TEMA Tend. Mat. Apl. Comput., **7**, No. 2 (2006), 361-370.

Probabilidades Intervalares em Modelos Ocultos de Markov

A.V. SANTOS[1], G.P. DIMURO[2], L.V. BARBOZA[3], A.C.R. COSTA[4], R.H.S. REISER[5] , Programa de Pós-Graduação em Informática, Escola de Informática, Escola de Engenharia e Arquitetura, Universidade Católica de Pelotas, 96010-000, Pelotas, RS, Brazil.

M.A. CAMPOS[6], Centro de Informática, Universidade Federal de Pernambuco, 50670-901, Recife, PE, Brazil.

Resumo. Este trabalho apresenta um estudo sobre modelos ocultos de Markov onde as probabilidades consideradas são representadas por intervalos. Utilizando-se técnicas da Matemática Intervalar, foram desenvolvidos algoritmos intervalares para os problemas relacionados a esses modelos (*Problema da Avaliação*, *Problema da Decodificação* e *Problema da Estimação de Parâmetros*). Apresentam-se versões intervalares para os algoritmos *Forward*, *Backward*, *Viterbi* e *Baum Welch*. As implementações foram realizadas utilizando-se o toolbox Intlab para a Matemática Intervalar, no ambiente Matlab. Exemplos de aplicações são apresentados, mostrando-se a validade dos algoritmos desenvolvidos.

1. Introdução

No desenvolvimento de aplicações numéricas em Ciência e Tecnologia surgem erros de computação, que originam-se, primordialmente, da impossibilidade de se modelar e representar grandezas contínuas em uma entidade de natureza finitária, como o computador. O sistema de ponto flutuante da máquina não é capaz de representar exatamente os números reais, nem os resultados de operações com esses números. Além disso, como um sistema algébrico, suas características e propriedades algébricas são muito pobres quando comparadas com as dos números reais [6].

A matemática intervalar [10] é uma teoria matemática que teve por objetivo inicial responder a questão da exatidão e da eficiência que aparece na prática da computação científica. Desde então, a utilização de técnicas intervalares tem sido uma alternativa para alcançar limites garantidos para resultados de computações, através do controle rigoroso e automático da propagação dos erros dos dados e

[1]andrevi@atlas.ucpel.tche.br.
[2]liz@atlas.ucpel.tche.br.
[3]luciano@atlas.ucpel.tche.br, também atua no Centro Fed. de Educação Tecnológica de Pelotas.
[4]rocha@atlas.ucpel.tche.br, também atua no PGCC/UFRGS e no PGIE/UFRGS, Porto Alegre.
[5]reiser@atlas.ucpel.tche.br.
[6]mac@cin.ufpe.br.

parâmetros iniciais ao longo do processo computacional, assim como dos erros de arredondamento e truncamento. Algoritmos intervalares, em contraste com os algoritmos pontuais, computam um intervalo como solução, com a garantia de que a resposta exata pertence a este intervalo. A Matemática Intervalar está também sendo utilizada em várias áreas que lidam com informações incertas (veja, p.ex., [5, 7]).

A probabilidade intervalar proposta por Campos [1] consiste de uma metodologia para estender a probabilidade real de forma a possibilitar seu cálculo automático através do uso de intervalos[7]. Esta probabilidade intervalar tem uma conceituação similar à probabilidade usual, sendo então definida como uma função satisfazendo a um conjunto de axiomas. Esta função assume valores no espaço dos intervalos [10], e, portanto, é fundamentada na análise intervalar, justificando o nome *probabilidade intervalar*. Adicionalmente, as operações aritméticas são realizadas segundo a aritmética de exatidão máxima [9]. Esta abordagem para a probabilidade intervalar é utilizada, principalmente, para o controle dos erros decorrentes da representação das probabilidades reais por números de ponto flutuante [6].

Uma aplicação de interesse da probabilidade intervalar é no cálculo das probabilidades de transição de uma cadeia de Markov. Em [3], introduziu-se o conceito de cadeias de Markov intervalares e apresentou-se uma aplicação no Maple. Outra abordagem para cadeias de Markov com intervalos pode ser encontrada em [8].

Os modelos ocultos de Markov [11, 12], surgiram originalmente no domínio de reconhecimento do discurso, e, atualmente têm sido empregados em Inteligência Artificial, Processamento de Linguagens, Bioinformática e Visão Computacional, assim com em reconhecimento de manuscritos, de formas, gestos e expressões faciais (veja em `http://www-sig.enst.fr/~cappe`).

Este trabalho apresenta uma aplicação de probabilidades intervalares em modelos ocultos de Markov, com o desenvolvimento de algoritmos intervalares para os problemas relacionados a esses modelos (*Problema da Avaliação*, *Problema da Decodificação* e *Problema da Estimação de Parâmetros*). Foram desenvolvidas versões intervalares para os algoritmos *Forward*, *Backward*, *Viterbi* e *Baum Welch*. As implementações foram realizadas utilizando-se o toolbox Intlab para a Matemática Intervalar, no ambiente Matlab. Exemplos de aplicações são apresentados, mostrando-se a validade dos algoritmos desenvolvidos.

O artigo está organizado conforme descrito a seguir. A Seção 2 apresenta os modelos ocultos de Markov e os problemas relacionados a estes modelos. Os principais conceitos da Matemática Intervalar são resumidos na Seção 3. A Seção 4 introduz o conceito de Modelo Oculto de Markov Intervalar e as versões intervalares dos algoritmos *Forward*, *Backward*, *Viterbi* e *Baum Welch*. Exemplos são discutidos na Seção 5. A Seção 6 apresenta as conclusões do trabalho.

[7]Outra abordagem para probabilidades de valor intervalar pode ser encontrada em [14], onde são determinados os limites inferior e superior para probabilidades quando a informação sobre a ocorrência de eventos é parcial e heterogênea.

2. Modelos Ocultos de Markov

Um Modelo Oculto de Markov [11, 12] é uma variante das Cadeias de Markov, onde, além da função de distribuição de probabilidades associadas aos estados, existe uma função de distribuição de probabilidades para as observações[8] que podem ser realizadas em cada estado. Consiste de um processo duplamente estocástico composto por um processo oculto (não observável), mas que se manifesta através de um outro processo estocástico que produz a seqüência de símbolos observados. Os dois tipos de parâmetros a que um Modelo Oculto de Markov está associado são: *probabilidades de emissão dos símbolos e probabilidades de transição de estados.*

Um exemplo clássico encontrado na literatura [11, 12], é o problema de "bolas e urnas". Existem três urnas atrás de uma cortina não transparente, e dentro destas urnas tem-se várias bolas com cores distintas. Uma urna é selecionada ao acaso e uma bola é retirada de dentro dela e mostrada aos expectadores, que, apesar de ficarem sabendo a cor dessa bola, desconhecem de que urna ela foi retirada. Diz-se que as "urnas" são os estados ocultos do modelo e as "cores possíveis de bolas" são as observações que podem ser realizadas em cada estado.

Definição 1. *Um Modelo Oculto de Markov é definido como $\lambda = (A, E, Q, \varepsilon, \pi)$, onde Q é o conjunto de estados do modelo, π é o vetor da distribuição inicial de probabilidades desses estados, ε é o conjuto de símbolos do alfabeto, A é uma matriz de números reais não negativos indexada por $Q \times Q$, denominada de matriz de transição de estados, e E é uma matriz de números reais não negativos indexada por $\varepsilon \times Q$ que contém as probabilidades de emissão de símbolos em cada estado.*

Os problemas relacionados a esses modelos são os seguintes:
Problema da Avaliação: é o problema de calcular a probabilidade de uma seqüência de observações para um dado modelo. Para solucionar este problema são utilizados os algoritmos de programação dinâmica *Forward-Backward*.
Problema da Decodificação: é o problema de descobrir a mais provável seqüência de estados (seqüência ótima) capaz de gerar uma dada seqüência de observações, o que pode ser realizado por meio do *Algoritmo de Viterbi*.
Estimação de Parâmetros: é o problema de ajustar os parâmetros de um dado modelo de modo que a probabilidade de uma seqüência de observações seja maximizada. Isto pode ser realizado através do *Algoritmo de Baum Welch*.

3. A Matemática Intervalar

A Matemática Intervalar considera um conjunto de métodos para manipulação de intervalos numéricos que aproximam dados incertos. Estes métodos baseiam-se na definição da aritmética intervalar e do produto escalar ótimo [9]. O princípio da máxima exatidão garante (através dos arredondamentos direcionados) o controle automáticos dos erros de resultado de computações numéricas.

[8] Entende-se por "observação" os símbolos que são identificados (emitidos) em cada estado, que, por sua vez, são ocultos (não observáveis). Os símbolos observáveis são dependentes da aplicação.

Um *intervalo real* X é um conjunto não vazio de números reais $\mathbb{R}$,

$$X = [x_1, x_2] = \{x \in \mathbb{R} \mid \ x_1 \leq x \leq x_2\},$$

onde x_1 é o extremo inferior (ou *ínfimo*) e x_2 é o extremo superior (ou *supremo*). O conjunto de intervalos reais é denotado por $\mathbb{IR}$.

Um intervalo real $X = [x_1, x_2] \in \mathbb{IR}$ pode não ser representável em uma máquina se x_1 e x_2 não são números do sistema de ponto flutuante da máquina. Para obter um intervalo arredondado $\widetilde{X}$ tal que $X \subseteq \widetilde{X}$ (i.e., $\widetilde{X}$ é uma aproximação de X), x_1 e x_2 devem ser arredondados "por falta" e "por excesso", respectivamente, o que se denomina de *arredondamento direcionado*.

O *ponto médio*, o *diâmetro* e o *raio* de um intervalo X são definidos, respectivamente, como $mid(X) = \check{X} = \frac{1}{2}(x_1+x_2)$, $diam(X) = x_2-x_1$ e $rad(X) = \frac{1}{2}diam(X)$. X pode também ser denotado por $X = \langle mid(X), rad(X)\rangle$.

As operações aritméticas intervalares são definidas de forma que o intervalo resultado engloba todos os possíveis resultados reais [10], o que garante a confiabilidade dos resultados intervalares. As operaçoes aritméticas são então definidas como $X * Y = \{x * y \mid x \in X, y \in Y\}$, para $* \in \{+, -, \times, \div\}$, e, para $X = [x_1, x_2], Y = [y_1, y_2] \in \mathbb{IR}$, elas são explicitamente calculadas como:

$$\begin{aligned}
X + Y &= [x_1 + y_1, x_2 + y_2] \\
X - Y &= [x_1 - y_2, x_2 - y_1] \\
X \times Y &= [\min \rho, \max \rho], \text{ with } \rho = \{x_1y_1, x_1y_2, x_2y_1, x_2y_2\} \\
X \div Y &= X \times [y_2^{-1}, y_1^{-1}], \text{ if } 0 \notin Y.
\end{aligned}$$

Para a adição e a multiplicação, as propriedades da associatividade e comutatividade são válidas. Entretanto, exceto em casos especiais, a propriedade da distributividade não é válida, o que frequentemente causa uma superestimação.

A biblioteca IntLab [13] do ambiente Matlab, para a Matemática Intervalar, utiliza a rotina "setround" para controlar o modo de arredondamento. Os intervalos podem ser armazenados tanto na forma de "ínfimo–supremo" como na de "ponto médio–raio". A IntLab possibilita que as operações intervalares sejam executadas sobre escalares intervalares reais e complexos, assim como vetores e matrizes.

A probabilidade intervalar [1] é realizada através de uma peculiar composição de funções envolvendo extensões intervalares de funções reais. A um evento X é associada uma probabilidade $Pr(X) = p$, que, por sua vez, é associada a um intervalo que a contenha. Em [2] foram calculadas probabilidades intervalares para as variáveis aleatórias discretas Bernoulli, Binomial, Poisson, Poisson Truncada, Geométrica, Hipergeométrica e Pascal.

Para implementação de probabilidades intervalares utilizando-se a biblioteca IntLab[9], se p tem valor incerto ou não é representável em um específico sistema de ponto flutuante, então será substituído pelo menor intervalo de máquina que o contenha. Para tanto, implementou-se a rotina *probint* que, dados uma probabilidade e sua incerteza, determina a "menor"[10] probabilidade intervalar que a representa.

[9]Para implementações de probabilidades intervalares no Maple, veja [3].

[10]Menor probabilidade intervalar é aquela que apresenta o menor diâmetro.

4. Modelos Ocultos de Markov Intervalares

Nesta seção introduz-se o conceito de Modelo Oculto de Markov Intervalar e as versões intervalares dos algoritmos *Forward*, *Backward*, *Viterbi* e *Baum Welch*.

Definição 2. *Um Modelo Oculto de Markov Intervalar é aquele em que se consideram probabilidades intervalares.*

Os *Algoritmos Forward* e *Backward* são usados para determinar a probabilidade intervalar de uma seqüência de observações $S^k = \{s^1, \ldots, s^k\}$. Cada s é um símbolo observado em um tempo $t = i$, com $i = 1, \ldots, k$. As probabilidades intervalares intermediárias são calculadas pelas variáveis α (*Algoritmo Forward*) e β (*Algoritmo Backward*), que fazem os cálculos em sentidos opostos, conforme mostra-se a seguir.

Para o *Algoritmo Forward Intervalar*, cujo núcleo principal é mostrado na Figura 1, o cálculo das probabilidades intervalares iniciais é feito para todos os estados em $t = 1$. A variável α é uma matriz indexada por $S \times Q$ e calculada como $\alpha(1, i) = \pi_i e_i(s_1)$, com $1 \leq i \leq N$, onde N é o número de estados do modelo. Para cada $t > 1$, uma probabilidade intervalar parcial é calculada em cada estado como $\alpha(t+1, j) = \left[\sum_{i=1}^{N} \alpha(t, i) a_{i,j}\right] e_j(s_{t+1})$. A soma das probabilidades intervalares parciais resulta na probabilidade intervalar da seqüência de observações considerada, $Pr(S^k) = \sum_{j=1}^{N} \alpha(T, j)$, onde T é o tamanho da seqüência de observações.

```
for i = 2:T
    for j = 1:Q
        mult = infsup(0,0);
        for k = 1:Q
            mult = (alf(i-1,k)*trans_int(k,j)) + mult;
        end
        obs_ti = obs_int(i);
        alf(i,j) = mult * emissao_int(obs_ti,j);
    end
end
prob_fwd = infsup(0,0);
for j = 1:Q
    prob_fwd = prob_fwd + alf(T,j);
end
```

Figura 1: Algoritmo Forward Intervalar

Para o *Algoritmo Backward Intervalar*, mostrado na Figura 2, os cálculos das probabilidades intervalares são realizados considerando:
Inicialização: $\beta(T, i) = 1$, onde $1 \leq i \leq N$
Recursão: $\beta(t, i) = \sum_{j=1}^{N} \beta(t+1, j) a_{i,j} e_j(s_{t+1})$, onde $t = T-1, \ldots, 1$ e $1 \leq i \leq N$
Finalização: $Pr(S^k) = \sum_{i=1}^{N} \beta(1, i) e_i(s_1) \pi_i$

O *Algoritmo de Viterbi Intervalar*[11] é utilizado para determinar qual o caminho (seqüência de estados) mais provável na geração de uma seqüência de observações. Este algoritmo leva em consideração tanto as probabilidades intervalares de emissão de símbolos em um determinado estado quanto as probabilidades intervalares de

[11] Por falta de espaço, os algoritmos de *Viterbi* e *Baum Welch* Intervalares não serão detalhados.

```
prob_back = infsup(0,0);
for j = 1:Q
    beta(T,j) = infsup(1,1);
end
r = T-1;
while (r >= 1)
      for j = 1:Q
          var = infsup(0,0);
          for k = 1:Q
              obs_ti = obs_int(r+1);
              var = ( trans_int(j,k) * emissao_int(obs_ti,k) * beta(r+1,k) ) + var;
          end
          beta(r,j) = var;
      end
      r = r-1;
end
```

Figura 2: Algoritmo Backward Intervalar

transição de estados. Para contornar a alta complexidade computacional gerada pelo problema, o algoritmo utiliza técnicas de programação dinâmica. Seja $\delta(i,j)$ a probabilidade intervalar de uma seqüência ótima de estados em um modelo λ que produz as seqüências de observações $s_1, \ldots, s_i$, sendo j o último estado. Portanto, a seqüência ótima é determinada por:

Inicialização: $\delta(1,i) = \pi(i)e_i(s_1)$; $\psi(1,i) = 0$

Recursão: $\delta(t,j) = \max(e_j(s_t)\delta(t-1,i)a_{ij})$, com $2 \leq t \leq T$ e $1 \leq j \leq N$;

$\psi(t,i) = argmax(\delta(t-1,i)a_{ij})$, com $2 \leq t \leq T$ e $1 \leq j \leq N$

Finalização: $P^* = \max(\delta(t,i))$, $1 \leq i \leq N$; $q^* = \arg\max(\delta(t,i))$, $1 \leq i \leq N$

Seqüência Ótima: $q_t^* = \psi_{t+1}q_{t+1}^*$, com $t = T-1, \ldots, 1$

O algoritmo de reestimação *Baum Welch* foi popularizado em [4] como algoritmo EM (*Expectation Maximization*). Este algoritmo tem como objetivo gerar novos modelos a partir de um modelo inicial através de um tipo de iteração. Este processo iterativo deve obedecer a um critério de parada, que pode ser um número definido pelo usuário ou então o menor número de máquina através do qual uma probabilidade possa ser representada. O algoritmo EM não foi desenvolvido especificamente para os Modelos Ocultos de Markov e sim para problemas genéricos de inferência estatística, sendo utilizado para localizar o valor de um parâmetro que maximiza a função de verossimilhança. Cada iteração deste algoritmo consiste de dois passos: o *E-Step* (Expectation) e o *M-Step* (Maximization).

A determinação dos parâmetros do modelo, de forma a maximizar a probabilidade intervalar de uma seqüência de observações, não tem uma solução ótima conhecida. Utilizando o conceito de freqüência de ocorrência, o novo modelo $\bar{\lambda} = (\bar{A}, \bar{E}, \bar{\pi})$ é calculado a partir das iterações do algoritmo EM. As equações de reestimação podem ser escritas da seguinte forma:

$$\bar{\pi}_i = \gamma_1(i); \quad \bar{a}_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^{T-1} \xi_t(i,j)}{\sum_{t=1}^{T-1} \gamma_t(i)}; \quad \bar{b}_j(k) = \frac{\sum_{t=1}^{T} \gamma_t(j)}{\sum_{t=1}^{T} \gamma_t(j)}.$$

5. Exemplos e Discussão de Resultados

Para os exemplos apresentados nesta seção, considere os modelos ocultos de Markov λ_1 (com 2 estados) e λ_2 (com 3 estados), definidos pelos seguintes parâmetros:

$$\varepsilon_{\lambda_1} = \{a, b\}, \varepsilon_{\lambda_2} = \{a, b, c, d\}, \pi_{\lambda_1} = [\ 0.25 \quad 0.75\ ], \pi_{\lambda_2} = [\ 0.60 \quad 0.40 \quad 0.00\ ],$$

$$A_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} 0.70 & 0.30 \\ 0.23 & 0.77 \end{bmatrix}, A_{\lambda_2} = \begin{bmatrix} 0.40 & 0.20 & 0.40 \\ 0.30 & 0.30 & 0.40 \\ 0.70 & 0.20 & 0.10 \end{bmatrix},$$

$$E_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} 0.53 & 0.50 \\ 0.47 & 0.50 \end{bmatrix}, E_{\lambda_2} = \begin{bmatrix} 0.30 & 0.10 & 0.40 \\ 0.20 & 0.40 & 0.40 \\ 0.20 & 0.30 & 0.10 \\ 0.30 & 0.20 & 0.10 \end{bmatrix}.$$

Para execuções dos *Algoritmos Forward* e *Backward* intervalares utiliza-se o modelo λ_1. Dada a sequência de observações $S =$ "*baaaabb*", as estimativas de probabilidade da sua ocorrência, obtidas com os algoritmos pontuais são, respectivamente, 0.00802323305992 e 0.00802323305992. Os algoritmos intervalares produziram os resultados apresentados na Tabela 1, onde observa-se que o raio do intervalo probabilidade determinado pelo algoritmo é diretamente proporcional ao grau de incerteza I dos parâmetros do modelo.

Tabela 1: Relação entre a incerteza I dos parâmetros do modelo e a probabilidade intervalar de ocorrência da seqüência $S =$ "*baaaabb*"

I	Probabilidade Intervalar	Raio
10^{-1}	[0.00035246790761, 0.10278902508627]	$5.121827858932000 \times 10^{-2}$
10^{-3}	[0.00780158546935, 0.00825071350391]	$2.245640172781225 \times 10^{-4}$
10^{-5}	[0.00802098794435, 0.00802547875875]	$2.245407195617180 \times 10^{-6}$
10^{-7}	[0.00802321060587, 0.00802325551402]	$2.245407173043224 \times 10^{-8}$
10^{-9}	[0.00802323283537, 0.00802323328446]	$2.245407280249134 \times 10^{-10}$
10^{-11}	[0.00802323305767, 0.00802323306217]	$2.245419128410475 \times 10^{-12}$
10^{-13}	[0.00802323305989, 0.00802323305994]	$2.246813846085161 \times 10^{-14}$
10^{-15}	[0.00802323305991, 0.00802323305992]	$2.341876692568690 \times 10^{-16}$
10^{-17}	[0.00802323305991, 0.00802323305992]	$8.673617379884036 \times 10^{-18}$

Para analisar o *Algoritmo de Viterbi*, considerou-se o modelo λ_2. A Figura 3 e a Figura 4 mostram, respectivamente, a execução dos *Algoritmos de Viterbi* pontual e intervalar. A variável "path" apresentada na Figura 3 mostra a seqüência de estados considerada ótima pelo algoritmo pontual. Utilizando-se o algoritmo intervalar, que considera a possibilidade de incerteza nos dados, obteve-se como seqüência ótima a apresentada na Figura 4. O resultado mais confiável é o fornecido pelo algoritmo intervalar, embora as seqüências de estados geradas sejam semelhantes.

Para exemplificar os resultados do *Algoritmo Baum Welch Intervalar* utilizou-se o modelo λ_1. A Figura 5(a) mostra as probabilidades de ocorrência da seqüência $S = ab$ obtidas em cada iteração do *Algoritmo Baum Welch Pontual* para reestimação dos parâmetros do modelo. Este algoritmo fornece, na oitava iteração, o

```
ENTRE COM A OBSERVACAO: aaaabbacdbccdaddcabbd
path = 2 3 3 3 1 2 3 2 2 3 2 2 2 3 2 2 2 3 2 3 2
```

Figura 3: Seqüência de estados produzida pelo *Algoritmo de Viterbi Intervalar*

```
ENTRE COM A OBSERVACAO: aaaabbacdbccdaddcabbd
path = 2 3 3 3 3 2 3 2 2 3 2 2 2 3 2 2 2 3 2 3 2
```

Figura 4: Seqüência de estados produzida pelo *Algoritmo de Viterbi* pontual

modelo otimizado λ_3, que é capaz de produzir a seqüência $S = ab$ com 100% de probabilidade. Os parâmetros do modelo λ_3 são:

$$\pi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

```
ENTRE COM A OBSERVACAO: ab
iter = 0 probabilidade = 0.24838000000000
iter = 1 probabilidade = 0.13277340743544
iter = 2 probabilidade = 0.14449587265466
iter = 3 probabilidade = 0.22427457481497
iter = 4 probabilidade = 0.54459242516218
iter = 5 probabilidade = 0.91624209821461
iter = 6 probabilidade = 0.99930694382298
iter = 7 probabilidade = 0.99999999886959
iter = 8 probabilidade = 1.00000000000000
iter = 9 probabilidade = 1.00000000000000
```

(a)

```
ENTRE COM A OBSERVACAO: ab
iter = 0 intval Probabilidade = [ 0.2483, 0.2484 ]
iter = 1 intval Probabilidade = [ 0.1327, 0.1328 ]
iter = 2 intval Probabilidade = [ 0.1444, 0.1445 ]
iter = 3 intval Probabilidade = [ 0.2242, 0.2243 ]
iter = 4 intval Probabilidade = [ 0.5445, 0.5446 ]
iter = 5 intval Probabilidade = [ 0.9162, 0.9163 ]
iter = 6 intval Probabilidade = [ 0.9993, 0.9994 ]
iter = 7 intval Probabilidade = [ 0.9999, 1.0001 ]
iter = 8 intval Probabilidade = [ 0.9999, 1.0001 ]
iter = 9 intval Probabilidade = [ 0.9983, 1.0017 ]
```

(b)

Figura 5: Probabilidades de ocorrência da seqüência de observações $S = ab$ no *Algoritmo Baum Welch*: (a) pontual; (b) intervalar

Com a execução do *Algoritmo Baum Welch Intervalar* para o modelo λ_1, obteve-se as probabilidades intervalares[12] de ocorrência da seqüência $S = ab$ apresentadas na Figura 5(b). Essas probabilidades são obtidas a medida em que são realizadas novas reestimações dos parâmetros do modelo a cada iteração. Utilizou-se o *format short* para uma melhor visualização dos intervalos. A Figura 6 apresenta os novos parâmetros dos modelos obtidos com a execução do *Algoritmo Baum Welch intervalar*. Denotam-se *trans_int* a matriz de transição A, *emissao_int*, a matriz de emissão de símbolos E, e *probini_int*, o vetor de probabilidades iniciais π.

6. Conclusões

Observa-se que quando há incerteza nos parâmetros e dados de entrada de um algoritmo pontual, o resultado verdadeiro ("ideal") é sempre desconhecido, e o resultado pontual obtido contém um erro difícil, ou impossível, de ser estimado. Entretanto, utilizando as técnicas intervalares, obtém-se um intervalo que contém tal resultado "ideal" e a análise do erro é automática pela verificação de seu diâmetro.

[12] Observa-se que alguns limites superiores das probabilidades intervalares são maiores que a unidade, o que, embora não padrão na Teoria da Probabilidades Reais, é prevista na abordagem proposta em [1, 2, 3].

```
iter = 5
intval trans_int   = [ 0.0000, 0.0001] [ 0.0000, 0.0001] [ 0.9995, 0.9996] [ 0.0000, 0.0001]
intval emissao_int = [ 0.0000, 0.0001] [ 0.9997, 0.9998] [ 0.9999, 1.0001] [ 0.0002, 0.0003]
intval probini_int = [ 0.0000, 0.0001] [ 0.9999, 1.0001]

iter = 7
intval trans_int   = [ 0.0000, 0.0001] [ 0.0000, 0.0001] [ 0.9999, 1.0001] [ 0.0000, 0.0001]
intval emissao_int = [ 0.0000, 0.0001] [ 0.9999, 1.0001] [ 0.9999, 1.0001] [ 0.0000, 0.0001]
intval probini_int = [ 0.0000, 0.0001] [ 0.9999, 1.0001]

iter = 9
intval trans_int   = [ 0.0000, 0.0001] [ 0.0000, 0.0001] [ 0.9874, 1.0127] [ 0.0000, 0.0001]
intval emissao_int = [ 0.0000, 0.0001] [ 0.9935, 1.0065] [ 0.9935, 1.0065] [ 0.0000, 0.0001]
intval probini_int = [ 0.0000, 0.0001] [ 0.9967, 1.0033]
```

Figura 6: Reestimação de novos modelos ocultos de Markov intervalares

A utilização da Matemática Intervalar no tratamento de dados incertos e/ou de natureza qualitativa vem crescendo atualmente, justificando a necessidade do estudo de versões intervalares para modelos conhecidos, e para os algoritmos relacionados à análise desses modelos. Esta tarefa não é trivial, devido à alta complexidade computacional das extensões puras de algoritmos pontuais para intervalares. Além disso, resultados de algoritmos intervalares podem freqüentemente produzir resultados com diâmetro muito grande, o que não possui significado. considerável.

A extensão do conceito de probabilidade para probabilidade intervalar permitiu que se avançasse no sentido do estudo de modelos estocásticos intervalares. Neste contexto, este trabalho introduziu o conceito de Modelo Oculto de Markov Intervalar e apresentou versões intervalares para os algoritmos *Forward*, *Backward*, *Viterbi* e *Baum Welch*, que são utilizados na solução dos três problemas relacionados a esses modelos: *Avaliação*, *Codificação* e *Estimação de Parâmetros*.

Foram realizados vários testes que comprovaram a eficiência e eficácia destes algoritmos, que produziram resultados intervalares válidos e de diâmetro aceitável, considerando o grau de incerteza atribuído aos parâmetros dos modelos.

Trabalhos futuros estão relacionados ao estudo de Modelos Ocultos de Markov Intervalares associados aos processos de trocas sociais em sistemas multiagentes, onde valores de trocas, de natureza qualitativa, são representados por intervalos [5].

Agradecimentos

Os autores agradecem as valiosas observações e sugestões dos revisores. Este trabalho foi parcialmente financiado pelo programa CTINFO/CNPq e FAPERGS.

Abstract. This work presents a version of hidden Markov models where the probabilities are given as intervals. Interval algorithms, based on techniques from Interval Mathematics, were developed for the solution of problems related to those models, namely, the *Evaluation Problem*, the *Decoding Problem* and the *Parameter Estimation Problem*. Interval versions for the *Forward*, *Backward*, *Viterbi* and *Baum Welch* algorithms are presented. The implementation was performed using the Matlab toolbox Intlab for Interval Mathematics. Some examples are presented.

Referências

[1] M.A. Campos, "Uma Extensão Intervalar para a Probabilidade Real", Tese de Doutorado, Centro de Informática/UFPE, 1997.

[2] M.A. Campos, Interval probabilities, application to discrete ramdom variables, em "Seleta do XXII CNMAC" (E.X.L. de Andrade et al., eds.), TEMA, Vol. 1, No. 2, pp. 333–344, SBMAC, 2000.

[3] M.A. Campos, G.P. Dimuro, A.C. Costa, J.F.F. Araújo, A.M. Dias, Probabilidade Intervalar e Cadeias de Markov Intervalares no Maple, em "Seleta do XXIV CNMAC" (E.X.L. de Andrade et al., eds.), TEMA, Vol 3, n. 2, pp. 53–62, SBMAC, 2002.

[4] A.P. Dempster, N.M. Laird, D.B. Rubin, Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm, *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, **39**, No. 1 (1977), 1–38.

[5] G.P. Dimuro, G.P., A.C.R.Costa, L.A.M. Palazzo, System of exchange values as tools for multi-agent organizations, *JBCS*, **11**, No. 1 (2005), 31–50.

[6] D. Goldberg, What every computer scientist should know about floating-point arithmetic, *ACM Comp. Surveys*, **23**, No. 1 (1991), 5–48.

[7] R.B. Keafort, V. Kreinovich (eds), "Applications of Interval Computations", Kluwer, Boston, 1996.

[8] I.O. Kozine, L.V. Utkin, Interval-valued finite Markov chains, *Reliable Computing*, **8**, No. 2 (2002), 97–113.

[9] U.W. Kulisch, W.L. Miranker, "Computer Arithmetic in Theory and Practice", Academic Press, New York, 1981.

[10] R.E. Moore, "Methods and Applications of Interval Analysis", SIAM, Philadelphia, 1979.

[11] L.R. Rabiner, B.H. Juang, An introduction to Hidden Markov models, *IEEE ASSP Magazine*, **3**, No. 1 (1989), 4–16.

[12] L.R. Rabiner, A tutorial on hidden Markov models and selected applications in speech recognition, *Proceedings of the IEEE*, **77** (1989), 257–286.

[13] S.M. Rump, IntLab - Interval Laboratory, in "Developments in Reliable Computing" (T. Csendes, ed.), Kluwer, Dordrecht, 1999.

[14] K. Weichselberger, Axiomatic foundations of the theory of interval-probability, in "Symposia Gaussiana", pp. 47–64, Munich, 1993.