

# ANÁLISE NUMÉRICA DA DINÂMICA DE CABOS ALTAMENTE EXTENSÍVEIS

LIÉRCIO A. ISOLDI<sup>\*</sup>  
MÁRIA ANGELA V. DOS SANTOS<sup>\*\*</sup>

## RESUMO

A mecânica de cabos altamente extensíveis deve ser estudada numericamente. Para isso, implementamos computacionalmente a solução de um sistema de equações capaz de descrever o movimento de cabos extensíveis em ruptura. Foi utilizado um sistema local e um sistema global de referência. Empregamos os parâmetros de Euler para representar a rotação relativa entre estes sistemas de coordenadas, evitando assim a singularidade associada aos ângulos de Euler. Foi necessária ainda a inclusão da rigidez flexional nas equações de governo, devido à possibilidade do esforço axial, em alguma parte do cabo, atingir um valor nulo ou negativo. Utilizamos um esquema implícito de diferenças finitas para obtermos a solução numérica das equações de governo. Este modelo numérico foi usado para analisarmos o comportamento dinâmico de um cabo sintético durante e após sofrer uma ruptura. Observamos que a tração estática inicial do cabo é um fator determinante, e que um tempo de ruptura maior possibilita uma melhor dissipação de energia ao longo do cabo, tornando-o menos destrutivo que um cabo que se rompe rapidamente.

**PALAVRAS-CHAVE:** Cabos altamente extensíveis; análise dinâmica; diferenças finitas.

## ABSTRACT

### **Numerical analysis of dynamics of highly extensible cables**

The mechanics of highly extensible cables must be studied by numerical methods. For that reason, the computational implementation of a system of equations, which is capable to describe the motion of extensible cables in rupture, was developed. A local and a global system of reference were employed. Euler's parameters were used to represent the relative rotation between these systems of coordinates, avoiding the singularity associated to Euler's angles. It was necessary to include bending-stiffness in the governing equations, since a null or negative value of the axial stress in some part of the cable is possible. An implicit finite difference scheme was used to obtain the numerical solution of governing equations. This

---

<sup>\*</sup> Engenheiro Mecânico e Engenheiro Civil – Mestre em Engenharia Oceânica – liercioisoldi@bol.com.br

<sup>\*\*</sup> Professora do Dep. de Materiais e Construção – FURG – angela@dmc.furg.br.

numerical model was used to analyze the dynamic behavior of a synthetic cable during and after a rupture. It was observed that the initial static tension of the cable is a decisive factor and when rupture takes a long time to occur a better dissipation of energy along the cable takes place. Hence, this cable is less destructive than a cable breaking quickly.

**KEY-WORDS:** Highly extensible cables; dynamic analysis; finite difference.

## 1 – INTRODUÇÃO

Os cabos sintéticos apresentam, para determinadas aplicações, vantagens em relação aos cabos metálicos, pois são consideravelmente mais leves e podem absorver movimentos dinâmicos impostos, através de sua extensão, sem causar uma sollicitação dinâmica excessiva. Cabos sintéticos extensíveis são caracterizados por valores do módulo de Young significativamente menores se comparados com cabos metálicos e, conseqüentemente, uma maior extensibilidade sob condições normais de operação. Considerando que a máxima deformação em cabos metálicos sob tensão de ruptura é da ordem de 2%, alguns cabos sintéticos alcançam ou excedem uma deformação máxima de 25% (TRIANAFYLLOU; YUE, 1995). O baixo módulo de elasticidade afeta tanto suas propriedades de flexão como seu comportamento elástico. A rigidez flexional dos cabos sintéticos é de duas a três vezes menor que a dos cabos de aço, para uma mesma sollicitação (TJAVARAS, 1996).

Cabos sintéticos possuem uma relação tensão-deformação não-linear, que faz com que a velocidade de propagação da onda elástica varie ao longo do cabo, uma vez que a tração, geralmente, também varia ao longo do cabo. A incerteza associada ao comportamento dinâmico de cabos sintéticos faz com que altos fatores de segurança sejam empregados em determinados casos (TJAVARAS, 1996).

Este trabalho tem como objetivo a implementação computacional e a validação de um algoritmo para obter a solução das equações que descrevem o movimento de cabos altamente extensíveis durante e após sofrer uma ruptura. O caso estudado comprovou a adequação da simulação numérica como um método que pode prever o movimento realizado por um cabo em ruptura.

## 2 – MATERIAIS E MÉTODOS

Foram empregados dois sistemas de coordenadas, um global e um local. Aplicamos os parâmetros de Euler para representar a rotação relativa entre estes sistemas, evitando assim singularidades.

Realizamos o balanço de forças e de momentos para um segmento infinitesimal do cabo. Utilizamos as relações de compatibilidade, assegurando assim a continuidade entre estes segmentos. E, ainda, as derivadas espaciais dos parâmetros de Euler foram empregadas. Dessa forma, obtemos um sistema de equações que representa o movimento do cabo. A inclusão da rigidez flexional nas equações de governo foi necessária para situações em que o esforço axial, em alguma parte do cabo, se torne nulo ou negativo. E, então, uma relação tensão-deformação não-linear foi definida. Um esquema implícito de integração numérica foi usado, o qual permitiu uma simulação com um pequeno erro global.

## 2.1 – Modelagem matemática

As principais suposições sob as quais as equações de movimento foram desenvolvidas são: a seção transversal do cabo é homogênea, circular ou anelar; as propriedades do cabo podem variar ao longo do seu comprimento; o modelo viga Euler-Bernoulli é aplicado ao cabo, representando adequadamente os problemas de flexão; a tração em qualquer ponto do cabo é uma função estimada da deformação neste ponto (TJAVARAS, 1996).

Foram definidos, então, dois sistemas de coordenadas:  $(X, Y, Z)$ , um sistema espacial fixo em um sistema de coordenadas retangulares com vetores unitários  $\hat{i}, \hat{j}$  e  $\hat{k}$ ;  $(x, y, z)$ , um sistema local em um sistema Lagrangiano de referência com vetores unitários  $\hat{t}, \hat{n}$  e  $\hat{b}$ , onde  $\hat{t}$  aponta na direção da tangente do cabo,  $\hat{n}$  na direção da máxima curvatura (direção normal) e  $\hat{b}$  na direção binormal, como mostrado na figura 1 (TJAVARAS et al., 1998).

Os vetores  $\hat{t}, \hat{n}$  e  $\hat{b}$  podem ser escritos como combinação linear dos vetores  $\hat{i}, \hat{j}$  e  $\hat{k}$ :

$$\begin{bmatrix} \hat{t} \\ \hat{n} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = [C] \begin{bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

A matriz  $[C]$  é chamada de matriz de rotação, pois descreve a rotação entre o sistema fixo e o sistema local de referência. Como o sistema local de coordenadas varia ao longo do comprimento do cabo e com o

tempo, temos então a matriz de rotação  $[C] = [C(s,t)]$ . (TJAVARAS, 1996; TJAVARAS et al. 1998).

Um método que normalmente é usado para obter a matriz de rotação consiste em empregar os ângulos de Euler. Sua desvantagem é a conhecida singularidade envolvida no método, a qual inviabiliza a utilização de uma das derivadas espaciais dos ângulos de Euler, como apresentado em TJAVARAS (1996). Então, um método alternativo para descrever a rotação, a partir do sistema fixo de referência para um Lagrangiano, usando os parâmetros de Euler, os quais não apresentam singularidades, foi desenvolvido por HOVER (1997). A matriz de rotação produzida por esse método é escrita em termos de quatro parâmetros escalares, chamados de parâmetros de Euler. O método é baseado no teorema principal da rotação derivado por Euler: uma mudança arbitrária de orientação pode ser conseguida por uma rotação simples através do ângulo principal  $\alpha$  sobre o vetor unitário principal  $\hat{I}$ . Os quatro parâmetros de Euler são definidos em termos de  $\alpha$  e das componentes de  $\hat{I}$ :

$$\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha/2) \\ I_x \sin(\alpha/2) \\ I_y \sin(\alpha/2) \\ I_z \sin(\alpha/2) \end{bmatrix} \quad (2)$$

dessa forma, a matriz de rotação pode ser escrita como:

$$[C] = \begin{bmatrix} \beta_0^2 + \beta_1^2 - \beta_2^2 - \beta_3^2 & 2(\beta_1\beta_2 + \beta_0\beta_3) & 2(\beta_1\beta_3 - \beta_0\beta_2) \\ 2(\beta_1\beta_2 - \beta_0\beta_3) & \beta_0^2 - \beta_1^2 + \beta_2^2 - \beta_3^2 & 2(\beta_2\beta_3 + \beta_0\beta_1) \\ 2(\beta_1\beta_3 + \beta_0\beta_2) & 2(\beta_2\beta_3 - \beta_0\beta_1) & \beta_0^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2 + \beta_3^2 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Sendo  $\overset{P}{G}(s,t)$  um vetor arbitrário que pode ser transformado entre os sistemas de coordenadas através da matriz  $[C]$ ;  $\overset{P}{\omega}(s,t)$  a velocidade angular do sistema local em relação ao sistema fixo de referência, e  $\overset{P}{\Omega}(s,t) = \Omega_1 \overset{P}{t} + \Omega_3 \overset{P}{b}$  o vetor de Darboux, sendo  $\Omega_1 = \tau$  a componente relacionada com a torção e  $\Omega_3 = \kappa$  com a curvatura do cabo, conforme apresentado em LANDAU e LIFSHITZ (1999), indicando

a curvatura local do cabo, podemos obter as derivadas de  $\overset{p}{G}$  como:

$$\frac{D\overset{p}{G}}{Dt} = \frac{\partial\overset{p}{G}}{\partial t} + \overset{p}{\omega} \times \overset{p}{G} \quad (4)$$

e

$$\frac{D\overset{p}{G}}{Ds} = \frac{\partial\overset{p}{G}}{\partial s} + \overset{p}{\Omega} \times \overset{p}{G}. \quad (5)$$

Então, considerando um segmento infinitesimal do cabo de comprimento indeformado  $ds$ , centrado no ponto  $s$ , como mostrado na figura 1, e sob a ação de forças internas e externas e de momentos, o segmento  $ds$  se alonga até o comprimento  $ds_1$ .

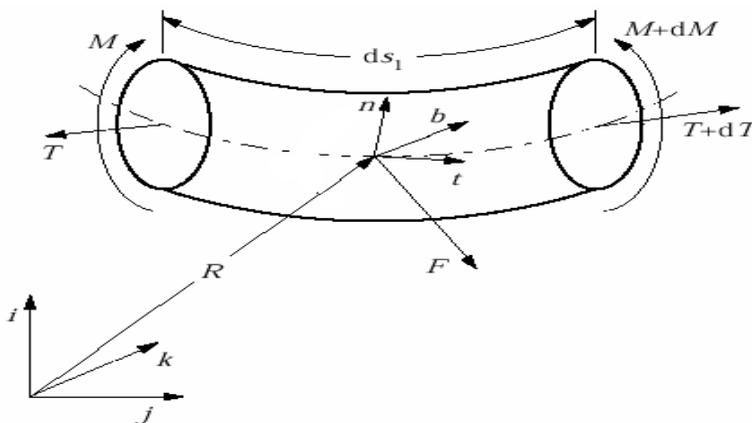


FIGURA 1 – Segmento do cabo

A posição deste ponto  $s$  em qualquer tempo  $t$  é dada pelo vetor  $\overset{p}{R}(s,t)$ , e o vetor velocidade é definido por:

$$\overset{p}{V} = \frac{\partial\overset{p}{R}}{\partial t} = u\overset{p}{t} + v\overset{p}{h} + w\overset{p}{b} = U\overset{p}{i} + V\overset{p}{j} + W\overset{p}{k}. \quad (6)$$

A deformação específica  $\varepsilon(s,t)$  no ponto  $s$  do cabo é definida como:

$$\varepsilon = \frac{ds_1 - ds}{ds}. \quad (7)$$

O vetor tangente  $\overset{p}{t}(s, t)$  à linha de centro do cabo é dado por:

$$\overset{p}{t} = \frac{\partial \overset{p}{R}}{\partial s_1}. \quad (8)$$

Para cabos sintéticos, o coeficiente de Poisson é  $\nu = 0,5$ , o qual indica que o volume de qualquer segmento do cabo é conservado após a sua deformação, então:

$$A_1 = A \frac{ds}{ds_1} = A \frac{1}{1 + \varepsilon}, \quad (9)$$

onde  $A$  e  $A_1$  são as áreas de seção transversal do cabo antes e depois do alongamento, respectivamente.

Sendo  $m$  a massa por unidade de comprimento do cabo e  $m_1$  a massa por unidade de comprimento após o alongamento, o princípio da conservação da massa para o segmento  $ds$  do cabo nos fornece

$$m_1 = m \frac{ds}{ds_1} = m \frac{1}{1 + \varepsilon}. \quad (10)$$

Portanto, com o vetor força interna  $\overset{p}{T} = T \overset{p}{t} + S_n \overset{p}{h} + S_b \overset{p}{b}$ , aplicando a segunda lei de Newton no segmento do cabo e empregando as equações (4), (5), (7) e (10), temos:

$$m \left( \frac{\partial \overset{p}{V}}{\partial t} + \overset{p}{\omega} \times \overset{p}{V} \right) = \frac{\partial \overset{p}{T}}{\partial s} + \Omega \times \overset{p}{T} + (1 + \varepsilon) \overset{p}{F}, \quad (11)$$

onde  $T$  é a tração,  $S_n$  e  $S_b$  são os esforços de corte nas direção normal e binormal,  $\overset{p}{F}$  representa as forças externas totais por unidade de comprimento e  $(1 + \varepsilon) \overset{p}{F} = -w_0 \overset{p}{t}$ , sendo  $w_0$  o peso do cabo.

O vetor momento interno  $\overset{p}{M} = M_t \overset{p}{t} + M_n \overset{p}{h} + M_b \overset{p}{b}$ , onde  $M_t = G I_p \Omega_1$  é a componente torcional e  $M_n = E I \Omega_2$  e  $M_b = E I \Omega_3$

são as componentes flexionais, sendo  $EI$  a rigidez flexional e  $GI_p$  a rigidez torcional do cabo. Com isso, a equação do equilíbrio de momentos é dada por:

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)^2} \frac{\partial \overset{V}{M}}{\partial s} + \frac{1}{(1+\varepsilon)^2} \overset{p}{\Omega} \times \overset{p}{M} + (1+\varepsilon) \overset{p}{t} \times \overset{p}{T} = 0. \quad (12)$$

Para assegurarmos a continuidade entre os diversos segmentos do cabo, é necessário empregarmos relações de compatibilidade. O vetor  $\overset{p}{R}$  e suas derivadas são contínuas no tempo e no espaço, portanto, temos:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \overset{p}{t} + (1+\varepsilon) \overset{p}{\omega} \times \overset{p}{t} = \frac{\partial \overset{V}{V}}{\partial s} + \overset{p}{\Omega} \times \overset{p}{V}. \quad (13)$$

E, finalmente, como apresentado em HOVER (1997), as derivadas espaciais dos parâmetros de Euler são definidas como:

$$\frac{\partial \overset{p}{\beta}}{\partial s} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \beta_0 & -\beta_1 & -\beta_2 & -\beta_3 \\ \beta_1 & \beta_0 & -\beta_3 & \beta_2 \\ \beta_2 & \beta_3 & \beta_0 & -\beta_1 \\ \beta_3 & -\beta_2 & \beta_1 & \beta_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \overset{p}{\Omega} \end{Bmatrix}. \quad (14)$$

Como em TJAVARAS et al. (1998), a tração  $T$  e a deformação específica  $\varepsilon$ , para qualquer ponto ao longo do cabo, estão relacionadas pela seguinte relação tração-deformação experimental:

$$T = f(\varepsilon) = p_1 \tanh(p_2 \varepsilon + p_3) + p_4 + p_5 \varepsilon, \quad (15)$$

onde  $p_1 = 2,703 \times 10^5 \text{ N}$ ,  $p_2 = 10,2$ ,  $p_3 = -2,128$ ,  $p_4 = 2,627 \times 10^5 \text{ N}$  e  $p_5 = 135,5 \text{ N}$ .

O sistema de equações do movimento pode ser escrito na forma matricial como:

$$\frac{\partial \overset{V}{Y}}{\partial s} + [M] \overset{p}{(Y)} \frac{\partial \overset{V}{Y}}{\partial t} + \overset{p}{P} \overset{p}{(Y)} = 0. \quad (16)$$

Como o caso em estudo se trata de um problema bidimensional, o vetor das variáveis dependentes se torna:

$$\overset{p}{Y} = [\varepsilon \ S_n \ u \ v \ \beta_0 \ \beta_3 \ \Omega_3]^T, \quad (17)$$

e a matriz  $[M]$  e o vetor  $\overset{p}{P}$  assumem, respectivamente, a forma:

$$[M(\overset{p}{Y})] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{m}{f'(\varepsilon)} & 0 & -\frac{2m(v\beta_3)}{f'(\varepsilon)} & \frac{2m(v\beta_0)}{f'(\varepsilon)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m & 2m(u\beta_3) & -2m(u\beta_0) & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\varepsilon)\beta_3 & -2(1+\varepsilon)\beta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\overset{p}{P}(\overset{p}{Y}) = \begin{bmatrix} -\frac{S_n\Omega_3}{f'(\varepsilon)} - \frac{w_0}{f'(\varepsilon)}(\beta_0^2 - \beta_3^2) \\ f(\varepsilon)\Omega_3 + 2w_0(\beta_0\beta_3) \\ -\Omega_3v \\ \Omega_3u \\ \frac{1}{2}(\beta_3\Omega_3) \\ -\frac{1}{2}(\beta_0\Omega_3) \\ \frac{1}{EI}S_n(1+\varepsilon)^3 \end{bmatrix} \quad (19)$$

## 2.2 – Método numérico

Conforme TAVARAS et al. (1998), um esquema implícito de diferenças finitas, conhecido como método da caixa, foi empregado para a discretização das equações de governo. O cabo foi dividido em  $n_p - 1$  segmentos discretos, de comprimento indeformado  $\Delta s(k)$ , através de  $n_p$  pontos numerados ( $k = 1, 2, \dots, n_p$ ). O comprimento dos segmentos não é necessariamente constante ao longo do cabo. Isso nos permite

empregar uma grade mais fina nas regiões do cabo onde são esperadas maiores variações nos valores das incógnitas. Definimos o comprimento discreto  $\Delta s_{(k)}$  como o comprimento do segmento entre os pontos computacionais  $k$  e  $k + 1$ . A cada instante de tempo  $t_i$ , conhecemos os valores das variáveis desconhecidas  $Y_{k,i-1}$ , em todos os pontos ( $k = 1, 2, \dots, n_p$ ) do cabo, no passo de tempo anterior  $t_{i-1} = t_i - \Delta t$ , onde  $\Delta t$  é o passo de tempo, e que será mantido constante. É necessário, então, calcularmos os valores das variáveis desconhecidas no instante atual de tempo  $Y_{k,i}$ . Para realizarmos isso, escrevemos a forma discreta do sistema das equações do movimento (16) no centro de cada “caixa computacional”  $(k - \frac{1}{2}, i - \frac{1}{2})$ . Então, aproximamos o valor das incógnitas no centro da caixa por:

$$\overset{p}{Y}_{k-\frac{1}{2},i-\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{1}{4}(\overset{p}{Y}_{k-1,i-1} + \overset{p}{Y}_{k-1,i} + \overset{p}{Y}_{k,i-1} + \overset{p}{Y}_{k,i}), \quad (20)$$

e as derivadas no tempo e no espaço das variáveis dependentes, respectivamente, por:

$$\left(\frac{\partial \overset{p}{Y}}{\partial t}\right)_{k-\frac{1}{2},i-\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{1}{2} \left( \frac{\overset{p}{Y}_{k-1,i} - \overset{p}{Y}_{k-1,i-1}}{\Delta t} + \frac{\overset{p}{Y}_{k,i} - \overset{p}{Y}_{k,i-1}}{\Delta t} \right), \quad (21)$$

$$\left(\frac{\partial \overset{p}{Y}}{\partial s}\right)_{k-\frac{1}{2},i-\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{1}{2} \left( \frac{\overset{p}{Y}_{k,i-1} - \overset{p}{Y}_{k-1,i-1}}{\Delta s_{(k-1)}} + \frac{\overset{p}{Y}_{k,i} - \overset{p}{Y}_{k-1,i}}{\Delta s_{(k-1)}} \right). \quad (22)$$

Então, com as equações (20), (21) e (22), a aproximação discreta para o sistema de equações diferenciais parciais para o movimento do cabo, no ponto  $k - \frac{1}{2}, i - \frac{1}{2}$ , é dada por:

$$\begin{aligned} & 2\Delta t(\overset{p}{Y}_{k,i} - \overset{p}{Y}_{k-1,i} + \overset{p}{Y}_{k,i-1} - \overset{p}{Y}_{k-1,i-1}) + \\ & \Delta s_{(k)}([M_{k-1,i}] + [M_{k-1,i-1}])(\overset{p}{Y}_{k-1,i} - \overset{p}{Y}_{k-1,i-1}) + ([M_{k,i}] + [M_{k,i-1}])(\overset{p}{Y}_{k,i} - \overset{p}{Y}_{k,i-1}) + \\ & \Delta t \Delta s_{(k)}(\overset{p}{P}_{k-1,i-1} + \overset{p}{P}_{k-1,i} + \overset{p}{P}_{k,i-1} + \overset{p}{P}_{k,i}) = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Desta maneira, para cada ponto central  $(k - \frac{1}{2}, i - \frac{1}{2})$ , temos um sistema de  $n_e$  equações;  $n_e = 7$  é o número de equações do sistema (16), e também é o tamanho do vetor da variável dependente  $\check{Y}$ . Estas  $n_e$  equações envolvem as variáveis dependentes de dois pontos vizinhos,  $k - 1$  e  $k$ . Então, escrevendo a equação (23) para todos os pontos  $(k - \frac{1}{2}, i - \frac{1}{2})$ ,  $k = 2, 3, \dots, n_p$ , totalizamos  $n_e \cdot (n_p - 1)$  equações com  $n_e \cdot n_p$  incógnitas. As incógnitas são os valores das variáveis dependentes  $\check{Y}_{k,i}$ , para  $k = 1, 2, \dots, n_p$ . As  $n_e$  equações necessárias para tornarmos o sistema solucionável são fornecidas pelas condições de contorno nos pontos  $k = 1$  e  $k = n_p$ , e foram definidas respectivamente como:

$$\begin{cases} u = 0; \\ v = 0; \\ \frac{\partial \Omega_3}{\partial t} = 0. \end{cases} \quad (24)$$

e

$$\begin{cases} f(\epsilon) \geq T \geq 0 \text{ p/ tempo} < t_{br} \text{ ou } T = 0 \text{ p/ tempo} > t_{br} \\ S_{n\text{est.}} \geq S_n \geq 0 \text{ p/ tempo} < t_{br} \text{ ou } S_n = 0 \text{ p/ tempo} > t_{br} \\ \frac{\partial \Omega_3}{\partial t} = 0 \\ \beta_0^2 + \beta_3^2 = 1 \end{cases} \quad (25)$$

sendo  $t_{br}$  o tempo de ruptura.

Com o objetivo de obtermos a solução do sistema de equações para as variáveis dependentes, é necessário o cálculo analítico Jacobiano do sistema, obtendo assim um código numérico bastante eficaz, que foi resolvido através do método de Fatoração LU com pivotamento.

A condição inicial para a solução da análise dinâmica é a solução da análise estática, que, por sua vez, tem como condição inicial o cabo em catenária. O sistema de equações para a análise estática pode ser

facilmente deduzido, considerando, no sistema de equações do movimento, a velocidade do cabo e todas as derivadas no tempo como nulas. As condições de contorno para a análise estática foram, para o nó 1 e para o nó  $n_p$ , respectivamente:

$$\begin{cases} S_n = 0 \\ T = f(\epsilon) = \text{cte} \end{cases} \quad (26)$$

e

$$\begin{cases} S_n = 0 \\ T = f(\epsilon) = \text{cte.} \\ \beta_0^2 + \beta_3^2 = 1 \end{cases} \quad (27)$$

### 2.3 – Caso em estudo

Consideramos um cabo sintético com 60 m de comprimento, com suas extremidades fixas em um mesmo nível vertical, sendo seu vão de 54,12 m. O cabo assume uma forma de catenária que se desenvolve em um plano vertical contendo as suas duas extremidades. As dimensões iniciais e as propriedades físicas do cabo são:

comprimento inicial	→ $\lambda = 60 \text{ m};$
diâmetro	→ $d = 0,05 \text{ m};$
área de seção transversal	→ $A = 1,964 \times 10^{-3} \text{ m}^2;$
massa específica	→ $\rho = 1140 \text{ kg/m}^3;$
módulo de elasticidade	→ $E = 230 \text{ MPa};$
módulo de elasticidade transversal	→ $G = 76,67 \text{ MPa};$
coeficiente de Poisson	→ $\nu = 0,5.$

Consideramos também que o cabo foi fixado em sua posição inicial por forças horizontais e verticais aplicadas às suas extremidades, e que no tempo  $t = 0$  o cabo se rompe em uma destas extremidades. Com o objetivo de simularmos essa ruptura, as forças horizontal e vertical, nesta extremidade, são suavemente, mas rapidamente, reduzidas a zero. A força horizontal,  $F_h$ , e a força vertical,  $F_v$ , tornam-se nulas em  $t = t_{br}$ , chamado de tempo de ruptura, o qual é considerado como um parâmetro crítico do problema. A variação dessas forças com

o tempo é modelada como:

$$F_h = F_{h,s} \cos^2\left(\frac{\pi t}{2 t_{br}}\right) \quad (28)$$

e

$$F_v = F_{v,s} \cos^2\left(\frac{\pi t}{2 t_{br}}\right), \quad (29)$$

onde  $F_{h,s}$  e  $F_{v,s}$  são as forças estáticas horizontal e vertical na extremidade do cabo, respectivamente.

### 3 – RESULTADOS E DISCUSSÃO

Desenvolvemos simulações para dois tempos de ruptura diferentes, chamados, respectivamente, de ruptura rápida e ruptura lenta. Para cada um desses tempos, aplicamos ao cabo dois valores de tração estática inicial, totalizando quatro simulações.

O cabo foi modelado com 141 pontos, sendo que a parte próxima à extremidade fixa (extremidade esquerda) possui um refino de malha, com o comprimento dos segmentos em torno 0,15 m. Esta malha refinada foi empregada até o comprimento de 3,5 m, onde os segmentos discretos passam a ter comprimento de aproximadamente 0,5 m, até sua extremidade direita.

Os valores de tração estática inicial empregados foram de: (a) 180000 N, que produziu uma deformação estática de 17,8 %; e (b) 315000 N, impondo uma deformação estática de 22,8 % ao cabo.

#### 3.1 – Ruptura rápida

Empregamos aqui um tempo de ruptura de 5 ms. As sucessivas configurações de cada solução foram plotadas em intervalos de 10 ms; o tempo total de simulação,  $t_T$ , foi de 0,14 s e 0,13 s; o intervalo de tempo,  $\Delta t$ , foi de 0,001 s e 0,0005 s, respectivamente.

Na figura 2 mostramos os resultados obtidos para o movimento do cabo durante e após sua ruptura. É importante salientarmos que estes resultados não foram plotados em escala; os deslocamentos verticais foram ampliados por um fator de 100, com relação aos deslocamentos horizontais, com o objetivo de facilitar a interpretação, já que, em um pequeno intervalo de tempo após a ruptura, estes são da

ordem de centímetros. A figura 3 ilustra a variação da tração ao longo do cabo em função do tempo, e na figura 4 mostramos a variação com o tempo da velocidade de cada ponto do cabo.

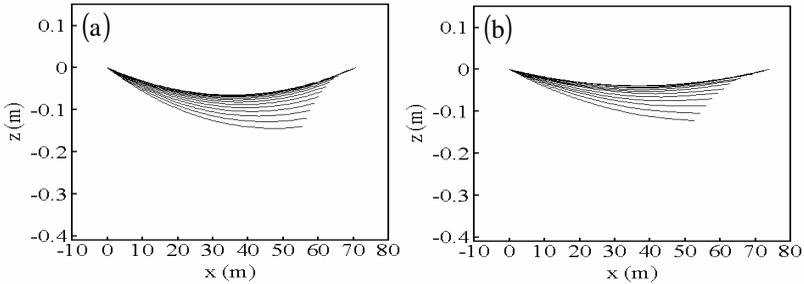


FIGURA 2 – Movimento do cabo, para  $t_{br}=5$  ms: (a)  $T=180000$  N e (b)  $T=315000$  N

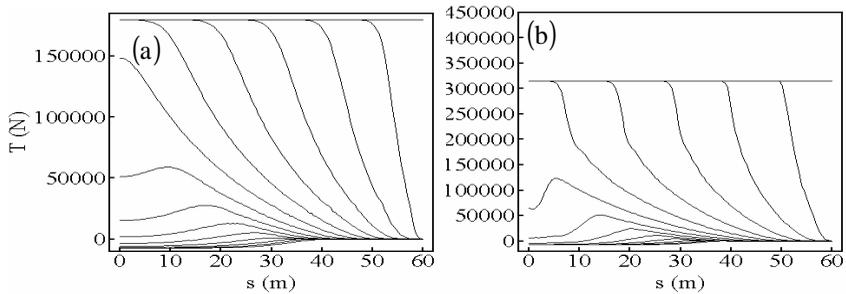


FIGURA 3 – Variação de tração no cabo, para  $t_{br}=5$  ms: (a)  $T=180000$  N e (b)  $T=315000$  N

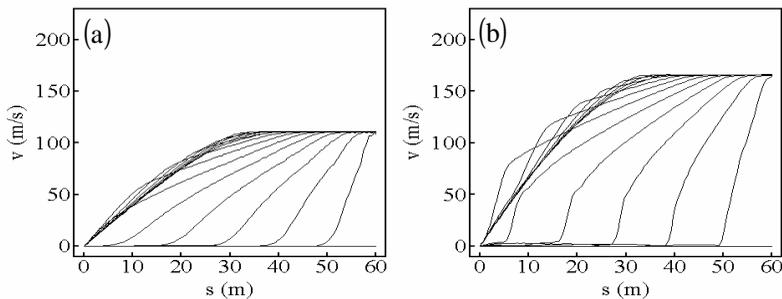


FIGURA 4 – Variação de velocidade no cabo, para  $t_{br}=5$  ms:  
(a)  $T=180000$  N e (b)  $T=315000$  N

Podemos observar, na figura 2, que cabos submetidos a trações mais elevadas, ao sofrerem a ruptura, respondem com uma maior

energia cinética, devido a uma maior energia potencial armazenada. Isso é comprovado pelo maior movimento horizontal descrito por estes. Notamos também que à medida que a tração estática aumenta ocorre uma diminuição no movimento vertical do cabo.

No que diz respeito à variação da tração ao longo do cabo, a linha praticamente horizontal na parte superior de cada gráfico da figura 3 representa a tração estática inicial da simulação. As linhas que seguem esta linha inicial mostram a tração reduzindo até zero na extremidade direita, e uma instabilidade na tração na direção da extremidade fixa. Essa instabilidade tem uma velocidade de propagação definida por:

$$c_{nl} = \sqrt{\frac{T'(\epsilon)}{m}}, \quad (30)$$

ou seja, igual à velocidade de propagação da onda elástica no cabo. Claramente, a velocidade de propagação depende da tração estática inicial  $\epsilon$ , portanto, é diferente para cada caso.

E, com relação à velocidade do cabo, na figura 4, a linha horizontal na parte inferior de cada simulação indica que a velocidade é inicialmente nula. Podemos notar que a velocidade é maior na extremidade direita do cabo, onde a ruptura ocorre; e que a velocidade se propaga em direção à sua extremidade fixa. Esta velocidade na extremidade que sofreu a ruptura é a máxima velocidade de cada simulação, e é maior quanto maior for a tração estática inicial. Isso ocorre devido ao fato de que uma maior quantidade de energia é armazenada nos cabos que estão mais tracionados.

### 3.2 – Ruptura lenta

TJAVARAS et al. (1998) afirmam que cabos que se rompem lentamente são mais seguros. Por ruptura lenta entendemos que a tração no ponto de ruptura leva um maior tempo para atingir um valor nulo. Atualmente, os cabos estão sendo projetados de maneira que suas fibras não se rompam ao mesmo tempo, mas sim seqüencialmente, prevenindo assim uma ruptura repentina.

Com o objetivo de observarmos o efeito de uma ruptura mais lenta, realizamos outras duas simulações com um tempo de ruptura de 50 ms, com os mesmos valores de tração estática inicial utilizados nas simulações com ruptura rápida, assim como as escalas para plotagem dos resultados e o tempo entre as sucessivas configurações do cabo. O tempo total foi de 0,17 s e de 0,16 s, respectivamente; e o passo de tempo empregado foi de 0,001 s.

Na figura 5, mostramos o movimento descrito pelo cabo nas simulações com ruptura lenta. A variação da distribuição de tração ao longo de cabo pode ser visualizada na figura 6. E, na figura 7, mostramos as soluções para a variação da velocidade no cabo analisado.

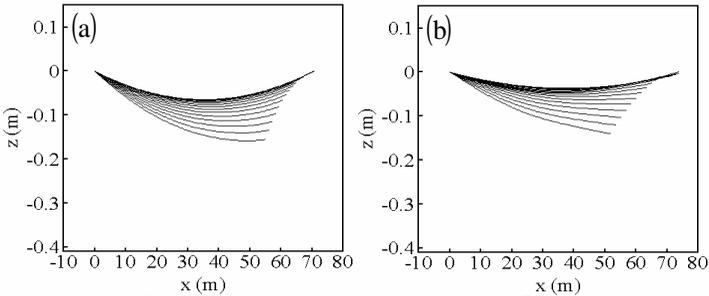


FIGURA 5 – Movimento do cabo, para  $t_{br}=50$  ms:  
(a)  $T=180000$  N e (b)  $T=315000$  N

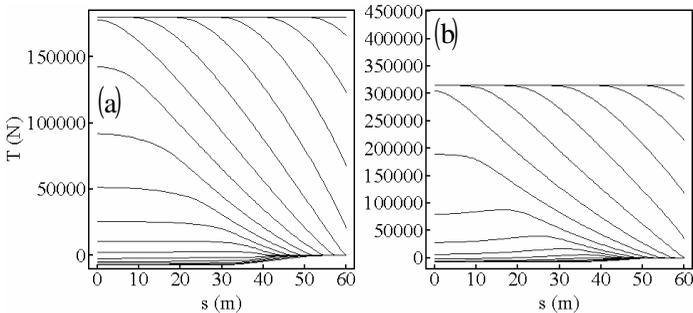


FIGURA 6 – Variação de tração no cabo, para  $t_{br}=50$  ms:  
(a)  $T=180000$  N e (b)  $T=315000$  N

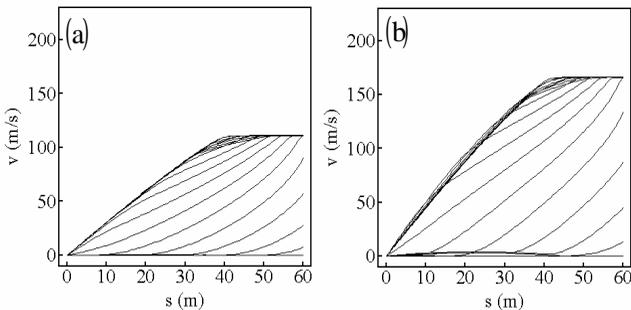


FIGURA 7 – Variação de velocidade no cabo, para  $t_{br}=50$  ms:  
(a)  $T=180000$  N e (b)  $T=315000$  N

Como podemos observar, existe uma similaridade no movimento do cabo para as simulações com ruptura rápida (Fig. 2) e ruptura lenta (Fig. 5). Já na figura 6, notamos que quando temos um tempo de ruptura maior, a tração é mais uniformemente distribuída ao longo do cabo. Certamente, leva um maior tempo para a tração na extremidade que sofreu a ruptura atingir um valor nulo, o que faz com que a variação na tração seja menos brusca. Isso tem um importante efeito na distribuição da velocidade. Conseqüentemente, embora a energia cinética total que deve ser dissipada após a ruptura dependa somente da tração estática e não dependa do tempo de ruptura, a forma como esta energia é dissipada depende. Cabos que se rompem mais lentamente dissipam a energia ao longo de uma maior parte de seu comprimento. Cabos com ruptura rápida têm uma parte de seu comprimento se movimentando com velocidade máxima e outra parte praticamente sem movimento, enquanto que cabos com ruptura lenta apresentam uma maior parte de seu comprimento se movimentando com velocidade moderada, e somente uma pequena região próxima à zona de ruptura se movimentando com velocidade máxima. Possivelmente, isso seja a explicação para idéia de que cabos com ruptura lenta são relativamente menos destrutivos que os com ruptura rápida.

E, finalmente, na figura 7, percebemos que a máxima velocidade do cabo não é afetada pelo tempo de ruptura; a tração estática inicial é o parâmetro dominante na determinação da velocidade máxima. Por outro lado, o tempo necessário para atingir a máxima velocidade varia: na ruptura lenta é necessário um tempo maior para a velocidade máxima ser atingida na extremidade que sofreu a ruptura. Também, a porção do comprimento do cabo que se movimenta com esta velocidade é menor nas simulações com ruptura lenta, o que indica que a energia cinética é mais uniformemente distribuída no cabo.

#### **4 – CONCLUSÕES**

Notamos que a tração estática inicial, à qual o cabo está submetido, tem influência direta em seu movimento, na forma como ocorre a distribuição de tração ao longo de seu comprimento e na velocidade com que cada ponto do cabo se desloca.

Já no que diz respeito aos diferentes tempos de ruptura utilizados nas simulações, podemos notar que o movimento descrito pelo cabo não apresenta diferenças significativas.

Observamos ainda que, para tempos de ruptura maiores, a tração se distribui de maneira mais uniforme, levando um maior intervalo de tempo para que a tração na extremidade livre atinja um valor nulo,

produzindo então uma variação de tração menos brusca no cabo. Portanto, cabos com ruptura lenta dissipam a energia ao longo de uma maior parte de seu comprimento, e por esse motivo são relativamente menos destrutivos que cabos que se rompem rapidamente.

Com relação à velocidade do cabo nas simulações com ruptura lenta, percebemos que é necessário um maior tempo para a velocidade máxima ser atingida pela extremidade livre, e que o segmento de cabo que se movimenta com esta velocidade máxima é menor para tempos de ruptura maiores, indicando que a energia cinética é mais uniformemente distribuída ao longo do cabo.

Portanto, concluímos que a simulação numérica desenvolvida neste trabalho tem a capacidade de prever, adequadamente, o movimento descrito por um cabo sintético pré-tensionado, durante e após sofrer uma ruptura.

Para trabalhos futuros, sugerimos a realização de ensaios em laboratório, a fim de melhor explorar as potencialidades do modelo implementado, tais como diferentes relações constitutivas e configurações de cabos.

## REFERÊNCIAS

HOVER, F. S. Simulation of stiff massless tethers. *Ocean Engineering*, Cambridge, v. 24, n. 8, p. 765-783, ago. 1997.

LANDAU, L. D., LIFSHITZ, E. M. *Theory of elasticity*. 3. ed. New York: Pergamom Press, 1999. 187 p. v. 7: Course of theoretical physics.

TJAVARAS, A. A. *The dynamics of highly-extensible cables*. Cambridge, 1996. 188 f. Thesis (PhD) – Departament of Ocean Engineering, Massachusetts Institute of Technology.

TJAVARAS, A. A. et al. The mechanics of highly-extensible cables. *Journal of Sound and Vibration*, v. 213. n. 4, p. 709-737, 1998. Disponível em: <<http://www.academicpress.com/jsv>> Acesso em: 10 mar. 2001.

TRIAANTAFYLLOU, M. S.; YUE, D. K. P. Damping amplification in highly extensible hysteretic cables. *Journal of Sound and Vibration*, v. 186, n. 3, p. 355-368, 1995. Disponível em: <<http://www.academicpress.com/jsv>> Acesso em: 23 jun. 2001.

