

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA OCEÂNICA

**ESTUDO DA SOLUÇÃO LAJE DE CONCRETO ARMADO SOBRE
BASE ELÁSTICA PARA PAVIMENTOS PORTUÁRIOS ATRAVÉS
DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Charlei Marcelo Paliga

Dissertação apresentada à comissão de Curso de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica da Fundação Universidade Federal do Rio Grande, como requisito à obtenção do título Mestre em Engenharia Oceânica.

Orientador: Prof.Dr.Mauro de Vasconcellos Real

Rio Grande, abril de 2003.

Dedico este trabalho aos meus familiares.

AGRADECIMENTOS

Em especial ao professor Mauro de Vasconcellos Real, pelas valiosas e constantes orientações, não só no sentido de desenvolvimento deste trabalho. Pela dedicação para que este trabalho tivesse êxito, e pela paciência, confiança e amizade que mostrou durante este período.

À todos meus familiares, pelo carinho, apoio e incentivo.

À minha noiva pela paciência, carinho e amor.

Aos colegas de curso.

Ao CNPq pelo auxílio financeiro durante a elaboração deste trabalho.

À todos que de alguma forma colaboraram para a realização deste trabalho.

SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS	ix
LISTA DE FIGURAS	x
LISTA DE SÍMBOLOS	xiii
RESUMO	xx
ABSTRACT	xxi
1 – INTRODUÇÃO	1
1.1 – CONSIDERAÇÕES GERAIS.....	1
1.2 – OBJETIVO E DESCRIÇÃO DO TRABALHO	3
1.3 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	4
1.4 – CONTRIBUIÇÃO DO TRABALHO	6
1.5 – ESTRUTURAÇÃO DO TRABALHO.....	7
2 - FORMULAÇÃO PARA PLACAS SOBRE BASE ELÁSTICA, INCLUINDO A DEFORMAÇÃO POR CORTE E A NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA	9
2.1-INTRODUÇÃO	9
2.2-GEOMETRIA E CARREGAMENTO	9
2.3-HIPÓTESES QUANTO AO CAMPO DE DEFORMAÇÕES.....	11
2.4-DEFINIÇÃO DO CAMPO DE DESLOCAMENTOS	13
2.5-CÁLCULO DAS COMPONENTES DO TENSOR DE DEFORMAÇÕES.....	13
2.6-PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS (P.T.V.)	14
3 - ANÁLISE NÃO-LINEAR DE PLACAS SOBRE BASE ELÁSTICA PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....	25
3.1-INTRODUÇÃO	25
3.2-GEOMETRIA DO ELEMENTO.....	25
3.3-CAMPO DE DESLOCAMENTOS	27
3.4-CAMPO DE DEFORMAÇÕES	29
3.4.1-Componentes de deformação infinitesimais	31
3.4.2-Componentes de deformação não-lineares	34
3.5-AÇÕES NODAIS E CARREGAMENTOS.....	35
3.6-COMPONENTES GENERALIZADAS DE TENSÃO.....	36

3.7-APLICAÇÃO DO PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS.....	37
3.8-CASO PARTICULAR: MATERIAL ELÁSTICO-LINEAR E REGIME DE PEQUENOS DESLOCAMENTOS	40
3.9-MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO.....	47
3.10-INTEGRAÇÃO NUMÉRICA	48
3.11-SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES	49
3.11.1-O método BFGS.....	50
4 – MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS	54
4.1 – INTRODUÇÃO.....	54
4.2 – MODELO CONSTITUTIVO PARA O CONCRETO.....	55
4.2.1 – Deformação uniaxial equivalente.....	55
4.2.2 – Critério de ruptura de KUPFER e GERSTLE.....	57
4.2.3 – Concreto em compressão	59
4.2.4 – Concreto em tração	61
4.2.5 – Concreto em cisalhamento.....	63
4.2.5.1 – Módulo de deformação por corte reduzido.....	64
4.2.6 – Cálculo das resultantes de tensões no concreto	65
4.2.6.1 – Cálculo das resultantes de tensões no concreto antes do aparecimento da primeira fissura	67
4.2.6.2 – Cálculo das resultantes de tensões no concreto depois do aparecimento da primeira fissura	69
4.3 – MODELO CONSTITUTIVO PARA O AÇO.....	71
4.3.1 – Cálculo das resultantes de tensões na armadura.....	72
4.4 – MODELO DO SOLO PARA ANÁLISE DA INTERAÇÃO SOLO-FUNDAÇÃO ..	75
4.5 – MODELO PARA O CONCRETO ARMADO SOBRE BASE ELÁSTICA.....	76
5 – VALIDAÇÃO DO MODELO	78
5.1- INTRODUÇÃO	78
5.2–INFLUÊNCIA DA DEFORMAÇÃO POR CORTE NO COMPORTAMENTO DE PLACAS.....	79
5.3- SAPATA RÍGIDA COM CARGA EXCÊNTRICA.....	82
5.4– PLACA SOBRE BASE ELÁSTICA (RADIER).....	85

5.5– PLACA QUADRADA COM CARGA CONCENTRADA E SOB FORÇAS DE COMPRESSÃO AO LONGO DOS BORDOS	90
5.6– LAJES DE CONCRETO ARMADO	93
5.6.1– Laje de McNEICE	93
5.6.2– Laje S1 de TAYLOR.....	95
5.6.3– Laje S6 de TAYLOR.....	98
6 – APLICAÇÃO DO MODELO	101
6.1 – INTRODUÇÃO.....	101
6.2 – PROJETO DA LAJE.....	103
6.3 – ANÁLISE DA LAJE CONSIDERANDO DIFERENTES COEFICIENTES DE REAÇÃO VERTICAL DO TERRENO.....	104
6.3.1 – Laje assente sobre solo estabilizado com cinza de carvão mineral mais cal	105
6.3.2 – Laje assente sobre areia compactada	107
6.3.3 – Laje assente sobre terreno de areia de média compactidade.....	109
6.3.4 – Comparação entre as respostas do sistema laje+solo para os três tipos de solo	111
6.4 – ANÁLISE DA LAJE CONSIDERANDO DIFERENTES ESPESSURAS.....	114
6.4.1 – Laje com espessura de 15cm.....	114
6.4.2 – Laje com espessura de 25cm.....	116
6.4.3 – Laje com espessura de 35cm.....	118
6.4.4 – Comparação entre as respostas do sistema laje+solo para cada espessura da laje.....	120
6.5 - ANÁLISE DA LAJE PARA DIFERENTES VALORES DA RESISTÊNCIA CARACTERÍSTICA À COMPRESSÃO DO CONCRETO (f_{ck}).....	122
6.5.1 – f_{ck} de 20MPa	123
6.5.2 – f_{ck} de 30MPa	125
6.5.3 – f_{ck} de 40MPa	127
6.5.4 - Comparação entre as respostas do sistema laje+solo para cada valor de f_{ck}	130
6.6 - ANÁLISE DA LAJE CONSIDERANDO DIFERENTES TAXAS DE ARMADURA	132
6.6.1 – Taxa de armadura igual a metade da calculada no dimensionamento	132

6.6.2 – Taxa de armadura igual a obtida no dimensionamento à flexão	134
6.6.3 – Dobro da taxa de armadura	136
6.6.4 - Comparação entre as respostas do sistema laje+solo para cada taxa de armadura.....	138
7 – CONCLUSÕES E SUGESTÕES	141
7.1 - GENERALIDADES	141
7.2 - CONCLUSÕES.....	141
7.3 – SUGESTÕES PARA APRIMORAMENTO DO MODELO.....	143
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	144
ANEXO A – DESCRIÇÃO DO PROGRAMA PSBEL / FORTRAN	147
A.1 – INTRODUÇÃO.....	147
A.2 – DESCRIÇÃO DAS SUBROTINAS	147
A.3 – FLUXOGRAMA	149
ANEXO B – PROCESSO DE SUAVIZAÇÃO DE TENSÕES UTILIZANDO O MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS, PARA ELEMENTOS FINITOS PLANOS	151

LISTA DE TABELAS

TABELA 5.1 – Propriedades mecânicas e geométricas: placa circular engastada	79
TABELA 5.2 – Propriedades mecânicas e geométricas: sapata rígida com carga excêntrica.....	83
TABELA 5.3 – Propriedades mecânicas: radier.....	86
TABELA 5.4 – Momentos fletores M_x	88
TABELA 5.5 – Momentos fletores M_y	90
TABELA 5.6 – Propriedades mecânicas e geométricas: placa sob forças de compressão	92
TABELA 5.7 – Propriedades dos materiais e carregamento: laje de McNEICE	93
TABELA 5.8 – Propriedades dos materiais e carregamento: laje S1 de TAYLOR ...	97
TABELA 5.9 – Propriedades dos materiais e carregamento: laje S6 de TAYLOR ...	99
TABELA 6.1 – Propriedades para dimensionamento da laje	103
TABELA 6.2 – Propriedades usadas no item 6.3.1	105
TABELA 6.3 – Propriedades usadas no item 6.3.2	107
TABELA 6.4 – Propriedades usadas no item 6.3.3	109
TABELA 6.5 – Comparação dos resultados obtidos no item 6.3	113
TABELA 6.6 – Propriedades usadas no item 6.4.1	114
TABELA 6.7 – Propriedades usadas no item 6.4.3	118
TABELA 6.8 – Comparação entre os resultados obtidos no item 6.4	122
TABELA 6.9 – Propriedades usadas no item 6.5.1	123
TABELA 6.10 – Propriedades usadas no item 6.5.3	128
TABELA 6.11 – Comparação entre os resultados obtidos no item 6.5.....	131
TABELA 6.12 – Propriedades usadas no item 6.6.1	132
TABELA 6.13 – Propriedades usadas no item 6.6.3	136
TABELA 6.14 – Comparação entre os resultados obtidos no item 6.6.....	140

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1.1 – Equipamento portuário sobre pavimento em concreto	2
FIGURA 1.2 – Equipamento portuário com patolas.....	2
FIGURA 1.3 – Execução de pavimento portuário	3
FIGURA 2.1 – Geometria da formulação de placas	10
FIGURA 2.2 – Campo de deslocamentos na direção x.....	12
FIGURA 2.3 – Resultantes de tensões para placas.....	17
FIGURA 2.4 – Esforços normais no contorno	20
FIGURA 2.5 – Momentos fletores e torçores no contorno	20
FIGURA 2.6 – Esforços cortantes no contorno.....	21
FIGURA 2.7 – Sistemas de coordenadas no contorno.....	22
FIGURA 3.1 – Carregamento e aspectos geométricos da placa	26
FIGURA 3.2 – Geometria do elemento isoparamétrico quadrático	27
FIGURA 3.3 – O método Quasi-Newton para o caso unidimensional.....	51
FIGURA 4.1 – Deformação uniaxial equivalente para um material linear	55
FIGURA 4.2 – Critério de ruptura de KUPFER e GERSTLE	59
FIGURA 4.3 – Curva tensão-deformação uniaxial equivalente para o concreto em compressão	60
FIGURA 4.4 – Curva tensão-deformação do concreto tracionado	62
FIGURA 4.5 – Fases do cálculo das tensões no concreto antes da fissuração	68
FIGURA 4.6 – Fases de cálculo das tensões no concreto após a fissuração	69
FIGURA 4.7 – Modelo constitutivo bilinear para o aço.....	72
FIGURA 4.8 – Cálculo das resultantes de tensões das armaduras	74
FIGURA 4.9 – Modelo de Winkler para o solo.....	75
FIGURA 5.1 – Placa circular engastada sob carga uniforme.....	79
FIGURA 5.2 – Influência da deformação por corte	81
FIGURA 5.3 – Sapata rígida com carga excêntrica.....	83
FIGURA 5.4 – Pressão de contacto solo-fundação: sapata rígida	84
FIGURA 5.5 – Solução analítica: sapata rígida com carga excêntrica	84
FIGURA 5.6 – Radier a ser calculado	85
FIGURA 5.7 – Deflexões do radier	86

FIGURA 5.8 – Pressão de contacto solo-fundação: radier	87
FIGURA 5.9 – Momentos fletores M_x no interior do radier	87
FIGURA 5.10 – Momentos fletores M_y no interior do radier.....	89
FIGURA 5.11 – Placa quadrada sobre base elástica.....	91
FIGURA 5.12 – Curva carga – deslocamento do ponto central	92
FIGURA 5.13 – Laje de McNEICE	94
FIGURA 5.14 – Curvas carga-deslocamento: Laje de McNEICE	95
FIGURA 5.15 – Laje S1 de TAYLOR.....	96
FIGURA 5.16 – Curvas carga-deslocamento: Laje S1 de TAYLOR.....	97
FIGURA 5.17 – Laje S6 de TAYLOR.....	98
FIGURA 5.18 – Curvas carga-deslocamento: Laje S6 de TAYLOR.....	99
FIGURA 5.19 – Comparação das curvas carga-deslocamento	100
FIGURA 6.1 – Seção transversal	101
FIGURA 6.2 – Cargas transmitidas ao pavimento	102
FIGURA 6.4 – Pressão de contacto solo-laje: item 6.3.1	106
FIGURA 6.5 – Momentos fletores M_x : item 6.3.1	106
FIGURA 6.6 – Momentos fletores M_y : item 6.3.1	107
FIGURA 6.7 – Pressão de contacto solo-laje: item 6.3.2	108
FIGURA 6.8 – Momentos fletores M_x : item 6.3.2	108
FIGURA 6.9 - Momentos fletores M_y : item 6.3.2	109
FIGURA 6.10 – Pressão de contacto solo-laje: item 6.3.3	110
FIGURA 6.11 - Momentos fletores M_x : item 6.3.3	110
FIGURA 6.12 - Momentos fletores M_y : item 6.3.3	111
FIGURA 6.13 – Curvas carga-deslocamento do ponto 288: item 6.3.....	112
FIGURA 6.14 – Pressão de contacto solo-laje: item 6.4.1	115
FIGURA 6.15 – Momentos fletores M_x : item 6.4.1	115
FIGURA 6.16 – Momentos fletores M_y : item 6.4.1	116
FIGURA 6.17 – Pressão de contato solo-laje: item 6.4.2	117
FIGURA 6.18 – Momentos fletores M_x : item 6.4.2	117
FIGURA 6.19 – Momentos fletores M_y : item 6.4.2	118
FIGURA 6.20 – Pressão de contacto solo-laje: item 6.4.3	119
FIGURA 6.21 – Momentos fletores M_x : item 6.4.3	119

FIGURA 6.22 – Momentos fletores M_y : item 6.4.3	120
FIGURA 6.23 – Curvas carga-deslocamento do ponto 288: item 6.4.....	121
FIGURA 6.24 – Pressão de contacto solo-laje: item 6.5.1	124
FIGURA 6.25 – Momentos fletores M_x : item 6.5.1	124
FIGURA 6.26 – Momentos fletores M_y : item 6.5.1	125
FIGURA 6.27 – Pressão de contacto solo-laje: item 6.5.2	126
FIGURA 6.28 – Momentos fletores M_x : item 6.5.2	126
FIGURA 6.29 – Momentos fletores M_y : item 6.5.2	127
FIGURA 6.30 – Pressão de contacto solo-laje: item 6.5.3	128
FIGURA 6.31 – Momentos fletores M_x : item 6.5.3	129
FIGURA 6.32 – Momentos fletores M_y : item 6.5.3	129
FIGURA 6.33 – Curvas carga-deslocamento do ponto 288: item 6.5.....	130
FIGURA 6.34 – Pressão de contacto solo-laje: item 6.6.1	133
FIGURA 6.35 – Momento fletor M_x : item 6.6.1.....	133
FIGURA 6.36 – Momentos fletores M_y : item 6.6.1	134
FIGURA 6.37 – Pressão de contacto solo-laje: item 6.6.2	135
FIGURA 6.38 – Momentos fletores M_x : item 6.6.2.....	135
FIGURA 6.39 – Momentos fletores M_y : item 6.6.2.....	136
FIGURA 6.40 – Pressão de contacto solo-laje: item 6.6.3	137
FIGURA 6.41 – Momentos fletores M_x : item 6.6.3	137
FIGURA 6.42 – Momentos fletores M_y : item 6.6.3	138
FIGURA 6.43 – Curvas carga-deslocamento do ponto 288: item 6.6.....	139
FIGURA A.1 – Fluxograma do programa PSBEL / FORTRAN	150
FIGURA B.1 – Tensões suavizadas e não suavizadas	151

LISTA DE SÍMBOLOS

LETRAS ROMANAS MAIÚSCULAS

- A - superfície indeformada da placa
- A* - superfície deformada da placa
- A_e - área do elemento
- \tilde{A}_{NL} - vetor de ações nodais não-lineares da estrutura
- \tilde{A}_{NL}^e - vetor de ações nodais não-lineares do elemento
- A_s - área de aço
- B - largura da placa
- \bar{B} - vetor de forças por unidade de volume indeformado
- \bar{B}^* - vetor de forças por unidade de volume deformado
- \bar{B} - matriz de deformações completa da estrutura
- \tilde{B}_0 - matriz de deformações infinitesimais
- \tilde{B}_G - matriz de deformações não-lineares
- \tilde{D} - matriz de constantes elásticas
- E - módulo de deformação longitudinal
- E_{co} - módulo de deformação longitudinal do concreto, tangente à origem
- E_{cs} - módulo de deformação longitudinal do concreto, secante à curva $\sigma_c=f(\epsilon_c)$
- E_{s1} - módulo de deformação do aço antes do escoamento
- E_{s2} - módulo de deformação do aço após o escoamento
- F - força nodal

\tilde{F}^e	- vetor de ações nodais do elemento
\tilde{F}_{eq}^e	- vetor de ações nodais equivalentes do elemento
G_{co}	- módulo de deformação por cisalhamento do concreto, tangente à origem
G_{12r}	- módulo de deformação por cisalhamento reduzido do concreto, no plano da fissura
\tilde{I}	- matriz identidade
\tilde{J}	- matriz Jacobiana do elemento
\tilde{K}_0^e	- matriz de rigidez do elemento
\tilde{K}_0	- matriz de rigidez global da estrutura na origem
\tilde{K}_T	- matriz de rigidez tangente da estrutura
K	- fator de forma para o cisalhamento
L	- comprimento da placa
M	- momento fletor ou torçor por unidade de comprimento
\overline{M}_v	- momento fletor por unidade de comprimento atuante na direção normal ao contorno
\overline{M}_{vs}	- momento fletor por unidade de comprimento atuante na direção tangencial ao contorno
N	- esforço normal ou tangencial por unidade de comprimento
\tilde{N}	- matriz de interpolação do elemento
N_i	- função de interpolação associada ao nó “i”
\overline{N}_v	- esforço atuante na direção normal ao contorno
\overline{N}_{vs}	- esforço atuante na direção tangencial ao contorno

$\bar{P}_{\sim \text{ext}}$	- vetor de cargas externas
P_s	- pressão de contacto entre o solo e a fundação
P_u	- valor máximo atingido para a carga total sobre a laje
Q	- esforço cortante por unidade de comprimento
\bar{Q}_v	- esforço cortante por unidade de comprimento atuante no contorno
\bar{T}^v	- vetor de forças por unidade de superfície indeformada
$\bar{T}^{*v(n')}$	- vetor de forças por unidade de superfície deformada, que na geometria original orientava-se na direção η
\bar{U}_{\sim}	- vetor de deslocamentos nodais da estrutura
\bar{U}_{\sim}^e	- vetor de deslocamentos nodais do elemento
V	- volume indeformado da placa
V^*	- volume deformado da placa
W	- trabalho

LETRAS ROMANAS MINÚSCULAS

c	- associado ao concreto
d	- operador diferencial
e	- associado ao elemento
f_c	- resistência à compressão do concreto
f_{cm}	- resistência média à compressão do concreto
f_{ck}	- resistência à compressão característica do concreto
f_{ct}	- resistência à tração direta do concreto
f_{ctm}	- resistência média à tração do concreto

f_{ctk}	- resistência à tração característica do concreto
f_y	- resistência ao escoamento do aço
f_{ym}	- resistência média ao escoamento do aço
f_{yk}	- resistência característica ao escoamento do aço
g	- carga distribuída permanente
g_k	- valor característico da carga distribuída permanente
h	- espessura da placa
i	- índice
j	- índice
k	- índice, coeficiente de reação vertical do solo
o	- relativo à origem, associado ao valor máximo
p	- força por unidade de superfície
\tilde{p}	- vetor de forças por unidade de superfície
q	- carga distribuída por unidade de superfície
q_k	- valor característico da carga distribuída acidental
r	- número da iteração
s	- direção tangencial ao contorno, associado ao aço
t_s	- espessura equivalente da camada de armadura
\tilde{u}	- vetor de deslocamentos em um ponto qualquer
u_i	- deslocamento na direção do eixo “i” no sistema global
u_v	- deslocamento na direção normal ao contorno
u_s	- deslocamento na direção tangencial ao contorno
u	- deslocamento na direção x
v	- deslocamento na direção y , vetor de atualização para o BFGS

- w - deslocamento na direção z , vetor de atualização para o BFGS
- w_0 - flecha correspondente ao máximo valor da carga P
- x - coordenada cartesiana local
- x_i - coordenada cartesiana global na direção “i”
- y - coordenada cartesiana local
- z - coordenada cartesiana local
- z_s - posição da camada de aço em relação ao plano médio

LETRAS GREGAS MAIÚSCULAS

- Γ - curva que delimita o contorno da placa
- Δ - incremento
- Σ - somatório

LETRAS GREGAS MINÚSCULAS

- α - coeficiente de correção para o cisalhamento, fator de redução de f_{ct}
- γ - distorção, coeficiente para o cálculo de tensões após fissuração do concreto
- $\bar{\gamma}$ - distorção no nível do plano médio
- δ - operador delta (variação)
- $\delta_{\sim r}$ - vetor de incremento de deslocamentos
- ε - deformação específica axial
- $\bar{\varepsilon}$ - deformação específica axial no nível do plano médio
- ε_{ij} - tensor de deformações de Green

$\underline{\underline{\varepsilon}}$	- vetor de deformações generalizadas
$\underline{\underline{\varepsilon}}_{\sim 0}$	- vetor de componentes infinitesimais de deformação
$\underline{\underline{\varepsilon}}_{\sim G}$	- vetor de componentes não-lineares de deformação
ε_{co}	- deformação do concreto correspondente à f_c
ε_{cr}	- deformação de ruptura do concreto por tração
ε_{cu}	- deformação última do concreto em compressão
ε_s	- deformação na camada de aço (armadura)
$\varepsilon_1, \varepsilon_2$	- deformações principais
$\varepsilon_{1u}, \varepsilon_{2u}$	- deformação uniaxiais equivalentes segundo as direções de ortotropia
η	- coordenada natural do elemento (perpendicular à ξ)
θ	- rotação da reta normal ao plano médio
λ	- esbeltez da laje, coeficiente para o cálculo de tensões após fissuração do concreto
ν	- coeficiente de Poisson, vetor normal
ν_x, ν_y	- cossenos diretores da direção normal ao contorno
ξ	- coordenada natural do elemento (perpendicular à η)
ρ	- taxa de armadura
σ	- tensão normal
σ_1, σ_2	- tensões principais
σ_{1f}, σ_{2f}	- tensões máximas segundo as direções de ortotropia
$\bar{\sigma}_{ij}$	- tensor de pseudo-tensões de Kirchhoff
$\underline{\underline{\sigma}}$	- vetor de tensões generalizadas

- τ - tensão tangencial
- τ_{ij} - tensor de tensões de Cauchy
- ω - parâmetro de rotação
- ϕ - distorção provocada pelo esforço cortante
- χ - curvatura da placa
- ψ - vetor de desequilíbrio
- \sim

RESUMO

Os pavimentos dos portos normalmente estão sujeitos à cargas de grande intensidade. Quando a posição da carga é fixa, pode-se adotar a solução de estaqueamento, como é feito sob as bases dos guindastes fixos, por exemplo. Contudo, quando a posição das cargas é variável, como nos pátios de armazenamento de contêineres e nos locais de trânsito das empilhadeiras e guindastes móveis, uma solução em pavimento de concreto deve ser adotada. Dependendo da intensidade das cargas este pavimento de concreto deverá ser armado. O objetivo deste trabalho é estudar o comportamento de lajes de concreto armado apoiadas diretamente no solo (base elástica) sob a ação de cargas distribuídas e concentradas, devidas à equipamentos portuários, empregando o método dos elementos finitos. O concreto é modelado através de elementos finitos isoparamétricos quadráticos de oito nós, no qual a formulação de placas de Mindlin e o estado plano de tensões são combinados. O modelo constitutivo do concreto é bidimensional, e inclui o comportamento não-linear do material e a fissuração. A armadura é considerada como uma camada mais rígida dentro do elemento de concreto, que apenas resiste a esforços axiais na direção das barras. Através do Princípio dos Trabalhos Virtuais é incluída uma base elástica contínua sob todo o elemento, para representar o solo. O modelo foi testado comparando seus resultados com resultados numéricos e experimentais obtidos por outros autores. É apresentado um estudo de caso de pavimento portuário submetido à cargas de grande intensidade, onde foram testadas várias variáveis como espessura da placa, resistência à compressão do concreto, taxa de armadura e coeficiente de reação vertical do solo.

Palavras Chave: elementos finitos, concreto armado, lajes, base elástica, pavimento, porto

ABSTRACT

Ports pavements are usually subjected to heavy equipment loads. When the loading position is fixed, the pile foundation solution can be adopted, under the basis of fixed cranes, for example. However, when the loading position is variable, as in container storage areas and in places subjected to movable cranes and stackers traffic, a solution in concrete mat foundation should be adopted. Depending on the loading intensity, this concrete slab should be reinforced. The objective of this work is to study the behavior of reinforced concrete mat foundations under the action of distributed and concentrated loads due to port equipments using the finite element method. The mat is modeled through isoparametric eight node elements, in which Mindlin plate bending and plane stress state formulations are combined. The concrete constitutive model is two-dimensional and includes material's non-linear behavior and cracking. The reinforcement is considered as a stiffer layer inside the concrete element resisting only to axial forces in the bars direction. In order to represent the soil, a continuous elastic base is included under the whole element. The computational program was tested against numerical and experimental results obtained by other authors. A case of study considering a port pavement submitted to large loads is presented. Mat foundation thickness, concrete compressive strength, reinforcement rate and soil's coefficient of sub grade reaction were taken as variables and tested.

Key-words: finite elements method, reinforced concrete, mat foundation, port

1 – INTRODUÇÃO

1.1 – CONSIDERAÇÕES GERAIS

Na área portuária, tem-se a presença de cargas (normalmente concentradas) de grande intensidade, atuando usualmente sobre solos de baixa capacidade de carga.

Quando as cargas são fixas, ou quando há a presença de equipamentos que trabalham sobre trilhos, como guindastes de pórtico, por exemplo, pode se adotar uma solução em estacas. Porém, quando as cargas são móveis, ou seja, quando há ações variáveis normais provenientes de veículos, equipamentos móveis, rodas, esteiras ou pneus, a solução adotada deverá ser de pavimento em placa de concreto, ou, dependendo da intensidade das cargas, pavimento em placa de concreto armado.

É interessante adotar-se uma solução para melhorar as propriedades do solo no qual a placa será assentada. Para um solo em areia, uma solução é a estabilização com uma mistura de cinza de carvão mineral mais cal. Outra solução para a melhoria da resistência do solo é adicionar uma camada de concreto compactado a rolo sobre o mesmo. Estas soluções tornam o projeto mais econômico, pois é possível adotar-se espessuras menores para a placa.

Na FIGURA 1.1 é apresentado um equipamento portuário operando sobre um pavimento em concreto com espessura de 30cm. As cargas são transmitidas ao pavimento através das rodas.



FIGURA 1.1 – Equipamento portuário sobre pavimento em concreto

Na FIGURA 1.2 é apresentado outro equipamento portuário, na qual é interessante observar outro método de transmissão das cargas ao pavimento, através de patolas, as quais entram em contato com o pavimento quando o equipamento está em operação.



FIGURA 1.2 – Equipamento portuário com patolas

Na FIGURA 1.3, é apresentada a execução de juntas de dilatação no pavimento portuário em concreto.



FIGURA 1.3 – Execução de pavimento portuário

1.2 – OBJETIVO E DESCRIÇÃO DO TRABALHO

O objetivo deste trabalho é estudar o comportamento de lajes de concreto armado apoiadas diretamente no solo (base elástica) sob a ação de cargas distribuídas e concentradas, devidas a equipamentos portuários, empregando o método dos elementos finitos, e fazendo-se uma combinação entre a teoria de placas espessas de Mindlin e um estado plano de tensões.

O concreto é modelado através de elementos finitos isoparamétricos quadráticos de oito nós. O modelo constitutivo do concreto é bidimensional, e inclui o comportamento não-linear do material e a fissuração. A armadura é considerada como uma camada mais rígida dentro do elemento de concreto, que apenas resiste a esforços axiais na direção das barras. Através do Princípio dos Trabalhos Virtuais é incluída uma base elástica contínua sob todo o elemento para representar o solo, através da hipótese de Winkler.

O modelo foi testado comparando seus resultados com resultados teóricos e experimentais obtidos por outros autores.

É apresentado um estudo de caso de pavimento portuário submetido à cargas de grande intensidade, onde foram testadas várias variáveis como espessura da placa, resistência à compressão do concreto, taxa de armadura e coeficiente de reação vertical do solo.

1.3 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Entre os trabalhos clássicos na área de placas sobre base elástica, pode ser citado TIMOSHENKO (1959), no qual podem ser encontradas as soluções analíticas para diversos casos, como placas circulares, com ou sem furo, sujeitas à cargas concentradas e distribuídas transversalmente ao plano médio da mesma, placas contínuas e placas retangulares com todas as quatro extremidades simplesmente apoiadas. Também podem ser encontradas as soluções para grandes placas carregadas em pontos equidistantes ao longo do eixo x por cargas concentradas. A solução para placas com cargas concentradas em pontos equidistantes ao longo de eixos paralelos aos eixos de referência x e y , sendo que cada carga é distribuída uniformemente sobre uma pequena área retangular, também é mostrada.

Em BOWLES (1974), são apresentados dois programas computacionais para a análise de placas quadradas ou retangulares sobre base elástica. No primeiro programa, é empregado o método das diferenças finitas para a solução do problema, já no segundo, é empregado o método dos elementos finitos, sendo que após, é feita uma comparação entre os dois métodos adotados na solução.

Em HETÉNYI (1979), podem ser encontradas as soluções analíticas para diversos casos de vigas sobre base elástica, como vigas de comprimento infinito, vigas de comprimento finito, diversos casos de carregamentos, como cargas concentradas em qualquer ponto sobre o eixo da viga, cargas distribuídas ao longo de todo eixo da viga ou em trechos, cargas momento e cargas triangulares. Também são encontradas soluções analíticas para diversos tipos de vínculos.

Já em HAHN (1982), encontram-se algumas equações para o cálculo dos momentos em placas sobre base elástica com carga concentrada em três pontos distintos: carga no centro da placa, carga em um bordo da placa e carga em um vértice da placa.

Entre outros autores que analisaram o problema de contato unilateral entre a fundação e a base elástica, pode-se citar WEITSMAN (1970), que apresentou uma formulação variacional para análise de placas e vigas sujeitas a uma carga concentrada, com a base elástica modelada segundo a hipótese de Winkler.

SVEC (1976), no qual é apresentada uma análise de placas espessas através do método dos elementos finitos, com elementos triangulares de placa.

LI e DEMPSEY (1988), apresentaram uma solução para o problema de contato unilateral sem atrito entre uma placa quadrada sujeita a uma carga vertical e um semi-espaço infinito, onde o solo também foi modelado através da hipótese de Winkler.

Como publicações mais recentes pode-se citar LIEW et al. (1996), na qual são analisadas placas retangulares sobre solo de Winkler, usando-se uma formulação com base na teoria de placas espessas de Mindlin. As placas estão sujeitas a combinações nas condições de contorno, entre bordos livres, simplesmente apoiados e engastados, e as soluções para o problema são obtidas usando o método da quadratura diferencial.

ERATIL e AKÖZ (1997), apresentaram uma formulação para placas espessas através do método dos elementos finitos, usando elementos retangulares e triangulares.

Em VELLOSO e LOPES (1997), são apresentados métodos para o cálculo dos esforços internos no radier, como o método estático, cálculo como um sistema de vigas sobre base elástica, método da placa sobre solo de Winkler, método do American Concrete Institute, método das diferenças finitas, e método dos elementos finitos.

Em SILVA (1998), tanto a placa quanto à base elástica são discretizadas através do método dos elementos finitos. São analisadas placas com restrições bilaterais (o solo oferece reação quando comprimido e tracionado) e unilaterais (o solo oferece reação somente quando comprimido) de contato, e são introduzidos vários modelos para a base elástica, estando

presente o modelo de Winkler.

Finalmente, VITORETI (2003), estudou a interação solo-fundação para sapatas contínuas sob estado plano de deformação, através do método dos elementos finitos. Foram analisados diversos fatores como tipo de solo, altura da sapata, rigidez relativa entre o solo e a sapata, etc.

1.4 – CONTRIBUIÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho baseia-se em REAL (1990), que trata da análise não-linear física e geométrica de lajes de concreto armado, através do método dos elementos finitos.

Uma base elástica foi introduzida no problema sob todo o elemento de placa, para representar o solo.

O modelo para o concreto passou a ser representado como bidimensional, para levar em conta o efeito de Poisson. A solução do sistema de equações não-lineares, que surgem no problema por causa da possibilidade de ocorrerem grandes deslocamentos e por causa do comportamento mecânico não-linear do material, é resolvido através do método BFGS, sendo sua eficiência comprovada em relação a outros métodos computacionais para resolução de sistema de equações não-lineares (STRICKLIN et al., 1973).

As tensões generalizadas passaram a ser obtidas também nos pontos nodais da placa e não apenas nos pontos amostrais de integração de Gauss. O processo adotado é o de suavização de tensões, utilizando o método dos mínimos quadrados para elementos finitos planos, sendo que este processo está apresentado no ANEXO B.

Houve também um aumento na capacidade de análise com o aumento no dimensionamento de matrizes e vetores envolvidos no problema. Cabe também ressaltar os melhoramentos na entrada e saída de dados do programa.

Com tudo isso, chegou-se a um modelo capaz de analisar placas de concreto armado sobre base elástica considerando a não-linearidade física e geométrica, com aplicações em

estruturas portuárias.

1.5 – ESTRUTURAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho é dividido em sete capítulos, sendo que este, é o primeiro.

No Capítulo 2, é desenvolvida uma formulação analítica para placas sobre base elástica incluindo a deformação por corte e a ocorrência de grandes deslocamentos. A partir da aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais são estabelecidas as equações de equilíbrio e as condições de contorno.

No Capítulo 3, é desenvolvida uma formulação para análise não-linear de placas sobre base elástica através do Método dos Elementos Finitos. Novamente utilizando-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais, chega-se a um sistema de equações não-lineares de equilíbrio independente da equação constitutiva do material. Como caso particular, são obtidas as equações de equilíbrio para um material elástico linear no regime de pequenas deflexões. Finalmente, é analisada a solução do sistema de equações não-lineares através do método BFGS, com o uso de “line-searches”.

Os modelos constitutivos dos materiais concreto, aço e solo, são descritos no Capítulo 4. O modelo constitutivo bidimensional para o concreto é baseado no modelo proposto por DARWIN (1977), empregando-se o conceito de deformação uniaxial equivalente e o critério de ruptura bidimensional de KUPFER e GERSTLE (1973). Para o concreto tracionado, após a fissuração, adota-se uma curva de tension-stiffening, para levar em conta a colaboração do concreto entre fissuras na resistência à tração. A rigidez ao corte no plano da fissura também é considerada. O aço é modelado como um material elasto-plástico perfeito ou com um endurecimento linear, após o escoamento. O solo é modelado como um material elasto-plástico, reagindo apenas quando comprimido.

No Capítulo 5, é feita a comprovação experimental do modelo de elementos finitos, comparando-se análises numéricas com soluções analíticas ou com resultados experimentais.

O Capítulo 6 apresenta um estudo de caso de pavimento portuário submetido à cargas

de grande intensidade. As propriedades mecânicas do solo são melhoradas através da aplicação de uma camada de cinza de carvão mineral + cal sobre o solo compactado. Foram testadas várias variáveis como rigidez do solo, espessura da placa, resistência à compressão do concreto e taxa de armadura.

As conclusões obtidas durante a elaboração e a aplicação deste modelo para análise de estruturas de concreto armado sobre uma base elástica são resumidas no Capítulo 7. Também são sugeridos futuros desenvolvimentos para o modelo.

2 - FORMULAÇÃO PARA PLACAS SOBRE BASE ELÁSTICA, INCLUINDO A DEFORMAÇÃO POR CORTE E A NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA

2.1-INTRODUÇÃO

As placas são elementos estruturais planos nos quais duas dimensões, denominados lados, são muito maiores que a terceira dimensão definida como espessura.

O objetivo de se desenvolver uma formulação específica para a análise de placas é reduzir um problema, inicialmente complexo e dependente das coordenadas no espaço, a um problema mais simples, função apenas das coordenadas contidas no plano médio da placa.

Assim sendo, partindo-se das equações fundamentais da Mecânica dos Sólidos e estabelecendo-se hipóteses a cerca do campo de deslocamentos, passa-se de um problema tridimensional a um problema plano. A partir da aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais são deduzidas as equações de equilíbrio e as condições de contorno.

A base elástica é introduzida na formulação através da sua reação distribuída sob todo elemento, isto se dá através da inclusão do termo kw no Princípio dos Trabalhos Virtuais, como será mostrado posteriormente.

Devido à inclusão da possibilidade de ocorrerem grandes deflexões, as equações de equilíbrio e as condições de contorno obtidas serão dependentes do próprio campo de deslocamentos, resultando daí a não-linearidade de origem geométrica.

2.2-GEOMETRIA E CARREGAMENTO

A FIGURA 2.1 descreve a geometria básica envolvida na formulação. Inicialmente, estabelece-se um sistema global de coordenadas cartesianas ortogonais $x_1x_2x_3$, situado em um ponto qualquer do espaço. O deslocamento de um ponto qualquer referido a este sistema, é descrito por três componentes, as quais são: u_1 , u_2 e u_3 , respectivamente.

A seguir é fixado um sistema de referência local xyz , sendo que os eixos x e y , bem como a origem do sistema, encontram-se situados sobre a superfície média da placa. Deve-se observar ainda que os eixos x, y e z são paralelos aos eixos x_1, x_2 e x_3 respectivamente, e possuem os mesmos sentidos definidos como positivos.

Seja, então, a placa mostrada na FIGURA 2.1, apoiada sobre uma base elástica, cuja espessura é h e cujo contorno é descrito por uma curva regular $\Gamma = \Gamma(x, y)$. O carregamento externo é formado pela carga $p(x, y)$, que atua por unidade de superfície, na direção normal ao plano médio da placa. No contorno, podem atuar forças normais por unidade de comprimento \bar{N}_v e também forças tangenciais por unidade de comprimento \bar{N}_{vs} .

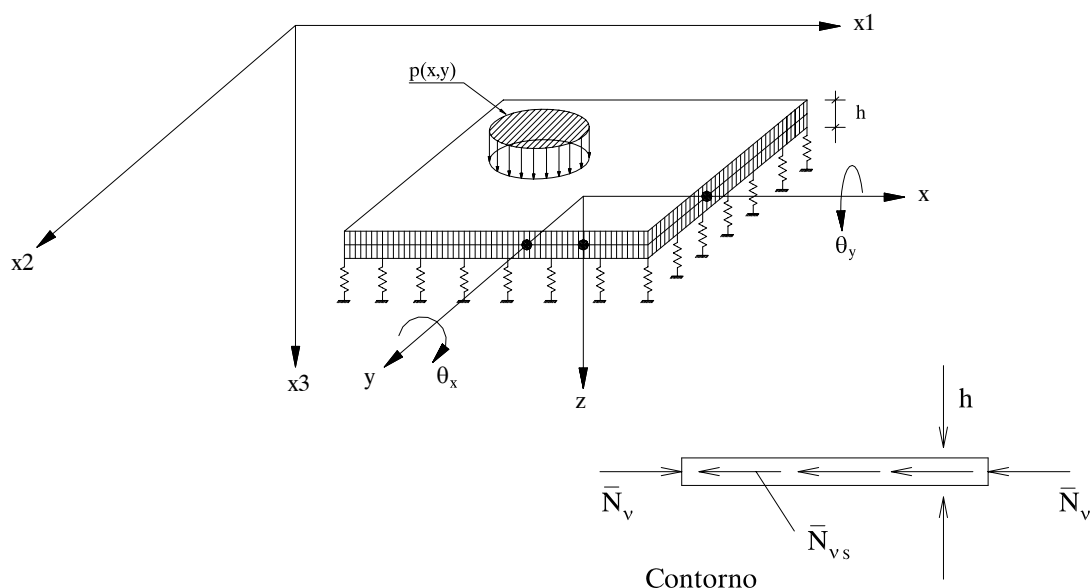


FIGURA 2.1 – Geometria da formulação de placas

O campo de deslocamentos em relação ao sistema global será definido a partir das componentes de deslocamento do plano médio da placa u, v e w nas direções x, y e z ; bem como através das rotações da reta normal à superfície média nos planos xz e yz , θ_x e θ_y , respectivamente.

2.3-HIPÓTESES QUANTO AO CAMPO DE DEFORMAÇÕES

Antes de formular as hipóteses quanto ao campo de deformações, que se desenvolve na placa pela aplicação do carregamento externo, tratar-se-á de algumas definições fundamentais da Mecânica dos Sólidos.

Adotar-se-á, sempre que necessário, a notação tensorial, na qual os índices i, j e k assumem sucessivamente os valores 1, 2 e 3, e os índices repetidos (mudos) indicam um somatório.

Considerando-se a possibilidade de ocorrerem deformações finitas, deve-se utilizar o tensor de deformações de Green ε_{ij} completo dado por

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}) \quad (2.1)$$

Os parâmetros de rotação ω_{ij} , no caso de grandes deformações, não representam os ângulos de rotação propriamente ditos, porém são apenas proporcionais a estes, sendo definidos por

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) \quad (2.2)$$

A partir destas definições, são estabelecidas as seguintes hipóteses:

I - As deformações ε_{ij} e os parâmetros de rotação ω_{ij} são muito menores que a unidade, ou seja,

$$\varepsilon_{ij} \ll 1,0 \text{ e } \omega_{ij} \ll 1,0. \quad (2.3)$$

Esta afirmação traz como consequência, que os efeitos de alteração de geometria durante a deformação podem ser desprezados na definição das componentes de tensão e nos limites de integração necessários para considerações de trabalho e energia.

II – Considera-se que as deformações sejam muito menores que as rotações, portanto

$$\varepsilon_{ij} \ll \omega_{ij} \ll 1,0. \quad (2.4)$$

É possível, então, demonstrar(DYM e SHAMES, 1977) que as componentes do tensor de deformações finitas podem ser dadas pela expressão

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{1}{2}\omega_{ki}\omega_{kj} \quad (2.5)$$

III – Linhas retas e normais ao plano médio da placa na geometria original, após a deformação permanecem retas, porém não necessariamente normais à superfície deformada. Esta não-ortogonalidade se deve a presença das distorções ϕ_x e ϕ_y nos planos xz e yz , respectivamente, devido à atuação do esforço cortante, conforme é mostrado na FIGURA 2.2. Esta hipótese é a base da Teoria de Placas de MINDLIN(1951).

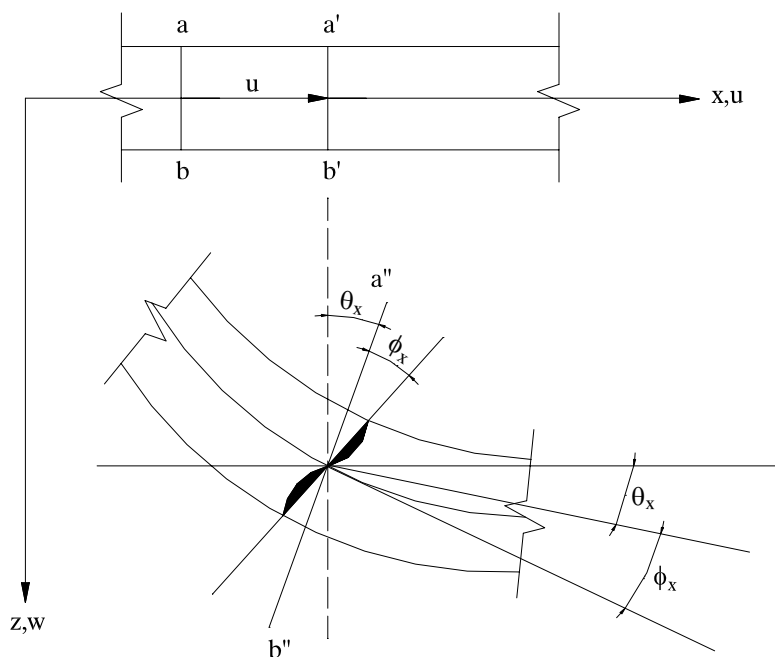


FIGURA 2.2 – Campo de deslocamentos na direção x

Assim sendo, tem-se que

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \theta_x + \phi_x \quad \text{e} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \theta_y + \phi_y \quad (2.6)$$

2.4-DEFINIÇÃO DO CAMPO DE DESLOCAMENTOS

A partir das hipóteses formuladas no item anterior, pode-se estabelecer que o campo de deslocamentos seja fornecido através das equações

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = u(x, y) - z \theta_x(x, y) \quad (2.7)$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = v(x, y) - z \theta_y(x, y) \quad (2.8)$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = w(x, y) \quad (2.9)$$

Desta forma, o campo de deslocamentos no sistema global fica completamente definido em função das componentes de deslocamento do sistema local, situado sobre o plano médio da placa.

2.5-CÁLCULO DAS COMPONENTES DO TENSOR DE DEFORMAÇÕES

Antes de se proceder ao cálculo das componentes de deformação, é necessário analisar os parâmetros de rotação ω_{ij} .

O parâmetro de rotação ω_{12} aproxima um ângulo de rotação em torno do eixo z , conforme pode ser mostrado para deformações infinitesimais, enquanto que ω_{13} e ω_{23} são proporcionais aos ângulos de rotação em torno dos eixos x e y , respectivamente.

Se a placa for suficientemente esbelta, pode-se afirmar que

$$\omega_{12} \ll \omega_{13} \quad \text{e} \quad \omega_{12} \ll \omega_{23} \quad (2.10)$$

logo o parâmetro ω_{12} pode ser desprezado em presença de ω_{13} e de ω_{23} .

Baseando-se nas considerações anteriores, utilizando-se as equações (2.7)-(2.9) para o campo de deslocamentos e empregando-se as relações deformação-deslocamento dadas por (2.5), chega-se às seguintes expressões para as componentes de deformações finitas (REAL, 1990)

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (2.11)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.12)$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \right) \quad (2.13)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \quad (2.14)$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \right) \quad (2.15)$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \quad (2.16)$$

2.6-PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS (P.T.V.)

O emprego do Princípio dos Trabalhos Virtuais, daqui a diante P.T.V., é conveniente, pois permite a obtenção das equações de equilíbrio e das condições de contorno para o problema de forma independente da equação constitutiva do material. As equações obtidas através deste processo serão válidas, portanto, para um material como o concreto armado, que possui um acentuado comportamento não-linear.

A expressão geral para o P.T.V., com a consideração de deformações finitas é dada

por DYM e SHAMES(1977)

$$\iiint_{V^*} \vec{B}^* \vec{\delta u} dV^* + \iint_{A^*} \vec{T}^{*\nu(n')} \vec{\delta u} dA^* = \iiint_V \bar{\sigma}_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \quad (2.17)$$

onde:

V^* = volume da placa após a deformação;

A^* = superfície da placa após a deformação;

V = volume original da placa;

A = superfície original da placa;

$\vec{\delta u}$ = vetor de deslocamentos virtuais compatível e consistente com as condições de contorno do problema;

\vec{B}^* = vetor de forças de volume referido ao volume deformado da placa;

$\vec{T}^{*\nu(n')}$ = vetor de forças de superfície, referido a superfície deformada da placa, que na geometria original possuía a orientação do eixo η ;

$\bar{\sigma}_{ij}$ = tensor de pseudo-tensões de Piola-Kirchhoff II;

$\delta \varepsilon_{ij}$ = tensor de deformações virtuais compatível e consistente com as condições de contorno do problema.

Tendo-se em conta as hipóteses que foram feitas em relação ao campo de deformações, é possível adotar as seguintes simplificações:

I – O volume deformado da placa é muito próximo do volume indeformado, logo

$$V^* \cong V \quad (2.18)$$

II – A superfície deformada da placa permanece praticamente igual à superfície na geometria original, portanto

$$A^* = A \quad (2.19)$$

III – Como consequência das duas afirmações anteriores, as pseudo-tensões de Piola-

Kirchhoff II podem ser tomadas como iguais ao tensor de tensões referido de forma clássica ao sistema original indeformado, então

$$\bar{\sigma}_{ij} \cong \tau_{ij} \quad (2.20)$$

e seguindo a mesma linha de raciocínio, as forças podem ser referenciadas também ao sistema indeformado, resultando

$$\vec{T}^{*v(n)} = \vec{T}^v \quad (2.21)$$

$$e \quad \vec{B}^* \cong \vec{B} \quad (2.22)$$

onde

\vec{T}^v = vetor de forças por unidade de superfície indeformada;

\vec{B} = vetor de forças por unidade de volume indeformado.

O P.T.V pode, então, ser escrito de forma simplificada

$$\iiint_V \vec{B} \vec{\delta u} \, dV + \iint_A \vec{T}^v \vec{\delta u} \, dA = \iiint_V \tau_{ij} \delta \varepsilon_{ij} \, dV \quad (2.23)$$

Antes de se desenvolver o P.T.V., recuperar-se-á a hipótese da Teoria de Placas de Kirchhoff, a qual assegura que as tensões normais ao plano médio da placa, τ_{33} , podem ser desprezadas em presença das demais componentes do tensor de tensões.

Assim sendo, o trabalho virtual realizado pelas forças internas será dado por

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}} = & \iiint_V \tau_{ij} \delta \varepsilon_{ij} \, dV + \iint_A kw \delta w \, dA = \iint_A \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (\tau_{11} \delta \varepsilon_{11} + 2\tau_{12} \delta \varepsilon_{12} + \tau_{22} \delta \varepsilon_{22} + 2\tau_{13} \delta \varepsilon_{13} + \\ & 2\tau_{23} \delta \varepsilon_{23}) dz dA + \iint_A kw \delta w \, dA \end{aligned} \quad (2.24)$$

Na equação (2.24) a primeira integral representa o trabalho virtual no volume da placa, e a segunda é a parcela do trabalho devido à base elástica, sendo k o coeficiente de reação vertical do solo e w o afundamento.

Substituindo-se as expressões para as componentes de deformação obtidas em (2.11)-(2.16)

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}} = & \iint_A \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left\{ \tau_{11} \left[\frac{\partial \delta u}{\partial x} - z \frac{\partial \delta \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right] + \tau_{12} \left[\frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - z \left(\frac{\partial \delta \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \theta_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial \delta w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right] \right. \\ & + \tau_{13} \left[\frac{\partial \delta w}{\partial x} - \delta \theta_x \right] + \tau_{22} \left[\frac{\partial \delta v}{\partial y} - z \frac{\partial \delta \theta_y}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right] + \tau_{23} \left[\frac{\partial \delta w}{\partial y} - \delta \theta_y \right] \left. \right\} dz dA + \iint_A k w \delta w dA \end{aligned} \quad (2.25)$$

Introduzindo aqui as definições clássicas das resultantes de tensões para placas, conforme a FIGURA 2.3, e lembrando que as tensões referidas ao sistema global $x_1x_2x_3$ são idênticas àquelas referidas ao sistema local xyz , tem-se que

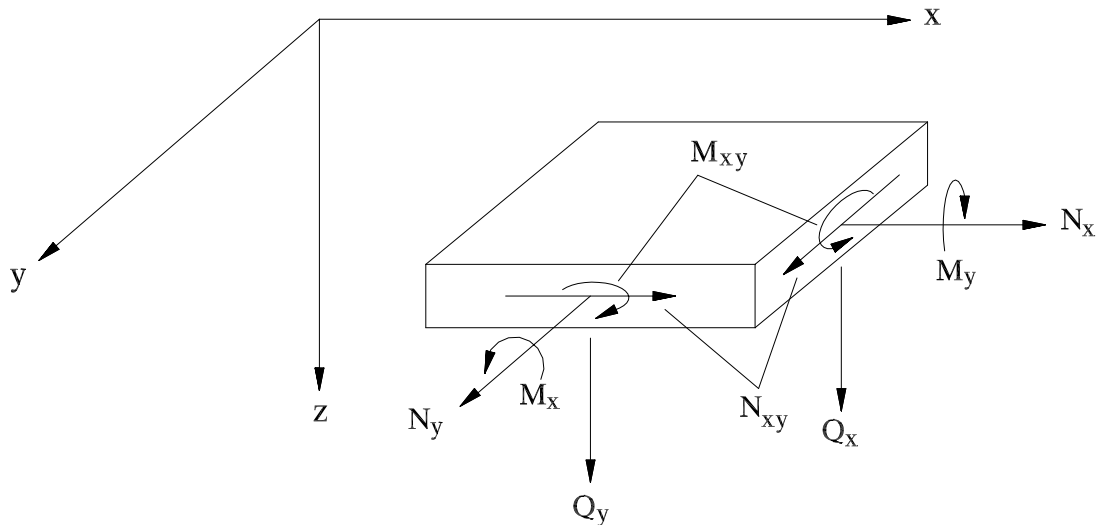


FIGURA 2.3 – Resultantes de tensões para placas

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xx} dz \quad , \quad N_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} dz \quad , \quad N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yy} dz \quad (2.26)$$

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xx} z dz \quad , \quad M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz \quad , \quad M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yy} z dz \quad (2.27)$$

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz \quad , \quad Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz \quad . \quad (2.28)$$

Determina-se então a seguinte expressão para o trabalho virtual interno

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}} = \iint_A \{ & N_x \left[\frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right] - M_x \frac{\partial \delta \theta_x}{\partial x} + N_{xy} \left[\frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \frac{\partial \delta w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right] \\ & - M_{xy} \left[\frac{\partial \delta \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \theta_y}{\partial x} \right] + N_y \left[\frac{\partial \delta v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right] - M_y \frac{\partial \delta \theta_y}{\partial y} + Q_x \left[\frac{\partial \delta w}{\partial x} - \delta \theta_x \right] + Q_y \left[\frac{\partial \delta w}{\partial y} - \delta \theta_y \right] \\ & + kw \delta w \} dA \end{aligned} \quad (2.29)$$

O trabalho virtual realizado pelas forças externas será calculado através da equação

$$\delta W_{\text{ext}} = \iint_A p(x, y) \delta w dx dy + \oint_{\Gamma} \bar{N}_v \delta u_v ds + \oint_{\Gamma} \bar{N}_{vs} \delta u_s ds \quad (2.30)$$

onde

ds é um elemento de comprimento ao longo da curva Γ ,

u_v é a componente de deslocamento na direção normal à curva Γ ,

u_s é a componente de deslocamento na direção tangencial à curva Γ ,

\bar{N}_v são forças normais por unidade de comprimento, no contorno,

\bar{N}_{vs} são forças tangenciais por unidade de comprimento, no contorno.

O P.T.V. estabelece a condição necessária e suficiente para o equilíbrio do corpo deformável na forma

$$\delta W_{int} - \delta W_{ext} = 0 \quad (2.31)$$

Substituindo-se as definições de δW_{int} e δW_{ext} segundo as equações (2.29) e (2.30), chega-se à

$$\begin{aligned} & \iint_A \left\{ N_x \left[\frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right] - M_x \frac{\partial \delta \theta_x}{\partial x} + N_{xy} \left[\frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \frac{\partial \delta w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right] \right. \\ & - M_{xy} \left[\frac{\partial \delta \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \theta_y}{\partial x} \right] + N_y \left[\frac{\partial \delta v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right] - M_y \frac{\partial \delta \theta_y}{\partial y} + Q_x \left[\frac{\partial \delta w}{\partial x} - \delta \theta_x \right] + Q_y \left[\frac{\partial \delta w}{\partial y} - \delta \theta_y \right] \\ & \left. + kw \delta w \right\} dx dy - \iint_A p(x, y) \delta w dx dy - \oint_{\Gamma} \bar{N}_v \delta u_v ds - \oint_{\Gamma} \bar{N}_{vs} \delta u_s ds = 0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

Através da aplicação sucessiva do Teorema de Green de forma a eliminar os deslocamentos virtuais δu , δv , δw , $\delta \theta_x$ e $\delta \theta_y$ das expressões que envolvem derivadas parciais e reagrupando os termos em função destes, resulta que

$$\begin{aligned} & - \iint_A \left\{ \left[\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \right] \delta u + \left[\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \right] \delta v + \left[\frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \right. \right. \\ & \left. \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p(x, y) - kw \right\} \delta w - \left[\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x \right] \delta \theta_x - \left[\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y \right] \delta \theta_y \} dx dy \\ & + \oint_{\Gamma} \left\{ [N_x v_x + N_{xy} v_y] \delta u + [N_{xy} v_x + N_y v_y] \delta v + \left[N_x v_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} v_y \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} v_x \frac{\partial w}{\partial y} + N_y v_y \frac{\partial w}{\partial y} \right] \delta w \right. \\ & \left. + [Q_x v_x + Q_y v_y] \delta w - [M_x v_x + M_{xy} v_y] \delta \theta_x - [M_{xy} v_x + M_y v_y] \delta \theta_y \right\} ds - \oint_{\Gamma} \bar{N}_v \delta u_v ds \\ & - \oint_{\Gamma} \bar{N}_{vs} \delta u_s ds = 0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

No contorno Γ , pode-se demonstrar(DYM e SHAMES, 1977) a validade das seguintes expressões, que são ilustradas através das FIGURAS 2.4, 2.5 e 2.6.

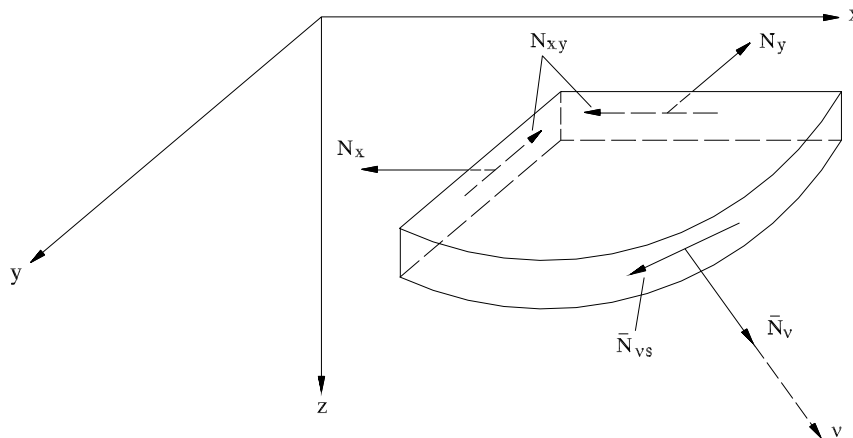


FIGURA 2.4 – Esforços normais no contorno

$$\bar{N}_v = N_x v_x^2 + 2N_{xy} v_x v_y + N_y v_y^2 \quad (2.34)$$

$$\bar{N}_{vs} = (N_y - N_x) v_x v_y + N_{xy} (v_x^2 - v_y^2) \quad (2.35)$$

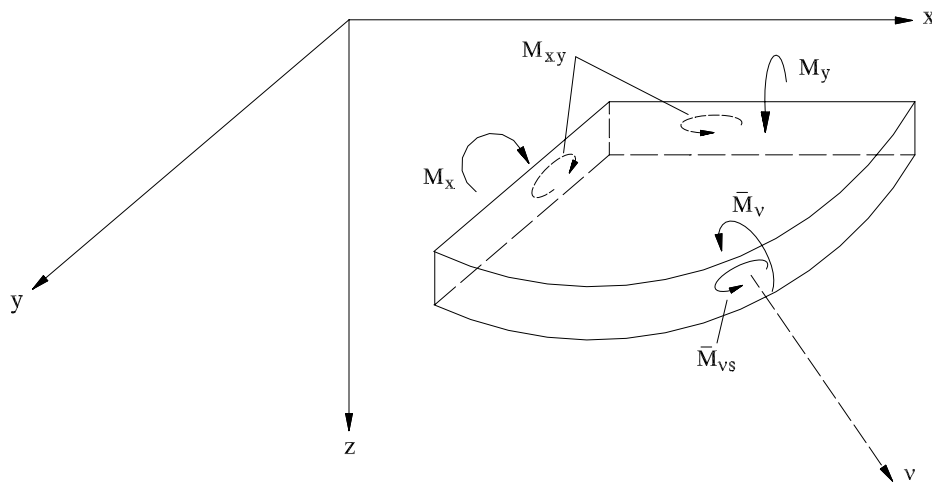


FIGURA 2.5 – Momentos fletores e torções no contorno

$$\bar{M}_v = M_x v_x^2 + 2M_{xy} v_x v_y + M_y v_y^2 \quad (2.36)$$

$$\bar{M}_{vs} = (M_y - M_x) v_x v_y + M_{xy} (v_x^2 - v_y^2) \quad (2.37)$$

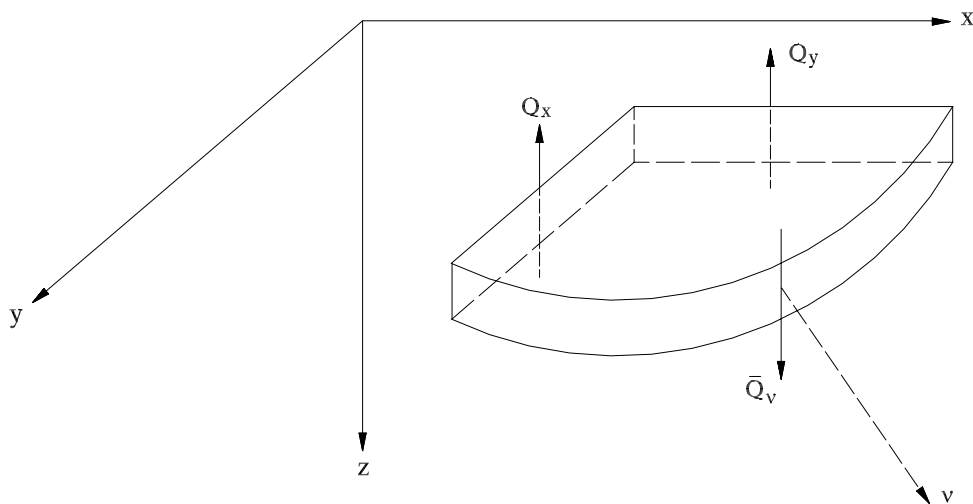


FIGURA 2.6 – Esforços cortantes no contorno

$$\bar{Q}_v = Q_x v_x + Q_y v_y \quad (2.38)$$

No que diz respeito ao campo de deslocamentos, no contorno é possível estabelecer as seguintes relações

$$u = u_v v_x - u_s v_y, \quad (2.39)$$

$$v = u_v v_y + u_s v_x, \quad (2.40)$$

$$\theta_x = \theta_v v_x - \theta_s v_y, \quad (2.41)$$

$$\theta_y = \theta_v v_y + \theta_s v_x. \quad (2.42)$$

Além disso, examinando uma pequena extensão do contorno $\Gamma = \Gamma(x, y)$, pode-se fixar as seguintes expressões em função dos sistemas de coordenadas mostrados na FIGURA 2.7.

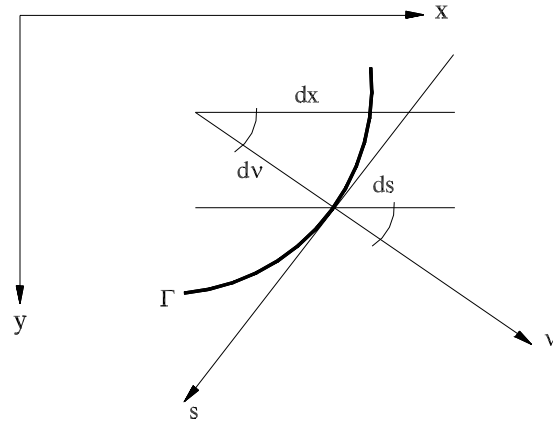


FIGURA 2.7 – Sistemas de coordenadas no contorno

$$\frac{\partial}{\partial x} = v_x \frac{\partial}{\partial v} - v_y \frac{\partial}{\partial s} \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = v_y \frac{\partial}{\partial v} + v_x \frac{\partial}{\partial s} \quad (2.44)$$

As equações de (2.34) a (2.44) podem ser substituídas nas integrais de linha da equação (2.33) como artifício para se chegar a uma expressão final mais simples para o P.T.V. na forma

$$\begin{aligned} & - \iint_A \left\{ \left[\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \right] \delta u + \left[\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \right] \delta v + \left[\frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \right. \\ & \left. \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p(x, y) - kw \right] \delta w - \left[\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x \right] \delta \theta_x - \left[\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y \right] \delta \theta_y \} dx dy \\ & + \oint_{\Gamma} \left\{ [N_v - \bar{N}_v] \delta u_v + [N_{vs} - \bar{N}_{vs}] \delta u_s + \left[N_v \frac{\partial w}{\partial v} + N_{vs} \frac{\partial w}{\partial s} + Q_v \right] \delta w - M_v \delta \theta_v - M_{vs} \delta \theta_s \right\} ds = 0 \end{aligned} \quad (2.45)$$

Como o campo de deslocamentos pode ser arbitrário, é possível fazer-se sucessivamente um dos deslocamentos virtuais igual à unidade e considerar simultaneamente os demais como sendo nulos; resultando deste processo as equações de equilíbrio e as condições de contorno que regem o problema.

Desta forma, tem-se que no interior da superfície delimitada pela curva regular $\Gamma = \Gamma(x,y)$, são válidas as seguintes equações diferenciais de equilíbrio:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p(x,y) - kw = 0 \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0 \quad (2.50)$$

Ao longo da curva $\Gamma = \Gamma(x,y)$, que delimita a placa, valem as seguintes condições mecânicas ou cinemáticas de contorno (REAL, 1990)

Condições Mecânicas

Condições Cinemáticas

$$N_v = \bar{N}_v \quad \text{ou} \quad u_v = \bar{u}_v \quad (2.51)$$

$$N_{vs} = \bar{N}_{vs} \quad \text{ou} \quad u_s = \bar{u}_s \quad (2.52)$$

$$N_v \frac{\partial w}{\partial v} + N_{vs} \frac{\partial w}{\partial s} + Q_v = 0 \quad \text{ou} \quad w = \bar{w} \quad (2.53)$$

$$M_v = 0 \quad \text{ou} \quad \theta_v = \bar{\theta}_v \quad (2.54)$$

$$M_{vs} = 0 \quad \text{ou} \quad \theta_s = \bar{\theta}_s \quad (2.55)$$

Como se pode observar, as equações de equilíbrio (2.46)-(2.50) e as condições de contorno (2.51)-(2.55) resultam dependentes do campo de deslocamentos, que é justamente a principal incógnita do problema, tratando-se portanto, desde o princípio, de uma formulação não-linear de origem geométrica.

3 - ANÁLISE NÃO-LINEAR DE PLACAS SOBRE BASE ELÁSTICA PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

3.1-INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é estabelecer uma formulação para análise não-linear de placas sobre base elástica através do Método dos Elementos Finitos, daqui a diante M.E.F., com solução em deslocamentos.

Inicialmente é feita a descrição do elemento finito utilizado e de suas funções de interpolação. A partir das relações entre as componentes de deformação generalizadas e os deslocamentos, obtém-se a matriz de deformações do elemento. A seguir é definido o vetor de componentes generalizadas de tensões. Finalmente aplica-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais, deduzindo-se então o sistema de equações não-lineares de equilíbrio que governa o problema.

Encerrando o capítulo, apresenta-se como caso particular a solução do problema quando se trata de um material elástico-linear, dentro do regime de pequenos deslocamentos. Aborda-se então o cálculo da matriz de rigidez do elemento e a questão da integração numérica. Deve-se salientar que esta formulação linear apenas servirá para o ajuste incremental-iterativo do sistema de equações não-lineares, através do algoritmo desenvolvido no final deste capítulo.

3.2-GEOMETRIA DO ELEMENTO

Seja a placa representada na FIGURA 3.1 através de seu plano médio apoiada sobre uma base elástica, e que se encontra submetida a um carregamento formado pelas forças por unidade de superfície p_x , p_y e p_z atuando respectivamente nas direções x , y e z .

O M.E.F. consiste em dividir o plano médio da placa em elementos de superfície (elementos finitos), que estão conectados entre si por meio de pontos nodais. Na solução em deslocamentos, as incógnitas do problema são os deslocamentos dos pontos nodais, sendo as tensões no interior do elemento e as reações de apoio calculadas a partir destes.

Na FIGURA 3.1 é mostrada uma possível discretização da placa em elementos finitos de oito nós.

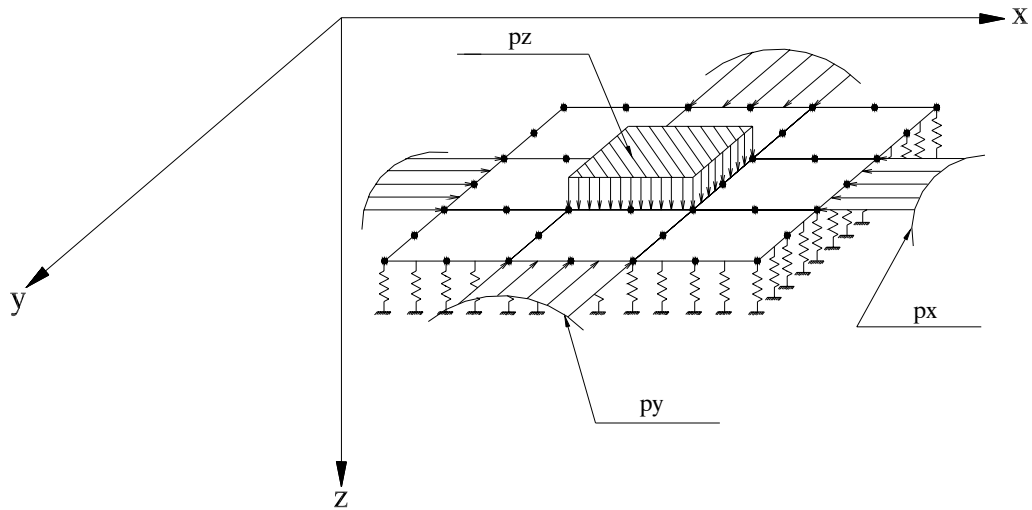


FIGURA 3.1 – Carregamento e aspectos geométricos da placa

Neste trabalho serão empregados elementos isoparamétricos quadráticos, de oito nós, da família Serendipity, cuja geometria se encontra descrita na FIGURA 3.2. Como sistema de referência local do elemento é adotado um sistema de coordenadas curvilíneas ξ e η . Os pontos nodais se encontram numerados de 1 a 8.

Os elementos isoparamétricos quadráticos são muito versáteis, pois permitem discretizar placas com contornos curvilíneos, além de sua excelente performance estar comprovada em diversos estudos (HINTON, 1977; OWEN, 1980; ZIENKIEWICZ, 1989).

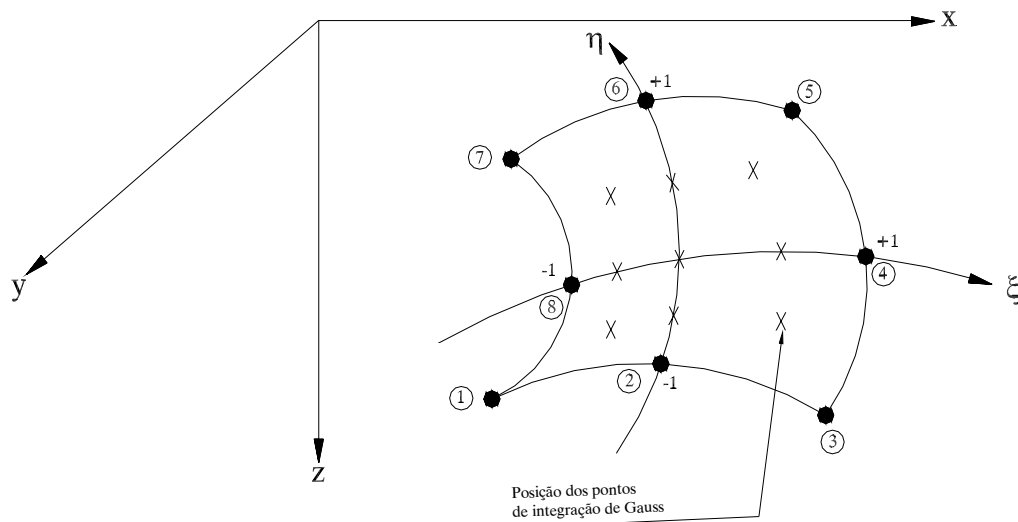


FIGURA 3.2 – Geometria do elemento isoparamétrico quadrático

3.3-CAMPO DE DESLOCAMENTOS

O primeiro passo em uma análise de placas através do M.E.F. em deslocamentos é descrever de forma única o campo de deslocamentos no interior do elemento como função dos deslocamentos dos pontos nodais. Isto é feito mediante o emprego de funções de interpolação.

Assim sendo, o vetor de deslocamentos \tilde{u} em ponto qualquer no interior do elemento é calculado por

$$\tilde{u} = \tilde{N} \tilde{U}^e \quad (3.1)$$

onde
$$\tilde{u} = \{u, v, w, \theta_x, \theta_y\}^T. \quad (3.2)$$

A matriz \tilde{N} , denominada matriz de interpolação do elemento, é da ordem de 5×40 , sendo definida por

$$\tilde{N} = [\tilde{N}_1, \tilde{N}_2, \dots, \tilde{N}_i, \dots, \tilde{N}_8], \quad (3.3)$$

onde $N_{\sim i}$ é uma submatriz 5x5, dada pelo produto $N_i(\xi, \eta) * I_{\sim 5}$, no qual $N_i(\xi, \eta)$ é a função de interpolação correspondente ao nó i e $I_{\sim 5}$ é uma matriz identidade 5x5.

O vetor de deslocamentos nodais do elemento U_{\sim}^e é definido por

$$U_{\sim}^e = \{U_{\sim 1}, U_{\sim 2}, \dots, U_{\sim i}, \dots, U_{\sim 8}\}^T, \quad (3.4)$$

onde U_i é o vetor de deslocamentos do nó i , dado por

$$U_{\sim i} = \{u_i, v_i, w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}\}^T. \quad (3.5)$$

O elemento isoparamétrico é aquele no qual são empregadas as mesmas funções tanto para interpolar a geometria, quanto para interpolar os deslocamentos. Desta forma, adotando-se o sistema de coordenadas naturais (ξ, η) no elemento, as coordenadas cartesianas $x(\xi, \eta)$ e $y(\xi, \eta)$ em um ponto dentro do elemento são fornecidas pelas expressões

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) x_i \quad (3.6)$$

$$y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) y_i \quad (3.7)$$

onde x_i e y_i são as coordenadas cartesianas do nó i .

As funções de interpolação quadráticas bidimensionais da família Serendipity $N_i(\xi, \eta)$, são as seguintes

$$N_1(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta), \quad (3.8)$$

$$N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta), \quad (3.9)$$

$$N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)(\xi - \eta - 1), \quad (3.10)$$

$$N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2), \quad (3.11)$$

$$N_5(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)(\xi + \eta - 1), \quad (3.12)$$

$$N_6(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta), \quad (3.13)$$

$$N_7(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)(-\xi + \eta - 1), \quad (3.14)$$

$$N_8(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta^2), \quad (3.15)$$

sendo que a numeração dos nós corresponde a da FIGURA 3.2.

Cada função de interpolação deve assumir o valor unitário quando são fornecidas as coordenadas do nó que lhe corresponde e deve anular-se, quando forem dadas as coordenadas de outro nó. Em um ponto qualquer no interior do elemento, a soma dos valores das funções de interpolação para as coordenadas deste ponto deve ser igual à unidade.

3.4-CAMPO DE DEFORMAÇÕES

No estudo de placas através do M.E.F. é vantajoso trabalhar-se com componentes generalizadas de deformação, que são função apenas das coordenadas contidas no plano médio da placa. Deste modo, o vetor de deformações generalizadas $\tilde{\varepsilon}$ pode ser expresso por

$$\underline{\varepsilon}_{\sim P} = \{ \underline{\varepsilon}_{\sim P}, \underline{\varepsilon}_{\sim F}, \underline{\varepsilon}_{\sim C}, \underline{\varepsilon}_{\sim S} \}^T \quad (3.16)$$

onde $\underline{\varepsilon}_{\sim P}$ é um vetor contendo as componentes de deformação correspondentes a um estado plano de tensões, dado por

$$\underline{\varepsilon}_{\sim P} = \{ \bar{\varepsilon}_x, \bar{\varepsilon}_y, \bar{\gamma}_{xy} \}^T, \quad (3.17)$$

$\underline{\varepsilon}_{\sim F}$ é um vetor que contém as curvaturas da placa com o sinal trocado, definido por

$$\underline{\varepsilon}_{\sim F} = \{ \chi_x, \chi_y, \chi_{xy} \}^T, \quad (3.18)$$

$\underline{\varepsilon}_{\sim C}$ é um vetor composto pelas componentes de deformação por corte na forma

$$\underline{\varepsilon}_{\sim C} = \{ \phi_x, \phi_y \}^T, \quad (3.19)$$

e $\underline{\varepsilon}_{\sim S}$ é um vetor composto pela componente de deformação por afundamento devido a base elástica, definido por

$$\underline{\varepsilon}_{\sim S} = \{ w \}. \quad (3.20)$$

Deve-se observar que neste trabalho considera-se que a distorção por corte no nível do plano médio da placa se mantém constante ao longo de toda espessura h . Com base nesta hipótese, tem-se que

$$\phi_x = \gamma_{xy}, \quad (3.21)$$

$$\phi_y = \gamma_{yz}. \quad (3.22)$$

Esta afirmação permite recuperar a hipótese das seções planas, que é de grande valia

neste estudo.

Posteriormente será introduzido um fator de correção para esta simplificação, no que se refere à distribuição das tensões.

Havendo a possibilidade de ocorrerem grandes deslocamentos, o vetor de deformações generalizadas deve ser composto por duas parcelas na forma

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{\varepsilon}_0 + \underset{\sim}{\varepsilon}_G \quad (3.23)$$

Na equação (3.23), $\underset{\sim}{\varepsilon}_0$ é um vetor que contém as componentes de deformações infinitesimais (lineares) e $\underset{\sim}{\varepsilon}_G$ é um vetor contendo os termos não-lineares correspondentes as deformações finitas. Estes vetores serão descritos a seguir.

3.4.1-Componentes de deformação infinitesimais

Levando-se em consideração apenas as parcelas lineares das relações deformação-deslocamento estabelecidas no capítulo 2, o vetor correspondente as componentes de deformações generalizadas infinitesimais é dado por

$$\underset{\sim}{\varepsilon}_0 = \{ \underset{\sim}{\varepsilon}_0^P, \underset{\sim}{\varepsilon}_0^F, \underset{\sim}{\varepsilon}_0^C, \underset{\sim}{\varepsilon}_0^S \}^T, \quad (3.24)$$

onde

$$\underset{\sim}{\varepsilon}_0^P = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right\}^T, \quad (3.25)$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon}_0^F = \left\{ -\frac{\partial \theta_x}{\partial x}, -\frac{\partial \theta_y}{\partial y}, -\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \right\}^T, \quad (3.26)$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon}_0^C = \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x, \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \right\}^T, \quad (3.27)$$

e

$$\varepsilon_{\sim 0}^S = \{w\}. \quad (3.28)$$

Empregando-se para o campo de deslocamentos, segundo o M.E.F., a equação (3.1), chega-se à

$$\varepsilon_{\sim 0} = B_{\sim 0} U_{\sim}^e \quad (3.29)$$

onde

$$B_{\sim 0} = [B_{\sim 01}, B_{\sim 02}, \dots, B_{\sim 0i}, \dots, B_{\sim 08}], \quad (3.30)$$

é uma matriz 9x40, chamada matriz de deformações do elemento sendo $B_{\sim 0i}$ uma submatriz nodal 9x5, que contém derivadas das funções de interpolação $N_i(\xi, \eta)$.

A submatriz nodal de deformações do nó i apresenta a seguinte composição

$$B_{\sim 0i} = \begin{bmatrix} B_{\sim 0i}^P \begin{matrix} (3 \times 2) \\ \end{matrix} & \mathbf{0} \begin{matrix} \\ (3 \times 3) \end{matrix} \\ \mathbf{0} \begin{matrix} (3 \times 2) \\ \end{matrix} & B_{\sim 0i}^F \begin{matrix} (3 \times 3) \\ \end{matrix} \\ \mathbf{0} \begin{matrix} (2 \times 2) \\ \end{matrix} & B_{\sim 0i}^C \begin{matrix} (2 \times 3) \\ \end{matrix} \\ \mathbf{0} \begin{matrix} (1 \times 2) \\ \end{matrix} & B_{\sim 0i}^S \begin{matrix} (1 \times 3) \\ \end{matrix} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

onde

$$B_{\sim 0i}^P = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

é a submatriz de deformações para um estado plano de tensões;

$$B_{\sim 0i}^F = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} & -\frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

é uma submatriz de deformações para flexão e torção de placas;

$$B_{\sim 0i}^C = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & -N_i & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & -N_i \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

é uma submatriz de deformações para o cisalhamento;

$$B_{\sim 0i}^S = [N_i \quad 0 \quad 0] \quad (3.35)$$

é uma submatriz de deformações para a base elástica.

Assim as componentes de deformação generalizadas para deformações infinitesimais podem ser calculadas em qualquer ponto no interior do elemento, a partir do vetor de deslocamentos nodais.

Deve ainda observar que a primeira variação do vetor $\varepsilon_{\sim 0}$, definido na equação (3.29), é dada por

$$\delta \varepsilon_{\sim 0} = B_{\sim 0} \delta U_{\sim 0}^e, \quad (3.36)$$

sendo este resultado utilizado mais adiante.

3.4.2-Componentes de deformação não-lineares

O vetor $\varepsilon_{\sim G}$, que contém as componentes não-lineares das deformações generalizadas é definido a partir das equações (2.11)-(2.16), como sendo

$$\varepsilon_{\sim G} = \{\varepsilon_{\sim G}^P, 0, 0, 0\}^T, \quad (3.37)$$

onde

$$\varepsilon_{\sim G}^P = \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]^2, \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w}{\partial y} \right]^2, \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right\}^T. \quad (3.38)$$

Calculando-se a primeira variação do vetor $\varepsilon_{\sim G}$, definido segundo as equações (3.37) e (3.38), e tendo-se em conta a definição do campo de deslocamentos segundo o M.E.F., chega-se à

$$\delta \varepsilon_{\sim G} = B_{\sim G}(U^e) \delta U^e, \quad (3.39)$$

onde $B_{\sim G}(U^e)$ é a matriz de deformações não-linear do elemento, assim designada por ser função do vetor de deslocamentos nodais do elemento, U^e .

A matriz $B_{\sim G}$, cuja ordem é 9x40, compõem-se da seguinte forma

$$B_{\sim G} = [B_{\sim G1}, B_{\sim G2}, \dots, B_{\sim Gi}, \dots, B_{\sim G8}], \quad (3.40)$$

onde $B_{\sim Gi}$ é uma submatriz nodal definida por

$$B_{\sim Gi} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\sim(3 \times 2)} & B_{\sim Gi}^P{}_{(3 \times 3)} \\ \mathbf{0}_{\sim(3 \times 2)} & \mathbf{0}_{\sim(3 \times 3)} \\ \mathbf{0}_{\sim(2 \times 2)} & \mathbf{0}_{\sim(2 \times 3)} \\ \mathbf{0}_{\sim(1 \times 2)} & \mathbf{0}_{\sim(1 \times 3)} \end{bmatrix}, \quad (3.41)$$

sendo

$$B_{\sim Gi}^P = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

Em resumo, a primeira variação do vetor de componentes generalizadas de deformações $\tilde{\varepsilon}$, dado pela equação (3.23), pode ser calculada a partir da expressão

$$\delta \tilde{\varepsilon} = \bar{B}_{\sim} \delta U^e, \quad (3.43)$$

onde \bar{B}_{\sim} é a matriz de deformações completa do elemento, definida por

$$\bar{B}_{\sim} = B_{\sim 0} + B_{\sim G} (U^e). \quad (3.44)$$

3.5-AÇÕES NODAIS E CARREGAMENTOS

A cada elemento se encontra associado um vetor de ações nodais F_{\sim}^e , dado por

$$F_{\sim}^e = \{ F_{\sim 1}, F_{\sim 2}, \dots, F_{\sim i}, \dots, F_{\sim 8} \}^T, \quad (3.45)$$

onde $F_{\sim i}$ é o vetor de ações nodais do nó i composto na forma

$$F_{\sim i} = \{F_{xi}, F_{yi}, F_{zi}, M_{xi}, M_{yi}\}^T, \quad (3.46)$$

sendo F_{xi} , F_{yi} e F_{zi} as forças nodais atuantes nas direções x , y e z , respectivamente, M_{xi} o momento fletor na direção x e M_{yi} o momento fletor na direção y . As componentes do vetor de ações nodais $F_{\sim i}$ correspondem as componentes do vetor de deslocamento nodais $U_{\sim i}$.

O carregamento externo no interior do elemento é definido através do vetor de cargas por unidade de superfície p_{\sim} , dado por

$$p_{\sim} = \{p_x, p_y, p_z\}^T, \quad (3.47)$$

formado pelas forças por unidade de superfície p_x , p_y e p_z atuando respectivamente nas direções x , y e z .

3.6-COMPONENTES GENERALIZADAS DE TENSÃO

Define-se aqui o vetor de componentes generalizadas de tensão σ_{\sim} , referido às coordenadas do plano médio da placa, tendo por base as equações (2.26)-(2.28), na forma

$$\sigma_{\sim} = \{\sigma_{\sim P}, \sigma_{\sim F}, \sigma_{\sim C}, \sigma_{\sim S}\}^T, \quad (3.48)$$

onde

$$\sigma_{\sim P} = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^T, \quad (3.49)$$

$$\sigma_{\sim F} = \{M_x, M_y, M_{xy}\}^T, \quad (3.50)$$

$$\sigma_{\sim C} = \{Q_x, Q_y\}^T, \quad (3.51)$$

$$e \quad \underline{\sigma}_{\sim s} = \{P_s\} \quad (3.52)$$

são respectivamente os vetores de componentes generalizadas de tensão para o estado plano de tensões, flexão e torção de placas, cisalhamento e reação do solo.

3.7-APLICAÇÃO DO PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

Seja um único elemento sujeito à atuação de cargas nodais \underline{F}^e e a forças de superfície \underline{p} , que causam o surgimento de uma distribuição de tensões equilibrantes $\underline{\sigma}$.

Considerando que este elemento seja submetido a uma variação arbitrária dos deslocamentos nodais $\delta \underline{u}^e$, que resulta em um campo de deslocamentos compatível no interior do elemento $\delta \underline{u}$ e em um campo de deformações também compatível $\delta \underline{\varepsilon}$.

Lembrando as hipóteses formuladas quanto ao campo de deformações no capítulo 2, as tensões podem ser referidas ao sistema indeformado e as integrais podem ser efetuadas dentro dos limites da geometria original do elemento, logo o Princípio dos Trabalhos Virtuais (P.T.V.) estabelece que (REAL, 1990)

$$\delta U^{\sim e,T} \underline{F}^e + \iint_{A_e} \delta \underline{u}^T \underline{p} dA = \iint_{A_e} \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} dA. \quad (3.53)$$

Substituindo-se as expressões obtidas para os deslocamentos e as deformações no interior do elemento segundo as equações (3.1) e (3.43), respectivamente, resulta

$$\delta U^{\sim e,T} \underline{F}^e + \delta U^{\sim e,T} \iint_{A_e} \underline{N}^T \underline{p} dA = \delta U^{\sim e,T} \iint_{A_e} \underline{\bar{B}}^T \underline{\sigma} dA. \quad (3.54)$$

Como a variação dos deslocamentos nodais $\delta \underline{u}^e$ é arbitrária pode ser eliminada da equação (3.54), logo

$$\tilde{F}^e + \iint_{A_e} \tilde{N}^T \tilde{p} dA = \iint_{A_e} \tilde{B}^T \tilde{\sigma} dA. \quad (3.55)$$

Fazendo-se

$$\tilde{F}_{eq}^e = \iint_{A_e} \tilde{N}^T \tilde{p} dA, \quad (3.56)$$

onde \tilde{F}_{eq}^e é o vetor de ações nodais equivalentes do elemento;

$$\tilde{P}_{ext}^e = \tilde{F}^e + \tilde{F}_{eq}^e \quad (3.57)$$

onde \tilde{P}_{ext}^e é o vetor de cargas nodais externas a nível do elemento, e introduzindo-se a definição

$$\tilde{A}_{NL}^e(\tilde{U}^e) = \iint_{A_e} \tilde{B}^T \tilde{\sigma} dA \quad (3.58)$$

onde \tilde{A}_{NL}^e é o vetor de ações nodais não-lineares do elemento, portanto a equação (3.55) assume o seguinte aspecto

$$\tilde{P}_{ext}^e = \tilde{A}_{NL}^e(\tilde{U}^e) \quad (3.59)$$

Observe-se que o vetor \tilde{A}_{NL}^e é uma função não-linear do vetor de deslocamentos nodais do elemento \tilde{U}^e . Esta não-linearidade pode ter fundamentalmente duas origens:

I) Não-linearidade geométrica que se deve à ocorrência de grandes deslocamentos, conforme já foi mostrado no capítulo 2;

II) Não-linearidade física que é causada pela relação tensão-deformação não-linear do material.

Estes efeitos na verdade atuam conjuntamente, determinando uma resposta estática que se afasta daquela prevista pela Teoria da Elasticidade Linear.

Realizando-se a soma sobre cada grau de liberdade nodal da placa, das contribuições dos elementos que a ele concorrem, chega-se à

$$\underset{\sim}{P}_{ext} = \underset{\sim}{A}_{NL}(\underset{\sim}{U}) \quad (3.60)$$

onde $\underset{\sim}{P}_{ext}$ é o vetor de cargas nodais completo da estrutura, e $\underset{\sim}{A}_{NL}$ é o vetor de ações nodais não-lineares completo da estrutura.

A equação (3.60) pode ser reescrita na forma

$$\underset{\sim}{P}_{ext} - \underset{\sim}{A}_{NL}(\underset{\sim}{U}) = 0. \quad (3.61)$$

A equação (3.61) representa um sistema de equações não-lineares de equilíbrio nodal entre as cargas nodais externas e as ações nodais nos elementos.

Se o vetor de deslocamentos nodais da placa $\underset{\sim}{U}$, não for a solução exata para a equação (3.61), existirá um vetor de forças residuais não equilibradas $\underset{\sim}{\psi}$, dado por

$$\underset{\sim}{\psi}(\underset{\sim}{U}) = \underset{\sim}{P}_{ext} - \underset{\sim}{A}_{NL}(\underset{\sim}{U}). \quad (3.62)$$

O problema trata-se, então, de se determinar o vetor de deslocamentos $\underset{\sim}{U}$, que verifique o sistema de n equações não-lineares a n incógnitas estabelecido na seguinte forma

$$\underset{\sim}{\psi}(\underset{\sim}{U}) = 0. \quad (3.63)$$

O sistema de equações (3.63) é resolvido numericamente, através do método apresentado no item 3.11 deste mesmo capítulo.

3.8-CASO PARTICULAR: MATERIAL ELÁSTICO-LINEAR E REGIME DE PEQUENOS DESLOCAMENTOS

Para que se possa desenvolver o algoritmo de solução da equação (3.63), é necessário estabelecer-se a equação de equilíbrio da placa, para um material homogêneo elástico-linear, dentro do regime de pequenas deformações e pequenos deslocamentos.

A contribuição da armadura para a rigidez elástica do elemento é desprezada. Esta aproximação é válida, porque o algoritmo apenas necessita de uma estimativa da matriz de rigidez inicial do elemento, que será obtida a seguir.

Considerando-se que a placa tenha espessura h , e seja formada por um material que obedeça a Lei de Hooke, cujo módulo de deformação longitudinal é E e cujo coeficiente de Poisson é ν , e considerando apenas as ações nodais \tilde{P}_{ext}^e definidas em (3.57), atuando no elemento, tem-se que o trabalho virtual realizado pelas forças externas será dado por

$$\delta W_{ext} = \tilde{P}_{ext}^e \delta \tilde{U}^{e,T}. \quad (3.64)$$

Desconsiderando-se os termos não-lineares no trabalho virtual realizado pelas forças internas, definido pela equação (2.29), tem-se a condição de equilíbrio do corpo deformável na forma

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{ext}^e \delta \tilde{U}^{e,T} = \iint_A \left\{ N_x \frac{\partial \delta u}{\partial x} + N_y \frac{\partial \delta v}{\partial y} + N_{xy} \left[\frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x} \right] - M_x \frac{\partial \delta \theta_x}{\partial x} - M_y \frac{\partial \delta \theta_y}{\partial y} \right. \\ \left. - M_{xy} \left[\frac{\partial \delta \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \theta_y}{\partial x} \right] + Q_x \left[\frac{\partial \delta w}{\partial x} - \delta \theta_x \right] + Q_y \left[\frac{\partial \delta w}{\partial y} - \delta \theta_y \right] + P_s \delta w \right\} dA \end{aligned} \quad (3.65)$$

Na aplicação do M.E.F. o vetor de deslocamentos \tilde{u} em ponto qualquer no interior do elemento é dado pela equação (3.1) onde

$$u = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) u_i \quad (3.66)$$

portanto

$$\delta u = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \delta u_i \quad (3.67)$$

$$\frac{\partial \delta u}{\partial x} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial x} \delta u_i, \quad (3.68)$$

e assim para as demais componentes do vetor de deslocamentos.

Portanto a equação (3.65) assume a seguinte forma

$$\begin{aligned} \tilde{P}^e_{ext} \delta \tilde{U}^{e,T} = \sum_{i=1}^8 \iint_A \left\{ N_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \delta u_i + N_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \delta v_i + N_{xy} \left[\frac{\partial N_i}{\partial y} \delta u_i + \frac{\partial N_i}{\partial x} \delta v_i \right] - M_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \delta \theta_{xi} \right. \\ \left. - M_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \delta \theta_{yi} - M_{xy} \left[\frac{\partial N_i}{\partial y} \delta \theta_{xi} + \frac{\partial N_i}{\partial x} \delta \theta_{yi} \right] + Q_x \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \delta w_i - N_i \delta \theta_{xi} \right] + Q_y \left[\frac{\partial N_i}{\partial y} \delta w_i - N_i \delta \theta_{yi} \right] \right. \\ \left. + P_S N_i \delta w_i \right\} dA. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Isolando as variações dos deslocamentos nodais e tirando-os do sinal de integral obtém-se

$$\tilde{P}^e_{ext} \delta \tilde{U}^{e,T} = \sum_{i=1}^8 \left\{ \delta u_i, \delta v_i, \delta w_i, \delta \theta_{xi}, \delta \theta_{yi} \right\} \iint_A \left\{ \begin{array}{l} N_x \frac{\partial N_i}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ N_y \frac{\partial N_i}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ Q_x \frac{\partial N_i}{\partial x} + Q_y \frac{\partial N_i}{\partial y} + P_S N_i \\ -M_x \frac{\partial N_i}{\partial x} - M_{xy} \frac{\partial N_i}{\partial y} - Q_x N_i \\ -M_y \frac{\partial N_i}{\partial y} - M_{xy} \frac{\partial N_i}{\partial x} - Q_y N_i \end{array} \right\} dA. \quad (3.70)$$

Como a variação dos deslocamentos nodais δU_{\sim}^e é arbitrária, pode ser eliminada da equação (3.70), logo

$$P_{\sim}^e = \sum_{i=1}^8 \iint_A \left\{ \begin{array}{l} N_x \frac{\partial N_i}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ N_y \frac{\partial N_i}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ Q_x \frac{\partial N_i}{\partial x} + Q_y \frac{\partial N_i}{\partial y} + P_s N_i \\ -M_x \frac{\partial N_i}{\partial x} - M_{xy} \frac{\partial N_i}{\partial y} - Q_x N_i \\ -M_y \frac{\partial N_i}{\partial y} - M_{xy} \frac{\partial N_i}{\partial x} - Q_y N_i \end{array} \right\} dA \quad (3.71)$$

Organizando matricialmente a equação (3.71), obtém-se

$$P_{\sim}^e = \sum_{i=1}^8 \iint_A \left[\begin{array}{cccccccccc} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} & -N_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & -N_i & 0 & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \\ P_s \end{array} \right\} dA \quad (3.72)$$

sendo a matriz apresentada na equação (3.72), a matriz de deformações $B_{\sim 0}$ na sua forma transposta, definida na equação (3.31).

Assim, a equação (3.72) assumirá a seguinte forma

$$P_{\sim}^e{}_{ext} = \sum_{i=1}^8 \iint_A B_{\sim 0}^T \sigma_{\sim} dA \quad (3.73)$$

Utilizando-se as definições clássicas das resultantes de tensões para placas, conforme as equações (2.26)-(2.28) e as componentes de deformações generalizadas infinitesimais dadas por (3.25)-(3.28), tem-se

$$N_x = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \sum_{i=1}^8 \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} u_i + \nu \frac{\partial N_i}{\partial y} v_i \right) \quad (3.74)$$

$$N_y = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \sum_{i=1}^8 \left(\nu \frac{\partial N_i}{\partial x} u_i + \frac{\partial N_i}{\partial y} v_i \right) \quad (3.75)$$

$$N_{xy} = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \frac{1-\nu}{2} \sum_{i=1}^8 \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} u_i + \frac{\partial N_i}{\partial x} v_i \right) \quad (3.76)$$

$$M_x = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \sum_{i=1}^8 \left(-\frac{\partial N_i}{\partial x} \theta_{xi} - \nu \frac{\partial N_i}{\partial y} \theta_{yi} \right) \quad (3.77)$$

$$M_y = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \sum_{i=1}^8 \left(-\nu \frac{\partial N_i}{\partial x} \theta_{xi} - \frac{\partial N_i}{\partial y} \theta_{yi} \right) \quad (3.78)$$

$$M_{xy} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{1-\nu}{2} \sum_{i=1}^8 \left(-\frac{\partial N_i}{\partial y} \theta_{xi} - \frac{\partial N_i}{\partial x} \theta_{yi} \right) \quad (3.79)$$

$$Q_x = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \sum_{i=1}^8 \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} w_i - N_i \theta_{xi} \right) \quad (3.80)$$

$$Q_y = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \sum_{i=1}^8 \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} w_i - N_i \theta_{yi} \right) \quad (3.81)$$

$$P_S = k \sum_{i=1}^8 N_i w_i \quad (3.82)$$

Substituindo as definições das tensões na equação (3.73), tem-se

$$P_{\sim}^e{}_{ext} = \sum_{i=1}^8 \iint_{A_{\sim} 0} B^T \left\{ \begin{array}{l} \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} u_i + \nu \frac{\partial N_i}{\partial y} v_i \right) \\ \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \left(\nu \frac{\partial N_i}{\partial x} u_i + \frac{\partial N_i}{\partial y} v_i \right) \\ \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} u_i + \frac{\partial N_i}{\partial x} v_i \right) \\ \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(-\frac{\partial N_i}{\partial x} \theta_{xi} - \nu \frac{\partial N_i}{\partial y} \theta_{yi} \right) \\ \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(-\nu \frac{\partial N_i}{\partial x} \theta_{xi} - \frac{\partial N_i}{\partial y} \theta_{yi} \right) \\ \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{1-\nu}{2} \left(-\frac{\partial N_i}{\partial y} \theta_{xi} - \frac{\partial N_i}{\partial x} \theta_{yi} \right) \\ \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} w_i - N_i \theta_{xi} \right) \\ \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} w_i - N_i \theta_{yi} \right) \\ kN_i w_i \end{array} \right\} dA \quad (3.83)$$

Organizando matricialmente a equação (3.83), obtém-se

$$\tilde{P}^e_{ext} = \sum_{i=1}^8 \iint_{A \sim 0} B^T \begin{bmatrix} D^P_{\sim(3x3)} & 0_{\sim(3x3)} & 0_{\sim(3x2)} & 0_{\sim(3x1)} \\ 0_{\sim(3x3)} & D^F_{\sim(3x3)} & 0_{\sim(3x2)} & 0_{\sim(3x1)} \\ 0_{\sim(2x3)} & 0_{\sim(2x3)} & D^C_{\sim(2x2)} & 0_{\sim(2x1)} \\ 0_{\sim(1x3)} & 0_{\sim(1x3)} & 0_{\sim(1x2)} & D^S_{\sim(1x1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^P_{\sim 0i(3x2)} & 0_{\sim(3x3)} \\ 0_{\sim(3x2)} & B^F_{\sim 0i(3x3)} \\ 0_{\sim(2x2)} & B^C_{\sim 0i(2x3)} \\ 0_{\sim(1x2)} & B^S_{\sim 0i(1x3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} dA \quad (3.84)$$

onde a matriz \tilde{D} é da ordem de 9x9, e é denominada matriz de constantes elásticas do problema, sendo constituída na forma

$$\tilde{D}^P = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (3.85)$$

onde \tilde{D}^P é a submatriz para o estado plano de tensões. \tilde{D}^F é a submatriz para flexão e torção de placas definida na forma

$$\tilde{D}^F = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (3.86)$$

\tilde{D}^C é a submatriz para o cisalhamento, dada por

$$\underset{\sim}{D}^c = \frac{Eh}{\alpha 2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.87)$$

e finalmente $\underset{\sim}{D}^s$ é a submatriz para a base elástica, definida na forma

$$\underset{\sim}{D}^s = [k]. \quad (3.88)$$

O fator α na expressão (3.87) vem a corrigir o fato de que as tensões tangenciais τ_{xz} e τ_{yz} não são constantes ao longo da espessura da placa, como o campo de deslocamentos assumido poderia sugerir. Neste trabalho adota-se para α o valor 6/5, conforme HINTON E OWEN(1977).

A matriz $\underset{\sim}{B}$ na equação (3.84), é a matriz de deformações, definida em (3.31).

Portanto a equação (3.84) assume a seguinte forma

$$\underset{\sim}{P}^e_{ext} = \iint_A \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{D} \underset{\sim}{B} dA \underset{\sim}{U}^e \quad (3.89)$$

ou ainda,

$$\underset{\sim}{P}^e_{ext} = \underset{\sim}{K}^e \underset{\sim}{U}^e. \quad (3.90)$$

A matriz $\underset{\sim}{K}^e$ (40x40) é denominada matriz de rigidez do elemento, sendo definida pela expressão

$$\underset{\sim}{K}^e = \iint_A \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{D} \underset{\sim}{B} dA. \quad (3.91)$$

Efetuada-se o somatório em cada grau de liberdade nodal da placa das contribuições de todos os elementos que concorrem no mesmo nó, segundo a equação (3.90), chega-se

$$\underset{\sim}{P}_{ext} = \underset{\sim}{K}_0 \underset{\sim}{U}_{ext}, \quad (3.92)$$

onde $\underset{\sim}{K}_0$ é a matriz de rigidez global da estrutura, $\underset{\sim}{P}_{ext}$ é o vetor de cargas nodais completo da estrutura, e $\underset{\sim}{U}$ é o vetor de deslocamentos nodais completo.

Resulta então, um sistema de equações lineares de equilíbrio de $n \times n$, onde n é o número de graus de liberdade da estrutura; que uma vez resolvido fornece os deslocamentos nodais para o carregamento aplicado. A partir dos deslocamentos nodais pode-se calcular as deformações, através da equação (3.29), e as tensões por meio da equação a seguir

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{D} \underset{\sim}{\varepsilon}_0. \quad (3.93)$$

3.9-MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO

A matriz de rigidez do elemento $\underset{\sim}{K}_0^e$ resulta 40x40, pois existem oito nós, cada um com cinco graus de liberdade. Esta matriz é obtida através do cálculo da integral da equação (3.91), utilizando-se o sistema de coordenadas naturais do elemento, ou seja,

$$\underset{\sim}{K}_0^e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \underset{\sim}{B}_0^T \underset{\sim}{D} \underset{\sim}{B}_0 \left| \underset{\sim}{J} \right| d\xi d\eta, \quad (3.94)$$

onde $\left| \underset{\sim}{J} \right|$ é o determinante da matriz Jacobiana do elemento.

Uma submatriz genérica de $\underset{\sim}{K}_0^e$, relacionando o nó i com o nó j é calculada através da expressão

$$\left[\underset{\sim}{K} \right]_{ij} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \underset{\sim}{B}_{0i}^T \underset{\sim}{D} \underset{\sim}{B}_{0j} \left| \underset{\sim}{J} \right| d\xi d\eta \quad (3.95)$$

Dentro do regime de pequenas deflexões, e sendo o material homogêneo elástico-

linear, observa-se que a submatriz de rigidez para um estado plano de tensões resulta desacoplada das submatrizes de flexão, cisalhamento e do solo. Este fato pode ser explorado com vantagem na obtenção da matriz de rigidez do elemento, evitando-se perda de tempo no cálculo de termos que evidentemente serão nulos.

Assim sendo a equação (3.95) pode ser expressa da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} K \\ \sim 0 \end{bmatrix}_{ij} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} K^P \\ \sim 0 \end{bmatrix}_{ij(2 \times 2)} & \begin{matrix} 0 \\ \sim (2 \times 3) \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ \sim (3 \times 2) \end{matrix} & \begin{bmatrix} K^{F+C+S} \\ \sim 0 \end{bmatrix}_{ij(3 \times 3)} \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

onde

$$\begin{bmatrix} K^P \\ \sim 0 \end{bmatrix}_{ij} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \begin{matrix} B^{T,P} \\ \sim 0i \end{matrix} \begin{matrix} D^P \\ \sim \end{matrix} \begin{matrix} B^P \\ \sim 0j \end{matrix} \left| J \right| d\xi d\eta \quad (3.97)$$

e

$$\begin{bmatrix} K^{F+C+S} \\ \sim 0 \end{bmatrix}_{ij} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left[\begin{matrix} B^{T,F} \\ \sim 0i \end{matrix} \begin{matrix} D^F \\ \sim \end{matrix} \begin{matrix} B^F \\ \sim 0j \end{matrix} + \begin{matrix} B^{T,C} \\ \sim 0i \end{matrix} \begin{matrix} D^C \\ \sim \end{matrix} \begin{matrix} B^C \\ \sim 0j \end{matrix} + \begin{matrix} B^{T,S} \\ \sim 0i \end{matrix} \begin{matrix} D^S \\ \sim \end{matrix} \begin{matrix} B^S \\ \sim 0j \end{matrix} \right] \left| J \right| d\xi d\eta. \quad (3.98)$$

3.10-INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

As integrais de superfície que surgem na determinação da matriz de rigidez do elemento, do vetor de ações nodais não-lineares e do vetor de ações nodais equivalentes são calculadas numericamente. O processo de integração numérica adotado neste trabalho é o da Quadratura de Gauss-Legendre.

A regra com n pontos de Gauss integra de forma exata um polinômio de grau $(2n-1)$.

Na formulação aqui desenvolvida, as funções de interpolação $N_i(\xi, \eta)$ são polinômios do segundo grau. No cálculo da matriz de rigidez do elemento surgirão polinômios do quarto grau. Conclui-se, então, que é necessário o emprego da regra 3x3 ponto de Gauss para que a matriz de rigidez do elemento seja calculada de forma exata.

A integração com 3x3 pontos de Gauss produz bons resultados para placas espessas, com uma relação $L/h \leq 10$. Porém a medida em que a esbeltez da placa aumenta, o que se observa é que o elemento se afasta da solução exata prevista para placas finas pela Teoria de KIRCHHOFF (TIMOSHENKO, 1959), sendo que para uma relação $L/h \geq 100$, os resultados são inconsistentes (ZIENKIEWICZ, TAYLOR e TOO, 1971).

Este problema pode ser explicado pela presença de tensões de cisalhamento que atuam de forma parasitária, mesmo quando a espessura é pequena, tornando a placa rígida demais. A solução encontrada para esta dificuldade, foi reduzir a ordem de integração dos termos relativos ao corte da matriz de rigidez do elemento e do vetor de ações nodais não-lineares. Este processo elimina este enrijecimento espúrio, sem que se perca a boa convergência do elemento (ZIENKIEWICZ, TAYLOR e TOO, 1971).

Neste trabalho será adotada a integração seletiva com 3x3 pontos de Gauss para os termos relativos ao estado plano de tensões, flexo-torção de placas e base elástica e com 2x2 pontos para os termos relacionados com o cisalhamento.

3.11-SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES

Uma análise rigorosa de estruturas de concreto armado exige a consideração do comportamento mecânico não-linear dos materiais, além da possibilidade de ocorrerem grandes deslocamentos para estágios mais avançados do carregamento.

Através da aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais, com a inclusão dos fatores supracitados, chega-se à um sistema de equações não-lineares dado pela equação (3.62). O objetivo deste item é apresentar um algoritmo numérico para a solução do sistema de equações (3.62), ou seja, encontrar o vetor de deslocamentos nodais \tilde{U} para o qual se verifique o equilíbrio.

Como forma de acelerar a convergência do processo de solução adota-se o método BFGS, sendo que os resultados obtidos com a aplicação deste processo em termos de economia de tempo de computação são significativos em relação a outros métodos tradicionais, como o método de Newton-Raphson padrão e Newton-Raphson modificado.

3.11.1-O método BFGS

Como alternativa para acelerar a convergência, surgem os métodos Quasi-Newton (STRICKLIN et al., 1973). Eles nascem da idéia de atualizar a matriz de rigidez tangente de uma maneira mais simples em cada iteração, ao invés de recalculá-la de forma completa (método de Newton-Raphson padrão) ou de mantê-la constante (método de Newton-Raphson modificado).

Existem diversas fórmulas para uma atualização simplificada da matriz tangente, contudo, algumas restrições devem ser impostas (MATTHIES e STRANG, 1979):

a) A nova matriz $K_{\sim r}$ deve satisfazer a equação Quasi-Newton, dada na forma

$$K_{\sim r} \Delta U_r = \psi_{\sim r} - \psi_{\sim r+1} \quad (3.99)$$

que, para um problema unidimensional, equivale a aproximar a direção tangente por uma reta secante à curva em dois pontos sucessivos, conforme é ilustrado pela FIGURA 3.3.

b) Se $K_{\sim r-1}$ é simétrica, então, a nova matriz $K_{\sim r}$ também deve ser simétrica.

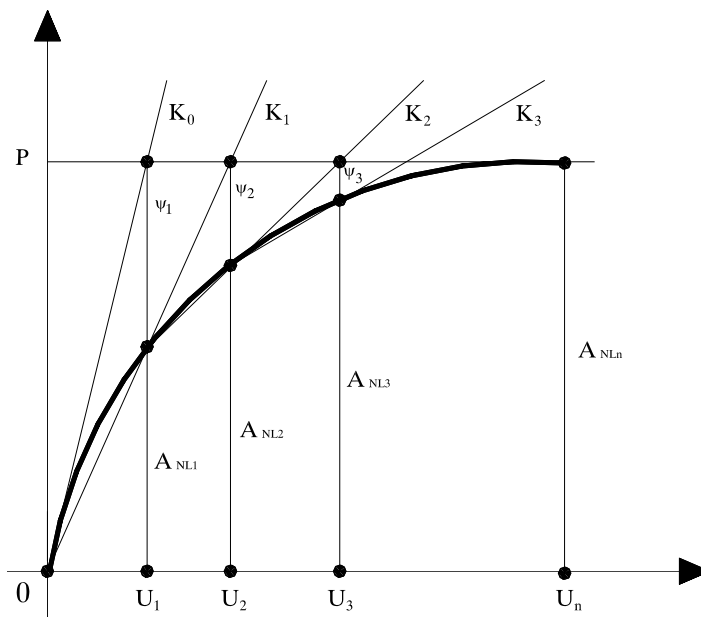


FIGURA 3.3 – O método Quasi-Newton para o caso unidimensional

c) Se $K_{\sim r-1}$ é uma matriz positiva-definida, então, a nova matriz $K_{\sim r}$ também deve ser positiva-definida.

d) Como condição essencial, o novo vetor de incremento de deslocamentos $\Delta U_{\sim r}$ deve poder ser calculado com um pequeno custo computacional.

Uma fórmula de atualização da matriz tangente que satisfaz a todas as exigências fixadas acima é a atualização de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS), que pode ser escrita de forma mais conveniente em termos de $K_{\sim r}^{-1}$, ao invés de ser dada em função de $K_{\sim r}$.

A atualização aproximada da matriz tangente inversa, segundo o método BFGS, pode ser dada na forma

$$K_{\sim r}^{-1} = \left(I + w_{\sim r} v_{\sim r}^T \right) K_{\sim r-1}^{-1} \left(I + v_{\sim r} w_{\sim r}^T \right), \quad (3.100)$$

onde I é uma matriz identidade $n \times n$, sendo n o número de graus de liberdade da estrutura, e

$w_{\sim r}$ e $v_{\sim r}$ são vetores de atualização, com n componentes, que serão definidos adiante. Observe-se que os requisitos de simetria e a condição de matriz positivo-definida são satisfeitos de forma imediata devido ao fato de que os fatores que multiplicam a matriz $K_{\sim r}^{-1}$ serem um o transposto do outro.

Assim, é possível, partindo-se da matriz tangente na origem $K_{\sim 0}$, obter-se sucessivas atualizações aproximadas da matriz de rigidez tangente a cada nova iteração. Substituindo-se o cálculo rigoroso da matriz de rigidez tangente por sua atualização aproximada dada por (3.100), pode-se utilizar a fórmula de recorrência do método de Newton-Rapshon padrão dada por

$$\Delta U_{\sim r} = \left(K_{\sim T}^{-1} \right)_r \left[P_{\sim ext} - A_{\sim NL} \left(U_{\sim r} \right) \right], \quad (3.101)$$

e

$$U_{\sim r+1} = U_{\sim r} + \Delta U_{\sim r} \quad (3.102)$$

onde $K_{\sim T}$ é a matriz de rigidez tangente.

Para evitar o processo de inversão da matriz de rigidez e acelerar o cálculo do novo vetor de deslocamentos, é interessante adotar-se o procedimento alternativo proposto por MATTHIES e STRANG (1979). Observe-se que MATTHIES e STRANG (1979) ainda propõem a adição de um processo de busca (*line-search*), para definir o tamanho do passo na direção do vetor incremento de deslocamentos.

Para definir os vetor de atualização $w_{\sim r}$ e $v_{\sim r}$, é interessante antes introduzir-se as diferenças

$$\delta_{\sim r} = U_{\sim r} - U_{\sim r-1}, \quad (3.103)$$

e

$$\gamma_{\sim r} = \psi_{\sim r} - \psi_{\sim r-1}. \quad (3.104)$$

Os vetores de atualização podem, então, ser escritos na forma

$$v_{\sim r} = \psi_{\sim r} - \psi_{\sim r-1} \left[1 + \sqrt{\frac{\delta_{\sim r-1}^T \gamma_{\sim r}}{\delta_{\sim r}^T \psi_{\sim r}}} \right], \quad (3.105)$$

e

$$w_{\sim r} = \frac{1}{\delta_{\sim r}^T \gamma_{\sim r}} \delta_{\sim r}. \quad (3.106)$$

A convergência dos métodos Quasi-Newton é denominada de superlinear, ou seja, superior à convergência de primeira ordem, e suas condições de convergência e estabilidade têm sido estudadas por diversos autores. A eficiência computacional varia de acordo com o problema, tendo sido observados ganhos de até 35% em relação ao método de Newton-Raphson (STRICKLIN et al., 1973).

4 – MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS

4.1 – INTRODUÇÃO

Neste capítulo são desenvolvidos os modelos constitutivos para o comportamento mecânico do material composto concreto armado. Tanto o concreto como o aço são idealizados sob o ponto de vista elástico não-linear. Esta abordagem, apesar de sua simplicidade matemática, tem fornecido bons resultados para a análise de estruturas de concreto armado sob carregamento monotônico crescente de curta duração (BASHUR e DARWIN, 1978; JOFRIET e McNEICE, 1971).

Por ser o concreto de uma laje solicitado biaxialmente, será introduzido aqui um conceito de deformação uniaxial equivalente para o cálculo das tensões segundo as direções de deformações principais, através de uma relação tensão-deformação uniaxial equivalente. O modelo para o concreto tracionado antes da fissuração é o recomendado pelo código modelo CEB-FIP 1990 (CEB-1993).

A equação constitutiva adotada para o concreto em compressão é a relação tensão-deformação recomendada pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (CEB, 1993). O concreto tracionado é considerado como um material elástico-linear até atingir a deformação de fissuração. A fissuração é abordada segundo um modelo de fissuras distribuídas, sendo levada em conta a contribuição do concreto tracionado entre fissuras para o enrijecimento da laje (tension stiffening).

As barras da armadura são consideradas como uma camada de aço de espessura equivalente, resistindo somente a esforços axiais na direção das mesmas. Considera-se aderência perfeita entre a camada de aço e o concreto que a envolve. A equação tensão-deformação utilizada para o aço segue um modelo bilinear, tanto em tração como em compressão.

O comportamento mecânico dos materiais é avaliado nos pontos amostrais utilizados na integração numérica de Gauss-Legendre, descrita no capítulo anterior. As resultantes de tensões são calculadas a partir de um modelo laminar, empregando-se a regra da ordenada média.

O solo é modelado como um material elasto-plástico, oferecendo reação apenas quando comprimido.

4.2 – MODELO CONSTITUTIVO PARA O CONCRETO

4.2.1 – Deformação uniaxial equivalente

Em um estado biaxial de tensões, a deformação em uma direção não é função apenas da tensão naquela direção, mas sim, devido ao efeito de Poisson, dependente da tensão atuante na direção ortogonal. O conceito de deformação uniaxial equivalente fornece um meio de separar o efeito de Poisson das deformações acumuladas e permite uma representação conveniente dos resultados experimentais.

Para uma melhor compreensão da definição de deformação uniaxial equivalente, é útil analisar-se o comportamento de um material elástico linear, conforme é ilustrado pela FIGURA 4.1. Uma curva representa o gráfico tensão-deformação para a situação de compressão uniaxial. A outra curva representa a relação tensão-deformação segundo a direção mais comprimida, para um estado de compressão biaxial, onde $\sigma_1 = \alpha \sigma_2$. É possível, então, observar-se o efeito enrijecedor que a compressão transversal exerce.

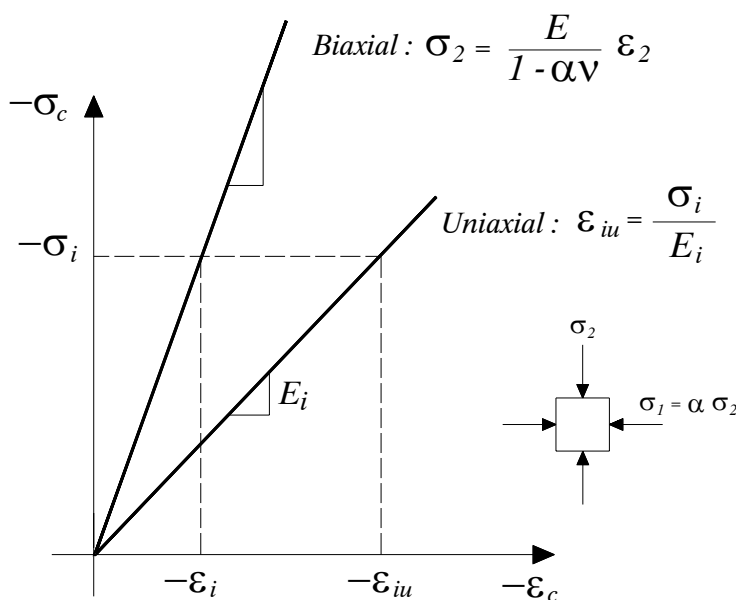


FIGURA 4.1 – Deformação uniaxial equivalente para um material linear

Para cada relação entre as tensões principais α , a verdadeira relação tensão deformação terá uma inclinação diferente, enquanto que uma única curva uniaxial equivalente representa a resposta de um material elástico linear.

Para um material ortotrópico, a equação constitutiva segundo as direções principais de deformação 1 e 2 será dada por

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} E_1 & \nu\sqrt{E_1E_2} & 0 \\ \nu\sqrt{E_1E_2} & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

onde σ_1 e σ_2 são as tensões principais, ε_1 e ε_2 as deformações principais, E_1 e E_2 são os módulos de deformação secantes segundo as direções 1 e 2 , respectivamente, e ν o coeficiente de Poisson do concreto. Então a matriz constitutiva do material é definida em função das propriedades E_1 , E_2 e ν , que são consideradas como dependentes do estado de tensão e de deformação atual do ponto considerado. Os módulos secantes E_1 e E_2 , segundo as direções principais de deformação, são determinados a partir de curvas tensão-deformação semelhantes à curva tensão-deformação obtida para o concreto sob solicitação uniaxial.

Para um material de comportamento não-linear, as deformações uniaxiais equivalentes, segundo as direções principais 1 e 2 , são dadas por

$$\varepsilon_{1u} = \frac{1}{(1-\nu^2)} \left(\varepsilon_1 + \nu \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \varepsilon_2 \right), \quad (4.2)$$

e

$$\varepsilon_{2u} = \frac{1}{(1-\nu^2)} \left(\varepsilon_2 + \nu \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \varepsilon_1 \right). \quad (4.3)$$

Para um material não-linear, a deformação uniaxial equivalente representa a parcela da deformação (isto é, sem o efeito de Poisson) na i -ésima direção, que controla o comportamento do material, incluindo a redução progressiva da rigidez e a ruptura final.

Deve ser salientado que ε_{1u} e ε_{2u} não são realmente deformações, e, portanto não se transformam como as deformações verdadeiras sob uma rotação dos eixos de referência. Além disso, elas são determinadas nas direções principais de deformação, as quais geralmente vão variando durante o carregamento. Deste modo, ε_{1u} , por exemplo, não fornece uma “história de deformação” segundo uma direção fixa, mas sim em uma direção que muda continuamente e que corresponde à deformação principal ε_I .

Contudo, a introdução destas variáveis permite representar o comportamento biaxial do concreto através de duas curvas tensão-deformação uniaxiais equivalentes separadas, bastante semelhantes à curva correspondente à solitação uniaxial do material.

Empregando-se as equações (4.2) e (4.3), a equação (4.1) pode ser colocada da forma

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{1u} \\ \varepsilon_{2u} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

Observa-se então, que as tensões principais podem ser obtidas de relações unidimensionais para o concreto, a partir das deformações uniaxiais equivalentes ε_{1u} e ε_{2u} . Isto é possível em virtude de a equação (4.4) estar na forma desacoplada. Entretanto, para se obter as deformações uniaxiais equivalentes, é necessário conhecer os módulos secantes que, por sua vez, depende das tensões. Um processo iterativo torna-se, então, necessário para a solução do problema (ARAÚJO e CAMPOS FILHO, 1992). Felizmente, 4 ou 5 iterações são suficientes para atingir a convergência dos módulos secantes E_I e E_2 .

4.2.2 – Critério de ruptura de KUPFER e GERSTLE

As expressões analíticas do critério de ruptura bidimensional para o concreto, propostas por KUPFER e GERSTLE(1973) e recomendada pelo Código Modelo CEB-FIP 1990(CEB, 1993), servem de envoltória para as tensões máximas σ_{1f} e σ_{2f} , que podem ser atingidas pelo material, em cada uma das direções principais de tensão. O critério de ruptura de KUPFER e GERSTLE é ilustrado pela FIGURA 4.2, onde as tensões principais estão

normalizadas pelo módulo da resistência média à compressão cilíndrica uniaxial do concreto f_c .

Na situação de compressão-compressão ($\sigma_1 < 0$ e $\sigma_2 < 0$), ou na situação de tração-compressão ($\sigma_1 > 0$ e $\sigma_2 < 0$), com $\sigma_2 < -0,96f_c$, valem as seguintes expressões:

$$\alpha = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}, \quad (4.5)$$

$$\sigma_{2f} = -\frac{(1+3,80\alpha)}{(1+\alpha)^2} f_c, \quad (4.6)$$

e

$$\sigma_{1f} = -f_c. \quad (4.7)$$

Para o caso de tração-compressão ($\sigma_1 > 0$ e $\sigma_2 < 0$), com $\sigma_2 > -0,96f_c$, são empregadas as expressões

$$\sigma_{2f} = -f_c, \quad (4.8)$$

e

$$\sigma_{1f} = \left(1 + 0,8 \frac{\sigma_2}{f_c}\right) f_{ct}, \quad (4.9)$$

sendo f_{ct} a resistência à tração uniaxial do concreto.

Na situação de tração-tração ($\sigma_1 > 0$ e $\sigma_2 > 0$), permanecem válidas as resistências uniaxiais, ou seja,

$$\sigma_{1f} = f_{ct}, \quad (4.10)$$

e

$$\sigma_{2f} = f_{ct}. \quad (4.11)$$

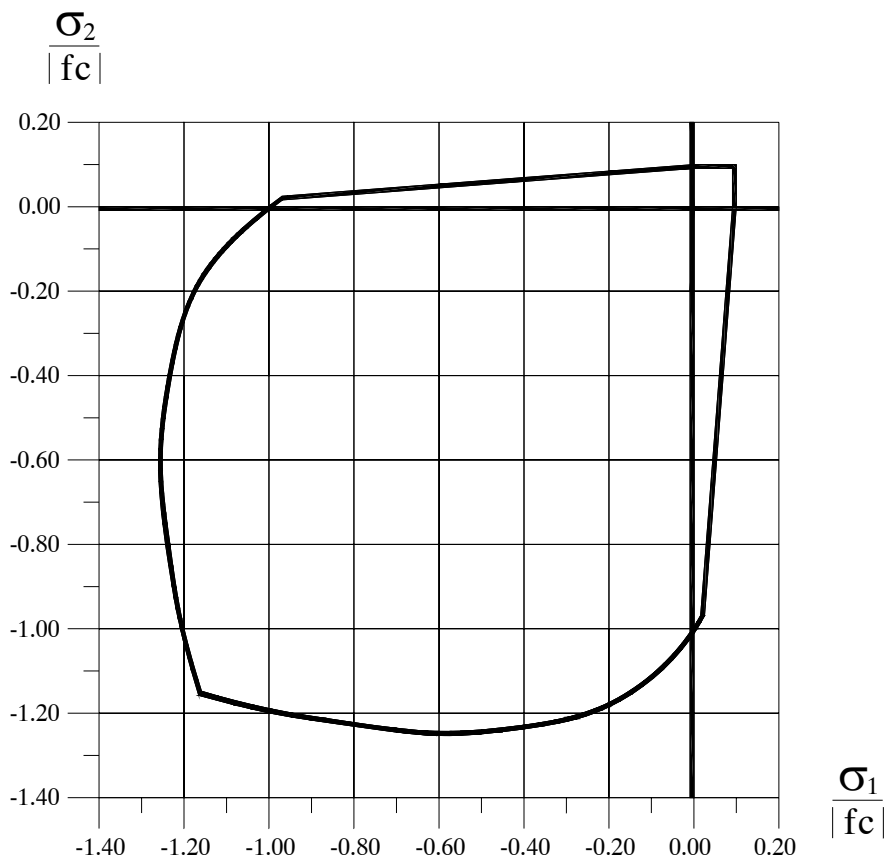


FIGURA 4.2 – Critério de ruptura de KUPFER e GERSTLE

4.2.3 – Concreto em compressão

Para representar o comportamento do concreto comprimido, até ser atingida a tensão de esmagamento, é empregada a equação tensão-deformação proposta pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (CEB, 1993), conforme mostra a FIGURA 4.3.

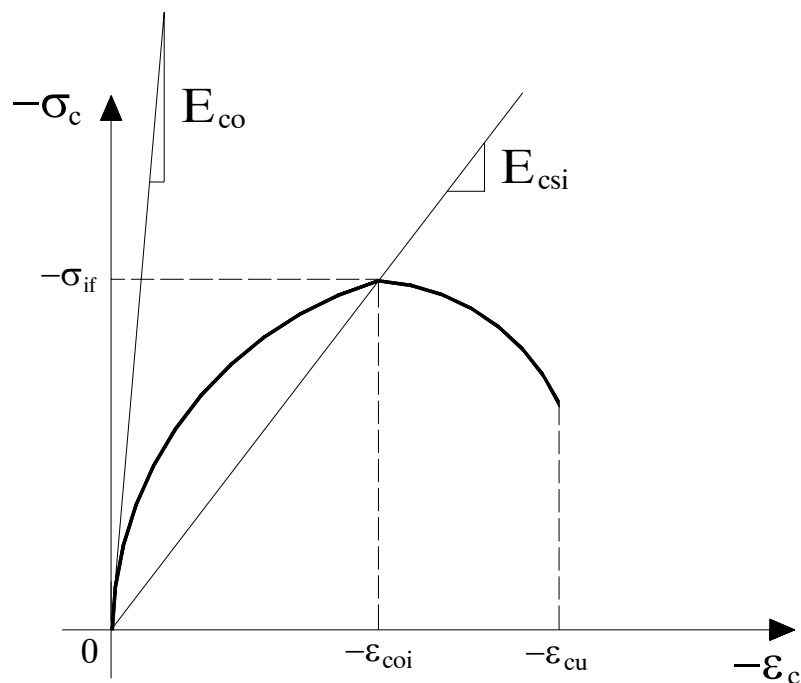


FIGURA 4.3 – Curva tensão-deformação uniaxial equivalente para o concreto em compressão

Sendo a curva tensão-deformação uniaxial equivalente representada analiticamente segundo a equação

$$\sigma_i = \sigma_{if} \left[\frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k-2)\eta} \right], \quad (4.12)$$

onde

$$\eta = \frac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{coi}}, \quad (4.13)$$

sendo

$$k = \frac{E_{co} \varepsilon_{coi}}{\sigma_{if}}. \quad (4.14)$$

Na equação (4.14), E_{co} é o módulo de deformação longitudinal tangente à origem do diagrama tensão-deformação, e ε_{coi} é a deformação correspondente à máxima tensão de compressão, dado por

$$\varepsilon_{coi} = -0,0022 \frac{\sigma_{if}}{f_c}. \quad (4.15)$$

A deformação última de compressão ε_{cu} é considerada igual a $-0,0035$, e E_{csi} apresentado na FIGURA 4.3 representa o módulo de deformação secante do concreto na direção “i”, associado à tensão limite σ_{if} e a deformação ε_{coi} .

4.2.4 – Concreto em tração

Uma das principais características do concreto é a de que, embora seja um material bastante resistente sob tensões de compressão, comporta-se de modo frágil quando solicitado por tensões de tração. A resistência do concreto à tração é da ordem de apenas 10% de sua resistência à compressão.

Este fato explica o aparecimento de fissuras, ou seja, rupturas localizadas por tração, em lajes de concreto armado, mesmo quando ainda submetidas à cargas de serviço. A fissura ao penetrar na espessura da laje reduz a seção resistente de concreto, diminuindo a rigidez e, conseqüentemente, provoca um aumento dos deslocamentos. Este fenômeno é uma das principais causas do comportamento não-linear que as estruturas de concreto apresentam.

Se na região do ponto considerado houver a presença de armadura, a tensão de tração no concreto não é anulada após a fissuração. O esforço de tração é transmitido pela armadura ao concreto situado entre duas fissuras, que empresta sua colaboração na resistência à tração. Este efeito é conhecido na literatura internacional como “*tension stiffening*”. Considera-se, então, uma tensão resistente fictícia para levar em conta a colaboração que o concreto situado entre duas fissuras fornece na absorção dos esforços de tração. Este efeito é considerado através da inclusão de um ramo exponencial descendente no diagrama tensão-deformação do concreto tracionado, após a deformação de fissuração do concreto ε_{cr} , conforme consta da FIGURA 4.4.

Adota-se para a deformação de fissuração do concreto ε_{cr} , o valor 0,00015.

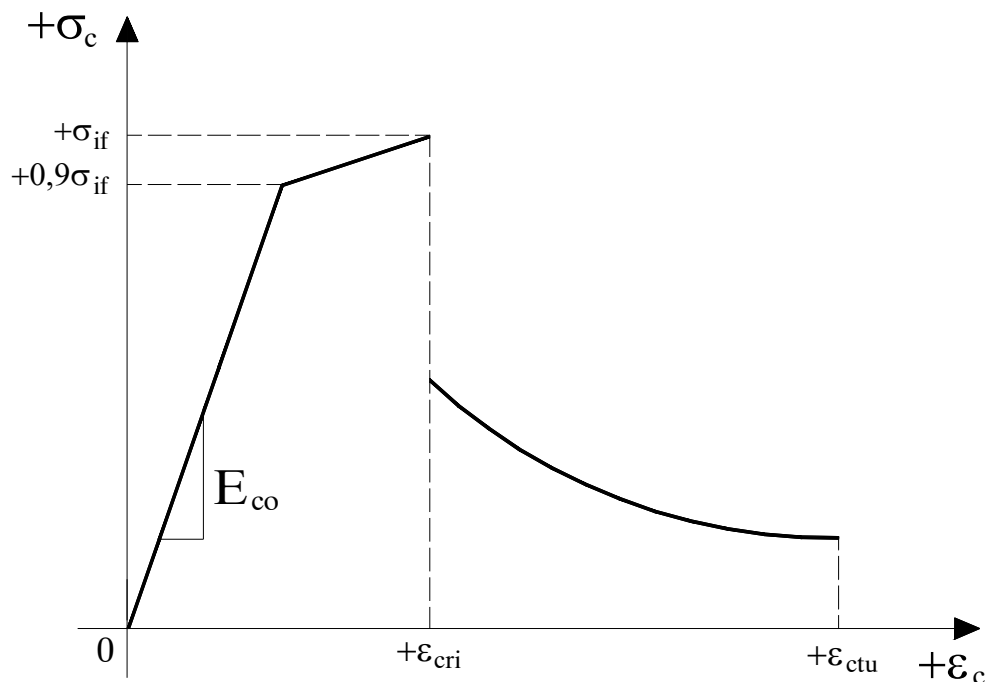


FIGURA 4.4 – Curva tensão-deformação do concreto tracionado

Na FIGURA 4.4, ε_{ctu} indica a deformação limite para a qual a colaboração do concreto entre duas fissuras não deve mais ser considerada. Tal situação ocorre quando a armadura tracionada atinge o escoamento, por este motivo é conveniente adotar-se para ε_{ctu} um valor próximo ao da deformação de escoamento do aço utilizado. Neste trabalho, adota-se para ε_{ctu} o valor 0,005.

O concreto tracionado, antes de atingir a deformação de fissuração, também é modelado conforme o Código Modelo CEB-FIP 1990 (CEB, 1993), através das equações que seguem.

Quando $\sigma_i \leq 0,9\sigma_{if}$, tem-se que

$$\sigma_i = E_{co} \varepsilon_{iu}, \quad (4.16)$$

porém, quando $0,9\sigma_{if} \leq \sigma_i \leq \sigma_{if}$, vale a expressão

$$\sigma_i = \sigma_{if} - \frac{0,1\sigma_{if}}{0,00015 - 0,9\frac{\sigma_{if}}{E_{co}}} (0,00015 - \varepsilon_{iu}), \quad (4.17)$$

sendo, evidentemente, E_{co} o módulo de deformação longitudinal na origem.

Durante o processo de análise de uma estrutura de concreto, se em algum ponto submetido à combinação de tensões tração-tração, ou tração-compressão, a tensão principal σ_I ultrapassar a tensão limite determinada a partir da envoltória do Critério de Ruptura de KUPFER e GERSTLE, forma-se a primeira fissura neste local.

A partir deste instante, o ângulo em que se formou a primeira fissura é fixado, e as direções perpendicular ao plano da fissura, direção 1, e paralela ao plano da fissura, direção 2, passam a ser consideradas como os eixos de deformação principal, sendo este modelo conhecido como modelo de fissura fixa.

Após a fissuração, o coeficiente de Poisson ν , é anulado, e as direções 1 e 2 passam a funcionar de forma desacoplada.

A relação constitutiva para o concreto tracionado após a fissuração é dada na forma

$$\sigma_{1u} = \gamma f_{ct} e^{\frac{-(\varepsilon_{1u} - \varepsilon_{cr})}{\lambda \varepsilon_{cr}}}, \quad (4.18)$$

onde γ foi considerado igual a 0,50 e λ igual a 5,0.

4.2.5 – Concreto em cisalhamento

Após a fissuração do concreto, é preciso levar em conta que uma certa parcela de esforço de corte continua a ser transmitida no plano da fissura, através dos mecanismos de engrenamento dos agregados e do efeito de pino da barra de armadura que atravessa a fissura.

Para incluir este efeito, é necessário introduzir um módulo de deformação por corte reduzido para o concreto fissurado.

4.2.5.1 – Módulo de deformação por corte reduzido

Para poder representar a transmissão de esforço cortante através do plano da fissura, adota-se um módulo de deformação por corte reduzido G_{12r} (CERVENKA, 1985), cuja definição é dada na equação (4.19)

$$G_{12r} = \left[1 - (200\varepsilon_{1u})^{0,4} \right] G_{co} \quad (4.19)$$

sendo G_{co} o módulo de deformação por corte do concreto na origem, dado por

$$G_{co} = \frac{E_{co}}{2(1+\nu)}. \quad (4.20)$$

Deste modo, a tensão tangencial transmitida através do plano da fissura, será calculada pela equação

$$\tau_{12} = G_{12r} \gamma_{12}. \quad (4.21)$$

A equação (4.19) representa o produto de um fator de redução, contido entre colchetes, pelo módulo de deformação do concreto na origem. Observe-se que quanto maior a deformação na direção perpendicular ao plano da fissura, ε_{1u} , menor será a tensão de corte transferida através da fissura.

Portanto, a equação constitutiva após ser formada a primeira fissura é dada por

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{1f} & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}, \quad (4.22)$$

onde E_{1f} é o módulo de deformação fictício na direção perpendicular ao plano da fissura, de valor negativo, incluído para levar em conta a colaboração do concreto entre fissuras; E_2 é o módulo de deformação tangente segundo a direção 2; e G_{12r} é o módulo de deformação por corte reduzido, incorporado ao modelo para representar a transmissão de esforço de corte no plano da fissura. As propriedades E_{1f} , E_2 e G_{12r} são dependentes do estado de tensão e do estado de deformação existentes no ponto considerado.

4.2.6 – Cálculo das resultantes de tensões no concreto

As resultantes de tensões no concreto e no aço são avaliadas nos pontos amostrais utilizados na integração numérica de Gauss-Legendre. Admite-se que o comportamento mecânico do material neste ponto seja representativo da região que o envolve.

Uma vez determinado o vetor de deslocamentos nodais da laje \tilde{U} , é possível organizar o vetor de deslocamentos nodais do elemento \tilde{U}^e . As deformações generalizadas $\tilde{\varepsilon}$, em um ponto de integração, são calculadas pelas relações deformação-deslocamento definidas no capítulo 3.

A espessura h da laje é dividida em faixas, e as deformações específicas no ponto médio de cada camada podem ser determinadas pelas expressões

$$\varepsilon_x = \bar{\varepsilon}_x - z_i \chi_{xx}, \quad (4.23)$$

$$\varepsilon_y = \bar{\varepsilon}_y - z_i \chi_{yy}, \quad (4.24)$$

e

$$\gamma_{xy} = \bar{\gamma}_{xy} - z_i \chi_{xy}, \quad (4.25)$$

onde z_i é a ordenada média de cada camada.

Conhecidas as componentes de deformação específica ε_x , ε_y e γ_{xy} pode-se obter as deformações principais ε_1 e ε_2 , por meio das equações

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \gamma_{xy}^2}, \quad (4.26)$$

e

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \gamma_{xy}^2}. \quad (4.27)$$

A partir do conhecimento das deformações principais, é possível determinar-se os cossenos diretores e o ângulo θ que a direção principal l forma com o eixo dos x , utilizando-se as seguintes equações (FUNG, 1965)

$$\cos(1, x) = \cos \theta = \frac{\frac{\gamma_{xy}}{2}}{\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_1)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}}, \quad (4.28)$$

$$\cos(1, y) = \sin \theta = \frac{-(\varepsilon_x - \varepsilon_1)}{\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_1)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}}, \quad (4.29)$$

$$\cos(2, x) = \frac{-(\varepsilon_y - \varepsilon_2)}{\sqrt{(\varepsilon_y - \varepsilon_2)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}}, \quad (4.30)$$

$$\cos(2, y) = \frac{\frac{\gamma_{xy}}{2}}{\sqrt{(\varepsilon_y - \varepsilon_2)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}}, \quad (4.31)$$

e

$$\theta = \arctan \left[\frac{\cos(1, y)}{\cos(1, x)} \right]. \quad (4.32)$$

4.2.6.1 – Cálculo das resultantes de tensões no concreto antes do aparecimento da primeira fissura

Enquanto o concreto estiver no seu estado íntegro, e conhecendo-se as deformações principais ε_1 e ε_2 calculadas pelas equações (4.26) e (4.27) respectivamente, calculam-se as deformações uniaxiais equivalentes através das equações (4.2) e (4.3).

Com as deformações uniaxiais equivalentes ε_{1u} e ε_{2u} conhecidas, calculam-se as tensões principais σ_1 e σ_2 utilizando-se as relações tensão-deformação uniaxiais equivalentes (4.12), (4.16) e (4.17).

Aplicando-se uma rotação de $-\theta$ às tensões σ_1 e σ_2 , é feita a determinação das tensões σ_x , σ_y e τ_{xy} , segundo o sistema de referência local da placa.

Assim, resulta que

$$\sigma_x = \sigma_1 \cos(1, x)^2 + \sigma_2 \cos(2, x)^2, \quad (4.33)$$

$$\sigma_y = \sigma_1 \cos(1, y)^2 + \sigma_2 \cos(2, y)^2, \quad (4.34)$$

$$\tau_{xy} = \sigma_1 \cos(1, x) \cos(1, y) + \sigma_2 \cos(2, x) \cos(2, y). \quad (4.35)$$

A FIGURA 4.5 ilustra as diversas fases do cálculo das tensões no concreto antes da fissuração.

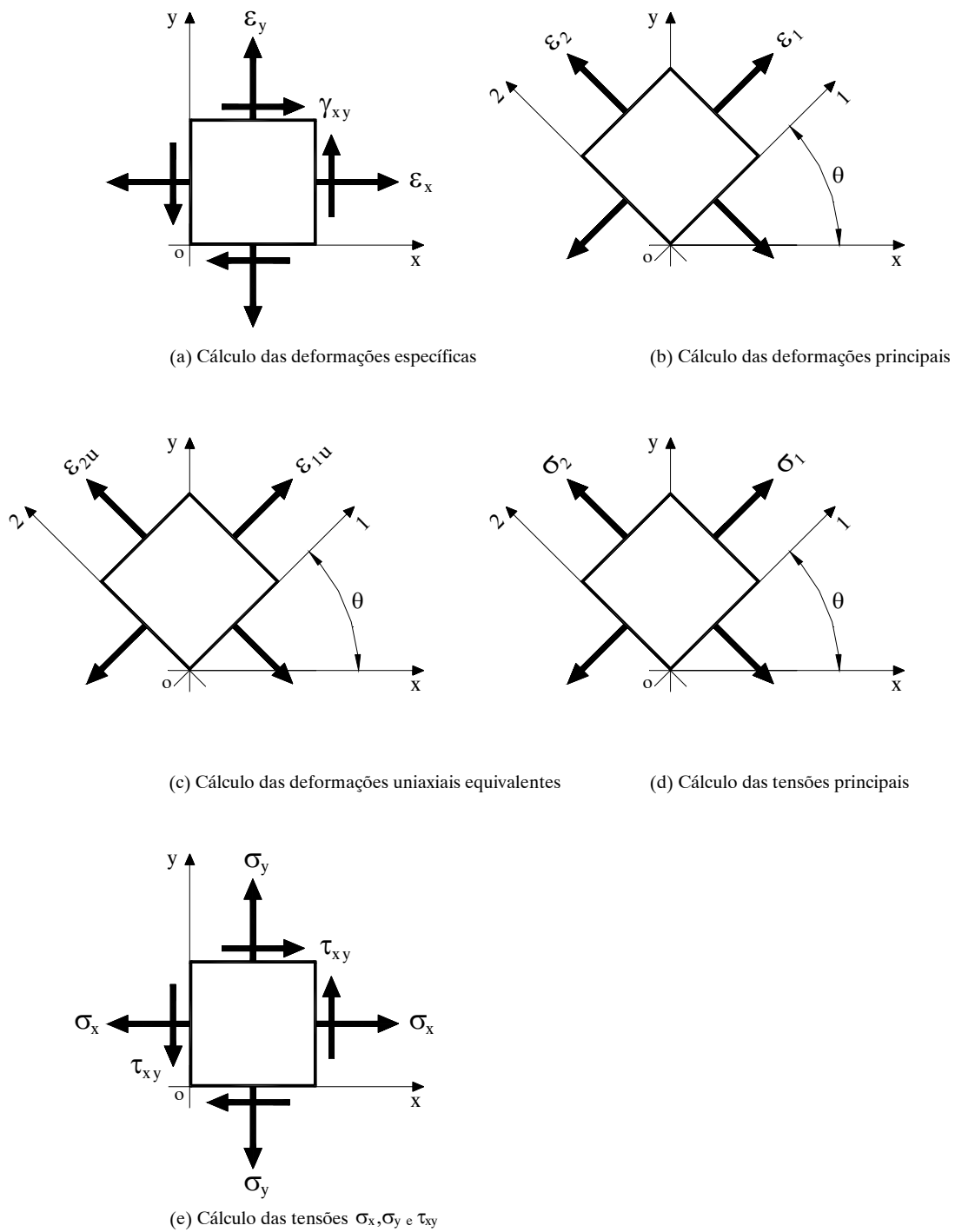


FIGURA 4.5 – Fases do cálculo das tensões no concreto antes da fissuração

4.2.6.2 – Cálculo das resultantes de tensões no concreto depois do aparecimento da primeira fissura

Após a fissuração, o efeito de Poisson é desprezado. As deformações uniaxiais equivalentes ε_{iu} , para as direções 1 e 2 , passam a ser determinadas a partir da rotação $+\theta$ (ângulo da primeira fissura) do tensor de deformação específica, determinado no sistema de referência xoy , para o sistema de referência $1o2$. Da mesma forma, depois de o concreto haver fissurado, passa-se a determinar a deformação por corte no plano da fissura γ_{12} , a partir da rotação do tensor de deformação determinado no sistema de referência xoy , para o sistema de referência $1o2$. As tensões segundo as direções 1 e 2 , são calculadas pelas equações (4.12), (4.18) e (4.21), e as tensões σ_x , σ_y e τ_{xy} pelas equações (4.33), (4.34) e (4.35), respectivamente.

A FIGURA 4.6 ilustra as diversas fases do cálculo das tensões no concreto após a fissuração.

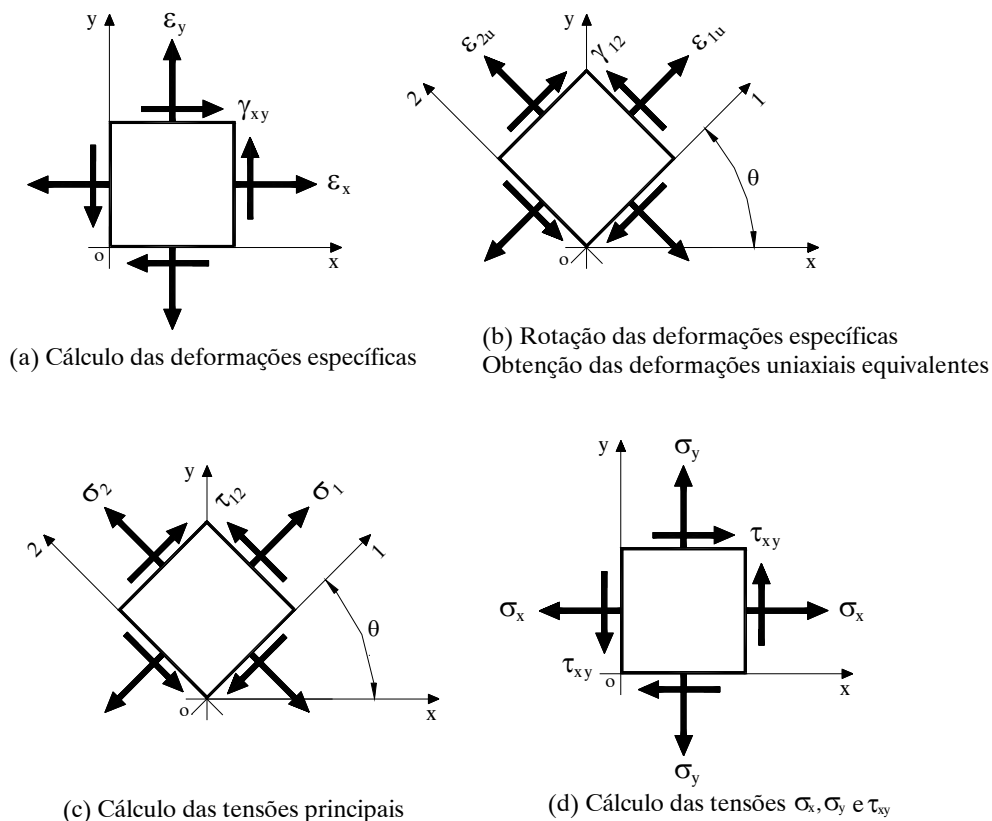


FIGURA 4.6 – Fases de cálculo das tensões no concreto após a fissuração

As resultantes de tensões ou tensões generalizadas são calculadas integrando-se as tensões dadas por (4.33), (4.34) e (4.35) ao longo da espessura, aplicando-se a regra da ordenada média a cada faixa, tanto para o concreto no estado íntegro, quanto para o concreto fissurado, ou seja,

$$N_{xc} = \sum_{i=1}^{NC} \sigma_{xi} \Delta h_i, \quad (4.36)$$

$$N_{yc} = \sum_{i=1}^{NC} \sigma_{yi} \Delta h_i, \quad (4.37)$$

$$N_{xyc} = \sum_{i=1}^{NC} \tau_{xyi} \Delta h_i, \quad (4.38)$$

$$M_{xc} = \sum_{i=1}^{NC} \sigma_{xi} \Delta h_i z_i, \quad (4.39)$$

$$M_{yc} = \sum_{i=1}^{NC} \sigma_{yi} \Delta h_i z_i, \quad (4.40)$$

$$M_{xyc} = \sum_{i=1}^{NC} \tau_{xyi} \Delta h_i z_i, \quad (4.41)$$

onde Δh_i é a espessura de cada camada e NC o número de faixas em que foi dividida a espessura da laje.

Os esforços cortantes são obtidos a partir de uma relação de tensão generalizada – deformação generalizada linear, na forma

$$Q_{xc} = KG_{co} h \phi_x, \quad (4.42)$$

e

$$Q_{yc} = KG_{co} h \phi_y, \quad (4.43)$$

onde K é o fator de forma da seção transversal relativo ao corte, tomado igual a $6/5$, e G_{co} o módulo de deformação ao cisalhamento do concreto tangente à origem, dado pela equação (4.20).

4.3 – MODELO CONSTITUTIVO PARA O AÇO

O aço é modelado segundo um esquema elástico bilinear. Até ser atingida a tensão de escoamento f_y , o módulo de deformação longitudinal é E_{S1} . A partir deste ponto é possível considerar-se ainda um certo enrijecimento do material através do módulo E_{S2} , até ser alcançada a deformação de ruptura ε_{su} .

O comportamento do material em compressão é simulado, por simplicidade, da mesma maneira que quando tracionado. O diagrama da FIGURA 4.7 é expresso analiticamente através das equações:

$$\sigma_s = E_{s2}(\varepsilon_s + \varepsilon_y) - f_y, \quad \text{se } \varepsilon_s \leq -\varepsilon_y \quad (4.44)$$

$$\sigma_s = E_{s1}\varepsilon_s, \quad \text{se } -\varepsilon_y \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_y \quad (4.45)$$

$$\sigma_s = E_{s2}(\varepsilon_s - \varepsilon_y) + f_y, \quad \text{se } \varepsilon_y \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{su} \quad (4.46)$$

onde ε_y é a deformação que corresponde ao escoamento do aço sob tração uniaxial, dada por

$$\varepsilon_y = \frac{f_y}{E_{s1}}. \quad (4.47)$$

Para os aços com patamar de escoamento bem definido, adota-se $E_{S2}=0,00$, enquanto que para os aços com patamar de escoamento convencional, considera-se para E_{S2} um valor igual a 5% de E_{S1} .

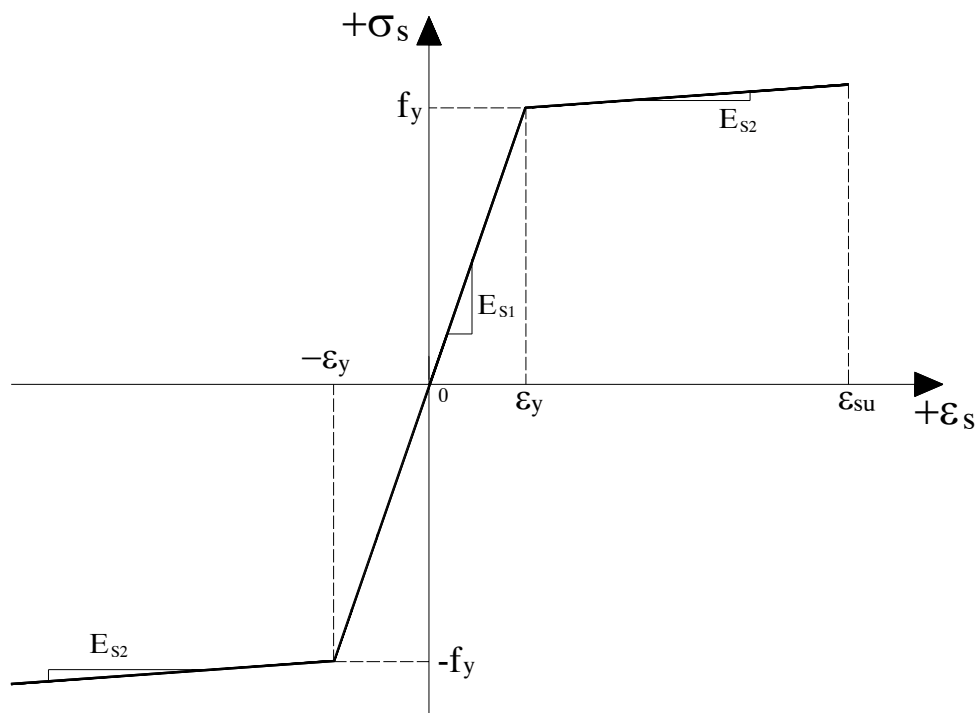


FIGURA 4.7 – Modelo constitutivo bilinear para o aço

4.3.1 – Cálculo das resultantes de tensões na armadura

A armadura é considerada como uma camada de aço com espessura equivalente a sua área de seção transversal por metro linear. Assume-se que existe perfeita aderência entre esta camada de aço e as camadas de concreto que lhe são adjacentes. Fica estabelecido, por hipótese que a armadura somente resiste a tensões normais na direção do eixo das barras que a compõem. A resistência das barras da armadura ao cisalhamento não é levada em conta.

Cada armadura é caracterizada por sua espessura equivalente t_s , por sua posição em relação ao plano médio da placa z_s , e pela inclinação de suas barras em relação ao eixo de referência x , dada pelo ângulo θ_s .

Uma vez conhecidas as deformações generalizadas na superfície média da laje, as deformações específicas no nível z_s da armadura referidas ao sistema xoy , são calculadas através das expressões

$$\epsilon_{xs} = \bar{\epsilon}_x - z_s \chi_{xx}, \quad (4.48)$$

$$\varepsilon_{ys} = \bar{\varepsilon}_y - z_s \chi_{yy}, \quad (4.49)$$

e

$$\gamma_{xys} = \bar{\gamma}_{xy} - z_s \chi_{xy}, \quad (4.50)$$

A deformação específica axial ε_s , na direção de orientação das barras da armadura θ_s , é dada por (POPOV, 1978)

$$\varepsilon_s = \varepsilon_{xs} \cos^2 \theta_s + \varepsilon_{ys} \sin^2 \theta_s + \gamma_{xys} \sin \theta_s \cos \theta_s. \quad (4.51)$$

A tensão na armadura é obtida através da relação tensão-deformação adotada para o aço, dada pelas equações (4.44), (4.45) e (4.46). A partir da tensão, são determinados o esforço normal N_s e o momento fletor M_s , que atuam na direção da armadura, sendo

$$N_s = \sigma_s(\varepsilon_s) t_s, \quad (4.52)$$

e

$$M_s = \sigma_s(\varepsilon_s) t_s z_s. \quad (4.53)$$

As resultantes de tensões no aço segundo o sistema xoy , são calculadas mediante uma rotação aplicada a N_s e M_s , ou seja

$$N_{xs} = N_s \cos^2 \theta_s, \quad (4.54)$$

$$N_{ys} = N_s \sin^2 \theta_s, \quad (4.55)$$

$$N_{xys} = N_s \sin \theta_s \cos \theta_s, \quad (4.56)$$

$$M_{xs} = M_s \cos^2 \theta_s, \quad (4.57)$$

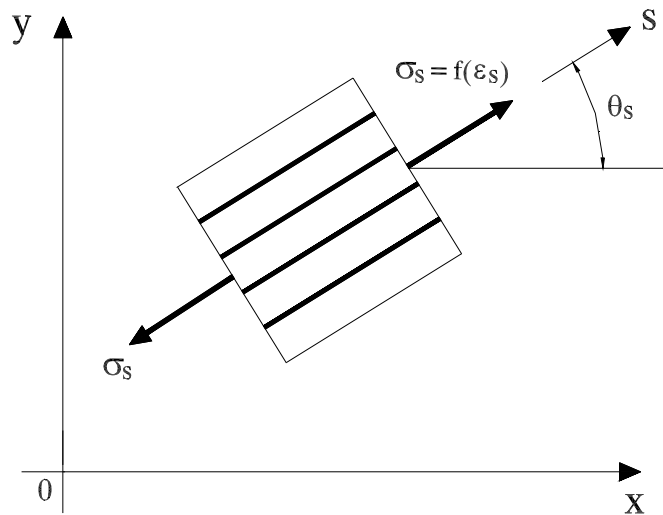
$$M_{ys} = M_s \sin^2 \theta_s, \quad (4.58)$$

e

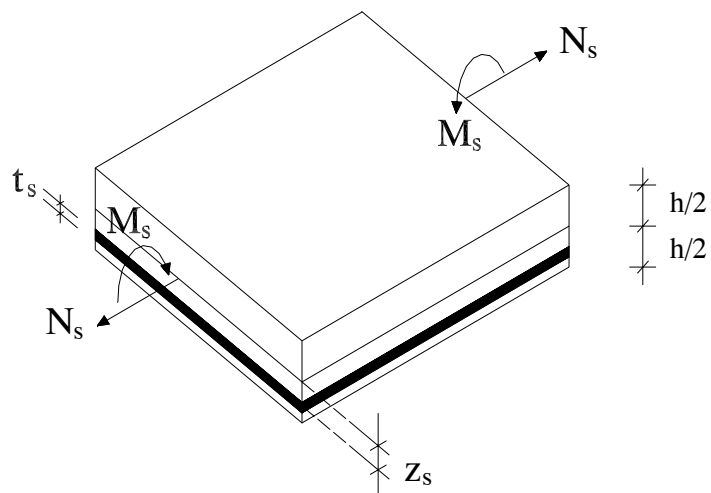
$$M_{xys} = M_s \sin \theta_s \cos \theta_s. \quad (4.59)$$

Estes valores são acumulados para cada diferente tipo de armadura que existir na laje.

A FIGURA 4.8 serve para ilustrar o cálculo das resultantes de tensões na armadura.



(a) Cálculo da tensão normal na armadura



(b) Cálculo das resultantes de tensões da armadura

FIGURA 4.8 – Cálculo das resultantes de tensões das armaduras

4.4 – MODELO DO SOLO PARA ANÁLISE DA INTERAÇÃO SOLO-FUNDAÇÃO

Uma análise de interação solo-fundação tem por objetivo fornecer os deslocamentos reais da fundação e seus esforços internos. Estes esforços podem ser obtidos diretamente pela análise de interação, ou indiretamente, por meio das pressões de contacto. As pressões de contacto são as pressões na interface fundação-solo. A determinação das pressões de contacto é necessária para o cálculo dos esforços internos na fundação, a partir dos quais é feito seu dimensionamento estrutural.

O solo é modelado como um material elasto-plástico, reagindo apenas em problemas de contato unilateral, ou seja, o solo só oferecerá reação quando comprimido. Para modelar o solo, a hipótese de Winkler será adotada, na qual o solo é modelado por molas distribuídas continuamente ao longo da superfície do elemento, e as pressões de contacto são proporcionais aos recalques, como mostra a FIGURA 4.9, até ser atingida a pressão que leva a plastificação do solo.

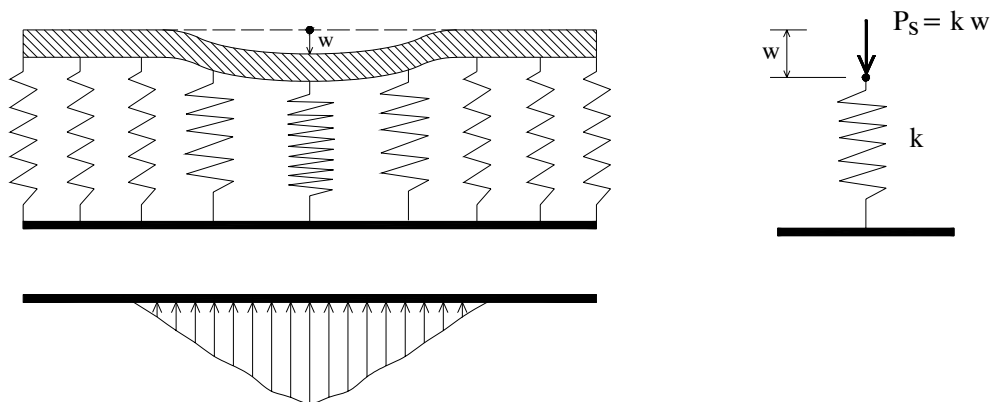


FIGURA 4.9 – Modelo de Winkler para o solo

Na FIGURA 4.9, a constante de proporcionalidade k é usualmente chamada de *coeficiente de reação vertical*, mas recebe também as denominações *coeficiente de recalque*, *módulo de reação* ou *coeficiente de mola*.

A pressão de contacto em um ponto qualquer da placa será calculada pela seguinte expressão

$$P_{si} = kw_i, \quad (4.60)$$

onde w_i é a deflexão do ponto considerado.

4.5 – MODELO PARA O CONCRETO ARMADO SOBRE BASE ELÁSTICA

O modelo para o material composto concreto armado sobre base elástica é formado pela superposição dos modelos desenvolvidos para o concreto, para o aço das armaduras e para o solo. Assim sendo, o vetor de tensões generalizadas para o concreto armado $\underline{\sigma}$, é calculado pela expressão

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_{\sim c} + \underline{\sigma}_{\sim s} + \underline{\sigma}_{\sim solo}, \quad (4.61)$$

onde $\underline{\sigma}_{\sim c}$ é o vetor de tensões generalizadas no concreto, dado por

$$\underline{\sigma}_{\sim c} = \{N_{xc}, N_{yc}, N_{xyc}, M_{xc}, M_{yc}, M_{xyc}, Q_{xc}, Q_{yc}, 0\}, \quad (4.62)$$

e $\underline{\sigma}_{\sim s}$ é o vetor de tensões generalizadas no aço, composto na forma

$$\underline{\sigma}_{\sim s} = \{N_{xs}, N_{ys}, N_{xys}, M_{xs}, M_{ys}, M_{xys}, 0, 0, 0\}, \quad (4.63)$$

e $\underline{\sigma}_{\sim solo}$ é o vetor de pressões de contacto entre a fundação e o solo, dado por

$$\underline{\sigma}_{\sim solo} = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, P_s\}. \quad (4.64)$$

O vetor $\underline{\sigma}$ é utilizado no cálculo das ações nodais não-lineares do elemento, segundo a equação (3.58), sendo de fundamental importância no estabelecimento do equilíbrio da placa.

Para que a placa permaneça em equilíbrio, é necessário que o material concreto armado, juntamente com o solo, seja capaz de desenvolver esforços internos que venham contrabalançar o carregamento externo. Assim sendo, a ruptura do conjunto laje+solo ocorre em um estágio de deformação tal que a capacidade do material de fornecer esforços resistentes à solicitação externa é esgotada.

Em uma estrutura de concreto armado, o processo de ruptura é controlado a partir do nível de deformação que a mesma apresenta. A norma brasileira NBR-6118 (1982), por exemplo, fixa em seu item 4.1 os critérios de ruptura de uma peça submetida a solicitações normais (esforço normal e/ou momento fletor), quando a deformação específica axial do concreto ou do aço atinge um determinado valor limite.

No caso das lajes, devido ao estado de tensões ser na realidade bidimensional e atuarem além das solicitações normais também solicitações tangenciais (esforço cortante e momento torçor), torna-se difícil a aplicação de um critério de ruptura explícito como o descrito acima.

Nesta formulação, considera-se que tenha ocorrido a ruptura do conjunto formado pela laje de concreto mais o solo, quando em uma certa etapa de aplicação do carregamento o mesmo não consiga mais produzir esforços resistentes que anulem as forças externas.

5 – VALIDAÇÃO DO MODELO

5.1- INTRODUÇÃO

Este capítulo tem como objetivo verificar a eficiência do modelo de elementos finitos na análise de lajes de concreto armado apoiadas diretamente sobre o solo, bem como ilustrar as diversas possibilidades de sua aplicação. Os exemplos aqui apresentados já foram estudados por outros autores, ou faz-se uma comparação com sua solução analítica, extraída da bibliografia.

Como primeiro exemplo, é feita a análise de uma placa circular engastada com carga distribuída transversalmente ao plano da mesma, com objetivo de mostrar a influência da deformação por corte no comportamento de placas.

No segundo exemplo, é feita a análise elástica linear de uma sapata retangular com carga excêntrica, com objetivo de mostrar a capacidade do modelo em analisar estruturas que oferecem esforços de tração no solo quando a excentricidade da carga ultrapassa um valor determinado.

No terceiro exemplo, é analisado um radier com quatro cargas concentradas, exemplo este analisado por VELLOSO e LOPES(1997).

No exemplo de número quatro, é feita a análise não-linear geométrica de uma placa quadrada sobre base elástica e apoiada nos quatro lados com carga concentrada no centro e sob forças de compressão ao longo dos bordos, com o objetivo de mostrar a influência que as forças de compressão exercem nos deslocamentos da mesma.

No quinto exemplo, são analisadas três lajes de concreto armado, com o objetivo de testar o modelo numérico para o comportamento de tais lajes.

5.2–INFLUÊNCIA DA DEFORMAÇÃO POR CORTE NO COMPORTAMENTO DE PLACAS

No cálculo de placas, usualmente é empregada a teoria linear de KIRCHHOFF (TIMOSHENKO,1959) que despreza a deformação por corte e é válida somente para pequenas deflexões w , quando comparadas com a espessura h da placa. Contudo, na prática de projeto podem surgir situações nas quais as condições anteriores não se verificam, tal é o caso de placas espessas, nas quais a deformação por cisalhamento tem grande importância, ou muito finas, as quais podem apresentar grandes deslocamentos.

Um estudo da influência da deformação por corte com a variação da esbeltez (L/h) é feito através da análise de uma placa circular engastada sob carga uniforme (modelo linear geométrico), conforme é mostrado na FIGURA 5.1.

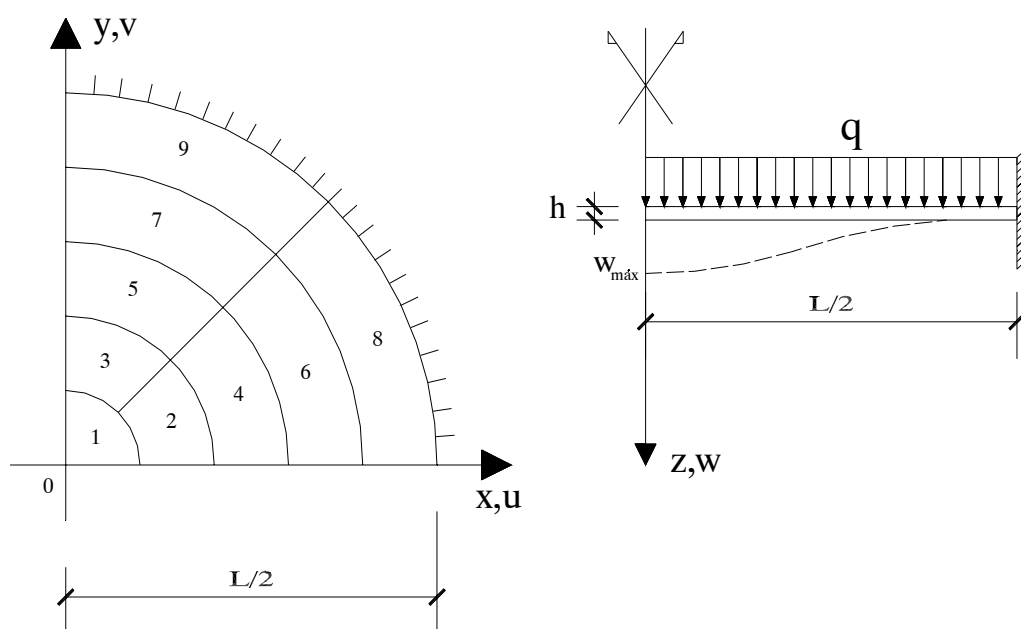


FIGURA 5.1 – Placa circular engastada sob carga uniforme

Propriedades		Carregamento
Geométricas	Mecânicas	
$L = 100\text{cm}$	$E = 20.000 \text{ kN/cm}^2$	$q = 10 \times 10^{-4} \text{ kN/cm}^2$
$h = 20 \text{ a } 1\text{cm}$	$\nu = 0,30$	

TABELA 5.1 – Propriedades mecânicas e geométricas: placa circular engastada

Para uma comparação dos resultados obtidos pelo modelo, será apresentada a dedução da solução analítica da deflexão no centro da placa circular engastada, conforme TIMOSHENKO(1959).

A máxima deflexão no centro da placa desprezando-se a deformação por corte é dada por

$$w_{\max} = \frac{qa^4}{64D} \quad (5.1)$$

onde q é a carga de superfície, a é o raio da placa e D a rigidez à flexão.

Porém, quando a relação entre o diâmetro e a espessura da placa é considerada pequena, uma correção na equação (5.1) deve ser feita para levar em consideração os efeitos da deformação de corte na flexão.

A correção consiste em somar à equação (5.1) uma deflexão adicional w_1 da superfície média da placa correspondente às tensões de cisalhamento. No centro da placa, w_1 será

$$w_1 = K \frac{qa^2}{4Gh} \quad (5.2)$$

onde G é o módulo de deformação ao cisalhamento, h a espessura da placa e K o fator de forma da seção transversal relativo ao corte.

Portanto, a deflexão no centro da placa quando se considera os efeitos da deformação por corte é

$$w = \frac{qa^4}{64D} + K \frac{qa^2}{4Gh} \quad (5.3)$$

Após algumas simplificações da equação (5.3), obtém-se

$$w = \frac{q}{64D} \left(a^4 + K \frac{8}{3} \frac{a^2 h^2}{(1-\nu)} \right) \quad (5.4)$$

Usando $K=6/5$ obtém-se a seguinte expressão para o cálculo da deflexão no centro da placa

$$w = \frac{q}{64D} \left(a^4 + \frac{16}{5} \frac{a^2 h^2}{(1-\nu)} \right) \quad (5.5)$$

O gráfico da FIGURA 5.2 mostra a relação entre a solução através da teoria de Mindlin, que considera a deformação por corte, e aquela obtida pela teoria de Kirchhoff, que a despreza, para valores de esbeltez (L/h) variando entre 5 e 100. (L =diâmetro da placa).

A curva em linha cheia foi obtida através da relação entre as soluções exatas conforme as equações (5.1) e (5.5). Os pontos isolados foram determinados pelo modelo, discretizando um quarto da placa em nove elementos.

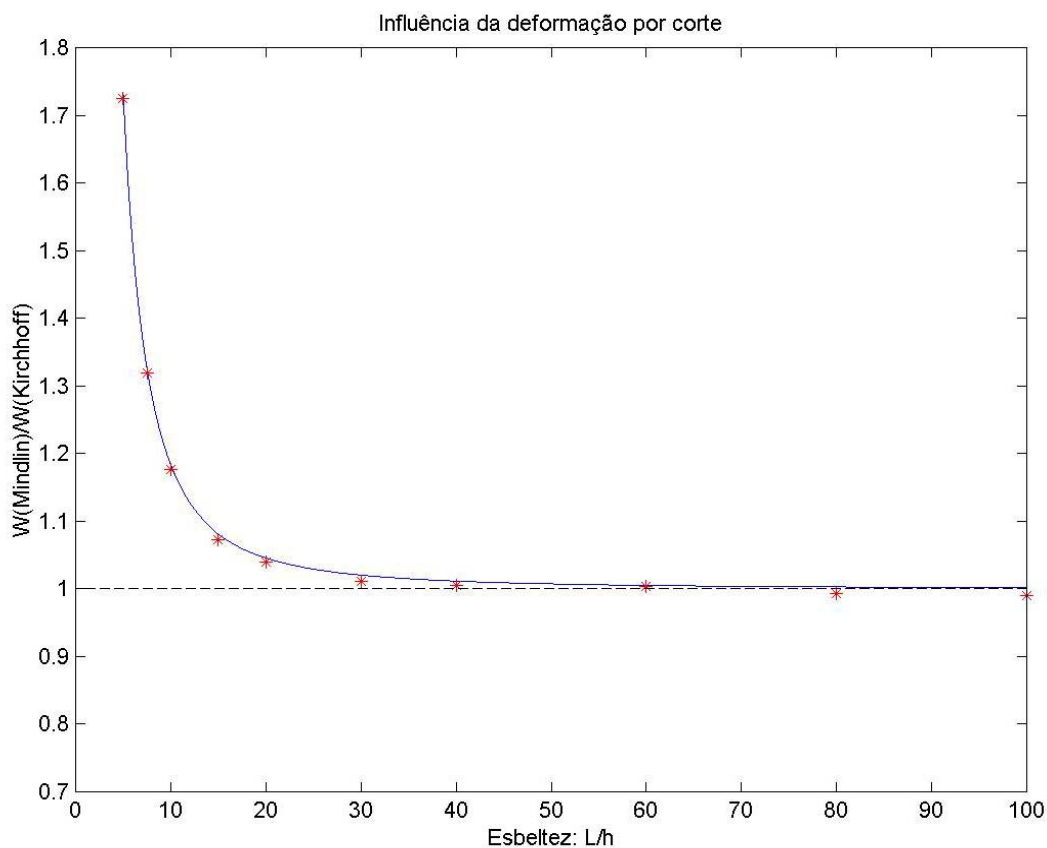


FIGURA 5.2 – Influência da deformação por corte

Observa-se a boa concordância do modelo numérico com a solução analítica para as várias relações L/h consideradas para a placa. Em todos os casos foi empregada a regra de integração seletiva.

5.3- SAPATA RÍGIDA COM CARGA EXCÊNTRICA

No projeto de sapatas isoladas, é importante conhecer as pressões de contacto, que é pressão que atua entre a superfície inferior da sapata e o terreno de fundação, especialmente nos casos de carga excêntrica, seja para o dimensionamento estrutural ou para verificar se as tensões admissíveis estimadas para o terreno não são ultrapassadas.

O momento decorrente desta excentricidade provocará rotação da sapata, e quando tal excentricidade for maior que $L/6$ (VELLOSO E LOPES, 1997) certa região perderá o contato com o solo. Sendo o solo um material incapaz de fornecer esforços resistentes que anulem forças externas de tração, o modelo computacional deverá prever este comportamento, anulando as tensões de tração no solo e buscando uma configuração de equilíbrio na qual o carregamento externo é contrabalançado por esforços resistentes internos de compressão no solo.

No exemplo abaixo, é analisada uma sapata retangular com carga excêntrica conforme apresentada na FIGURA 5.3. Na análise, tirou-se proveito da simetria em relação ao eixo x , e a malha de elementos finitos usada foi de $22,5 \times 15$ cm, sendo o número total de elementos usados na discretização igual a 32, gerando 121 nós.

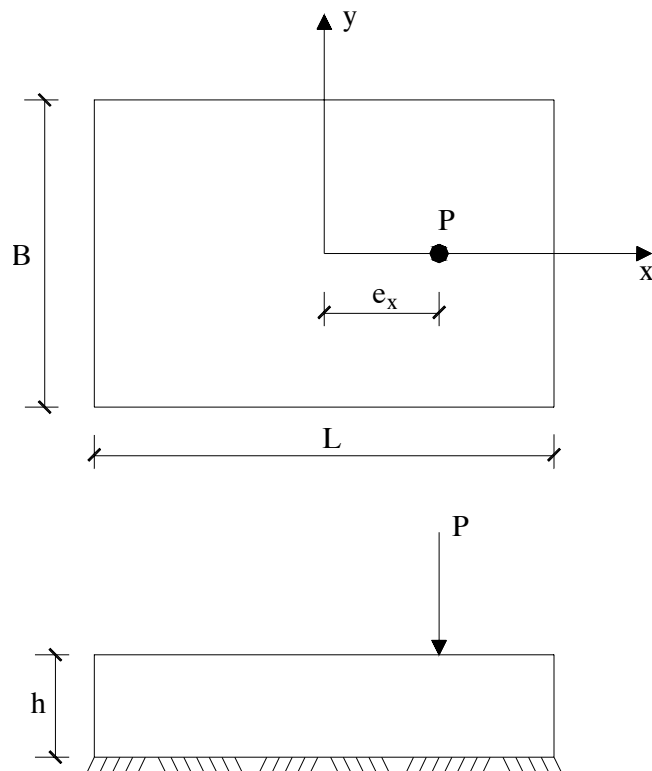


FIGURA 5.3 – Sapata rígida com carga excêntrica

Propriedades			Carregamento
Geométricas	Mecânicas		
	Concreto	Solo	
L = 180cm	E = 2500 kN/cm ²	k = 2,1x10 ⁻² kN/cm ³	P = 200kN
B = 120cm			
h = 40cm	ν = 0,20		
e _x = 45cm			

TABELA 5.2 – Propriedades mecânicas e geométricas: sapata rígida com carga excêntrica

Na FIGURA 5.4 são apresentadas as distribuições das pressões de contacto solo-fundação, tanto para o caso de tração no solo, quanto para o caso de somente pressões de compressão. Uma comparação pode ser feita através de VELLOSO e LOPES (1997), no qual é apresentada a solução analítica para o caso de sapata rígida com carga excêntrica, conforme

a FIGURA 5.5, que comprova os bons resultados obtidos através do modelo.

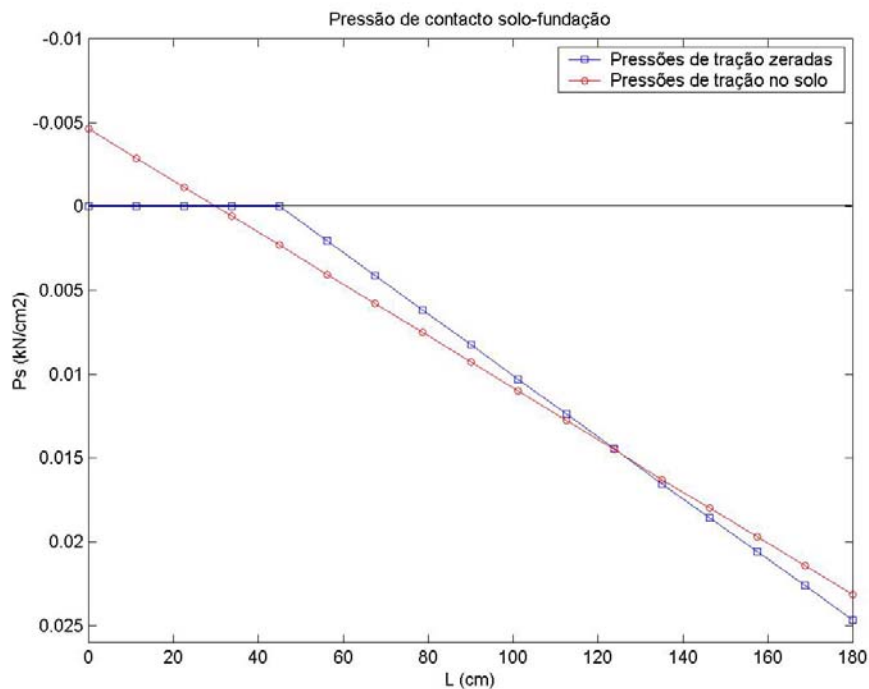


FIGURA 5.4 – Pressão de contacto solo-fundação: sapata rígida

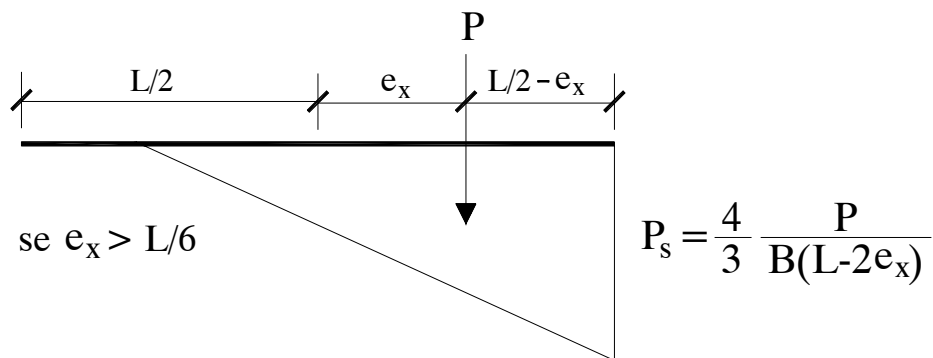


FIGURA 5.5 – Solução analítica: sapata rígida com carga excêntrica

Observe-se a redução da zona de contato entre o solo e a fundação, bem como o aumento da pressão de contato no bordo mais comprimido.

5.4– PLACA SOBRE BASE ELÁSTICA (RADIÉR)

O radier é um exemplo típico de placa assente em terreno elástico, e segundo a norma brasileira de fundações, a expressão *radier* deve ser usada apenas quando uma fundação superficial associada recebe todos os pilares da obra.

Na FIGURA 5.6 é apresentado um caso geral de carregamento de um radier, e sua geometria. A análise elástica-linear é feita com a malha de elementos finitos de 1x1m gerando um número total de 192 elementos e 633 nós.

A comparação dos resultados é feita com análise do mesmo exemplo extraída de VELLOSO E LOPES(1997).

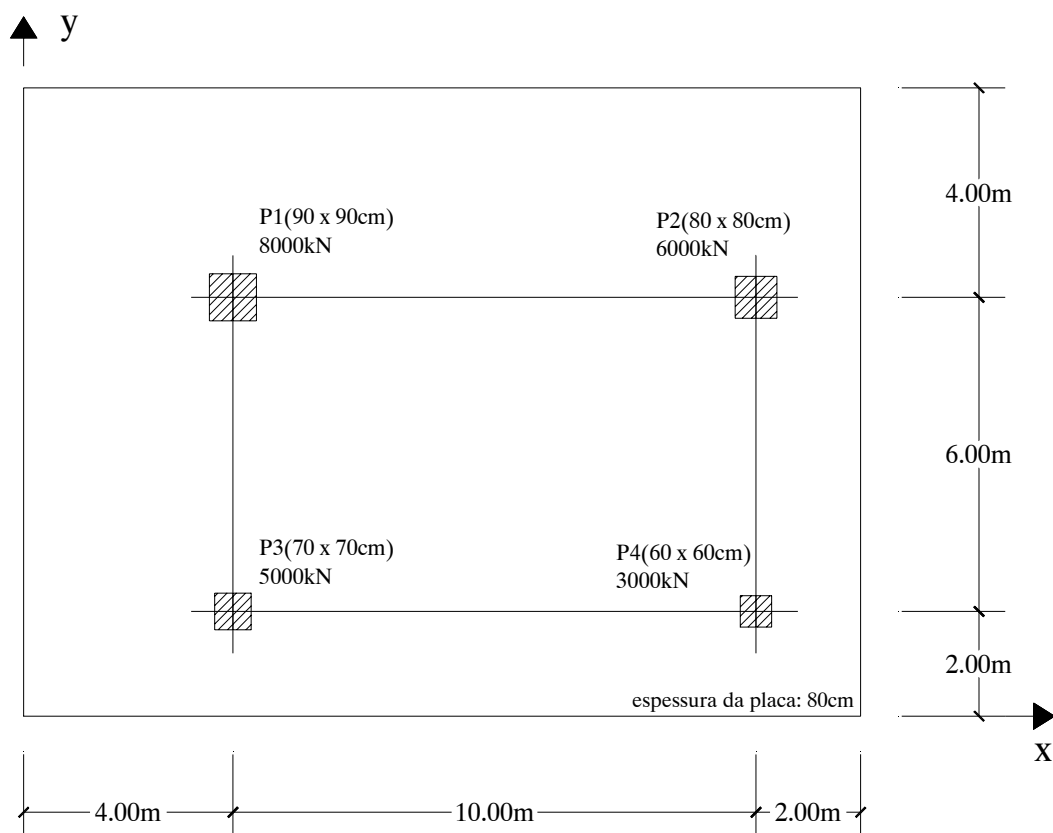


FIGURA 5.6 – Radier a ser calculado

Propriedades Mecânicas	
Concreto	Solo
$E = 30 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$	$k = 4000 \text{ kN/m}^3$
$\nu = 0,20$	

TABELA 5.3 – Propriedades mecânicas: radier

Como primeira análise, é apresentada a FIGURA 5.7, a qual mostra as deflexões w do radier.

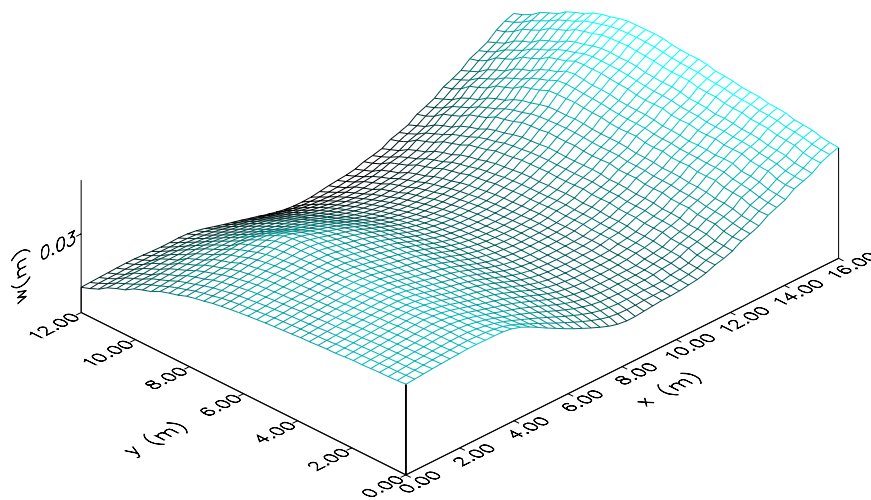


FIGURA 5.7 – Deflexões do radier

Na FIGURA 5.8, é apresentada a distribuição das pressões de contacto entre o radier e o solo.

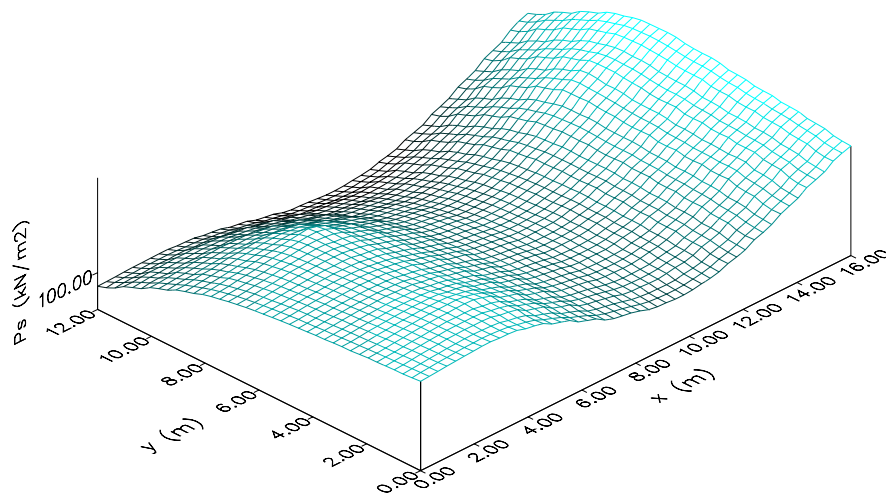


FIGURA 5.8 – Pressão de contacto solo-fundação: radier

Analisando conjuntamente as FIGURAS 5.7 e 5.8, verifica-se que as pressões de contacto são proporcionais aos recalques, sendo esta a base da Hipótese de Winkler, adotada neste trabalho.

Como próxima análise, é apresentada na FIGURA 5.9 a distribuição dos momentos flectores M_x no interior da placa.

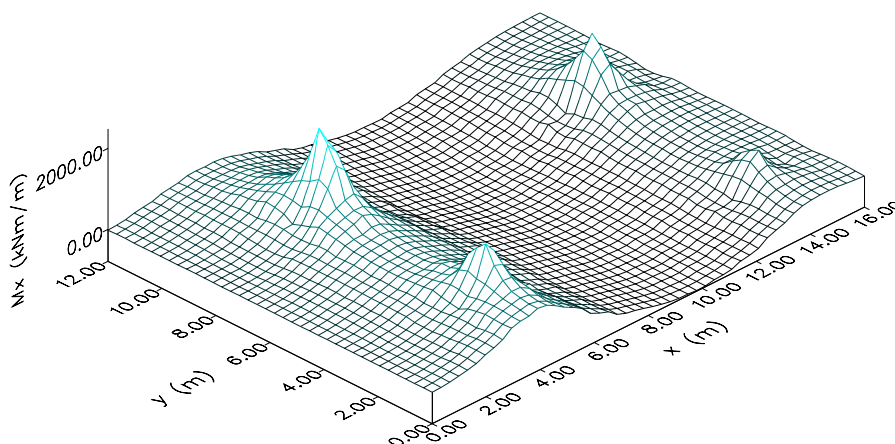


FIGURA 5.9 – Momentos flectores M_x no interior do radier

Para uma comparação com os resultados extraídos de VELLOSO E LOPES(1997), se estabelece primeiramente dois eixos paralelos ao eixo x , como mostrado a seguir.

Eixo A: passando pelos pilares P1 e P2

Eixo B: passando pelos pilares P3 e P4

Para uma completa interpretação dos resultados, também são estabelecidos pontos sobre os eixos, conforme mostrado a seguir

Eixo A: Pto 1 (sob o pilar P1)

Pto 2 (entre os pilares P1 e P2)

Pto 3 (sob o pilar P2)

Eixo B: Pto 1 (sob o pilar P3)

Pto 2 (entre os pilares P3 e P4)

Pto 3 (sob o pilar P4)

Na TABELA 5.4 estão apresentados os valores dos momentos M_x calculados através do modelo e extraídos da bibliografia.

Momentos M_x (kNm/m)			
Eixos	Pontos	Modelo	Velloso e Lopes
Eixo A	1	2485	2432
	2	-760	-794
	3	1455	1477
Eixo B	1	1689	1637
	2	-731	-780
	3	628	647

TABELA 5.4 – Momentos fletores M_x

Como próxima análise, está mostrada na FIGURA 5.10 a distribuição dos momentos fletores M_y no interior da placa.

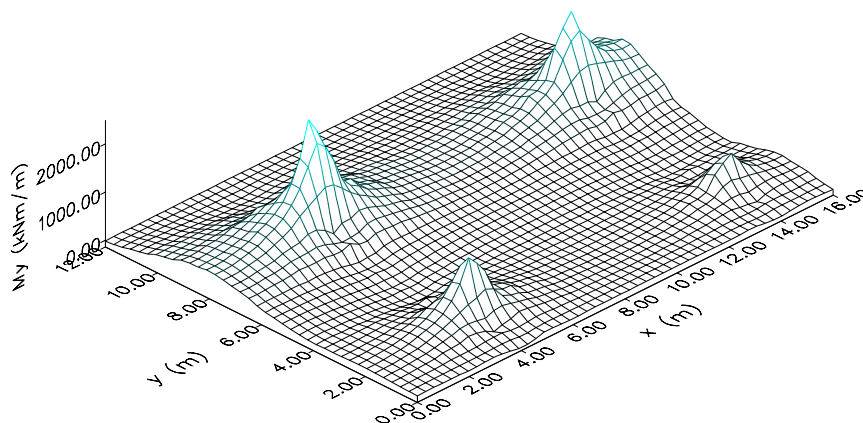


FIGURA 5.10 – Momentos fletores M_y no interior do radier

Para a mesma comparação com os resultados extraídos de VELLOSO E LOPES(1997), se estabelece primeiramente dois eixos paralelos ao eixo y , como mostrado a seguir.

Eixo C: passando pelos pilares P1 e P3

Eixo D: passando pelos pilares P2 e P4

Para uma completa interpretação dos resultados, também são estabelecidos pontos sobre os eixos, conforme mostrado a seguir

Eixo C: Pto 1 (sob o pilar P1)

Pto 2 (entre os pilares P1 e P3)

Pto 3 (sob o pilar P3)

Eixo D: Pto 1 (sob o pilar P2)

Pto 2 (entre os pilares P2 e P4)

Pto 3 (sob o pilar P4).

Na TABELA 5.5 estão apresentados os valores dos momentos M_y calculados através do modelo e extraídos da bibliografia.

Momentos M_y (kNm/m)			
Eixos	Pontos	Modelo	Velloso e Lopes
Eixo C	1	2497	2522
	2	-115	-73
	3	1285	1298
Eixo D	1	2018	2085
	2	-83	-36
	3	736	767

TABELA 5.5 – Momentos fletores M_y

A diferença observada entre os valores obtidos através do modelo e os valores extraídos de VELLOSO E LOPES(1997) se deve ao número de elementos usados na discretização da placa e ao tipo de elemento.

Na formulação do exemplo em VELLOSO E LOPES(1997), o elemento de placa utilizado tem 4 pontos nodais e os momentos em um dado nó são obtidos pela média dos momentos fornecidos pelos elementos que possuem aquele nó em comum; já o número de elementos usados é 168 com um número total de 195 nós.

Neste trabalho usou-se um elemento de 8 nós, e os momentos em um dado nó são obtidos através de um processo de suavização de tensões; já o número de elementos é 192 com um número total de 633 nós, sendo assim justificada a diferença obtida no processo de análise do radier.

5.5– PLACA QUADRADA COM CARGA CONCENTRADA E SOB FORÇAS DE COMPRESSÃO AO LONGO DOS BORDOS

No próximo exemplo é feita a análise não-linear geométrica de uma placa quadrada sobre base elástica e apoiada nos seus quatro lados, com carga concentrada no centro e sob forças de compressão conforme apresentado na FIGURA 5.11.

O objetivo deste exemplo é mostrar a influência que as forças de compressão exercem nos deslocamentos da placa. Após deslocar-se inicialmente por causa da carga concentrada

(mantida constante a cada etapa de carga), a placa sofrerá acréscimos sucessivos de deslocamentos conforme aumentam as forças de compressão, até que os deslocamentos tendam ao infinito, indicando que placa não é mais capaz de fornecer esforços resistentes que anulem as forças externas.

Também é mostrada a influência que a rigidez do solo exerce nos deslocamentos da placa e na capacidade da placa em resistir a forças maiores de compressão.

Na formulação do exemplo usou-se apenas $\frac{1}{4}$ da placa por causa da sua simetria em relação aos dois eixos de referência. A malha de elementos finitos usada na discretização foi de 40×40 cm, com um número total de 25 elementos e 96 nós.

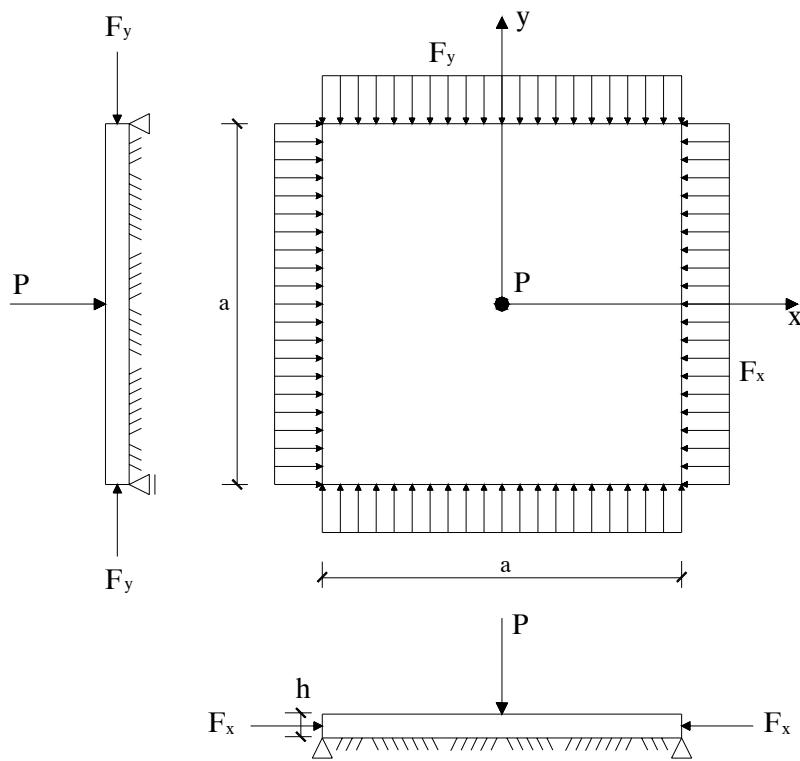


FIGURA 5.11 – Placa quadrada sobre base elástica

Propriedades			Carregamento
Geométricas	Mecânicas		
	Concreto	Solo	
a = 400cm	E = 2500 kN/cm ²	k ₁ = 1,2x10 ⁻² kN/cm ³	P = 100kN
h = 10cm	v = 0,20	k ₂ = 3,6x10 ⁻³ kN/cm ³	F _{x1} = F _{y1} = 0 a 120 kN/cm F _{x2} = F _{y2} = 0 a 50 kN/cm

TABELA 5.6 – Propriedades mecânicas e geométricas: placa sob forças de compressão

Na FIGURA 5.12 estão apresentados os resultados obtidos pelo modelo para a deflexão do ponto central da placa e sua solução analítica. Observa-se que quando há um aumento no coeficiente de reação vertical do solo há também um aumento na capacidade de carga da placa.

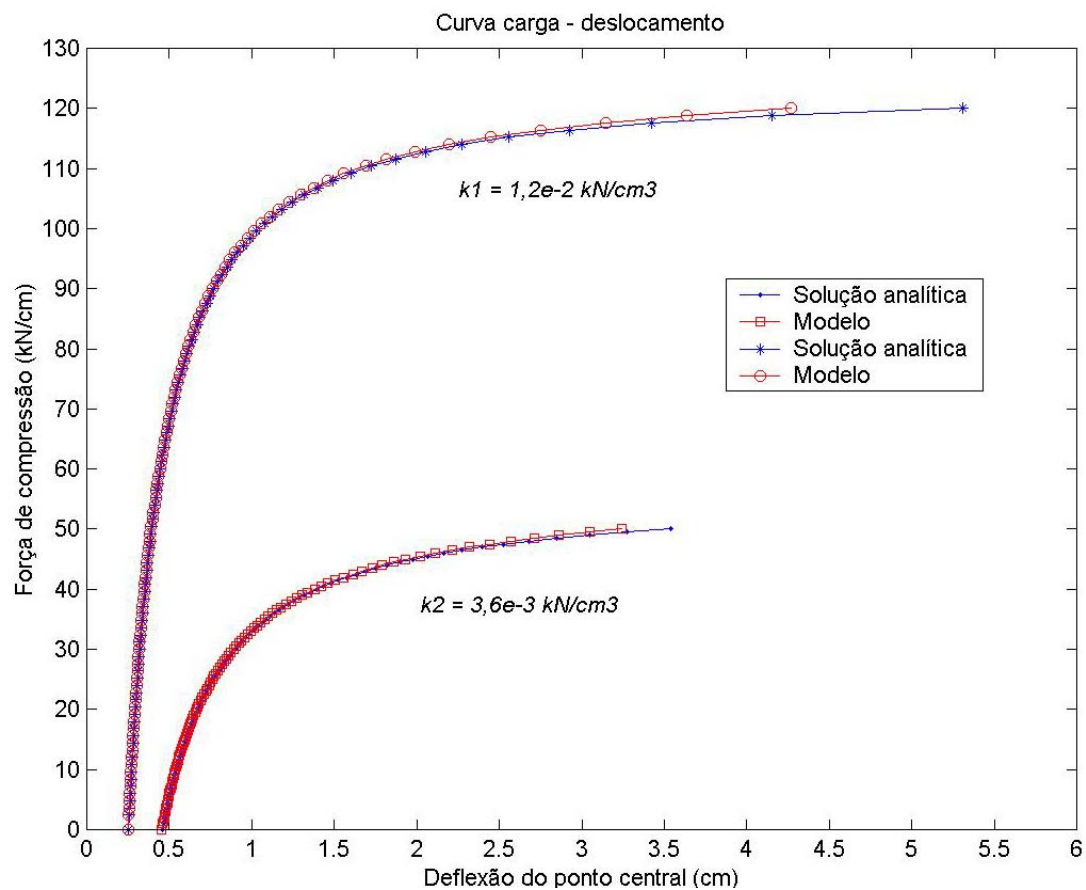


FIGURA 5.12 – Curva carga – deslocamento do ponto central

A comparação dos resultados obtidos pelo modelo é feita com a solução analítica extraída de TIMOSHENKO(1959).

Para uma placa quadrada apoiada em seus quatro lados, assente em base elástica, com uma carga P concentrada no seu centro e sujeita a forças de compressão F_x e F_y , a solução analítica para a deflexão do ponto central é dada por

$$w = \frac{4P}{a^2 \pi^4 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{m^2 + n^2}{a^2}\right)^2 - \frac{m^2 F_x}{\pi^2 a^2 D} - \frac{n^2 F_y}{\pi^2 a^2 D} + \frac{k}{\pi^4 D}}, \quad (5.6)$$

onde a é a dimensão da placa, D a rigidez à flexão, e k o coeficiente de reação vertical do solo.

5.6– LAJES DE CONCRETO ARMADO

5.6.1– Laje de McNEICE

Uma laje quadrada, apoiada apenas em seus quatro cantos e submetida a uma carga concentrada no centro foi ensaiada por JOFRIET e McNEICE (1971). Este experimento tem sido utilizado por diversos pesquisadores, para testar modelos numéricos para o comportamento de lajes de concreto armado.

A geometria da laje, a disposição das armaduras e a malha de elementos finitos empregada na análise, são mostradas na FIGURA 5.13. As propriedades mecânicas dos materiais que foram adotadas se encontram na TABELA 5.7.

Propriedades dos materiais		Carregamento
Concreto	Aço	
$E = 2860 \text{ kN/cm}^2$	$E_{s1} = 20000 \text{ kN/cm}^2$	$P = 0 \text{ a } 15 \text{ kN}$
$\nu = 0,15$	$E_{s2} = 0,00$	
$f_c = 3,80 \text{ kN/cm}^2$	$f_y = 41,34 \text{ kN/cm}^2$	
$f_{ct} = 0,38 \text{ kN/cm}^2$		

TABELA 5.7 – Propriedades dos materiais e carregamento: laje de McNEICE

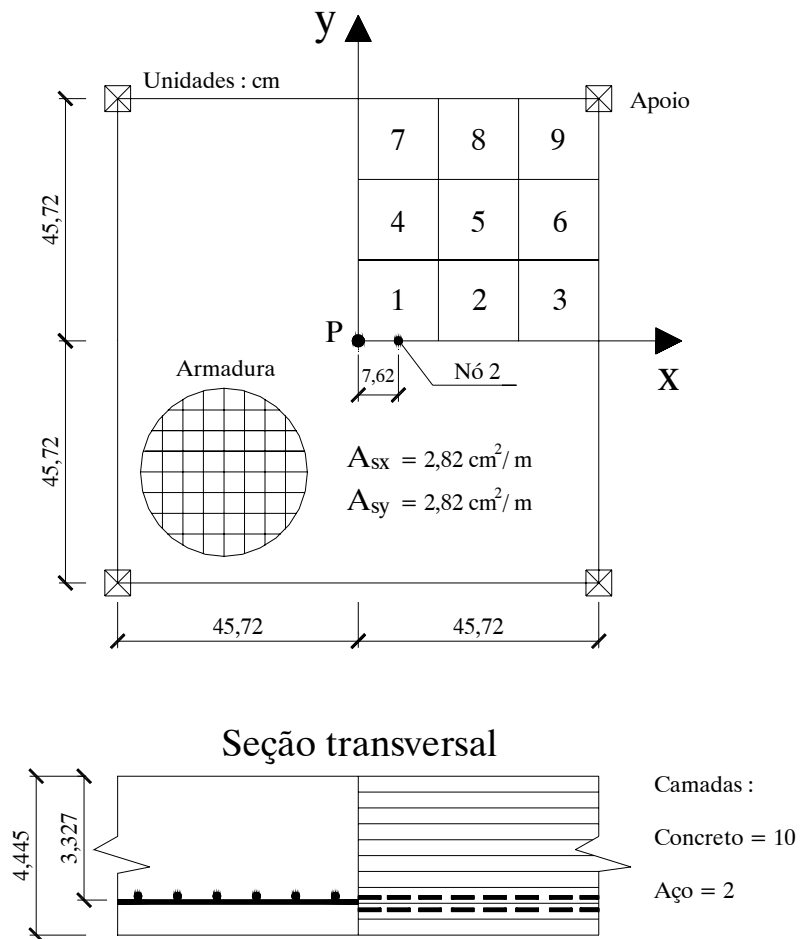


FIGURA 5.13 – Laje de McNEICE

A FIGURA 5.14 permite comparar a curva experimental carga-deslocamento para o ponto $x=7,62\text{cm}$ e $y=0,00$ (nó 2), com os resultados obtidos para os tipos de abordagem do problema.

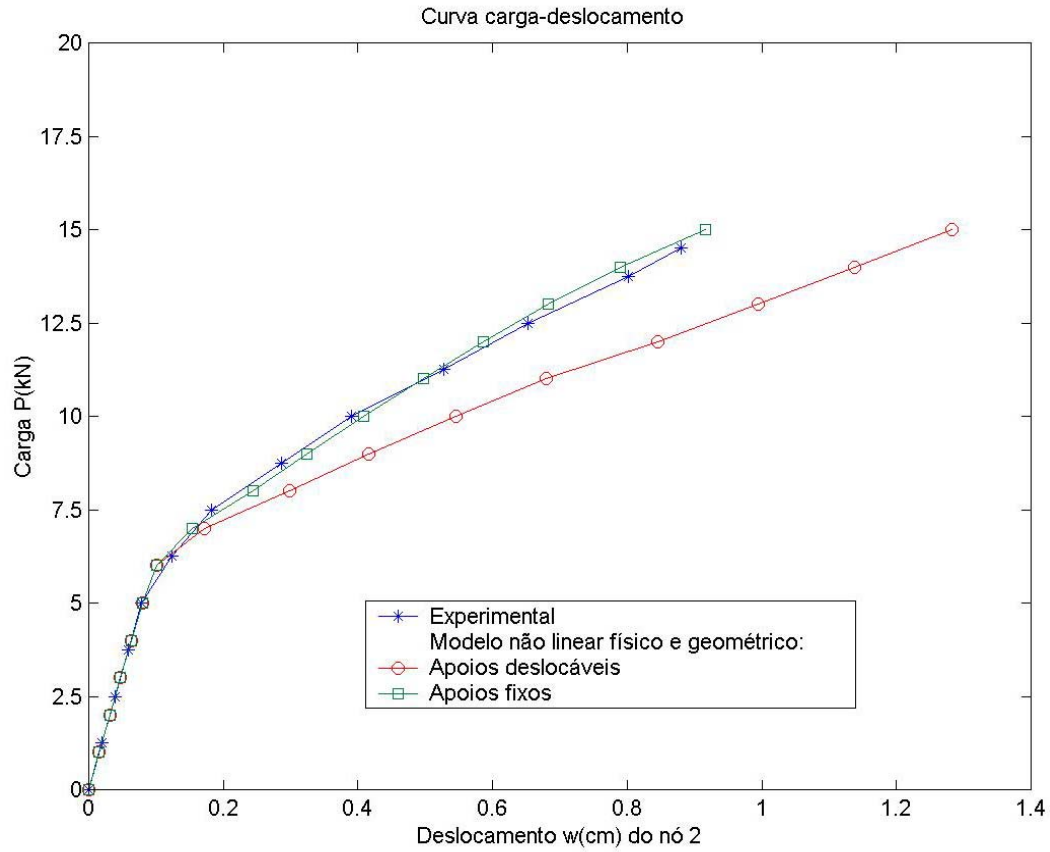


FIGURA 5.14 – Curvas carga-deslocamento: Laje de McNEICE

Após a fissuração a superfície neutra da laje desloca-se para cima, então o plano médio passa a ser tracionado, sofrendo uma expansão e empurrando os apoios nos cantos para fora.

Se os apoios forem fixos, impedindo a laje de dilatar-se, surgem esforços normais de compressão que restringem a fissuração da laje e acabam por tornar a sua resposta estática mais rígida.

Em JOFRIET e McNEICE (1971), não são informadas as cargas de ruptura da laje.

5.6.2– Laje S1 de TAYLOR

Com o objetivo de estudar a influência da orientação das armaduras no comportamento de lajes de concreto armado, TAYLOR *et alli* (1966) ensaiaram duas lajes

quadradas, simplesmente apoiadas em todo o contorno e sob carga uniforme. A laje designada por *S1* possuía armadura nas direções paralelas aos lados e na laje *S6* a ferragem formava um ângulo de 45° com as laterais.

A geometria da laje *S1*, a disposição das armaduras e a malha de elementos finitos utilizada na análise são indicadas na FIGURA 5.15. As propriedades mecânicas dos materiais que foram utilizadas aparecem na TABELA 5.8.

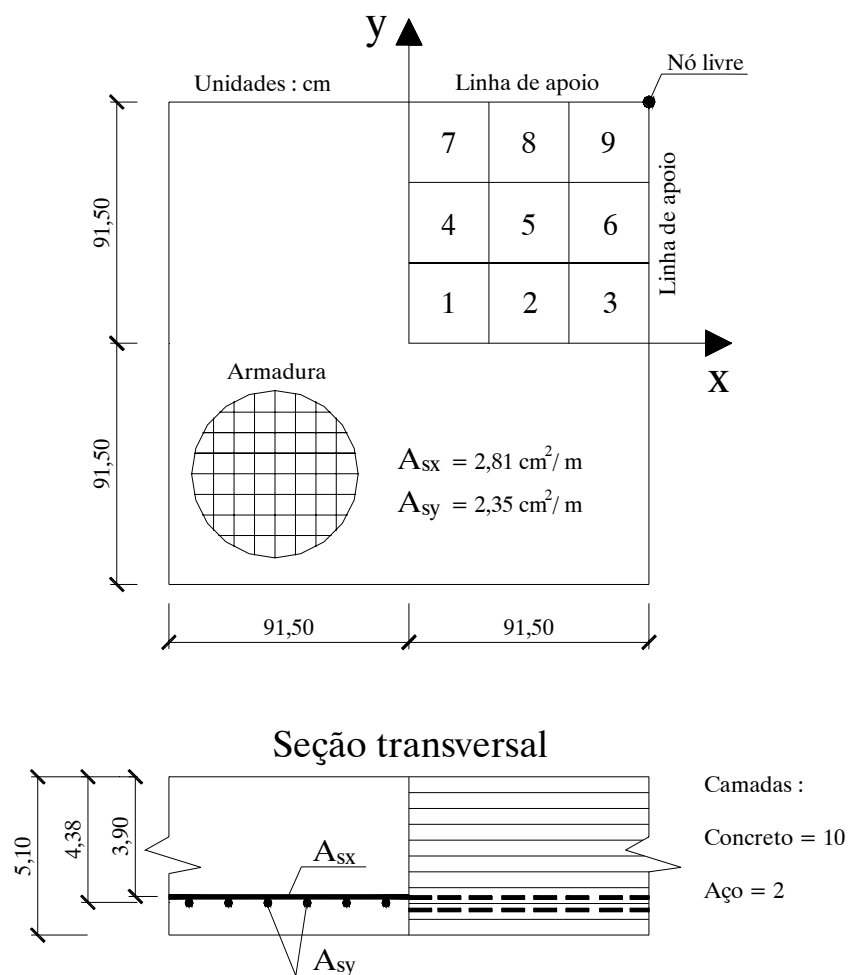


FIGURA 5.15 – Laje S1 de TAYLOR

Propriedades dos materiais		Carregamento
Concreto	Aço	
$E = 3242 \text{ kN/cm}^2$	$E_{s1} = 20691 \text{ kN/cm}^2$	$q = 0 \text{ a } 3,58 \times 10^{-3} \text{ kN/cm}^2$
$\nu = 0,18$	$E_{s2} = 3000 \text{ kN/cm}^2$	
$f_c = 3,50 \text{ kN/cm}^2$	$f_y = 37,59 \text{ kN/cm}^2$	
$f_{ct} = 0,38 \text{ kN/cm}^2$		

TABELA 5.8 – Propriedades dos materiais e carregamento: laje S1 de TAYLOR

Estes experimentos foram conduzidos com a possibilidade dos cantos da laje se levantarem. A laje foi apoiada sobre roletes com movimento livre no plano xy .

O gráfico da FIGURA 5.16 mostra a relação entre a carga total aplicada sobre a laje em kN e o deslocamento vertical w do ponto central.

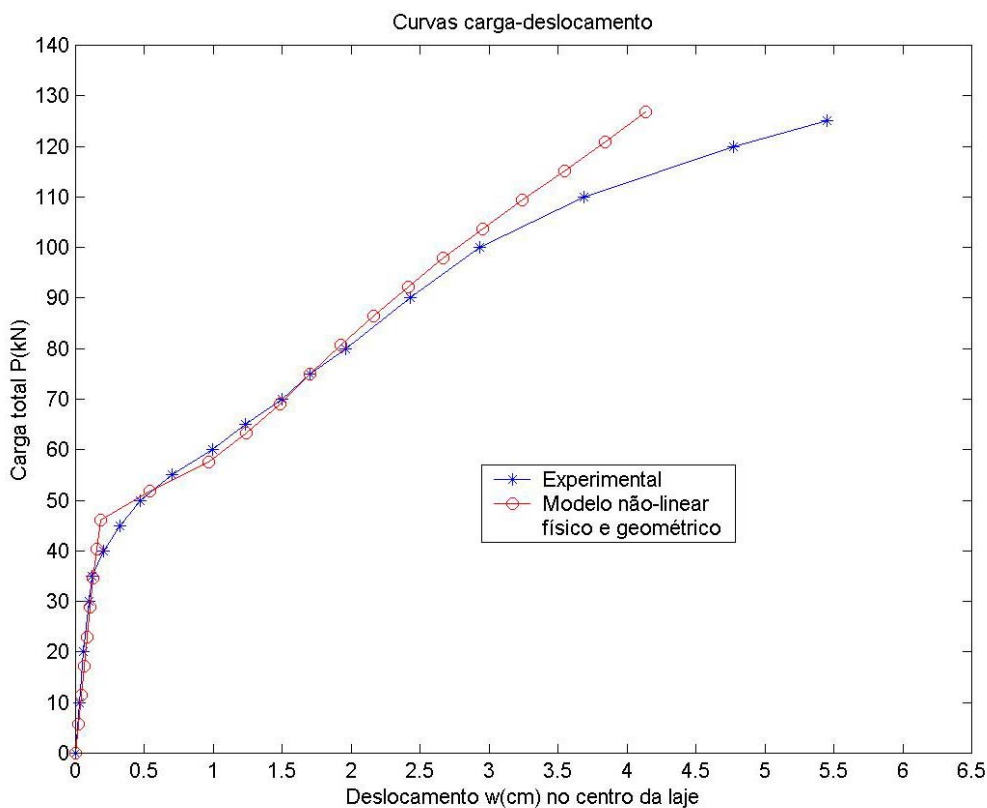


FIGURA 5.16 – Curvas carga-deslocamento: Laje S1 de TAYLOR

A ruptura ocorreu por deformação plástica excessiva da armadura, para uma carga de 127,5 kN. A carga de ruptura relatada no ensaio foi de 144 kN. O modelo atingiu, então, 89% da carga de ruptura experimental.

5.6.3– Laje S6 de TAYLOR

A laje S6 de TAYLOR possui basicamente a mesma geometria da laje S1, porém sua armadura se encontra inclinada a 45° em relação aos lados, conforme a FIGURA 5.17. Na TABELA 5.9 estão indicadas as propriedades mecânicas dos materiais para este exemplo.

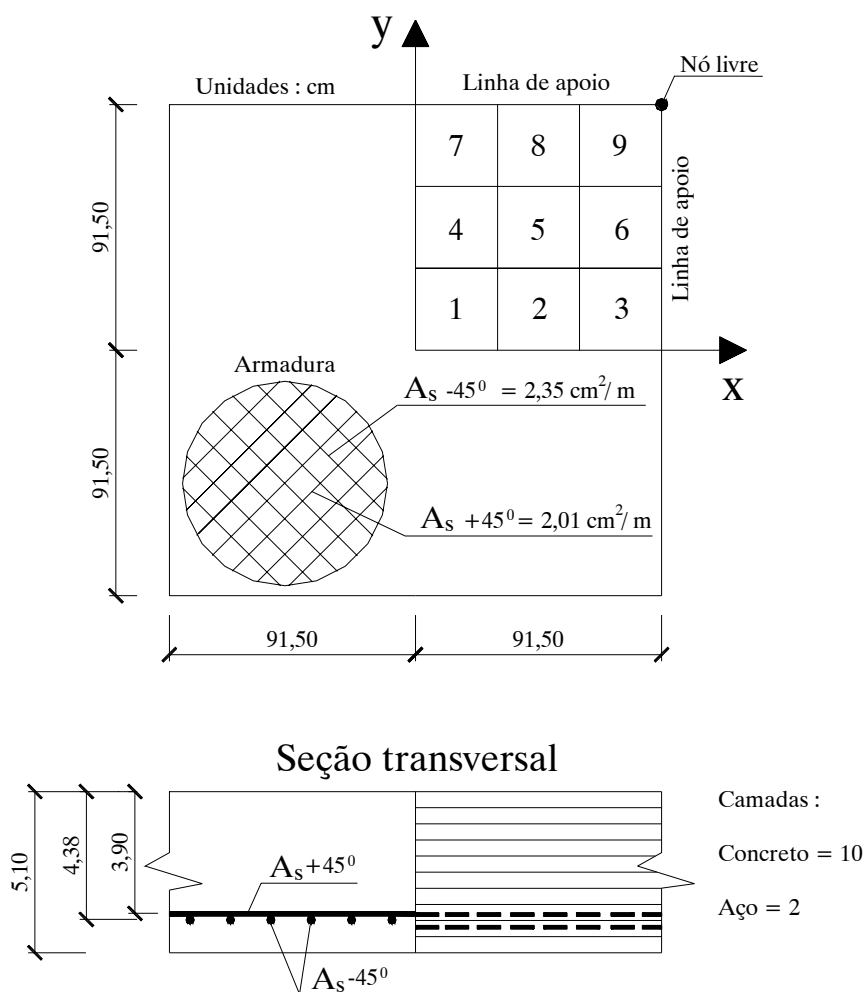


FIGURA 5.17 – Laje S6 de TAYLOR

Propriedades dos materiais		Carregamento
Concreto	Aço	
$E = 3242 \text{ kN/cm}^2$	$E_{s1} = 20691 \text{ kN/cm}^2$	$q = 0 \text{ a } 3,58 \times 10^{-3} \text{ kN/cm}^2$
$\nu = 0,18$	$E_{s2} = 1379 \text{ kN/cm}^2$	
$f_c = 3,50 \text{ kN/cm}^2$	$f_y = 42,03 \text{ kN/cm}^2$	
$f_{ct} = 0,35 \text{ kN/cm}^2$		

TABELA 5.9 – Propriedades dos materiais e carregamento: laje S6 de TAYLOR

A curva relacionando a carga total sobre a laje em kN com o deslocamento vertical w no centro é mostrada na FIGURA 5.18.

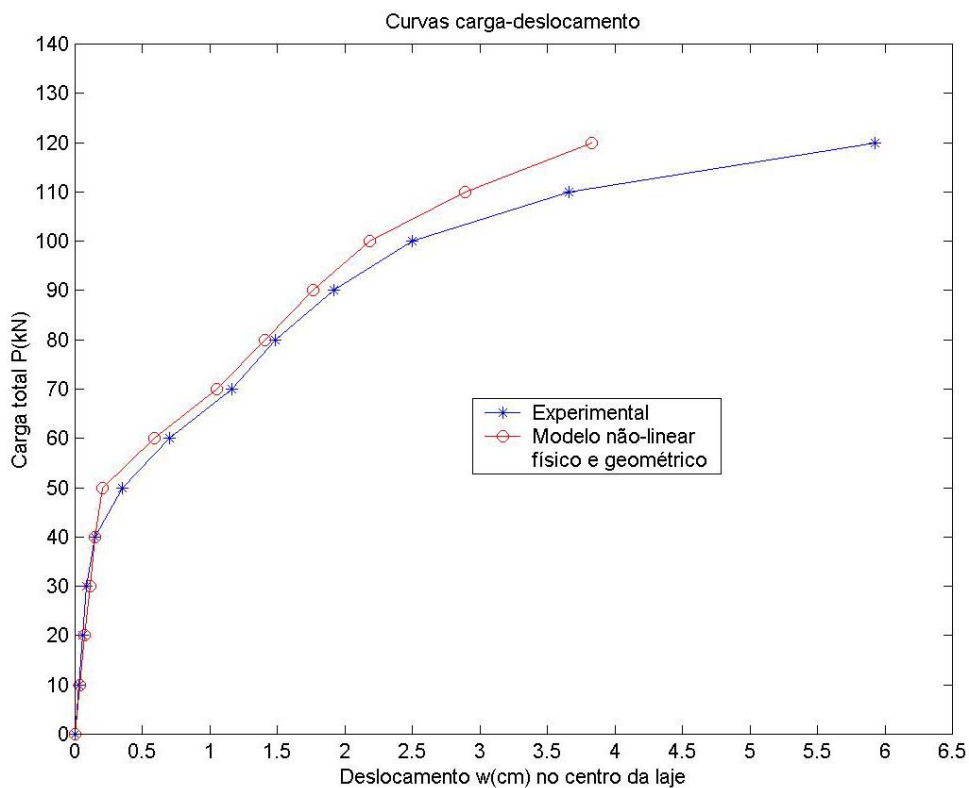


FIGURA 5.18 – Curvas carga-deslocamento: Laje S6 de TAYLOR

A ruptura ocorreu por deformação plástica excessiva da armadura, para uma carga de 122,5 kN. A carga de ruptura relatada no ensaio foi de 133 kN. O modelo atingiu, então, 92% da carga de ruptura experimental.

Os pontos obtidos numericamente apresentam uma boa concordância com os resultados experimentais.

Na FIGURA 5.19 é feita uma comparação entre os resultados obtidos pelo modelo para as lajes *S1* e *S6*. Observa-se que a laje *S6* apresenta-se mais rígida após a carga de fissuração. Este fato pode ser explicado pela direção de deformações principais ser igual a 45° em todas etapas de carga na camada mais tracionada da laje, no ponto de integração mais próximo do centro.

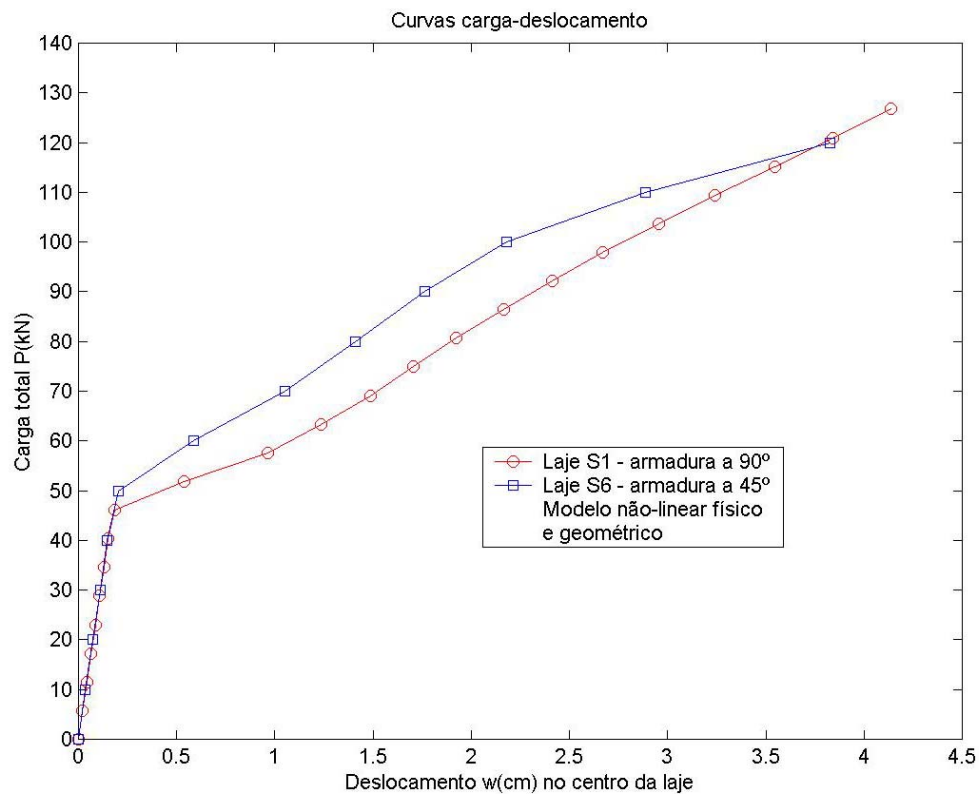


FIGURA 5.19 – Comparação das curvas carga-deslocamento

6 – APLICAÇÃO DO MODELO

6.1 – INTRODUÇÃO

Neste capítulo é apresentado um exemplo de aplicação do modelo em pavimento portuário, no qual várias análises serão feitas, como variação na espessura da placa, variação na resistência à compressão do concreto, influência da taxa de armadura e rigidez do solo.

O exemplo consiste no cálculo de uma laje de concreto armado sobre base elástica, e submetida à cargas concentradas de grande intensidade provenientes das rodas de um guindaste. Na análise também são considerados o peso próprio da laje e uma sobrecarga accidental. A laje possui dois bordos livres e bordos simplesmente apoiados sobre vigas.

Na FIGURA 6.1 é mostrado um corte transversal esquemático para mostrar a localização da laje a ser calculada (SUPERINTENDÊNCIA DO PORTO DE RIO GRANDE, 2003).

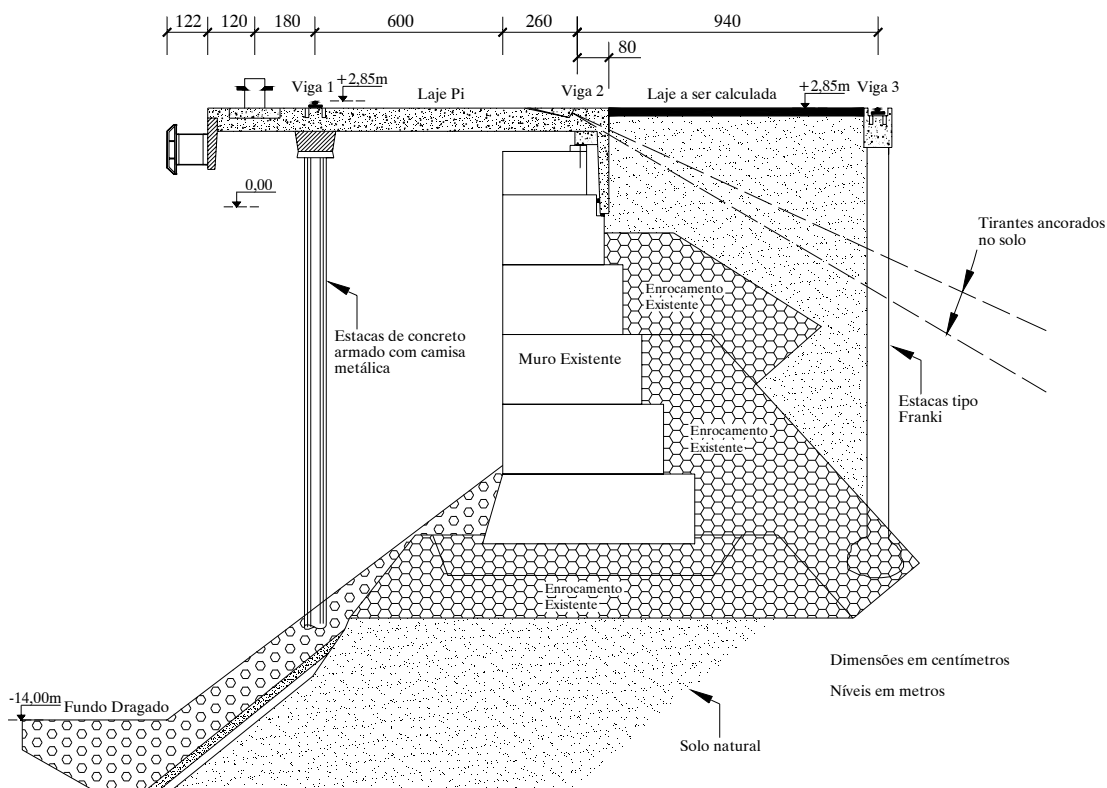


FIGURA 6.1 – Seção transversal

Como no projeto serão previstas juntas de dilatação no sentido transversal do cais a cada 25,75m, as dimensões da laje para o dimensionamento serão de 2.575x900cm.

O guindaste que operará sobre a laje pesa aproximadamente 3500kN, e seu peso é igualmente distribuído entre os seus 6 eixos, sendo a carga de cada eixo aproximadamente 584kN. Como o guindaste é composto de 4 rodas por eixo, a carga transmitida ao pavimento será de 146kN por pneu, como ilustrado na FIGURA 6.2 (SUPERINTENDÊNCIA DO PORTO DE RIO GRANDE, 2003).

A capacidade de içamento do guindaste é de 1000kN, e quando o mesmo está operando em plena carga, as cargas transmitidas pelas patolas são localmente inferiores às cargas transmitidas pelos pneus quando o guindaste está trafegando sem carga, portanto, as cargas consideradas no projeto serão as cargas transmitidas pelos 24 pneus do guindaste.

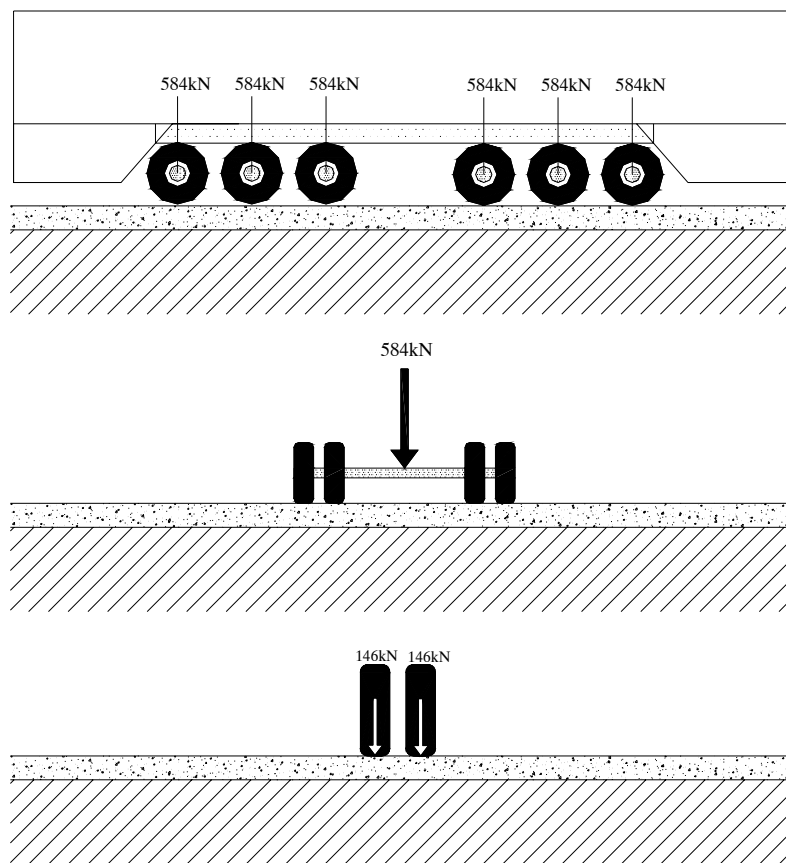


FIGURA 6.2 – Cargas transmitidas ao pavimento

6.2 – PROJETO DA LAJE

Para o dimensionamento das armaduras, é feita uma análise elástica-linear da laje sob carga de serviço através do modelo. Considera-se a laje com dois bordos livres e dois simplesmente apoiados sobre as vigas, e assente sobre um solo estabilizado, sendo este, o solo de maior rigidez apresentado neste exemplo. Com os esforços solicitantes obtidos, são calculadas as armaduras.

Considerou-se o carregamento do guindaste como sendo simétrico em relação aos dois eixos de referência, portanto é feita a análise de $\frac{1}{4}$ da placa. Na discretização, foi usada uma malha de elementos finitos de 40,91 x 80,47cm, gerando um total de 176 elementos e 583 nós.

Na TABELA 6.1 são apresentadas as propriedades usadas no dimensionamento da laje.

Propriedades geométricas	Propriedades dos materiais			Carregamento
	Concreto	Aço	Solo	
Larg = 450 cm	$E_{cm} = 3355 \text{ kN/cm}^2$	$E_{s1} = 21000 \text{ kN/cm}^2$	$k = 0,149 \text{ kN/cm}^3$	$G_k = 6,25 \times 10^{-4} \text{ kN/cm}^2$ (peso próprio)
Comp = 1287,5 cm		$E_{s2} = 0,00$		$P_k = 146 \text{ kN}$ (por roda - 6 rodas)
Espessura = 25 cm	$f_{ck} = 3,0 \text{ kN/cm}^2$	$f_{yk} = 50 \text{ kN/cm}^2$		$Q_k = 50 \times 10^{-4} \text{ kN/cm}^2$ (sobrecarga)
	$f_{ctk} = 0,20 \text{ kN/cm}^2$			

TABELA 6.1 – Propriedades para dimensionamento da laje

Na FIGURA 6.3 são apresentados os aspectos geométricos da laje, as posições das cargas concentradas provenientes dos pneus do guindaste e as armaduras obtidas através da análise dos esforços solicitantes.

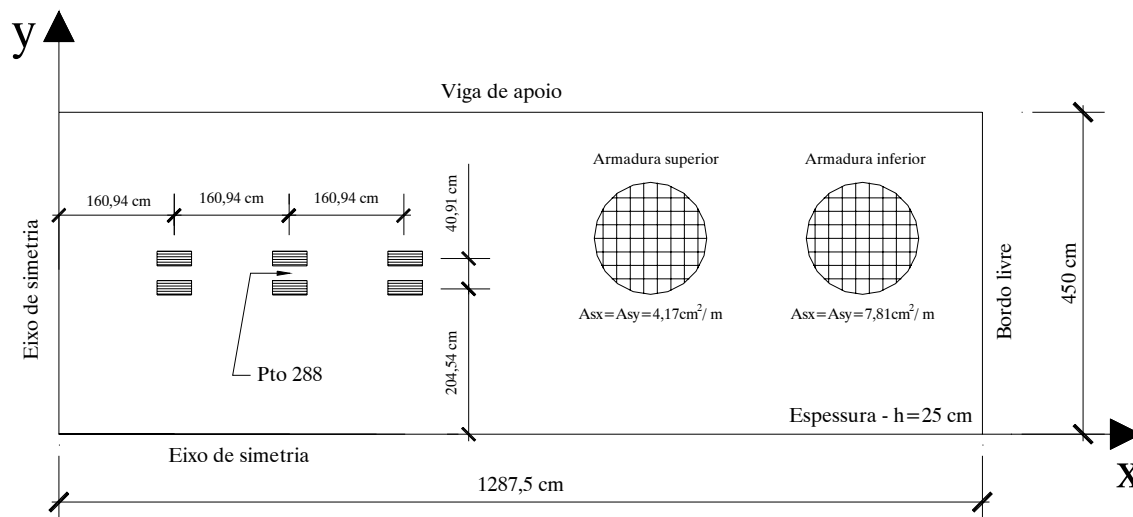


FIGURA 6.3 – Aspectos gerais da laje

6.3 – ANÁLISE DA LAJE CONSIDERANDO DIFERENTES COEFICIENTES DE REAÇÃO VERTICAL DO TERRENO

Nesta seção são apresentadas três análises da laje sobre solos com diferentes coeficientes de reação vertical.

Na primeira, o solo é melhorado através da adição de uma camada de cinza de carvão mineral mais cal sobre o terreno existente. São apresentadas as distribuições das pressões de contacto entre a laje e o solo, e as distribuições dos momentos fletores M_x e M_y , no interior da placa, para as cargas de serviço.

Na segunda análise, a placa é assentada diretamente sobre o terreno de areia compactada. São apresentadas as distribuições das pressões de contacto entre a laje e o solo, e as distribuições dos momentos fletores M_x e M_y , no interior da placa, para as cargas de serviço.

Na terceira análise, a placa é assentada diretamente sobre o terreno de areia de média compactidade. São apresentadas as distribuições das pressões de contacto entre a laje e o solo, e as distribuições dos momentos fletores M_x e M_y , no interior da placa, para as cargas de serviço.

Como última análise, é apresentado um gráfico com a curva carga total *versus* afundamento do ponto 288, cuja posição está indicada na FIGURA 6.3.

6.3.1 – Laje assente sobre solo estabilizado com cinza de carvão mineral mais cal

O coeficiente de reação vertical do solo k foi obtido através de DIAS (2003), e as propriedades usadas nesta análise estão apresentadas na TABELA 6.2.

Propriedades geométricas	Propriedades dos materiais			Carregamento
	Concreto	Aço	Solo	
Larg = 450 cm	$E_{cm} = 3355 \text{ kN/cm}^2$	$E_{s1} = 21000 \text{ kN/cm}^2$	$k = 0,149 \text{ kN/cm}^3$	$g = 6,25 \times 10^{-4} \text{ kN/cm}^2$ (peso próprio)
Comp = 1287,5 cm		$E_{s2} = 0,00$		$P = 146 \text{ kN}$ (por roda - 6 rodas)
Espessura = 25 cm	$f_{cm} = 3,80 \text{ kN/cm}^2$	$f_{ym} = 54,48 \text{ kN/cm}^2$		$q = 50 \times 10^{-4} \text{ kN/cm}^2$ (sobrecarga)
	$f_{ctm} = 0,29 \text{ kN/cm}^2$			

TABELA 6.2 – Propriedades usadas no item 6.3.1

Na FIGURA 6.4, estão apresentadas as pressões de contacto entre a laje e o solo, e nas FIGURAS 6.5 e 6.6 é apresentada a distribuição dos momentos fletores M_x e M_y , no interior da placa, respectivamente.

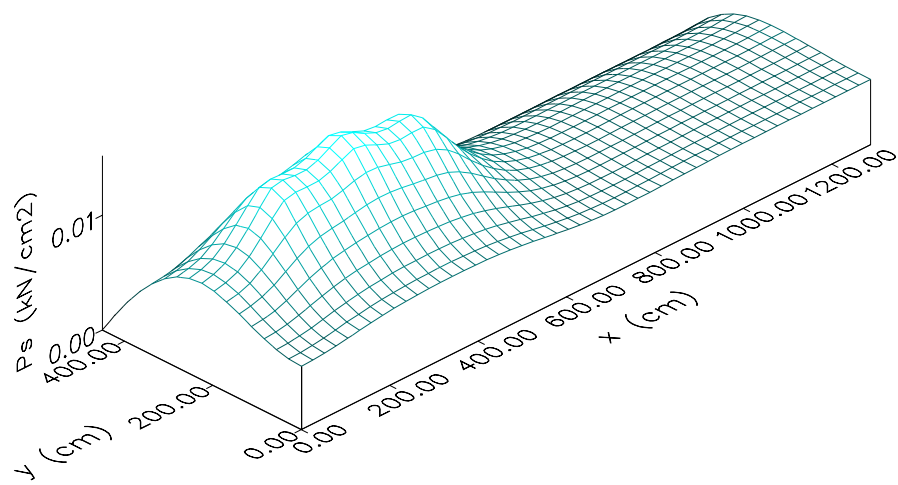
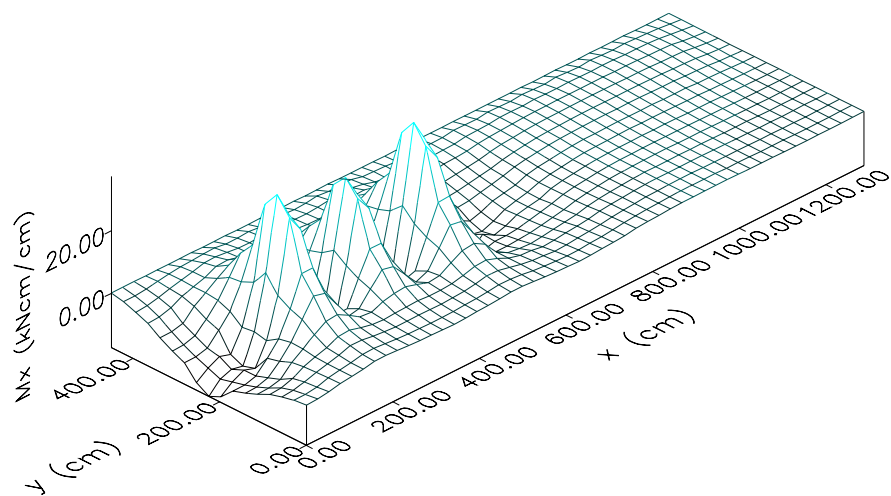


FIGURA 6.4 – Pressão de contacto solo-laje: item 6.3.1

FIGURA 6.5 – Momentos fletores M_x : item 6.3.1

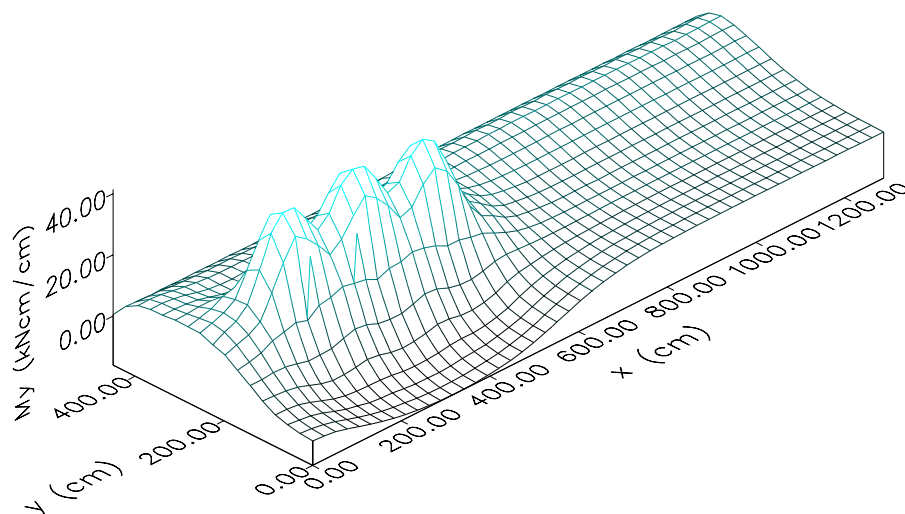


FIGURA 6.6 – Momentos fletores M_y : item 6.3.1

É importante salientar que nesta análise da laje sob carga de serviço não houve plastificação do solo em nenhum ponto, também não houve escoamento da armadura da laje, porém há fissuração do concreto nos pontos próximos às cargas concentradas.

6.3.2 – Laje assente sobre areia compactada

Nesta análise, a placa é assentada diretamente sobre o terreno de areia compactada, sendo que as propriedades dos materiais usadas nesta análise estão apresentadas na TABELA 6.3.

Propriedades geométricas	Propriedades dos materiais			Carregamento
	Concreto	Aço	Solo	
Larg = 450 cm	$E_{cm} = 3355 \text{ kN/cm}^2$	$E_{s1} = 21000 \text{ kN/cm}^2$	$k = 0,046 \text{ kN/cm}^3$	$g = 6,25 \times 10^{-4} \text{ kN/cm}^2$ (peso próprio)
Comp = 1287,5 cm		$E_{s2} = 0,00$		$P = 146 \text{ kN}$ (por roda - 6 rodas)
Espessura = 25 cm	$f_{cm} = 3,80 \text{ kN/cm}^2$ $f_{ctm} = 0,29 \text{ kN/cm}^2$	$f_{ym} = 54,48 \text{ kN/cm}^2$		$q = 50 \times 10^{-4} \text{ kN/cm}^2$ (sobrecarga)

TABELA 6.3 – Propriedades usadas no item 6.3.2

Na FIGURA 6.7, estão apresentadas as pressões de contacto entre a laje e o solo, e nas FIGURAS 6.8 e 6.9 é apresentada a distribuição dos momentos fletores M_x e M_y , no interior da placa, respectivamente.

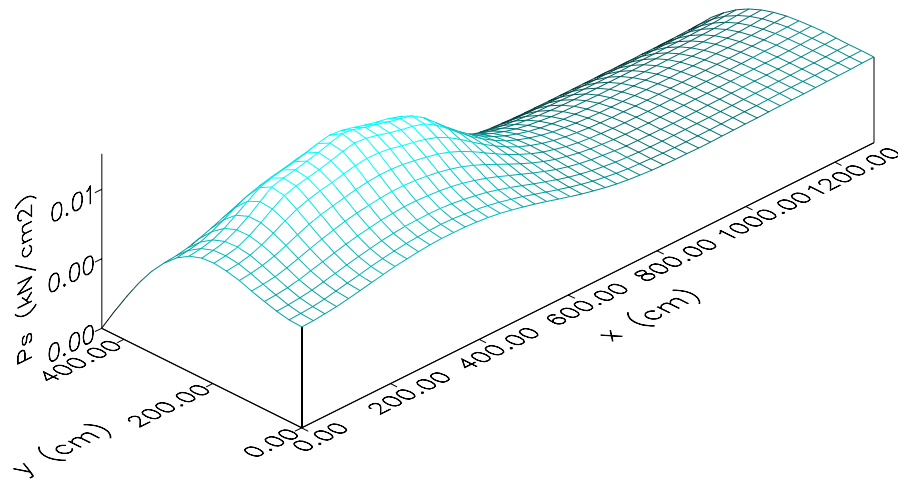


FIGURA 6.7 – Pressão de contacto solo-laje: item 6.3.2

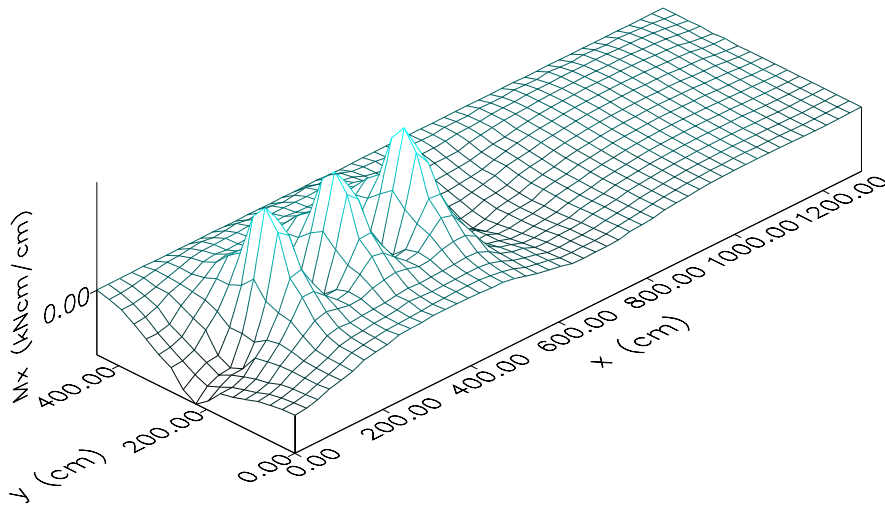


FIGURA 6.8 – Momentos fletores M_x : item 6.3.2

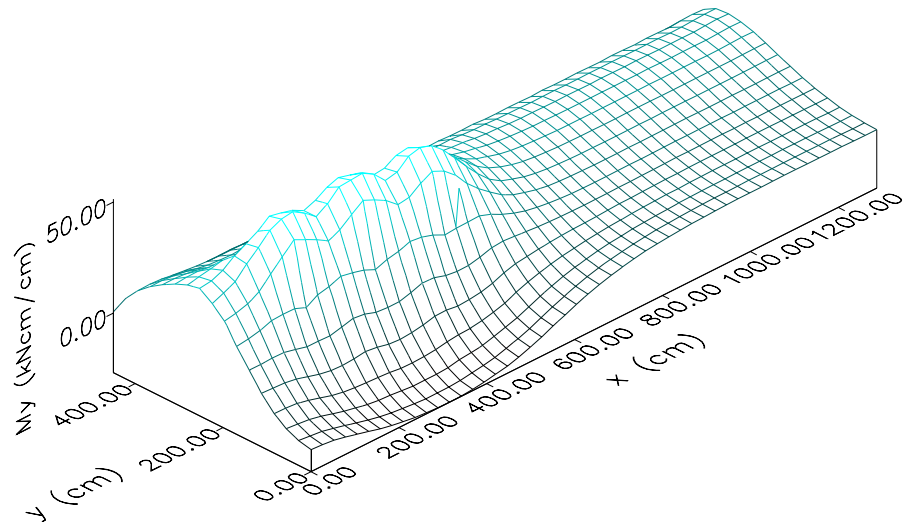


FIGURA 6.9 - Momentos fletores M_y : item 6.3.2

Observe-se que nesta análise da laje sob carga de serviço não houve plastificação do solo em nenhum ponto, também não houve escoamento da armadura da laje, porém há fissuração do concreto em vários pontos, como em toda volta das cargas concentradas, nos pontos próximos ao centro da laje e alguns pontos perto do bordo livre.

6.3.3 – Laje assente sobre terreno de areia de média compactidade

Como última análise, a placa está assentada sobre um solo de areia de média compactidade, sendo que as propriedades dos materiais usadas na análise estão apresentadas na TABELA 6.4.

Propriedades geométricas	Propriedades dos materiais			Carregamento
	Concreto	Aço	Solo	
Larg = 450 cm	$E_{cm} = 3355 \text{ kN/cm}^2$	$E_{s1} = 21000 \text{ kN/cm}^2$	$k = 0,0175 \text{ kN/cm}^3$	$g = 6,25 \times 10^{-4} \text{ kN/cm}^2$ (peso próprio)
Comp = 1287,5 cm		$E_{s2} = 0,00$		$P = 146 \text{ kN}$ (por roda - 6 rodas)
Espessura = 25 cm	$f_{cm} = 3,80 \text{ kN/cm}^2$ $f_{ctm} = 0,29 \text{ kN/cm}^2$	$f_{ym} = 54,48 \text{ kN/cm}^2$		$q = 50 \times 10^{-4} \text{ kN/cm}^2$ (sobrecarga)

TABELA 6.4 – Propriedades usadas no item 6.3.3

Na FIGURA 6.10, estão apresentadas as pressões de contacto entre a laje e o solo, e nas FIGURAS 6.11 e 6.12 é apresentada a distribuição dos momentos fletores M_x e M_y , no interior da placa, respectivamente.

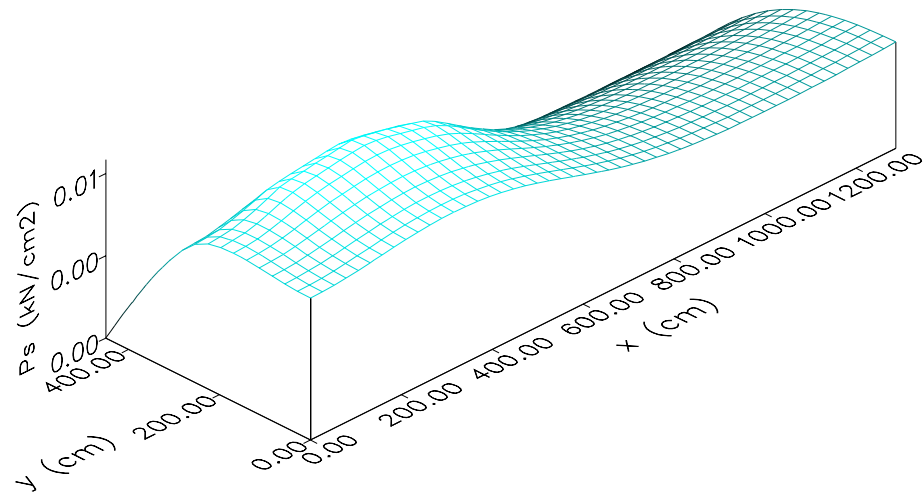


FIGURA 6.10 – Pressão de contacto solo-laje: item 6.3.3

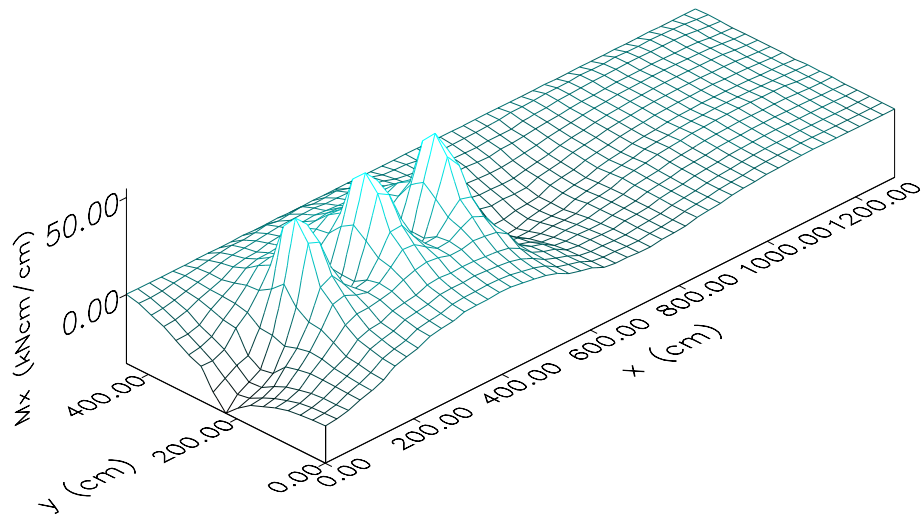


FIGURA 6.11 - Momentos fletores M_x : item 6.3.3

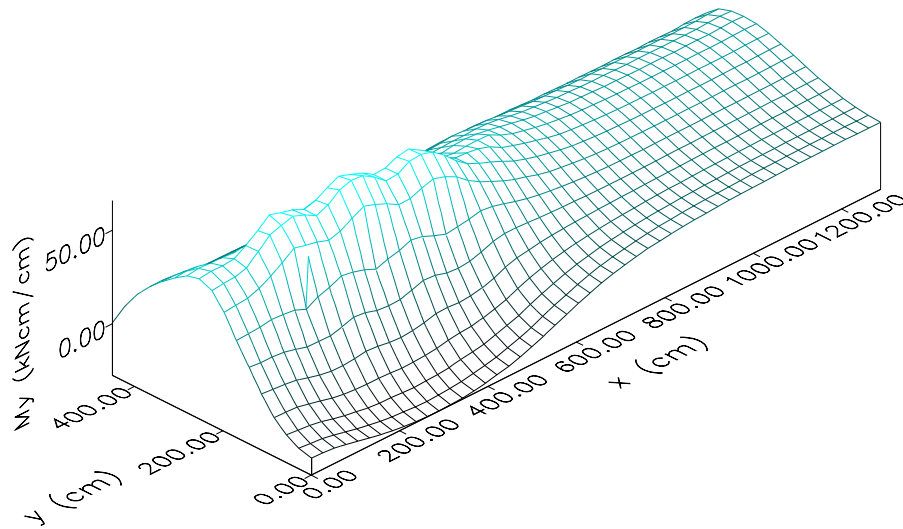


FIGURA 6.12 - Momentos fletores M_y : item 6.3.3

Note-se que nesta análise da laje sob carga de serviço não houve plastificação do solo em nenhum ponto, também não houve escoamento da armadura da laje, porém há um estado de fissuração do concreto bem avançado. Os pontos não fissurados estão localizados próximos ao eixo x longitudinalmente, e ao bordo superior, no sentido longitudinal da viga de apoio.

6.3.4 – Comparação entre as respostas do sistema laje+solo para os três tipos de solo

Neste item, a análise é feita incrementando-se a carga da laje de 1/10 da carga de serviço sucessivamente, até ser atingida a carga de ruptura. Poderá haver esmagamento do concreto, deformação plástica excessiva da armadura, ou plastificação do solo, no qual o sistema laje de concreto armado sobre base elástica não é mais capaz de fornecer esforços resistentes que anulem as forças externas.

No caso de deformação plástica excessiva da armadura, o modelo interromperá a análise ao detectar tal deformação. Já no caso de fissuração do concreto ou plastificação do solo, o modelo não conseguirá atingir a convergência.

Na FIGURA 6.13 são apresentadas as curvas carga-deslocamento do ponto 288 (posicionamento apresentado na FIGURA 6.3), por ser este, o que apresentou as maiores deflexões.

Para cada tipo de solo é determinada a carga total aplicada sobre a laje, em kN, que causará uma das rupturas descritas anteriormente.

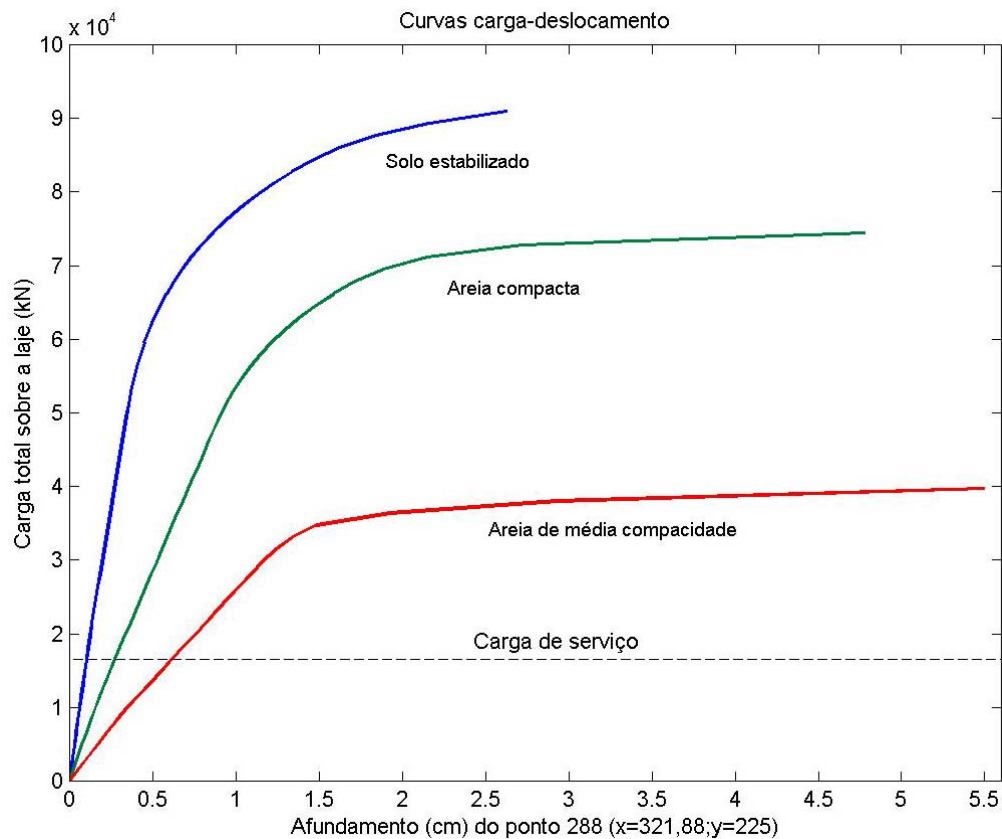


FIGURA 6.13 – Curvas carga-deslocamento do ponto 288: item 6.3

Nas três análises apresentadas na FIGURA 6.13, a ruptura ocorreu por deformação plástica excessiva da armadura positiva na direção y , em pontos próximos às cargas concentradas.

Encontrou-se pontos do solo plastificados nas três análises, restando apenas os pontos próximos ao canto superior direito e os pontos próximos da viga de apoio no seu estado íntegro. A armadura situada entre as cargas concentradas encontrava-se em um estado de

escoamento nas três análises, porém na segunda análise alguns pontos acima das cargas também encontravam-se em escoamento, já na terceira análise, pontos acima e abaixo das cargas concentradas encontravam-se em escoamento. Na primeira análise, o concreto encontrava-se quase que totalmente fissurado, restando os pontos próximos do bordo livre no seu estado íntegro, já na segunda análise os pontos em estado íntegro apresentavam-se em menor número, e por último, na terceira análise, o concreto encontrava-se totalmente fissurado.

Para uma melhor comparação entre os resultados obtidos da análise no item 6.3, é apresentada a TABELA 6.5, na qual são apresentados os máximos valores obtidos para as pressões de contacto, momentos fletores, e cargas de ruptura.

Tipo de solo	Pressão de contacto máxima em serviço (kN / cm ²)	Momento fletor máximo em serviço M _x (kNcm / cm)		Momento fletor máximo em serviço M _y (kNcm / cm)		Carga total de ruptura (kN)
		Positivo	Negativo	Positivo	Negativo	
		Solo estabilizado	0,0153	37,42	17,32	
Areia compacta	0,0126	45,12	26,90	54,24	26,80	74429,72
Areia de média compacidade	0,0109	55,97	35,39	71,10	27,60	39695,85

TABELA 6.5 – Comparação dos resultados obtidos no item 6.3

Nota-se através da comparação dos resultados mostrados na TABELA 6.5, que a pressão máxima de contacto entre a laje e o solo aumenta conforme aumenta a rigidez do solo, mesmo diminuindo os deslocamentos. Isto pode ser explicado pelo fato de o solo com maior rigidez apresentar um coeficiente de reação vertical maior.

Porém, a solicitação da laje pelos momentos fletores aumenta conforme diminui a rigidez do solo. Sendo que no conjunto final, quanto mais rígido for o solo maior será a capacidade de carga da laje.

6.4 – ANÁLISE DA LAJE CONSIDERANDO DIFERENTES ESPESSURAS

Nesta seção são apresentadas três análises da laje sobre o solo estabilizado com cinza de carvão mineral mais cal, para avaliar o efeito da espessura da laje no comportamento do conjunto laje + solo.

Na primeira análise, a espessura da laje é tomada como sendo igual a 15cm, na segunda, igual a 25cm e na terceira igual a 35cm. São apresentados os gráficos das pressões de contacto entre a laje e o solo, e a distribuição dos momentos fletores M_x e M_y no interior da placa, para cargas de serviço.

Por fim, são apresentadas as curvas carga versus deflexões, das quais são obtidas as cargas de ruptura para cada espessura da laje.

6.4.1 – Laje com espessura de 15cm

Neste item, a espessura da laje é tomada como sendo igual a 15cm. Em virtude desta modificação, as armaduras foram redimensionadas e estão apresentadas, juntamente com as outras propriedades, na TABELA 6.6.

Propriedades geométricas	Propriedades dos materiais			Carregamento
	Concreto	Aço	Solo	
Larg = 450 cm	$E_{cm} = 3355 \text{ kN/cm}^2$	$E_{s1} = 21000 \text{ kN/cm}^2$	$k = 0,149 \text{ kN/cm}^3$	$g = 6,25 \times 10^{-4} \text{ kN/cm}^2$ (peso próprio)
Comp = 1287,5 cm		$E_{s2} = 0,00$		
	$\nu = 0,20$	Armaduras (cm^2/m)		$q = 50 \times 10^{-4} \text{ kN/cm}^2$ (sobrecarga)
Espessura = 15 cm	$f_{cm} = 3,80 \text{ kN/cm}^2$	$A_{sx}^+ = 10,05$ $A_{sx}^- = 5,95$		
	$f_{ctm} = 0,29 \text{ kN/cm}^2$	$A_{sy}^+ = 8,93$ $A_{sy}^- = 2,67$		

TABELA 6.6 – Propriedades usadas no item 6.4.1

Na FIGURA 6.14, estão apresentadas as pressões de contacto entre a laje e o solo, e nas FIGURAS 6.15 e 6.16 é apresentada a distribuição dos momentos fletores M_x e M_y no interior da placa, respectivamente.

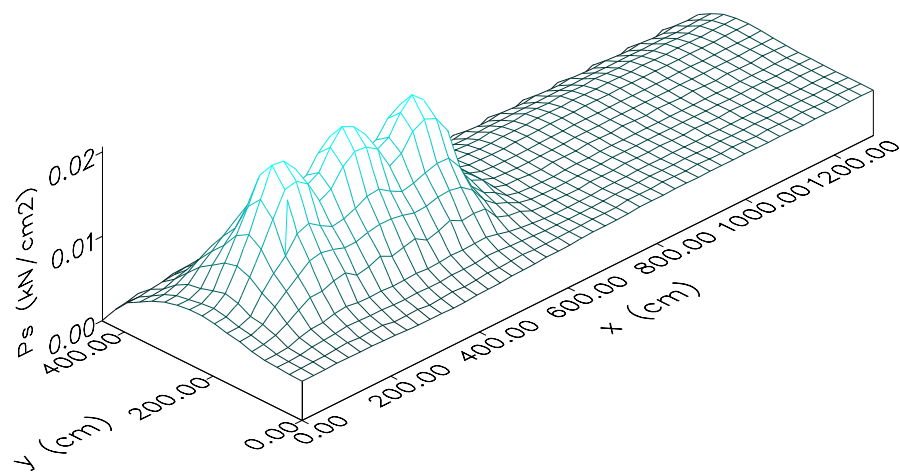
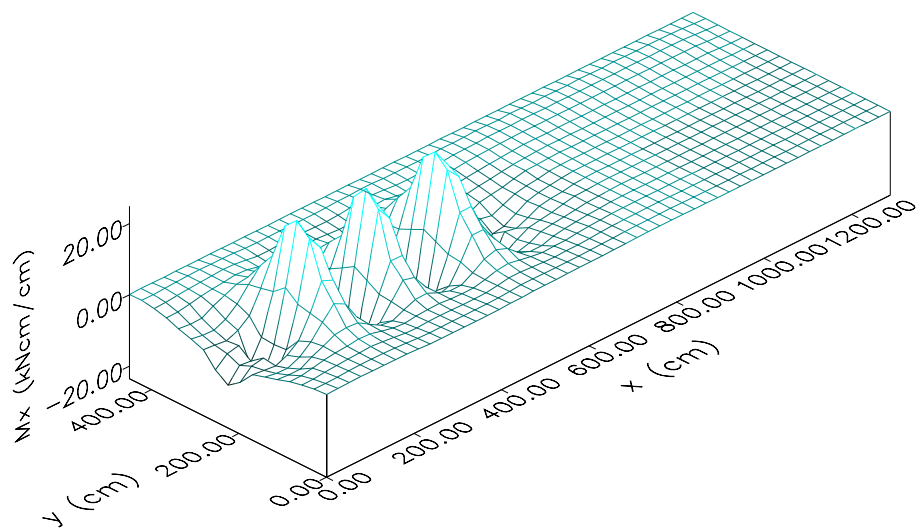


FIGURA 6.14 – Pressão de contacto solo-laje: item 6.4.1

FIGURA 6.15 – Momentos fletores M_x : item 6.4.1

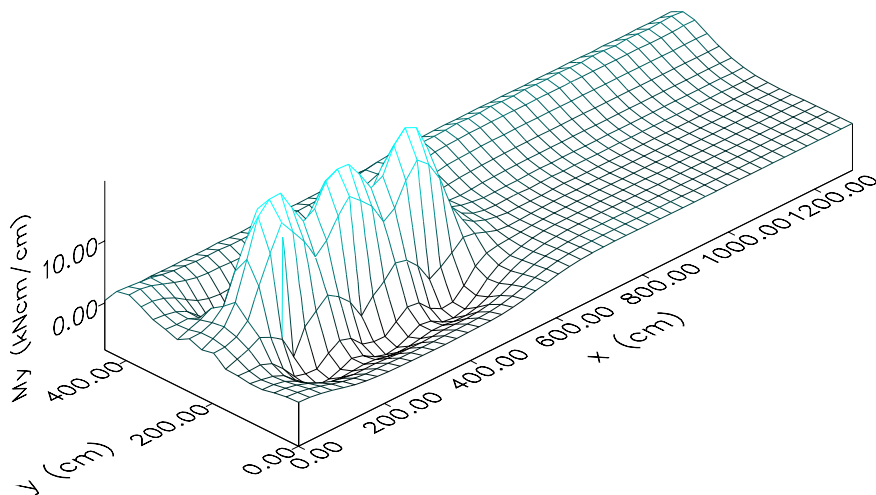


FIGURA 6.16 – Momentos fletores M_y : item 6.4.1

Verifica-se que nesta análise da laje sob carga de serviço não houve plastificação do solo em nenhum ponto, também não houve escoamento da armadura da laje, porém há um estado de fissuração do concreto nos pontos próximos às cargas concentradas.

6.4.2 – Laje com espessura de 25cm

Neste item, a espessura da laje é considerada como sendo igual a 25cm.

As armaduras usadas nesta análise estão apresentadas na FIGURA 6.3, e as demais propriedades, estão apresentadas na TABELA 6.1.

Na FIGURA 6.17, estão apresentadas as pressões de contacto entre a laje e o solo, e nas FIGURAS 6.18 e 6.19 é apresentada a distribuição dos momentos fletores M_x e M_y no interior da placa, respectivamente.

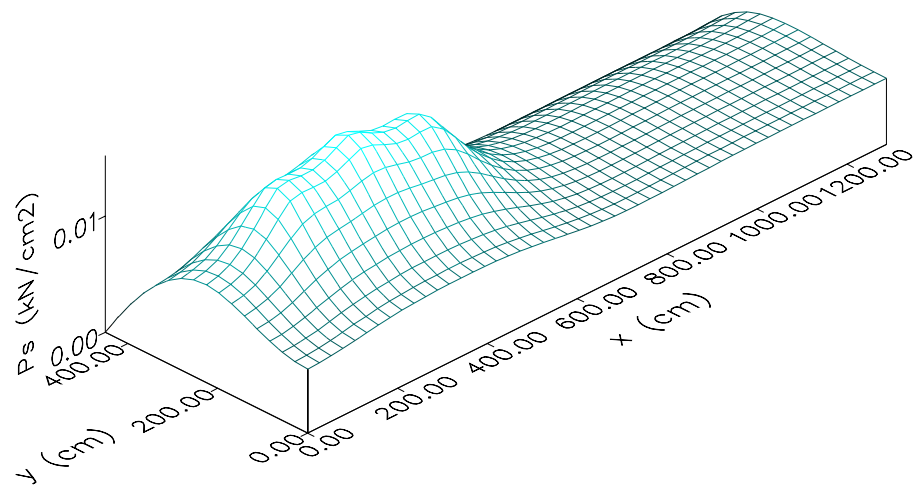
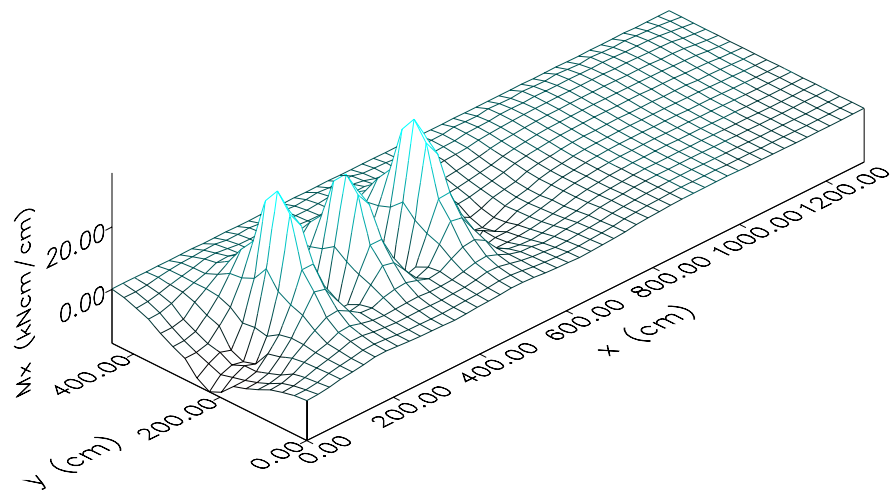


FIGURA 6.17 – Pressão de contato solo-laje: item 6.4.2

FIGURA 6.18 – Momentos fletores M_x : item 6.4.2

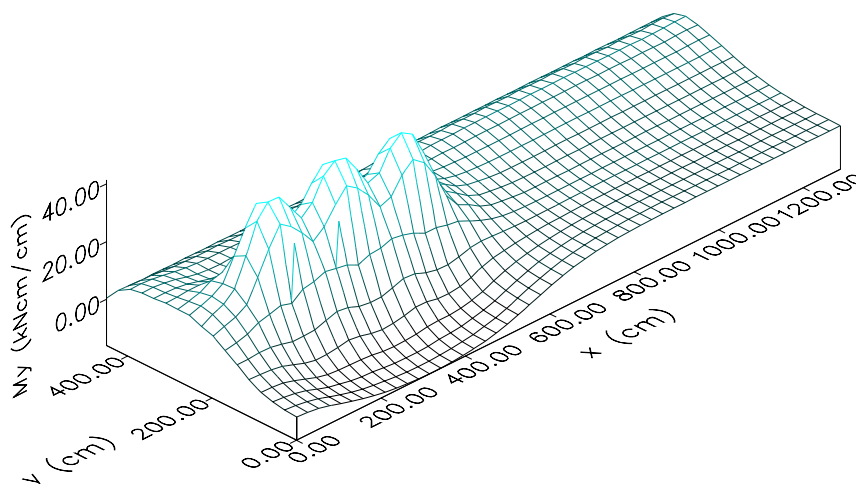


FIGURA 6.19 – Momentos fletores M_y : item 6.4.2

Deve-se notar que nesta análise da laje sob carga de serviço não houve plastificação do solo em nenhum ponto, também não houve escoamento da armadura da laje, porém há fissuração do concreto nos pontos próximos às cargas concentradas.

6.4.3 – Laje com espessura de 35cm

Neste item, a espessura da laje é tomada como sendo igual a 35cm. Em virtude desta modificação, as armaduras foram redimensionadas e estão apresentadas, juntamente com as outras propriedades, na TABELA 6.7.

Propriedades geométricas	Propriedades dos materiais			Carregamento	
	Concreto	Aço			Solo
Larg = 450 cm	$E_{cm} = 3355 \text{ kN/cm}^2$	$E_{s1} = 21000 \text{ kN/cm}^2$		$k = 0,149 \text{ kN/cm}^3$	$g = 6,25 \times 10^{-4} \text{ kN/cm}^2$ (peso próprio)
Comp = 1287,5 cm		$E_{s2} = 0,00$			
Espessura = 35 cm	$\nu = 0,20$	$f_{ym} = 54,48 \text{ kN/cm}^2$			$P = 146 \text{ kN}$ (por roda – 6 rodas)
	$f_{cm} = 3,80 \text{ kN/cm}^2$	$A_{sx}^+ = 5,95$	$A_{sx}^- = 5,95$		$q = 50 \times 10^{-4} \text{ kN/cm}^2$ (sobrecarga)
	$f_{ctm} = 0,29 \text{ kN/cm}^2$	$A_{sy}^+ = 7,35$	$A_{sy}^- = 5,95$		

TABELA 6.7 – Propriedades usadas no item 6.4.3

Na FIGURA 6.20, estão apresentadas as pressões de contacto entre a laje e o solo, e nas FIGURAS 6.21 e 6.22 é apresentada a distribuição dos momentos fletores M_x e M_y , no interior da placa, respectivamente.

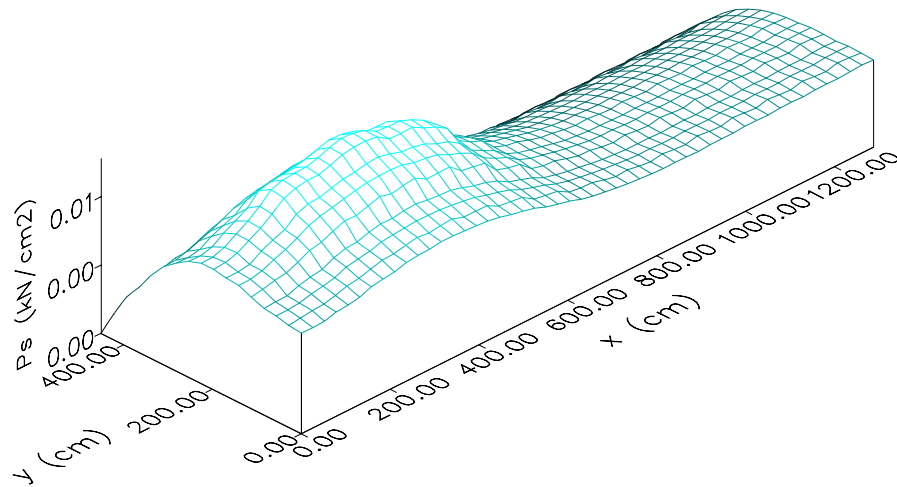


FIGURA 6.20 – Pressão de contacto solo-laje: item 6.4.3

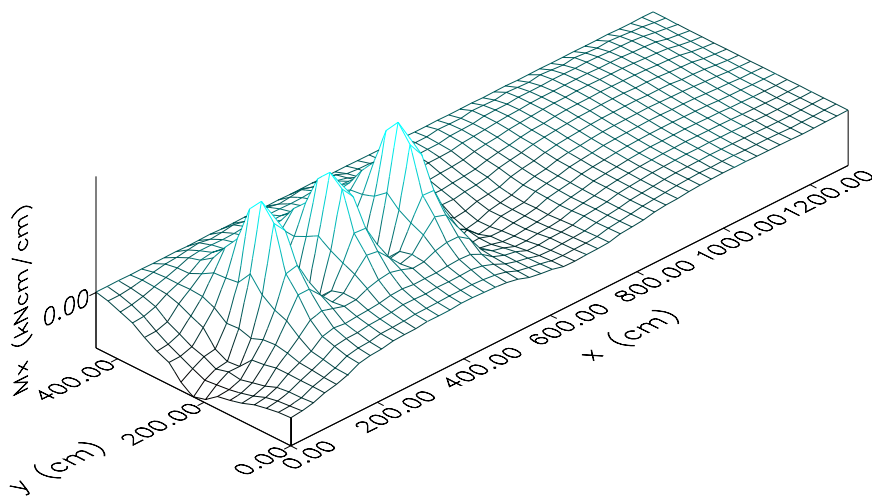


FIGURA 6.21 – Momentos fletores M_x : item 6.4.3

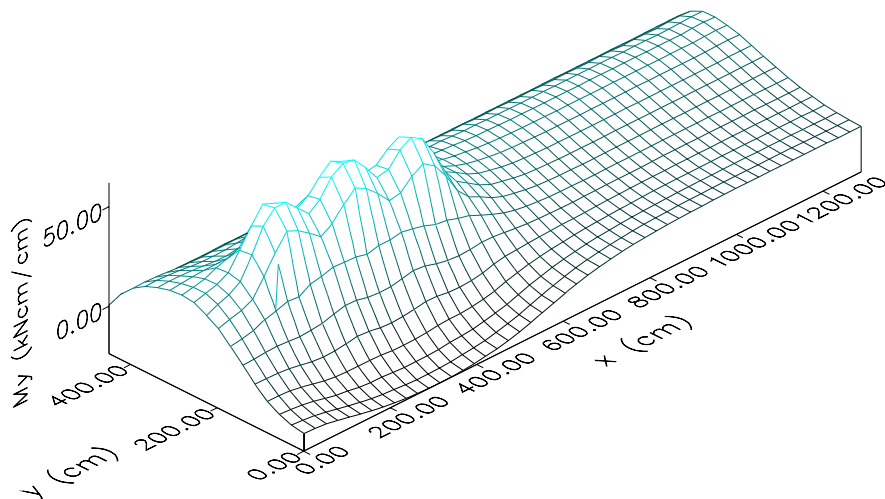


FIGURA 6.22 – Momentos fletores M_y : item 6.4.3

É necessário ressaltar que nesta análise da laje sob carga de serviço não houve plastificação do solo em nenhum ponto, também não houve escoamento da armadura da laje, porém há fissuração do concreto nos pontos próximos às cargas concentradas.

6.4.4 – Comparação entre as respostas do sistema laje+solo para cada espessura da laje

Neste item, é feita uma análise não-linear do sistema laje+solo incrementando-se o carregamento em 10% da carga de serviço até ser alcançada a carga de colapso do pavimento. Isto é feito para cada uma das espessuras de laje consideradas.

Na FIGURA 6.23 são apresentadas as curvas carga-deslocamento do ponto 288 (posicionamento apresentado na FIGURA 6.3), por ser este, o que apresentou os maiores afundamentos.

Para cada espessura da placa é determinada a carga total aplicada sobre a mesma, em kN, que causará a ruptura do sistema laje + solo.

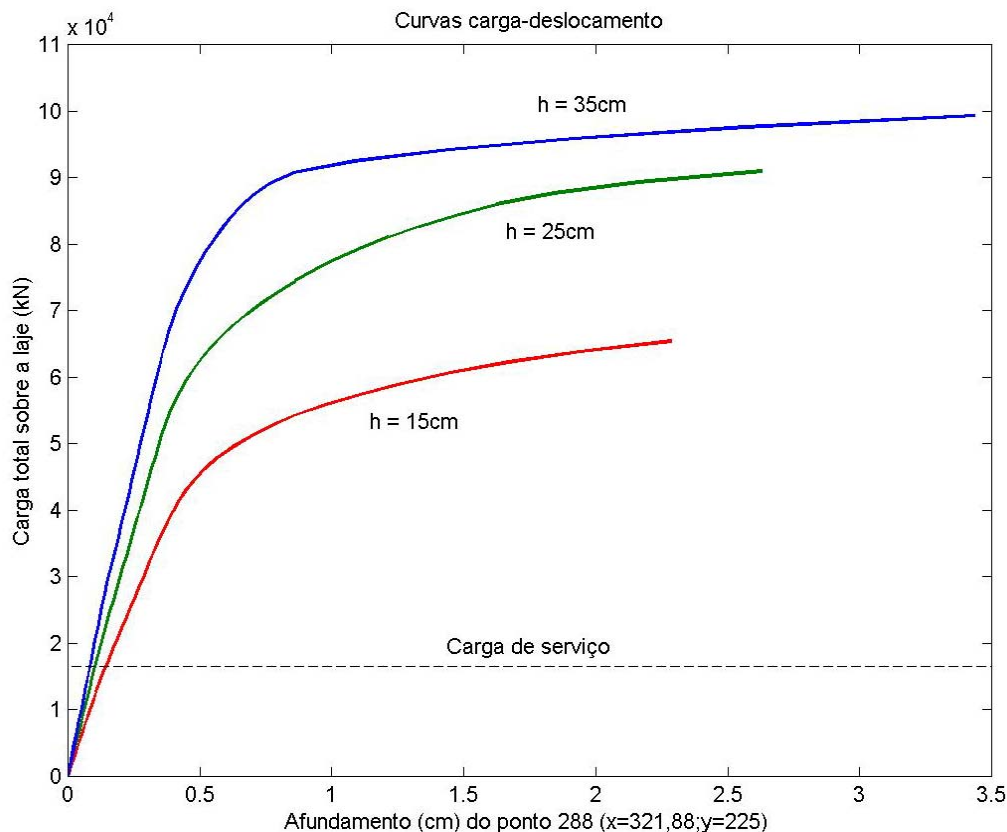


FIGURA 6.23 – Curvas carga-deslocamento do ponto 288: item 6.4

Nas três análises apresentadas na FIGURA 6.23, a ruptura ocorreu por deformação plástica excessiva da armadura positiva na direção y , em pontos próximos às cargas concentradas.

Encontrou-se o solo praticamente plastificado nas duas últimas análises ($h=25\text{cm}$ e $h=35\text{cm}$), restando apenas os pontos próximos ao canto superior direito e os pontos próximos da viga de apoio no seu estado íntegro. Já na primeira análise ($h=15\text{cm}$), o solo plastificou em toda região próxima as cargas concentradas.

A armadura situada entre as cargas concentradas encontrava-se em um estado de escoamento nas duas últimas análises ($h=25\text{cm}$ e $h=35\text{cm}$), porém na primeira análise ($h=15\text{cm}$) somente os pontos próximos ao ponto 288 (localização FIGURA 6.3) encontravam-se em escoamento.

Quanto à fissuração, o concreto encontrava-se quase que totalmente fissurado nas três

análises, restando os pontos próximos do meio do bordo livre no seu estado íntegro.

Para uma melhor comparação entre os resultados obtidos da análise no item 6.4, é apresentada a TABELA 6.8, na qual são apresentados os máximos valores obtidos para as pressões de contacto, momentos fletores, e cargas de ruptura.

Espessura da placa sobre o solo estabilizado (cm)	Pressão de contacto máxima em serviço (kN / cm ²)	Momento fletor máximo em serviço M _x (kNcm / cm)		Momento fletor máximo em serviço M _y (kNcm / cm)		Carga total de ruptura (kN)
		Positivo	Negativo	Positivo	Negativo	
		15	0,0206	24,93	23,54	
25	0,0153	37,42	17,32	44,78	16,03	90969,66
35	0,0129	43,88	20,93	67,27	23,86	99292,00

TABELA 6.8 – Comparação entre os resultados obtidos no item 6.4

Observa-se nesta análise, que a pressão de contacto máxima entre a laje e o solo aumenta quando a espessura da laje diminui, em decorrência do aumento no afundamento.

Já as solicitações pelos momentos fletores, aumentam conforme aumenta a espessura da laje. Sendo observado, por fim, a grande importância que a espessura da laje tem no comportamento do conjunto solo+laje, no que diz respeito às cargas de ruptura.

6.5 - ANÁLISE DA LAJE PARA DIFERENTES VALORES DA RESISTÊNCIA CARACTERÍSTICA À COMPRESSÃO DO CONCRETO (f_{ck})

Nesta seção são apresentadas três análises da laje sobre o solo estabilizado com cinza de carvão mineral mais cal, para avaliar o efeito da resistência à compressão do concreto no comportamento do conjunto laje + solo.

Na primeira análise, é considerada uma resistência característica à compressão do concreto igual a 20MPa, na segunda, um f_{ck} de 30MPa, e por último na terceira análise, um f_{ck} de 40MPa. São apresentados os gráficos das pressões de contacto entre a laje e o solo, e a

distribuição dos momentos fletores M_x e M_y no interior da placa, para cargas de serviço.

Por fim, são apresentadas as curvas carga *versus* deflexões para cada valor de f_{ck} considerado, das quais são obtidas as cargas de ruptura.

6.5.1 – f_{ck} de 20MPa

Para esta análise, é considerada uma resistência característica à compressão do concreto f_{ck} de 20MPa. Em virtude desta consideração, são calculadas as novas propriedades mecânicas do concreto, de acordo com o Código Modelo CEB-FIP 1990 (CEB, 1993). Também são redimensionadas as armaduras. As propriedades usadas para esta análise, estão apresentadas na TABELA 6.9.

Propriedades geométricas	Propriedades dos materiais			Carregamento	
	Concreto	Aço			Solo
Larg = 450 cm	$E_{cm} = 3030 \text{ kN/cm}^2$	$E_{s1} = 21000 \text{ kN/cm}^2$		$k = 0,149 \text{ kN/cm}^3$	$g = 6,25 \times 10^{-4} \text{ kN/cm}^2$ (peso próprio)
Comp = 1287,5 cm		$E_{s2} = 0,00$			
	$\nu = 0,20$	$f_{ym} = 54,48 \text{ kN/cm}^2$			$q = 50 \times 10^{-4} \text{ kN/cm}^2$ (sobrecarga)
Espessura = 25 cm	$f_{cm} = 2,80 \text{ kN/cm}^2$	$A_{sx}^+ = 6,25$	$A_{sx}^- = 4,17$		
	$f_{ctm} = 0,22 \text{ kN/cm}^2$	$A_{sy}^+ = 7,35$	$A_{sy}^- = 4,17$		

TABELA 6.9 – Propriedades usadas no item 6.5.1

Na FIGURA 6.24, estão apresentadas as pressões de contacto entre a laje e o solo, e nas FIGURAS 6.25 e 6.26 é apresentada a distribuição dos momentos fletores M_x e M_y no interior da placa, respectivamente.

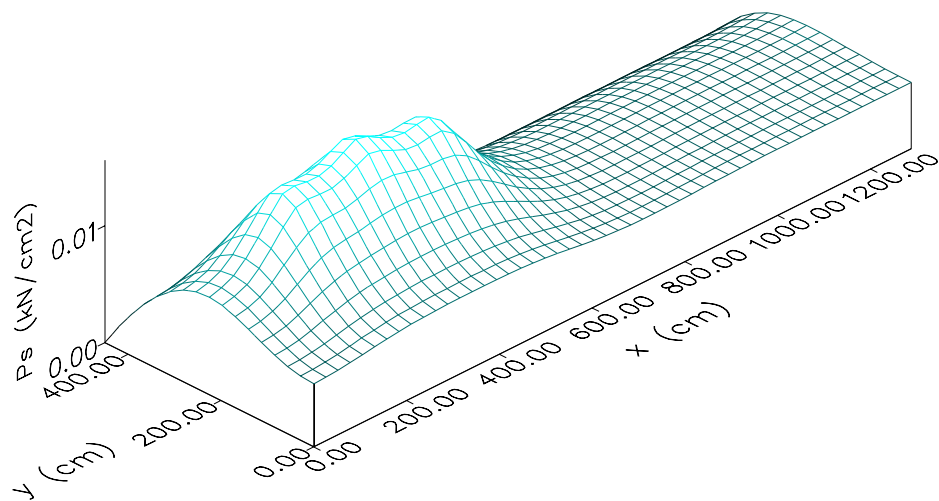
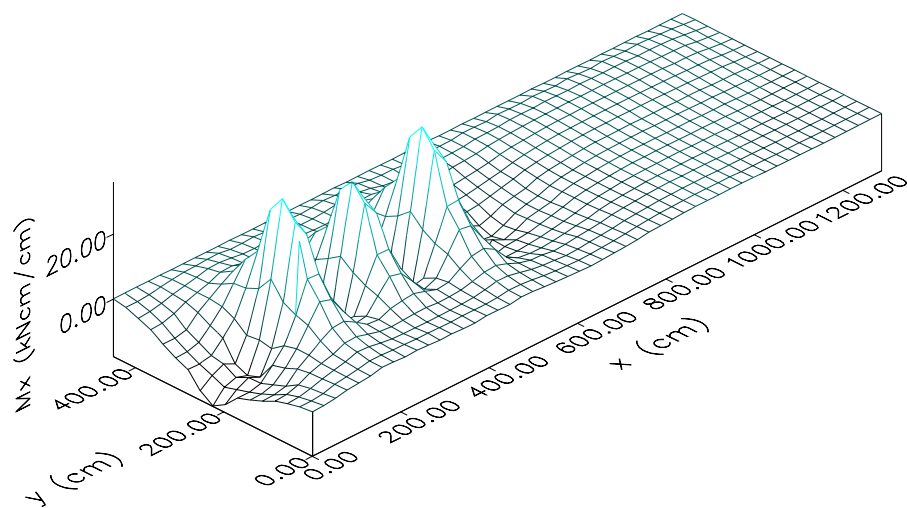


FIGURA 6.24 – Pressão de contacto solo-laje: item 6.5.1

FIGURA 6.25 – Momentos flectores M_x : item 6.5.1

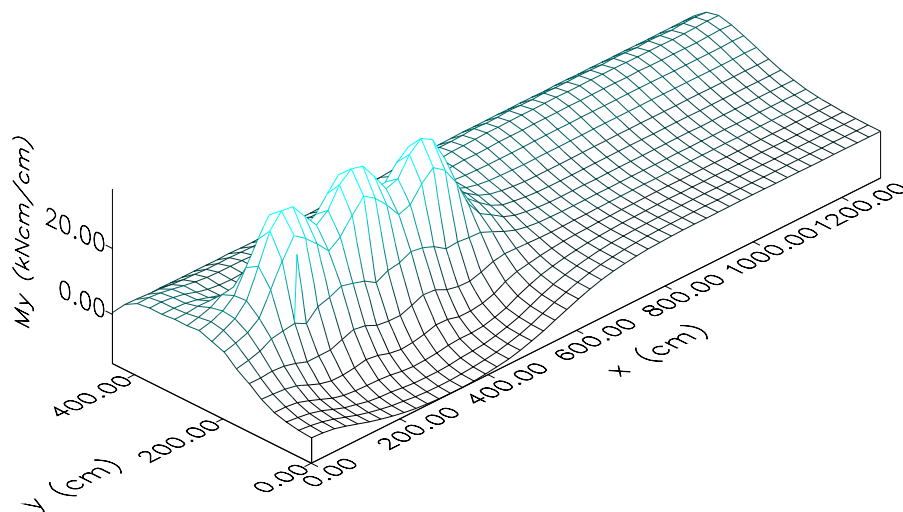


FIGURA 6.26 – Momentos fletores M_y : item 6.5.1

Observe-se que nesta análise da laje sob carga de serviço não houve plastificação do solo em nenhum ponto, também não houve escoamento da armadura da laje, porém há fissuração do concreto na região das cargas concentradas.

6.5.2 – f_{ck} de 30MPa

Neste item, a resistência característica à compressão do concreto é tomada como sendo igual a 30MPa.

As armaduras usadas nesta análise estão apresentadas na FIGURA 6.3, e as demais propriedades, estão apresentadas na TABELA 6.1.

Na FIGURA 6.27, estão apresentadas as pressões de contacto entre a laje e o solo, e nas FIGURAS 6.28 e 6.29 é apresentada a distribuição dos momentos fletores M_x e M_y , no interior da placa, respectivamente.

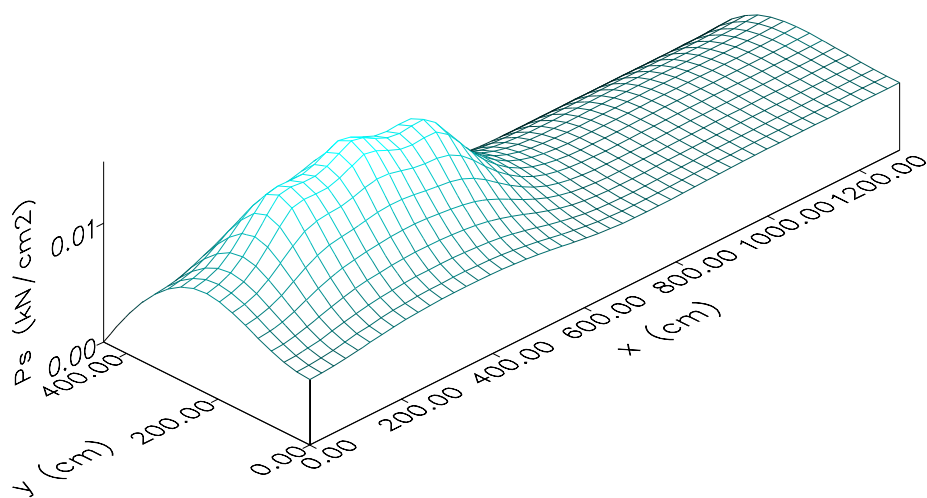
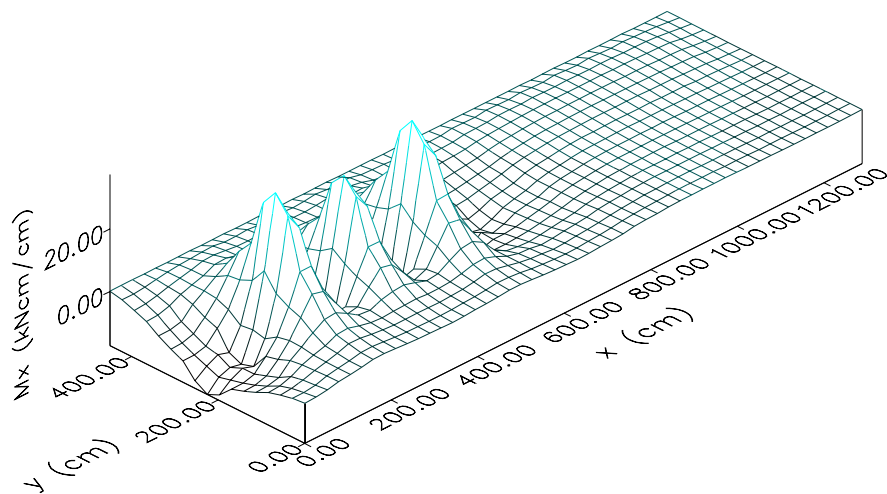


FIGURA 6.27 – Pressão de contacto solo-laje: item 6.5.2

FIGURA 6.28 – Momentos flectores M_x : item 6.5.2

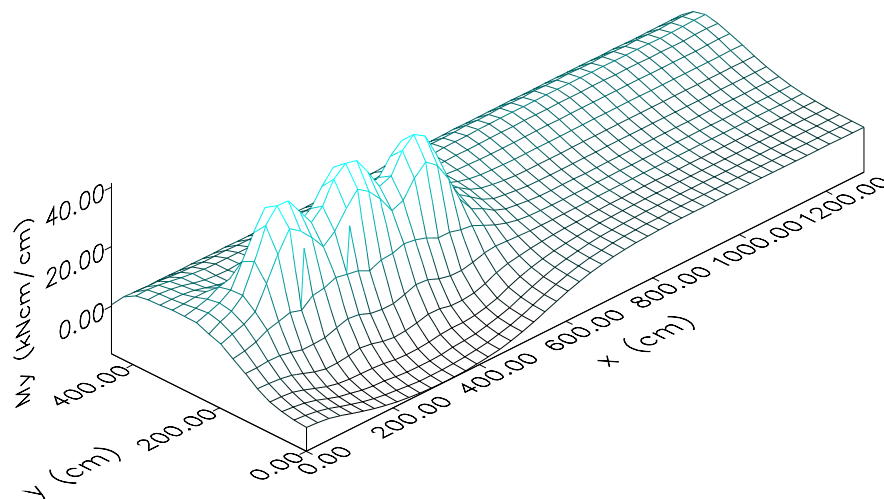


FIGURA 6.29 – Momentos fletores M_y : item 6.5.2

Note-se que nesta análise da laje sob carga de serviço não houve plastificação do solo em nenhum ponto, também não houve escoamento da armadura da laje, porém há fissuração do concreto nos pontos próximos às cargas concentradas.

6.5.3 – f_{ck} de 40MPa

Para esta análise, é considerada uma resistência característica à compressão do concreto f_{ck} de 40MPa. Em virtude desta consideração, são calculadas as novas propriedades mecânicas do concreto, de acordo com o Código Modelo CEB-FIP 1990 (CEB, 1993). Também são redimensionadas as armaduras. As propriedades usadas para esta análise, estão apresentadas na TABELA 6.10.

Propriedades geométricas	Propriedades dos materiais			Carregamento
	Concreto	Aço	Solo	
Larg = 450 cm	$E_{cm} = 3627 \text{ kN/cm}^2$	$E_{s1} = 21000 \text{ kN/cm}^2$		$g = 6,25 \times 10^{-4} \text{ kN/cm}^2$ (peso próprio)
Comp = 1287,5 cm		$E_{s2} = 0,00$		
	$\nu = 0,20$	$f_{ym} = 54,48 \text{ kN/cm}^2$		$k = 0,149 \text{ kN/cm}^3$ $P = 146 \text{ kN}$ (por roda - 6 rodas)
		Armaduras (cm^2/m)		
Espessura = 25 cm	$f_{cm} = 4,80 \text{ kN/cm}^2$	$A_{sx}^+ = 6,25$	$A_{sx}^- = 4,17$	$q = 50 \times 10^{-4} \text{ kN/cm}^2$ (sobrecarga)
	$f_{ctm} = 0,35 \text{ kN/cm}^2$	$A_{sy}^+ = 7,81$	$A_{sy}^- = 4,17$	

TABELA 6.10 – Propriedades usadas no item 6.5.3

Na FIGURA 6.30, estão apresentadas as pressões de contacto entre a laje e o solo, e nas FIGURAS 6.31 e 6.32 é apresentada a distribuição dos momentos fletores M_x e M_y no interior da placa, respectivamente.

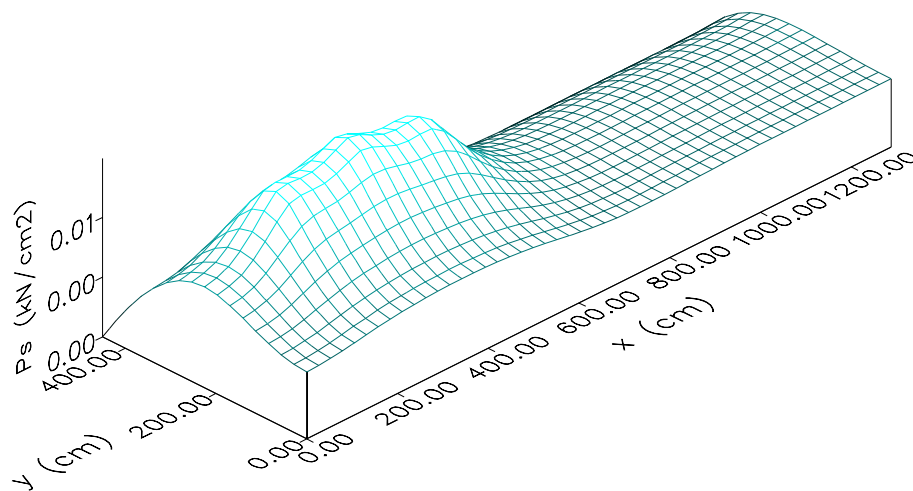
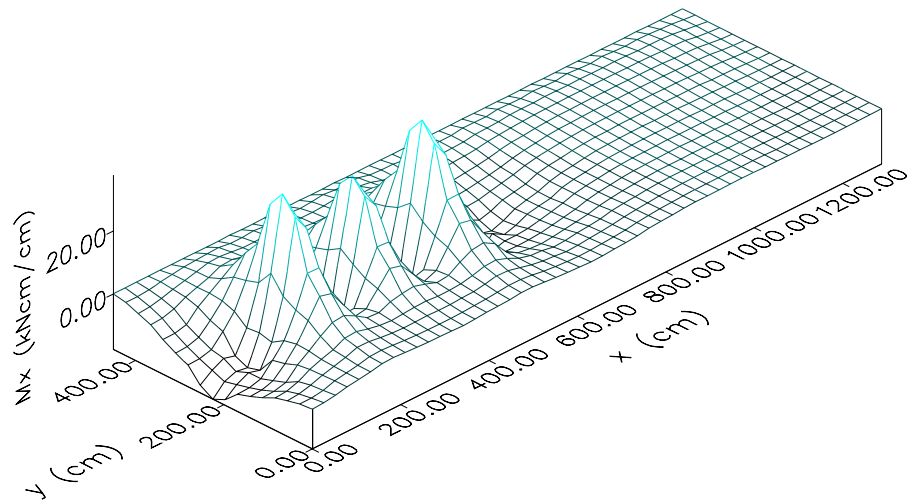
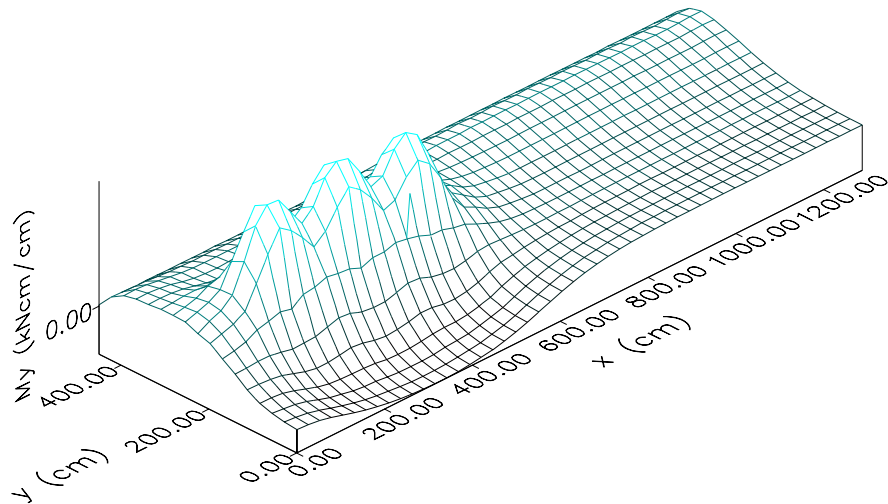


FIGURA 6.30 – Pressão de contacto solo-laje: item 6.5.3

FIGURA 6.31 – Momentos fletores M_x : item 6.5.3FIGURA 6.32 – Momentos fletores M_y : item 6.5.3

Deve-se atentar para o fato de que nesta análise da laje sob carga de serviço não houve plastificação do solo em nenhum ponto, também não houve escoamento da armadura da laje, porém há fissuração do concreto na região das cargas concentradas.

6.5.4 - Comparação entre as respostas do sistema laje+solo para cada valor de f_{ck}

Neste item, foi realizada uma análise não-linear incremental até ser atingida a carga de ruptura do sistema laje+solo, obtendo-se a curva carga *versus* deslocamento completa, para cada valor de f_{ck} considerado.

Na FIGURA 6.33 são apresentadas as curvas carga-deslocamento do ponto 288 (posicionamento apresentado na FIGURA 6.3), por ser este, o que apresentou as maiores deflexões.

Para cada f_{ck} do concreto que compõe a laje, é determinada a carga total aplicada sobre a mesma, em kN, que causará a ruptura do sistema laje + solo.

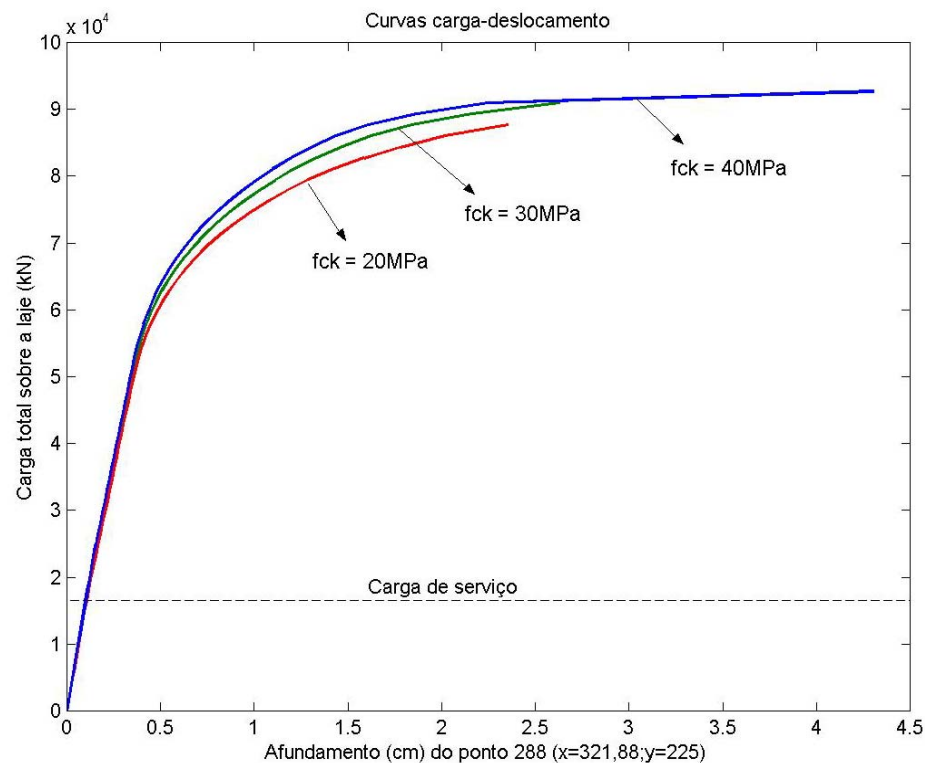


FIGURA 6.33 – Curvas carga-deslocamento do ponto 288: item 6.5

Nas três análises apresentadas na FIGURA 6.33, a ruptura ocorreu por deformação plástica excessiva da armadura positiva na direção y , em pontos próximos às cargas concentradas.

Encontrou-se o solo praticamente plastificado nas três análises, restando apenas os pontos próximos ao canto superior direito e os pontos próximos da viga de apoio no seu estado íntegro, para a análise 1 e 2 ($f_{ck}=20\text{MPa}$ e $f_{ck}=30\text{MPa}$). Já na análise de número 3 ($f_{ck}=40\text{MPa}$), encontrou-se o solo no seu estado íntegro somente nos pontos próximos ao canto superior direito.

A armadura situada entre as cargas concentradas encontrava-se em um estado de escoamento nas três análises.

Quanto à fissuração, o concreto encontrava-se quase que totalmente fissurado nas três análises, restando os pontos próximos do meio do bordo livre no seu estado íntegro.

Para uma melhor comparação entre os resultados obtidos da análise no item 6.5, é apresentada a TABELA 6.11, na qual são apresentados os máximos valores obtidos para as pressões de contacto, momentos fletores, e cargas de ruptura.

f_{ck} (MPa)	Pressão de contacto máxima em serviço (kN / cm ²)	Momento fletor máximo em serviço M_x (kNcm / cm)		Momento fletor máximo em serviço M_y (kNcm / cm)		Carga total de ruptura (kN)
		Positivo	Negativo	Positivo	Negativo	
		20	0,0157	36,09	18,09	
30	0,0153	37,42	17,32	44,78	16,03	90969,66
40	0,0150	37,80	17,55	47,20	16,78	92623,65

TABELA 6.11 – Comparação entre os resultados obtidos no item 6.5

Observa-se que a variação do valor da resistência característica à compressão do concreto da laje tem pouca influência tanto na variação da pressão máxima de contacto entre a laje e o solo, quanto na solicitação da laje pelos momentos fletores. Sendo assim, observada a pequena influência na carga de ruptura do sistema laje+solo.

6.6 - ANÁLISE DA LAJE CONSIDERANDO DIFERENTES TAXAS DE ARMADURA

Nesta seção são apresentadas três análises da laje sobre o solo estabilizado com cinza de carvão mineral mais cal, para avaliar o efeito das taxas de armadura no comportamento do conjunto laje + solo.

Na primeira análise, é considerada a metade da taxas de armadura calculada no item 6.2, já na segunda as taxas de armadura não são modificadas, por último, na terceira análise é considerada o dobro das armaduras calculadas no item 6.2.

São apresentados os gráficos das pressões de contacto entre a laje e o solo, e a distribuição dos momentos fletores M_x e M_y no interior da placa, para cargas de serviço.

Por fim, são apresentadas as curvas carga versus deflexões, das quais são obtidas as cargas de ruptura para cada análise das taxas de armadura na laje.

6.6.1 – Taxa de armadura igual a metade da calculada no dimensionamento

Nesta análise, as taxas de armadura existente na laje após o dimensionamento apresentado no item 6.2 são reduzidas à metade. As armaduras e as outras propriedades usadas na análise estão apresentadas na TABELA 6.12.

Propriedades geométricas	Propriedades dos materiais			Carregamento
	Concreto	Aço	Solo	
Larg = 450 cm	$E_{cm} = 3355 \text{ kN/cm}^2$	$E_{s1} = 21000 \text{ kN/cm}^2$	$k = 0,149 \text{ kN/cm}^3$	$g = 6,25 \times 10^{-4} \text{ kN/cm}^2$ (peso próprio)
Comp = 1287,5 cm		$E_{s2} = 0,00$		
	$v = 0,20$	Armaduras (cm^2/m)		$P = 146 \text{ kN}$ (por roda - 6 rodas)
Espessura = 25 cm	$f_{cm} = 3,80 \text{ kN/cm}^2$	$A_{sx}^+ = 3,91$ $A_{sx}^- = 2,09$		$q = 50 \times 10^{-4} \text{ kN/cm}^2$ (sobrecarga)
	$f_{ctm} = 0,29 \text{ kN/cm}^2$	$A_{sy}^+ = 3,91$ $A_{sy}^- = 2,09$		

TABELA 6.12 – Propriedades usadas no item 6.6.1

Na FIGURA 6.34, estão apresentadas as pressões de contacto entre a laje e o solo, e nas FIGURAS 6.35 e 6.36 é apresentada a distribuição dos momentos flectores M_x e M_y , no interior da placa, respectivamente.

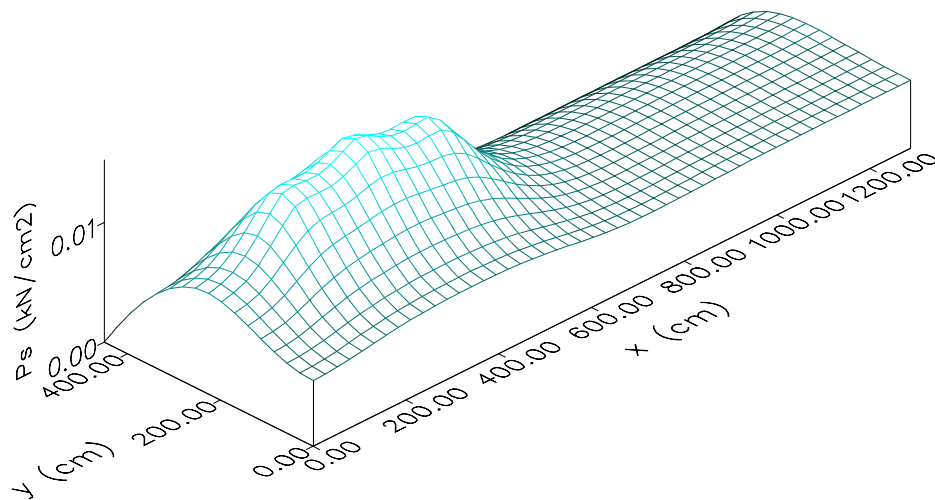


FIGURA 6.34 – Pressão de contacto solo-laje: item 6.6.1

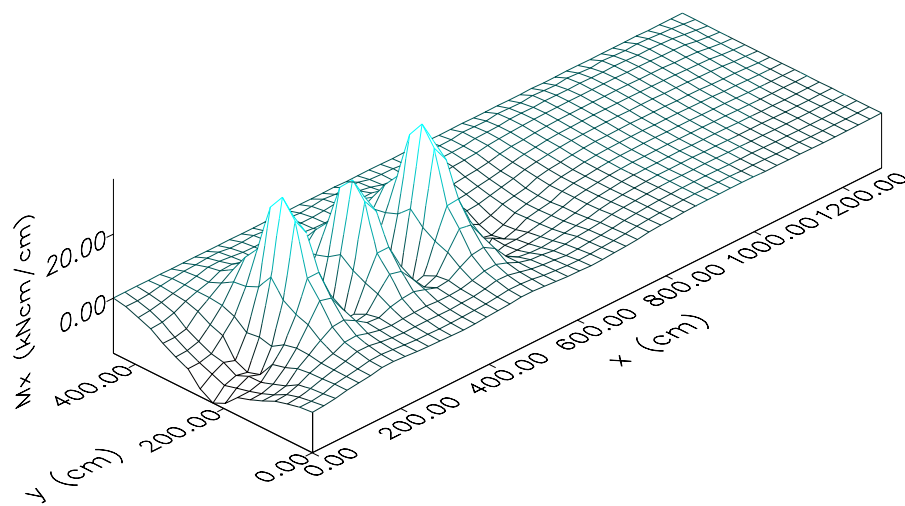


FIGURA 6.35 – Momento fletor M_x : item 6.6.1

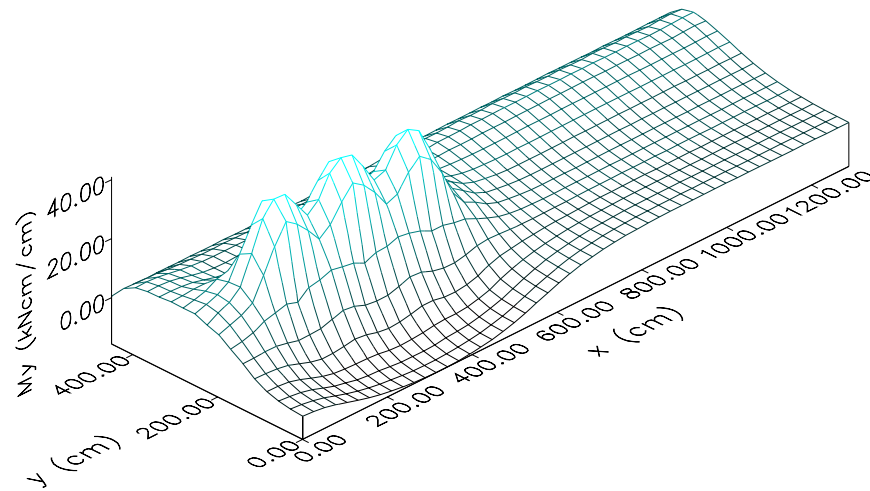


FIGURA 6.36 – Momentos fletores M_y : item 6.6.1

Deve-se observar que nesta análise da laje sob carga de serviço não houve plastificação do solo em nenhum ponto, também não houve escoamento da armadura da laje, porém há fissuração do concreto na região das cargas concentradas.

6.6.2 – Taxa de armadura igual a obtida no dimensionamento à flexão

Nesta análise, as taxas de armadura são mantidas as mesmas apresentadas na FIGURA 6.3. As outras propriedades são apresentadas na TABELA 6.1.

Na FIGURA 6.37, estão apresentadas as pressões de contacto entre a laje e o solo, e nas FIGURAS 6.38 e 6.39 é apresentada a distribuição dos momentos fletores M_x e M_y no interior da placa, respectivamente.

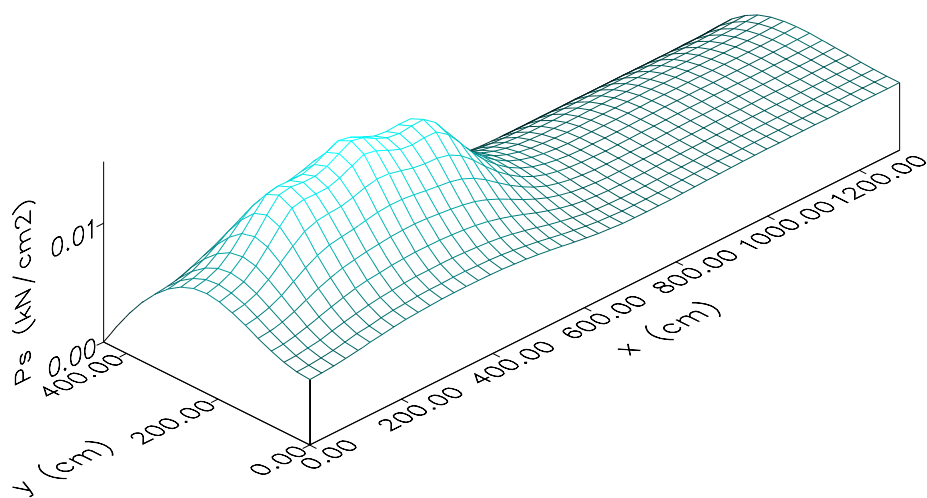
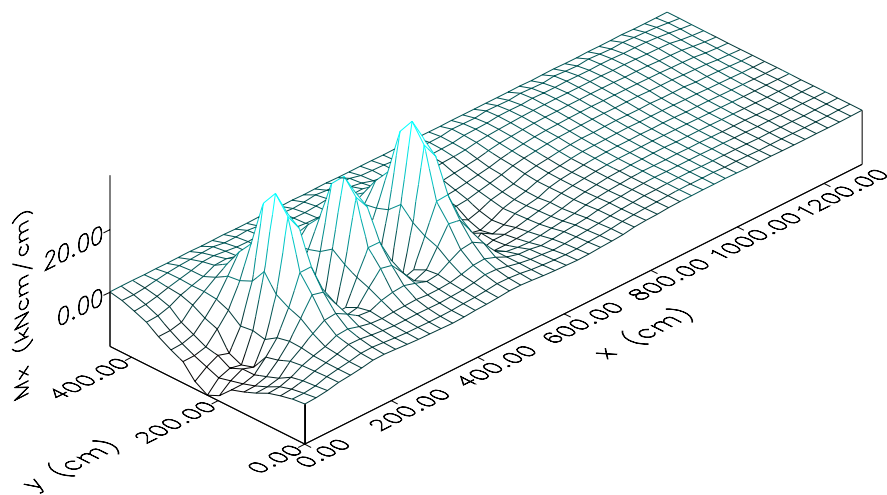


FIGURA 6.37 – Pressão de contacto solo-laje: item 6.6.2

FIGURA 6.38 – Momentos fletores M_x : item 6.6.2

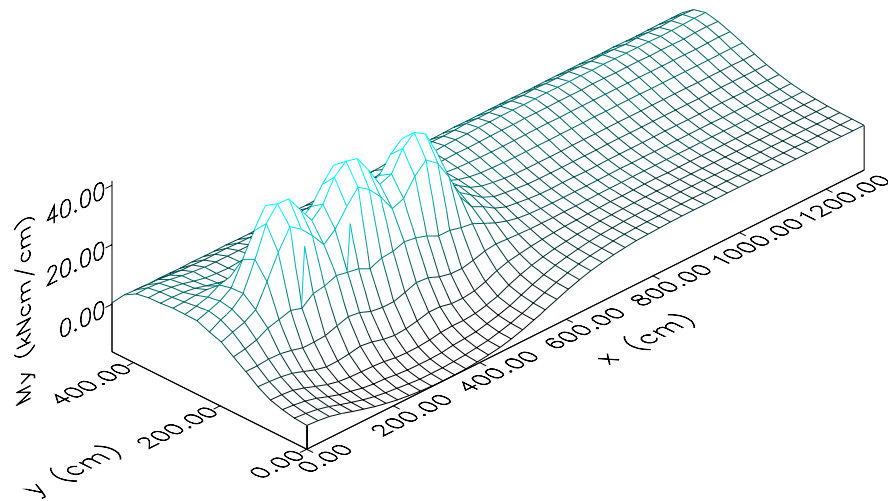


FIGURA 6.39 – Momentos fletores M_y : item 6.6.2

Deve-se observar que nesta análise da laje sob carga de serviço não houve plastificação do solo em nenhum ponto, também não houve escoamento da armadura da laje, porém há fissuração do concreto nos pontos próximos às cargas concentradas.

6.6.3 – Dobro da taxa de armadura

Nesta análise, as taxas de armadura existente na laje após o dimensionamento apresentado no item 6.2 são duplicadas e aplicadas à mesma. As armaduras e as outras propriedades usadas na análise estão apresentadas na TABELA 6.13.

Propriedades geométricas	Propriedades dos materiais			Carregamento
	Concreto	Aço		
Larg = 450 cm	$E_{cm} = 3355 \text{ kN/cm}^2$	$E_{s1} = 21000 \text{ kN/cm}^2$		$k = 0,149 \text{ kN/cm}^3$
Comp = 1287,5 cm		$E_{s2} = 0,00$		
	$\nu = 0,20$	$f_{ym} = 54,48 \text{ kN/cm}^2$		
		Armaduras (cm^2/m)		$P = 146 \text{ kN}$ (por roda - 6 rodas)
Espessura = 25 cm	$f_{cm} = 3,80 \text{ kN/cm}^2$	$A_{sx}^+ = 15,62$	$A_{sx}^- = 8,34$	$q = 50 \times 10^{-4} \text{ kN/cm}^2$ (sobrecarga)
	$f_{ctm} = 0,29 \text{ kN/cm}^2$	$A_{sy}^+ = 15,62$	$A_{sy}^- = 8,34$	

TABELA 6.13 – Propriedades usadas no item 6.6.3

Na FIGURA 6.40, estão apresentadas as pressões de contacto entre a laje e o solo, e nas FIGURAS 6.41 e 6.42 é apresentada a distribuição dos momentos fletores M_x e M_y , no interior da placa, respectivamente.

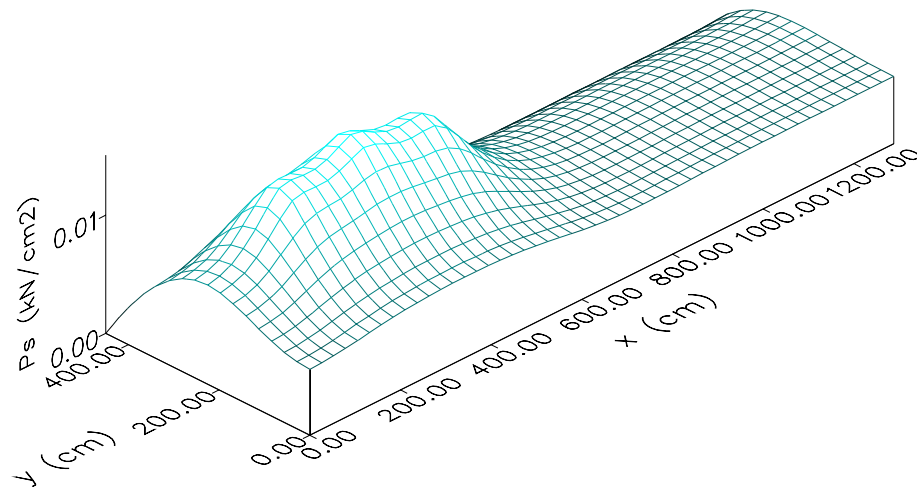


FIGURA 6.40 – Pressão de contacto solo-laje: item 6.6.3

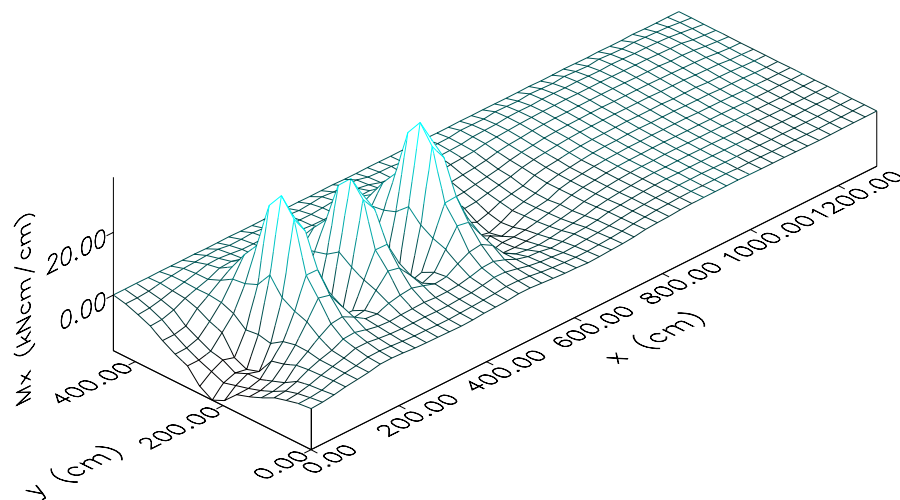


FIGURA 6.41 – Momentos fletores M_x : item 6.6.3

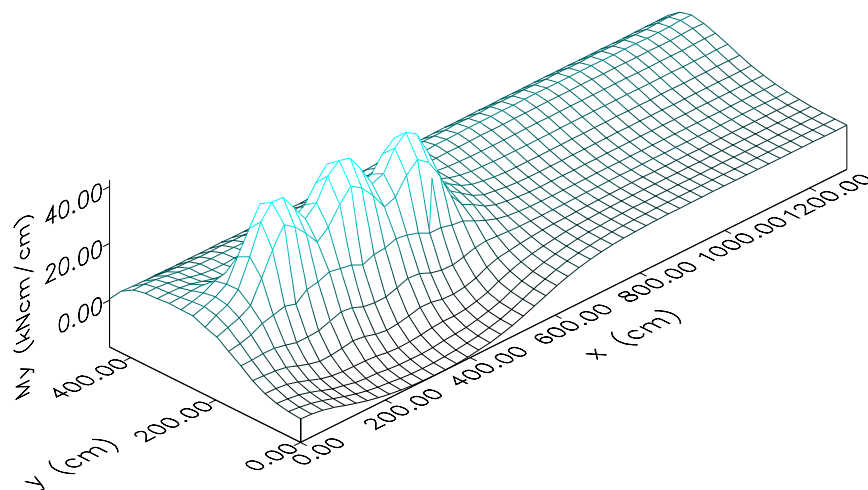


FIGURA 6.42 – Momentos fletores M_y : item 6.6.3

Saliente-se que nesta análise da laje sob carga de serviço não houve plastificação do solo em nenhum ponto, também não houve escoamento da armadura da laje, porém há fissuração do concreto na região das cargas concentradas.

6.6.4 - Comparação entre as respostas do sistema laje+solo para cada taxa de armadura

Finalmente, neste item foi feita uma análise não-linear incremental até a ruptura do sistema laje+solo. Desta forma foi obtida a curva carga x afundamento completa, para cada valor de taxa de armadura considerado.

Na FIGURA 6.43 são apresentadas as curvas carga-deslocamento do ponto 288 (posicionamento apresentado na FIGURA 6.3), por ser este, o que apresentou as maiores deflexões.

Para cada taxa de armadura ρ da laje, é determinada a carga total aplicada sobre a mesma, em kN, que causará a ruptura do sistema laje + solo.

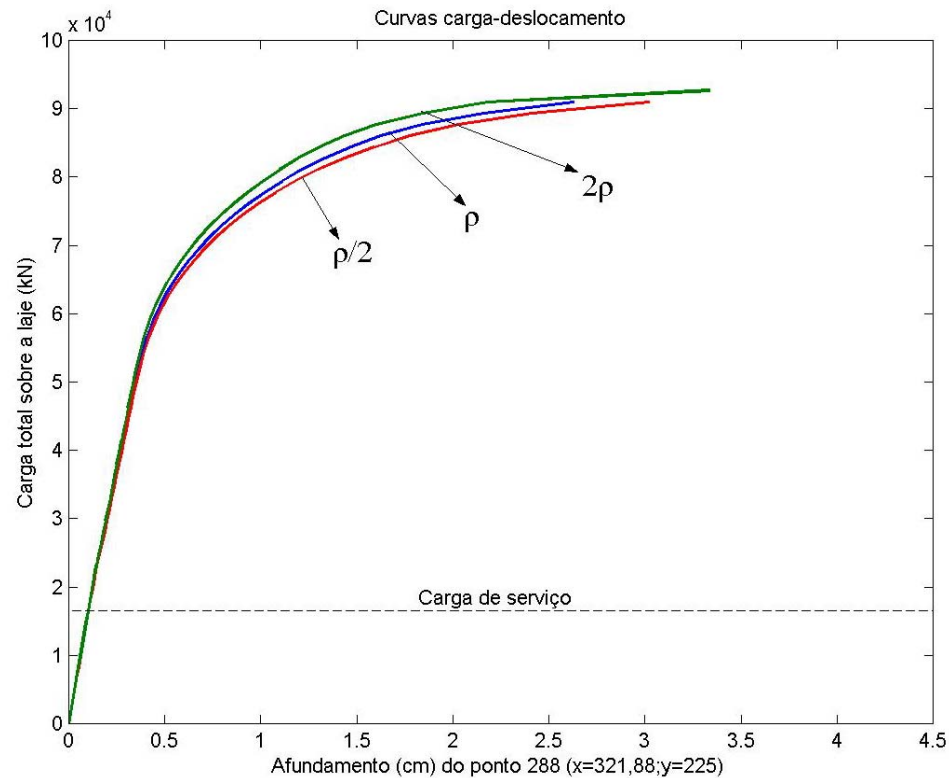


FIGURA 6.43 – Curvas carga-deslocamento do ponto 288: item 6.6

Para os três valores de taxa de armadura analisados, a ruptura ocorreu por deformação plástica da armadura na direção y , em pontos próximos às cargas concentradas.

Encontrou-se o solo praticamente plastificado nas três análises, restando apenas os pontos próximos ao canto superior direito e os pontos próximos da viga de apoio no seu estado íntegro.

A armadura situada entre as cargas concentradas encontrava-se em um estado de escoamento nas três análises, porém na última, os pontos em escoamento encontram-se em menor número.

Quanto à fissuração, o concreto encontrava-se quase que totalmente fissurado nas três análises, restando os pontos próximos do meio do bordo livre no seu estado íntegro.

Para uma melhor comparação entre os resultados obtidos da análise no item 6.6, é apresentada a TABELA 6.14, na qual são apresentados os máximos valores obtidos para as

pressões de contacto, momentos fletores, e cargas de ruptura.

Taxa de armadura (%)	Pressão de contacto máxima em serviço (kN / cm ²)	Momento fletor máximo em serviço M _x (kNcm / cm)		Momento fletor máximo em serviço M _y (kNcm / cm)		Carga total de ruptura (kN)
		Positivo	Negativo	Positivo	Negativo	
		$\rho / 2$	0,0153	37,27	17,16	
ρ	0,0153	37,42	17,32	44,78	16,03	90969,66
2ρ	0,0152	37,65	17,62	45,91	16,49	92623,65

TABELA 6.14 – Comparação entre os resultados obtidos no item 6.6

Pode ser notado que, a variação na taxa de armadura da laje, tem pouca influência tanto na variação da pressão máxima de contacto entre a laje e o solo, quanto na solicitação da laje pelos momentos fletores. Sendo assim, observada a pequena influência na carga de ruptura do sistema laje+solo.

7 – CONCLUSÕES E SUGESTÕES

7.1 - GENERALIDADES

Neste trabalho foi desenvolvido um modelo para análise de placas de concreto armado sobre base elástica através do método dos elementos finitos, que considera o comportamento mecânico não-linear dos materiais, e a possibilidade de ocorrerem grandes deslocamentos. Este trabalho teve como base REAL (1990), no qual é feita uma análise estática de lajes de concreto armado incluindo as não-linearidades física e geométrica. Esta formulação deve permitir traçar, desde o início do carregamento até a ruptura, a resposta estática não-linear das placas que compõem um pavimento portuário.

7.2 - CONCLUSÕES

No que se refere ao método dos elementos finitos, o elemento isoparamétrico quadrático de oito nós, da família Serendipity, usado na formulação deste trabalho, comprovou o seu bom desempenho já descrito em outras publicações semelhantes, portanto pode ser utilizado como uma valiosa ferramenta para o estudo de situações de pavimento em placas de concreto armado.

Quanto à integração numérica, é aconselhável adotar um processo seletivo com 3x3 pontos de Gauss para os termos de estado plano de tensões e flexo-torção de placas, e com 2x2 pontos para os termos de corte. Este procedimento permite avaliar o comportamento mecânico do material em um maior número de pontos amostrais, sem contudo superestimar a rigidez ao corte.

O modelo ortotrópico não-linear para o concreto, sugerido por DARWIN (1977), mostrou-se refinado o bastante para a representação do material. A inclusão da colaboração do concreto tracionado entre duas fissuras na resistência aos esforços de tração, e a transmissão de esforços cortantes através do plano da fissura, mostraram-se imprescindíveis para uma correta simulação da resposta da laje após a carga de fissuração. O modelo de fissura fixa adotado mostra-se de grande valia, pois permite reduzir o número de iterações até estabelecer-se o equilíbrio.

Já o modelo laminar adotado para a armadura apresentou-se adequado, devido à correta representação das características de resistência de uma malha de armadura uniformemente distribuída na laje.

O modelo elasto-plástico adotado para o solo apresentou-se adequado para a representação dos esforços e deslocamentos que surgem no contato entre a placa e o solo. Porém, seria interessante adotar-se um modelo que representasse o comportamento mecânico não-linear do solo, decorrente de sua heterogeneidade.

Quanto ao método adotado para a solução do sistema de equações não-lineares de equilíbrio, é importante salientar a redução no número de iterações até o estabelecimento do equilíbrio, em relação a outros métodos tradicionais. Redução esta já comprovada na bibliografia.

O modelo mostrou-se eficiente na resolução de problemas de placas para diversas situações.

Para placas espessas, o modelo mostrou a influência da deformação por corte na flexão das mesmas.

No caso de sapatas com carga excêntrica, mostrou-se capaz de analisar o problema da tração no solo, iterando até ser atingido o equilíbrio apenas com tensões de compressão no solo.

Também, mostrou-se capaz de analisar fundações do tipo radier submetidas a vários carregamentos concentrados.

A eficiência do modelo para representar problemas com não-linearidade geométrica foi comprovada. Para placas apoiadas nos quatro lados e assente em base elástica, o modelo fez a análise da mesma submetida a esforços normais ao longo dos bordos e com carga concentrada no centro.

No estudo de lajes de concreto armado, mostrou-se capaz de fazer a análise até a ruptura das mesmas.

Os resultados obtidos em cada uma das análises feitas pelo modelo, tiveram sua validação através de resultados teóricos ou experimentais, e todos mostraram-se em concordância com os resultados extraídos da bibliografia.

Também foi mostrada a aplicabilidade do modelo em problemas de pavimentação de portos, em placas de concreto armado. Para se saber a influência de vários parâmetros no comportamento do sistema solo+laje, o modelo mostrou-se de grande validade.

O modelo demonstrou a importância de um solo com boas características de resistência para a viabilidade do projeto. Portanto, o investimento na melhoria da capacidade de carga do solo que servirá de base para o assentamento da laje é compensador.

Mostrou-se que a espessura da laje tem grande influência quando se emprega um solo com boas características de resistência, tanto na resposta carga-deslocamento, como na carga de ruptura do sistema solo+laje.

No entanto, a variação da resistência característica à compressão do concreto da laje e as taxas de armadura, têm pouca influência na resposta carga-deslocamento e na carga de ruptura do sistema laje+solo.

Como última conclusão, é válido ressaltar a importância de uma análise não-linear para o concreto armado, pois, como se pode observar através dos exemplos apresentados, o concreto possui um comportamento altamente não-linear, tendo como uma das principais causadoras deste comportamento a fissuração do mesmo.

7.3 – SUGESTÕES PARA APRIMORAMENTO DO MODELO

Como a formulação permite à placa suportar esforços normais e tangenciais contidos em seu plano médio, faz-se aqui a sugestão de incorporação dos efeitos de protensão no modelo. Também se sugere a implementação de um modelo não-linear para representar o solo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARAÚJO, J.M.. **Análise não-linear de vigas em base elástica**. Revista Vetor, Rio Grande, v. 2, p. 31-42, 1988.
- ARAÚJO, J.M.; CAMPOS FILHO, A.. **Modelo bidimensional para análise de vigas de concreto armado**. Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas, Lisboa, v. 34, p. 9-12, jul. 1992b.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Projeto e execução de obras de concreto armado: NBR 6118**. Rio de Janeiro, 1982.
- BASHUR, F. K. & DARWIN, D.. **Nonlinear model for reinforced concrete slabs**. Journal of the Structural Division. New York, ASCE, 104(1): 157-170, Jan. 1978.
- BEAUFAIT, F.W.; HOADLEY, P.W.. **Analysis of elastic beams on nonlinear foundations**. Computers & Structures, v. 12, pp. 669-676, 1980.
- BOWLES, J.E.. **Analytical and computer methods in foundation engineering**. McGraw-Hill, 1974.
- CERVENKA, V. **Constitutive model for cracked reinforced concrete**. ACI Journal. Proceedings 82(6): 877-882, Nov.-Dec. 1985.
- CHEUNG, Y.K.; NAG, D.K.. **Plates and beams on elastic foundations-Linear and non-linear behaviour**. Géotechnique, 18:250-260, 1968.
- CHIA, C.Y.. **Nonlinear analysis of plates**. New York, MacGraw-Hill, 1980.
- COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BETON. **CEB-FIP model code 1990; design code**. London, Thomas Telford Services, 1993. 437p.
- DARWIN, D.; PECKNOLD, D.A.. **Nonlinear biaxial stress-strain law for concrete**. Journal of Engineering Mechanics Division, v. 103, p. 229-241, Apr. 1977.
- DIAS, C.R.R.. **Comunicação pessoal sobre o coeficiente de reação vertical do solo estabilizado com cinza+cal**. Rio Grande, DMC-FURG, abril de 2003.
- DYM, C.L.; SHAMES, I.H.. **Solid mechanics; a variational approach**. New York, MacGraw-Hill, 1977.
- ERATIL, K.; AKÖZ, A.Y. **The mixed finite element formulation for thick plates on elastic foundations**. Computers & Structures, v. 65, n. 4, p. 515-529, 1997.
- FUNG, Y.C.. **Foundations of solid mechanics**. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1965.

- HAHN, J.. **Vigas contínuas, pórticos, placas y vigas flotantes sobre terreno elástico**. 3. ed.. Barcelona, Gustavo Gili, 1982.
- HEHL, M.E.. **Linguagem de programação estruturada: FORTRAN 77**. 2. ed.. São Paulo, McGraw-Hill, 1987.
- HETÉNYI, M.. **Beams on elastic foundation**. 11. ed.. The University of Michigan Press, 1979.
- HINTON, E.; OWEN, D.R.J.. **Finite element programming**. London, Academic Press, 1977.
- HINTON, E.; CAMPBELL, J.S.. **Local and global smoothing of discontinuous finite element functions using a least squares method**. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v.8, p. 461-480, 1974.
- JOFRIET, J. C. & McNEICE, G.M.. **Finite element analysis of reinforced concrete slabs**. Journal of the Structural Division. New York, ASCE, 97(3): 785-806, Mar. 1971.
- KUPFER, H.B.; GERSTLE, K.H.. **Behavior of concrete under biaxial stresses**. Journal of Engineering Mechanics, v. 99, p. 853-866, Aug. 1973.
- LI, H.; DEMPSEY, J.P.. **Unbonded contact of a square plate on an elastic half-space or an Winkler foundation**. ASME, Journal of applied mechanics, v. 55, p. 430-436, 1988.
- LIEW, K.M.; HAN, J.-B., XIAO, Z.M.; DU, H. **Differential quadrature method for Mindlin plates on Winkler foundation**. Int. J. Mech. Sci., v.38, n. 4, p. 405-421, 1996.
- MATTHIES, H.; STRANG, G.. **The solution of nonlinear finite element equations**. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 14, p. 1613-1626, 1979.
- MINDLIN, R.D.. **Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates**. Journal of Applied Mechanics. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, 18(1): 31-38, Mar. 1951.
- MOREIRA, M.M.M.. **Análise interativa de situações de reforço e recuperação de peças de concreto armado, empregando o método dos elementos finitos**. Dissertação de Mestrado em Engenharia (Estruturas)-CPGEC, UFRGS. Porto Alegre, 2002.
- OWEN, D.R.J.; HINTON, E.. **Finite elements in plasticity: theory and practice**. Swansea, Pineridge Press, 1980.
- POPOV, E.P.. **Introdução à Mecânica dos Sólidos**. São Paulo, Edgard Blücher, 1978.

- REAL, M.V.; **Análise estática de lajes de concreto armado incluindo não-linearidade física e geométrica.** Dissertação de Mestrado em Engenharia (Estruturas)-CPGEC, UFRGS. Porto Alegre, 1990.
- REAL, M.V.; **Análise probabilística de estruturas de concreto armado, sob estado plano de tensão, através do método dos elementos finitos.** Tese do Doutorado em Engenharia-PPGEC, UFRGS. Porto Alegre, 2000.
- SILVA, A.R. **Análise de placas com restrições unilaterais de contato.** Ouro Preto, Escola de Minas, UFOP, 1998. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil.
- SVEC, O.J.. **Thick plates on elastic foundation by finite elements.** ASCE, Journal of Engineering Mechanics Division, v. 102, p. 461-477, 1976.
- STRICKLIN, J.A.; HEISLER, W.E.; VON RUSMAN, W.. **Evaluation of solution procedures for material and/or geometrically non-linear structural analysis.** Journal of the A.I.A.A., v.11, n. 3, p. 292-299, 1973.
- SUPERINTENDÊNCIA DO PORTO DE RIO GRANDE. **Relatório técnico da ampliação do cais do Porto Novo.** Rio Grande, 2003.
- TAYLOR, R.; MAHER, D.R.H & HAYES, B.. **Effect of the arrangement of reinforcement on the behaviour of reinforced concrete slabs.** Magazine of Concrete Res.. London 18(55): 85-94, Jun. 1966.
- TIMOSHENKO, S.P.; GOODIER, N.. **Teoria da Elasticidade.** 3.ed.. Rio de Janeiro, Guanabara Dois, 1980.
- TIMOSHENKO, S.P.; WOINOWSKY-KRIEGER, S.. **Theory of Plates and Shells.** 2.ed.. McGraw-Hill, 1959.
- VELLOSO, D.A.; LOPES, F.R.. **Fundações.** 2.ed.. Rio de Janeiro, COPPE/UFRJ, 1997.
- VITORETI, M.M.. **Análise da interação solo-estrutura em fundações de concreto armado pelo método dos elementos finitos.** Dissertação de Mestrado em Engenharia – CPGEC, UFRGS. Porto Alegre, 2003.
- WEITSMAN, Y.. **On foundations that react on compression only.** ASME, Journal of applied mechanics, v. 37, p. 1019-1030, 1970.
- ZIENKIEWICZ, O.C.; TAYLOR, R.L.; TOO, J.M.. **Reduced integration technique in general analysis of plates and shells.** International Journal for Numerical Methods in Engineering, 3: 275-290, 1971.
- ZIENKIEWICZ, O.C.; TAYLOR, R.L.. **The finite element method. Volume 1: basic formulation and linear problems.** 4. ed.. London, McGraw-Hill International, 1989.

ANEXO A – DESCRIÇÃO DO PROGRAMA PSBEL / FORTRAN

A.1 – INTRODUÇÃO

O algoritmo do modelo para análise não-linear de lajes de concreto armado sobre base elástica foi implementado no programa computacional PSBEL, o qual foi desenvolvido na linguagem FORTRAN 77 e pode ser rodado em um micro-computador do tipo IBM-PC.

O programa é composto por 43 subrotinas, elaboradas com base em HINTON (1977), OWEN e HINTON (1980) e REAL (1990).

A.2 – DESCRIÇÃO DAS SUBROTINAS

A seguir são descritas de forma sucinta as subrotinas que compõem o programa PSBEL / FORTRAN.

INPUT \Rightarrow leitura dos dados do problema quando a geração da malha é feita pelo usuário do programa.

GERAD \Rightarrow geração automática de malha para placas de geometria retangular.

INPUTGER \Rightarrow leitura dos dados do problema quando a geração da malha é feita pelo programa.

MCOOR \Rightarrow montagem da matriz de coordenadas nodais.

CONET \Rightarrow montagem das conectividades do elemento.

CONTN, VERTIC e LADO \Rightarrow montagem das condições de contorno.

IMPRESSAO \Rightarrow impressão dos dados do problema.

BANDA \Rightarrow cálculo da semi-largura de banda da matriz K_o .

CONST \Rightarrow cálculo das constantes do concreto e do aço.

RIGID \Rightarrow cálculo da matriz de rigidez do elemento K_o^e .

MATD \Rightarrow cálculo da matriz de constantes elásticas.

GAUSS \Rightarrow determinação das coordenadas e dos pesos dos pontos de integração de Gauss.

FUNCST \Rightarrow cálculo das funções de interpolação nos pontos de Gauss.

JACOB \Rightarrow determinação do determinante da matriz Jacobiana do elemento e cálculo das

derivadas cartesianas.

MATB \Rightarrow cálculo da matriz de deformações do elemento.

PRODB \Rightarrow efetua o produto $\tilde{D} \tilde{B}$.

MONTRG \Rightarrow montagem da matriz de rigidez global K_o^G .

CONTRG \Rightarrow aplicação das condições de contorno na matriz K_o^G .

PERFIL \Rightarrow montagem do vetor perfil (“skyline”) de K_o^G .

CHOLE \Rightarrow decomposição da matriz K_o^G , pelo método de Cholesky.

VPEXT \Rightarrow cálculo do vetor de ações nodais do elemento P_{ext}^e .

MONTAN \Rightarrow montagem do vetor de cargas nodais.

CONTF \Rightarrow aplicação das condições de contorno no vetor de cargas nodais.

ITERNL \Rightarrow solução do sistema de equações não-lineares.

SOLUV \Rightarrow substituição à frente e retro-substituição.

ACNL \Rightarrow cálculo das ações não-lineares A_{NL} .

DEFOR \Rightarrow cálculo das deformações generalizadas $\tilde{\varepsilon}$ nos pontos de Gauss.

SIGMANL \Rightarrow cálculo das tensões generalizadas $\tilde{\sigma}$ considerando a não-linearidade física do material.

SIGMAEL \Rightarrow cálculo das tensões generalizadas $\tilde{\sigma}$ considerando o material elástico-linear.

PROMV \Rightarrow efetua o produto $\tilde{W} \tilde{X}$.

RMAT \Rightarrow cálculo da matriz de rotação \tilde{R} e sua transposição.

TENC \Rightarrow equação constitutiva para o concreto.

TENS \Rightarrow equação constitutiva para o aço.

BFGS \Rightarrow método de solução do sistema de equações não-lineares.

LINESEARCH \Rightarrow cálculo do comprimento do passo na direção do vetor de incremento de carga.

SMOOTH1 \Rightarrow cálculo da matriz de suavização \tilde{S} para o processo de suavização de tensões.

SMOOTH2 \Rightarrow cálculo do vetor de “forças” \tilde{F} para o processo de suavização de tensões.

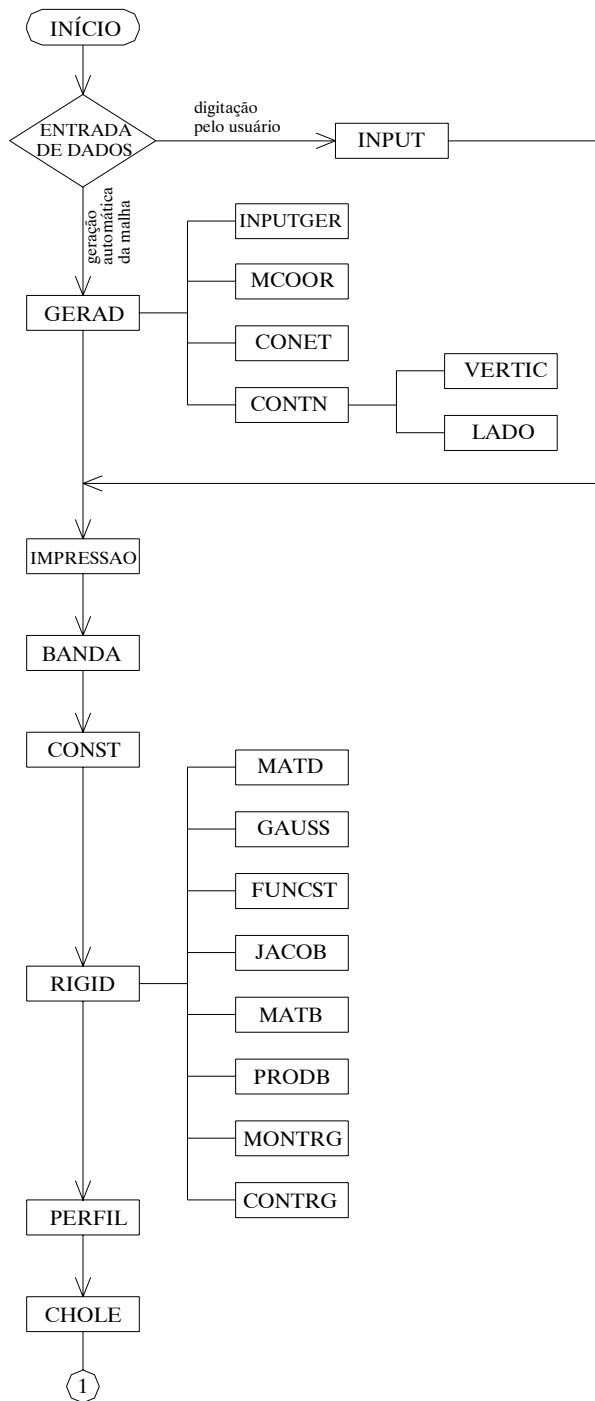
LEQTIF \Rightarrow cálculo do sistema de equações resultante do processo de suavização de tensões.

MONTNL \Rightarrow montagem do vetor de ações nodais não-lineares.

CONTNL \Rightarrow aplicação das condições de contorno no vetor de ações não-lineares.

ERRO \Rightarrow cálculo dos erros residuais em carga e deslocamento.

A.3 – FLUXOGRAMA



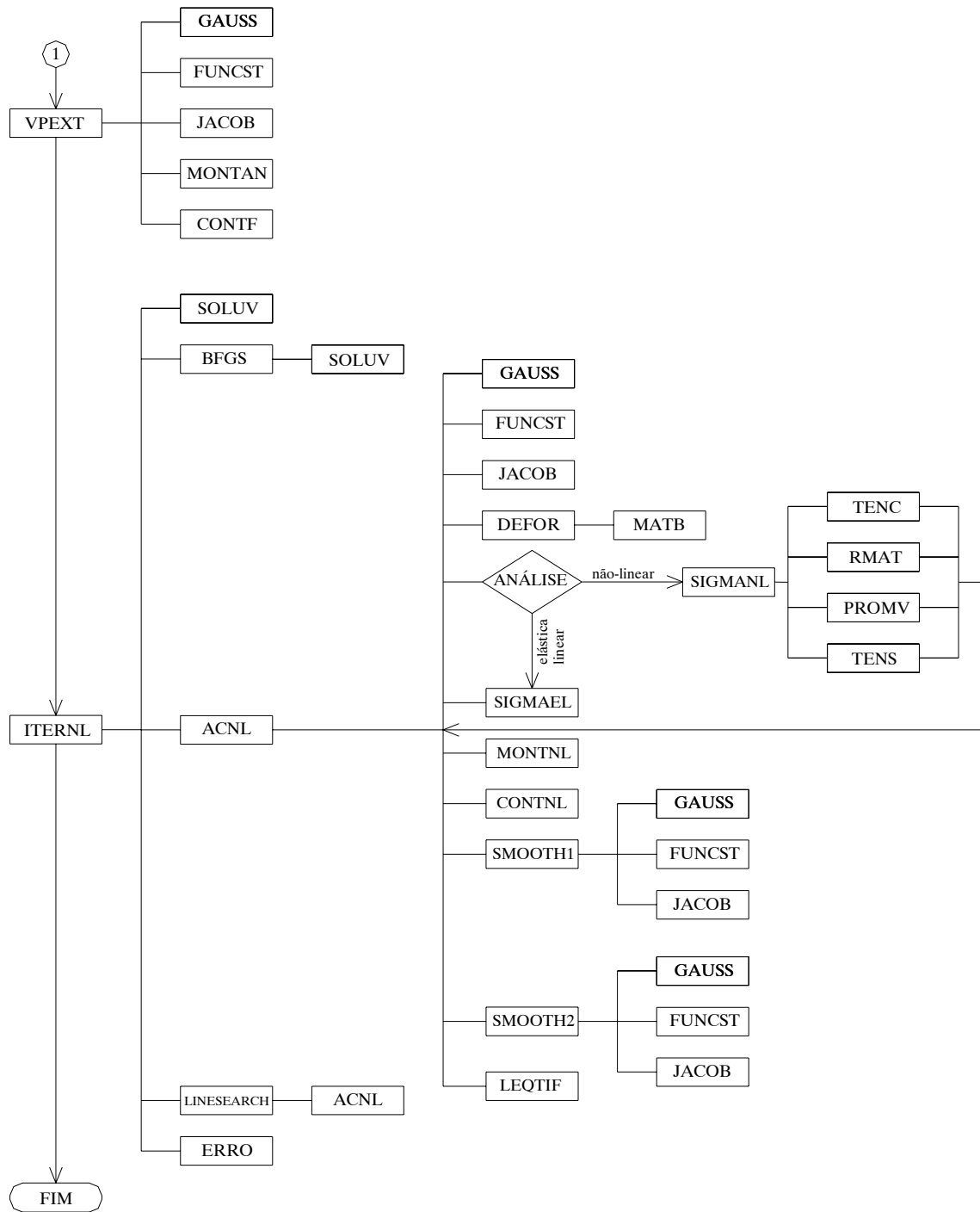


FIGURA A.1 – Fluxograma do programa PSBEL / FORTRAN

ANEXO B – PROCESSO DE SUAVIZAÇÃO DE TENSÕES UTILIZANDO O MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS, PARA ELEMENTOS FINITOS PLANOS

No método dos deslocamentos, as tensões são descontínuas entre elementos por causa da natureza da variação do deslocamento admitida. Durante o processo de análise, as tensões são calculadas nos pontos de integração dos elementos. Para a representação da distribuição das tensões, são necessários os valores nodais das tensões. Se os valores nodais das tensões fossem calculados separadamente para cada elemento, seria gerada uma distribuição não suavizada, conforme apresentado na FIGURA B.1. Torna-se, assim, necessário um processo de suavização para possibilitar a continuidade interelementar das tensões.

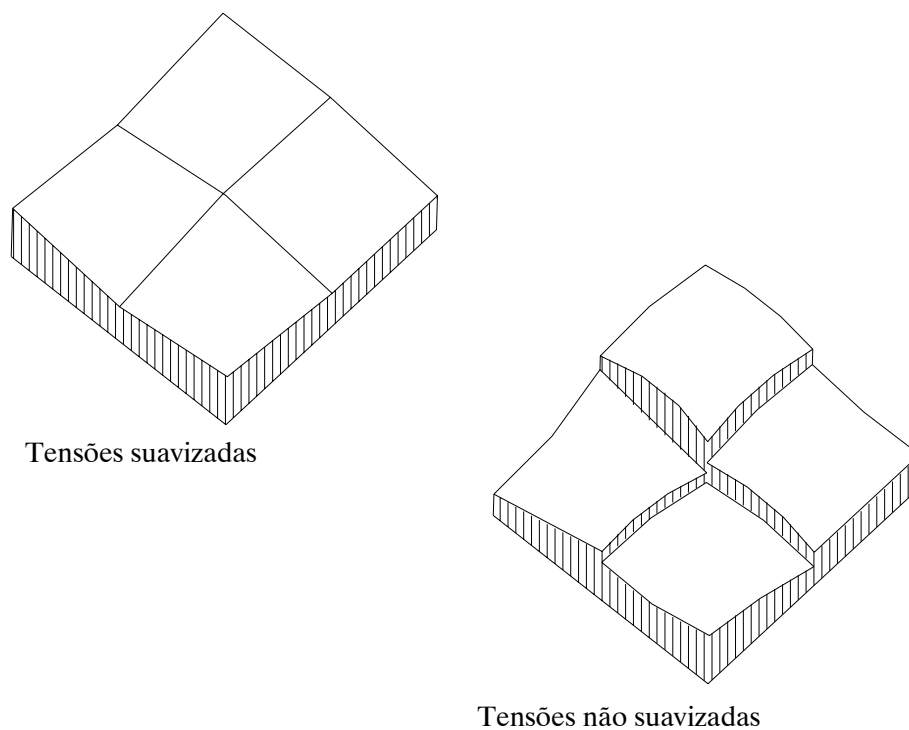


FIGURA B.1 – Tensões suavizadas e não suavizadas

Neste trabalho, utiliza-se o processo de suavização proposto por HINTON e CAMPBELL (1974). A função de suavização é definida como:

$$g(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy + a_{20}x^2 + \dots = \sum a_{ij}x^i y^j \Rightarrow \begin{cases} i = 0, p \\ j = 0, q \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

onde g é uma função de ordem p em x e uma função de ordem q em y .

Se a função não suavizada é dada por $\sigma(x,y)$, então o problema resume-se em encontrar os coeficientes a_{ij} que minimizem o funcional

$$\chi = \iint (\sigma - g)^2 dx dy \quad (\text{B.2})$$

Conseqüentemente, para χ ser um valor mínimo

$$\frac{\partial \chi}{\partial a_{ij}} = 0 \quad (\text{B.3})$$

Neste problema, as incógnitas são tomadas como as tensões nodais suavizadas σ_i^* e estas tensões podem ser obtidas usando-se as funções de forma. Desta maneira, a função de suavização $g(\xi, \eta)$ é dada pela expressão

$$g(\xi, \eta) = \sum_{i=1, n} N_i \sigma_i^* \quad (\text{B.4})$$

onde N_i , a função de forma no nó i , é uma função de coordenadas (ξ, η) e σ_i^* é a tensão nodal suavizada no nó i e n é o número de nós por elemento.

O erro entre as tensões suavizadas e não suavizadas em qualquer ponto dentro do elemento é dado por

$$e(\xi, \eta) = \sigma(\xi, \eta) - g(\xi, \eta) \quad (\text{B.5})$$

onde as tensões não suavizadas $\sigma(\xi, \eta)$, em qualquer ponto dentro do elemento, podem ser obtidas pela relação usual tensão-deslocamento

$$\sigma(\xi, \eta) = [D][B]\{\delta\}^e \quad (\text{B.6})$$

onde $[D]$ é a matriz constitutiva,

$[B]$ é a matriz deformação-deslocamento, e

$\{\delta\}^e$ são os deslocamentos nodais do elemento.

O problema agora é encontrar as tensões nodais suavizadas $\sigma_1^*, \sigma_2^*, \dots, \sigma_p^*$ que minimizem o funcional

$$\chi = \sum_{j=1,ne} \iint e(\xi, \eta)^2 dx dy \quad (\text{B.7})$$

onde p é o número total de nós e ne é o número total de elementos.

Para χ ser mínimo

$$\frac{\partial \chi}{\partial \sigma_i^*} = 0 \quad (\text{B.8})$$

Portanto, para cada elemento, a matriz de suavização do elemento é dada por

$$[S]^e = \begin{bmatrix} \iint N_1 N_1 \det J d\xi d\eta & \dots & \iint N_1 N_n \det J d\xi d\eta \\ \vdots & & \\ \iint N_n N_1 \det J d\xi d\eta & \dots & \iint N_n N_n \det J d\xi d\eta \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

onde $\det J$ é o determinante da matriz Jacobiana.

O vetor de “forças” é dado por

$$\{F\}^e = \begin{bmatrix} \iint N_1 \sigma \det J d\xi d\eta \\ \vdots \\ \iint N_n \sigma \det J d\xi d\eta \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

O vetor de “ forças ” global $\{F\}$ e a matriz de suavização global $[S]$ são obtidos reunindo-se o vetor de “ forças ” de cada elemento $\{F\}^e$ e a matriz de suavização de cada elemento $[S]^e$, respectivamente.

As tensões nodais suavizadas $\sigma_1^*, \sigma_2^*, \dots, \sigma_p^*$ são obtidas resolvendo-se o sistema

$$\{F\} = [S]\{\sigma\} \quad (\text{B.11})$$

onde $\{\sigma\}$ é o vetor formado pelas tensões nodais suavizadas.