Teoria e Prática na Engenharia Civil, n.18, p.63-70 Novembro, 2011

Fórmulas práticas para cálculo de flechas de vigas de concreto armado

Practical formulas for calculation of deflections of reinforced concrete beams

José Milton de Araújo
Escola de Engenharia - FURG, Rio Grande, RS
e-mail: ed.dunas@mikrus.com.br

RESUMO: O objetivo deste trabalho é apresentar duas fórmulas práticas para o cálculo de flechas de vigas de concreto armado. Essas fórmulas foram desenvolvidas a partir do modelo bilinear do CEB. A primeira fórmula permite calcular a flecha de vigas para diversos estágios do carregamento. Nessa fórmula utilizam-se as áreas de aço realmente existentes nas seções da viga. Uma segunda fórmula, independente das armaduras, permite calcular a flecha de vigas para as cargas de serviço, antes mesmo do detalhamento das armaduras. A precisão das duas fórmulas é demonstrada por comparação com o método bilinear.

ABSTRACT: The subject of this work is to present two practical formulas for calculation of deflections of reinforced concrete beams. Those formulas were developed with base in the bilinear model of CEB. The first formula allows to calculate beam deflections in several stages of the loading. This formula uses the existent reinforcement in the cross sections of the beam. A second formula allows to calculate deflections under service loads, before of the detailing of the reinforcement. The precision of the two formulas is demonstrated by comparison with the bilinear method.

1 - INTRODUÇÃO

Em trabalhos anteriores [1,2,3], o Autor analisou diversos métodos disponíveis para cálculo de flechas de vigas de concreto armado. Nesses artigos foram analisados um modelo não linear, o método bilinear do CEB, o método do ACI, o qual é adotado na NBR-6118, e uma fórmula prática apresentada no CEB/90. Em outro artigo, o Autor propõe uma melhoria no modelo do ACI para cálculo de flechas de vigas [4].

Nesses estudos ficou constatado que ambos os métodos simplificados apresentam uma boa concordância entre si e com o modelo não linear, no que se refere ao cálculo das flechas iniciais das vigas de concreto armado. A opção por um ou por outro método, como, por exemplo, o método bilinear do CEB [5,6] ou a fórmula de Branson, adotada na NBR-6118 [7], pode ser uma questão de preferência ou de costume do projetista.

Porém, quando se consideram as deformações diferidas do concreto, verifica-se uma boa concordância entre o método bilinear e o modelo não linear. Entretanto, o método da NBR-6118 não reproduz satisfatoriamente os efeitos das deformações diferidas do concreto na resposta das vigas de concreto armado. Esse método subestima as flechas das vigas pouco solicitadas, quando elas ainda se encontram no estádio I, ou no início do estádio II (na região de formação das fissuras). Por outro lado, o método da NBR-6118 superestima as flechas das vigas mais solicitadas, em um estado de fissuração mais adiantado.

Em vista desses estudos, o Autor tem recomendado o emprego do método bilinear do CEB, como sendo o método simplificado mais preciso, desaconselhando o uso do método da NBR-6118 para o cálculo de flechas de vigas sob cargas de longa duração.

Entretanto, o emprego do método bilinear pode não ser muito simples, especialmente em cálculos manuais de verificação de flechas das vigas sob as cargas de serviço.

Nesse sentido, o CEB apresenta uma fórmula prática, derivada do método bilinear, a qual permite um cálculo rápido. Essa fórmula possui boa precisão para o nível de carregamento a que as vigas dos edifícios estão submetidas usualmente.

Porém, a fórmula prática do CEB não permite alterar o nível de carga, o coeficiente de fluência ou a resistência do concreto. A fórmula apresenta valores razoáveis da flecha para concretos com resistência característica à compressão f_{ck} da ordem de 20 a 25 MPa, coeficiente de fluência $\varphi \cong 2$ e um nível de carga típico das vigas dos edifícios residenciais e de escritórios.

O objetivo deste trabalho é desenvolver uma fórmula prática, nos moldes da fórmula do CEB, porém, que permita variar os principais parâmetros envolvidos no problema: nível de carregamento, coeficiente de fluência e resistência à compressão do concreto. Para isto, foram desenvolvidos dois conjuntos de fórmulas: uma para verificação, a qual depende das taxas de armaduras existentes na viga, e outra para projeto, a qual pressupõe que as armaduras existentes são exatamente iguais àquelas obtidas no dimensionamento.

2 – O MÉTODO BILINEAR DO CEB

De acordo com o método bilinear do CEB, descrito em detalhes na referência[8], a flecha W de uma viga é obtida por interpolação da flecha W_1, calculada no estádio I, e da flecha W_2, calculada no estádio II puro.

Assim, a flecha W, levando em conta a colaboração do concreto tracionado entre fissuras, é interpolada na forma

$$W = (1-\eta)W_1 + \eta W_2 \tag{1}$$

$$\eta = 0 \text{, se } M \le M_r \tag{2}$$

$$\eta = 1 - 0{,}5 M_r / M \text{ , se } M > M_r \tag{3}$$

Nas equações (2 e (3), M é o momento fletor solicitante na seção crítica da viga e M_r é o momento de fissuração.

As parcelas W_1 e W_2 são calculadas levando-se em conta a fluência e a retração do concreto.

Deve-se observar que o coeficiente η varia ao longo do eixo da viga pois, tanto M , quanto M_r, variam de seção para seção transversal. Na prática, é necessário adotar um valor constante para η, calculado para uma seção crítica. Do mesmo modo, as flechas W_1 e W_2 devem ser calculadas considerando a rigidez da seção crítica. Assim, a rigidez no estádio I, K_I, e a rigidez no estádio II puro, K_{II}, são obtidas com as armaduras existentes na seção crítica.

No caso de uma viga biapoiada ou de uma viga contínua, a seção crítica é considerada no meio do vão. Para os balanços, a seção crítica corresponde ao extremo engastado.

Observa-se que a flecha é calculada em uma seção de referência, que pode não coincidir com a seção crítica.

O momento de fissuração é dado por

$$M_r = \frac{K_I f_{ct}}{E_{cs}(h - x_I)} \tag{4}$$

onde $E_{cs} = 0{,}85 E_c$ é o módulo de deformação longitudinal secante do concreto, h é a altura da seção transversal da viga e x_I é a profundidade da linha neutra no estádio I.

As expressões de x_I, K_I e K_{II} podem ser obtidas na referência [8].

Se as armaduras forem desprezadas, $x_I = 0{,}5h$ e $K_I = E_{cs} bh^3 / 12$, resultando a expressão aproximada para o momento de fissuração

$$M_r = bh^2 f_{ct} / 6 \tag{5}$$

3 – A FÓRMULA PRÁTICA DO CEB

Uma vez que as flechas W_1 e W_2 são calculadas através de uma análise linear, pode-se escrever

$$W_1 = \frac{C}{K_I} \; ; \; W_2 = \frac{C}{K_{II}} \tag{6}$$

onde C é uma constante que depende da carga, do vão e das condições de contorno da viga.

Por exemplo, para uma viga biapoiada de vão l, submetida a uma carga uniformemente distribuída p, tem-se $C = (5pl^4)/384$.

Ao empregar a equação (6), os efeitos da fluência devem ser incluídos diretamente nas rigidezes K_I e K_{II}. Para isto, deve-se trabalhar com o módulo secante efetivo do concreto $E_{cse} = E_{cs}/(1+\varphi)$. Os efeitos da retração podem ser incluídos separadamente, como uma flecha adicional (ver referência [8].)

A flecha de referência W_c, considerando a rigidez $E_{cs}I_c$ da seção de concreto simples, tem a expressão

$$W_c = \frac{C}{E_{cs}I_c} \qquad (7)$$

Para uma seção retangular com largura b, altura total h e altura útil d, pode-se escrever

$$I_c = \frac{bh^3}{12} \qquad (8)$$

$$K_I = k_1 bd^3 E_{cse} \ ; \ K_{II} = k_2 bd^3 E_{cse} \qquad (9)$$

onde os adimensionais k_1 e k_2 dependem das taxas de armadura ρ e ρ', da relação entre o módulo de elasticidade do aço e o módulo efetivo do concreto, $n = E_s/E_{cse}$, e do parâmetro $\delta = d'/d$ (ver referência [8]).

Observa-se que, para incluir a fluência do concreto, trabalha-se com o módulo efetivo E_{cse}.

Considerando as equações (6) a (9), pode-se mostrar que a equação (1) pode ser escrita na forma

$$W = \left(\frac{h}{d}\right)^3 (1+\varphi)\left(\frac{1-\eta}{12k_1} + \frac{\eta}{12k_2}\right) W_c \qquad (10)$$

O termo $\left(\frac{1-\eta}{12k_1} + \frac{\eta}{12k_2}\right)$ depende das taxas de armadura ρ e ρ', do coeficiente de fluência φ (que está inserido no parâmetro $n = E_s/E_{cse}$), da resistência à tração do concreto e do nível de carga, representado pelo parâmetro η.

Considerando os valores de referência já mencionados, pode-se escrever a relação aproximada

$$(1+\varphi)\left(\frac{1-\eta}{12k_1} + \frac{\eta}{12k_2}\right) = K_t(1-20\rho') \qquad (11)$$

onde K_t, dado em uma tabela em função da taxa de armadura tracionada ρ, foi ajustado pelo Autor [8] à expressão

$$K_t = 0{,}09547\rho^{-0{,}71186} \qquad (12)$$

A partir dessas considerações, chegou-se à expressão

$$\overline{W} = \left(\frac{h}{d}\right)^3 K_t(1-20\rho')W_c \qquad (13)$$

conforme consta no CEB/90[6].

4 – PRIMEIRA FÓRMULA PRÁTICA PROPOSTA

Seguindo o procedimento anterior, propõe-se uma fórmula prática melhorada, a qual permite levar em conta diferentes valores para φ, f_{ck} e η. Esse último parâmetro leva em conta a influência dos níveis de carregamento da viga.

Essa primeira fórmula prática proposta também é dependente das taxas de armadura ρ e ρ', o que permite que ela seja utilizada para calcular a flecha de uma viga em qualquer estágio do carregamento (evidentemente, dentro da validade do método bilinear).

Como os diversos parâmetros são incluídos, as expressões são mais complexas do que a fórmula do CEB. Porém, a precisão é melhorada, mantendo-se a facilidade de uso que se espera de um cálculo prático.

O momento de fissuração M_r é obtido através da equação (5), considerando a resistência à tração do concreto

$$f_{ct} = 1{,}40\left(\frac{f_{ck}}{10}\right)^{2/3} \text{, MPa} \qquad (14)$$

com f_{ck} em MPa.

O módulo secante do concreto é dado por

$$E_{cs} = 0{,}85x21500\left(\frac{f_{ck}+8}{10}\right)^{1/3} \text{, MPa} \qquad (15)$$

O parâmetro η é obtido das equações (2) e (3), conforme a intensidade do momento fletor M na seção crítica.

A flecha da viga é calculada com a expressão

$$W = \left(\frac{h}{d}\right)^3 (1+\varphi)\left[(1-\eta) f_1 + \eta f_2\right] W_c \qquad (16)$$

As funções f_1 e f_2, obtidas por regressão, são dadas por

$$f_1 = 0{,}75 - 0{,}85(n\rho) \qquad (17)$$

$$f_2 = c_1 (n\rho)^{c_2} \qquad (18)$$

$$c_1 = 0{,}247 - 0{,}078\frac{\rho'}{\rho} \qquad (19)$$

$$c_2 = -\left(0{,}786 + 0{,}088\frac{\rho'}{\rho}\right) \qquad (20)$$

$$n = \frac{E_s}{E_{cse}} = \frac{(1+\varphi)E_s}{E_{cs}} \qquad (21)$$

Observa-se que a relação modular, dada na equação (21), considera o coeficiente de fluência do concreto. Nessas expressões deve-se considerar a relação $\rho'/\rho \leq 1$. Se $\rho' > \rho$, deve-se adotar $\rho'/\rho = 1$.

5 – VERIFICAÇÃO DA PRIMEIRA FÓRMULA PRÁTICA

Para testar a precisão da primeira fórmula proposta, analisa-se a viga da fig. 1.

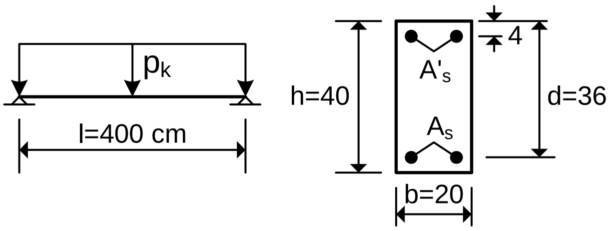

Fig. 1 – Viga biapoiada

Na tabela 1, indicam-se os valores da carga de serviço p_k, do momento máximo de serviço M_k e das áreas de aço obtidas no dimensionamento, considerando um concreto com $f_{ck} = 30$ MPa e o aço CA-50. Em todos os casos, resultou armadura simples, tendo sido adotada uma armadura de compressão com área $A'_s = 0{,}39$ cm^2, o que corresponde a duas barras de 5 mm.

Tabela 1 – Cargas e armaduras das vigas

p_k (kN/m)	M_k (kNm)	A_s (cm^2)	A'_s (cm^2)
5	10	1,39	0,39
10	20	1,85	0,39
15	30	2,81	0,39
20	40	3,82	0,39
25	50	4,86	0,39
30	60	5,95	0,39
35	70	7,10	0,39
40	80	8,30	0,39

Na tabela 2, apresentam-se as flechas máximas obtidas com o método bilinear e com a fórmula proposta, para o caso de carga de curta duração, ou seja, $\varphi = 0$.

Tabela 2 – Flechas para curta duração

p_k (kN/m)	W_a (mm)	W_b (mm)	$\frac{W_b}{W_a}$
5	0,53	0,56	1,06
10	5,71	5,80	1,02
15	7,16	7,40	1,03
20	7,98	8,35	1,05
25	8,56	9,00	1,05
30	8,99	9,46	1,05
35	9,32	9,79	1,05
40	9,59	10,04	1,05
Método bilinear: W_a Primeira fórmula proposta: W_b			

Na tabela 3, apresentam-se os resultados para coeficiente de fluência $\varphi = 2$. Neste caso, também se comparam os resultados obtidos com a fórmula prática do CEB (equação (13)).

Conforme se observa nas tabelas 2 e 3, a fórmula proposta apresenta excelente ajuste em relação ao método bilinear. Em geral, o erro é inferior a 10%.

A fórmula prática do CEB apresenta um erro maior, particularmente para vigas com baixo valor da carga de serviço.

Na fig. 2, apresentam-se as respostas carga-flecha para a viga cuja carga de serviço é $p_k = 20$ kN/m. Essa viga possui áreas de armadura iguais a $A_s = 3{,}82\ \text{cm}^2$ e $A'_s = 0{,}39\ \text{cm}^2$. Nesta figura, considera-se $\varphi = 0$.

Tabela 3 – Flechas para $\varphi = 2$

p_k (kN/m)	W_a (mm)	W_b (mm)	$\frac{W_b}{W_a}$	W_c (mm)	$\frac{W_c}{W_a}$
5	1,52	1,61	1,06	6,07	3,99
10	7,48	7,88	1,06	9,91	1,32
15	9,47	9,90	1,05	11,04	1,17
20	10,76	11,08	1,03	11,83	1,10
25	11,77	11,88	1,01	12,45	1,06
30	12,61	12,44	0,99	12,94	1,03
35	13,32	12,82	0,96	13,31	1,00
40	13,96	13,09	0,94	13,61	0,97

Método bilinear: W_a

Primeira fórmula proposta: W_b

Fórmula prática do CEB: W_c

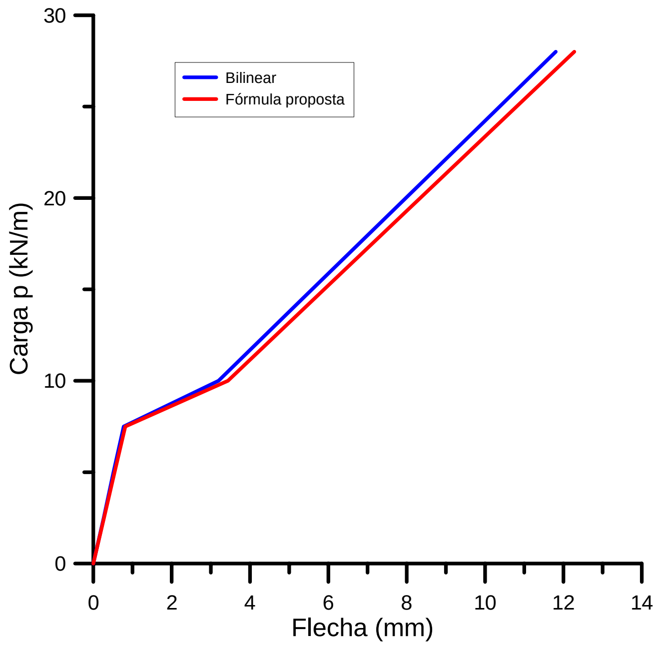

Fig. 2 – Relações carga-flecha ($\varphi = 0$)

Na fig. 3, apresentam-se as respostas para a mesma viga, considerando $\varphi = 2$. Neste caso, também é incluída a relação carga-flecha de acordo com a fórmula prática do CEB.

Conforme se observa pelas figuras 2 e 3, a fórmula proposta se aproxima bastante do método bilinear. Além disso, seus resultados são significativamente melhores do que aqueles obtidos com a fórmula prática do CEB.

Esse mesmo estudo foi feito para os tramos de extremidade das vigas contínuas, chegando-se ao mesmo nível de precisão. O comportamento das fórmulas aproximadas e as conclusões são as mesmas da viga biapoiada.

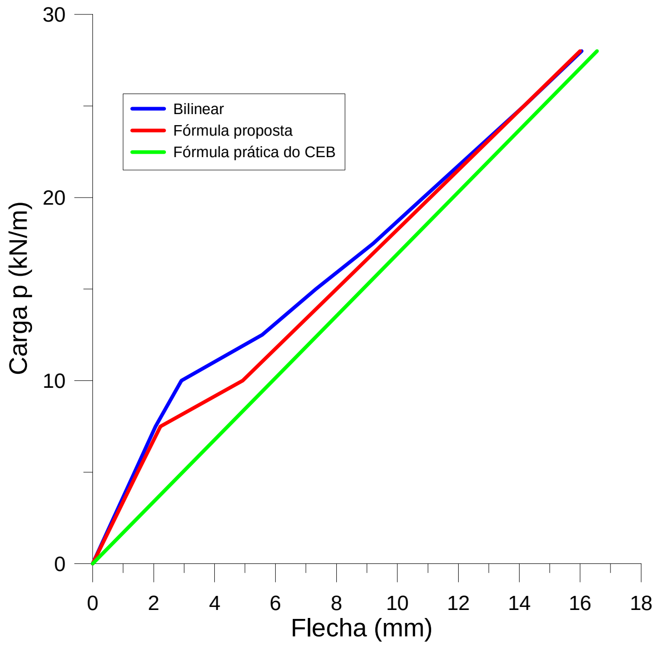

Fig. 3 – Relações carga-flecha ($\varphi = 2$)

A fórmula prática foi desenvolvida para seções retangulares. Ela pode ser empregada para outras formas de seção, mas os resultados serão menos precisos. Para isto, a seção deve ser transformada em um retângulo de mesma altura e com a largura calculada de forma a preservar o momento de inércia I_c da seção real. As taxas de armadura ρ e ρ' deve ser referidas à seção retangular equivalente.

A equação (16) não inclui os efeitos da retração do concreto. Conforme é apresentado na ref. [8], o acréscimo de flecha ΔW_{cs}, devido à retração, pode ser obtido por

$$\Delta W_{cs} = r_{cs2} \varepsilon_{cs} \frac{l^2}{8d} f_r \qquad (22)$$

onde l é o vão da viga, d é a altura útil, ε_{cs} é a deformação específica de retração e f_r é um coeficiente que vale 1,0 para as vigas biapoiadas e para os balanços, 0,7 para os vãos extremos das vigas contínuas e 0,5 para os vãos intermediários das vigas contínuas.

No caso dos balanços, o denominador 8 deve ser substituído por 2.

O coeficiente r_{cs2} encontra-se tabelado em função das taxas de armadura na ref. [8]. Como uma aproximação, esse coeficiente pode ser calculado como

$$r_{cs2} = 1{,}0 - 0{,}5\left(\frac{\rho'}{\rho}\right) \tag{23}$$

5 – SEGUNDA FÓRMULA PRÁTICA PROPOSTA

A fórmula prática proposta anteriormente só pode ser usada após o dimensionamento da viga, já que ela depende das taxas de armadura ρ e ρ'. Neste caso, utilizam-se as taxas que realmente serão empregadas na viga, as quais são obtidas em função das armaduras existentes nas seções críticas.

Entretanto, pode ser conveniente avaliar as flechas das vigas antes mesmo do dimensionamento e detalhamento das armaduras. Neste caso, as flechas poderiam ser determinadas juntamente com o cálculo dos esforços solicitantes, utilizando-se o mesmo programa de cálculo de esforços.

Para isto, admite-se que as armaduras existentes na viga sejam exatamente iguais às armaduras efetivamente obtidas no dimensionamento. Assim, dado o momento fletor M, realiza-se o dimensionamento e calcula-se a flecha com as armaduras obtidas.

Empregando-se essa solução e a equação (10), chegou-se a uma segunda fórmula prática através de regressão.

Nessa segunda fórmula, a flecha da viga é obtida através da expressão

$$W = \left(\frac{h}{d}\right)^3 \beta W_c \tag{24}$$

onde β depende da relação

$$\alpha = \left(\frac{M_r}{M}\right)^{1/2} \tag{25}$$

Se $\alpha \geq 1$, o coeficiente β é dado por

$$\beta = 0{,}75 + 0{,}65\varphi \tag{26}$$

Se $\alpha < 1$, tem-se

$$\beta = \frac{(1+0{,}2\varphi)(5{,}50\alpha - 0{,}75)}{1 + 0{,}01(f_{ck} - 30)} \geq 0 \tag{27}$$

Na equação (27), f_{ck} deve estar em MPa.

Deve-se observar que a equação (24) não serve para determinar uma resposta completa da viga. Essa fórmula pressupõe que as áreas de aço são aquelas requeridas pelo dimensionamento para o momento fletor de cálculo $M_d = 1{,}4M_k$. Logo, os resultados somente são corretos para o momento fletor $M = M_k$, ou seja, para o carregamento de serviço da viga.

Para determinar uma resposta carga-flecha, deve-se empregar a primeira fórmula prática, como mostrado anteriormente.

Havendo necessidade, a retração pode ser incluída como na primeira fórmula, podendo-se adotar $r_{cs2} = 1{,}0$ a favor da segurança.

Observa-se que o coeficiente β diminui com a redução de α, ou seja, com o aumento do momento fletor M. Isto ocorre porque, quanto maior for o momento M, maior será a área de aço da viga.

5 – VERIFICAÇÃO DA SEGUNDA FÓRMULA PRÁTICA

A viga da fig. 1 é empregada para a verificação da segunda fórmula prática.

Na tabela 4, apresentam-se os resultados para carga de curta duração ($\varphi = 0$). Na tabela 5, apresentam-se os resultados para $\varphi = 2$.

Tabela 4 – Flechas para curta duração

p_k (kN/m)	W_a (mm)	W_d (mm)	$\frac{W_d}{W_a}$
5	0,53	0,56	1,06
10	5,71	6,16	1,08
15	7,16	7,23	1,01
20	7,98	8,05	1,01
25	8,56	8,70	1,02
30	8,99	9,24	1,03
35	9,32	9,68	1,04
40	9,59	10,06	1,05
Método bilinear: W_a Segunda fórmula proposta: W_d			

Tabela 5 – Flechas para $\varphi = 2$

p_k (kN/m)	W_a (mm)	W_d (mm)	$\frac{W_d}{W_a}$
5	1,52	1,54	1,01
10	7,48	8,62	1,15
15	9,47	10,12	1,07
20	10,76	11,27	1,05
25	11,77	12,18	1,03
30	12,61	12,93	1,03
35	13,32	13,56	1,02
40	13,96	14,09	1,01
Método bilinear: W_a Segunda fórmula proposta: W_d			

Conforme se observa pelas tabelas 4 e 5, os resultados obtidos com a segunda fórmula prática são muito próximos do método bilinear. O nível de precisão é o mesmo obtido com a primeira fórmula, cujos resultados encontram-se nas tabelas 2 e 3.

Deve-se observar que os resultados das tabelas 2 e 3 também correspondem ao caso em que a armadura existente é igual à armadura calculada. Porém, uma vez que a primeira fórmula depende de ρ e ρ' de maneira explícita, ela pode ser empregada mesmo que a armadura existente seja bem diferente da armadura calculada. Com isso, pode-se obter a flecha de uma viga nos diversos estágios do carregamento.

Por outro lado, na segunda fórmula subentende-se que a armadura existente é igual à armadura calculada. Logo, essa segunda fórmula só pode ser usada para avaliar a flecha das vigas sob as cargas de serviço.

6 – A RIGIDEZ EQUIVALENTE

Ao se fazer a análise estrutural de uma estrutura mais complexa, como, por exemplo, o pavimento completo de um edifício, composto por várias vigas e lajes, pode ser conveniente introduzir a não linearidade física de maneira aproximada, sem a necessidade da realização de uma análise iterativa e incremental. Isto pode ser feito adotando-se rigidezes equivalentes para os elementos estruturais.

Quando se emprega o Método dos Elementos Finitos, as vigas são discretizadas em vários pequenos elementos, devendo-se atribuir uma rigidez equivalente para cada um desses elementos.

Um procedimento bastante utilizado consiste em fazer uma primeira análise elástica linear, considerando as rigidezes das seções de concreto simples das vigas e das lajes no estado não fissurado. Dessa análise, obtêm-se os esforços solicitantes de cálculo, com os quais são dimensionadas as armaduras. Em seguida, a estrutura é analisada novamente, considerando as combinações de serviço das ações e atribuindo-se rigidezes equivalentes para os elementos finitos. Com isso, avaliam-se as deformações da estrutura com a consideração dos efeitos da fissuração e da fluência do concreto e incluindo as armaduras obtidas no dimensionamento.

Uma vez que a primeira fórmula prática proposta permite obter a flecha das vigas nos diversos estágios do carregamento, ou seja, para diversos valores do momento fletor M, ela também pode ser empregada para a determinação da rigidez equivalente dos elementos finitos de vigas.

De modo análogo à equação (7), a equação (16) também pode ser escrita na forma

$$W = \frac{C}{EI_{eq}} \tag{28}$$

onde EI_{eq} é a rigidez equivalente.

Substituindo a equação (7) em (16) e considerando a equação (28), obtém-se

$$EI_{eq} = \left(\frac{d}{h}\right)^3 \frac{E_{cs} I_c}{(1+\varphi)\left[(1-\eta) f_1 + \eta f_2\right]} \tag{29}$$

O coeficiente η é dado nas equações (2) e (3), considerando o momento fletor máximo M que atua no elemento finito de viga. As funções f_1 e f_2 são determinadas a partir das taxas de armadura ρ e ρ' do elemento.

Observa-se que, para o emprego da equação (29), M é o momento máximo em cada elemento e não mais o momento na seção crítica da viga. Desse modo, cada elemento finito terá uma rigidez equivalente diferente, mesmo que a armadura seja constante em todo o vão da viga. A análise estrutural é feita para uma viga de rigidez variável.

7 - CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentada a origem da fórmula prática do CEB para o cálculo de flechas das vigas de concreto armado. Essa fórmula possui boa precisão para o nível de carregamento de serviço a que as vigas dos edifícios estão submetidas usualmente. A fórmula apresenta valores razoáveis da flecha para concretos com resistência característica à compressão f_{ck} da ordem de 20 a 25 MPa e coeficiente de fluência $\varphi \cong 2$.

Com base no mesmo procedimento, foram desenvolvidas duas fórmulas práticas para o cálculo de flechas de vigas. A primeira fórmula depende das taxas de armadura efetivamente usadas na viga e serve para o cálculo das flechas em vários estágios do carregamento. Essa fórmula é ideal para verificações, após a escolha das armaduras das vigas. Ela também permite o cálculo da rigidez equivalente, como foi mostrado.

A segunda fórmula foi determinada, considerando que as armaduras existentes na viga são aquelas obtidas no dimensionamento. Desse modo, a fórmula não depende explicitamente das armaduras. Essa fórmula permite calcular a flecha da viga para a carga de serviço, antes do dimensionamento, podendo ser inserida diretamente no programa de cálculo dos esforços.

A precisão das duas fórmulas foi demonstrada através de comparações com os resultados do método bilinear.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Araújo, J. M. – *Modelo para análise de vigas de concreto armado*. Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas, No. 32, p.9-14, Lisboa, Julho, 1991.

2. Araújo, J. M. *Processos simplificados para cálculo de flechas de vigas de concreto armado.* Revista Teoria e Prática na Engenharia Civil, n. 5, p.1-10, Ed. Dunas, Rio Grande, Agosto, 2004.

3. Araújo, J. M. *Simplified procedures for calculation of instantaneous and long-term deflections of reinforced concrete beams.* Revista Engenharia Civil da Universidade do Minho, n.24, p.57-68, Setembro, 2005, Portugal.

4. Araújo, J. M. *Improvement of the ACI method for calculation of deflections of reinforced concrete beams.* Revista Teoria e Prática na Engenharia Civil, n. 7, p.49-60, Ed. Dunas, Rio Grande, Setembro, 2005.

5. Comité Euro-International du Béton – *CEB Design Manual on Cracking and Deformations.* Lausanne, 1985.

6. Comité Euro-International du Béton - *CEB-FIP Model Code 1990*. Lausanne, 1993.

7. Associação Brasileira de Normas Técnicas - *Projeto de Estruturas de Concreto*. *NBR-6118*. Rio de Janeiro, 2003.

8. Araújo, J. M. *Curso de Concreto Armado*, v.2, 3.ed., Ed. Dunas, Rio Grande, 2010.