Matemática das Aproximações

Sistemas de Equações Lineares

3 Sistemas de Equações Lineares:

3.1 Introdução:

Um sistema de equações lineares S_n pode ser representado por:

3 Sistema de Equações Lineares:

3.1 Introdução:

Um sistema de equações lineares S_n pode ser representado por:

$$S_n : \begin{cases} a_{11}x_1 \\ \\ \\ \\ \end{cases}$$

3 Sistema de Equações Lineares:

3.1 Introdução:

Um sistema de equações lineares S_n pode ser representado por:

$$S_n : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \\ \\ \end{cases}$$

3 Sistema de Equações Lineares:

3.1 Introdução:

Um sistema de equações lineares S_n pode ser representado por:

$$S_n : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \\ \\ \\ \end{cases}$$

3 Sistema de Equações Lineares:

3.1 Introdução:

Um sistema de equações lineares S_n pode ser representado por:

$$S_n : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \\ \\ \end{cases}$$

3 Sistema de Equações Lineares:

3.1 Introdução:

Um sistema de equações lineares S_n pode ser representado por:

$$S_n : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

3 Sistema de Equações Lineares:

3.1 Introdução:

Um sistema de equações lineares S_n pode ser representado por:

$$S_n : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

ou pela forma compacta:

$$S_n : \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

3 Sistema de Equações Lineares:

3.1 Introdução:

Um sistema de equações lineares S_n pode ser representado por:

$$S_n : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

ou pela forma compacta:

$$S_n : \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

Observe que, para i = 1, j varia de 1 até n, obtendo-se a 1ª equação.

3 Sistema de Equações Lineares:

3.1 Introdução:

Um sistema de equações lineares S_n pode ser representado por:

$$S_n : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

ou pela forma compacta:

$$S_n : \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

Agora, para i = 2, j varia de 1 até n, obtendo-se a 2ª equação e, assim, segue.

ou pela forma matricial:

$$S_n : Ax = b$$

ou pela forma matricial:

$$S_n : Ax = b$$

$$S_n : \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Note que, as linhas da matriz A multiplicam o vetor x e igualam-se, respectivamente, aos elementos do vetor b.

ou pela forma matricial:

$$S_n : Ax = b$$

$$S_n : \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

onde A é uma matriz quadrada de ordem n x n, x e b são vetores de ordem n. Os elementos a_{ij} são chamados de coeficientes das incógnitas x_i e os b_i são os termos independentes.

Um sistema de equações lineares pode ser classificado:

- **Compatível:** quando tem solução.
  - **Determinado:** solução única.
  - **Indeterminado:** infinitas soluções.
- **Incompatível:** não tem solução.

Exemplo 1:

$$x_1 + x_2 = 0 \qquad (1)$$

$$x_1 - x_2 = 0 \qquad (2)$$

Exemplo 1:

$$x_1 + x_2 = 0$$
$$x_1 - x_2 = 0$$

$$Ax = b \quad \rightarrow \quad \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Exemplo 1:

$$x_1 + x_2 = 0 \qquad\qquad Ax = b \quad \rightarrow \quad \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

$$x_1 - x_2 = 0 \qquad (2)$$

Da equação (2), obtém-se:

$$x_2 = x_1 \qquad (3)$$

Exemplo 1:

$$x_1 + x_2 = 0 \qquad\qquad Ax = b \quad \rightarrow \quad \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

$$x_1 - x_2 = 0 \qquad (2)$$

Da equação (2), obtém - se :

$$x_2 = x_1 \qquad (3)$$

e substituindo a equação (3) em (1), tem - se :

$$x_1 + x_1 = 0$$

$$x_1 = 0$$

Exemplo 1:

$$x_1 + x_2 = 0 \qquad\qquad Ax = b \quad \rightarrow \quad \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

$$x_1 - x_2 = 0 \qquad (2)$$

Da equação (2) obtem-se:

$$x_2 = x_1 \qquad (3)$$

e substituindo a equação (3) em (1) tem-se:

$$x_1 + x_1 = 0$$

$$x_1 = 0$$

considerando a equação (3), obtém-se:

$$x_2 = 0.$$

Exemplo 1:

$$x_1 + x_2 = 0 \qquad\qquad Ax = b \quad \rightarrow \quad \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

$$x_1 - x_2 = 0 \qquad (2)$$

Da equação (2), obtém-se:

$$x_2 = x_1 \qquad (3)$$

e, substituindo a equação (3) em (1), tem-se:

$$x_1 + x_1 = 0$$

$$x_1 = 0$$

considerando a equação (3), obtém-se:

$$x_2 = 0.$$

Conclui-se que as retas (1) e (2) se cruzam no ponto (0, 0).

Solução:

$x = [0 \quad 0]^T \rightarrow$ O sistema é compatível e determinado.

Exemplo 2:

$$x_1 + x_2 = 0 \qquad (1)$$

$$2x_1 + 2x_2 = 0 \qquad (2)$$

Exemplo 2:

$$x_1 + x_2 = 0 \qquad (1)$$

$$2x_1 + 2x_2 = 0 \qquad (2)$$

Da equação (1), obtém-se:

$$x_2 = -x_1 \qquad (3)$$

Exemplo 2:

$$x_1 + x_2 = 0 \qquad (1)$$

$$2x_1 + 2x_2 = 0 \qquad (2)$$

Da equação (1), obtém-se:

$$x_2 = -x_1 \qquad (3)$$

e, substituindo a equação (3) em (2), tem-se:

$$2x_1 - 2x_1 = 0$$

$$0x_1 = 0$$

Exemplo 2:

$$x_1 + x_2 = 0 \qquad (1)$$

$$2x_1 + 2x_2 = 0 \qquad (2)$$

Da equação (1), obtém-se:

$$x_2 = -x_1 \qquad (3)$$

e, substituindo a equação (3) em (2), tem-se:

$$2x_1 - 2x_1 = 0$$

$$0x_1 = 0$$

Logo, o sistema é compatível e indeterminado - tem infinitas soluções.

Conclui-se que as retas (1) e (2) são paralelas e coincidentes.

Exemplo 3:

$$x_1 + x_2 = 0 \qquad (1)$$

$$x_1 + x_2 = 1 \qquad (2)$$

Exemplo 3:

$$x_1 + x_2 = 0 \qquad (1)$$

$$x_1 + x_2 = 1 \qquad (2)$$

Da equação (1), obtém-se:

$$x_2 = -x_1 \qquad (3)$$

Exemplo 3:

$$x_1 + x_2 = 0 \qquad (1)$$

$$x_1 + x_2 = 1 \qquad (2)$$

Da equação (1), obtém-se:

$$x_2 = -x_1 \qquad (3)$$

e substituindo a equação (3) em (2), tem-se:

$$x_1 - x_1 = 1$$

$$0x_1 = 1$$

Exemplo 3:

$$x_1 + x_2 = 0 \qquad (1)$$

$$x_1 + x_2 = 1 \qquad (2)$$

Da equação (1), obtém-se:

$$x_2 = -x_1 \qquad (3)$$

e, substituindo a equação (3) em (2), tem-se:

$$x_1 - x_1 = 1$$

$$0x_1 = 1$$

Logo, o sistema é incompatível.

Conclui-se que as retas (1) e (2) são paralelas.

3.2 Sistemas Triangulares:

No sistema S_n: $Ax = b$, a matriz $A = a_{ij}$ pode assumir as seguintes características:

3.2 Sistemas Triangulares:

No sistema S_n: $Ax = b$, a matriz $A = a_{ij}$ pode assumir as seguintes características:

- Se $a_{ij} = 0$ para $i > j$; $i, j = 1, 2, 3, \ldots , n$ tem-se um sistema triangular superior.

3.2 Sistemas Triangulares:

No sistema S_n: $Ax = b$, a matriz $A = A_{ij}$ pode assumir as seguintes características:

- Se $a_{ij} = 0$ para $i > j$; $i, j = 1, 2, 3, \ldots, n$ tem-se um sistema triangular superior.

$$S_n : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

- Se $a_{ij} = 0$ para $i < j$; $i, j = 1, 2, 3, \ldots, n$ tem-se um sistema triangular inferior.

- Se $a_{ij} = 0$ para $i < j$; $i, j = 1, 2, 3, \ldots, n$ tem-se um sistema triangular inferior.

$$S_n : \begin{cases} a_{11}x_1 & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = b_2 \\ \quad \ldots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

Exemplo:

Resolver genericamente um sistema triangular superior 4x4 e, posteriormente, generalizar para um sistema n x n.

Exemplo:

Resolver genericamente um sistema triangular superior 4x4 e, posteriormente, generalizar para um sistema n x n.

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \\
a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2 \\
a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3 \\
a_{44}x_4 &= b_4
\end{aligned}
$$

Exemplo:

Resolver genericamente um sistema triangular superior 4x4 e, posteriormente, generalizar para um sistema *n* x *n*.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2 \\ a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3 \\ a_{44}x_4 &= b_4 \end{aligned}$$

Explicitando x_4 da 4º equação, obtém-se:

$$x_4 = \frac{b_4}{a_{44}}$$

Exemplo:

Resolver genericamente um sistema triangular superior 4x4 e, posteriormente, generalizar para um sistema *n* x *n*.

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \\
a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2 \\
a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3 \\
a_{44}x_4 &= b_4
\end{aligned}
$$

Explicitando x_4 da 4º equação, x_3 da 3º equação, obtém-se:

$$x_4 = \frac{b_4}{a_{44}}$$

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{34}x_4}{a_{33}}$$

Explicitando x_4, x_3 e x_2, respectivamente, da 4º, 3º e 2º equações:

$$x_4 = \frac{b_4}{a_{44}}$$

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{34}x_4}{a_{33}}$$

$$x_2 = \frac{b_2 - (a_{23}x_3 + a_{24}x_4)}{a_{22}}$$

Explicitando x_4, x_3, x_2 e x_1, respectivamente, da 4º, 3º, 2º e 1º equações:

$$x_4 = \frac{b_4}{a_{44}}$$

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{34}x_4}{a_{33}}$$

$$x_2 = \frac{b_2 - (a_{23}x_3 + a_{24}x_4)}{a_{22}}$$

$$x_1 = \frac{b_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4)}{a_{11}}$$

Explicitando x_4, x_3, x_2 e x_1, respectivamente, da 4º, 3º, 2º e 1º equações:

$$x_4 = \frac{b_4}{a_{44}}$$

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{34}x_4}{a_{33}}$$

$$x_2 = \frac{b_2 - (a_{23}x_3 + a_{24}x_4)}{a_{22}}$$

$$x_1 = \frac{b_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4)}{a_{11}}$$

Fórmula Compacta:

Explicitando x_4, x_3, x_2 e x_1, respectivamente, da 4º, 3º, 2º e 1º equações:

$$x_4 = \frac{b_4}{a_{44}}$$

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{34}x_4}{a_{33}}$$

$$x_2 = \frac{b_2 - (a_{23}x_3 + a_{24}x_4)}{a_{22}}$$

$$x_1 = \frac{b_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4)}{a_{11}}$$

Expressão utilizada para obter x_4.

Fórmula Compacta: $x_4 = \dfrac{b_4}{a_{44}} \quad ; \quad (i = 4)$

Explicitando x_4, x_3, x_2 e x_1, respectivamente, da 4º, 3º, 2º e 1º equações:

$$x_4 = \frac{b_4}{a_{44}}$$

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{34}x_4}{a_{33}}$$

$$x_2 = \frac{b_2 - (a_{23}x_3 + a_{24}x_4)}{a_{22}}$$

$$x_1 = \frac{b_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4)}{a_{11}}$$

Expressão utilizada para obter x_4.

Fórmula compacta: $x_4 = \dfrac{b_4}{a_{44}} \quad ; \quad (i = 4)$

Expressão utilizada para obter x_3, x_2 e x_1.

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{4} a_{ij}x_j}{a_{ii}} \quad ; \quad i = 3,\ 2,\ 1$$

Então, generalizando, a fórmula compacta para um sistema n x n é:

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}} \quad ; \quad (i = n) \\ \\ x_i = \dfrac{b_i - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}} \quad ; \quad i = n-1,\ n-2,\ \ldots,\ 1 \end{cases}$$

$x = [x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n]^T$ é a solução.

Observações:

- Um sistema triangular é compatível e determinado se:

$a_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Se todos os termos da diagonal principal da matriz triangular são diferentes de zero.

Observações:

- Um sistema triangular é compatível e determinado se:

  $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

- Se $a_{ii} = 0$ tem-se os seguintes casos:

  a) $b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j = 0 \rightarrow$ o sistema é compatível e indeterminado.

Observações:

- Um sistema triangular é compatível e determinado se:

  $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

- Se $a_{ii} = 0$ tem-se os seguintes casos:

  a) $b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j = 0 \rightarrow$ o sistema é compatível e indeterminado.

  b) $b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j \neq 0 \rightarrow$ o sistema é incompatível.

Exemplo:

1) Resolver o seguinte sistema triangular:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 &= -10 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 &= -1 \\ 4x_3 - 5x_4 &= 3 \\ 2x_4 &= 2 \end{aligned}$$

Exemplo:

1) Resolver o seguinte sistema triangular:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + \ \ x_4 &= -10 \\ x_2 + \ \ x_3 - 2x_4 &= -1 \\ 4x_3 - 5x_4 &= \ \ 3 \\ 2x_4 &= \ \ 2 \end{aligned}$$

Solução:

$2x_4 = 2 \qquad\qquad \rightarrow \quad x_4 = 1$

Na 4ª equação do sistema,
basta explicitar x_4.

Exemplo:

1) Resolver o seguinte sistema triangular:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + \quad x_4 &= -10 \\ x_2 + \ x_3 - 2x_4 &= -1 \\ 4x_3 - 5x_4 &= \ \ 3 \\ 2x_4 &= \ \ 2 \end{aligned}$$

Solução:

$2x_4 = 2 \qquad\qquad \rightarrow \quad x_4 = 1$

$4x_3 - 5*1 = 3 \qquad\qquad \rightarrow \quad x_3 = 2$

Na 3ª equação do sistema, substituir x_4 e explicitar x_3.

Exemplo:

1) Resolver o seguinte sistema triangular:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + \quad x_4 &= -10 \\ x_2 + \; x_3 - 2x_4 &= -1 \\ 4x_3 - 5x_4 &= \;\; 3 \\ 2x_4 &= \;\; 2 \end{aligned}$$

Solução:

$2x_4 = 2 \qquad \rightarrow \quad x_4 = 1$

$4x_3 - 5*1 = 3 \qquad \rightarrow \quad x_3 = 2$

$x_2 + 2 - 2*1 = -1 \qquad \rightarrow \quad x_2 = -1$

Na 2ª equação do sistema, substituir x_3 e x_4 e explicitar x_2.

Exemplo:

1) Resolver o seguinte sistema triangular:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 &= -10 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 &= -1 \\ 4x_3 - 5x_4 &= 3 \\ 2x_4 &= 2 \end{aligned}$$

Solução:

$$2x_4 = 2 \quad \rightarrow \quad x_4 = 1$$

$$4x_3 - 5*1 = 3 \quad \rightarrow \quad x_3 = 2$$

$$x_2 + 2 - 2*1 = -1 \quad \rightarrow \quad x_2 = -1$$

$$3x_1 + 4(-1) - 5*2 + 1 = -10 \quad \rightarrow \quad x_1 = 1$$

Na 1ª equação do sistema, substituir x_2, x_3 e x_4 e explicitar x_1.

Exemplo:

1) Resolver o seguinte sistema triangular:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + \ \ x_4 &= -10 \\ x_2 + \ \ x_3 - 2x_4 &= -1 \\ 4x_3 - 5x_4 &= \ \ 3 \\ 2x_4 &= \ \ 2 \end{aligned}$$

Solução:

$$2x_4 = 2 \qquad \rightarrow \qquad x_4 = 1$$

$$4x_3 - 5*1 = 3 \qquad \rightarrow \qquad x_3 = 2$$

$$x_2 + 2 - 2*1 = -1 \qquad \rightarrow \qquad x_2 = -1$$

$$3x_1 + 4(-1) - 5*2 + 1 = -10 \qquad \rightarrow \qquad x_1 = 1$$

$x = [1 \quad -1 \quad 2 \quad 1]^T$ é o vetor solução do sistema.

Exemplo:

2) Resolver o seguinte sistema triangular superior:

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= -4 \\
x_2 + x_3 - 3x_4 &= -1 \\
2x_3 - 2x_4 &= 4 \\
2x_4 &= 4
\end{aligned}
$$

Exemplo:

2) Resolver o seguinte sistema triangular superior:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= -4 \\ x_2 + x_3 - 3x_4 &= -1 \\ 2x_3 - 2x_4 &= 4 \\ 2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

Solução:

$2x_4 = 4 \qquad \rightarrow \quad x_4 = 2$

Na 4ª equação do sistema, basta explicitar x_4.

Exemplo:

2) Resolver o seguinte sistema triangular superior:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= -4 \\ x_2 + x_3 - 3x_4 &= -1 \\ 2x_3 - 2x_4 &= 4 \\ 2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

Solução:

$$2x_4 = 4 \qquad \rightarrow \qquad x_4 = 2$$

$$2x_3 - 2*2 = 4 \qquad \rightarrow \qquad x_3 = 4$$

Na 3ª equação do sistema,
substituir x_4 e explicitar x_3.

Exemplo:

2) Resolver o seguinte sistema triangular superior:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= -4 \\ x_2 + x_3 - 3x_4 &= -1 \\ 2x_3 - 2x_4 &= 4 \\ 2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

Solução:

$2x_4 = 4 \qquad \rightarrow \quad x_4 = 2$

$2x_3 - 2*2 = 4 \qquad \rightarrow \quad x_3 = 4$

$x_2 + 4 - 3*2 = -1 \qquad \rightarrow \quad x_2 = 1$

Na 2ª equação do sistema, substituir x_3 e x_4 e explicitar x_2.

Exemplo:

2) Resolver o seguinte sistema triangular superior:

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= -4 \\
x_2 + x_3 - 3x_4 &= -1 \\
2x_3 - 2x_4 &= 4 \\
2x_4 &= 4
\end{aligned}
$$

Solução:

$2x_4 = 4 \quad \rightarrow \quad x_4 = 2$

$2x_3 - 2*2 = 4 \quad \rightarrow \quad x_3 = 4$

$x_2 + 4 - 3*2 = -1 \quad \rightarrow \quad x_2 = 1$

$2x_1 + 2*1 - 3*4 + 2 = -4 \quad \rightarrow \quad x_1 = 2$

Na 1ª equação do sistema, substituir x_2, x_3 e x_4 e explicitar x_1.

Exemplo:

2) Resolver o seguinte sistema triangular superior:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= -4 \\ x_2 + x_3 - 3x_4 &= -1 \\ 2x_3 - 2x_4 &= 4 \\ 2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

Solução:

$2x_4 = 4 \quad \rightarrow \quad x_4 = 2$

$2x_3 - 2*2 = 4 \quad \rightarrow \quad x_3 = 4$

$x_2 + 4 - 3*2 = -1 \quad \rightarrow \quad x_2 = 1$

$2x_1 + 2*1 - 3*4 + 2 = -4 \quad \rightarrow \quad x_1 = 2$

$x = [2 \quad 1 \quad 4 \quad 2]^T$ é o vetor solução.

3) Resolver os sistemas triangulares abaixo:

3.1)
$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 8 \\
x_2 + 2x_3 &= 5 \\
4x_3 &= 4
\end{aligned}
$$

3.2)
$$
\begin{aligned}
x_1 &= 1 \\
2x_1 + x_2 &= 4 \\
x_1 + 3x_2 - x_3 &= 4 \\
x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 6
\end{aligned}
$$

3.3 Método direto

Método de Gauss:

O método consiste em transformar o sistema de equações lineares $Ax = b$ em um sistema triangular equivalente, no caso um sistema triangular superior, através de transformações elementares.

3.3 Método direto

Método de Gauss:

O método consiste em transformar o sistema de equações lineares $Ax = b$ em um sistema triangular equivalente, no caso um sistema triangular superior, através de transformações elementares.

Transformações elementares:

- Troca de ordem duas equações do sistema;

3.3 Método direto

Método de Gauss:

O método consiste em transformar o sistema de equações lineares $Ax = b$ em um sistema triangular equivalente, no caso um sistema triangular superior, através de transformações elementares.

Transformações elementares:

- Troca de ordem duas equações do sistema;
- Multiplicar uma equação do sistema por uma constante diferente de zero;

3.3 Método direto

Método de Gauss:

O método consiste em transformar o sistema de equações lineares $Ax = b$ em um sistema triangular equivalente, no caso um sistema triangular superior, através de transformações elementares.

Transformações elementares:

- Troca de ordem duas equações do sistema;
- Multiplicar uma equação do sistema por uma constante diferente de zero;
- Adicionar duas equações do sistema e substituir uma delas pelo resultado.

Considerando o sistema equações lineares, 4x4:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3$$
$$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4$$

Considerando o sistema equações lineares, 4x4: :

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3 \\
a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= b_4
\end{aligned}
$$

Tomando-se a matriz aumentada ou completa do sistema, obtém-se:

$$
B_0 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{bmatrix}
$$

Observa-se que os termos independentes (b_i) são armazenados juntamente com os coeficientes da matriz em B_0 e nas posições a_{i5}.

Para triangularizar um sistema de equações lineares, considera-se:

$$B_0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{vmatrix}$$

1ª Etapa: zerar, através de transformações elementares, os coeficientes da matriz B_0, que se encontram abaixo de a_{11}:

O coeficiente da matriz a_{11} é chamado de pivô.

Para triangularizar um sistema de equações lineares, considera-se:

$$B_0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{vmatrix} \qquad B_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{vmatrix}$$

1ª Etapa: zerar, através de transformações elementares, os coeficientes da matriz B_0, que se encontram abaixo de a_{11}:

$$L_1^{(1)} = L_1^{(0)}$$

Como somente os coeficientes da primeira coluna e abaixo de a_{11} serão zerados, a primeira linha da matriz não será modificada. Então, a primeira linha da matriz B_1, ($L_1^{(1)}$), será igual a primeira linha da matriz B_0, ($L_1^{(0)}$).

Para triangularizar um sistema de equações lineares, considera-se:

$$B_0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{vmatrix} \qquad B_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ & & & & \\ & & & & \end{vmatrix}$$

1ª Etapa: zerar, através de transformações elementares, os coeficientes da matriz B_0, que se encontram abaixo de a_{11}:

$$L_1^{(1)} = L_1^{(0)}$$

$$L_2^{(1)} = -\frac{a_{21}}{a_{11}}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{bmatrix}$$

Note que, multiplicando a primeira linha da matriz B_0 por $-(a_{21}/a_{11})$ e somando com a segunda linha, termo a termo, e o resultado sendo atribuído à segunda linha de B_1, o coeficiente a_{21} é zerado. Veja o resultado na matriz B_1 acima.

Para triangularizar um sistema de equações lineares, considera-se:

$$B_0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{vmatrix} \qquad B_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ & & & & \end{vmatrix}$$

1ª Etapa: zerar, através de transformações elementares, os coeficientes da matriz B_0, que se encontram abaixo de a_{11}:

$$L_1^{(1)} = L_1^{(0)}$$

$$L_2^{(1)} = -\frac{a_{21}}{a_{11}}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{bmatrix}$$

$$L_3^{(1)} = -\frac{a_{31}}{a_{11}}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{bmatrix}$$

Veja o resultado na matriz B_1 acima.

Para triangularizar um sistema de equações lineares, considera-se:

$$B_0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{vmatrix} \qquad B_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{vmatrix}$$

1ª Etapa: zerar, através de transformações elementares, os coeficientes da matriz B_0, que se encontram abaixo de a_{11}:

Agora, a matriz aumentada do sistema ficou assim.

$$L_1^{(1)} = L_1^{(0)}$$

$$L_2^{(1)} = -\frac{a_{21}}{a_{11}}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{bmatrix}$$

$$L_3^{(1)} = -\frac{a_{31}}{a_{11}}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{bmatrix}$$

$$L_4^{(1)} = -\frac{a_{41}}{a_{11}}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{bmatrix}$$

Para triangularizar um sistema de equações lineares, considera-se:

$$B_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{vmatrix} \qquad B_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ & & & & \\ & & & & \end{vmatrix}$$

2ª Etapa: zerar, através de transformações elementares, os coeficientes da matriz B_1, que se encontram abaixo de a_{22}:

Para triangularizar um sistema de equações lineares, considera-se:

$$B_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{vmatrix} \qquad B_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ & & & & \\ & & & & \end{vmatrix}$$

2ª Etapa: zerar, através de transformações elementares, os coeficientes da matriz B_1, que se encontram abaixo de a_{22}:

$$\left.\begin{array}{l} L_1^{(2)} = L_1^{(1)} \\ L_2^{(2)} = L_2^{(1)} \end{array}\right\}$$

Agora, os coeficientes da segunda coluna e abaixo de a_{22} serão zerados, logo, a primeira e a segunda linhas da matriz não serão modificadas. Então, a primeira linha da matriz B_2, ($L_1^{(2)}$) será igual à primeira linha da matriz B_1, ($L_1^{(1)}$) e a segunda linha da matriz B_2, ($L_2^{(2)}$), será igual à segunda linha da matriz B_1, ($L_1^{(1)}$).

Para triangularizar um sistema de equações lineares, considera-se:

$$B_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{vmatrix} \qquad B_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ & & & & \end{vmatrix}$$

2ª Etapa: zerar, através de transformações elementares, os coeficientes da matriz B_1, que se encontram abaixo de a_{22}:

$$L_1^{(2)} = L_1^{(1)}$$

$$L_2^{(2)} = L_2^{(1)}$$

Multiplicando a segunda linha de B_1 por $-(a_{32}/a_{22})$ e somando com a terceira linha, termo a termo, e o resultado sendo atribuído à terceira linha de B_2, o coeficiente a_{32} é zerado. Veja os resultados na matriz B_2 acima.

$$L_3^{(2)} = -\frac{a_{32}}{a_{22}}\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{bmatrix}$$

Para triangularizar um sistema de equações lineares, considera-se:

$$B_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{vmatrix} \qquad B_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{vmatrix}$$

2ª Etapa: zerar, através de transformações elementares, os coeficientes da matriz B_1, que se encontram abaixo de a_{22}:

Agora, a matriz aumentada do sistema ficou assim.

$$L_1^{(2)} = L_1^{(1)}$$

$$L_2^{(2)} = L_2^{(1)}$$

$$L_3^{(2)} = -\frac{a_{32}}{a_{22}}\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{bmatrix}$$

$$L_4^{(2)} = -\frac{a_{42}}{a_{22}}\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{bmatrix}$$

Para triangularizar um sistema de equações lineares, considera-se:

$$B_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{vmatrix}$$

3ª Etapa: zerar, através de transformações elementares, o coeficiente da matriz B_2, que se encontra abaixo de a_{33}:

Para triangularizar um sistema de equações lineares, considera-se:

$$B_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{vmatrix} \qquad B_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ & & & & \end{vmatrix}$$

3ª Etapa: zerar, através de transformações elementares, o coeficiente da matriz B_2, que se encontra abaixo de a_{33}:

$$\left.\begin{array}{l} L_1^{(3)} = L_1^{(2)} \\ L_2^{(3)} = L_2^{(2)} \\ L_3^{(3)} = L_3^{(2)} \end{array}\right\}$$

As três primeiras linhas da matriz B_3 são iguais as três primeiras linhas da matriz B_2.

Para triangularizar um sistema de equações lineares, considera-se:

$$B_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{vmatrix} \qquad B_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \end{vmatrix}$$

3ª Etapa: zerar, através de transformações elementares, o coeficiente da matriz B_2, que se encontra abaixo de a_{33}:

$$L_1^{(3)} = L_1^{(2)}$$

$$L_2^{(3)} = L_2^{(2)}$$

$$L_3^{(3)} = L_3^{(2)}$$

Multiplicando a terceira linha de B_2 por $-(a_{43}/a_{33})$ e somando com a quarta linha, termo a termo, e sendo o resultado atribuído à quarta linha de B_3, o coeficiente a_{43} é zerado. Assim, o sistema de equações lineares é triangularizado.

$$L_4^{(3)} = -\frac{a_{43}}{a_{33}}\begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{bmatrix}$$

Fórmula compacta:

A fórmula compacta dos métodos numéricos, normalmente, é obtida para consolidar a metodologia e, também, para uma futura programação computacional dos métodos. No entanto, aqui a implementação de programas não faz parte da ementa.

De qualquer forma, a análise para obter a fórmula compacta, do método de Gauss, deve ser iniciada pelos índices das expressões de transformações elementares que permanecem constantes por mais tempo, enquanto que os outros variam (k, i, j).

Em vista disso, serão apresentadas as fórmulas compactas para cada uma das etapas do processo de triangularização e, posteriormente, a fórmula compacta geral.

1ª Etapa:

$$L_1^{(1)} = L_1^{(0)}$$

$$L_2^{(1)} = -\frac{a_{21}}{a_{11}}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{bmatrix}$$

$$L_3^{(1)} = -\frac{a_{31}}{a_{11}}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{bmatrix}$$

$$L_4^{(1)} = -\frac{a_{41}}{a_{11}}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{bmatrix}$$

Analisando as operações realizadas para as linhas 2, 3 e 4, pode-se escrever essas operações em uma fórmula compacta que as representam, veja a seguir.

1ª Etapa:

$$L_1^{(1)} = L_1^{(0)}$$

$$L_2^{(1)} = -\frac{a_{21}}{a_{11}}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{bmatrix}$$

$$L_3^{(1)} = -\frac{a_{31}}{a_{11}}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{bmatrix}$$

$$L_4^{(1)} = -\frac{a_{41}}{a_{11}}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{bmatrix}$$

Fórmula compacta E1: $\begin{cases} a_{ij} = -\dfrac{a_{ik}}{a_{kk}}(a_{kj}) + (a_{ij}) \\ k = 1 \\ i = 2,\ 3,\ 4 \\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ 5 \end{cases}$

Veja, com k = 1, i = 2 e
j = 1, 2, 3, 4, 5, obtém-se as
operações da segunda linha.

1ª Etapa:

$$L_1^{(1)} = L_1^{(0)}$$

$$L_2^{(1)} = -\frac{a_{21}}{a_{11}}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{bmatrix}$$

$$L_3^{(1)} = -\frac{a_{31}}{a_{11}}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{bmatrix}$$

$$L_4^{(1)} = -\frac{a_{41}}{a_{11}}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{bmatrix}$$

Fórmula compacta E1:
$$\begin{cases} a_{ij} = -\dfrac{a_{ik}}{a_{kk}}(a_{kj}) + (a_{ij}) \\ k = 1 \\ i = 2,\ 3,\ 4 \\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ 5 \end{cases}$$

Agora, com k = 1, i = 3 e j = 1, 2, 3, 4, 5, obtém-se as operações da terceira linha e, assim, segue.

2ª Etapa:

$$L_1^{(2)} = L_1^{(1)}$$

$$L_2^{(2)} = L_2^{(1)}$$

$$L_3^{(2)} = -\frac{a_{32}}{a_{22}}\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{bmatrix}$$

$$L_4^{(2)} = -\frac{a_{42}}{a_{22}}\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{bmatrix}$$

2ª Etapa:

$$L_1^{(2)} = L_1^{(1)}$$

$$L_2^{(2)} = L_2^{(1)}$$

$$L_3^{(2)} = -\frac{a_{32}}{a_{22}}\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{bmatrix}$$

$$L_4^{(2)} = -\frac{a_{42}}{a_{22}}\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{bmatrix}$$

Fórmula compacta E2:
$$\begin{cases} a_{ij} = -\dfrac{a_{ik}}{a_{kk}}(a_{kj}) + (a_{ij}) \\ k = 2 \\ i = 3,\ 4 \\ j = 2, 3,\ 4, 5 \end{cases}$$

3ª Etapa:

$$L_1^{(3)} = L_1^{(2)}$$

$$L_2^{(3)} = L_2^{(2)}$$

$$L_3^{(3)} = L_3^{(2)}$$

$$L_4^{(3)} = -\frac{a_{43}}{a_{33}}\begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{bmatrix}$$

3ª Etapa:

$$L_1^{(3)} = L_1^{(2)}$$

$$L_2^{(3)} = L_2^{(2)}$$

$$L_3^{(3)} = L_3^{(2)}$$

$$L_4^{(3)} = -\frac{a_{43}}{a_{33}}\begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{bmatrix}$$

Fórmula compacta E3:

$$\begin{cases} a_{ij} = -\dfrac{a_{ik}}{a_{kk}}(a_{kj}) + (a_{ij}) \\ k = 3 \\ i = 4 \\ j = 3,\ 4,\ 5 \end{cases}$$

Fórmula compacta E1:

$$\begin{cases} a_{ij} = -\dfrac{a_{ik}}{a_{kk}}(a_{kj}) + (a_{ij}) \\ k = 1 \\ i = 2,\ 3,\ 4 \\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ 5 \end{cases}$$

Fórmula compacta E2

$$\begin{cases} a_{ij} = -\dfrac{a_{ik}}{a_{kk}}(a_{kj}) + (a_{ij}) \\ k = 2 \\ i = 3,\ 4 \\ j = 2,\ 3,\ 4,\ 5 \end{cases}$$

Fórmula compacta E3:

$$\begin{cases} a_{ij} = -\dfrac{a_{ik}}{a_{kk}}(a_{kj}) + (a_{ij}) \\ k = 3 \\ i = 4 \\ j = 3,\ 4,\ 5 \end{cases}$$

Fórmula compacta geral (4x4):

Analisando as fórmulas compactas para das etapas E1, E2 e E3, obtém-se a fórmula compacta geral, como segue.

Fórmula compacta E1:

$$\begin{cases} a_{ij} = -\dfrac{a_{ik}}{a_{kk}}(a_{kj}) + (a_{ij}) \\ k = 1 \\ i = 2,\ 3,\ 4 \\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ 5 \end{cases}$$

Fórmula compacta E2

$$\begin{cases} a_{ij} = -\dfrac{a_{ik}}{a_{kk}}(a_{kj}) + (a_{ij}) \\ k = 2 \\ i = 3,\ 4 \\ j = 2,\ 3,\ 4,\ 5 \end{cases}$$

Fórmula compacta E3:

$$\begin{cases} a_{ij} = -\dfrac{a_{ik}}{a_{kk}}(a_{kj}) + (a_{ij}) \\ k = 3 \\ i = 4 \\ j = 3,\ 4,\ 5 \end{cases}$$

Fórmula compacta geral (4x4):

$$\begin{cases} a_{ij} = -\dfrac{a_{ik}}{a_{kk}}(a_{kj}) + (a_{ij}) \\ k = 1,\ 2,\ 3 \\ i = k+1,\ k+2,\ \ldots,\ 4 \\ j = k,\ k+1,\ \ldots,\ 5 \end{cases}$$

Fórmula compacta para triangularizar um sistema (4 x 4):

$$\begin{cases} a_{ij} = -\dfrac{a_{ik}}{a_{kk}}(a_{kj}) + (a_{ij}) \\ k = 1,\, 2,\, 3 \\ i = k+1,\, k+2,\, \dots,\, 4 \\ j = k,\, k+1,\, \dots,\, 5 \end{cases}$$

Fórmula compacta para triangularizar um sistema (*n* x *n*):

Fórmula compacta para triangularizar um sistema (4 x 4):

$$\begin{cases} a_{ij} = -\dfrac{a_{ik}}{a_{kk}}(a_{kj}) + (a_{ij}) \\ k = 1, 2, 3 \\ i = k+1, k+2, \ldots, 4 \\ j = k, k+1, \ldots, 5 \end{cases}$$

Fórmula compacta para triangularizar um sistema (*n* x *n*):

$$\begin{cases} a_{ij} = -\dfrac{a_{ik}}{a_{kk}}(a_{kj}) + (a_{ij}) \\ k = 1, 2, n-1 \\ i = k+1, k+2, \ldots, n \\ j = k, k+1, \ldots, n+1 \end{cases}$$

Fórmula compacta para triangularizar um sistema ($n \times n$):

$$\begin{cases} a_{ij} = -\dfrac{a_{ik}}{a_{kk}}(a_{kj}) + (a_{ij}) \\ k = 1,\, 2,\, n-1 \\ i = k+1,\, k+2,\, \ldots,\, n \\ j = k,\, k+1,\, \ldots,\, n+1 \end{cases}$$

Fórmula compacta para resolver um sistema triangular superior:

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{a_{nn+1}}{a_{nn}} \quad ; \quad (i = n) \\ x_i = \dfrac{a_{in+1} - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}} \quad ; \quad i = n-1,\, n-2,\, \ldots,\, 1 \end{cases}$$

Exercícios:

Resolver os sistemas de equações pelo método de Gauss:

1) $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

Exercícios:

Resolver os sistemas de equações pelo método de Gauss:

$$1)\quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - \ \ x_3 = \ \ 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = \ \ 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + \ \ x_3 = -1 \end{cases}$$

Para facilitar as transformações para a triangularização do sistema de equações, essas operações serão otimizadas em uma tabela, mostrada a seguir.

Exercícios:

Resolver os sistemas de equações pelo método de Gauss:

1) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$

Linha	Multiplicadores	Matriz completa	Transformações
1 2 3		2 3 −1 5 4 4 −3 3 2 −3 1 −1	

Aqui, escreve-se a matriz completa do sistema, as linhas 1, 2 e 3.

Exercícios:

Resolver os sistemas de equações pelo método de Gauss:

1) $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

Linha	Multiplicadores	Matriz completa	Transformações
1 2 3		2 3 −1 5 4 4 −3 3 2 −3 1 −1	

Inicialmente, deve-se zerar os coeficientes abaixo de $a_{11}=2$, através de transformações elementares.

Exercícios:

Resolver os sistemas de equações pelo método de Gauss:

1) $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

Linha	Multiplicadores	Matriz completa	Transformações
1 2 3	 $m_{21} = -a_{21}/a_{11} = -2$ 	2 3 −1 5 4 4 −3 3 2 −3 1 −1	

Para zerar o coeficiente a_{21}, gera-se o multiplicador m_{21} para multiplicar a linha 1 e adicionar com a linha 2.

Exercícios:

Resolver os sistemas de equações pelo método de Gauss:

1) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - \ \ x_3 = \ \ 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = \ \ 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + \ \ x_3 = -1 \end{cases}$

Linha	Multiplicadores	Matriz completa	Transformações
1 2 3	 $m_{21} = -a_{21}/a_{11} = -2$ 	2 3 −1 5 4 4 −3 3 2 −3 1 −1	
4 5 6		2 3 −1 5	L_1
7 8 9			

Como a linha 1 do sistema não será modificada, reescreve-se a linha 1 na linha 4 da tabela.

Exercícios:

Resolver os sistemas de equações pelo método de Gauss:

1) $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

Linha	Multiplicadores	Matriz completta	Transformações
1 2 3	 $m_{21} = -a_{21}/a_{11} = -2$	2 3 −1 5 4 4 −3 3 2 −3 1 −1	
4 5 6		2 3 −1 5	L_1 $m_{21}L_1 + L_2$
7 8 9			

Na linha 5 da tabela, será depositado o resultado da transformação (o multiplicador m_{21} multiplica a linha 1 e adiciona a linha 2).

Exercícios:

Resolver os sistemas de equações pelo método de Gauss:

1) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$

Linha	Multiplicadores	Matriz completa	Transformações
1 2 3	 $m_{21} = -a_{21}/a_{11} = -2$ 	2 3 −1 5 4 4 −3 3 2 −3 1 −1	
4 5 6		2 3 −1 5 0 	L_1 $m_{21}L_1 + L_2$
7 8 9			

Acompanhe as operações de transformação.
$m_{21} * a_{11} + a_{21} = -2*2 + 4 = 0$

Exercícios:

Resolver os sistemas de equações pelo método de Gauss:

$$1)\quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - \ \ x_3 = \ \ 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = \ \ 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + \ \ x_3 = -1 \end{cases}$$

Linha	Multiplicadores	Matriz completa	Transformações
1 2 3	 $m_{21} = -a_{21}/a_{11} = -2$	2 3 −1 5 4 4 −3 3 2 −3 1 −1	
4 5 6		2 3 −1 5 0 −2	L_1 $m_{21}L_1 + L_2$
7 8 9			

Acompanhe as operações de transformação.

$m_{21}*a_{12}+a_{22}$ = -2*3 + 4 = -2

Exercícios:

Resolver os sistemas de equações pelo método de Gauss:

1) $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

Linha	Multiplicadores	Matriz completa	Transformações
1 2 3	 $m_{21} = -a_{21}/a_{11} = -2$ 	2 3 −1 5 4 4 −3 3 2 −3 1 −1	
4 5 6		2 3 −1 5 0 −2 −1	L_1 $m_{21}L_1 + L_2$
7 8 9			

Acompanhe as operações de transformação.

Exercícios:

Resolver os sistemas de equações pelo método de Gauss:

1) $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

Linha	Multiplicadores	Matriz completa	Transformações
1 2 3	 $m_{21} = -a_{21}/a_{11} = -2$	2 3 −1 5 4 4 −3 3 2 −3 1 −1	
4 5 6		2 3 −1 5 0 −2 −1 −7	L_1 $m_{21}L_1 + L_2$
7 8 9			

Acompanhe as operações de transformação.

Exercícios:

Resolver os sistemas de equações pelo método de Gauss:

1) $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - \ \ x_3 = \ \ 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = \ \ 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + \ \ x_3 = -1 \end{cases}$$

Linha	Multiplicadores	Matriz completa				Transformações
1		2	3	−1	5	
2	$m_{21} = -a_{21}/a_{11} = -2$	4	4	−3	3	
3	$m_{31} = -a_{31}/a_{11} = -1$	2	−3	1	−1	
4		2	3	−1	5	L_1
5					7	$m_{21}L_1 + L_2$
6						
7						
8						
9						

Para zerar o coeficiente a_{31}, gera-se o multiplicador m_{31} para multiplicar a linha 1 e adicionar com a linha 3.

Exercícios:

Resolver os sistemas de equações, pelo método de Gauss:

1) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - \ \ x_3 = \ \ 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = \ \ 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + \ \ x_3 = -1 \end{cases}$

Linha	Multiplicadores	Matriz completa	Transformações
1		2 3 −1 5	
2	$m_{21} = -a_{21}/a_{11} = -2$	4 4 −3 3	
3	$m_{31} = -a_{31}/a_{11} = -1$	2 −3 1 −1	
4		2 3 −1 5	L_1
5		0 −2 −1 −7	$m_{21}L_1 + L_2$
6			$m_{31}L_1 + L_3$
7			
8			
9			

Na linha 6 da tabela, será depositado o resultado da transformação (o multiplicador m_{31} multiplica a linha 1 e adiciona a linha 3).

Exercícios:

Resolver os sistemas de equações pelo método de Gauss:

1) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - \ \ x_3 = \ \ 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = \ \ 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + \ \ x_3 = -1 \end{cases}$

Linha	Multiplicadores	Matriz completa	Transformações
1 2 3	 $m_{21} = -a_{21}/a_{11} = -2$ $m_{31} = -a_{31}/a_{11} = -1$	2 3 −1 5 4 4 −3 3 2 −3 1 −1	
4 5 6		2 3 −1 5 0 −2 −1 −7 0	L_1 $m_{21}L_1 + L_2$ $m_{31}L_1 + L_3$
7 8 9			

Acompanhe as operações de transformação.

Exercícios:

Resolver os sistemas de equações pelo método de Gauss:

1) $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

Linha	Multiplicadores	Matriz completa	Transformações
1		2 3 −1 5	
2	$m_{21} = -a_{21}/a_{11} = -2$	4 4 −3 3	
3	$m_{31} = -a_{31}/a_{11} = -1$	2 −3 1 −1	
4		2 3 −1 5	L_1
5		0 −2 −1 −7	$m_{21}L_1 + L_2$
6		0 −6	$m_{31}L_1 + L_3$
7			
8			
9			

Acompanhe as operações de transformação.

Exercícios:

Resolver os sistemas de equações pelo método de Gauss:

1) $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - \ \ x_3 = \ \ 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = \ \ 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + \ \ x_3 = -1 \end{cases}$$

Linha	Multiplicadores	Matriz completa	Transformações
1		2 3 −1 5	
2	$m_{21} = -a_{21}/a_{11} = -2$	4 4 −3 3	
3	$m_{31} = -a_{31}/a_{11} = -1$	2 −3 1 −1	
4		2 3 −1 5	L_1
5		0 −2 −1 −7	$m_{21}L_1 + L_2$
6		0 −6 2	$m_{31}L_1 + L_3$
7			
8			
9			

Acompanhe as operações de transformação.

Exercícios:

Resolver os sistemas de equações pelo método de Gauss:

1) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$

Linha	Multiplicadores	Matriz completa	Transformações
1 2 3	 $m_{21} = -a_{21}/a_{11} = -2$ $m_{31} = -a_{31}/a_{11} = -1$	2 3 −1 5 4 4 −3 3 2 −3 1 −1	
4 5 6		2 3 −1 5 0 −2 −1 −7 0 −6 2 −6	L_1 $m_{21}L_1 + L_2$ $m_{31}L_1 + L_3$
7 8 9			

Acompanhe as operações de transformação.

Exercícios:

Resolver os sistemas de equações pelo método de Gauss:

$$1)\quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

Linha	Multiplicadores	Matriz completa	Transformações
1 2 3	 $m_{21} = -a_{21}/a_{11} = -2$ $m_{31} = -a_{31}/a_{11} = -1$	2 3 −1 5 4 4 −3 3 2 −3 1 −1	
4 5 6		2 3 −1 5 0 −**2** −1 −7 0 −6 2 −6	L_1 $m_{21}L_1 + L_2$ $m_{31}L_1 + L_3$
7 8 9			

Para finalizar a triangularização, basta zerar o coeficiente a_{32}.

Exercícios:

Resolver os sistemas de equações pelo método de Gauss:

1) $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

Linha	Multiplicadores	Matriz completa				Transformações
1		2	3	−1	5	
2	$m_{21} = -a_{21}/a_{11} = -2$	4	4	−3	3	
3	$m_{31} = -a_{31}/a_{11} = -1$	2	−3	1	−1	
4		2	3	−1	5	L_1
5		0	−**2**	−1	−7	$m_{21}L_1 + L_2$
6	$m_{32} = -a_{32}/a_{22} = -3$	0	−6	2	−6	$m_{31}L_1 + L_3$
7						
8						
9						

Para zerar a_{32}, gera-se o multiplicador m_{32} para multiplicar a linha 5 e adicionar com a linha 6 e, assim, segue.

Exercícios:

Resolver os sistemas de equações pelo método de Gauss:

1) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - \ \ x_3 = \ 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = \ 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + \ \ x_3 = -1 \end{cases}$

Linha	Multiplicadores	Matriz completa				Transformações
1		2	3	−1	5	
2	$m_{21} = -a_{21}/a_{11} = -2$	4	4	−3	3	
3	$m_{31} = -a_{31}/a_{11} = -1$	2	−3	1	−1	
4		2	3	−1	5	L_1
5		0	−**2**	−1	−7	$m_{21}L_1 + L_2$
6	$m_{32} = -a_{32}/a_{22} = -3$	0	−6	2	−6	$m_{31}L_1 + L_3$
7		2	3	−1	5	L_4
8						
9						

Exercícios:

Resolver os sistemas de equações pelo método de Gauss:

$$1)\quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

Linha	Multiplicadores	Matriz completa				Transformações
1		2	3	−1	5	
2	$m_{21} = -a_{21}/a_{11} = -2$	4	4	−3	3	
3	$m_{31} = -a_{31}/a_{11} = -1$	2	−3	1	−1	
4		2	3	−1	5	L_1
5		0	**−2**	−1	−7	$m_{21}L_1 + L_2$
6	$m_{32} = -a_{32}/a_{22} = -3$	0	−6	2	−6	$m_{31}L_1 + L_3$
7		2	3	−1	5	L_4
8		0	−2	−1	−7	L_5
9						

Exercícios:

Resolver os sistemas de equações pelo método de Gauss:

1) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - \ \ x_3 = \ \ 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = \ \ 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + \ \ x_3 = -1 \end{cases}$

Linha	Multiplicadores	Matriz completa				Transformações
1		2	3	−1	5	
2	$m_{21} = -a_{21}/a_{11} = -2$	4	4	−3	3	
3	$m_{31} = -a_{31}/a_{11} = -1$	2	−3	1	−1	
4		2	3	−1	5	L_1
5		0	−**2**	−1	−7	$m_{21}L_1 + L_2$
6	$m_{32} = -a_{32}/a_{22} = -3$	0	−6	2	−6	$m_{31}L_1 + L_3$
7		2	3	−1	5	L_4
8		0	−2	−1	−7	L_5
9						$m_{32}L_5 + L_6$

Exercícios:

Resolver os sistemas de equações pelo método de Gauss:

1) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$

Linha	Multiplicadores	Matriz completa				Transformações
1		2	3	−1	5	
2	$m_{21} = -a_{21}/a_{11} = -2$	4	4	−3	3	
3	$m_{31} = -a_{31}/a_{11} = -1$	2	−3	1	−1	
4		2	3	−1	5	L_1
5		0	−**2**	−1	−7	$m_{21}L_1 + L_2$
6	$m_{32} = -a_{32}/a_{22} = -3$	0	−6	2	−6	$m_{31}L_1 + L_3$
7		2	3	−1	5	L_4
8		0	−2	−1	−7	L_5
9		0				$m_{32}L_5 + L_6$

Exercícios:

Resolver os sistemas de equações pelo método de Gauss:

1) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$

Linha	Multiplicadores	Matriz completa				Transformações
1		2	3	−1	5	
2	$m_{21} = -a_{21}/a_{11} = -2$	4	4	−3	3	
3	$m_{31} = -a_{31}/a_{11} = -1$	2	−3	1	−1	
4		2	3	−1	5	L_1
5		0	−**2**	−1	−7	$m_{21}L_1 + L_2$
6	$m_{32} = -a_{32}/a_{22} = -3$	0	−6	2	−6	$m_{31}L_1 + L_3$
7		2	3	−1	5	L_4
8		0	−2	−1	−7	L_5
9		0	0			$m_{32}L_5 + L_6$

Exercícios:

Resolver os sistemas de equações pelo método de Gauss:

1) $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

Linha	Multiplicadores	Matriz completa				Transformações
1		2	3	−1	5	
2	$m_{21} = -a_{21}/a_{11} = -2$	4	4	−3	3	
3	$m_{31} = -a_{31}/a_{11} = -1$	2	−3	1	−1	
4		2	3	−1	5	L_1
5		0	−2	−1	−7	$m_{21}L_1 + L_2$
6	$m_{32} = -a_{32}/a_{22} = -3$	0	−6	2	−6	$m_{31}L_1 + L_3$
7		2	3	−1	5	L_4
8		0	−2	−1	−7	L_5
9		0	0	5		$m_{32}L_5 + L_6$

Exercícios:

Resolver os sistemas de equações pelo método de Gauss:

1) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$

Linha	Multiplicadores	Matriz completa				Transformações
1		2	3	−1	5	
2	$m_{21} = -a_{21}/a_{11} = -2$	4	4	−3	3	
3	$m_{31} = -a_{31}/a_{11} = -1$	2	−3	1	−1	
4		2	3	−1	5	L_1
5		0	−**2**	−1	−7	$m_{21}L_1 + L_2$
6	$m_{32} = -a_{32}/a_{22} = -3$	0	−6	2	−6	$m_{31}L_1 + L_3$
7		2	3	−1	5	L_4
8		0	−2	−1	−7	L_5
9		0	0	5	15	$m_{32}L_5 + L_6$

Assim, o sistema ficou triangularizado.

O sistema triangularizado ficou assim:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ \quad - 2x_2 - x_3 = -7 \\ \quad\quad 5x_3 = 15 \end{cases}$$

O sistema triangularizado ficou assim:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = \ \ 5 \\ \quad\ \ -2x_2 - x_3 = -7 \\ \qquad\qquad\ \ 5x_3 = \ 15 \end{cases}$$

Solução:

$$x_3 = \frac{15}{5} = 3$$

O sistema triangularizado ficou assim:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = \ \ 5 \\ \quad\ \ -2x_2 - x_3 = -7 \\ \qquad\qquad\ \ 5x_3 = \ 15 \end{cases}$$

Solução:

$$x_3 = \frac{15}{5} = 3$$

$$x_2 = \frac{-7 + x_3}{-2} = \frac{-7+3}{-2} = 2$$

O sistema triangularizado ficou assim:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = \ \ 5 \\ \quad\ \ -2x_2 - x_3 = -7 \\ \qquad\qquad\ \ 5x_3 = \ 15 \end{cases}$$

Solução:

$$x_3 = \frac{15}{5} = 3$$

$$x_2 = \frac{-7 + x_3}{-2} = \frac{-7+3}{-2} = 2$$

$$x_1 = \frac{5 - 3x_2 + x_3}{2} = \frac{5-3*2+3}{2} = 1$$

O sistema triangularizado ficou assim:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = \ \ 5 \\ \quad\ \ -2x_2 - x_3 = -7 \\ \qquad\qquad\ 5x_3 = \ 15 \end{cases}$$

Solução:

$$x_3 = \frac{15}{5} = 3$$

$$x_2 = \frac{-7 + x_3}{-2} = \frac{-7+3}{-2} = 2$$

$$x_1 = \frac{5 - 3x_2 + x_3}{2} = \frac{5 - 3*2 + 3}{2} = 1$$

$$\mathbf{x} = [\mathbf{1} \quad \mathbf{2} \quad \mathbf{3}]^{\mathbf{T}}$$

2) Resolver os sistemas de equações pelo método de Gauss:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ 3x_1 - 6x_2 + x_3 - 2x_4 = -5 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

Os procedimentos adotados, neste exemplo, são semelhantes aos do anterior.

2) Resolver os sistemas de equações pelo método de Gauss:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ 3x_1 - 6x_2 + x_3 - 2x_4 = -5 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

Linha	Multiplicadores	Matriz completa	Transformações
1 2 3 4		1 −2 1 −1 −1 3 −6 1 −2 −5 2 1 −1 1 3 1 1 −2 2 2	

Linha	Multiplicadores	Matriz completa					Transformações
1		**1**	−2	1	−1	−1	
2		3	−6	1	−2	−5	
3		2	1	−1	1	3	
4		1	1	−2	2	2	
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							
16							
17							
18							
19							
20							

Linha	Multiplicadores	Matriz completa	Transformações
1 2 3 4	 $m_{21}=-a_{21}/a_{11}= -3$	**1** -2 1 -1 -1 3 -6 1 -2 -5 2 1 -1 1 3 1 1 -2 2 2	
5 6 7 8			
9 10 11 12			
13 14 15 16			
17 18 19 20			

Linha	Multiplicadores	Matriz completa	Transformações
1		**1** −2 1 −1 −1	
2	$m_{21}=-a_{21}/a_{11}= -3$	3 −6 1 −2 −5	
3		2 1 −1 1 3	
4		1 1 −2 2 2	
5		1 −2 1 −1 −1	L_1
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20			

Linha	Multiplicadores	Matriz completa	Transformações
1		$1 \quad -2 \quad 1 \quad -1 \quad -1$	
2	$m_{21}=-a_{21}/a_{11}= -3$	$3 \quad -6 \quad 1 \quad -2 \quad -5$	
3		$2 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad 3$	
4		$1 \quad 1 \quad -2 \quad 2 \quad 2$	
5		$1 \quad -2 \quad 1 \quad -1 \quad -1$	L_1
6			$m_{21}L_1+L_2$
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20			

Linha	Multiplicadores	Matriz completa	Transformações
1 2 3 4	 $m_{21}=-a_{21}/a_{11}=\ -3$	**1** −2 1 −1 −1 3 −6 1 −2 −5 2 1 −1 1 3 1 1 −2 2 2	
5 6 7 8		1 −2 1 −1 −1 0 0 −2 1 −2	L_1 $m_{21}L_1+L_2$
9 10 11 12			
13 14 15 16			
17 18 19 20			

Linha	Multiplicadores	Matriz completa	Transformações
1 2 3 4	 $m_{21}=-a_{21}/a_{11}= -3$ $m_{31}=-a_{31}/a_{11}= -2$	**1** -2 1 -1 -1 3 -6 1 -2 -5 2 1 -1 1 3 1 1 -2 2 2	
5 6 7 8		1 -2 1 -1 -1 0 0 -2 1 -2	L_1 $m_{21}L_1+L_2$
9 10 11 12			
13 14 15 16			
17 18 19 20			

Linha	Multiplicadores	Matriz completa	Transformações
1 2 3 4	 $m_{21}=-a_{21}/a_{11}= -3$ $m_{31}=-a_{31}/a_{11}= -2$	**1** -2 1 -1 -1 3 -6 1 -2 -5 2 1 -1 1 3 1 1 -2 2 2	
5 6 7 8		1 -2 1 -1 -1 0 0 -2 1 -2	L_1 $m_{21}L_1+L_2$ $m_{31}L_1+L_3$
9 10 11 12			
13 14 15 16			
17 18 19 20			

Linha	Multiplicadores	Matriz completa	Transformações
1 2 3 4	 $m_{21}=-a_{21}/a_{11}=-3$ $m_{31}=-a_{31}/a_{11}=-2$	1 −2 1 −1 −1 3 −6 1 −2 −5 2 1 −1 1 3 1 1 −2 2 2	
5 6 7 8		1 −2 1 −1 −1 0 0 −2 1 −2 0 5 −3 3 5	L_1 $m_{21}L_1+L_2$ $m_{31}L_1+L_3$
9 10 11 12			
13 14 15 16			
17 18 19 20			

Linha	Multiplicadores	Matriz completa	Transformações
1 2 3 4	 $m_{21}=-a_{21}/a_{11}= -3$ $m_{31}=-a_{31}/a_{11}= -2$ $m_{41}=-a_{41}/a_{11}= -1$	1 −2 1 −1 −1 3 −6 1 −2 −5 2 1 −1 1 3 1 1 −2 2 2	
5 6 7 8		1 −2 1 −1 −1 0 0 −2 1 −2 0 5 −3 3 5	L_1 $m_{21}L_1+L_2$ $m_{31}L_1+L_3$
9 10 11 12			
13 14 15 16			
17 18 19 20			

Linha	Multiplicadores	Matriz completa	Transformações
1 2 3 4	 $m_{21}=-a_{21}/a_{11}= -3$ $m_{31}=-a_{31}/a_{11}= -2$ $m_{41}=-a_{41}/a_{11}= -1$	**1** −2 1 −1 −1 3 −6 1 −2 −5 2 1 −1 1 3 1 1 −2 2 2	
5 6 7 8		1 −2 1 −1 −1 0 0 −2 1 −2 0 5 −3 3 5	L_1 $m_{21}L_1+L_2$ $m_{31}L_1+L_3$ $m_{41}L_1+L_4$
9 10 11 12			
13 14 15 16			
17 18 19 20			

Linha	Multiplicadores	Matriz completa					Transformações
1		**1**	−2	1	−1	−1	
2	$m_{21}=-a_{21}/a_{11}= -3$	3	−6	1	−2	−5	
3	$m_{31}=-a_{31}/a_{11}= -2$	2	1	−1	1	3	
4	$m_{41}=-a_{41}/a_{11}= -1$	1	1	−2	2	2	
5		1	−2	1	−1	−1	L_1
6		0	0	−2	1	−2	$m_{21}L_1+L_2$
7		0	5	−3	3	5	$m_{31}L_1+L_3$
8		0	3	−3	3	3	$m_{41}L_1+L_4$
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							
16							
17							
18							
19							
20							

Linha	Multiplicadores	Matriz completa					Transformações
1		1	−2	1	−1	−1	
2	$m_{21}=-a_{21}/a_{11}= -3$	3	−6	1	−2	−5	
3	$m_{31}=-a_{31}/a_{11}= -2$	2	1	−1	1	3	
4	$m_{41}=-a_{41}/a_{11}= -1$	1	1	−2	2	2	
5		1	−2	1	−1	−1	L_1
6		0	**0**	−2	1	−2	$m_{21}L_1+L_2$
7		0	5	−3	3	5	$m_{31}L_1+L_3$
8		0	3	−3	3	3	$m_{41}L_1+L_4$
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							
16							
17							
18							
19							
20							

Como o pivô não pode ser nulo, a linha 6 deve ser trocada pela linha 7 ou 8, por escolha, será trocada pela linha 7. Veja:

Linha	Multiplicadores	Matriz completa	Transformações
1 2 3 4	 $m_{21}=-a_{21}/a_{11}= -3$ $m_{31}=-a_{31}/a_{11}= -2$ $m_{41}=-a_{41}/a_{11}= -1$	1 −2 1 −1 −1 3 −6 1 −2 −5 2 1 −1 1 3 1 1 −2 2 2	
5 6 7 8		1 −2 1 −1 −1 0 **0** −2 1 −2 0 5 −3 3 5 0 3 −3 3 3	L_1 $m_{21}L_1+L_2$ $m_{31}L_1+L_3$ $m_{41}L_1+L_4$
9 10 11 12			L_5 L_7 L_6 L_8
13 14 15 16			
17 18 19 20			

Linha	Multiplicadores	Matriz completa					Transformações
1		1	−2	1	−1	−1	
2	$m_{21}=-a_{21}/a_{11}= -3$	3	−6	1	−2	−5	
3	$m_{31}=-a_{31}/a_{11}= -2$	2	1	−1	1	3	
4	$m_{41}=-a_{41}/a_{11}= -1$	1	1	−2	2	2	
5		1	−2	1	−1	−1	L_1
6		0	0	−2	1	−2	$m_{21}L_1+L_2$
7		0	5	−3	3	5	$m_{31}L_1+L_3$
8		0	3	−3	3	3	$m_{41}L_1+L_4$
9		1	−2	1	−1	−1	L_5
10		0	**5**	−3	3	5	L_7
11		0	0	−2	1	−2	L_6
12		0	3	−3	3	3	L_8
13							
14							
15							
16							
17							
18							
19							
20							

Linha	Multiplicadores	Matriz completa					Transformações
1		1	−2	1	−1	−1	
2	$m_{21}=-a_{21}/a_{11}= -3$	3	−6	1	−2	−5	
3	$m_{31}=-a_{31}/a_{11}= -2$	2	1	−1	1	3	
4	$m_{41}=-a_{41}/a_{11}= -1$	1	1	−2	2	2	
5		1	−2	1	−1	−1	L_1
6		0	0	−2	1	−2	$m_{21}L_1+L_2$
7		0	5	−3	3	5	$m_{31}L_1+L_3$
8		0	3	−3	3	3	$m_{41}L_1+L_4$
9		1	−2	1	−1	−1	L_5
10		0	**5**	−3	3	5	L_7
11		0	0	−2	1	−2	L_6
12	$m_{42}=-a_{42}/a_{22}= -3/5$	0	3	−3	3	3	L_8
13							
14							
15							
16							
17							
18							
19							
20							

Linha	Multiplicadores	Matriz completa					Transformações
1		1	−2	1	−1	−1	
2	$m_{21}=-a_{21}/a_{11}= -3$	3	−6	1	−2	−5	
3	$m_{31}=-a_{31}/a_{11}= -2$	2	1	−1	1	3	
4	$m_{41}=-a_{41}/a_{11}= -1$	1	1	−2	2	2	
5		1	−2	1	−1	−1	L_1
6		0	0	−2	1	−2	$m_{21}L_1+L_2$
7		0	5	−3	3	5	$m_{31}L_1+L_3$
8		0	3	−3	3	3	$m_{41}L_1+L_4$
9		1	−2	1	−1	−1	L_5
10		0	**5**	−3	3	5	L_7
11		0	0	−2	1	−2	L_6
12	$m_{42}=-a_{42}/a_{22}= -3/5$	0	3	−3	3	3	L_8
13		1	−2	1	−1	−1	L_9
14		0	5	−3	3	5	L_{10}
15		0	0	−2	1	−2	L_{11}
16							
17							
18							
19							
20							

Linha	Multiplicadores	Matriz completa					Transformações
1		1	−2	1	−1	−1	
2	$m_{21}=-a_{21}/a_{11}= -3$	3	−6	1	−2	−5	
3	$m_{31}=-a_{31}/a_{11}= -2$	2	1	−1	1	3	
4	$m_{41}=-a_{41}/a_{11}= -1$	1	1	−2	2	2	
5		1	−2	1	−1	−1	L_1
6		0	0	−2	1	−2	$m_{21}L_1+L_2$
7		0	5	−3	3	5	$m_{31}L_1+L_3$
8		0	3	−3	3	3	$m_{41}L_1+L_4$
9		1	−2	1	−1	−1	L_5
10		0	**5**	−3	3	5	L_7
11		0	0	−2	1	−2	L_6
12	$m_{42}=-a_{42}/a_{22}= -3/5$	0	3	−3	3	3	L_8
13		1	−2	1	−1	−1	L_9
14		0	5	−3	3	5	L_{10}
15		0	0	−2	1	−2	L_{11}
16							$m_{42}L_{10}+L_{12}$
17							
18							
19							
20							

Linha	Multiplicadores	Matriz completa					Transformações
1		1	−2	1	−1	−1	
2	$m_{21}=-a_{21}/a_{11}= -3$	3	−6	1	−2	−5	
3	$m_{31}=-a_{31}/a_{11}= -2$	2	1	−1	1	3	
4	$m_{41}=-a_{41}/a_{11}= -1$	1	1	−2	2	2	
5		1	−2	1	−1	−1	L_1
6		0	0	−2	1	−2	$m_{21}L_1+L_2$
7		0	5	−3	3	5	$m_{31}L_1+L_3$
8		0	3	−3	3	3	$m_{41}L_1+L_4$
9		1	−2	1	−1	−1	L_5
10		0	**5**	−3	3	5	L_7
11		0	0	−2	1	−2	L_6
12	$m_{42}=-a_{42}/a_{22}= -3/5$	0	3	−3	3	3	L_8
13		1	−2	1	−1	−1	L_9
14		0	5	−3	3	5	L_{10}
15		0	0	−2	1	−2	L_{11}
16		0	0	−6/5	6/5	0	$m_{42}L_{10}+L_{12}$
17							
18							
19							
20							

Linha	Multiplicadores	Matriz completa					Transformações
1		1	−2	1	−1	−1	
2	$m_{21}=-a_{21}/a_{11}= -3$	3	−6	1	−2	−5	
3	$m_{31}=-a_{31}/a_{11}= -2$	2	1	−1	1	3	
4	$m_{41}=-a_{41}/a_{11}= -1$	1	1	−2	2	2	
5		1	−2	1	−1	−1	L_1
6		0	0	−2	1	−2	$m_{21}L_1+L_2$
7		0	5	−3	3	5	$m_{31}L_1+L_3$
8		0	3	−3	3	3	$m_{41}L_1+L_4$
9		1	−2	1	−1	−1	L_5
10		0	5	−3	3	5	L_7
11		0	0	−2	1	−2	L_6
12	$m_{42}=-a_{42}/a_{22}= -3/5$	0	3	−3	3	3	L_8
13		1	−2	1	−1	−1	L_9
14		0	5	−3	3	5	L_{10}
15		0	0	**−2**	1	−2	L_{11}
16		0	0	−6/5	6/5	0	$m_{42}L_{10}+L_{12}$
17							
18							
19							
20							

Linha	Multiplicadores	Matriz completa					Transformações
1		1	−2	1	−1	−1	
2	$m_{21}=-a_{21}/a_{11}= -3$	3	−6	1	−2	−5	
3	$m_{31}=-a_{31}/a_{11}= -2$	2	1	−1	1	3	
4	$m_{41}=-a_{41}/a_{11}= -1$	1	1	−2	2	2	
5		1	−2	1	−1	−1	L_1
6		0	0	−2	1	−2	$m_{21}L_1+L_2$
7		0	5	−3	3	5	$m_{31}L_1+L_3$
8		0	3	−3	3	3	$m_{41}L_1+L_4$
9		1	−2	1	−1	−1	L_5
10		0	5	−3	3	5	L_7
11		0	0	−2	1	−2	L_6
12	$m_{42}=-a_{42}/a_{22}= -3/5$	0	3	−3	3	3	L_8
13		1	−2	1	−1	−1	L_9
14		0	5	−3	3	5	L_{10}
15		0	0	**−2**	1	−2	L_{11}
16	$m_{43}=-a_{43}/a_{33}= -3/5$	0	0	−6/5	6/5	0	$m_{42}L_{10}+L_{12}$
17							
18							
19							
20							

Linha	Multiplicadores	Matriz completa					Transformações
1		1	−2	1	−1	−1	
2	$m_{21}=-a_{21}/a_{11}=\ -3$	3	−6	1	−2	−5	
3	$m_{31}=-a_{31}/a_{11}=\ -2$	2	1	−1	1	3	
4	$m_{41}=-a_{41}/a_{11}=\ -1$	1	1	−2	2	2	
5		1	−2	1	−1	−1	L_1
6		0	0	−2	1	−2	$m_{21}L_1+L_2$
7		0	5	−3	3	5	$m_{31}L_1+L_3$
8		0	3	−3	3	3	$m_{41}L_1+L_4$
9		1	−2	1	−1	−1	L_5
10		0	5	−3	3	5	L_7
11		0	0	−2	1	−2	L_6
12	$m_{42}=-a_{42}/a_{22}=\ -3/5$	0	3	−3	3	3	L_8
13		1	−2	1	−1	−1	L_9
14		0	5	−3	3	5	L_{10}
15		0	0	**−2**	1	−2	L_{11}
16	$m_{43}=-a_{43}/a_{33}=\ -3/5$	0	0	−6/5	6/5	0	$m_{42}L_{10}+L_{12}$
17		1	−2	1	−1	−1	L_{13}
18		0	5	−3	3	5	L_{14}
19		0	0	−2	1	−2	L_{15}
20							

Linha	Multiplicadores	Matriz completa					Transformações
1		1	−2	1	−1	−1	
2	$m_{21}=-a_{21}/a_{11}= -3$	3	−6	1	−2	−5	
3	$m_{31}=-a_{31}/a_{11}= -2$	2	1	−1	1	3	
4	$m_{41}=-a_{41}/a_{11}= -1$	1	1	−2	2	2	
5		1	−2	1	−1	−1	L_1
6		0	0	−2	1	−2	$m_{21}L_1+L_2$
7		0	5	−3	3	5	$m_{31}L_1+L_3$
8		0	3	−3	3	3	$m_{41}L_1+L_4$
9		1	−2	1	−1	−1	L_5
10		0	5	−3	3	5	L_7
11		0	0	−2	1	−2	L_6
12	$m_{42}=-a_{42}/a_{22}= -3/5$	0	3	−3	3	3	L_8
13		1	−2	1	−1	−1	L_9
14		0	5	−3	3	5	L_{10}
15		0	0	**−2**	1	−2	L_{11}
16	$m_{43}=-a_{43}/a_{33}= -3/5$	0	0	−6/5	6/5	0	$m_{42}L_{10}+L_{12}$
17		1	−2	1	−1	−1	L_{13}
18		0	5	−3	3	5	L_{14}
19		0	0	−2	1	−2	L_{15}
20							$m_{43}L_{15}+L_{16}$

Linha	Multiplicadores	Matriz completa					Transformações
1		1	−2	1	−1	−1	
2	$m_{21}=-a_{21}/a_{11}= -3$	3	−6	1	−2	−5	
3	$m_{31}=-a_{31}/a_{11}= -2$	2	1	−1	1	3	
4	$m_{41}=-a_{41}/a_{11}= -1$	1	1	−2	2	2	
5		1	−2	1	−1	−1	L_1
6		0	0	−2	1	−2	$m_{21}L_1+L_2$
7		0	5	−3	3	5	$m_{31}L_1+L_3$
8		0	3	−3	3	3	$m_{41}L_1+L_4$
9		1	−2	1	−1	−1	L_5
10		0	5	−3	3	5	L_7
11		0	0	−2	1	−2	L_6
12	$m_{42}=-a_{42}/a_{22}= -3/5$	0	3	−3	3	3	L_8
13		1	−2	1	−1	−1	L_9
14		0	5	−3	3	5	L_{10}
15		0	0	**−2**	1	−2	L_{11}
16	$m_{43}=-a_{43}/a_{33}= -3/5$	0	0	−6/5	6/5	0	$m_{42}L_{10}+L_{12}$
17		1	−2	1	−1	−1	L_{13}
18		0	5	−3	3	5	L_{14}
19		0	0	−2	1	−2	L_{15}
20		0	0	0	3/5	6/5	$m_{43}L_{15}+L_{16}$

O sistema triangularizado ficou assim:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ 5x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 5 \\ -2x_3 + x_4 = -2 \\ 3/5x_4 = 6/5 \end{cases}$$

O sistema triangularizado ficou assim:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ 5x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 5 \\ -2x_3 + x_4 = -2 \\ 3/5x_4 = 6/5 \end{cases}$$

Solução:

$$x_4 = \frac{6/5}{3/5} = 2$$

O sistema triangularizado ficou assim:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ 5x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 5 \\ -2x_3 + x_4 = -2 \\ 3/5x_4 = 6/5 \end{cases}$$

Solução:

$$x_4 = \frac{6/5}{3/5} = 2$$

$$x_3 = \frac{-2 - x_4}{-2} = \frac{-2-2}{-2} = 2$$

O sistema triangularizado ficou assim:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ 5x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 5 \\ -2x_3 + x_4 = -2 \\ 3/5x_4 = 6/5 \end{cases}$$

Solução:

$$x_4 = \frac{6/5}{3/5} = 2$$

$$x_3 = \frac{-2 - x_4}{-2} = \frac{-2-2}{-2} = 2$$

$$x_2 = \frac{5 + 3x_3 - 3x_4}{5} = \frac{5 + 3*2 - 3*2}{5} = 1$$

O sistema triangularizado ficou assim:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ 5x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 5 \\ -2x_3 + x_4 = -2 \\ 3/5x_4 = 6/5 \end{cases}$$

Solução:

$$x_4 = \frac{6/5}{3/5} = 2$$

$$x_3 = \frac{-2 - x_4}{-2} = \frac{-2-2}{-2} = 2$$

$$x_2 = \frac{5 + 3x_3 - 3x_4}{5} = \frac{5 + 3*2 - 3*2}{5} = 1$$

$$x_1 = -1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -1 + 2*1 - 2 + 2 = 1$$

O sistema triangularizado ficou assim:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ 5x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 5 \\ -2x_3 + x_4 = -2 \\ 3/5x_4 = 6/5 \end{cases}$$

Solução:

$$x_4 = \frac{6/5}{3/5} = 2$$

$$x_3 = \frac{-2 - x_4}{-2} = \frac{-2-2}{-2} = 2$$

$$x_2 = \frac{5 + 3x_3 - 3x_4}{5} = \frac{5 + 3*2 - 3*2}{5} = 1$$

$$x_1 = -1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -1 + 2*1 - 2 + 2 = 1$$

$\boldsymbol{x} = [1 \quad 1 \quad 2 \quad 2]^T$

Exercícios (continuação):

3) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 10 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

4) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \end{cases}$$

5) $$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

Obrigado.