta o processo de ajuste da feição analítica neste plano, conforme constatado em experimentos paralelos. Destaca-se ainda que velocidade de auto-propulsão dos vórtices, que afeta diretamente o seu transporte, é função deste parâmetro β e também do raio de deformação da feição ao quadrado. Todos estes fatores contribuíram para a grande diferença entre os transportes dos experimentos 1 e 2 com relação ao terceiro.

A figura 5.24 mostra as curvas de energia cinética e potencial ao longo dos quatro anos de modelagem numérica com o experimento 3. A energia predominante no domínio é a energia potencial (em azul). As energias estão estabilizadas e percebe-se o exato instante da clonagem dos vórtices gerados analiticamente no domínio que coincide com os picos de energia mostrados na figura.

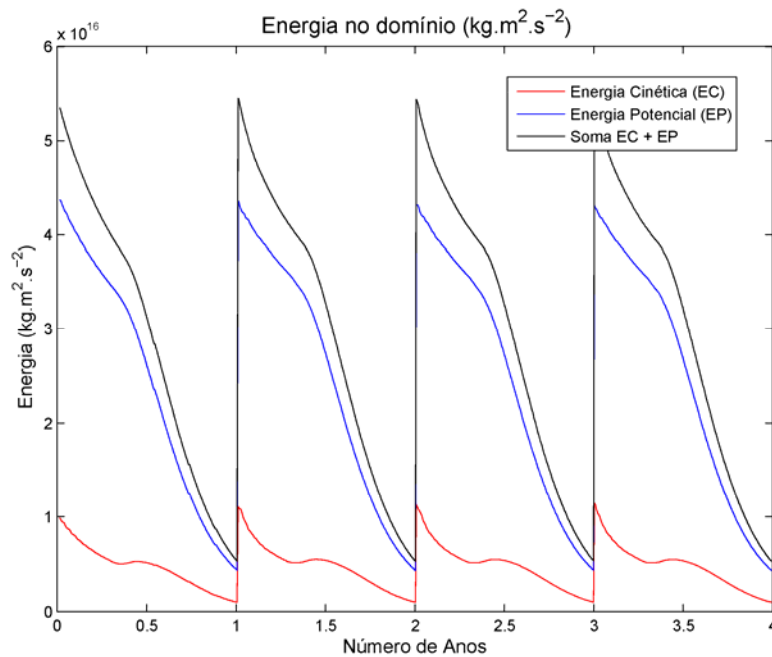


Figura 5.24 – Variação da energia no experimento 3 para um período de simulação de quatro anos no MBB. Parâmetros utilizados: $\nu = 200 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $f_0 = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\beta = 4 \cdot 10^{-11} \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, $g' = 0,01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ e $\Delta t = 72 \text{ s}$.

O vórtice estacionário necessário ao equilíbrio das forças meridionais que agem sobre o domínio de estudo é mostrado na figura 5.25. Para sua visualização foi adotado o mesmo critério utilizado nos experimentos 1 e 2.

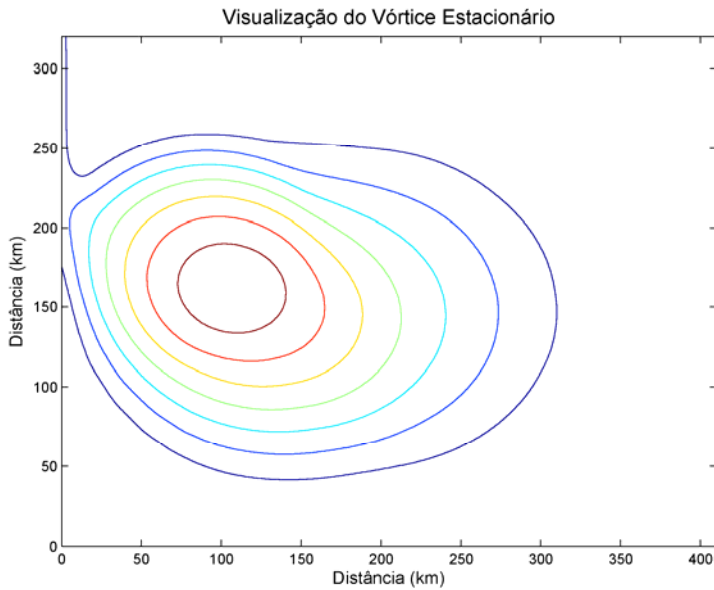


Figura 5.25 - Vórtice estacionário visualizado a partir do perfil médio de profundidade (m) da camada superior, obtido do dia em que o primeiro vórtice entrou em contato com a borda continental até o final dos quatro anos de modelagem. O intervalo das linhas de contorno é de 75 m. Parâmetros: $\nu = 200 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$, $f_0 = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\beta = 4.10^{-11} \text{ m}^{-1}.\text{s}^{-1}$, $g' = 0,01 \text{ m}.\text{s}^{-2}$ e $\Delta t = 72 \text{ s}$.

A estimativa do diâmetro do vórtice estacionário a partir do campo de velocidade, conforme critério estabelecido no experimento 1, é de 140 km.

A corrente de dupla frente equivalente ao “trem” de vórtices analíticos possui coordenadas meridionais de suas frentes dadas por $y_5 = 40,07 \text{ km}$ e $y_8 = -39,43 \text{ km}$. Seu transporte líquido é de 0,53 Sv. Foram utilizados neste sistema de equações os mesmos parâmetros aplicados durante as simulações no MBB, ou seja, $f_0 = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\beta = 4.10^{-11} \text{ m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ e $g' = 0,01 \text{ m}.\text{s}^{-2}$. Esta corrente zonal possui profundidade $H_{cz} = 790 \text{ m}$, uma largura L_{cz} de 79,5 km e seu raio de deformação R_D é de 28,10 km.

A profundidade da corrente meridional na parede pode ser calculada pela expressão (4.36, página 65), que fornece como resultado aproximadamente 103 m (no modelo numérico este valor foi de 90 m). Com este valor aplicado na expressão (4.34, página 65) pode-se calcular o transporte T_{cn} , que resulta 0,53 Sv, o mesmo da corrente zonal. A equação (4.55, página 71) permite o cálculo do raio do vórtice estacionário, o que resulta 55,7 km, com um raio de deformação de aproximadamente 20 km que é de mesma ordem que o raio de deformação da corrente.

Mais uma vez a modelagem analítica mostrou que todo o transporte do “trem” de vórtices se dirige para norte e que um vórtice estacionário de aproximadamente 112 km de diâmetro é necessário no domínio de estudo para a manutenção das forças meridionais que agem sobre o domínio. Novamente estes resultados estão em ampla concordância

com a modelagem numérica, onde todo o transporte do “trem” de vórtices analíticos também se dirigiu para norte e um vórtice estacionário de 140 km instalou-se no domínio de estudo.

5.4. SUMÁRIO

Este capítulo mostrou um estudo comparativo entre a modelagem analítica e numérica do encontro de um “trem” de vórtices do tipo lente com a borda continental (parede). Uma corrente de dupla frente representou os vórtices na modelagem analítica. Esta corrente possui o mesmo transporte líquido e vorticidade do “trem” de vórtices, mas não possui o mesmo momentum. A tabela 5.1 abaixo mostra alguns resultados dos comparativos realizados neste capítulo.

Tabela 5.1 - Comparativo entre as modelagens analíticas e numéricas realizadas.

EXP	Características	Transporte Analítico Numérico	Raio VE Analítico Numérico	Outras Informações Analítico Numérico	Comentários Gerais
01	CV D ≈ 450km Beta 4x PM	27 Sv 27 Sv	105 km 115 km	$h_1 = 737$ m $h_1 = 670$ m	Diferença de 9% entre os raios dos VE, raios de Rossby (CZDF e VE) de mesma ordem.
02	CV D ≈ 450km Beta 4x PIn 22,8°	27 Sv 27 Sv	154 km 130 km		Diferença maior de 18% entre os raios dos VE o que deve estar relacionado ao erro introduzido pelo momentum da CZDF.
03	Clonagem D ≈ 235km Beta 2x PM	0,53 Sv 0,53 Sv	56 km 70 km	$h_1 = 103$ m $h_1 = 90$ m	Diferença de 25% entre os raios dos VE, raios de Rossby (CZDF e VE) de mesma ordem.

Na tabela anterior a sigla EXP indica o número do experimento (ver detalhes de cada um ao longo deste capítulo), D indica diâmetro do vórtice, CV indica canhão de vórtices, PM indica parede meridional, PIn indica parede inclinada, VE indica vórtice estacionário e CZDF indica corrente zonal de dupla frente. A notação Beta 4x indica que o parâmetro β foi aumentado quatro vezes. O ângulo 22,8° corresponde à inclinação da

parede com relação ao norte geográfico, medido em sentido horário. Todos os experimentos numéricos foram conduzidos por um período de 4 anos. Como mostra a tabela 5.1 os resultados entre as modelagens analítica e numérica foram bastante bons. O estudo comparativo realizado neste capítulo permite algumas conclusões, as quais são apresentadas a seguir.

- a) A modelagem analítica do Capítulo 4 mostrou que após o contínuo encontro da corrente de dupla frente com a borda continental (meridional ou inclinada) surge uma corrente paralela a esta borda cujo fluxo é no sentido da linha do Equador. Também mostrou que um vórtice estacionário é necessário no domínio de estudo para que sua força interna, devida a β , possa equilibrar as outras forças paralelas à parede que atuam sobre o domínio. Sem esta feição este equilíbrio não poderia ser atingido. No cenário de uma parede inclinada a modelagem analítica mostrou que o vórtice estacionário é maior do que aquele que surgiu com uma parede meridional, tendo em vista que a sua força interna devida a β deve agora equilibrar uma componente paralela à parede da força aplicada no domínio de estudo pela corrente de dupla frente que nele penetra pelo seu contorno leste.
- b) O modelo numérico confirmou a presença de uma corrente paralela à parede, dirigida para a linha do Equador, após o encontro contínuo dos vórtices com a borda continental (meridional ou inclinada), e também confirmou a presença de um vórtice estacionário no domínio de estudo. Além disso, as modelagens mostraram que o tamanho do vórtice estacionário, no caso de uma parede inclinada, é maior do que aquele encontrado no cenário com uma parede meridional.
- c) Em termos quantitativos o transporte paralelo à parede mostrado pelas duas modelagens foi praticamente idêntico. Quanto ao tamanho do vórtice estacionário a diferença entre o raio desta feição calculado pelo modelo analítico e o obtido pelo modelo numérico oscilou de 10-25% o que ainda é um bom resultado. Cabe destacar que o experimento numérico com a borda continental inclinada apresentou o raio do vórtice estacionário menor que aquele calculado pela modelagem analítica. Nas modelagens com a parede meridional a modelagem numérica forneceu vórtices estacionários sempre com diâmetro maior. Este fato foi também constatado em outras modelagens realizadas e não apresentadas neste trabalho, o que parece

indicar a influência da diferença entre o momentum da corrente zonal de dupla frente e o momentum do “trem” de vórtices.

- d) A modelagem numérica com o cenário de uma borda continental inclinada mostrou um desvio para sul na posição do vórtice estacionário com relação à mesma posição no caso de uma borda meridional, o que parece se dever ao fato de que o primeiro contato das lentes com a parede inclinada se dá no hemisfério norte no vórtice, o que não impede o avanço para oeste das partículas de fluido em seu hemisfério sul. O movimento integrado do vórtice acaba por desviar o centro da feição para sul.
- e) Os experimentos 1 e 3 modelaram vórtices com grande diferença de tamanho entre si, mantendo-se a borda continental meridional, e nos dois cenários os modelos analítico e numérico apresentaram resultados compatíveis.

CAPÍTULO 6

O ENCONTRO DE UM "TREM" DE VÓRTICES DO TIPO NÃO-LENTE COM A BORDA CONTINENTAL

Este capítulo repetirá o desenvolvimento realizado no Capítulo 4, porém agora aplicado para o encontro entre um “trem” de vórtices formado por feições anticiclônicas, cuja profundidade em seu contorno externo não é nula, e a borda continental (parede). Conforme já mencionado no Capítulo 1, este cenário só foi desenvolvido analiticamente, tendo em vista a limitação de tempo para a conclusão deste trabalho, o que impossibilitou a conclusão da modelagem numérica, o que passa a ser uma sugestão para um trabalho futuro.

Novamente será demonstrado que um vórtice estacionário é necessário dentro do domínio de estudo para que as forças meridionais possam estar equilibradas. Ao final do capítulo é apresentada uma expressão para o cálculo do raio deste vórtice. Duas situações de borda continental serão novamente contempladas neste estudo, ou seja, uma borda meridional e outra inclinada. Será utilizado o mesmo modelo de duas camadas apresentado no capítulo anterior, com a diferença que agora a camada superior ocupa toda a extensão do domínio de estudo. A metodologia utilizada no Capítulo 4, com a adoção de uma corrente de dupla frente para a representação do “trem” de vórtices, será mantida. Contudo, esta corrente agora não mais possuirá profundidade nula em suas bordas e sim uma profundidade qualquer limitada pela máxima profundidade do vórtice.

6.1. DOMÍNIO DE ESTUDO COM UMA PAREDE MERIDIONAL

O domínio de estudo ABCDA tem a configuração mostrada no esboço da figura 6.1. Duas grandes diferenças devem ser destacadas entre o atual cenário e aquele que foi desenvolvido no Capítulo 4. Primeiramente, a corrente zonal não possui mais profundidade zero em suas bordas e, em segundo lugar, agora é possível a existência de uma

corrente meridional para sul decorrente do contato da corrente zonal com a borda continental, ou seja, resultam dois braços meridionais deste encontro. A presença de uma corrente meridional para sul (no hemisfério sul), suposta geostrófica, exige que sua profundidade rente à parede seja menor que àquela ao largo, tornando-se então necessária a presença de uma camada superior em todo o domínio de estudo, o que só ocorre quando a corrente de dupla frente simula um “trem” de vórtices do tipo não-lente. As bordas da corrente zonal quando esta atravessa o contorno leste do domínio estão assinaladas pelos pontos 5 e 8, conforme mostra a figura 6.1.

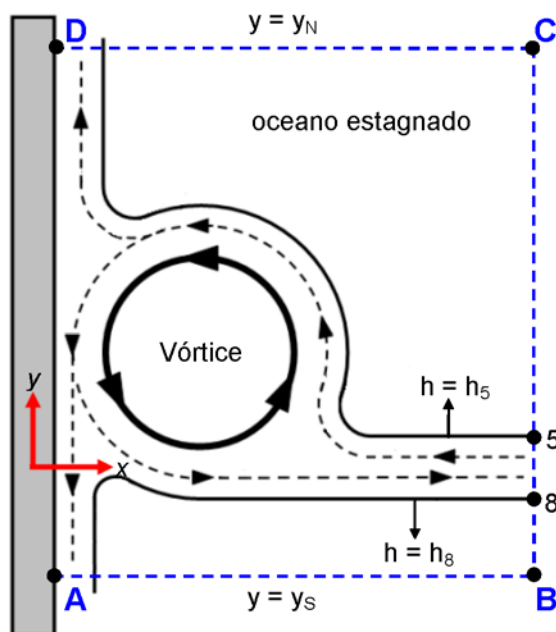


Figura 6.1 – Cenário resultante do encontro da corrente zonal com profundidade não nula em suas bordas com uma borda continental meridional. A corrente está representando um “trem” de vórtices formado por feições que são do tipo não-lente. A figura mostra duas correntes meridionais dirigidas para norte e para sul e um vórtice estacionário oriundos do encontro da corrente com a parede. O texto detalhará este encontro assim como justificará a necessidade do surgimento do vórtice para o equilíbrio das forças meridionais.

6.1.1. A EQUAÇÃO INTEGRADA DO MOMENTUM MERIDIONAL

No desenvolvimento de várias equações desta subseção não serão mostrados alguns passos intermediários, os quais já foram explicitados no Capítulo 4. Contudo, o fato de que os vórtices não são do formato lente introduz consideráveis mudanças com relação ao equacionamento apresentado naquele capítulo. A equação integrada do momentum meridional (3.35, página 43), desenvolvida no Capítulo 3, é aqui reproduzida por conveniência.

$$\begin{aligned}
 & -\int_A^B \left[hv^2 + g'h^2/2 - (f_0 + \beta y)\psi \right] dx - \dots \\
 & \dots - \int_C^D \left[hv^2 + g'h^2/2 - (f_0 + \beta y)\psi \right] dx + \iint_S \beta\psi dx dy = 0 .
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

O objetivo agora é encontrar uma relação entre os termos $g'h^2/2$ e $(f_0 + \beta y)\psi$ das duas primeiras integrais do lado esquerdo da equação (6.1). Assumindo-se que a corrente zonal é geostrófica quando $x \rightarrow \infty$ pode-se escrever a relação

$$(f_0 + \beta y)\psi_\infty \Big|_{y_S}^{y_N} - \beta \int_{y_S}^{y_N} \psi_\infty dy = g'h_\infty^2/2 \Big|_{y_S}^{y_N} \quad x \rightarrow \infty . \tag{6.2}$$

As profundidades nas duas bordas da corrente zonal, apesar de não nulas, continuam iguais e o termo do lado direito de (6.2) resulta nulo. A função corrente adotada no extremo sul do domínio de estudo tem como forma

$$\psi_\infty \Big|_{y_S} = g'h_{8\infty}^2/2f_S . \tag{6.3}$$

Com a utilização de (6.3) a expressão (6.2) transforma-se em

$$(f_0 + \beta y)\psi_\infty \Big|_{y_N} - g'h_{8\infty}^2/2 - \beta \int_{y_S}^{y_N} \psi_\infty dy = 0 . \tag{6.4}$$

A integração da corrente meridional para norte, suposta geostrófica, resulta

$$(f_0 + \beta y)\psi + C = g'h^2/2 . \tag{6.5}$$

Na expressão (6.5), C é uma constante de integração a ser determinada. Esta equação também é válida no ponto do domínio de estudo em que as coordenadas retangulares são dadas por (∞, y_N) . Lembrando-se que neste ponto a profundidade da camada superior é $h_{5\infty}$ a equação (6.5) transforma-se em

$$(f_0 + \beta y)\psi_\infty \Big|_{y_N} + C = g'h_{5\infty}^2/2 . \tag{6.6}$$

Tendo-se em vista que as profundidades nos pontos 5 e 8 são iguais, utilizando-se as equações (6.4) e (6.6) pode-se concluir que a constante C tem como expressão

$$C = -\beta \int_{y_S}^{y_N} \psi_{\infty} dy . \quad (6.7)$$

A equação (6.5) com a utilização da expressão (6.7) terá como forma

$$(f_0 + \beta y) \psi \Big|_{CD} = \left[g'h^2 / 2 + \beta \int_{y_S}^{y_N} \psi_{\infty} dy \right]_{CD} . \quad (6.8)$$

Assumindo-se a geostrofia para a corrente meridional que flui para sul a equação (6.5) é válida no ponto (∞, y_S) . Lembrando-se que neste ponto a profundidade da camada superior é $h_{8\infty}$ a equação (6.5) transforma-se em

$$(f_0 + \beta y) \psi_{\infty} \Big|_{y_S} + C = g'h_{8\infty}^2 / 2 . \quad (6.9)$$

Com a utilização da expressão (6.3) a equação (6.9) resulta $C = 0$ e (6.5) se transformará em

$$(f_0 + \beta y) \psi \Big|_{AB} = \left[g'h^2 / 2 \right]_{AB} . \quad (6.10)$$

A utilização das equações (6.8) e (6.10) na expressão (6.1) tem como resultado

$$-\int_0^{L_{cs}} hv^2 dx + \int_0^{L_{cn}} hv^2 dx + \beta \iint_S (\psi - \psi_{\infty}) dx dy = 0 . \quad (6.11)$$

Na equação (6.11) L_{cs} e L_{cn} são as larguras das correntes meridionais que fluem para sul e norte, respectivamente.

Os dois primeiros termos do lado esquerdo da equação (6.11) representam as forças “fogete” dirigidas para norte (seta amarela na figura 3.3, página 35) e sul (seta verde na mesma figura) que são aplicadas no domínio de estudo pelas correntes meridionais que deixam o domínio pelas suas fronteiras sul e norte, respectivamente. O último termo, que atua sobre todo o domínio de estudo, será o foco principal da análise de escala feita a seguir, sendo que este termo justificará a necessidade da presença de um vórtice estacionário dentro do domínio.

6.1.2. ANÁLISE DE ESCALA

As escalas de alguns parâmetros da corrente zonal, agora com profundidade não nula em suas bordas, serão analisadas nesta subseção, em especial a daqueles parâmetros relacionados com o transporte líquido desta corrente. Novamente será avaliada a ordem de cada termo que compõe a equação integrada do momentum meridional, ou seja, a equação (6.11), buscando-se concluir quais termos são os mais relevantes.

A figura 6.2 mostra o perfil da corrente zonal que representa o “trem” de vórtices do tipo não-lente, vista da costa para o oceano aberto, onde as profundidades de suas bordas não são mais nulas. A largura da corrente L_{cz} possui $O(R_D)$ e sua profundidade central é H_{cz} . A função corrente na borda sul da corrente é dada por $\psi_8 = g'(h_{8\infty})^2/2f_S$ conforme visto na seção anterior. Novamente, o transporte líquido da corrente zonal ocorre na área hachurada delimitada pelos pontos 5 e 7, com profundidades laterais h_5 e h_7 e de largura d_{57} . Este transporte líquido, por balanço de massa aplicado ao domínio de estudo D_0 , equivale à soma dos transportes da corrente meridional que flui para norte pela seção CD e da corrente meridional que flui para sul pela seção AB do domínio de estudo. Entre os pontos 7 e 8 o transporte da corrente zonal é nulo.

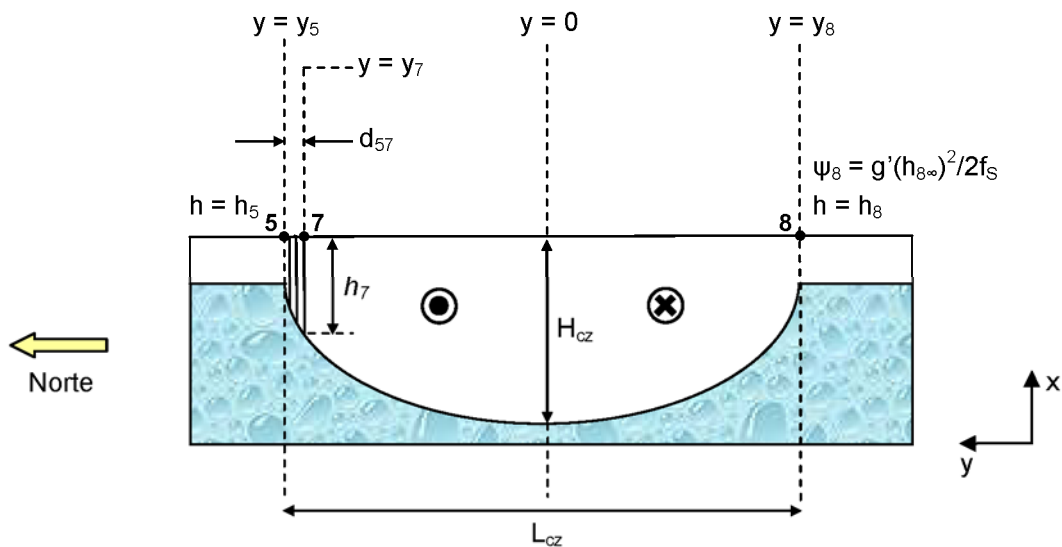


Figura 6.2 – Detalhamento do perfil de profundidade da corrente zonal com profundidade não nula em suas bordas. A área hachurada corresponde ao espaço onde ocorre o transporte líquido da corrente.

Esta nova corrente de dupla frente ainda continua sendo definida pelas equações (4.31ab, página 64), com a diferença que as coordenadas das bordas da corrente não são mais encontradas fazendo-se $h_{cz} = 0$, e sim utilizando $h_{cz} = h_B$, onde h_B é a profundidade da borda da corrente (sendo que $h_B \geq 0$). A profundidade h_7 é suposta ser de $O(H_{cz})$.

Tem-se como objetivo agora o estudo da escala do parâmetro d_{57} , ou seja, a largura da seção da corrente zonal de dupla frente onde ocorre o seu transporte líquido. Para tal será usada a mesma sistemática empregada no Capítulo 4.

A integração da equação geostrófica da corrente zonal entre os pontos 7 e 8 fornece como resultado

$$f\psi\Big|_8^7 - \beta \int_8^7 \psi dy = g'h^2/2\Big|_8^7. \quad (6.12)$$

A função corrente no ponto 7, a partir da equação (6.12), é dada por

$$\psi_7 = \frac{1}{f_7} \left[g'(h_7^2 - h_8^2)/2 + \beta \int_8^7 \psi dy + f_8 \psi_8 \right]. \quad (6.13)$$

Como o transporte deve ser nulo entre os pontos 7 e 8 tem-se que $\psi_7 = \psi_8$. Com esta consideração a equação (6.13) transforma-se em

$$g'(h_7^2 - h_8^2)/2 + \beta \int_8^7 \psi dy + \beta(y_8 - y_7)\psi_8 = 0. \quad (6.14)$$

A expressão (6.14), onde os termos possuem $O(\varepsilon)$, permite a estimativa da ordem do termo $\Delta h^2 = (h_7)^2 - (h_5)^2$ onde considerou-se que $h_8 = h_5$. A ordem deste termo resulta então

$$[\Delta h^2] \sim O(\varepsilon H^2). \quad (6.15)$$

Para a determinação da ordem da distância d_{57} será assumido novamente que a velocidade da corrente zonal é constante na região compreendida entre os pontos 5 e 7.

Aplicando-se a relação geostrófica entre estes pontos e assumindo-se que nesta pequena área a relação $\partial h/\partial y \approx \Delta h/\Delta y$ é válida tem-se como resultado

$$(f_0 + \beta y)u = g'(h_7 - h_5)/d_{57}. \quad (6.16)$$

A diferença $\Delta h^2 = (h_7)^2 - (h_5)^2$ pode ser escrita como

$$h_7^2 - h_5^2 = (h_7 - h_5)(h_7 + h_5) \cong (h_7 - h_5)(2h_5). \quad (6.17)$$

Como a seção onde ocorre o transporte líquido da corrente zonal, delimitada pelos pontos 5 e 7, é muito estreita, foi suposto na expressão (6.17) que $h_7 \approx h_5$. Desta equação pode-se concluir que

$$(h_7 - h_5) \cong (h_7^2 - h_5^2)/2h_5. \quad (6.18)$$

A substituição da equação (6.18) em (6.16) tem como resultado

$$(f_0 + \beta y)u = g'(h_7^2 - h_5^2)/2h_5 d_{57}. \quad (6.19)$$

A ordem da distância d_{57} pode ser então determinada a partir da expressão (6.19) utilizando-se (6.15). Esta ordem será então

$$[d_{57}] \sim O(\varepsilon R_D). \quad (6.20)$$

Na obtenção da expressão (6.20) considerou-se $f_0 + \beta y \approx f_0$ em (6.19). Os termos da equação (6.11) terão agora as suas escalas analisadas. Esta equação é aqui reproduzida por conveniência:

$$-\int_0^{L_{cs}} h v^2 dx + \int_0^{L_{cn}} h v^2 dx + \beta \iint_S (\psi - \psi_\infty) dx dy = 0. \quad (6.21)$$

As mesmas escalas para v , ψ_v e ψ utilizadas no Capítulo 4 serão empregadas aqui. A escala de distância zonal das correntes meridionais é $[x] \sim O(\varepsilon R_D)$, pois sua largura é desta ordem (lembrar que a soma dos transportes meridionais é o mesmo transporte da zona de largura d_{57} da corrente zonal), mas tem-se $[x] \sim O(\ell)$ para a corrente zonal, onde ℓ é o comprimento lateral do domínio de estudo, e $[x] \sim O(R_{De})$ para o vórtice. As

escalas de distância meridional não se modificaram com relação ao Capítulo 4. A escala de profundidade das correntes meridionais tem $O(H_{cz})$.

Após estas considerações a análise da escala dos termos que compõem a equação (6.21) pode ser realizada, o que seguirá o mesmo padrão adotado no Capítulo 4. Os primeiros dois termos do lado esquerdo desta equação, os quais correspondem ao momentum das correntes meridionais que fluem para sul e norte, respectivamente, possuem $O(\epsilon g' H_{cz}^2 R_D)$.

O terceiro termo do lado esquerdo de (6.21) incide sobre o domínio inteiro. Existem cinco lugares (parcelas) distintos para este terceiro termo no domínio ABCDA, que são: (1) as áreas de oceano estagnado e as áreas onde: (2) a corrente zonal, (3) a corrente meridional para sul, (4) a corrente meridional para norte e (5) o vórtice estacionário (suposto presente) dominam. As parcelas (1) e (2), correspondentes ao oceano estagnado e a corrente zonal, são nulas. As parcelas (3) e (4) correspondem as duas correntes meridionais e suas primeiras partes têm $O(\epsilon^2 g' H_{cz}^2 \ell)$. A segunda parte destas parcelas, que depende de $\psi_\infty(y)$, também possui ordem superior a ϵ . A primeira parte da parcela (5) do vórtice estacionário tem $O[\epsilon g' H_{cz}^2 R_{De} (R_{De}/R_D)^5]$ e, com a configuração adotada para o domínio de estudo pela figura 6.1, tem-se que $\psi_\infty = \psi_{5\infty}$, logo, a segunda parte da parcela (5) também possuirá $O(\epsilon)$.

Como se pode concluir apenas a parcela (5) do terceiro termo da expressão (6.21), correspondente ao vórtice estacionário, é capaz de equilibrar os dois primeiros termos desta equação, os quais também têm $O(\epsilon)$. Para que isso se verifique é necessário que

$$R_{De} \sim O(R_D). \quad (6.22)$$

Após todas estas considerações a equação (6.21) pode ser escrita na forma

$$-\int_0^{L_{cs}} h v^2 dx + \int_0^{L_{cn}} h v^2 dx + \beta \iint_{S_v} (\psi_v - \psi_{5\infty}) dx dy = 0. \quad (6.23)$$

A expressão (6.23), que apresenta a equação integrada do momentum meridional aplicada ao domínio de estudo, comprova novamente que sem a presença de um vórtice

estacionário durante o encontro da corrente com a parede o equilíbrio meridional de forças não poderia ser alcançado. A resultante das forças “foguetes” aplicadas no domínio de estudo pelas correntes meridionais só pode ser equilibrada pela força aplicada no domínio pelo vórtice estacionário devido ao efeito β em seu interior.

A figura 6.3 mostra de forma mais detalhada o encontro da corrente zonal com uma borda continental meridional²³, resumindo todos os resultados até então encontrados. Estão incluídas na figura: (1) as escalas desenvolvidas nesta seção; (2) os perfis de velocidade de cada corrente e (3) as forças meridionais que agem no domínio de estudo. Dez pontos são salientados na figura 6.3 os quais serão utilizados ao longo dos desenvolvimentos analíticos realizados neste capítulo.

6.1.3. O MOMENTUM DA CORRENTE MERIDIONAL PARA NORTE

Nesta subseção, o segundo termo da equação (6.23), que corresponde ao momentum da corrente meridional para norte, será desenvolvido. Para tal, uma coordenada ainda desconhecida surgirá nas equações, ou seja, a posição do ponto 6 (ver figura 6.3) que define a ramificação da zona do fluxo líquido em dois fluxos meridionais ao longo da borda continental. Este ponto é chamado neste trabalho de “ponto de divisão” e a linha 3-6 da figura 6.3 define uma “linha de corrente divisória” (e.g., [Milne-Thomson, 1968](#)).

Como a função de transporte ψ não é mais nula nas bordas da corrente zonal uma nova expressão para esta função precisa ser desenvolvida. A equação (4.35, página 65) permitia o cálculo de ψ , porém, naquela expressão foi utilizada como condição de contorno $\psi = 0$ em $y = y_8$. A nova condição de contorno para o atual cenário prescreve que $\psi = \psi_8$ em $y = y_8$, o que modifica a expressão (4.35, página 65) para:

$$\psi = \psi_8 + \frac{f_0 H (y_8^2 - y^2)}{2} - \frac{f_0^3 (y_8^4 - y^4)}{8g'} - \frac{3f_0^2 \beta (y_8^5 - y^5)}{20g'} + \frac{\beta H (y_8^3 - y^3)}{6}. \quad (6.24)$$

²³ Na figura não há nenhuma proporção entre os transportes, forças, correntes e vórtice estacionário.

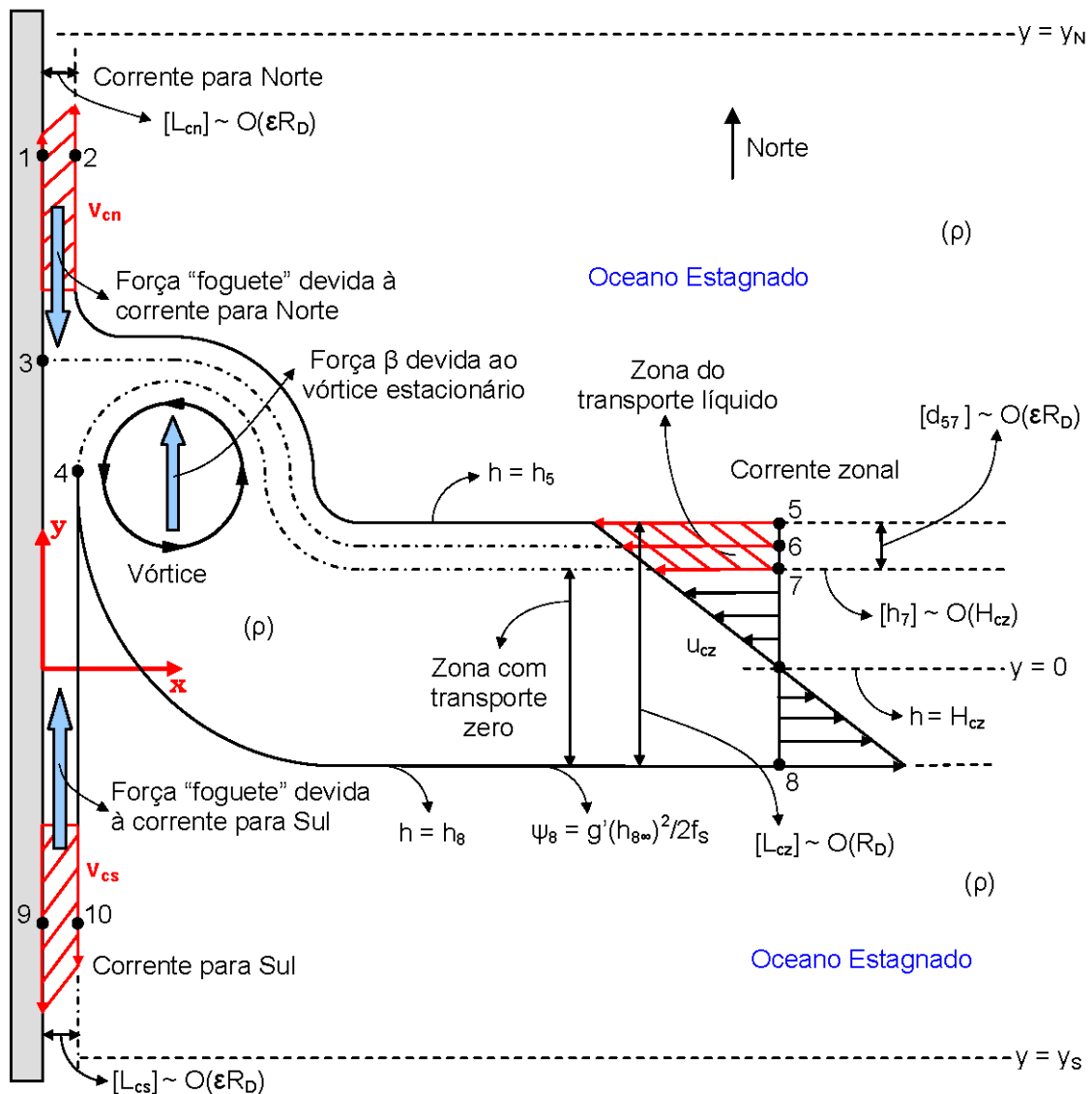


Figura 6.3 – Destaque do encontro da corrente de dupla frente com a borda continental meridional. As setas largas azuis indicam as forças meridionais que agem no domínio de estudo. A área vermelha entre os pontos 5 e 7 indica a região do transporte líquido da corrente zonal o qual equivale à soma dos transportes das duas correntes meridionais, delimitados pelos pontos 1 e 2 na corrente para norte e pelos pontos 9 e 10 na corrente para sul, que também estão em vermelho.

Na obtenção da expressão (6.24) os termos com ordem superior a ϵ foram negligenciados. Esta equação permite o cálculo do transporte da corrente zonal dado por $\psi_{cz} = \psi_5 - \psi_8$, onde ψ_5 é calculado pela equação (6.24), fazendo-se $y = y_5$, e onde ψ_8 depende apenas da profundidade da camada superior do oceano estagnado, conforme indica a equação (6.3). As coordenadas das bordas da corrente zonal y_5 e y_8 podem ser calculadas resolvendo-se a equação cúbica (4.31b, página 64) que define o perfil

de profundidade desta corrente. Com o valor de y_8 e de ψ_8 e fazendo-se $\psi_7 = \psi_8$ na equação (6.24), quando então tem-se $y = y_7$, onde $y_5 > y_7 > 0$, é possível o cálculo da coordenada meridional y_7 .

O termo do momentum da corrente meridional para norte será desenvolvido agora. As equações (4.28, página 63) e (4.29, página 63) desenvolvidas no Capítulo 4 para a velocidade e profundidade desta corrente, respectivamente, serão reavaliadas, pois as escalas de x e h foram modificadas. A equação do perfil de velocidade continua a mesma, ou seja:

$$v_{cn} = v_1 - f_0 x \quad 0 \leq x \leq L_{cn} \quad \text{e} \quad v_{cn} = 0 \quad x > L_{cn}. \quad (6.25)$$

A equação expandida e completa da profundidade h_{cn} desta corrente, retirada da relação geostrófica, tem como resultado

$$h_{cn} = h_1 + f_0 v_1 x / g' + \beta y_N v_1 x / g' - f_0^2 x^2 / 2g' - 2f_0 \beta y_N x^2 / 2g' - \beta^2 y_N^2 x^2 / 2g'. \quad (6.26)$$

Os quatro últimos termos possuem ordem superior a ε e serão desconsiderados, logo, a expressão final para a profundidade da corrente meridional para norte, a qual difere da expressão desenvolvida no Capítulo 4, tem como forma

$$h_{cn} = h_1 + f_0 v_1 x / g' \quad 0 \leq x \leq L_{cn} \quad \text{e} \quad h_{cn} = h_2 = h_5 \quad x > L_{cn}. \quad (6.27)$$

Expressões para a velocidade v_1 e profundidade h_1 rente à parede serão agora desenvolvidas. Aplicando-se a função de Bernoulli ao longo da linha de corrente 1-3-6 (ver figura 6.3) pode-se escrever

$$g'h_1 + v_1^2 / 2 = g'h_6 + u_6^2 / 2. \quad (6.28)$$

O ponto 6 pertence a corrente zonal. Esta expressão (6.28) será deixada de lado temporariamente. O transporte da corrente meridional para norte é o mesmo transporte entre os pontos 5 e 6 da corrente zonal. A relação geostrófica aplicada no contorno CD, depois de multiplicada pela profundidade local e integrada entre os pontos 1 e 2, tem como resultado

$$\psi|_1^2 = \psi_2 - \psi_1 = g'(h_5^2 - h_1^2) / 2f_N. \quad (6.29)$$

Na obtenção da equação (6.29) foi considerado que $h_2 = h_5$. O transporte da corrente zonal entre os pontos 5 e 6 pode ser calculado a partir da relação geostrófica aplicada no contorno BC, depois de multiplicada pela profundidade local e integrada entre estes pontos, o que fornece

$$f\psi|_6^5 - \beta \int_6^5 \psi dy = g'h^2 / 2|_6^5. \quad (6.30)$$

A expansão dos termos da equação (6.30) a transforma em

$$f_5\psi_5 - f_6\psi_6 - \beta \int_6^5 \psi dy = g'(h_5^2 - h_6^2) / 2. \quad (6.31)$$

Negligenciando-se a integral de $O(\varepsilon^2)$ em (6.31) a função corrente ψ_5 resulta

$$\psi_5 = (1/f_5) \left[g'(h_5^2 - h_6^2) / 2 + f_6\psi_6 \right]. \quad (6.32)$$

A equação (6.24) também permite o cálculo desta função corrente conforme já comentado anteriormente. O transporte entre os pontos 5 e 6, ou $\psi_{56} = \psi_5 - \psi_6$, a partir de (6.32), tem como expressão

$$\psi|_6^5 = \psi_5 - \psi_6 = (1/f_5) \left[g'(h_5^2 - h_6^2) / 2 + f_6\psi_6 \right] - \psi_6. \quad (6.33)$$

Como os transportes da corrente meridional para norte e da corrente zonal entre os pontos 5 e 6 (ver figura 6.3) são os mesmos, a partir das expressões (6.29) e (6.33), pode-se escrever

$$g'(h_5^2 - h_1^2) / 2f_N = (1/f_5) \left[g'(h_5^2 - h_6^2) / 2 + f_6\psi_6 \right] - \psi_6. \quad (6.34)$$

Os pontos 5 e 6 são muito próximos e a relação f_6 / f_5 é próxima da unidade. Isolando-se a variável h_1 a expressão (6.34) pode ser escrita na seguinte forma:

$$h_1^2 = h_5^2 - (f_0 / f_5) \left[h_5^2 - h_6^2 \right]. \quad (6.35)$$

A consideração de que $f_0 / f_5 \approx 1 - \beta y_5 / f_0$ permite a conclusão de que

$$h_1 \approx h_6. \quad (6.36)$$

Na obtenção de (6.36) alguns termos com ordem superior a ε foram eliminados. Retornando-se a expressão (6.28), e utilizando-se (6.36), conclui-se que

$$v_1 = -u_6. \quad (6.37)$$

A equação (6.28) permite como solução $v_1 = \pm u_6$, mas a velocidade no ponto 1 é positiva e a do ponto 6 negativa, logo $v_1 = -u_6$. A expressão (6.25), que define o perfil de velocidade da corrente meridional para norte, com (6.37) transforma-se em

$$v_{cn} = -u_6 - f_0 x. \quad (6.38)$$

A equação (6.27), que define o perfil de profundidade da corrente meridional para norte, com a utilização de (6.36) e (6.37) resulta em

$$h_{cn} = h_6 - f_0 u_6 x / g'. \quad (6.39)$$

Uma expressão para a largura L_{cn} da corrente meridional para norte será desenvolvida agora. Novamente será assumido que a velocidade desta corrente se mantém constante ao longo de seu perfil. Será adotado, por conveniência, como valor constante desta velocidade $v_{cn} = v_1$. A relação $\partial h / \partial x = \Delta h / \Delta x$ será novamente assumida como válida. Com estas considerações e com a equação geostrófica aplicada nesta corrente resulta

$$f_N v_1 = g' \frac{\Delta h}{\Delta x} = g' \frac{(h_2 - h_1)}{L_{cn}}. \quad (6.40)$$

Com as expressões (6.36) e (6.37) e considerando-se ainda que $h_2 = h_5$, a equação (6.40) transforma-se em

$$L_{cn} = \frac{g'(h_6 - h_5)}{f_0 u_6}. \quad (6.41)$$

A partir da expressão (6.27) com $h_{cn} = h_2$, quando então $x = L_{cn}$, obtém-se a mesma equação (6.41). As três expressões abaixo, oriundas das equações (4.31ab, página 64), complementam as equações (6.38), (6.39) e (6.41).

$$h_6 = H_{cz} - f_0^2 y_6^2 / 2g' - f_0 \beta y_6^3 / 2g', \quad (6.42)$$

$$u_6 = f_0 y_6 + \beta y_6^2 / 2 \quad e \quad (6.43)$$

$$h_5 = H_{cz} - f_0^2 y_5^2 / 2g' - f_0 \beta y_5^3 / 2g'. \quad (6.44)$$

Como as variáveis que descrevem a corrente meridional para norte já estão perfeitamente definidas pelas equações (6.38), (6.39) e (6.41) pode-se agora desenvolver uma expressão para o seu momentum meridional integrado, a qual resulta

$$\int_0^{L_{cn}} h_{cn} v_{cn}^2 dx = \int_0^{L_{cn}} (h_6 - f_0 u_6 x / g') (-u_6 - f_0 x)^2 dx. \quad (6.45)$$

A expansão da integral da direita tem como resultado

$$\begin{aligned} \int_0^{L_{cn}} h_{cn} v_{cn}^2 dx = & u_6^2 h_6 L_{cn} + f_0 u_6 h_6 L_{cn}^2 + f_0^2 h_6 L_{cn}^3 / 3 - f_0 u_6^3 L_{cn}^2 / 2g' - \dots \\ & \dots - 2f_0^2 u_6^2 L_{cn}^3 / 3g' - f_0^3 u_6 L_{cn}^4 / 4g'. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Neste ponto um aspecto extremamente importante e que envolve as modelagens analíticas deste capítulo e do Capítulo 4 será abordado. As expressões desenvolvidas neste capítulo devem também satisfazer o cenário estudado no Capítulo 4 (com vórtices do tipo lente), o qual é uma situação particular do atual cenário, ou seja, fazendo-se $h_5 = h_8 = 0$. Para tal, deve-se atentar que as escalas de largura e profundidade das correntes meridionais diferem de um cenário para outro, ou seja, tem-se as escalas $[x] \sim O(\varepsilon^{1/2} R_D)$ e $[h] \sim O(\varepsilon^{1/2} H_{cz})$ quando a corrente zonal possui profundidade zero em suas bordas e $[x] \sim O(\varepsilon R_D)$ e $[h] \sim O(H_{cz})$ quando a corrente zonal possui esta profundidade não nula. Estas escalas influenciam no descarte de termos que possuem ordem superior a ε e que fazem parte das equações desenvolvidas neste trabalho, logo, algum erro poderá ser introduzido nestas operações em que termos são negligenciados.

A equação (6.46) possui 6 termos em seu lado direito, os quais possuem, da esquerda para a direita, $O(\varepsilon)$, $O(\varepsilon^{3/2})$, $O(\varepsilon^2)$, $O(\varepsilon)$, $O(\varepsilon^{3/2})$ e $O(\varepsilon^2)$, para o cenário de vórtices tipo lente (corrente zonal com profundidade nula em suas bordas). Quando a corrente possui profundidade não nula estas ordens são $O(\varepsilon)$, $O(\varepsilon^2)$, $O(\varepsilon^3)$, $O(\varepsilon^2)$, $O(\varepsilon^3)$ e $O(\varepsilon^4)$. Analisando-se a equação (6.46) no cenário deste capítulo (i.e., com vórtices que não são lentes) o seu primeiro termo deveria ser mantido e os demais seriam imediatamente desconsiderados por possuírem ordem superior a ε . Como se percebe, o quarto termo do lado direito seria negligenciado no atual cenário, pois possui $O(\varepsilon^2)$, mas deveria ser mantido para a situação de lentes, onde possui $O(\varepsilon)$. A eliminação deste termo no cenário das lentes implicaria em grave erro numérico no cálculo do momentum, pois este termo possui mesma ordem de grandeza que o primeiro termo da equação. Como a desconsideração de termos em uma análise de escala baseia-se no fato de que o termo negligenciado possui ordem de grandeza muito inferior aos demais termos que compõem a equação em análise, não se cometeria nenhum erro se todos os termos de determinada equação fossem mantidos. Todavia, isso traria grandes inconvenientes para a modelagem analítica, pois as equações desenvolvidas ficariam cada vez maiores e complexas, o que justifica então a metodologia de avaliar-se a escala de cada um dos termos que compõem uma determinada equação e eliminar-se aqueles com maiores ordens em ε .

Com estas considerações, e preservando-se o quarto termo de (6.46), o momentum integrado da corrente meridional para norte Mo_{cn} terá como expressão

$$Mo_{cn} = \int_0^{L_{cn}} h_{cn} v_{cn}^2 dx = u_6^2 h_6 L_{cn} - f_0 u_6^3 L_{cn}^2 / 2g'. \quad (6.47)$$

6.1.4. O TRANSPORTE DA CORRENTE MERIDIONAL PARA NORTE

O transporte da corrente meridional T_{cn} para norte é dado por $T_{cn} = \psi_5 - \psi_6$ ou também pela integral do produto “hv” entre os pontos 1 e 2, o que fornece

$$T_{cn} = \int_0^{L_{cn}} h_{cn} v_{cn} dx. \quad (6.48)$$

A utilização das equações (6.38) e (6.39) transforma a expressão (6.48) em

$$T_{cn} = \int_0^{L_{cn}} h_{cn} v_{cn} dx = -h_6 u_6 L_{cn} - f_0 h_6 L_{cn}^2 / 2 + f_0 u_6^2 L_{cn}^2 / 2g' + f_0^2 u_6 L_{cn}^3 / 3g'. \quad (6.49)$$

Novamente a questão das escalas para os dois cenários de vórtices será analisada. A equação (6.49) apresenta quatro termos em seu lado direito, os quais possuem, da esquerda para a direita, $O(\varepsilon)$, $O(\varepsilon^{3/2})$, $O(\varepsilon)$ e $O(\varepsilon^{3/2})$, para o cenário de vórtices tipo lente (corrente zonal com profundidade nula em suas bordas). Quando a corrente possui esta profundidade não nula estas ordens são, respectivamente, $O(\varepsilon)$, $O(\varepsilon^2)$, $O(\varepsilon^2)$ e $O(\varepsilon^3)$. De forma similar à equação integrada do momentum teríamos agora uma diferença envolvendo o terceiro termo, o qual será então mantido tendo-se em vista o cenário analisado no Capítulo 4. A equação final para o transporte T_{cn} da corrente meridional para norte resulta então

$$T_{cn} = \int_0^{L_{cn}} h_{cn} v_{cn} dx = -h_6 u_6 L_{cn} + f_0 u_6^2 L_{cn}^2 / 2g'. \quad (6.50)$$

6.1.5. O MOMENTUM DA CORRENTE MERIDIONAL PARA SUL

O primeiro termo da equação (6.23), que corresponde ao momentum da corrente meridional para sul, será desenvolvido agora. Supondo-se vorticidade potencial nula e geostrofia, as equações que descrevem esta corrente são (estas expressões são similares àquelas que descrevem a outra corrente meridional)

$$v_{cs} = v_9 - f_0 x \quad 0 \leq x \leq L_{cs} \quad \text{e} \quad v_{cs} = 0 \quad x > L_{cs}, \quad (6.51)$$

$$h_{cs} = h_9 + f_0 v_9 x / g' \quad 0 \leq x \leq L_{cs} \quad \text{e} \quad h_{cs} = h_{10} = h_8 \quad x > L_{cs}. \quad (6.52)$$

Nas equações (6.51) e (6.52) as variáveis v_9 e h_9 correspondem à velocidade e profundidade da corrente meridional para sul na parede. Busca-se agora o desenvolvimento de expressões que definam estas variáveis. Aplicando-se a função de Bernoulli entre os pontos 6 e 9 da figura 6.3 pode-se escrever

$$g'h_9 + v_9^2 / 2 = g'h_6 + u_6^2 / 2. \quad (6.53)$$

O transporte da corrente meridional para sul é o mesmo transporte entre os pontos 6 e 7 da corrente zonal. A relação geostrófica aplicada no contorno AB, depois de multiplicada pela profundidade local e integrada entre os pontos 9 e 10, resulta

$$\psi|_9^{10} = \psi_{10} - \psi_9 = g'(h_8^2 - h_9^2) / 2f_s. \quad (6.54)$$

Na obtenção da equação (6.54) foi considerado que $h_{10} = h_8$. O transporte da corrente zonal entre os pontos 6 e 7 pode ser calculado a partir da relação geostrófica aplicada no contorno BC, depois de multiplicada pela profundidade local e integrada entre estes pontos. De forma similar à expressão (6.33) se obtém

$$\psi|_7^6 = \psi_6 - \psi_7 = (1/f_6) \left[g'(h_6^2 - h_7^2) / 2 + f_7 \psi_7 \right] - \psi_7. \quad (6.55)$$

Como os transportes da corrente meridional para sul e da corrente zonal entre os pontos 6 e 7 são os mesmos, com (6.54) e (6.55), pode-se escrever

$$g'(h_8^2 - h_9^2) / 2f_s = -(1/f_6) \left[g'(h_6^2 - h_7^2) / 2 + f_7 \psi_7 \right] + \psi_7. \quad (6.56)$$

Os pontos 6 e 7 são muito próximos o que faz com que a relação f_7 / f_6 seja próxima da unidade. Considerando-se $f_7 / f_6 \approx 1 - \beta y_6 / f_0$ e isolando-se a variável h_9 na expressão (6.56) esta pode ser escrita na forma

$$h_9 = \left[(h_6^2 - h_7^2) + h_8^2 \right]^{1/2}. \quad (6.57)$$

Cabe destacar que ao se igualar os dois transportes na obtenção da equação (6.56) um sinal negativo foi introduzido no lado direito devido à equação da continuidade. Maiores explicações quanto a este detalhe podem ser encontradas no Anexo B.

Retornando-se à equação (6.57) percebe-se que $h_9 < h_8$ ou $h_9 < h_{10}$ visto que o termo $[(h_6^2 - h_7^2)]$ é negativo devido ao perfil de profundidade da corrente zonal (o ponto 6 é mais afastado do centro da corrente). A geostrofia da corrente meridional para sul exige

o equilíbrio entre a força de Coriolis, que é dirigida para leste, e a força do gradiente de pressão que deve ser dirigida então para oeste, ou seja, com $h_9 < h_{10}$.

As equações (6.53) e (6.57) permitem agora a obtenção de uma expressão para a velocidade da corrente meridional para sul rente à parede, o que fornece

$$v_9 = - \left\{ 2g'h_6 + u_6^2 - 2g' \left[(h_6^2 - h_7^2) + h_8^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/2}. \quad (6.58)$$

Nas equações (6.57) e (6.58) devem ser utilizadas as expressões da corrente zonal (6.42) e (6.43) e ainda [a partir de (4.31b, página 64)]:

$$h_7 = H_{cz} - f_0^2 y_7^2 / 2g' - f_0 \beta y_7^3 / 2g' \quad \text{e} \quad (6.59)$$

$$h_8 = H_{cz} - f_0^2 y_8^2 / 2g' - f_0 \beta y_8^3 / 2g'. \quad (6.60)$$

A substituição das expressões (6.42), (6.59) e (6.60) na equação (6.57) resulta:

$$h_9 = \left[H_{cz}^2 - \frac{H_{cz} f_0^2 (y_6^2 - y_7^2 + y_8^2)}{g'} - \frac{H_{cz} f_0 \beta (y_6^3 - y_7^3 + y_8^3)}{g'} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{f_0^4 (y_6^4 - y_7^4 + y_8^4)}{4g'^2} + \frac{f_0^3 \beta (y_6^5 - y_7^5 + y_8^5)}{2g'^2} + \frac{f_0^2 \beta^2 y_8^6}{4g'^2} \right]^{1/2}. \quad (6.61)$$

Na equação (6.61) os termos de $O(\varepsilon^2)$ internos aos colchetes foram mantidos devido a existência da raiz quadrada do lado direito. A expressão $y_i^m - y_j^m \approx m y_j^{m-1} (y_i - y_j)$, desenvolvida pelo autor deste trabalho, onde $y_i = y_j + \Delta$ e $[\Delta] \sim O(\varepsilon)$, é obtida negligenciando-se termos de ordem superior a ε . Ela foi utilizada em (6.61) para que o termo $f_0^2 \beta^2 [(y_6)^6 - (y_7)^6]$ fosse negligenciado na obtenção por ter ordem superior a ε^2 .

A utilização das expressões (6.42) e (6.43) na equação (6.53) permite a obtenção de uma expressão alternativa para a velocidade v_9 , dada por

$$v_9 = - \left[2g'(H_{cz} - h_9) + \beta^2 y_6^4 / 4 \right]^{1/2}. \quad (6.62)$$

Uma expressão para a largura L_{cs} da corrente meridional para sul será desenvolvida agora. Mais uma vez será assumido que a velocidade da corrente se mantém constante ao longo de seu perfil. Será adotado, por conveniência, como valor constante desta velocidade $v_{cs} = v_9$. A relação $\partial h/\partial x = \Delta h/\Delta x$ será novamente assumida como válida. Com estas considerações e com a equação geostrófica aplicada nesta corrente resulta

$$f_s v_9 = g' \frac{\Delta h}{\Delta x} = g' \frac{(h_8 - h_9)}{L_{cs}}. \quad (6.63)$$

Na expressão (6.63) considerou-se $h_{10} = h_8$. Outra opção para desenvolver uma expressão para L_{cs} é a partir da equação (6.52) com $h_{cs} = h_{10}$, quando então $x = L_{cn}$. Com quaisquer das duas opções a largura L_{cs} será dada por

$$L_{cs} = \frac{g'(h_8 - h_9)}{f_0 v_9}. \quad (6.64)$$

O conjunto de equações (6.51), (6.52), (6.61), (6.62) e (6.64) descrevem a corrente meridional para sul e são aqui reproduzidas para facilidade do leitor:

$$v_{sc} = v_9 - f_0 x \quad h_{sc} = h_9 + f_0 v_9 x / g', \quad (6.65ab)$$

$$h_9 = \left[H_{cz}^2 - \frac{H_{cz} f_0^2 (y_6^2 - y_7^2 + y_8^2)}{g'} - \frac{H_{cz} f_0 \beta (y_6^3 - y_7^3 + y_8^3)}{g'} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{f_0^4 (y_6^4 - y_7^4 + y_8^4)}{4g'^2} + \frac{f_0^3 \beta (y_6^5 - y_7^5 + y_8^5)}{2g'^2} + \frac{f_0^2 \beta^2 y_8^6}{4g'^2} \right]^{1/2}, \quad (6.66)$$

$$v_9 = - \left[2g'(H_{cz} - h_9) + \beta^2 y_6^4 / 4 \right]^{1/2} e \quad (6.67)$$

$$L_{cs} = \frac{g'(h_8 - h_9)}{f_0 v_9}. \quad (6.68)$$

Estas equações foram desenvolvidas para o modelo-2 de corrente zonal, ou seja, com profundidade não nula em suas bordas. Uma pergunta deve ser respondida: Estas equações verificam o cenário do Capítulo 4? A resposta deve ser afirmativa, pois o

cenário desenvolvido neste capítulo deve também satisfazer a situação do cenário contemplado no Capítulo 4, ou seja, com uma corrente zonal com profundidade nula em suas bordas, visto que esta é uma solução particular do cenário desenvolvido neste modelo-2.

Na situação do modelo-1 de corrente zonal não há divisão em dois ramos a partir da zona de transporte líquido (pois não é possível a existência de fluxo para sul na situação de lentes) e $y_6 = y_7$. Existirá somente a corrente meridional para norte e o fluxo para sul deve resultar nulo. Com $y_6 = y_7$ em (6.66) esta expressão resulta

$$h_9 = \left[H_{cz}^2 - \frac{H_{cz} f_0^2 y_8^2}{g'} - \frac{H_{cz} f_0 \beta y_8^3}{g'} + \frac{f_0^4 y_8^4}{4g'^2} + \frac{f_0^3 \beta y_8^5}{2g'^2} + \frac{f_0^2 \beta^2 y_8^6}{4g'^2} \right]^{1/2} = h_8. \quad (6.69)$$

Na obtenção de (6.69) foi utilizada a expressão (6.60). Com $h_9 = h_8$ o transporte da corrente meridional para sul deixa de existir visto que a expressão (6.54) resultaria

$$T_{cs} = \psi \Big|_9^{10} = \psi_{10} - \psi_9 = g'(h_8^2 - h_9^2) / 2f_s = 0. \quad (6.70)$$

A largura da corrente meridional para sul resulta também zero a partir de (6.68). Na situação do modelo-1 o conjunto de pontos [8 - 4 - 10 - 9 - 3] e [8 - 4 - 7 - 6 - 3] pertenceriam à mesma linha de corrente (ver figura 6.3). Neste caso o ponto 8 se conectaria direto com o ponto 3 e a figura 4.4 seria reproduzida. Conclui-se então que as equações desenvolvidas para a corrente meridional para sul também satisfazem a situação em que a corrente zonal possui profundidade zero em suas bordas, o que se pode considerar uma verificação independente do modelo deste capítulo no caso particular descrito.

Retomando-se o desenvolvimento de uma expressão para o momentum da corrente meridional para sul, a utilização das expressões (6.51) e (6.52) permite escrever

$$\int_0^{L_{cs}} h_{cs} v_{cs}^2 dx = \int_0^{L_{cs}} [h_9 + f_0 v_9 x / g'] [v_9 - f_0 x]^2 dx. \quad (6.71)$$

Após uma análise de escala compatível aos modelos-1 e 2 de corrente zonal a expressão (6.71) pode ser reescrita como

$$Mo_{cs} = \int_0^{L_{cs}} h_{cs} v_{cs}^2 dx = h_9 v_9^2 L_{cs} + f_0 v_9^3 L_{cs}^2 / 2g'. \quad (6.72)$$

6.1.6. O TRANSPORTE DA CORRENTE MERIDIONAL PARA SUL

A expressão (6.72) permite o cálculo do momentum Mo_{cs} da corrente meridional para sul. De mesma forma, o transporte T_{cs} desta corrente pode ser calculado por

$$T_{cs} = \int_0^{L_{cs}} h_{cs} u_{cs} dx = \int_0^{L_{cs}} (h_9 + f_0 v_9 x / g') (v_9 - f_0 x) dx. \quad (6.73)$$

Após uma análise de escala compatível aos modelos-1 e 2 de corrente zonal a expressão (6.73) pode ser reescrita como

$$T_{cs} = \int_0^{L_{cs}} h_{cs} v_{cs} dx = h_9 v_9 L_{cs} + f_0 v_9^2 L_{cs}^2 / 2g'. \quad (6.74)$$

As equações (6.72) e (6.74) resultam nulas na situação do modelo-1 de corrente zonal, pois neste caso $L_{cs} = 0$.

6.1.7. O PONTO DE DIVISÃO

A coordenada y_6 do ponto de divisão (ponto 6, ver figura 6.3) está contida em várias equações desenvolvidas neste capítulo e seu valor deve ser encontrado. Para tal a equação da conservação da massa será utilizada. A expressão (3.37, página 43) é aqui reproduzida por conveniência:

$$\int_A^B h v dx + \int_C^D h v dx = \int_B^C h u dy. \quad (6.75)$$

A expressão (6.75) pode ser escrita na forma

$$\int_0^{L_{cs}} h_{cs} v_{cs} dx - \int_0^{L_{cn}} h_{cn} v_{cn} dx = - \int_8^5 \frac{\partial \psi}{\partial y} dy. \quad (6.76)$$

A utilização das equações (6.50) e (6.74) na expressão (6.76) a transforma em

$$h_9 v_9 L_S + f_0 v_9^2 L_S^2 / 2g' + h_6 u_6 L_N - f_0 u_6^2 L_N^2 / 2g' = \psi_8 - \psi_5. \quad (6.77)$$

A equação (6.77) permite que a coordenada y_6 seja encontrada. As expressões (6.24), (6.41), (6.42), (6.43), (6.66), (6.67) e (6.68), que correspondem, respectivamente, às expressões de ψ , L_{cn} , h_6 , u_6 , h_9 , v_9 e L_{cs} , e ainda $\psi_8 = g'h_8^2/2f_s$, devem ser empregadas em (6.77). A utilização de um método gráfico ou iterativo propiciará que a coordenada y_6 do ponto de divisão seja calculada.

6.1.8. O MOMENTUM DO VÓRTICE ESTACIONÁRIO

Nesta subsecção será desenvolvida a expressão do momentum Mo_v do vórtice estacionário contida em (6.23), que é dada por

$$Mo_v = \beta \iint_{S_v} [\psi_v - \psi_{s\infty}] dx dy. \quad (6.78)$$

As equações do vórtice estacionário são similares àquelas apresentadas no Capítulo 4, contudo, esta feição agora não possui profundidade nula em seu contorno externo. As equações que descrevem o vórtice são

$$v_\theta = -f_0 r / 2 \quad \text{e} \quad h_v = h_B + f_0^2 (r_0^2 - r^2) / 8g' \quad r \leq r_0. \quad (6.79ab)$$

Na equação (6.79b) h_B é a profundidade no contorno externo do vórtice estacionário. A figura 6.4 mostra o perfil leste-oeste da feição. As definições de profundidades e raios são as mesmas introduzidas no Capítulo 4, com exceção da profundidade extra h_B recém definida. As correntes circunvizinhas ao vórtice são representadas pelas áreas hachuradas da figura.

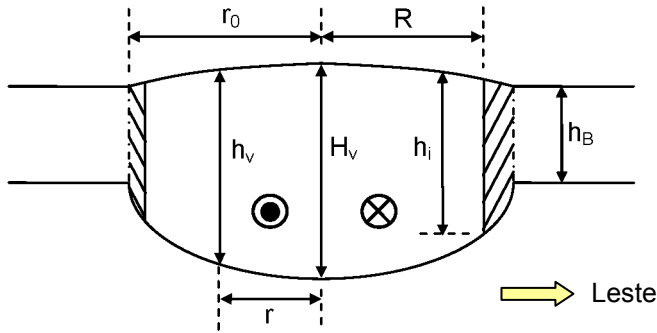


Figura 6.4 – Esboço do perfil leste-este do vórtice estacionário gerado no domínio de estudo.

Definindo-se $H_v = h_B + f_0^2 r_0^2 / 8g'$ e fazendo-se $h_v = h_i$ (quando $r = R$) na equação (6.79b) obtém-se novamente a equação (4.48, página 69) do Capítulo 4, ou seja:

$$R = \left[\frac{8g'(H_v - h_i)}{f_0^2} \right]^{1/2}. \quad (6.80)$$

A expressão da função transporte ψ_v do vórtice estacionário será agora desenvolvida. Com as equações (6.79) pode-se escrever

$$\frac{\partial \psi_v}{\partial r} = \left[-\frac{f_0 r}{2} \right] \left[h_B + \frac{f_0^2 (r_0^2 - r^2)}{8g'} \right] \rightarrow \psi_v = C - \frac{f_0 h_B r^2}{4} + \frac{f_0^3 (r_0^2 - r^2)^2}{64g'}. \quad (6.81)$$

Em (6.81) C é uma constante de integração a ser determinada e a profundidade h_B não é função do raio do vórtice. Fazendo-se $r = R$ na equação (6.81) tem-se que $\psi_v = \psi_i$ o que resulta

$$\psi_i = C - \frac{f_0 h_B}{4} \left[\frac{8g'(H_v - h_i)}{f_0^2} \right] + \frac{f_0^3}{64g'} \left[r_0^2 - \frac{8g'(H_v - h_i)}{f_0^2} \right]^2. \quad (6.82)$$

Utilizou-se (6.80) na obtenção de (6.82). Algumas variáveis que estão presentes na equação (6.82) serão analisadas agora. A função transporte ψ_i corresponde a ψ_7 , mas $\psi_7 = \psi_8 = g'h_8 / 2f_S$. Tem-se ainda que $h_B = h_5$ e $h_i = h_7$. A profundidade máxima do vórtice estacionário é $H_v = h_B + f_0^2 r_0^2 / 8g'$. Com estas considerações (6.82) toma a forma

$$\begin{aligned} \frac{g'h_8^2}{2f_s} = C - \frac{f_0 h_5}{4} \left[\frac{8g'(f_0^2 r_0^2 / 8g' + h_5 - h_7)}{f_0^2} \right] + \dots \\ \dots + \frac{f_0^3}{64g'} \left[r_0^2 - \frac{8g'(f_0^2 r_0^2 / 8g' + h_5 - h_7)}{f_0^2} \right]^2. \end{aligned} \quad (6.83)$$

Após algumas manipulações algébricas em (6.83) a constante C resulta

$$C = \frac{g'h_8^2}{2f_s} + \frac{f_0 h_5 r_0^2}{4} - \frac{g'(h_7^2 - h_5^2)}{f_0}. \quad (6.84)$$

Com a expressão (6.84) a equação (6.81) transforma-se em

$$\psi_v = \frac{g'h_8^2}{2f_s} + \frac{f_0 h_5 (r_0^2 - r^2)}{4} - \frac{g'(h_7^2 - h_5^2)}{f_0} + \frac{f_0^3 (r_0^2 - r^2)^2}{64g'}. \quad (6.85)$$

A função corrente $\psi_{5\infty}$ pode ser obtida partindo-se da integração da equação meridional geostrófica multiplicada pela profundidade local, entre os pontos 5 e 8 da corrente zonal, para $x \rightarrow \infty$, o que resulta

$$\psi_{5\infty} = (1/f_5) \left[\beta \int_8^5 \psi_\infty dy + f_8 \psi_{8\infty} \right]. \quad (6.86)$$

Considerando-se que os valores de h_i e h_B são muito próximos (mesma ordem) pode-se concluir, utilizando-se a equação (6.80) que $R \approx r_0$. Com esta consideração e as expressões (6.85) e (6.86) pode-se escrever a expressão do momentum Mo_v do vórtice estacionário, a partir de (6.78), que será dada por

$$\begin{aligned} Mo_v = \beta \int_0^{2\pi} \int_0^R \left[\frac{g'h_8^2}{2f_s} + \frac{f_0 h_5 (R^2 - r^2)}{4} - \frac{g'(h_7^2 - h_5^2)}{f_0} + \frac{f_0^3 (R^2 - r^2)^2}{64g'} \right] r dr d\theta - \dots \\ \dots - \beta \iint_{S_v} \left[\frac{\beta}{f_5} \int_8^5 \psi_\infty dy + \frac{f_8}{f_5} \psi_{8\infty} \right] dx dy. \end{aligned} \quad (6.87)$$

Negligenciando-se os termos de ordem superior a ε , e com $\psi_{8\infty} = g'h_8 / 2f_s$, a expressão (6.87) resulta

$$Mo_v = \beta \int_0^{2\pi} \int_0^R \left[\frac{f_0 h_5 (R^2 - r^2)}{4} + \frac{f_0^3 (R^2 - r^2)^2}{64g'} \right] r dr d\theta. \quad (6.88)$$

A profundidade do ponto 5 tem como expressão

$$h_5 = H_{cz} - f_0^2 y_5^2 / 2g' - f_0 \beta y_5^3 / 2g'. \quad (6.89)$$

A substituição da expressão (6.89) em (6.88) e a resolução da integral, após os termos com ordem superior a ε terem sido negligenciados, fornece

$$Mo_v = \beta \pi \left[\frac{f_0 H_{cz} R^4}{8} - \frac{f_0^3 y_5^2 R^4}{16g'} + \frac{f_0^3 R^6}{192g'} \right]. \quad (6.90)$$

A equação (6.90) representa o momentum do vórtice estacionário presente em D_o . Esta expressão iguala-se a (4.53, página 70), que calcula o momentum do vórtice estacionário resultante do encontro de um “trem” de lentes com a borda continental, caso seja suposto que a profundidade da camada superior externa ao vórtice do tipo não-lente é nula.

6.1.9. O RAI DO VÓRTICE ESTACIONÁRIO

O raio do vórtice estacionário pode ser calculado a partir da equação integrada do momentum meridional (6.23), aqui reproduzida por conveniência:

$$-\int_0^{L_{cs}} h_{cs} v_{cs}^2 dx + \int_0^{L_{cn}} h_{cn} v_{cn}^2 dx + \iint_{S_v} (\psi_v - \psi_{5\infty}) dx dy = 0. \quad (6.91)$$

A utilização das expressões (6.47), (6.72) e (6.90) em (6.91) a transforma em

$$-h_9 v_9^2 L_{cs} - \frac{f_0 v_9^3 L_{cs}^2}{2g'} + u_6^2 h_6 L_{cn} - \frac{f_0 u_6^3 L_{cn}^2}{2g'} + \beta \pi \left[\frac{f_0 H_{cz} R^4}{8} - \frac{f_0^3 y_5^2 R^4}{16g'} + \frac{f_0^3 R^6}{192g'} \right] = 0. \quad (6.92)$$

As expressões (6.41), (6.42), (6.43), (6.66), (6.67) e (6.68), que correspondem às expressões de L_{cn} , h_6 , u_6 , h_9 , v_9 e L_{cs} , respectivamente, devem ser utilizadas em (6.92) para que o raio do vórtice estacionário possa ser encontrado.

Conforme citado anteriormente, as expressões matemáticas que fornecem o momento e transporte das correntes paralelas à parede são similares nas duas modelagens analíticas. Contudo, na situação de vórtices do tipo não-lente, deve-se tomar especial cuidado com a escala dos termos de cada expressão. Nas equações que permitem o cálculo do raio R do vórtice estacionário a similaridade entre as expressões desenvolvidas nas duas modelagens analíticas não é tão evidente. Será agora demonstrado que a equação (6.92), que permite o cálculo do raio do vórtice estacionário para o cenário de não-lentes, se reduz à equação (4.55, página 71), que calcula este mesmo raio para o cenário com lentes, caso as condições deste último cenário sejam impostas na expressão (6.92). Estas duas equações são aqui reproduzidas, por conveniência:

(a) Expressão para cálculo do raio do vórtice estacionário para cenário com lentes:

$$R = 2 \left\{ - \left[\frac{3g'}{\pi f_0^3 \beta} \right] \left[h_1 v_1^2 L_{cn} + f_0 v_1^3 L_{cn}^2 / 2g' \right] \right\}^{1/6}. \quad (6.93)$$

(b) Expressão para cálculo do raio do vórtice estacionário para cenário com não-lentes:

$$-h_9 v_9^2 L_{cs} - \frac{f_0 v_9^3 L_{cs}^2}{2g'} + u_6^2 h_6 L_{cn} - \frac{f_0 u_6^3 L_{cn}^2}{2g'} + \beta \pi \left[\frac{f_0 H_{cz} R^4}{8} - \frac{f_0^3 y_5^2 R^4}{16g'} + \frac{f_0^3 R^6}{192g'} \right] = 0. \quad (6.94)$$

Os dois termos da soma da direita da equação (6.93) possuem $O(\varepsilon)$ pois a profundidade e a largura da corrente paralela à parede (para norte) são de $O(\varepsilon^{1/2})$. Já na equação (6.94), onde a largura das correntes paralelas à parede é de $O(\varepsilon)$ mas a profundidade possui $O(1)$, o primeiro e terceiro termos do lado esquerdo da equação possuem $O(\varepsilon)$ enquanto o segundo e quarto termos possuem $O(\varepsilon^2)$. Estes termos precisam ser mantidos para que (6.94) reproduza (6.93) caso seja assumida uma profundidade nula na borda do vórtice do tipo não-lente, ou seja, $h_B = h_8 = h_5 = 0$. A equação (6.69) mostra que, neste caso, $h_9 = h_8 = 0$, enquanto a equação (6.68) mostra que $L_{cs} = 0$, o que anu-

la o primeiro e segundo termos de (6.94), respectivamente. As equações (6.36) e (6.37) transformam o terceiro e quarto termos de (6.94) na soma do lado direito de (6.93). Para que a equação (6.94) resulte numa expressão idêntica a (6.93) basta apenas se provar que a soma dos dois primeiros termos do colchete contido em (6.94) é nula, no caso de um “trem” de vórtices do tipo não-lente assumindo-se $h_B = h_8 = h_5 = 0$. Com todas estas considerações, e ainda utilizando-se a expressão (6.89), isolando-se H_{cz} , e substituindo-se a equação resultante na soma referida por último, resulta (os termos que já foram citados como nulos estão riscados na expressão abaixo)

$$\begin{aligned} & \cancel{-h_9 v_9^2 L_{cs}} - \cancel{\frac{f_0 v_9^3 L_{cs}^2}{2g'}} + (-v_1)^2 h_1 L_{cn} - \frac{f_0 (-v_1)^3 L_{cn}^2}{2g'} + \dots \\ & \dots + \beta\pi \left[\frac{f_0 (\cancel{h_5} + f_0^2 y_5^2 / 2g' + f_0 \beta y_5^3 / 2g') R^4}{8} - \frac{f_0^3 y_5^2 R^4}{16g'} + \frac{f_0^3 R^6}{192g'} \right] = 0. \end{aligned}$$

Esta última expressão pode ainda ser escrita como

$$v_1^2 h_1 L_{cn} + \frac{f_0 v_1^3 L_{cn}^2}{2g'} + \beta\pi \left[\frac{f_0^2 \beta y_5^3 R^4}{16g'} + \frac{f_0^3 R^6}{192g'} \right] = 0. \quad (6.95)$$

O terceiro termo do lado esquerdo de (6.95) possui $O(\varepsilon^2)$ e deve ser descartado no cenário dos vórtices do tipo lente. Com esta consideração a equação (6.95) transforma-se exatamente na expressão (6.93) após isolar-se o raio R do vórtice estacionário no seu lado esquerdo, demonstrando-se então a similaridade entre as equações (6.93) e (6.94), certamente não tão evidente na primeira visualização destas duas expressões.

6.2. DOMÍNIO DE ESTUDO COM UMA PAREDE INCLINADA

Nesta seção será analisado o encontro de uma corrente de dupla frente, com profundidade não nula em suas bordas, a qual representa, em termos de vorticidade e transporte, um “trem” de vórtices anticiclônicos com profundidade não nula em seu contorno externo, com uma parede inclinada latitudinalmente de um ângulo θ com relação ao norte, medido em sentido horário. Um vórtice estacionário é requerido dentro do domí-

nio de estudo para o equilíbrio das forças na direção paralela à parede. Espera-se uma repetição do resultado da análise realizada no Capítulo 4, ou seja, a força β interna do vórtice sendo necessária para o equilíbrio da componente paralela à parede da força aplicada no domínio de estudo pela corrente zonal. Novamente destaca-se que a corrente zonal possui apenas a mesma vorticidade e transporte do “trem” de vórtices, mas não possui o mesmo momentum, ou seja, algum erro será introduzido no dimensionamento do tamanho do vórtice estacionário. Em termos de transporte, foco deste trabalho, o resultado não é afetado, pois o balanço de massa é mantido.

A figura 6.5 mostra o cenário atual, onde uma corrente zonal de dupla frente encontra uma parede latitudinalmente inclinada. Como resultado do encontro são geradas duas correntes paralelas à parede e um vórtice estacionário é requerido dentro do domínio de estudo para que haja equilíbrio das forças na direção paralela à parede. Conforme já mostrado no Capítulo 4, o cenário possui agora dois sistemas de coordenadas. O sistema XY é o mesmo sistema utilizado na seção anterior com uma parede meridional. O novo sistema xy acompanha os contornos norte e oeste do novo domínio de estudo ABCDA (agora inclinado). A soma dos transportes das correntes paralelas à parede para nordeste e para sudoeste equivale ao transporte líquido da corrente zonal.

6.2.1. A EQUAÇÃO INTEGRADA DO MOMENTUM PARALELO À PAREDE

A equação integrada do momentum paralelo à parede (3.36, página 43), desenvolvida no Capítulo 3 para um domínio de estudo com uma borda continental inclinada, é reproduzida aqui por conveniência. Os mesmos critérios utilizados no Capítulo 4 para o estabelecimento dos limites das integrais foram adotados aqui.

$$\begin{aligned} & \text{sen}\theta \int_{Y_8}^{Y_5} h^* U^{*2} dY - \int_0^{L_{cs}} \left[hv^2 + g'h^2/2 - (f_0 + \beta Y)\psi \right] dx + \dots \\ & \dots + \int_0^{L_{cn}} \left[hv^2 + g'h^2/2 - (f_0 + \beta Y)\psi \right] dx + \beta \cos\theta \iint_S \psi dx dy = 0 . \end{aligned} \quad (6.96)$$

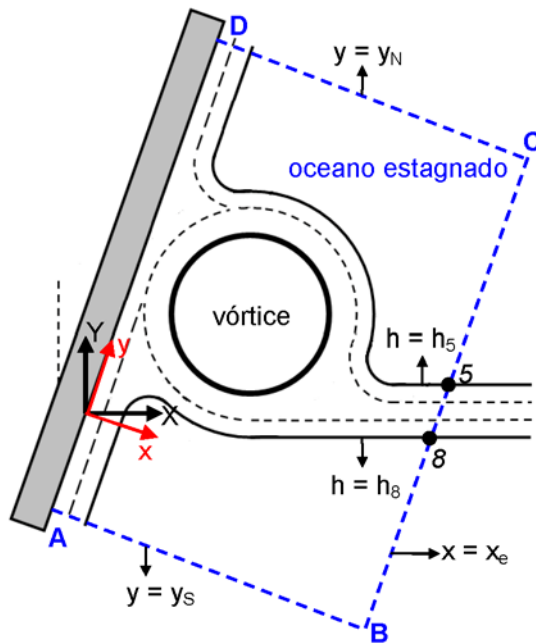


Figura 6.5 – Cenário resultante do encontro da corrente zonal com profundidade não nula em suas bordas com uma parede inclinada. A figura mostra o surgimento de dois fluxos paralelos à parede e um vórtice estacionário. O texto detalha este cenário.

A velocidade e a profundidade da corrente zonal estão escritas no sistema XY . Cabe destacar que as equações desenvolvidas nesta seção estão escritas no sistema xy . Após uma análise envolvendo os dois últimos termos das integrais definidas e a eliminação dos termos com ordem superior a ε , com a mesma sistemática adotada no Capítulo 4, a equação (6.96) resulta

$$\text{sen}\theta \int_{Y_8}^{Y_5} h^* U^{*2} dY - \int_0^{L_{cs}} h v^2 dx + \int_0^{L_{cn}} h v^2 dx + \beta \cos\theta \iint_S \psi dx dy = 0. \quad (6.97)$$

A equação (6.97) mostra os termos que compõem a equação integrada do momentum paralelo à parede, onde temos a componente paralela à parede da força aplicada no domínio de estudo pela corrente zonal (primeiro termo do lado esquerdo), as forças “foguetes” aplicadas pelas correntes paralelas à parede (segundo e terceiro termos) e outra componente paralela à parede da força devida ao efeito β no interior do vórtice estacionário criado dentro do domínio (quarto termo). O quarto termo cobre toda a extensão do domínio de estudo, mas o termo de ordem relevante é aquele correspondente à região do vórtice estacionário, conforme demonstrado na seção anterior. A figura 3.6 (página 41) do Capítulo 3 exemplifica o atual cenário.

6.2.2. ANÁLISE DE ESCALA

Os termos da equação (6.97) possuem a mesma ordem dos termos da expressão (4.58, página 75) mostrada no Capítulo 4, motivo pelo qual a análise não será aqui repetida. A equação (6.98) mostra as ordens de cada termo de (6.97):

$$\sin\theta \underbrace{\int_{Y_B}^{Y_C} h^* U^{*2} dY}_{(1) - O(g'H_{cz}^2 R_D)} - \underbrace{\int_0^{L_{cs}} h v^2 dx}_{(2) - O(\varepsilon g'H_{cz}^2 R_D)} + \underbrace{\int_0^{L_{cn}} h v^2 dx}_{(3) - O(\varepsilon g'H_{cz}^2 R_D)} + \underbrace{\cos\theta \beta \iint (\psi - \psi_{5\infty}) dx dy}_{(4) - O[\varepsilon g'H_{cz}^2 R_{De} (R_{De} / R_D)^5]} = 0. \quad (6.98)$$

A situação repete o Capítulo 4, ou seja, quando $[\sin\theta] \sim O(\varepsilon)$ (ou seja, uma borda continental quase meridional) os quatro termos da equação (6.98) participarão do balanço de momentum paralelo à parede, quando então $[R_{De}] \sim O(R_D)$, conforme na seção anterior, e os quatro termos terão $O(\varepsilon g'H_{cz}^2 R_D)$.

Novamente, a expressão (6.98) confirma a necessidade de um vórtice estacionário dentro do domínio de estudo, tendo em vista que a força na direção nordeste aplicada em D_o pela corrente paralela à parede para sudoeste não poderia equilibrar a soma das forças paralelas à parede para sudoeste, aplicadas em D_o pela corrente para nordeste e pela componente da corrente zonal, tendo em vista o maior transporte para nordeste.

A figura 6.6 mostra as forças que atuam paralelas à parede no cenário de um domínio de estudo com uma parede inclinada de um ângulo θ com relação à vertical, e onde $[\sin\theta] \sim O(\varepsilon)$.

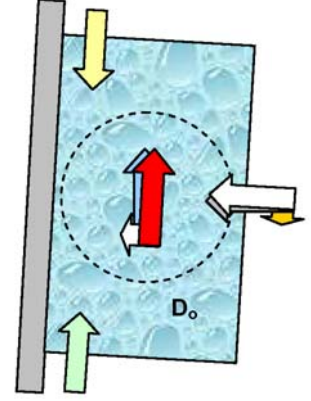
Conforme visto no Capítulo 4, para inclinações maiores da borda continental o primeiro termo da equação (6.98) só pode ser balanceado pelo seu quarto termo, o que novamente confirma a exigência de um vórtice estacionário dentro do domínio de estudo. A relação $[R_{De}] \sim O(R_D / \varepsilon^{1/6})$ continua válida para este último caso.

O primeiro termo da equação (6.98) é o mesmo já desenvolvido no Capítulo 4 pela equação (4.61, página 78). Os seus demais termos seguem as equações (6.47), (6.72) e (6.90), respectivamente, sendo que esta última equação deve ser multiplicada por $\cos\theta$.

EQUAÇÃO INTEGRADA DO MOMENTUM PARALELO À PAREDE PARA $[\text{sen}\theta] \sim O(\epsilon)$

$$\text{sen}\theta \int_{Y_8}^{Y_5} h^* U^{*2} dY - \int_0^{L_{cs}} h v^2 dx + \int_0^{L_{cn}} h v^2 dx + \beta \cos\theta \iint_{\zeta} \psi_v dx dy = 0$$

Figura 6.6 – Forças que atuam na direção paralela à parede durante o encontro entre a corrente de dupla frente, com profundidade não nula em suas bordas, e uma borda continental inclinada de um ângulo θ e onde $[\text{sen}\theta] \sim O(\epsilon)$. Neste cenário as quatro forças envolvidas (ver texto) no balanço na direção paralela à parede atuam simultaneamente, pois todos os termos da equação integrada do momentum paralelo à parede possuem mesma ordem, dada por $O(\epsilon g' H_{cz}^2 R_D)$. Um vórtice estacionário (círculo tracejado) é necessário no domínio de estudo, pois somente a componente paralela à parede (seta vermelha) da sua força interna devida ao efeito β (seta azul) pode equilibrar a diferença entre a soma da componente (seta laranja) da força da corrente zonal (seta cinza) e a força da corrente para nordeste (seta amarela) com relação à força da corrente para sudoeste (seta verde), todas aplicadas em D_o .



Com estas considerações a equação (6.98) transforma-se na expressão final da equação integrada do momentum paralelo à parede (6.99), que é expressa por

$$\begin{aligned} \text{sen}\theta \left[\frac{f_0^2 H_{cz} (Y_5^3 - Y_8^3)}{3} + \frac{f_0 \beta H_{cz} (Y_5^4 - Y_8^4)}{4} - \frac{f_0^4 (Y_5^5 - Y_8^5)}{10g'} - \frac{f_0^3 \beta (Y_5^6 - Y_8^6)}{6g'} \right] - \dots \\ \dots - h_9 v_9^2 L_{cs} - \frac{f_0 v_9^3 L_{cs}^2}{2g'} + u_6^2 h_6 L_{cn} - f_0 u_6^3 L_{cn}^2 / 2g' + \dots \\ \dots + \beta \pi \cos\theta \left[\frac{f_0 H_{cz} R^4}{8} - \frac{f_0^3 Y_5^2 R^4}{16g'} + \frac{f_0^3 R^6}{192g'} \right] = 0. \end{aligned} \quad (6.99)$$

A equação (6.99) transforma-se na expressão (4.66, página 79) caso sejam aplicadas nesta expressão as condições do cenário do modelo-1, confirmando que (6.99) atende a qualquer um dos dois cenários abordados neste estudo. Com a utilização de $\theta = 0^\circ$ (parede meridional) a equação (6.99) retorna a forma mostrada por (6.92).

6.2.4. O RAI DO VÓRTICE ESTACIONÁRIO

As expressões (6.41), (6.42), (6.43), (6.66), (6.67) e (6.68), que correspondem às expressões de L_{cn} , h_6 , u_6 , h_9 , v_9 e L_{cs} , devem ser utilizadas em (6.99) para que o raio do vórtice estacionário possa ser encontrado mediante um método gráfico ou iterativo.

6.3. SUMÁRIO

A modelagem analítica do encontro de um “trem” de vórtices do tipo não-lente com a borda continental foi desenvolvida neste capítulo. Dois cenários foram contemplados no estudo, ou seja, com uma borda meridional e com a borda inclinada de um ângulo θ (medido em sentido horário com relação ao norte). Novamente o “trem” de vórtices foi representado por uma corrente de dupla frente com o mesmo transporte e vorticidade do “trem” de vórtices, porém, a corrente apresenta agora profundidade não nula e suas bordas. As equações foram novamente desenvolvidas com as variáveis em sua forma dimensional e os termos de cada expressão com ordem superior a ε foram negligenciados.

Na situação de vórtices do tipo não-lente é possível a existência de um vazamento dirigido para sul após o contato dos vórtices com a borda continental. Este cenário era inviável no caso de vórtices do tipo lente.

Comparando-se a modelagem analítica desenvolvida no Capítulo 4, para vórtices do tipo lente, com a modelagem deste capítulo, percebe-se [comparando-se as equações (6.23) e (4.25, página 61)] que a equação integrada do momentum paralelo à parede possui um termo a mais na situação do “trem” formado por vórtices do tipo não-lente. Este termo extra deve-se ao vazamento que ocorre para sul (ou sudoeste no caso de uma parede inclinada) que inexiste na situação de lentes, o qual exerce uma nova força paralela à parede sobre o domínio de estudo.

As expressões matemáticas desenvolvidas nos Capítulos 4 e 6 são similares, contudo, deve ser observado que as grandezas associadas com as correntes paralelas à parede possuem escalas diferentes. No cenário com vórtices do tipo lente a corrente paralela à

parede possui uma profundidade e largura de $O(\varepsilon^{1/2}H_{cz})$ e $O(\varepsilon^{1/2}R_D)$, respectivamente. Já com vórtices do tipo não lente a profundidade das correntes paralelas à parede possui $O(H_{cz})$ enquanto suas larguras são de $O(\varepsilon R_D)$. Os transportes de volume gerados por estas correntes, entretanto, possuem ambos $O(\varepsilon)$.

A modelagem apresentada neste capítulo, quando confrontada com os objetivos deste trabalho descritos no Capítulo 1, permite concluir (alguns aspectos já destacados no Capítulo 4 não foram repetidos):

- a) A interação contínua entre vórtices do tipo não-lente e a borda continental apresenta dois “vazamentos” contínuos ao longo da borda, onde um deles é dirigido para a linha do Equador e o outro para o pólo sul.
- b) A equação integrada do momentum paralelo à parede mostra um equilíbrio entre: (a) a força β interna do vórtice, (b) a força “foguetes” aplicada para sul (ou sudoeste no caso de uma parede inclinada) no domínio de estudo D_o pela corrente paralela à parede que sai pelo seu contorno norte, (c) a força “foguetes” aplicada para norte (ou nordeste no caso de uma parede inclinada) no domínio de estudo D_o pela corrente paralela à parede que sai pelo seu contorno sul e (d) a componente paralela à parede da força aplicada em D_o pela corrente zonal de dupla frente que atravessa o seu contorno leste. As forças (b) e (c) são desprezíveis na situação de uma parede inclinada quando $\sin\theta \gg \varepsilon$. Todas as quatro forças participam do equilíbrio de forças na direção paralela à parede apenas se $\sin\theta \sim O(\varepsilon)$.
- c) Uma análise de escala mostrou que a força β interna do vórtice estacionário é a única força capaz de equilibrar as outras forças paralelas à parede descritas no item anterior, ou seja, este fato justifica a necessidade da existência de um vórtice estacionário dentro do domínio de estudo.
- d) O “vazamento” oriundo da interação da corrente de dupla frente com a borda continental (análogo ao vazamento que seria proveniente do contato do “trem” de vórtices com a borda continental) tem um duplo sentido (no sentido da linha do Equador e do pólo), independentemente da inclinação da parede.

- e) Novamente a inclinação da borda continental influencia o tamanho (raio) do vórtice estacionário visto que aumenta a influência da componente paralela à parede da força aplicada em D_0 pela corrente zonal. No cenário em que $\sin\theta \gg \varepsilon$ o raio deste vórtice aumenta à medida que aumenta o valor desta componente. Os demais fatores de que depende o tamanho do vórtice estacionário foram citados ao final do Capítulo 4.
- f) As equações desenvolvidas neste capítulo para um “trem” de vórtices do tipo não-lente podem ser aplicadas na situação de um “trem” de lentes. Este último (lente) cenário é um caso particular do primeiro (não-lente), onde se considera a profundidade nula na borda externa superficial do vórtice inicialmente suposto como não-lente. As equações do momentum, transporte e do raio do vórtice estacionário, desenvolvidas neste Capítulo 6, se reduzem às respectivas equações do Capítulo 4 se as condições dos vórtices tipo lente forem impostas. Para tal, algumas considerações de escala tiveram que ser feitas no desenvolvimento das equações do presente capítulo, visto que as escalas de largura e profundidade da zona do transporte líquido da corrente zonal de dupla frente (e conseqüentemente as escalas envolvidas com as correntes paralelas à parede) diferem conforme esta corrente representa uma sequência de lentes ou de não-lentes. Não obstante, isto constitui uma verificação do modelo analítico apresentado neste capítulo.
- g) As hipóteses contempladas no Capítulo 1 foram novamente verificadas, ou seja, há um vazamento contínuo ao longo da parede oriundo do contato dos vórtices do tipo não-lente com esta parede, uma nova feição (vórtice estacionário) surgiu dentro do domínio de estudo e a inclinação da parede afeta o tamanho (raio) deste vórtice estacionário, conforme já comentado no Capítulo 4.

CAPÍTULO 7

DISCUSSÃO E CONCLUSÃO

Este trabalho foi dedicado ao estudo da interação entre um “trem” de vórtices baroclínicos anticiclônicos não lineares e a borda continental (parede), a qual representa a quebra de plataforma, onde estas feições interagem com o fundo submarino. O estudo foi realizado assumindo-se um meio invíscido no plano- β . Estes encontros são inevitáveis tendo em vista que os vórtices são autopropulsionados para oeste neste plano, o que faz com que muitos deles que transitam pelas bacias oceânicas venham a colidir com a margem oeste dos oceanos.

7.1.DISSCUSSÃO

A modelagem apresentada neste trabalho possui aplicação em inúmeras situações em que uma seqüência de vórtices baroclínicos anticiclônicos interage com uma parede. Uma situação especial do oceano global, diretamente relacionada com a metodologia analítica desenvolvida neste trabalho, ocorre na margem oeste do Oceano Atlântico Sul, onde os vórtices anticiclônicos oriundos da Corrente das Agulhas encontram a borda sul-americana²⁴, a qual será discutida agora.

O estudo de [Byrne et al. \(1995\)](#) cita que a Corrente das Agulhas é responsável pela liberação para o Oceano Atlântico Sul de aproximadamente seis vórtices por ano. Os autores destacam que apesar dos vórtices mostrarem apenas 10% de suas características iniciais na longitude de 40° W, após praticamente terem atravessado o Oceano Atlântico Sul, eles ainda possuem propriedades que influenciam significativamente o

²⁴ Ao leitor interessado no estudo mais detalhado da Corrente das Agulhas recomenda-se os trabalhos de [Lutjeharms \(1987\)](#), [Lutjeharms & Ballegooyen \(1988\)](#), [Boudra & Chassignet \(1988\)](#), [Chassignet & Boudra \(1988\)](#), [Biaostoch & Krauss \(1999\)](#), [Van Leeuwen et al. \(2000\)](#), [Treguier et al. \(2002\)](#) e [Lutjeharms et al. \(2003\)](#). Em [Lutjeharms \(2006a\)](#) são apresentados os resultados de três décadas de pesquisa na região da Corrente das Agulhas. O livro texto de [Lutjeharms \(2006b\)](#) aborda especificamente esta corrente.

ambiente onde se encontram. Comentam ainda os autores que a interação com a Corrente do Brasil não é clara e que estes vórtices talvez venham a influenciar no comportamento da Confluência Brasil-Malvinas. O destino destes vórtices na fronteira oeste do Oceano Atlântico Sul é citado como desconhecido. A figura 1.10 (página 13), retirada de [Byrne \(2000\)](#), mostra que a interação dos vórtices provenientes da Corrente das Agulhas com a Corrente do Brasil²⁵ parece ser iminente, apesar de não ter sido ainda documentada ([Nof, 2002](#)).

Vórtices oriundos de zonas de retroflexão são maiores do que feições similares originadas por outros processos. O volume de lentes depende do seu raio elevado à quarta potência, o que faz com que o volume de uma lente proveniente da Corrente das Agulhas seja muito superior que àquele da maioria dos outros vórtices do mesmo tipo. O volume de vórtices que não possuem o formato lente (ou seja, com profundidade finita e diferente de zero em suas bordas) é proporcional ao quadrado do raio da feição ([Nof, 2002](#)). Seja qual for o formato adotado para os vórtices provenientes da Corrente das Agulhas, o fato destes terem uma $O(10\%)$ da sua amplitude inicial ainda retida ([Byrne et al., 1995](#)) quando próximos da costa brasileira, faz com que estas feições ainda possuam propriedades comparáveis a muitos vórtices produzidos pelos clássicos mecanismos de instabilidade.

[Nof \(2002\)](#) destaca a possível influência da absorção dos vórtices das Agulhas em inúmeros processos físicos associados com a Corrente do Brasil, o que chama de “efeito dominó”. Este efeito busca uma seqüência de eventos em cadeia que, começando com a absorção dos vórtices provenientes da Corrente das Agulhas pela Corrente do Brasil, terminaria com a influência desta absorção na variabilidade espacial da posição da CBM, na formação de vórtices naquela região (chamados vórtices de “intrusão”²⁶) e nas células locais de recirculação, sendo que estes fenômenos estariam associados com a variabilidade do transporte da Corrente do Brasil, que atuaria como uma espécie

²⁵ Ao leitor interessado no estudo mais detalhado da Corrente do Brasil recomenda-se os trabalhos de [Signorini \(1978\)](#), [Evans et al. \(1983\)](#), [Stramma et al. \(1990\)](#), [Müller et al. \(1998\)](#), [Hogg et al. \(1999\)](#) e [Silveira et al. \(2000\)](#). Este último estudo faz uma ampla abordagem sobre a Corrente do Brasil.

²⁶ O termo “*intrusion eddies*” (do original em inglês) foi utilizado pela primeira vez em [Olson \(1991\)](#). Estas feições se distinguem dos vórtices comumente gerados por processos clássicos de instabilidade por serem formados sempre no mesmo local, o que sugere um mecanismo local de formação dos mesmos ([Nof, 2002](#)).

de “gatilho”. Inúmeros trabalhos na literatura científica (e.g., [Agra & Nof, 1993](#); [Matano, 1993](#); [Matano et al., 1993](#); [Lebedev & Nof, 1996](#); [Lebedev & Nof, 1997](#); [Witter & Gordon, 1999](#); [Wainer et al., 2000](#); [Goni & Wainer, 2001](#) e [Lentini et al., 2002](#)) sugerem que a deriva da posição da CBM se deve a variações no transporte das duas correntes que se aproximam. [Nof \(2002\)](#) cita que uma zona de confluência estacionária requeria uma característica relação entre os transportes das duas correntes, onde qualquer desvio neste delicado balanço forçaria a CBM a migrar no sentido da corrente mais fraca. Recente trabalho de [Lentini et al. \(2006\)](#) aborda a correlação entre o transporte da Corrente do Brasil e a liberação de vórtices na CBM. Cabe destacar que uma possível causa da variação do transporte da Corrente do Brasil seria a absorção por esta corrente dos vórtices provenientes da Corrente das Agulhas ([Nof, 2002](#)), além de outras feições coalescidas pela corrente oriundas de outros locais, tais como a CBM (e.g., [Garcia et al., 2004](#)).

É importante salientar que o estudo analítico realizado neste trabalho não incluiu uma corrente de contorno oeste (CCO), a qual, certamente, irá interagir com o “trem” de vórtices que atinge a borda continental. Este novo e complexo processo de interação envolve a transferência de massa, vorticidade, momentum e energia entre as feições envolvidas. [Nof \(2002\)](#) comenta que o encontro de vórtices anticiclônicos com uma CCO pode ser considerado ainda um processo desconhecido. Ainda cita o autor que esta interação envolve dois subprocessos conceituais, sendo um deles a interação do vórtice com um jato paralelo à borda continental e o outro a interação do vórtice com uma parede meridional ou inclinada, ambos ocorrendo no plano- β . O primeiro caso corresponde à situação em que a corrente de contorno oeste é intensa e larga. Neste cenário é como se a parede estivesse muito longe, não sendo então “percebida” pelo vórtice, quando então o processo de interação se reduz a um problema vórtice-jato. O segundo caso corresponde ao cenário em que a CCO é fraca e estreita, quando então o vórtice praticamente não “sente” o efeito do jato pois a parede está muito próxima. O processo de interação se reduz então a um contato vórtice-parede, similar ao que foi estudado neste trabalho, o qual desconsiderou a presença de uma CCO paralela à borda continental. Uma corrente de contorno oeste considerada larga possui uma largura muito superior ao raio de Rossby R_{De} dos vórtices com os quais interage enquanto CCO estreitas possuem esta largura muito inferior a R_{De} ([Nof, 2002](#)).

A grande dificuldade em associar este trabalho com os vórtices provenientes da zona de retroflexão da Corrente das Agulhas reside na caracterização destas feições quando próximas da Corrente do Brasil. Dados do diâmetro da feição e a distância entre vórtices sucessivos não estão disponíveis na literatura. O autor deste trabalho contactou com inúmeros pesquisadores que trabalham com a Corrente das Agulhas buscando obter informações sobre estes dados. A [Dra. Anne-Marie Treguier²⁷](#), o [Dr. Will de Ruijter²⁸](#) e o [Dr. Thierry Penduff²⁹](#) (todos por comunicação pessoal) responderam que não possuem estes dados. O trabalho de modelagem numérica desenvolvido pelo Dr. Eric Chassignet³⁰ que aborda a zona de encontro dos vórtices provenientes da Corrente das Agulhas com a Corrente do Brasil ainda está em fase preliminar, segundo o [Dr. Doron Nof \(comunicação pessoal\)](#), que ainda salientou que dados relativos a estes vórtices quando próximos da Corrente do Brasil ainda são tidos como desconhecidos.

Na busca destas características o autor deste trabalho contactou ainda com o [Dr. Dudley Chelton³¹](#) e a [Dra. Deirdre Byrne³²](#). Estes dois contatos prontamente atestaram a dificuldade da obtenção de tais parâmetros. A análise de duas animações (as quais são resultado de 14 anos de dados de SSH analisados na faixa de latitude compreendida entre a linha do Equador e 45° S), gentilmente enviadas pelo [Dr. Chelton \(OSU\)](#) para o autor deste trabalho, enquanto no Departamento de Oceanografia da *Florida State University*, permitiu constatar que a faixa de latitude dominante onde ocorre o contato dos vórtices das Agulhas com a borda continental brasileira é de 24° S até 32° S. Esta faixa delimita um "corredor" por onde os vórtices se aproximam da costa brasileira. A figura 7.1 ilustra este corredor imaginário.

²⁷ A Dra. Anne-Marie Treguier trabalha no *Laboratoire de Physique des Océans* (Ifremer) em Plouzané (França).

²⁸ O Dr. Will de Ruijter exerce suas atividades no *Institute for Marine and Atmospheric Research*, pertencente a *Utrecht University* (Utrecht, Holanda).

²⁹ O Dr. Thierry Penduff trabalha no *Laboratoire des Écoulements Géophysiques et Industriels* (LEGI), em Grenoble (França), junto ao projeto DRAKKAR. Atualmente está na *Florida State University* (Tallahassee, US).

³⁰ O Dr. Eric Chassignet trabalha no *Oceanography Department* e no *Center for Ocean-Atmospheric Prediction Studies* (COAPS), onde é o Diretor Geral, ambos pertencentes à *Florida State University - FSU* (Tallahassee, US).

³¹ O Dr. Dudley Chelton exerce suas atividades no *College of Oceanic and Atmospheric Sciences*, o qual pertence a *Oregon State University - OSU* (Corvallis, Oregon, USA).

³² A Dra. Deirdre Byrne desempenha suas atividades na *School of Marine Sciences*, pertencente a *University of Maine* (Orono, Maine, USA).

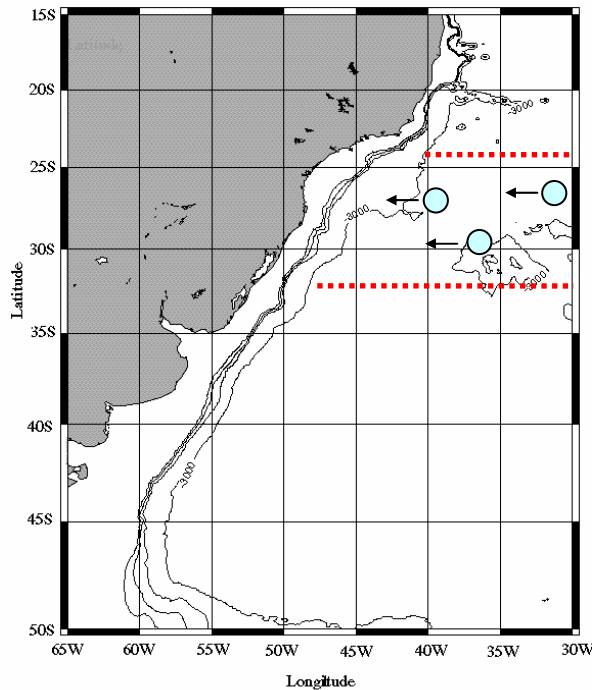


Figura 7.1 - Corredor imaginário (entre as linhas tracejadas vermelhas da figura) por onde a grande maioria dos vórtices provenientes da Corrente das Agulhas (representados pelos círculos azuis) se aproxima da borda continental brasileira e da Corrente do Brasil (ver texto). A faixa de latitude deste corredor, obtida a partir da análise de 14 anos de dados de SSH disponibilizados pelo Dr. Chelton (OSU), vai de 24° S até 32° S. A figura foi adaptada de Mata & Garcia (1996).

Ainda a partir destas animações pode-se observar que o acompanhamento dos vórtices a partir de 40° W torna-se difícil, pois eles são perdidos na variabilidade de meso-escala associada com a Corrente do Brasil. Algumas poucas feições ainda identificáveis possuem tamanhos que oscilam muito. Estão presentes vórtices com diâmetros muito pequenos até grandes (e poucas) feições com diâmetro superior a 150 km. Muitos destes vórtices maiores resultam da coalescência de mais de uma feição. Estimou-se (com dificuldade) um diâmetro médio de 100 km para os vórtices identificáveis próximos da Corrente do Brasil e uma distância entre vórtices sucessivos de 500 a 700 km, porém, esta estimativa, com certeza, não é representativa dos vórtices que se aproximam da Corrente do Brasil. De encontro a esta estimativa encontra-se o estudo de Tournadre et al. (2000) que, a partir de dados altimétricos (TOPEX/Poseidon e ERS-1), analisa a trajetória de um grande vórtice proveniente da Corrente das Agulhas, desde a sua liberação até a sua coalescência pela Corrente do Brasil. Utilizando um modelo gaussiano para a estimativa das características do vórtice os autores concluíram que o raio do vórtice estudado oscila entre 140 km e 90 km quando este se já encontra além dos 47° W e prestes a contatar com a Corrente do Brasil. Este valor é muito superior ao diâmetro médio citado anteriormente.

O estudo de [Schouten et al. \(2000\)](#) traz importantes informações a respeito dos vórtices liberados pela Corrente das Agulhas e mostra a dificuldade em acompanhar estas feições enquanto em trânsito no Oceano Atlântico Sul. O trajeto dos vórtices é afetado basicamente por três fatores, que são a deriva intrínseca à feição (autopropulsão), a topografia de fundo e os fluxos circunvizinhos. Os autores citam a grande influência da batimetria no decaimento dos vórtices. A maioria dos vórtices liberados pode ser acompanhada por altimetria por apenas 7 meses. O acompanhamento da anomalia de temperatura (por infravermelho) mostra-se ineficiente pois a interação ar-mar rapidamente resfria as águas mais quentes provenientes do Oceano Índico contidas no interior do vórtice. Os autores citam ainda um decaimento de 5 cm/mês na SSH da feição para os seus cinco primeiros meses de existência. Um decaimento de aproximadamente metade da anomalia de superfície da feição corresponde a, no mínimo, uma redução de 50% no seu volume. A divisão dos vórtices das Agulhas em feições menores é um processo bastante comum durante o trajeto destas feições. O trabalho de [Nof \(1991\)](#) mostra vários aspectos teóricos ligados a este fenômeno. [Schouten et al. \(2000\)](#) destacam que dos 20 vórtices estudados nos 4 anos abordados por seu estudo (1993 a 1996) 13 novas feições foram geradas por divisão dos vórtices originais. A batimetria parece ser o principal agente atuante nestas divisões. O movimento das feições no sentido da linha do Equador pode ocasionar uma redução de até 25% na intensidade do sinal de SSH. A dissipação dos vórtices é também citada pelos autores como outra causa da dificuldade em acompanhar estas feições. Um terço dos vórtices estudados desapareceu como anomalias de SSH antes de cruzarem a zona da cordilheira Walvis. Nestas situações, que os autores tratam como "desintegração dos vórtices" suas anomalias de calor, sal e vorticidade são dissipadas próximas ao local onde o sinal altimétrico da feição foi perdido.

De qualquer maneira, os poucos dados obtidos corroboraram com [Nof \(2002\)](#) que cita que a largura da Corrente do Brasil possui ordem similar ao raio de Rossby dos vórtices. Esta largura foi avaliada a partir de dados gerados pelo modelo HYCOM para a região e também por estudos disponíveis na literatura científica (e.g., [Silveira et al., 2000](#) e [Oliveira, 2008](#)).

O transporte médio associado ao "trem" de vórtices, levando-se em conta as dimensões observadas nas animações já referidas, e considerando-se apenas a autopropulsão dos vórtices, resultaria muito pequeno, com ordem menor que 10^{-2} Sv. A consideração de efeitos advectivos por correntes externas eleva sobremaneira este transporte (e.g., [Olson & Evans, 1986](#); [McDonagh et al., 1999](#) e [Lentini et al., 2006](#)), tendo em vista o aumento na velocidade translacional dos vórtices. A análise das animações permitiu uma estimativa das velocidades de deslocamento dos vórtices que transitam pelo corredor imaginário da figura 7.1, as quais se situam na faixa de 5-8 cm/s. Este valor é muito superior à velocidade de autopropulsão das feições, o que atesta a influência de feições externas sobre estes vórtices. Estimando-se como 600 km a distância entre os centros de feições sucessivas obtém-se uma periodicidade de aproximadamente 107 dias entre vórtices sucessivos. Estes dados conduzem a um transporte contínuo de aproximadamente 0,15 Sv se os vórtices forem considerados do tipo lente, o que equivaleria a uma redução de aproximadamente 1,7% no transporte da Corrente do Brasil, sendo este obtido por uma média dos transportes apresentados em [Silveira et al. \(2000\)](#) para a faixa de latitude do corredor imaginário mostrado na figura 7.1, e que resulta em 8,7 Sv. Caso todos os vórtices tivessem o tamanho médio da feição descrita em [Tournadre et al. \(2000\)](#) este transporte seria superior a 4 Sv, supondo-se vórtices não lineares do tipo lente e mantendo-se a mesma distância entre as feições, o que resulta em um valor muito elevado. A dependência do volume do vórtice suposto lente pelo seu raio na quarta potência acarreta grandes alterações no transporte da feição para aumentos não tão grandes em seu raio.

A respeito da forma dos vórtices provenientes da Corrente das Agulhas, estas feições seriam geradas na zona de retroflexão na forma de lentes mas, à medida que atravessam o Oceano Atlântico Sul e perdem parte de seu momentum, gradualmente iriam se transformando em vórtices do tipo não-lente. Nesta forma atingiriam a borda continental brasileira e entrariam em contato com a Corrente do Brasil ([Nof, comunicação pessoal](#)). Este fato acrescenta uma terceira variável necessária para a descrição dos vórtices no modelo analítico, ou seja, a profundidade ao longo da margem externa da feição. Exemplificando-se, um "trem" de vórtices do tipo não-lente com um diâmetro médio de 100 km, espaçados de 600 km entre si, possuiria um transporte de aproximadamente 0,2 Sv, ou aproximadamente 2,3% do transporte da Corrente do Brasil (obtido com o

mesmo critério adotado anteriormente). Assumiu-se uma profundidade de 50 metros na margem externa da feição a qual possui uma profundidade máxima de 362 metros. A modelagem analítica desenvolvida no Capítulo 6 mostra que a interação deste “trem” de vórtices com uma borda continental inclinada de 30° (ângulo apropriado para a borda continental brasileira na zona do corredor imaginário da figura 7.1) resultaria em um transporte paralelo à borda continental de 0,146 Sv (73% do transporte total) dirigido para nordeste e 0,044 Sv (27% do transporte total) dirigido para sudoeste, o que enfraqueceria (fortaleceria) o transporte da corrente de contorno à norte (sul) da zona de encontro vórtice-parede em 1,67% (0,51%).

A influência das feições de mesoescala nas propriedades dinâmicas de correntes de contorno oeste é tema de inúmeros trabalhos na literatura científica. Alguns trabalhos relacionados com diferentes correntes são aqui citados. [Lee et al. \(1996\)](#) comentam sobre a variabilidade do transporte da CCO na região de Abaco Bahamas, a qual está vinculada à interação da corrente com vórtices de mesoescala, e que possui um pico espectral que equivale a um período de 100 dias. Os estudos de [Mata et al. \(2000ab\)](#) citam oscilações que dominam as séries temporais de transporte da Corrente Leste Australiana, com períodos entre 90 e 140 dias, onde a coalescência de vórtices pela corrente de contorno é citada como uma das causas desta variabilidade. O trabalho de [Zhang et al. \(2001\)](#), a partir de dados de fundeio, cita que a variabilidade do transporte da Corrente de Kuroshio a leste de Taiwan é também dominada por um pico de 100 dias. Nesta escala temporal o transporte desta corrente está fortemente relacionado com o seu meandramento o qual, segundo os autores, é causado pelos vórtices anticiclônicos que se propagam para oeste vindos do oceano adjacente. [Lee et al. \(2001\)](#) encontraram uma escala temporal dominante entre 70 e 120 dias para a variabilidade desta mesma corrente. [Oliveira \(2003\)](#) estudou a variabilidade da Corrente do Brasil na latitude de 28° S e encontrou um pico espectral de 76 dias para a variação do transporte da corrente. O autor associou este pico às oscilações do jato da corrente na região do talude superior e quebra de plataforma, as quais estariam associadas com a banda de mesoescala, a qual possuía a maior energia integrada por banda de frequência. [Bryden et al. \(2005\)](#), estudando a estrutura e transporte da Corrente das Agulhas, a partir de dados de fundeio obtidos numa seção perpendicular à costa africana, ao largo de Port Edward, estimaram um período de 53 a 67 dias para o maior pico espectral

observado na análise da série temporal da velocidade desta corrente ao longo da costa africana. Cabe destacar que a periodicidade de aproximadamente 107 dias, citada a pouco, entre vórtices sucessivos que se aproximam da Corrente do Brasil pelo corredor mostrado na figura 7.1, é condizente com o pico espectral encontrado em [Oliveira \(2003\)](#).

Uma efetiva prova da atuação dos vórtices na variabilidade do transporte das CCO é apresentada no estudo de [Lee et al. \(2001\)](#), o qual compara as variabilidades da Corrente da Flórida (entre o continente americano e as Bahamas) com a Corrente de Kuroshio (a leste de Taiwan), com a utilização de dados de fundeio. Esta última corrente apresenta um pico de variabilidade de transporte com escala de tempo consideravelmente maior (vários meses) do que a apresentada pela primeira (vários dias a semanas). Este fato, segundo o autor, se deve ao confinamento da Corrente da Flórida, a qual fica isolada topograficamente do oceano aberto pela cadeia de ilhas das Antilhas e pelas Bahamas. Este cenário não ocorre com a Corrente de Kuroshio na região de estudo, a qual pode receber a influência de feições de mesoescala através da Bacia das Filipinas. Esta corrente apresenta então picos de transporte com períodos da ordem de 100 dias associados com vórtices de mesoescala de mesma periodicidade que se propagam para oeste, vindos do oceano aberto ao longo da latitude da convergência subtropical. Estes vórtices causam largos meandros na Corrente de Kuroshio e perturbam fortemente o transporte associado a esta corrente ([Lee et al., 2001](#) e [Zhang et al., 2001](#)).

A variação abrupta (na forma de pulso) do transporte de uma corrente de contorno pode gerar processos de instabilidade. O trabalho de [Ruijter et al. \(1999\)](#) mostra haver uma correlação entre o surgimento do Pulso de Natal (e.g., [Lutjeharms & Roberts, 1988](#) e [Van Leeuwen et al., 2000](#)) e a coalescência de vórtices pela Corrente das Agulhas (oriundos de leste ou do Canal de Moçambique). Estas anomalias no transporte da corrente parecem perturbar a corrente e propiciar o crescimento de instabilidades e a posterior geração dos pulsos de Natal. [Schmidt \(2004\)](#) cita a provável interação entre os vórtices das Agulhas com a Corrente do Brasil que envolveria a transferência de um súbito pulso de transporte para a corrente, o qual se propagaria com o jato e viria a in-

terferir nos complexos processos de interação que ocorrem na Confluência Brasil-Malvinas.

Cabe destacar que a dificuldade na obtenção de dados sobre os vórtices provenientes da zona de retroflexão da Corrente das Agulhas faz com que modelos analíticos, como os desenvolvidos neste trabalho, possam se tornar importantes ferramentas no estudo da interação destas feições com a borda continental brasileira e com sua corrente de contorno associada, a Corrente do Brasil.

7.2. CONCLUSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Uma nova metodologia analítica foi proposta neste trabalho para a modelagem da interação vórtices-parede, ou seja, a utilização de uma corrente de dupla frente na representação do "trem" de vórtices, o que facilitou sobremaneira o desenvolvimento analítico do problema. Esta corrente possui a mesma vorticidade e transporte líquido da sequência de vórtices. A utilização desta corrente permitiu, facilmente, que um referencial fixo fosse estabelecido no domínio de estudo. Este trabalho contempla a modelagem analítica de quatro cenários, ou seja, com feições do tipo lente e não-lente colidindo com bordas continentais meridionais e inclinadas (em relação ao Norte geográfico). Os cenários com os vórtices do tipo não-lente somente foram modelados analiticamente enquanto que aqueles que envolvem os vórtices do tipo lente foram modelados analítica e numericamente. A modelagem numérica apresentou resultados compatíveis com os apresentados pela modelagem analítica, o que atestou que a utilização de uma corrente de dupla frente para a representação analítica de um "trem" de vórtices do tipo lente é adequada. Cabe destacar que as equações finais obtidas na modelagem analítica que envolve o encontro de vórtices do tipo não-lente com uma parede também reproduzem o cenário em que as feições são tratadas como lentes, bastando apenas assumir que a profundidade da camada superior do modelo de 1,5 camadas é nula fora do vórtice. Salieta-se ainda que esta reprodução não é trivial tendo em vista as diferenças entre as escalas dos parâmetros associados com a região do transporte líquido da corrente de dupla frente entre os cenários com vórtices do tipo lente e não-lente. Mesmo com esta diferença nas escalas as equações finais do cenário que envolve

vórtices do tipo não-lente deveriam obrigatoriamente reproduzir o cenário com lentes, tendo em vista que este último é um caso particular do primeiro.

As soluções analíticas encontradas para todos os cenários analisados mostraram um balanço meridional entre a(s) força(s) “fogete” oriunda(s) do “vazamento” dos vórtices, a componente paralela à borda continental da força da corrente zonal e a força β oriunda de um vórtice estacionário. Assim como em [Nof \(1999\)](#), a movimentação do vórtice ao longo da parede devido ao efeito imagem não foi observada (negligenciável), o que se deve a alta inércia associada com o movimento orbital das partículas que compõem o vórtice, a qual é muito superior à inércia devida à deriva da feição para oeste. Os vórtices modelados neste trabalho são altamente não lineares com $R_o = \frac{1}{2}$.

Em todos os cenários analisados concluiu-se que é necessária a presença de um vórtice estacionário na zona de contato do “trem” de vórtices com a borda continental, tendo em vista que somente a força β interna desta feição, oriunda da diferença entre o parâmetro de Coriolis nos seus dois hemisférios, pode equilibrar as outras forças que atuam na direção paralela à parede. O tamanho deste vórtice estacionário é função direta do transporte do “trem” de vórtices, da inclinação da borda continental e da diferença de densidade entre as camadas interna e externa do vórtice. Além disso, o raio desta feição é uma função inversa da latitude da zona de contato vórtices-parede e da profundidade da borda do vórtice (para as feições do tipo lente).

O vórtice estacionário é maior na situação em que a borda continental é inclinada com relação ao norte geográfico, tendo em vista o surgimento de uma componente paralela à parede oriunda da força zonal aplicada no domínio de estudo pela corrente de dupla frente que penetra por seu contorno leste, a qual exige uma maior força β oriunda da feição estacionária (que, para tal, deve ter um raio maior) para que o equilíbrio de forças na direção paralela à borda continental seja alcançado. A presença desta feição foi atestada na modelagem numérica realizada com os vórtices do tipo lente, assim como o seu maior tamanho no caso de uma parede inclinada. O aumento da inclinação da borda continental acarreta o conseqüente aumento do vórtice estacionário gerado no interior do domínio de estudo.

Para vórtices do tipo lente concluiu-se que para pequenos valores de inclinação da borda continental, ou seja, quando $\sin\theta \sim O(\varepsilon)$, as três forças paralelas à parede (força β do vórtice estacionário, força “fogueto” da corrente meridional e a componente da força da corrente zonal) participam do balanço meridional. Quando $\sin\theta \gg \varepsilon$ este equilíbrio se reduz praticamente a duas únicas forças, ou seja, a força β oriunda do vórtice estacionário quase que somente equilibra a componente oriunda da corrente zonal, a qual é dirigida para sudoeste. Para vórtices do tipo não-lente esta conclusão se repete sendo acrescida uma quarta força paralela à parede, dirigida para nordeste, oriunda do vazamento dirigido para sudoeste, e que pode ser negligenciada do balanço meridional de forças no caso em que $\sin\theta \gg \varepsilon$.

Outra importante conclusão deste trabalho é a existência de um contínuo “vazamento” paralelo à borda continental, que é oriundo do contato dos sucessivos vórtices com a borda, o qual flui no sentido norte (nordeste) no caso do contato de vórtices do tipo lente com uma parede meridional (inclinada). Este “vazamento” meridional é semelhante ao mostrado em [Nof \(1999\)](#). Com um “trem” de vórtices do tipo não-lente a modelagem analítica mostrou que a água do interior do vórtice, após o encontro destas feições com uma parede meridional (inclinada), vaza em dois sentidos, ou seja, para norte e sul (nordeste e sudoeste). Pode-se então dizer que, decorrente da interação no plano- β entre um “trem” de vórtices e uma parede, um transporte paralelo à borda continental é estabelecido.

A divisão do transporte para norte (nordeste) e sul (sudoeste) dos vórtices do tipo não-lente após o seu contato com a borda continental meridional (inclinada) depende da profundidade da borda do vórtice (que equivale à espessura da camada superior do modelo de 1,5 camadas). A modelagem analítica mostrou que um aumento desta espessura, supondo-se a máxima profundidade da feição constante, diminui o percentual do transporte ao longo da borda continental (com relação ao transporte total, ou seja, aquele da corrente zonal ou do “trem” de vórtices) no sentido da linha do Equador com conseqüente aumento no transporte no sentido do pólo sul. O aumento da espessura da camada superior mantendo-se a profundidade máxima do vórtice reduz o transporte da feição. A figura 7.2 mostra esta relação entre o percentual do transporte paralelo à

parede que é dirigido para a Linha do Equador, a espessura da camada superior e a profundidade máxima da corrente zonal, supondo-se a borda continental meridional.

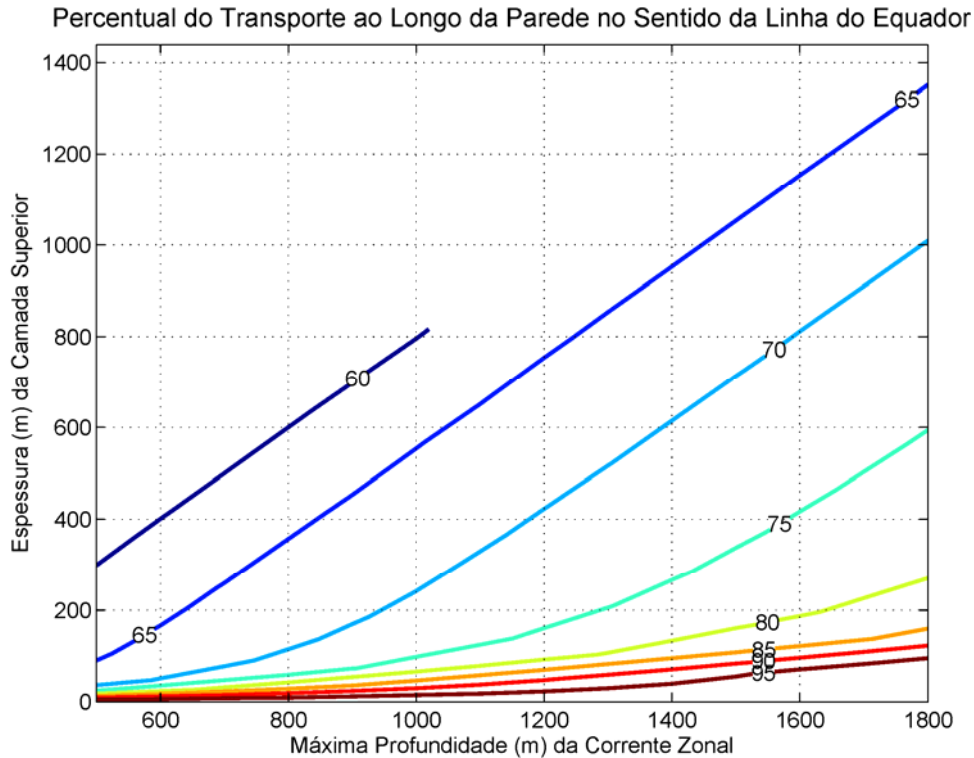


Figura 7.2 – Variação do percentual do transporte total ao longo da borda continental que se dirige no sentido da Linha do Equador em função das profundidades máxima da corrente zonal e da espessura da camada superior. Percebe-se que este percentual diminui à medida que a espessura da camada superior aumenta. A inclinação da parede, em relação ao norte, é nula.

A modelagem analítica com vórtices do tipo não-lente mostra que o tamanho do vórtice estacionário é afetado por dois fatores: a espessura da camada superior e a inclinação da borda continental. A modelagem mostrou que um aumento da profundidade da borda dos vórtices acarreta uma diminuição no raio do vórtice estacionário enquanto um aumento na inclinação da parede ocasiona um aumento no tamanho do vórtice estacionário, de forma similar ao que ocorre com os vórtices do tipo lente, em virtude do aumento da atuação de uma componente paralela à borda continental da força da corrente zonal, a qual deve ser equilibrada pela força β do interior do vórtice estacionário. A figura 7.3 mostra a relação entre o raio do vórtice estacionário e as profundidades associadas com a corrente zonal de dupla frente.

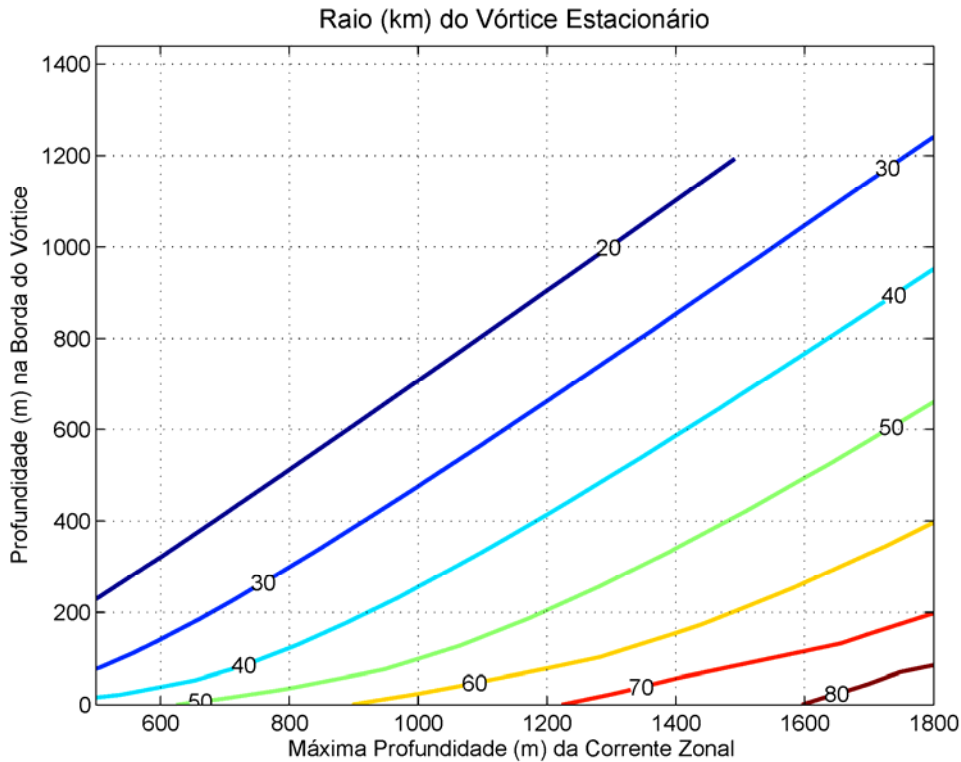


Figura 7.3 – Variação do raio do vórtice estacionário em função das profundidades associadas com a corrente zonal para vórtices do tipo não-lente.

A figura 7.4 mostra a distribuição percentual dos vários momentuns que compõem o equilíbrio na direção paralela à borda continental na situação de vórtices do tipo não-lente. Para ângulos maiores de inclinação a força oriunda do vórtice estacionário é necessária para equilibrar, praticamente, apenas a componente paralela à parede da força oriunda da corrente zonal.

O fato da corrente de dupla frente não possuir o mesmo momentum do “trem” de vórtices que representa repercutiu no experimento com uma borda continental inclinada, onde o raio do vórtice estacionário calculado pelo modelo analítico foi superior àquele encontrado na modelagem numérica. Isto não ocorreu no cenário com uma borda continental meridional onde o raio fornecido pelo modelo analítico é sempre menor. Como a grande utilização da modelagem analítica desenvolvida neste trabalho é o cálculo dos transportes paralelos à borda continental, oriundos da interação vórtices-parede, e como estes transportes apresentaram valores praticamente idênticos nas duas modelagens, esta influência do momentum da corrente de dupla frente não é significativa.

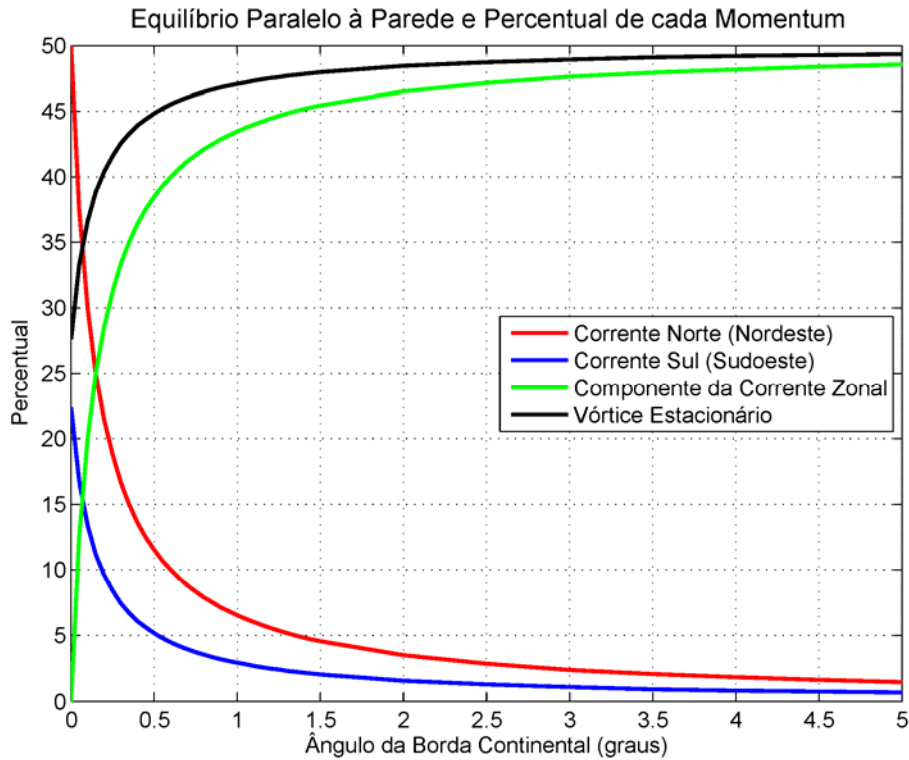


Figura 7.4 – Percentual de cada momentum ao longo da borda continental em função de pequenos ângulos de inclinação. Novamente o momentum do vórtice estacionário é necessário praticamente somente para o equilíbrio da componente do momentum da corrente zonal paralela à borda. A figura foi obtida a partir de vórtices do tipo não-lente. Para lentes a situação é praticamente a mesma, porém, neste caso a curva azul inexistente.

O fato da largura da Corrente do Brasil ser da ordem do raio de Rossby dos vórtices que dela se aproximam faz com que o processo de interação vórtice-jato-parede seja uma mistura dos dois subprocessos citados anteriormente (Nof, 2002). Apesar deste trabalho não abordar um destes subprocessos a modelagem analítica desenvolvida mostrou que o transporte da Corrente do Brasil é afetado pela coalescência dos vórtices provenientes da Corrente das Agulhas e outros. O estudo analítico apresentado neste trabalho sinaliza que o transporte da corrente é enfraquecido durante o contato com vórtices do tipo lente, mas que resultaria fortalecido caso o contato seja realizado com vórtices do tipo não-lente. De acordo com Nof (comunicação pessoal), os vórtices provenientes da Corrente das Agulhas possuem formato do tipo não-lente quando próximos da Corrente do Brasil, o que implica no fortalecimento do transporte desta corrente para sul. O grau de fortalecimento dependeria diretamente da profundidade nas bordas destes vórtices. O tamanho dos vórtices coalescidos é um aspecto importante tendo em vista que vórtices muito pequenos podem ser diretamente advectados pela

corrente de contorno, aumentando o seu transporte, independentemente do tipo de vórtice contatado. Uma análise de sensibilidade quanto ao tamanho dos vórtices seria possível de ser realizada na modelagem que incluísse a CCO.

7.3. SUGESTÃO DE TRABALHOS FUTUROS

Como principal sugestão de trabalhos futuros pode-se relacionar:

- a. Inclusão de uma corrente de contorno oeste na modelagem analítica desenvolvida neste trabalho. Esta etapa compreenderia a análise do segundo sub-processo da interação entre vórtices e bordas continentais, ou seja, o contato vórtice-jato, o que complementaria o estudo do processo de interação vórtice-parede-jato. Uma modelagem numérica deve reproduzir as condições encontradas na modelagem analítica.
- b. Inclusão de um fundo inclinado na modelagem analítica e a posterior verificação da sua influência no processo vórtice-parede-jato. A consideração de um fundo inclinado implica na influência do efeito beta-topográfico (e.g., [Smith & O'Brien, 1983](#)) sobre o vórtice.
- c. Estender a modelagem analítica até a região da Confluência Brasil-Malvinas (CBM) para que se possa modelar e analisar a influência da variabilidade do transporte da Corrente do Brasil na formação de vórtices naquela região e no deslocamento (deriva) da posição da CBM.
- d. A identificação da estrutura dos vórtices próximos da Corrente do Brasil mediante a utilização de ferramentas de modelagem numérica e, se possível, de dados obtidos *in situ*. Esta caracterização é fundamental para a estimativa do transporte associado a estas feições que é absorvido pela Corrente do Brasil.

BIBLIOGRAFIA

- Agra, C. & Nof, D. (1993), *Collision and Separation of Boundary Currents*, Deep-Sea Research, 40 (11/12), 2259-2282.
- Arakawa, A. (1966), *Computational Design for Long-term Numerical Integration of the Equations of Fluid Motion. Two Dimension Incompressible Flow. Part 1*. J. Comput. Phys., 1, 119-143.
- Arruda, W.Z. (2002), *Eddies Along Western Boundaries*, Tese de Doutorado, Florida State University, Tallahassee, Florida (US), 85 p.
- Arruda, W.Z.; Nof, D. & O'Brien, J.J. (2004), *Does the Ulleung Eddy Owe Its Existence to β and Nonlinearities?*, Deep-Sea Research I, 51, 2073-2090.
- Azevedo, J.L.; Oliveira, L.R.; Souza, J.F.; Soares, I.D. & Mata, M.M. (2008): *Os Processos de Conversão de Energia nos Oceanos: uma Revisão do Diagrama de Lorenz*, Revista Brasileira de Geofísica, 26(2): 153-172.
- Azevedo, J.L. & Mata, M.M. (2009), *O Mecanismo de Autopropulsão de Vórtices Oceânicos: Uma Revisão*, Revista Brasileira de Geofísica (submetido).
- Batchelor, G.K. (1998), *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, 17^a Ed., 620 p.
- Biaostoch, A. & Krauss, W. (1999), *The Role of Mesoscale Eddies in the Source Region of the Agulhas Current*, Journal of Physical Research, 29, 2303-2317.
- Bleck, R. (1978), *Finite Difference Equations in Generalized Vertical Coordinates Part I: Total Energy Conservation*, Contributions to Atmospheric Physics, 51, 360-372.
- Bleck, R. (1979), *Finite Difference Equations in Generalized Vertical Coordinates Part II: Potential Vorticity Conservation*, Contributions to Atmospheric Physics, 52(2), 95-105.
- Bleck, R. & Boudra, D. (1981), *Initial Testing of a Numerical Ocean Circulation Model Using a Hybrid (quasi-Isopycnic) Vertical Coordinate*, J. Phys. Oceanography, 11, 755-770.
- Bleck, R. & Boudra, D. (1986), *Wind-driven Spin-up in Eddy-resolving Ocean Models Formulated in Isopycnic and Isobaric Coordinates*, Journal of Geophysical Research, 91, 7611-7621.
- Bleck, R. & Smith, L.T. (1990), *A Wind Driven Isopycnic Coordinate Model of the North and Equatorial Atlantic Ocean. (I) Model Development and Supporting Experiments*, Journal of Geophysical Research, 95, 3273-3285.
- Boris, J. & Book, D. (1973), *Flux-corrected Transport, I: SHASTA, a Fluid Transport Algorithm that Works*, J. Comput. Phys., 11, 38-69.

- Bormans, M. & Garret, C. (1989), *A Simple Criterion for Gyre Formation by the Surface Outflow from a Strait, with Application to the Alboran Sea*, Journal of Geophysical Research, 94 (C9), 12637-12644.
- Boudra, D.B. & Chassignet, E.P. (1988), *Dynamics of Agulhas Retroflexion and Ring Formation in a Numerical Model. (I) The Vorticity Balance*, Journal of Physical Oceanography, 18, 280-303.
- Boyer, C.B. (1974), *História da Matemática*, Ed. Edgar Blucher, São Paulo.
- Bryden, H.L.; Beal, L.M. & Duncan, L.M. (2005), *Structure and Transport of the Agulhas Current and Its Temporal Variability*, Journal of Oceanography, 61, 479-492.
- Byrne, D.A.; Gordon, A.L. & Haxby, W.F. (1995), *Agulhas Eddies: A Synoptic View Using Geosat ERM Data*, Journal of Physical Oceanography, 25, 902-917.
- Byrne, D.A. (2000), *From the Agulhas to the South Atlantic: Measuring Inter-Ocean Fluxes*, Tese de Doutorado, Columbia University, 181 p.
- Calado, L. (2006), *Dinâmica da interação da atividade de meso-escala da Corrente do Brasil com o fenômeno da ressurgência costeira ao largo de Cabo Frio e Cabo de São Tomé, RJ*, Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, 159 p.
- Cardano, G. (1545), *Ars Magna or the Rules of Algebra*, Dover (published 1993).
- Chassignet, E.P. & Boudra, D.B. (1988), *Dynamics of Agulhas Retroflexion and Ring Formation in a Numerical Model. (II) Energetics and Ring Formation*, Journal of Physical Oceanography, 18, 304-319.
- Chelton, D.B.; Schlax, M.G.; Samelson, R.M. & Szoek, R.A. (2007), *Global Observations of Large Oceanic Eddies*, Geophysical Research Letters, 34, L15606, doi: 10.1029/2007GL030812.
- Cherniawsky, J. & Leblond, P.H. (1986), *Rotating Flows Around Indented Coastlines*, Journal of Fluid Mechanics, 169, 379-407.
- Csanady, G.T. (1979), *The Birth and Death of a Warm Core Ring*, Journal of Geophysical Research, 84 (C2), 777-780.
- Cushman-Roisin, B.; Chassignet, E.P. & Tang, B. (1989), *Westward Motion of Mesoscale Eddies*, Journal of Physical Oceanography, 20, 758-768.
- Cushman-Roisin, B. (1994), *Introduction to Geophysical Fluid Dynamics*, Prentice Hall, 320 p.
- Dewar, W.K. & Gaillard, C. (1994), *The Dynamics of Barotropically Dominated Rings*, Journal of Physical Oceanography, 24, 5-29.
- Duncombe Rae, C.M. (1991), *Agulhas Retroflexion Rings in the South Atlantic Ocean: An Overview*, South Afr. J. Mar. Sci., 11, 327-344.

- Evans, D.L.; Signorini, S.R. & Miranda, L.B. (1983), *A Note on the Transport of the Brazil Current*, Journal of Physical Oceanography, 13, 1732-1738, 1983.
- Flierl, G.R. (1979), *A Simple Model for a Structure of Warm and Cold Core Rings*, Journal of Geophysical Research, 84 (C2), 781-785.
- Fox, R.W. & McDonald, A.T. (1978), *Introdução à Mecânica dos Fluidos*, Editora Guanabara Dois, 2^a Ed., 562 p.
- Garcia, C.A.E.; Sarma, Y.V.B; Mata, M.M. & Garcia, V.M.T. (2004), *Chlorophyll Variability and Eddies in the Brazil-Malvinas Confluence Region*, Deep-Sea Research-II, 51, 159-172.
- Gill, A. (1982), *Atmosphere-Ocean Dynamics*, International Geophysics Series - Volume 30, Academic Press, 684 p.
- Goni, G.J. & Wainer, I. (2001), *Investigation of the Brazil Current Front Variability from Altimeter Data*, Journal of Geophysical Research, 106 (31), 117-128.
- Gordon, A.L. (1985), *Indian-Atlantic Transfer of Thermocline Water at the Agulhas Retroflexion*, Science, 227, 1030-1033.
- Haidvogel, D.B. & Beckmann, A. (1999), *Numerical Ocean Circulation Modeling*, Imperial College Press, 320 p.
- Hogg, N.G.; Siedler, G. & Zenk, W. (1999), *Circulation and Variability at the Southern Boundary of the Brazil Basin*, Journal of Physical Oceanography, 29, 145-157.
- Hwang, C.; Wu, C. & Kao, R. (2004), *TOPEX/POSEIDON Observations of Mesoscale Eddies over the Subtropical Countercurrent: Kinematic Characteristics of an Anticyclonic Eddy and a Cyclonic Eddy*, Journal of Geophysical Research, 109 (C8013), doi: 10.1029/2003JC002026.
- Hughes, R.L. (1989), *The Hydraulics of Local Separation in a Coastal Current with Application to the Kuroshio Meander*, J. Phys. Oceanography, 19, 1809-1820.
- Kampel, M. & Souza, R.B. (2005), *Observação por Satélite de um Vórtice de Núcleo Quente na Zona de Confluência Brasil-Malvinas durante a Operação Antártica XXI*, Anais do XII Simpósio Brasileiro de Sensoriamento Remoto, Goiânia, Brasil, 16-21 abril 2005, INPE, 3643-3650.
- Kantha, L.H. & Clayson, C.A. (2000), *Numerical Models of Oceans and Oceanic Processes*, International Geophysics Series, Volume 66, Academic Press, 940 p.
- Killworth, P.D. (1983), *On the Motion of Isolated Lenses on a Beta-Plane*, Journal of Physical Oceanography, 13, 368-376.
- Kowalik, Z. & Murty, T.S. (1993), *Numerical Modeling of Ocean Dynamics*, Advanced Series on Ocean Engineering, Volume 5, World Scientific, 480 p.
- Kundu, P.K. & Cohen, I.M. (2008), *Fluid Mechanics*, Academic Press, Elsevier, 4th Ed., 878 p.

- Lamb, H. (1932), *Hydrodynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, 738 p.
- Lebedev, I. & Nof, D. (1996), *The Drifting Confluence Zone*, Journal of Physical Oceanography, 2429-2448.
- Lebedev, I. & Nof, D. (1997), *Collision of Boundary Currents: Beyond a steady state*, Deep Sea Research, 44, 771-791.
- Lee, T.N.; Johns, W.E.; Zantopp, R.J. & Fillenbaun, E.R. (1996), *Moored Observations of Western Boundary Current Variability and Thermohaline Circulation at 26.5° N in the Subtropical North Atlantic*, Journal of Physical Oceanography, 26, 962-983.
- Lee, T.N.; Johns, W.E.; Liu, C.; Zhang, D.; Zantopp, R. & Yang, Y. (2001), *Mean Transport and Seasonal Comparison to the Florida Current*, Journal of Geophysical Research, 106 (C10), 22143-22158.
- Lentini, C.A.D.; Olson, D.B. & Podestá, G.P. (2002), *Statistics of Brazil Current Rings Observed from AVHRR: 1993 to 1998*, Geophysical Research Letters, 29 (16), doi 10.1029/2002GL015221.
- Lentini, C.A.D.; Goni, G.J. & Olson, D.B. (2006), *Investigation of Brazil Current Rings in the Confluence Region*, Journal of Geophysical Research, 111, C06013, doi 10.1029/2005JC002988.
- Lutjeharms, J.R.E. & Gordon, A.L. (1987), *Shedding of an Agulhas Ring Observed at Sea*, Nature, 325, 138-140.
- Lutjeharms, J.R.E. & Ballegooyen, R.C. (1988), *The Retroflexion of the Agulhas Current*, Journal of Physical Oceanography, 18, 1570-1583.
- Lutjeharms, J.R.E. & Roberts, H.R. (1988), *The Natal Pulse: An Extreme Transient on the Agulhas Current*, Journal Geophysical Research, 93, 631-645.
- Lutjeharms, J.R.E.; Penven, P. & Roy, C. (2003), *Modelling the Shear Edge Eddies of the Southern Agulhas Current*, Continental Shelf Research, 23, 1099-1115.
- Lutjeharms, J.R.E. (2006a), *Three Decades of Research on the Greater Agulhas Current*, Ocean Science Discussions, 3, 939-995.
- Lutjeharms, J.R.E. (2006b), *The Agulhas Current*, Springer Verlag, Berlin, 329 p.
- Masuda, A.; Marubayashi, K. & Ishibashi, M. (1987), *Bachelor-modon Type Eddies and Isolated Eddies near the Coast on an f-Plane*, Journal of the Oceanography Society of Japan, 43, 383-394.
- Masuda, A. (1988), *A Skewed Eddy of Batchelor-Modon Type*, Journal of the Oceanography Society of Japan, 43, 383-394.
- Mata, M.M. & Garcia, C.A.E. (1996), *Variabilidade da Topografia Oceânica Superficial no Atlântico Sul Ocidental Observada pela Altimetria TOPEX/POSEIDON*, Anais do VIII Simpósio Brasileiro de Sensoriamento Remoto, Salvador, Brasil, 14-19 abril 1996, INPE, 781-786.

- Mata, M.M. & Tomczak, M. (2000a), *East Australian Current Volume Transports at 30°S: Estimates from the World Ocean Circulation Experiment Hydrographic Sections PR11/P6 and the PCM3 Current Meter Array*, Journal of Geophysical Research, 105 (C2), 28509-28526.
- Mata, M.M. (2000b), *On the Mesoscale Variability of the East Australian Current*, Tese de Doutorado, Flinders University of South Australia, Adelaide, Austrália, 253 p.
- Matano, R.P. (1993), *On the Separation of the Brazil Current from the Coast*, Journal of Physical Oceanography, 23, 79-90.
- Matano, R.P.; Schlax, M.G. & Chelton, D.B. (1993), *Seasonal Variability in the Southwestern Atlantic*, Journal of Geophysical Research, 98 (C10), 18027-18035.
- McDonagh, E.L.; Heywood, K.J. & Meredith, M.P. (1999), *On the Structure, Paths and Fluxes Associated with Agulhas Rings*, Journal of Geophysical Research, 104 (C9), 21007-21020.
- Milne-Thomson, L.M. (1968), *Theoretical Hydrodynamics*, Dover Publications, 744 p.
- Minato, S. (1982), *Geostrophic Adjustment Near the Coast*, J. Oceanography Society of Japan, 38, 225-235.
- Minato, S. (1983), *Geostrophic Response Near the Coast*, Journal of the Oceanography Society of Japan, 39, 141-149.
- Müller, T.J.; Ikeda, Y.; Zangenberg, N. & Nonato, L.V. (1998), *Direct Measurements of Western Boundary Currents off Brazil Between 20°S and 28°S*, Journal of Geophysical Research, 103 (C3), 5429-5437.
- Neumann, G. & Pierson Jr., W.J. (1966), *Principles of Physical Oceanography*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 550 p.
- Nof, D. (1981), *On the Dynamics of Equatorial Outflows with Application to the Amazon's Basin*, Journal of Marine Research, 39 (1), 1-29.
- Nof, D. (1982), *On the β -Induced Movement of Isolated Baroclinic Eddies*, Journal of Physical Oceanography, 11, 1662-1672.
- Nof, D. (1983), *On the Migration of Isolated Eddies with Application to Gulf Stream Rings*, Journal of Marine Research, 41, 399-425.
- Nof, D. (1988a), *Draining Vortices*, Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics, 42, 187-208.
- Nof, D. (1988b), *Eddy-wall Interactions*, Journal of Marine Research, 46, 527-555.
- Nof, D. (1991), *Fission of Single and Multiple Eddies*, Journal of Physical Oceanography, 21, 40-52.
- Nof, D. & Pichevin, T. (1996), *The Retroflexion Paradox*, Journal of Physical Oceanography, 26, 2344-2358.

- Nof, D. (1999), *Strange Encounters of Eddies with Walls*, Journal of Marine Research, 57, 739-761.
- Nof, D. (2000), *Rings and Eddies as Heat Exchange Mechanism*, Fall Course, Department of Oceanography, Florida State University, Tallahassee, Florida (US).
- Nof, D. (2002), *Dominoe Project*, Department of Oceanography, Florida State University, Tallahassee, Florida (US).
- Nof, D. (2008), *Anotações de aula da disciplina de Advanced Topics in Oceanography, Department of Oceanography*, Florida State University, Tallahassee, Florida (US).
- Oliveira, L.R. (2003), *Estudo da Variabilidade da Corrente do Brasil a 28°S*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande, 78 p.
- Oliveira, L.R. (2008), *Energética do Atlântico Sudoeste a partir de Observações Lagrangeanas e de Simulações do Parallel Ocean Climate Model*, Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio Grande, 207 p.
- Olson, D.B. & Evans, R.H. (1986), *Rings of the Agulhas Current*, Deep-Sea Research, 33 (1), 27-42.
- Olson, D.B. (1991), *Rings in the Ocean*, Annu. Rev. Earth Planet. Sci., 19, 283-311.
- Orlanski, I. (1976), *A Simple Boundary Condition for Unbounded Hyperbolic Flows*, J. Comput. Phys., 21, 251-269.
- Pedlosky, J. (1987), *Geophysical Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, New York, 2nd Ed., 710 p.
- Pichevin, T. & Nof, D. (1996), *The Eddy Cannon*, Deep-Sea Research I, 43 (9), 1475-1507.
- Pichevin, T. & Nof, D. (1997), *The Momentum Imbalance Paradox*, Tellus, 49A, 298-319.
- Pichevin, T.; Nof, D. & Lutjeharms, J.R.E. (1999), *Why Are There Agulhas Rings*, Journal of Physical Oceanography, 29, 693-707.
- Radcko, T. & Stern, M. (1998), *On the Propagation of Mesoscale Vortices*, Journal of Fluid Mechanics, 380, 39-57.
- Robinson, A.R. (1983), *Eddies in Marine Science*, Springer Verlag, 616 p.
- Ruijter, W.P.M.; Leeuwen, P.J. & Lutjeharms, J.R.E. (1999), *Generation and Evolution of Natal Pulses: Solitary Meanders in the Agulhas Current*, Journal of Physical Oceanography, 29, 3043-3055.
- Saffman, P. (1979), *The Approach of a Vortex Pair to a Plane Surface in Inviscid Fluid*, Journal of Fluid Mechanics, 92, 497-503.

- Schmidt, A.C.K. (2004), *Interação Margem Continental, Vórtices e Jatos Geofísicos*, Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, 201 p.
- Schouten, M.W.; Ruijter, W.P.M; Van Leeuwen, P.J. & Lutjeharms, J.R.E. (2000), *Translation, Decay and Splitting of Agulhas Rings in the Southeastern Atlantic Ocean*, Journal of Geophysical Research, 105 (C9), 21913-21925.
- Shi, C. & Nof, D. (1993), *The Splitting of Eddies Along Boundaries*, Journal of Marine Research, 51, 771-795.
- Shi, C. & Nof, D. (1994), *The Destruction of Lenses and Generation of Wodons*, Journal of Physical Oceanography, 24, 1120-1136.
- Signorini, S.R. (1978), *On the Circulation and the Volume Transport of the Brazil Current Between the Cape of São Tomé and Guanabara Bay*, Deep-Sea Research, 25, 481-490.
- Silveira, I.C.A.; Schmidt, A.C.K.; Campos, E.J.D; Godoi, S.S. & Ikeda, Y. (2000). *A Corrente do Brasil ao Largo da Costa Leste Brasileira*, Revista Brasileira de Oceanografia, 48(2), 171-183.
- Smith, D.C. & O'Brien, J.J. (1983), *The Interaction of a Two Layer Isolated Mesoscale Eddy With Bottom Topography*, Journal of Physical Oceanography, 13, 1681-1697.
- Souza, R.B. (2005), *Oceanografia por Satélites*, Editora Oficina do Texto, São Paulo (SP), Brasil, 336 p.
- Souza, R.B.; Mata, M.M.; Garcia, C.A.E.; Kampel, M.; Oliveira, E.N. & Lorenzzetti, J.A. (2006), *Multi-sensor Satellite and In Situ Measurements of a Warm Core Ocean Eddy South of the Brazil-Malvinas Confluence Region*, Remote Sensing of Environment, 100, 52-66.
- Stern, M.E. (1975), *Minimal Properties of Planetary Eddies*, Journal of Marine Research, 33, 1-13.
- Stramma, L.; Ikeda, Y. & Peterson, R.G. (1990), *Geostrophic Transport in the Brazil Current Region*, Deep-Sea Research, 37 (12), 1875-1886.
- Tournadre, J.; Mercier, H. & Flament, P. (2000), *Agulhas Ring Trajectories and Evolution from Altimeter Data*, Geoscience and Remote Sensing Symposium, Proceedings of IGARSS 2000, IEEE International 2000, 7, 3193-3195.
- Treguier, A.M.; Boebel, O.; Barnier, B. & Madec, G. (2002), *Agulhas Eddy Fluxes in a 1/6° Atlantic Model*, Deep-Sea Research II, 50, 251-280.
- Umatani, S. & Yamagata, T. (1987), *Evolution of an Isolated Eddy Near a Coast and Its Relevance to the "Kyucho"*, J. Oceanography Society of Japan, 43, 197-203.
- Van Leeuwen, P.J.; Ruijter, W.P.M. & Lutjeharms, J.R.E. (2000), *Natal Pulses and the Formation of Agulhas Rings*, Journal of Geophysical Research, 105 (C3), 6425-6436.

- Vennard, J.K. & Street, R.L. (1978), *Elementos de Mecânica dos Fluidos*, Editora Guanabara Dois, 5ª. Ed, 688 p.
- Wainer, I.; Gent, P. & Goni, G. (2000), *Annual Cycle of the Brazil-Malvinas Confluence Region in the National center for Atmospheric Research Climate System Model*, *Journal of Geophysical Research*, 105 (C11), 26167-26177.
- Witter, D.L. & Gordon, A.L. (1999), *Interannual Variability of South Atlantic Circulation from 4 Years of TOPEX/POSEIDON Satellite Altimeter Observations*, *Journal of Geophysical research*, 104, 20927-20948.
- Wu, H.M.; Overman, E.A. & Zabusky, N.J. (1984), *Steady-state Solutions of the Euler Equations in Two-Dimensions: Rotating and Translating V-states with Limiting Cases. (I) Numerical Algorithms and Results*, *J. Comp. Phys.*, 53, 42-71.
- Yasuda, I.; Okuda, K. & Mizuno, K. (1986), *Numerical Study on the Vortices Near Boundaries – Considerations on Warm Core Rings in the Vicinity of East Coast of Japan*, *Bulletin of Tohoku Regional Fisheries Research Laboratory*, 48, 67-86.
- Zalesak, S.T. (1979), *Fully Multidimensional Flux-corrected Transport Algorithms for Fluids*, *J. Comput. Phys.*, 31, 335-362.
- Zhang, D.; Lee, T.N.; Johns, W.E.; Liu, C. & Zantopp, R. (2001), *The Kuroshio East of Taiwan: Modes of Variability and Relationship to Interior Ocean Mesoscale Eddies*, *Journal of Physical Oceanography*, 31, 1054-1074.

ANEXO A

EQUAÇÕES EM COORDENADAS CILÍNDRICAS

Este capítulo tem como objetivo principal a demonstração detalhada da transformação das equações do momentum, da continuidade, da conservação da vorticidade potencial e da função transporte, originalmente escritas em coordenadas retangulares, para coordenadas cilíndricas. Para tal será primeiramente apresentada a relação entre as coordenadas de um ponto P descritas pelos dois sistemas, conforme mostra a figura A.1 abaixo.

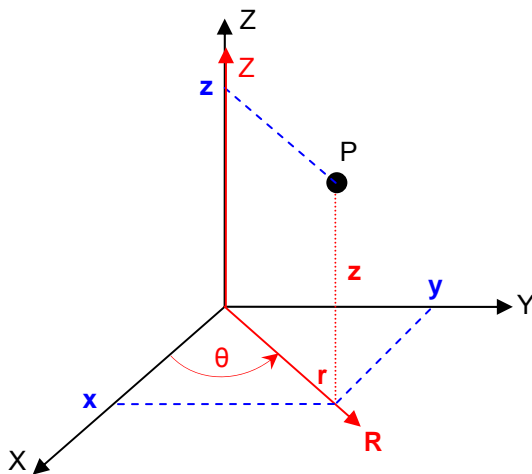


Figura A.1 – Sistemas de coordenadas retangular e cilíndrico. Os eixos do sistema retangular são (X, Y, Z) enquanto os do sistema cilíndrico são (R, θ, Z) , sendo que o eixo em θ é considerado positivo no sentido anti-horário. As coordenadas de um ponto P qualquer são (x, y, z) no sistema retangular, assinaladas em azul na figura, e (r, θ, z) no cilíndrico, assinaladas em vermelho. As relações entre as coordenadas dos dois sistemas são mostradas no texto.

As relações entre as coordenadas retangulares (x, y, z) e as coordenadas cilíndricas (r, θ, z) podem ser retiradas da figura A.1 e fornecem

$$\begin{array}{lcl}
 x = r \cos\theta & & r^2 = x^2 + y^2 \\
 y = r \sin\theta & \longleftrightarrow & \theta = \arctg(y/x) \\
 z = z & & z = z
 \end{array} \quad (A.1)$$

A.1. NOVOS OPERADORES

Como $x = x(r, \theta)$ e $y = y(r, \theta)$ novos operadores derivativos devem ser desenvolvidos. O primeiro novo operador é dado por

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial x} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} . \quad (\text{A.2})$$

Com o conjunto de expressões de (A.1) pode-se escrever

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2)^{1/2} = \frac{1}{2} (x^2 + y^2)^{-1/2} 2x = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = \frac{r \cos \theta}{r} = \cos \theta , \quad (\text{A.3})$$

e ainda

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [\text{tg}^{-1}(y/x)] = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \left[-\frac{y}{x^2} \right] = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{r \sin \theta}{r^2} = -\frac{\sin \theta}{r} . \quad (\text{A.4})$$

Substituindo-se as expressões (A.3) e (A.4) na equação (A.2) resulta

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial x} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial(\cdot)}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta} . \quad (\text{A.5})$$

O segundo novo operador derivativo é expresso por

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial y} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} . \quad (\text{A.6})$$

Novamente com o conjunto de expressões de (A.1) pode-se escrever

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2)^{1/2} = \frac{1}{2} (x^2 + y^2)^{-1/2} 2y = \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = \frac{r \sin \theta}{r} = \sin \theta , \quad (\text{A.7})$$

e ainda:

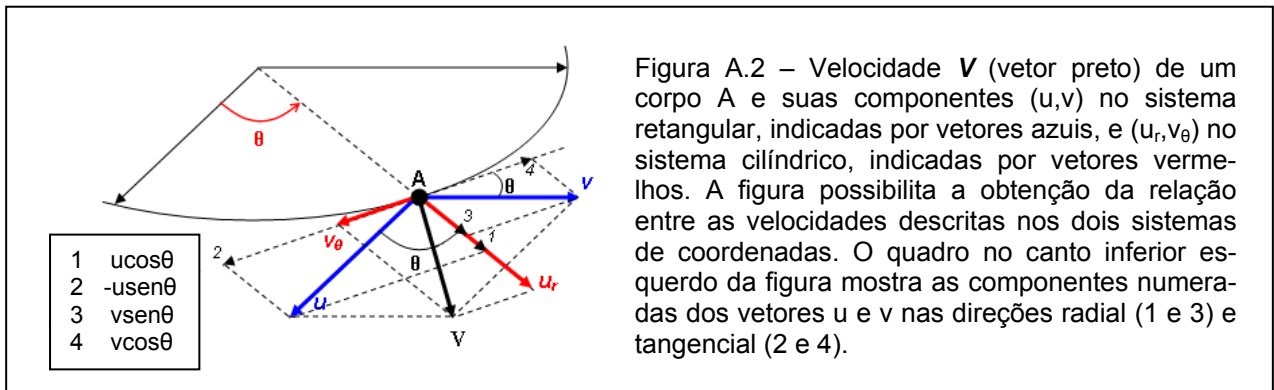
$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [\text{tg}^{-1}(y/x)] = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{r \cos \theta}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r} . \quad (\text{A.8})$$

Substituindo-se as expressões (A.7) e (A.8) na equação (A.6) resulta

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial y} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial(\cdot)}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta} . \quad (\text{A.9})$$

A.2. A RELAÇÃO ENTRE AS VELOCIDADES

A figura A.2 mostra um ponto A que possui uma velocidade horizontal \mathbf{V} , que pode ser expressa, no sistema de coordenadas retangular, por $\mathbf{V} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$, onde (u,v) são as componentes zonal e meridional desta velocidade nas direções (x,y) e (\mathbf{i},\mathbf{j}) são vetores unitários nestas mesmas direções, respectivamente¹. Esta velocidade \mathbf{V} pode também ser expressa no sistema de coordenadas cilíndrico por $\mathbf{V} = u_r\mathbf{r} + v_\theta\mathbf{t}$, onde (u_r,v_θ) são as componentes radial e tangencial (orbital) desta velocidade nas direções (r,θ) e (\mathbf{r},\mathbf{t}) são vetores unitários nestas mesmas direções, respectivamente.



A figura (A.2) permite que uma relação entre estas duas velocidades (definidas em sistemas de coordenadas diferentes) possa ser desenvolvida, o que fornece:

$$\begin{aligned} u_r &= u \cos \theta + v \cos(90^\circ - \theta) = u \cos \theta + v \sin \theta, \\ v_\theta &= -u \sin \theta + v \sin(90^\circ - \theta) = -u \sin \theta + v \cos \theta. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

A conversão entre os dois sistemas de coordenadas é mostrada pelas seguintes equações matriciais:

$$\begin{pmatrix} u_r \\ v_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_r \\ v_\theta \end{pmatrix}. \quad (\text{A.11})$$

¹ Variáveis em negrito caracterizam grandezas vectoriais.

A.3. AS EQUAÇÕES DO MOMENTUM E DA CONTINUIDADE

As equações estacionárias de águas rasas do momentum e da continuidade são:

$$\text{Momentum Zonal:} \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv = -g' \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (\text{A.12})$$

$$\text{Momentum Meridional:} \quad u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu = -g' \frac{\partial h}{\partial y} \quad \text{e} \quad (\text{A.13})$$

$$\text{Continuidade} \quad \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0. \quad (\text{A.14})$$

O operador $u\partial(\cdot)/\partial x$, com a utilização das expressões (A.5) e (A.11), resulta

$$u \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} = [u_r \cos\theta - v_\theta \sin\theta] \left[\cos\theta \frac{\partial(\cdot)}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta} \right], \text{ seguida de}$$

$$u \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} = u_r \cos^2\theta \frac{\partial(\cdot)}{\partial r} - \frac{u_r \sin\theta \cos\theta}{r} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta} - v_\theta \sin\theta \cos\theta \frac{\partial(\cdot)}{\partial r} + \frac{v_\theta \sin^2\theta}{r} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta}. \quad (\text{A.15})$$

O operador $v\partial(\cdot)/\partial y$, com a utilização das expressões (A.9) e (A.11), resulta

$$v \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} = [u_r \sin\theta + v_\theta \cos\theta] \left[\sin\theta \frac{\partial(\cdot)}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta} \right], \text{ seguida de}$$

$$v \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} = u_r \sin^2\theta \frac{\partial(\cdot)}{\partial r} + \frac{u_r \sin\theta \cos\theta}{r} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta} + v_\theta \sin\theta \cos\theta \frac{\partial(\cdot)}{\partial r} + \frac{v_\theta \cos^2\theta}{r} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta}. \quad (\text{A.16})$$

A soma das expressões (A.15) e (A.16) define o operador $u\partial(\cdot)/\partial x + v\partial(\cdot)/\partial y$, cuja expressão final é dada por

$$u \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} + v \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} = u_r \frac{\partial(\cdot)}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta}. \quad (\text{A.17})$$

Com a utilização dos operadores definidos por (A.5) e (A.17) na equação (A.12) do momentum zonal, resulta

$$u_r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - fv = -g' \left[\cos\theta \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} \right]. \quad (\text{A.18})$$

A eliminação da componente zonal “u” em (A.18), com a utilização da equação matricial (A.11), traz como resultado

$$\begin{aligned} u_r \frac{\partial}{\partial r} [u_r \cos\theta - v_\theta \sin\theta] + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [u_r \cos\theta - v_\theta \sin\theta] - \dots \\ \dots - f [u_r \sin\theta + v_\theta \cos\theta] = -g' \left[\cos\theta \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

O desenvolvimento da expressão (A.19) a transforma em

$$\begin{aligned} u_r \cos\theta \frac{\partial u_r}{\partial r} - u_r \sin\theta \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta \cos\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta u_r \sin\theta}{r} - \frac{v_\theta \sin\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2 \cos\theta}{r} - \dots \\ \dots - fu_r \sin\theta - fv_\theta \cos\theta = -g' \cos\theta \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{g' \sin\theta}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

A complexa equação (A.20) pode ser ainda escrita na forma

$$\begin{aligned} \cos\theta \left[u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} - fv_\theta + g' \frac{\partial h}{\partial r} \right] - \dots \\ \dots - \sin\theta \left[u_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta u_r}{r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + fu_r + \frac{g'}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} \right] = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Para que a expressão (A.21) se verifique é necessário que as duas equações abaixo sejam válidas:

$$u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} - fv_\theta + g' \frac{\partial h}{\partial r} = 0 \quad \text{e} \quad (\text{A.22})$$

$$u_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{u_r v_\theta}{r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + fu_r + \frac{g'}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} = 0. \quad (\text{A.23})$$

As expressões (A.22) e (A.23) são as equações do momentum em coordenadas cilíndricas, conforme era desejado demonstrar. Estas expressões são as mesmas apresentadas em [Flierl \(1979\)](#). Estas equações são introduzidas no Capítulo 3 deste trabalho. A utilização do mesmo procedimento na equação (A.13) do momentum meridional também conduz a este conjunto de equações.

A equação (estacionária) da continuidade, dada pela equação (A.14), com a utilização dos operadores (A.5) e (A.9) e da equação matricial (A.11), resulta

$$\begin{aligned} & \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} [hU\cos\theta - hV\sin\theta] - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [hU\cos\theta - hV\sin\theta] + \dots \\ & \dots + \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} [hU\sin\theta + hV\cos\theta] + \frac{\cos\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [hU\sin\theta + hV\cos\theta] = 0 . \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

A expansão dos termos de (A.24) resulta na enorme expressão

$$\begin{aligned} & \cos\theta \left[u_r \cos\theta \frac{\partial h}{\partial r} + h \cos\theta \frac{\partial u_r}{\partial r} - v_\theta \sin\theta \frac{\partial h}{\partial r} - h \sin\theta \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right] - \dots \\ & \dots - \frac{\sin\theta}{r} \left[u_r \cos\theta \frac{\partial h}{\partial \theta} - h u_r \sin\theta + h \cos\theta \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - h v_\theta \cos\theta - h \sin\theta \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - v_\theta \sin\theta \frac{\partial h}{\partial \theta} \right] + \dots \\ & \dots + \sin\theta \left[u_r \sin\theta \frac{\partial h}{\partial r} + h \sin\theta \frac{\partial u_r}{\partial r} + v_\theta \cos\theta \frac{\partial h}{\partial r} + h \cos\theta \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right] + \dots \\ & \dots + \frac{\cos\theta}{r} \left[h \sin\theta \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_r \sin\theta \frac{\partial h}{\partial \theta} + u_r h \cos\theta + h \cos\theta \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_\theta \cos\theta \frac{\partial h}{\partial \theta} - h v_\theta \sin\theta \right] = 0 , \end{aligned}$$

que, com a reunião dos termos semelhantes, transforma-se em

$$\begin{aligned} & \frac{\partial h}{\partial r} [u_r \cos^2\theta - v_\theta \sin\theta \cos\theta + u_r \sin^2\theta + v_\theta \sin\theta \cos\theta] + \frac{\partial u_r}{\partial r} [h \cos^2\theta + h \sin^2\theta] + \dots \\ & \dots + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} [-h \sin\theta \cos\theta + h \sin\theta \cos\theta] + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} [-u_r \sin\theta \cos\theta + v_\theta \sin^2\theta + u_r \sin\theta \cos\theta + \dots \\ & \dots + v_\theta \cos^2\theta] + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} [-h \sin\theta \cos\theta + h \sin\theta \cos\theta] + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} [h \sin^2\theta + h \cos^2\theta] + \dots \\ & \dots + \frac{1}{r} [h u_r \sin^2\theta + h v_\theta \sin\theta \cos\theta + h u_r \cos^2\theta - h v_\theta \sin\theta \cos\theta] = 0 , \end{aligned}$$

a qual, após a eliminação de vários termos, finalmente resulta em

$$u_r \frac{\partial h}{\partial r} + h \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} + \frac{h}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{hu_r}{r} = 0 . \quad (\text{A.25})$$

A equação (A.25) pode ser reescrita na forma

$$\frac{\partial(hu_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(hv_\theta)}{\partial \theta} + \frac{hu_r}{r} = 0 . \quad (\text{A.26})$$

Considerando-se que $\frac{1}{r} \frac{\partial(rhu_r)}{\partial r} = \frac{hu_r}{r} + \frac{\partial(hu_r)}{\partial r}$ a equação (A.26) transforma-se em

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rhu_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(hv_\theta)}{\partial \theta} = 0 . \quad (\text{A.27})$$

A equação (A.27) é a equação da continuidade expressa em coordenadas cilíndricas, conforme introduzida no Capítulo 3 e apresentada em [Flierl \(1979\)](#).

A.4. A EQUAÇÃO DA CONSERVAÇÃO DA VORTICIDADE POTENCIAL

A equação da conservação da vorticidade potencial ξ em coordenadas retangulares é expressa por

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial v / \partial x - \partial u / \partial y + (f_0 + \beta y)}{h} \right] = 0 . \quad (\text{A.28})$$

A aplicação da expressão (A.1), dos operadores (A.5) e (A.9) e da equação matricial (A.11) na expressão no colchete da equação (A.28), que define ξ , resulta em

$$\begin{aligned} \xi = & \frac{\cos\theta}{h} \frac{\partial}{\partial r} [u_r \sin\theta + v_\theta \cos\theta] - \frac{\sin\theta}{hr} \frac{\partial}{\partial \theta} [u_r \sin\theta + v_\theta \cos\theta] - \dots \\ & \dots - \frac{\sin\theta}{h} \frac{\partial}{\partial r} [u_r \cos\theta - v_\theta \sin\theta] - \frac{\cos\theta}{hr} \frac{\partial}{\partial \theta} [u_r \cos\theta - v_\theta \sin\theta] + \frac{1}{h} [f_0 + \beta r \sin\theta] . \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

A expansão dos termos que compõem a equação (A.29) traz como resultado

$$\xi = \frac{1}{h} \left[\begin{aligned} & \text{sen}\theta \cos\theta \frac{\partial u_r}{\partial r} + \cos^2\theta \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{\text{sen}^2\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_r \text{sen}\theta \cos\theta}{r} - \dots \\ & \dots - \frac{\text{sen}\theta \cos\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\theta \text{sen}^2\theta}{r} - \text{sen}\theta \cos\theta \frac{\partial u_r}{\partial r} + \text{sen}^2\theta \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \dots \\ & \dots - \frac{\cos^2\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_r \text{sen}\theta \cos\theta}{r} + \frac{\text{sen}\theta \cos\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\theta \cos^2\theta}{r} + f_0 + \beta r \text{sen}\theta \end{aligned} \right],$$

que seguida da eliminação de vários termos semelhantes conduz a

$$\xi = \frac{1}{h} \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{v_\theta}{r} + f_0 + \beta r \text{sen}\theta \right]. \quad (\text{A.30})$$

O operador $\frac{d(\cdot)}{dt} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + u \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} + v \frac{\partial(\cdot)}{\partial y}$, com a utilização de (A.17), resulta em

$$\frac{d(\cdot)}{dt} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + u_r \frac{\partial(\cdot)}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta}. \quad (\text{A.31})$$

A aplicação deste novo operador na expressão (A.28), supondo-se condição estacionária, e ainda utilizando-se (A.30), tem como resultado

$$\left[u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \left[\frac{\partial v_\theta / \partial r - (1/r)(\partial u_r / \partial \theta) + (v_\theta / r) + f_0 + \beta r \text{sen}\theta}{h} \right] = 0. \quad (\text{A.32})$$

A equação (A.32) expressa a conservação de vorticidade potencial em coordenadas cilíndricas, conforme introduzida no Capítulo 3 e apresentada em [Flierl \(1979\)](#).

A.5. A FUNÇÃO TRANSPORTE

Finalmente, as equações da função transporte ψ em coordenadas retangulares são

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = vh \quad \text{e} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -uh. \quad (\text{A.33ab})$$

A aplicação do operador definido em (A.5) e da equação (A.11) na expressão (A.33a) resulta

$$\cos\theta \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = (u_r \sin\theta + v_\theta \cos\theta)h. \quad (\text{A.34})$$

A análise dos dois lados da equação (A.34) conduz as seguintes expressões da função transporte, descritas em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = v_\theta h \quad \text{e} \quad -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = u_r h. \quad (\text{A.35})$$

As expressões (A.35) reproduzem aquelas apresentadas em [Flierl \(1979\)](#). Partindo-se de (A.33b) e utilizando-se o operador definido em (A.9) e a equação (A.11) obtém-se as mesmas expressões (A.35). Estas últimas equações encerram as demonstrações deste anexo.

ANEXO B

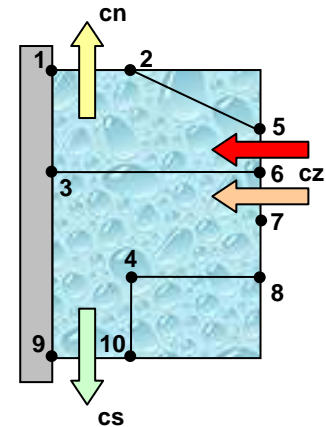
FUNÇÃO CORRENTE E TRANSPORTE

A utilização da função corrente ψ no cálculo do transporte entre dois pontos, a partir da diferença entre as funções corrente destes pontos, exige um certo cuidado na modelagem analítica quanto ao sinal matemático deste transporte. A equação (3.37, página 43), aqui reproduzida, representa o balanço de massa no domínio de estudo.

$$\int_A^B hvdx + \int_C^D hvdx = \int_B^C hudy. \quad (\text{B.1})$$

A figura B.1 mostra de forma esquemática o domínio de estudo D_0 utilizado neste trabalho, com os mesmos 10 pontos assinalados na figura 6.3 (página 123). Os transportes entre os pontos 1 e 2 (para norte), 5 e 6 (para oeste), 6 e 7 (para oeste) e 9 e 10 (para sul) do domínio de estudo D_0 . Entre os pontos 7 e 8 o transporte da corrente zonal é nulo.

Figura B.1 – Transportes no domínio de estudo. O transporte líquido da corrente zonal (cz) entre os pontos 5 e 6 (seta vermelha) corresponde ao transporte da corrente meridional para norte (cn) entre os pontos 1 e 2 (seta amarela). O transporte líquido da corrente zonal entre os pontos 6 e 7 (seta laranja) corresponde ao transporte da corrente meridional para sul (cs) entre os pontos 9 e 10 (seta verde). O sinal matemático envolvido na correspondência entre estes transportes deve ser avaliado com cuidado (ver texto deste anexo). O transporte da corrente zonal entre os pontos 7 e 8 é nulo.



A utilização das expressões $\partial\psi/\partial x = hv$ e $\partial\psi/\partial y = -hu$ na equação (B.1) resulta

$$\int_9^{10} \frac{\partial\psi}{\partial x} dx - \int_1^2 \frac{\partial\psi}{\partial x} dx = - \int_8^5 \frac{\partial\psi}{\partial y} dy. \quad (\text{B.2})$$

A expressão (B.2) pode ser então reescrita na forma

$$[\psi_{10} - \psi_9] - [\psi_2 - \psi_1] = [\psi_8 - \psi_5]. \quad (\text{B.3})$$

Como $\psi_9 = \psi_1$ (ver figura B.1) a equação (B.3) resulta $[\psi_{10} - \psi_2] = [\psi_8 - \psi_5]$. Mas tem-se ainda que $\psi_{10} = \psi_8$ e $\psi_2 = \psi_5$ o que resulta $[\psi_8 - \psi_5] = [\psi_8 - \psi_5]$ e a conservação de massa é verificada.

O lado direito da equação (B.3), por conveniência, pode ser modificado para

$$[\psi_{10} - \psi_9] - [\psi_2 - \psi_1] = [\psi_8 - \psi_7] + [\psi_7 - \psi_6] + [\psi_6 - \psi_5]. \quad (\text{B.4})$$

O transporte entre os pontos 7 e 8 da corrente zonal é nulo e a equação (B.4) mostra a correspondência entre os transportes entre as duas áreas de transporte líquido da corrente zonal e os transportes paralelos à parede, ou seja, tem-se que

$$\begin{aligned} [\psi_{10} - \psi_9] &= [\psi_7 - \psi_6] \\ [\psi_1 - \psi_2] &= [\psi_6 - \psi_5] \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

A expressão (6.54, página 130) do Capítulo 6 corresponde à parcela $[\psi_{10} - \psi_9]$ e a expressão (6.55, página 130) corresponde à parcela $[\psi_6 - \psi_7]$. Como $[\psi_{10} - \psi_9] = [\psi_7 - \psi_6]$, conforme mostra a equação (B.5), explica-se o sinal negativo introduzido na equação (6.56, página 130). Na situação da corrente paralela à parede, no sentido da linha do Equador, a expressão (6.29, página 125) correspondia à parcela $[\psi_2 - \psi_1]$ e a expressão (6.33, página 125) correspondia à parcela $[\psi_5 - \psi_6]$. Como a equação (B.5) mostra que $[\psi_1 - \psi_2] = [\psi_6 - \psi_5]$ nenhum sinal negativo foi introduzido quando daquele desenvolvimento.