

Cesar Eduardo Krumreich

Formulação Lagrangiana para Sistemas  
Dissipativos Através do Cálculo  
Fracionário

Rio Grande  
2013



Cesar Eduardo Krumreich

Formulação Lagrangiana para Sistemas  
Dissipativos Através do Cálculo  
Fracionário

Dissertação apresentada ao Instituto de  
Matemática, Estatística e Física da Uni-  
versidade Federal do Rio Grande, para a  
obtenção de Título de Mestre em Ciências  
Exatas e da Terra, na Área de Física.

Orientador: Prof. Dr. Matheus Jatkoske  
Lazo

**Rio Grande**  
**2013**



Cesar Eduardo Krumreich

Formulação Lagrangiana para Sistemas Dissipativos  
Através do Cálculo Fracionário

69 páginas

Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.  
Departamento de Física.

1. Princípio da Mínima Ação
2. Lagrangiana para sistemas não conservativos
3. Cálculo Fracionário

I. Universidade Federal do Rio Grande. Instituto de Matemática Estatística e Física. Departamento de Física.

## Comissão Julgadora:

---

Prof. Dr. Matheus Jatkoske Lazo  
Orientador

---

Prof. Dr. José Weberszpil  
Titular

---

Prof. Dr. Juan Segundo Valverde Salvador  
Titular

---

Prof. Dr. Luiz Fernando Mackedanz  
Suplente



## Agradecimentos

Ao prof. Dr. Matheus Jatkoske Lazo pela competente orientação.

A todos professores com os quais tive o prazer de ter assistido aulas e através delas enriquecer o meu conhecimento em Física.

A todos os amigos do Instituto de Matemática, Estatística e Física da Furg.

A toda a minha família, em especial a minha mãe Genesi e aos meus avós Ilma e Adolfo, que estiverem sempre presentes apoiando e incentivando.





## *Resumo*

Neste trabalho, generalizamos o Princípio da Mínima Ação proposto por Riewe para sistemas não conservativos, contendo forças dissipativas lineares dependentes de derivadas temporais de qualquer ordem. A Ação generalizada é construída a partir de funções Lagrangianas dependentes de derivadas de ordem inteira e fracionária. Diferente de outras formulações, o uso de derivadas fracionárias permite a construção de Lagrangianas físicas para sistemas não conservativos. Uma Lagrangiana é dita física se fornece relações fisicamente consistentes para o momentum e o Hamiltoniano do sistema. Neste Princípio da Mínima Ação generalizado, as equações de movimento são obtidas a partir da equação de Euler-Lagrange e, tomando-se o limite indo à zero para o intervalo de tempo definindo a Ação. Finalmente, como exemplo de aplicação, formulamos pela primeira vez uma Lagrangiana física para o problema da carga pontual acelerada.

**Palavras-chave:** Princípio da Mínima Ação, Lagrangiana para sistemas não conservativos, Cálculo Fracionário.



## *Abstract*

In this work we generalize the Action Principle formulated by Riewe for non-conservative systems containing linear dissipative forces depending on time derivatives of arbitrary order. The generalized Action is constructed by Lagrangian functions depending on integer and fractional derivatives. Different from other approaches, the use of fractional derivatives enable us to formulate physical Lagrangians for non-conservative systems. A Lagrangian is said to be physical if it provides physically consistent relations for the system's momentum and Hamiltonian. In this generalized Action Principle, the equations of motion are obtained from the Euler-Lagrange equation, and by taking the limit to zero for the time interval defining the Action. Finally, as an example of application, we formulate for the first time a physical Lagrangian for the accelerated point charge.

**Keywords:** Action Principle, Lagrangian for non conservative systems, Fractional Calculus.



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Princípio da Mínima Ação</b>	<b>5</b>
2.1	Abordagem Histórica . . . . .	6
2.2	Princípio de d'Alembert e a Equação de Euler-Lagrange . . . . .	8
2.3	Princípio de Hamilton e a Equação de Euler-Lagrange . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Formulação Lagrangiana Para Sistemas Não Conservativos</b>	<b>17</b>
3.1	Função de Dissipação de Rayleigh . . . . .	17
3.2	Lagrangianas Não Físicas . . . . .	20
3.3	Proposta de Riewe para uma Formulação Lagrangiana . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Cálculo Fracionário</b>	<b>25</b>
4.1	Cálculo Fracionário de Riemann-Liouville . . . . .	27
4.1.1	Integrais Fracionárias de Riemann-Liouville . . . . .	27
4.1.2	Derivadas Fracionárias de Riemann-Liouville . . . . .	33
4.1.3	Lei dos Expoentes para o Cálculo Fracionário de Riemann-Liouville	38
4.1.4	Teorema Fundamental do Cálculo e as Relações entre Integrais e Derivadas de Riemann-Liouville . . . . .	39
4.1.5	Integração por Partes . . . . .	41
4.2	Cálculo Fracionário de Caputo . . . . .	43

4.2.1	Integração por Partes . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Formulação Lagrangiana para Sistemas Dissipativos com Derivadas de Ordem Superior</b>	<b>47</b>
5.1	Equação de Euler-Lagrange Generalizada para Derivadas de Ordem Superior . . . . .	48
5.2	O Princípio da Mínima Ação para Sistemas Lineares Autonomos de Ordem Qualquer . . . . .	52
5.2.1	O Limite $a \rightarrow b$ e o Princípio da Mínima Ação . . . . .	53
5.3	Lagrangiana Para Sistemas Dissipativos . . . . .	56
5.3.1	Atrito Linear . . . . .	56
5.3.2	Radiação de Freamento . . . . .	58
<b>6</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>61</b>
<b>A</b>	<b>A Equação de Movimento para a Carga Acelerada</b>	<b>63</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>67</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Na Física um princípio decorre, na maioria dos casos, da observação da natureza. Desde a antiguidade, os filósofos já se valiam de princípios na elaboração de suas teorias sobre o mundo. Em termos práticos, os princípios na Física são as leis que descrevem o modo como a natureza funciona. Como exemplo, podemos citar os princípios de conservação da energia e da carga, a causalidade, o princípio da incerteza, etc. Os princípios desempenham na Física, papel análogo ao dos axiomas na Matemática. Os axiomas são proposições que não podem ser provados ou demonstrados, como os axiomas da geometria euclidiana. Portanto, a origem de um princípio não é parte de nenhuma dedução lógica, o que implica que ele não pode ser explicado nem interpretado em termos de outras regras ou leis. No entanto, é possível descrever os princípios que fundamentam a Física matematicamente [1].

O foco principal deste trabalho é o Princípio da Mínima Ação. Sua origem se deve à Maupertuis em 1744, e foi proposto com o objetivo de unificar a descrição física da natureza [2]. A formulação atual deste princípio para a mecânica newtoniana se deve, principalmente, a Euler e Hamilton [2]. Do ponto de vista prático, o uso do Princípio da Mínima Ação para sistemas newtonianos permite uma grande simplificação para a descrição dos problemas, devido ao fato desse formalismo trabalhar só com grandezas

escalares [3, 4], facilitando assim a inclusão de forças de vínculo. Além disso, como a Ação é um escalar, para obter as equações de movimento do sistema trabalha-se com equações escalares e não vetoriais, o que facilita enormemente as mudanças de variáveis matemáticas. Já do ponto de vista conceitual, o Princípio da Mínima Ação permite uma descrição unificada abrangente de todas as leis Físicas. Para Planck (tradução extraída de [2]), a Física “tem como seu objetivo mais elevado e mais almejado... condensar todos os fenômenos naturais que foram e que ainda serão observados em um único princípio. (...) [O Princípio de Mínima Ação] é a mais abrangente de todas as leis físicas que governam igualmente a mecânica e a eletrodinâmica.”. A importância conceitual deste princípio começou a ficar mais evidente com o advento da teoria eletromagnética de Maxwell [3, 4], quando a realidade física dos campos eletromagnéticos foi verificada. Isto porque toda a descrição da dinâmica, segundo a mecânica newtoniana, é baseada no conceito de forças, e esse conceito não faz sentido para a descrição das interações entre campos. Desde a descoberta do mundo quântico e do mundo relativístico, onde o conceito de força também não faz sentido, o Princípio da Mínima Ação é visto como o ponto básico de partida para a construção de todas as teorias físicas.

Apesar de toda a sua importância, o Princípio da Mínima Ação só pode ser aplicado para sistemas conservativos. Embora microscopicamente a energia é sempre conservada, do ponto de vista macroscópico todos os processos físicos observados na natureza são não conservativos, e portanto, não podem ser rigorosamente descritos pelo Princípio da Mínima Ação. A falha do Princípio da Mínima Ação em descrever macroscopicamente sistemas não conservativos é conhecida desde sua origem, e sua prova formal é devida a Bauer [5]. Na tentativa de contornar esta limitação, durante o último século foram propostos diversos métodos para formular Lagrangianas para sistemas não conservativos. No entanto, todas essas lagrangianas são não físicas no sentido de fornecerem relações incorretas para o momentum e o Hamiltoniano do sistema [6]. Recentemente, Riewe [5] generalizou o Princípio da Mínima Ação incluindo lagrangianas dependentes



de derivadas fracionárias, assim conseguiu mostrar que usando derivadas de ordem um meio é possível utilizar esse princípio generalizado para construir lagrangianas físicas para sistemas sob a ação de forças dissipativas, como o atrito. No entanto, na formulação de Riewe é utilizado um limite matematicamente inconsistente, além das lagrangianas serem limitada para forças dissipativas proporcionais à velocidade. Neste trabalho propomos uma modificação para o Princípio da Mínima Ação de Riewe, corrigindo a inconsistência matemática, e agora também aplicável para forças dissipativas proporcionais às derivadas de ordem qualquer da função posição. Como exemplo, formulamos pela primeira vez uma Lagrangiana quadrática para o problema da carga acelerada [7].

Para formular este Princípio da Mínima Ação generalizado, precisaremos utilizar derivadas de ordem um meio. O cálculo com derivadas e integrais de ordem não inteira, conhecido como Cálculo Fracionário, teve início a mais de três séculos com l'Hôpital e Leibniz, quando uma derivada de ordem um meio foi proposta [8]. Este cálculo também foi objeto de estudo de vários grandes matemáticos da história, como Euler, Fourier, Liouville, Grunwald, Letnikov, Riemann e outros. Apesar do Cálculo Fracionário ser quase tão antigo como o cálculo usual, somente nas últimas três décadas ele ganhou mais atenção devido ao surgimento de aplicações em várias áreas das ciências [9, 10, 11, 12, 13, 14]. Derivadas fracionárias são em geral operadores não locais e historicamente aplicadas no estudo de processos não locais ou com efeitos de memória, e também para modelar fenômenos envolvendo espaços granulares e fractais.

Uma breve revisão histórica do Princípio da Mínima Ação será apresentada no capítulo 2. No capítulo 3 são analisadas algumas formulações Lagrangianas para sistemas não conservativos e discutidas as ideias básicas da formulação de Riewe para a força de atrito. No capítulo 4, devido a necessidade de trabalhar com derivadas de ordem não inteira, será feita uma revisão do cálculo fracionário de Riemann-Liouville e de Caputo. A nossa generalização do Princípio da Mínima Ação é feita no capítulo 5, aplicando-a

para o caso do atrito linear e o da radiação de freamento da carga acelerada. O capítulo 6 é dedicado as considerações finais.

## Capítulo 2

# Princípio da Mínima Ação

O Princípio da Mínima Ação [3, 4], parte do pressuposto de que a trajetória de uma partícula é determinada pela sequência natural de mudanças na configuração do sistema. Essa sequência natural é definida pela trajetória que minimiza a Ação  $S = \int mvdx$  em cada parte do movimento, onde  $dx$  é um elemento infinitesimal da trajetória da partícula. Reescrevendo  $dx = vdt$ , o Princípio da Mínima Ação estabelece que a trajetória do movimento é a que minimiza o funcional da Ação

$$S = \int mv^2 dt = 2 \int T dt, \quad (2.1)$$

sujeita à lei de conservação da energia, onde  $T = \frac{mv^2}{2}$  é a energia cinética do sistema. Em termos práticos, a trajetória é obtida encontrando-se o extremo do funcional Ação, ou seja, igualando a zero a variação de S

$$\delta \int T dt = 0, \quad (2.2)$$

e impondo a conservação da energia  $E = T + V$ , onde V representa a energia potencial e E a energia total do sistema. Veremos na sequência como reescrever o Princípio da Mínima Ação na forma utilizada atualmente, sem a necessidade de impor em separado

a conservação da energia. Além disso, veremos também nesse capítulo que existe um funcional Ação, com variação nula que satisfaz a equação de Euler-Lagrange.

## 2.1 Abordagem Histórica

Maupertuis [2, 16, 17] é creditado pela formulação inicial do Princípio da Mínima Ação. Com esse princípio ele pretendia obter uma descrição física unificada para a natureza, um princípio que seria universal e que não se restringia só à descrição das leis do movimento de Newton. Primeiramente, em seu trabalho ele descreve o Princípio da Mínima Ação voltado para o comportamento da luz. Após ele tenta, sem sucesso, estendê-lo para mecânica. Uma descrição correta para mecânica só é proposta posteriormente por Euler.

Para termos um melhor entendimento do que levou Maupertuis a propor o Princípio da Mínima Ação é importante citarmos discussões que permeavam a idéia de propagação e refração da luz. Podemos destacar as discussões de Fermat e Descartes. Fermat havia relatado que era possível deduzir a lei de Snell - Descartes, ou segunda lei de refração, para meios mais densos no qual a luz se propagasse mais lentamente, abandonando assim a idéia vigente de que a luz tinha mais facilidade de se mover em meios mais densos. Apenas no século XIX, com o cientista francês L. Foucault provou experimentalmente que as idéias de Fermat em relação a velocidade da luz estavam corretas.

Fermat formula um princípio de mínimo tempo para a propagação da luz, ou seja, o percurso da luz era aquele em que se gastava o mínimo de tempo possível. Através desse princípio era possível explicar as leis de reflexão e da refração. Por outro lado, Maupertuis em vez de usar a idéia de propagação da luz em um caminho onde o tempo era mínimo, propôs que a luz percorresse um trajeto onde a Ação era mínima.

Maupertuis, em seus trabalhos publicados em 1744, tenta harmonizar princípios variacionais como o de Fermat, com descrições cartesianas e newtonianas. Nesses tra-

balhos, a Ação era descrita como sendo a soma dos deslocamentos multiplicados pelas velocidades de cada corpo para uma única partícula, podemos escrever a Ação como:

$$S = \sum \mathbf{v} \Delta x, \quad (2.3)$$

onde  $\mathbf{v}$  é a velocidade da partícula e  $\Delta \mathbf{x}$  um elemento da trajetória. Além disso, ele considerou que a idéia proposta por Fermat, de que a luz se propaga com uma velocidade maior em meio menos denso, não estava certa. Para elaborar a dedução do menor caminho a ser percorrido pela luz, Maupertuis modificou o princípio de Fermat, utilizando a idéia de que o trajeto em que a luz percorre é o que minimiza a Ação, e também, tentou estender sem muito sucesso suas idéias para a mecânica Newtoniana.

Apesar da grande contribuição de Maupertuis, o Princípio da Mínima Ação, que serviu de base para a formulação moderna da mecânica analítica, foi proposto por Euler. Partindo das idéias de Maupertuis, ele propôs um princípio da ação estacionária, estendido para a mecânica, onde a Ação é definida como a integral da velocidade sobre a trajetória da partícula, devido ela ser estacionária sua variação deveria ser nula

$$\delta \int_{x_a}^{x_b} m v dx = 0, \quad (2.4)$$

onde  $x_a$  e  $x_b$  são os pontos iniciais e finais do movimento e sujeita a lei de conservação da energia. Euler também relatou que sua formulação se restringia apenas a sistemas conservativos, ou seja, se houvesse dissipação a descrição seria diferente. A forma atual, e mais utilizada, do Princípio de Mínima Ação não é a de Euler e sim a de Hamilton. Essa forma pode ser descrita pela seguinte equação

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt = 0, \quad (2.5)$$

onde T é a energia cinética e V é a energia potencial. Veremos na sequência do capítulo

como obter a (2.5).

## 2.2 Princípio de d'Alembert e a Equação de Euler-Lagrange

A dedução da (2.5) está ligada ao problema do trabalho virtual. Nesta seção vamos revisar o Princípio de d'Alembert que parte do conceito do trabalho virtual, e está diretamente relacionado a equação de Euler-Lagrange.

O Princípio de d'Alembert é obtido à partir da formulação Newtoniana [18, 19, 20] que é caracterizada por um conjunto de equações diferenciais dadas por:

$$m_n \ddot{\mathbf{x}}_n = \mathbf{f}_n, \quad n = 1, \dots, N, \quad (2.6)$$

onde  $m_n$  e  $\mathbf{x}_n$  são a massa da n-ésima partícula e a posição, sujeita à força  $\mathbf{f}_n$ . Essa força sobre a n-ésima partícula, pode ser decomposta em termos da força aplicada  $\mathbf{F}_n$  e a força de vínculo  $\mathbf{F}'_n$ , ou seja,  $\mathbf{f}_n = \mathbf{F}_n + \mathbf{F}'_n$ . Assim podemos escrever

$$m_n \ddot{\mathbf{x}}_n = \mathbf{F}_n + \mathbf{F}'_n. \quad (2.7)$$

O trabalho virtual das forças de vínculo é nulo (caso em que não há forças de atrito envolvidas). Podemos expressar essa condição da seguinte forma

$$\sum_n \mathbf{F}'_n \delta \mathbf{x}_n = 0, \quad (2.8)$$

onde  $\delta \mathbf{x}_1, \delta \mathbf{x}_2, \dots, \delta \mathbf{x}_n$  são deslocamentos virtuais arbitrários. Usando a equação de movimento (2.7) podemos escrever a equação (2.8) de forma a eliminar as forças de vínculo, ou seja,

$$\sum_n (m_n \ddot{\mathbf{x}}_n - \mathbf{F}_n) \delta \mathbf{x}_n = 0. \quad (2.9)$$

Esta equação é conhecida como sendo o Princípio de d'Alembert.

Para verificar que o Princípio de d'Alembert equivale a equação de Euler-Lagrange, precisamos fazer algumas manipulações algébricas. Primeiro vamos reescrever o Princípio de d'Alembert usando coordenadas generalizadas, onde escrevemos  $\mathbf{x}$  como função das novas variáveis  $q_1, q_2, \dots, q_m, t$ . Temos, então

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_n(q_1, q_2, \dots, q_m, t), \quad n = 1, \dots, N. \quad (2.10)$$

Derivando a relação (2.10) em relação ao tempo, obtemos o seguinte resultado:

$$\dot{\mathbf{x}}_n = \frac{d\mathbf{x}_n}{dt} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{x}_n}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{x}_n}{\partial t} dt \quad (2.11)$$

e o deslocamento virtual pode ser escrito como

$$\delta \mathbf{x}_n = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{x}_n}{\partial q_i} \delta q_i. \quad (2.12)$$

Substituindo (2.12) no Princípio de d'Alembert (2.9), obtemos:

$$\sum_{i=1}^m \left[ \sum_{n=1}^N (m_n \ddot{\mathbf{x}}_n - \mathbf{F}_n) \frac{\partial \mathbf{x}_n}{\partial q_i} \right] \delta q_i = 0. \quad (2.13)$$

Manipulando o primeiro termo entre colchetes da

$$\ddot{\mathbf{x}}_n \left( \frac{\partial \mathbf{x}_n}{\partial q_i} \right) = \frac{d}{dt} \left( \dot{\mathbf{x}}_n \frac{\partial \mathbf{x}_n}{\partial q_i} \right) - \dot{\mathbf{x}}_n \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_n}{\partial q_i} \right), \quad (2.14)$$

e substituindo (2.14) em (2.13), somos conduzidos a

$$\sum_{i=1}^m \left[ \sum_{n=1}^N \left( \frac{d}{dt} \left( m_n \dot{\mathbf{x}}_n \frac{\partial \mathbf{x}_n}{\partial q_i} \right) - m_n \dot{\mathbf{x}}_n \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_n}{\partial q_i} \right) - \mathbf{F}_n \frac{\partial \mathbf{x}_n}{\partial q_i} \right) \right] \delta q_i = 0. \quad (2.15)$$

Definimos agora a seguinte quantidade  $Q_i = \sum_{n=1}^N \mathbf{F}_n \frac{\partial \mathbf{x}_n}{\partial q_i}$ , e além disso, de (2.11)

podemos facilmente deduzir a relação  $\frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_n}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathbf{x}_n}{\partial q_i}$ . Assim de (2.15) ficamos com

$$\sum_{i=1}^m \left[ \sum_{n=1}^N \left( \frac{d}{dt} \left( m_n \dot{\mathbf{x}}_n \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_n}{\partial \dot{q}_i} \right) - m_n \dot{\mathbf{x}}_n \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_n}{\partial q_i} - Q_i \right) \right] \delta q_i = 0. \quad (2.16)$$

Ainda necessitamos fazer a seguinte observação:

$$\frac{\partial}{\partial q_i} (\dot{\mathbf{x}}_n^2) = 2 \dot{\mathbf{x}}_n \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_n}{\partial q_i},$$

e substituindo em (2.16), obtemos

$$\sum_{i=1}^m \left[ \sum_{n=1}^N \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \frac{1}{2} m_n \dot{\mathbf{x}}_n^2 \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{1}{2} m_n \dot{\mathbf{x}}_n^2 \right) - Q_i \right) \right] \delta q_i = 0. \quad (2.17)$$

Sendo  $T = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N m_n \dot{\mathbf{x}}_n^2$  a energia cinética total do sistema, temos

$$\sum_{i=1}^m \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i \right] \delta q_i = 0. \quad (2.18)$$

Como  $\delta q_i$  é uma variação arbitrária, a expressão dentro dos colchetes deve ser identicamente nula, ou seja,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.19)$$

Se as forças derivam de um potencial  $\mathbf{F}_n = -\nabla_n V$ , onde  $V(r_1, \dots, r_N, t)$ , podemos reescrever  $Q_i$  como:

$$Q_i = - \sum_{n=1}^N \nabla_n V \frac{\partial \mathbf{x}_n}{\partial q_i} = - \frac{\partial V}{\partial q_i}. \quad (2.20)$$

Substituindo (2.20) em (2.19) resulta

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} (T - V) = 0. \quad (2.21)$$



Como o potencial não depende das velocidades, temos  $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} = 0$ . Portanto, podemos escrever a (2.21) como:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (T - V) \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} (T - V) = 0. \quad (2.22)$$

Definimos a função  $L = T - V$ , como sendo a Lagrangiana do sistema, com isso podemos então escrever a equação (2.22) em termos dessa Lagrangiana

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (2.23)$$

que é conhecida como equação de Euler-Lagrange.

## 2.3 Princípio de Hamilton e a Equação de Euler-Lagrange

A partir do princípio de d'Alembert podemos encontrar o chamado Princípio de Hamilton [18, 19, 20]. Para chegar a esse Princípio de Hamilton, vamos calcular a variação da Energia Cinética, em função de uma variação na velocidade  $\delta \dot{\mathbf{x}}$ . Para  $N$  partículas a cada instante de tempo temos:

$$\begin{aligned} \delta T &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N m_n ((\dot{\mathbf{x}}_n + \delta \dot{\mathbf{x}}_n)^2 - \dot{\mathbf{x}}_n^2) \\ \delta T &= \sum_{n=1}^N m_n \dot{\mathbf{x}}_n \delta \dot{\mathbf{x}}_n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N m_n \delta \dot{\mathbf{x}}_n^2. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Supondo que  $\delta \dot{\mathbf{x}} \ll 1$  e desprezando o termo de ordem  $\delta \dot{\mathbf{x}}^2$  na (2.24), obtemos

$$\delta T = \sum_{n=1}^N m_n \dot{\mathbf{x}}_n \delta \dot{\mathbf{x}}_n. \quad (2.25)$$

Integrando a equação (2.25) em ambos os lados em relação ao tempo

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta T dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{n=1}^N m_n \dot{\mathbf{x}}_n \delta \dot{\mathbf{x}}_n dt. \quad (2.26)$$

Podemos simplificar a (2.26) identificando a variação na velocidade com a variação na posição  $\delta \dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt} \delta \mathbf{x}$  e integrando por partes

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \delta T dt &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{n=1}^N m_n \dot{\mathbf{x}}_n \frac{d}{dt} \delta \mathbf{x}_n dt \\ &= \sum_{n=1}^N m_n \dot{\mathbf{x}}_n \delta \mathbf{x}_n \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{n=1}^N m_n \ddot{\mathbf{x}}_n \delta \mathbf{x}_n dt \\ \int_{t_0}^{t_1} \delta T dt &= - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{n=1}^N m_n \ddot{\mathbf{x}}_n \delta \mathbf{x}_n dt, \end{aligned} \quad (2.27)$$

onde  $\sum_{n=1}^N m_n \dot{\mathbf{x}}_n \delta \mathbf{x}_n \Big|_{t_0}^{t_1} = 0$  para um deslocamento virtual  $\delta \mathbf{x}$ . Somando em ambos os lados da equação (2.27) o trabalho virtual das forças externas  $\int_{t_0}^{t_1} \sum_{n=1}^N \mathbf{F}_n \delta \mathbf{x}_n dt$ , temos

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \sum_{n=1}^N \mathbf{F}_n \delta \mathbf{x}_n) dt = - \int_{t_0}^{t_1} (\sum_{n=1}^N (m_n \ddot{\mathbf{x}}_n - \mathbf{F})_n \delta \mathbf{x}_n) dt. \quad (2.28)$$

Agora comparando a equação (2.28) com a equação (2.9), chegamos a conclusão de que

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \sum_{n=1}^N \mathbf{F}_n \delta \mathbf{x}_n) dt = 0, \quad (2.29)$$

onde (2.29) é conhecido como Princípio de Hamilton. Se as forças são conservativas podemos escrever:

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta(T - V) dt = 0, \quad (2.30)$$

se tivermos um sistema holonômico resulta

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt = 0. \quad (2.31)$$

Como descrita anteriormente na seção 2.1, a equação (2.31) é a forma atual de se escrever o Princípio da Mínima Ação. Veremos que (2.31) nos fornece a equação de movimento correta, integrando do lado direito da (2.28), sem a necessidade de impôr em separado a conservação da energia. No entanto, é importante reforçar que o Princípio de Hamilton, escrito como na (2.31), só é válido para sistemas conservativos. Denotamos como função Lagrangiana a seguinte quantidade:  $L = T - V$ . Portanto, de (2.31) podemos escrever que

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0. \quad (2.32)$$

Por fim, a quantidade a ser extremizada é a Ação do sistema, dada pela integral da Lagrangiana, ou seja,

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L dt. \quad (2.33)$$

Para a grande maioria dos sistemas físicos conservativos, a função Lagrangiana depende apenas da posição e da velocidade das partículas (devido à energia potencial ser função apenas da posição nestes casos). Portanto, a Ação

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(x_1, \dots, x_N, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N) dt \quad (2.34)$$

é um funcional que depende das funções incógnitas  $x_i (i = 1, \dots, N)$  e suas derivadas. A trajetória de movimento do sistema físico, dada pelas funções  $x_i^*$  é a que extremiza o funcional S, ou seja,  $\delta S = 0$ . Fixando as posições iniciais e finais do movimento,  $x_i^*(t_0)$  e  $x_i^*(t_1)$ , qualquer função  $x_i$  candidata a trajetória da  $i$ -ésima partícula deve satisfazer

$x_i(t_0) = x_i(t_0)$  e  $x_i(t_1) = x_i^*(t_1)$ . Sem perda de generalidade podemos escrever:

$$\begin{aligned} x_i(t) &= x_i^*(t) + \delta x_i(t) \\ &= x_i^*(t) + \epsilon \mu x_i(t), \end{aligned} \tag{2.35}$$

onde  $\epsilon \in \mathbb{R}$ , e  $\delta x_i(t) = \epsilon \mu x_i(t)$  é uma função diferenciável qualquer, que satisfaz  $\delta x_i(t_0) = \delta x_i(t_1) = 0$ , ou seja,

$$\mu(t_0) = \mu(t_1) = 0. \tag{2.36}$$

Temos ainda

$$\dot{x}_i(t) = \dot{x}_i^*(t) + \epsilon \dot{\mu}(t). \tag{2.37}$$

Substituindo (2.35) e (2.36) na (2.34) a Ação passa a depender do parametro  $\epsilon$ . Como  $x_i^*$  extremiza a Ação, temos:

$$\delta S = \left. \frac{dS}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0, \tag{2.38}$$

portanto

$$\begin{aligned} \left. \frac{dS}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} &= \left. \frac{d}{d\epsilon} \int_{t_0}^{t_1} L(x_1, \dots, x_N, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N) dt \right|_{\epsilon=0} \\ &= \left. \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial \epsilon} L(x_1, \dots, x_N, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N) dt \right|_{\epsilon=0} \\ &= \left. \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \epsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \epsilon} \right) dt \right|_{\epsilon=0} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^N \left( \mu_i \frac{\partial L}{\partial x_i} + \dot{\mu}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) dt = 0. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Integrando por partes o segundo termo em (2.39), temos

$$\frac{dS}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} = \sum_{n=1}^N \mu_i(t) \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^N \mu_i \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) dt = 0$$

e usando a condição (2.36), obtemos:

$$\sum_{i=1}^N \int_{t_0}^{t_1} \mu_i \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) dt = 0. \quad (2.40)$$

A integral (2.40), deve ser nula para qualquer função  $\mu_i(t)$ , satisfazendo a condição (2.36). Do lema fundamental do cálculo das variações [19], temos

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad (2.41)$$

que é conhecida como equação de Euler-Lagrange. Finalmente, as soluções da (2.41), satisfazem as condições  $x_i^*(t_0)$  e  $x_i^*(t_1)$  (ou, de forma equivalente  $\dot{x}_i^*(t_0)$  e  $\dot{x}_i^*(t_1)$ ) são as trajetórias das partículas do sistema. No próximo capítulo veremos alguns tipos de formulações Lagrangianas que foram utilizadas para trabalhar com sistemas não conservativos e apontar suas falhas. Também apresentaremos uma nova proposta para esse tipo de sistema.



## Capítulo 3

# Formulação Lagrangiana Para Sistemas Não Conservativos

Atualmente a maioria dos métodos utilizados na mecânica clássica lidam com sistemas conservativos, embora grande parte dos problemas físicos reais sejam não conservativos. Várias técnicas foram utilizadas para se obter um método macroscópico para lidar com forças de atrito e outras formas de dissipação, ou seja, com sistemas não conservativos. Uma das maneiras adotadas é usando a função de dissipação de Rayleigh [19], que é utilizada quando temos forças proporcionais a velocidade. Outra maneira seria utilizando Lagrangianas não físicas [21, 22] na tentativa de obter a equação de movimento desejada. Mas o principal objetivo do capítulo será apresentar a formulação proposta por Riewe [6], que é utilizada no trabalho para descrever alguns sistemas físicos não conservativos. Revisamos abaixo as idéias básicas por trás destes métodos.

### 3.1 Função de Dissipação de Rayleigh

Nesta seção vamos fazer uma breve descrição da função de dissipação de Rayleigh [19], um dos métodos mais comuns para tratar de forças não conservativas. Seja  $\mathbf{x}_n$  o

vetor posição da  $n$ -ésima partícula de um sistema ( $n = 1, 2, \dots, N$ ). Então a força total  $\mathbf{f}_n$  agindo sobre esta partícula é dada por:

$$\mathbf{f}_n = \mathbf{F}_n + \mathbf{F}'_n - k_n \dot{\mathbf{x}}_n, \quad (3.1)$$

onde  $\mathbf{F}_n$  são as forças externas conservativas,  $\mathbf{F}'_n$  são as forças de vínculo e  $k_n \dot{\mathbf{x}}_n$  são forças dissipativas (atrito). Com isso a equação (2.6), pode ser escrita como:

$$m_n \ddot{\mathbf{x}}_n = \mathbf{F}_n + \mathbf{F}'_n - k_n \dot{\mathbf{x}}_n, \quad n = 1, \dots, N. \quad (3.2)$$

Usando a condição de que o trabalho virtual das forças de vínculo é nulo

$$\sum_n \mathbf{F}'_n \delta \mathbf{x}_n = 0, \quad (3.3)$$

chegamos a conclusão de que

$$\sum_n (m_n \ddot{\mathbf{x}}_n - \mathbf{F}_n) \delta \mathbf{x}_n + \sum_n k_n \dot{\mathbf{x}}_n \delta \mathbf{x}_n = 0. \quad (3.4)$$

Escrevendo  $\mathbf{x}$  como sendo função explícita de  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , temos para o primeiro termo da (3.4) o resultado

$$\sum_n (m_n \ddot{\mathbf{x}}_n - \mathbf{F}_n) \delta \mathbf{x}_n = \sum_{i=1}^m \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - F_i \right] \delta q_i, \quad (3.5)$$

onde  $T = \sum_{n=1}^N \frac{m_n \dot{\mathbf{x}}_n^2}{2}$  é a energia cinética do sistema. Agora vamos reescrever o segundo termo da (3.4) usando a equação (2.12) e a relação  $\frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_n}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathbf{x}_n}{\partial q_i}$ , ficamos com:

$$\sum_n k_n \dot{\mathbf{x}}_n \delta \mathbf{x}_n = \sum_{n=1}^N \left( \sum_{i=1}^m k_n \dot{\mathbf{x}}_n \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_n}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i. \quad (3.6)$$



Introduzindo a função de dissipação de Rayleigh

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (k_{ni} \dot{\mathbf{x}}_{ni}^2 + k_{nj} \dot{\mathbf{x}}_{nj}^2 + k_{nk} \dot{\mathbf{x}}_{nk}^2) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N k_n \dot{\mathbf{x}}_n^2, \quad (3.7)$$

e usando

$$\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \dot{\mathbf{x}}_n} = \sum_{n=1}^N k_n \dot{\mathbf{x}}_n \quad (3.8)$$

na equação (3.6), obtemos:

$$\sum_n k_n \dot{\mathbf{x}}_n \delta \mathbf{x}_n = \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \dot{\mathbf{x}}_n} \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_n}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i = \sum_{n=1}^m \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i. \quad (3.9)$$

Com isso a equação (3.4) pode ser escrita de forma mais conveniente como

$$\sum_{i=1}^m \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - F_i + \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \dot{q}_i} \right] \delta q_i = 0, \quad (3.10)$$

onde  $\delta q_i$  é uma variação arbitrária e, conseqüentemente, a equação (3.10) só será satisfeita se o termo dentro da soma for identicamente nulo:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - F_i + \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \dot{q}_i} = 0. \quad (3.11)$$

Se as forças não dissipativas, expressas por  $F_i$ , derivam de uma energia potencial escalar, podemos reescrever a equação (3.11) da seguinte maneira:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (3.12)$$

onde  $L = T - V$ . Finalmente, nesta formulação a Lagrangiana é a mesma de sistemas conservativos. A informação sobre as forças não conservativas está toda contida na função de Rayleigh. Embora a equação (3.12) generalize a equação de Euler-Lagrange,

ela não é obtida à partir do Princípio da Mínima Ação, e sim através do trabalho virtual das forças agindo sobre o sistema.

### 3.2 Lagrangianas Não Físicas

Outros métodos foram desenvolvidos para se trabalhar com sistemas não conservativos. Nestes métodos são formuladas Lagrangianas, cuja equação de movimento é obtida à partir do Princípio da Mínima Ação. Embora estas equações descrevam corretamente os movimentos das partículas em sistemas não conservativos, as Lagrangianas utilizadas são não físicas, no sentido de que o momentum e o Hamiltoniano obtidos não tem significado físico. Para ilustrar alguns exemplos, vamos considerar o caso do movimento unidimensional de uma partícula sob a ação de uma força resistiva proporcional à velocidade. Como primeiro exemplo temos a Lagrangiana [21]

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 e^{\frac{\gamma}{m}t}, \quad (3.13)$$

que substituída na equação de Euler-Lagrange nos dá a seguinte equação de movimento

$$e^{\frac{\gamma}{m}t}(m\ddot{\mathbf{x}} + \gamma\dot{\mathbf{x}}) = 0, \quad (3.14)$$

com momentum conjugado igual a

$$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{x}}e^{\frac{\gamma}{m}t} \quad (3.15)$$

e Hamiltoniano

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}e^{-\frac{\gamma}{m}t}. \quad (3.16)$$

A equação de movimento correta é obtida de (3.14) se o fator  $e^{\frac{\gamma}{m}t}$  é ignorado. No

entanto, o momentum (3.15) e o Hamiltoniano (3.16) não tem significado físico, porque nas suas definições usuais não temos nenhum fator, que no caso é a  $e^{\frac{\gamma}{m}t}$ , as multiplicando. Um segundo tipo de Lagrangiana para este mesmo problema é formulação proposta em [6], onde uma coordenada auxiliar  $y$ , que descreve um sistema com tempo reverso ( $t \rightarrow -t$ ), é introduzida. A Lagrangiana para este caso é:

$$L = m\dot{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{y}} + \frac{1}{2}\gamma(\mathbf{x}\dot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{x}}\mathbf{y}), \quad (3.17)$$

que nos formesse duas equações de movimento

$$m\ddot{\mathbf{x}} + \gamma\dot{\mathbf{x}} = 0, \quad m\ddot{\mathbf{y}} - \gamma\dot{\mathbf{y}} = 0, \quad (3.18)$$

dois momenta

$$p_x = m\dot{\mathbf{y}} - \frac{1}{2}\gamma\mathbf{y}, \quad p_y = m\dot{\mathbf{x}} + \frac{1}{2}\gamma\mathbf{x} \quad (3.19)$$

e Hamiltoniano

$$H = \frac{\mathbf{p}_x\mathbf{p}_y}{m} + \frac{\gamma^2}{2m}\mathbf{x}\mathbf{y} + \frac{\gamma}{2m}(yp_y - xp_x). \quad (3.20)$$

Novamente, encontramos um impasse em relação ao significado físico do momentum e do Hamiltoniano do sistema, pois os resultados não nos dão as definições usuais, o que nos leva a concluir que este outro tipo de descrição não é adequada para sistemas não conservativos. Além disso, em todos estes métodos apresentados, nenhum deles nos dá uma descrição Lagrangiana geral para sistema não conservativo, e ainda, esses métodos apresentam falhas na interpretação física.

### 3.3 Proposta de Riewe para uma Formulação Lagrangiana

Riewe [6], na busca de uma formulação física para sistemas dissipativos, propôs um novo Princípio da Mínima Ação através do uso de derivadas de ordem não inteira. Para entender a idéia de Riewe vamos fazer a seguinte observação: se tivermos um termo na Lagrangiana proporcional a  $(x^n)^2$ , onde  $x^n \equiv \frac{d^n \mathbf{x}}{dt^n}$ , temos como resultado na equação de movimento um termo proporcional a  $x^{2n}$ . Tomamos como exemplo a seguinte Lagrangiana quadrática:

$$L(t, x, x^n) = ax^2 + b(x^n)^2. \quad (3.21)$$

A equação de movimento fica

$$2ax + 2bx^{2n} = 0. \quad (3.22)$$

Como exemplo, para o Oscilador Harmonico Simples, temos:

$$L(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 - \frac{1}{2}k\mathbf{x}^2, \quad (3.23)$$

e a equação de movimento encontrada é

$$m\ddot{\mathbf{x}} + k\mathbf{x} = 0. \quad (3.24)$$

Com isso concluímos que se tivermos uma derivada de ordem  $n$  em uma Lagrangiana quadrática (exemplo Oscilador Harmonico Simples), vamos ter como resultado na equação de movimento um termo com derivada de ordem  $2n$ . Se tivermos uma força proporcional a velocidade, ou seja,  $\mathbf{F} \cong \frac{d\mathbf{x}}{dt}$  na Lagrangiana quadrática, com base na observação dos exemplos anteriores, deveríamos ter um termo proporcional à  $\left(\frac{d^{\frac{1}{2}}\mathbf{x}}{dt^{\frac{1}{2}}}\right)^2$ , pois na equação de movimento, vamos ter o dobro da ordem da derivada. É importante ressaltar que

nesta seção só está apresentada a idéia utilizada por Riewe para propor uma formulação Lagrangiana geral; sua construção será vista a rigor no capítulo 5. Em virtude da necessidade de usar derivadas de ordem não inteira, dedicaremos o próximo capítulo a uma revisão do cálculo fracionário.



## Capítulo 4

# Cálculo Fracionário

O cálculo fracionário é uma generalização do cálculo usual onde são estudadas derivadas e integrais de ordem arbitrária. Ele teve sua origem a mais de três séculos a partir de especulações feitas por l'Hopital e Leibniz, quando foi sugerido que o valor de uma variação de ordem meia,  $d^{\frac{1}{2}}x$ , deveria ser  $x\sqrt{dx} : x$  [8]. Além de l'Hopital e Leibniz outros matemáticos contribuíram de forma expressiva para o desenvolvimento do cálculo fracionário, dentre eles podemos citar, Euler, Laplace, Grunwald, Letnikov, Riemann, etc. Embora o cálculo fracionário seja tão antigo quanto o cálculo usual, ele só começou a ser utilizado de forma mais expressiva nas ultimas tres décadas, quando surgiram um grande número de aplicações em física e engenharia.

Temos várias definições para o cálculo fracionário, uma das mais antigas foi proposta por Lacroix [8] e baseia-se na substituição das funções fatoriais  $(\beta - \alpha)!$  e  $\alpha!$  por funções Gama de Euler. Da definição usual para derivada de uma função potência de ordem  $\beta \in \mathbb{N}$ , temos

$$\frac{d^\alpha x^\beta}{dx^\alpha} = \frac{\beta!}{(\beta - \alpha)!} x^{\beta - \alpha}, \quad \beta \geq \alpha. \quad (4.1)$$

Reescrevendo os fatoriais em termos da função Gamma, chegamos ao seguinte resultado:

$$\frac{d^\alpha x^\beta}{dx^\alpha} = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} x^{\beta - \alpha}. \quad (4.2)$$

Na proposta de Lacroix, as derivadas de ordem não inteira são obtidas pela continuação analítica da (4.2), onde  $\alpha$  e  $\beta$  são agora números reais positivos e não mais apenas inteiros. Para um caso particular, onde  $\alpha = \frac{1}{2}$  e  $\beta = 1$ , temos

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} x}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})} x^{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}. \quad (4.3)$$

Este resultado é o mesmo encontrado na definição mais recente de Riemann-Liouville para derivadas fracionárias. Já a definição de derivada fracionária de Grünwald-Letnikov [8, 10, 11, 14, 23], considerada como a mais geral, deriva da continuação analítica da definição usual de derivada. Para um  $\alpha \in \mathbb{R}$  ela é definida pelo limite

$$D_f^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{\alpha}{m} f(x + (\alpha - m)h). \quad (4.4)$$

A formulação de Grünwald-Letnikov não é muito utilizado para cálculos analíticos devido a dificuldade de trabalhar com a definição (4.4). Por outro lado, na definição de Riemann-Liouville [8, 10, 11, 14, 15, 23], a mais popular entre os matemáticos, a derivada fracionária de ordem  $\alpha$  é dada por:

$${}_a D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x - t)^{n - \alpha - 1} f(t) dt. \quad (4.5)$$

Embora a definição de Riemann-Liouville seja a mais usada entre os matemáticos, ela apresenta limitações para o uso em aplicações, como por exemplo, a derivada de uma constante não é nula e as condições de contorno das equações diferenciais envolvendo essas derivadas não tem interpretação física direta. Na busca de formular uma derivada



mais adequada a aplicações, Caputo muda a ordem em que são feitas a derivada e a integração em (4.5), ou seja, agora temos a integral fracionária da derivada de ordem inteira da função. Assim ficamos com:

$${}_a D_f^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^x (x - t)^{n - \alpha - 1} \frac{d^n f(t)}{dx^n} dt. \quad (4.6)$$

Existem outros tipos de definição para o cálculo fracionário que podem ser encontradas em [10, 11, 14, 23], mas na sequência deste capítulo vamos nos deter somente na formulação de Riemann-Liouville e Caputo.

## 4.1 Cálculo Fracionário de Riemann-Liouville

Nesta seção serão apresentadas as integrais e derivadas de Riemann-Liouville e algumas de suas propriedades.

### 4.1.1 Integrais Fracionárias de Riemann-Liouville

Na formulação de Riemann-Liouville a definição de integral fracionária vem da continuação analítica da fórmula de Cauchy. Seja  $f$  uma função integrável em  $[a, x]$  e  $n \in \mathbb{N}$ , temos para a  $n$ -ésima integral de  $f(x)$

$$J^n f(x) = \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \dots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n. \quad (4.7)$$

A fórmula, ou teorema de Cauchy nos diz que a integral repetida (4.7) pode ser reescrita como uma integral simples

$$J^n f(x) = \int_a^x f(x) (dx)^n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt. \quad (4.8)$$

Para verificar a validade da fórmula de Cauchy, vamos antes mostrar que podemos

reescrever a integral de qualquer função  $f(x)$  como:

$$\int_a^x f(x)dx = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt. \quad (4.9)$$

É fácil verificar (4.9) tomando derivadas do seu lado direito

$$\begin{aligned} \int_a^x f(x)(dx) &= \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} \left[ \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} (x-t)^{n-1} f(t)dt + (x-x)^{n-1} f(x) \right] \\ &= \frac{1}{(n-2)!} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} \int_a^x (x-t)^{n-2} f(t)dt \\ &= \frac{1}{(n-2)!} \frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}} \left[ \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} (x-t)^{n-2} f(t)dt + (x-x)^{n-2} f(x) \right] \\ &= \frac{1}{(n-3)!} \frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}} \int_a^x (x-t)^{n-3} f(t)dt, \end{aligned}$$

então continuando sucessivamente, a  $j$ -ésima derivada fica

$$\int_a^x f(x)(dx) = \frac{1}{(n-j)!} \frac{d^{n-j}}{dx^{n-j}} \int_a^x (x-t)^{n-j} f(t)dt. \quad (4.10)$$

Fazendo  $j = n$  o lado direito reduz-se a integral da função  $f(x)$ . Para provar a fórmula de Cauchy (4.8), integramos sucessivas vezes a equação (4.9). Para primeira integral temos

$$\begin{aligned} \int_a^x dt_2 \int_a^{t_2} f(t_1)(dt_1) &= \int_a^x \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dt_2^{n-1}} \int_a^{t_2} (t_2-t_1)^{n-1} f(t_1)dt_1 dt_2 \\ &= \int_a^x \frac{1}{(n-1)!} \frac{d}{dt_2} \frac{d^{n-2}}{dt_2^{n-2}} \int_a^{t_2} (t_2-t_1)^{n-1} f(t_1)dt_1 dt_2 \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} \int_a^x (x-t_1)^{n-1} f(t_1)dt_1 \\ &\quad - \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-2}}{da^{n-2}} \int_a^a (a-t_1)^{n-1} f(t_1)dt_1, \quad (4.11) \end{aligned}$$

como o segundo termo é nulo, ficamos com

$$\int_a^x dt_2 \int_a^{t_2} f(t_1)(dt_1) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} \int_a^x (x-t_1)^{n-1} f(t_1) dt_1. \quad (4.12)$$

Integrando novamente:

$$\begin{aligned} \int_a^x dt_3 \int_a^{t_3} dt_2 \int_a^{t_2} f(t_1) dt_1 &= \int_a^x dt_3 \int_a^{t_3} dt_2 \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dt_2^{n-1}} \int_a^{t_2} (t_2-t_1)^{n-1} f(t_1) dt_1 \\ &= \int_a^x dt_3 \int_a^{t_3} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d}{dt_2} \frac{d^{n-1}}{dt_2^{n-1}} \int_a^{t_2} (t_2-t_1)^{n-1} f(t_1) dt_1 dt_2 \\ &= \int_a^x \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-2}}{dt_3^{n-2}} \int_a^{t_3} (t_3-t_1)^{n-1} f(t_1) dt_1 dt_3 \\ &= \int_a^x \frac{1}{(n-1)!} \frac{d}{dt_3} \frac{d^{n-3}}{dt_3^{n-3}} \int_a^{t_3} (t_3-t_1)^{n-1} f(t_1) dt_1 dt_3 \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}} \int_a^x (x-t_1)^{n-1} f(t_1) dt_1. \end{aligned}$$

Finalmente, se integrarmos  $n$  vezes chegamos a fórmula de Cauchy (4.8). Agora definimos um número real positivo  $\alpha$ , onde  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ , a continuação analítica da fórmula de Cauchy, chamada de integrais de Riemann-Liouville à esquerda e à direita, respectivamente, é dada por [10, 11, 14, 23]:

$${}_a J_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \quad (4.13)$$

e

$${}_x J_b^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt. \quad (4.14)$$

Note que a continuação analítica do teorema de Cauchy só foi feita de  $x$  até  $a$ , a mesma pode ser estendida de  $x$  até  $b$ . De fato essa extensão é importante, pois a Ação descrita no capítulo 5 os limites de integração vão de  $a$  até  $b$ . Além disso, as integrais fracionárias (4.13) e (4.14) são a base dos cálculos fracionários de Riemann-Liouville e de

Caputo. Antes de definir as derivadas fracionárias veremos algumas propriedades das integrais (4.13) e (4.14). Sejam  $\alpha, \beta \geq 0$ , vamos mostrar que as integrais fracionárias de Riemann- Liouville satisfazem a propriedade de semi-grupo

$${}_a J_x^\alpha {}_a J_x^\beta = {}_a J_x^{\alpha+\beta} \quad (4.15)$$

e

$${}_x J_b^\alpha {}_x J_b^\beta = {}_x J_b^{\alpha+\beta}. \quad (4.16)$$

Provaremos apenas (4.15), para a integral de Riemann-Liouville à direita (4.16) a prova segue-se de forma similar. Temos

$${}_a J_x^\alpha {}_a J_x^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \int_a^t (t-u)f(u)du dt. \quad (4.17)$$

Usando o teorema de Fubini's, podemos trocar a ordem de integração, ou seja,

$${}_a J_x^\alpha {}_a J_x^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(u) \int_u^x (x-t)^{\alpha-1} (t-u)^{\beta-1} dt du. \quad (4.18)$$

Agora vamos fazer a seguinte mudança de variável  $t = s(x-u) + u$ , temos que  $dt = (x-u)ds$ , assim ficamos com:

$${}_a J_x^\alpha {}_a J_x^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(u) (x-u)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} ds du, \quad (4.19)$$

onde identificamos a segunda integral como sendo a função Beta de Euler:

$$\int_0^1 s^{\beta-1} (1-s)^{\alpha-1} ds = B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \quad (4.20)$$

Portanto, chegamos a equação (4.15)

$${}_a J_x^\alpha {}_a J_x^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_a^x f(u)(x - u)^{\alpha + \beta - 1} du = {}_a J_x^{\alpha + \beta} f(x). \quad (4.21)$$

Como consequência desta propriedade os operadores integrais (4.13) e (4.14) comutam, ou seja,

$${}_a J_x^\alpha {}_a J_x^\beta f(x) = {}_a J_x^\beta {}_a J_x^\alpha f(x) \quad (4.22)$$

e

$${}_b J_x^\alpha {}_b J_x^\beta f(x) = {}_b J_x^\beta {}_b J_x^\alpha f(x) \quad (4.23)$$

Como exemplo, calculamos agora a integral de Riemann-Liouville para a função potência  $f(x) = (x - a)^\gamma$ , onde  $\gamma > -1$ . Temos:

$${}_a J_x^\alpha (x - a)^\gamma = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha - 1} (t - a)^\gamma dt, \quad (4.24)$$

fazendo a seguinte mudança de variável  $t = s(x - a) + a$ , temos que  $dt = (x - a)ds$ , o que nos dá

$${}_a J_x^\alpha (x - a)^\gamma = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x - sx + sa - a)^{\alpha - 1} (s(x - a) + a - a)^\gamma (x - a) ds. \quad (4.25)$$

Rearranjando os termos, obtemos:

$${}_a J_x^\alpha (x - a)^\gamma = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x - a)^{\gamma + \alpha} \int_0^1 s^\gamma (1 - s)^{\alpha - 1} ds. \quad (4.26)$$

Identificamos a integral em (4.26) como sendo a função Beta de Euler:

$$\int_0^1 s^\gamma (1-s)^{\alpha-1} ds = \beta(\alpha, \gamma+1) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)}. \quad (4.27)$$

Substituindo a equação (4.27) em (4.26), ficamos com:

$${}_a J_x^\alpha (x-a)^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} (x-a)^{\gamma+\alpha}. \quad (4.28)$$

Finalmente, seguindo os passos análogos para a integral fracionária de Riemann-Liouville à direita, chegamos ao seguinte resultado

$${}_x J_b^\alpha (b-x)^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} (b-x)^{\gamma+\alpha}, \quad (4.29)$$

onde  $\alpha > 0$ ,  $\gamma > -1$  e  $x > 0$ . Note que impomos  $\gamma > -1$ . De fato, para  $\gamma \leq -1$  a função  $f(x) = (x-a)^\gamma$  deixa de ser integrável em  $[a, x]$ . Além disso, podemos ver que para  $\gamma = -1$  o lado direito da (4.28) diverge devido aos polos da função Gamma. É importante notar que para  $\alpha$  inteiro, a (4.28) reproduz o resultado usual para integrais de ordem inteira. Por exemplo, escolhendo  $\alpha = \gamma = 1$  e  $a = 0$ , temos

$${}_0 J_x^1 x = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3)} x^2 = \frac{x^2}{2} = \int_0^x t dt. \quad (4.30)$$

Agora para  $a = 0$ ,  $\alpha = 1$  e  $\gamma = 2$ , ficamos com:

$${}_0 J_x^1 x^2 = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(4)} x^3 = \frac{x^3}{3} = \int_0^x t^2 dt. \quad (4.31)$$

Finalmente, para  $a = 0$ ,  $\alpha = 2$  e  $\gamma = 1$ , temos:

$${}_0 J_x^2 x = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(4)} x^3 = \frac{x^3}{6} = \int_0^x \int_0^{t_2} t_1 dt_1 dt_2. \quad (4.32)$$

### 4.1.2 Derivadas Fracionárias de Riemann-Liouville

As integrais fracionárias (4.13) e (4.14) são de grande importância para a definição das derivadas fracionárias de Riemann-Liouville. Para definir essas derivadas, vamos utilizar a seguinte propriedade do cálculo usual:

$$D_x^m f(x) = D_x^n J_x^{n-m} f(x), \quad (4.33)$$

onde  $m < n$  são inteiros positivos e  $D_x^n$  é uma derivada usual de ordem inteira  $n$ . Seja  $\alpha > 0$  um número real, e  $n$  um inteiro positivo satisfazendo  $n - 1 \leq \alpha < n$ . Definimos as derivadas à esquerda e à direita de Riemann-Liouville, respectivamente, como [10, 11, 14, 23]:

$${}_a D_x^\alpha f(x) = D_x^n J_x^{n-\alpha} f(x) \quad (4.34)$$

e

$${}_x D_b^\alpha f(x) = (-1)^n D_x^n J_b^{n-\alpha} f(x). \quad (4.35)$$

Usando as integrais (4.13) e (4.14) em (4.34) e (4.35), respectivamente, obtemos:

$${}_a D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt \quad (4.36)$$

e

$${}_x D_b^\alpha f(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^b (t-x)^{n-\alpha-1} f(t) dt, \quad (4.37)$$

onde  $\frac{d^n}{dt^n} = D_x^n$  é uma derivada de ordem inteira. É importante observar que, diferente das derivadas usuais, as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville (4.36) e (4.37) são

operadores não locais. Enquanto a derivada (4.36) depende de valores à esquerda de  $x$ , a (4.37) depende de valores à direita. No entanto, é importante salientar que para  $\alpha$  inteiro, as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville se reduzem a derivadas usuais,  ${}_a D_x^\alpha = \frac{d^\alpha}{dx^\alpha}$  e  ${}_x D_b^\alpha = (-1)^\alpha \frac{d^\alpha}{dx^\alpha}$ . Apesar dos termos  $(x-t)^{n-\alpha-1}$  e  $(t-x)^{n-\alpha-1}$  nos integrandos de (4.36) e (4.37), divergirem para  $t \rightarrow x$ , as integrais definindo as derivadas fracionárias convergem para qualquer função integrável segundo Riemann. De fato, (4.36) e (4.37) convergem mesmo para funções  $L_1[a,b]$ . Como exemplo, vamos calcular a derivada de Riemann-Liouville para a função potência, escolhendo  $f(x) = (x-a)^\gamma$  com  $\gamma > -1$ , temos:

$${}_a D_x^\alpha (x-a)^\gamma = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} (t-a)^\gamma dt. \quad (4.38)$$

Fazendo a mudança de variável  $t = s(x-a) + a$ , como no caso da integral fracionária, obtemos:

$${}_a D_x^\alpha (x-a)^\gamma = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} (x-a)^{\gamma-\alpha+n} \int_0^1 s^\gamma (1-s)^{n-\alpha-1} ds, \quad (4.39)$$

onde novamente identificamos a integral em (4.39) como sendo a função Beta de Euler:

$$\beta(n-\alpha, \gamma+1) = \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(n-\alpha+\gamma+1)}. \quad (4.40)$$

Substituindo (4.40) na (4.39), ficamos com:

$${}_a D_x^\alpha (x-a)^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(n-\alpha+\gamma+1)} \frac{d^n}{dx^n} (x-a)^{\gamma-\alpha+n}. \quad (4.41)$$

Temos dois casos distintos para a (4.41). Quando  $(\alpha-\gamma) \in \mathbb{N}$  a derivada (4.41) anula-se, pois temos que  $n$  é maior que o inteiro  $\gamma-\alpha+n$ . No caso  $(\alpha-\gamma) \notin \mathbb{N}$  obtemos,



calculando as  $n$  derivadas em (4.41),

$${}_a D_x^\alpha (x-a)^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(n-\alpha+\gamma+1)} (\gamma-\alpha+n)(\gamma-\alpha+n-1) \dots (\gamma-\alpha+1) (x-a)^{\gamma-\alpha}. \quad (4.42)$$

Finalmente, usando a propriedade  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$  da função Gamma podemos escrever:

$${}_a D_x^\alpha (x-a)^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} (x-a)^{\gamma-\alpha}. \quad (4.43)$$

Calculando a derivada fracionária à direita, de forma análoga, obtemos:

$${}_x D_b^\alpha (b-x)^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} (b-x)^{\gamma-\alpha}. \quad (4.44)$$

Note que, no caso de  $\alpha \in \mathbb{N}$ , a derivada fracionária (4.43) reduz-se ao caso usual e a (4.44) difere da derivada inteira por um fator  $(-1)^\alpha$ . Nos gráficos abaixo ilustramos alguns casos particulares.

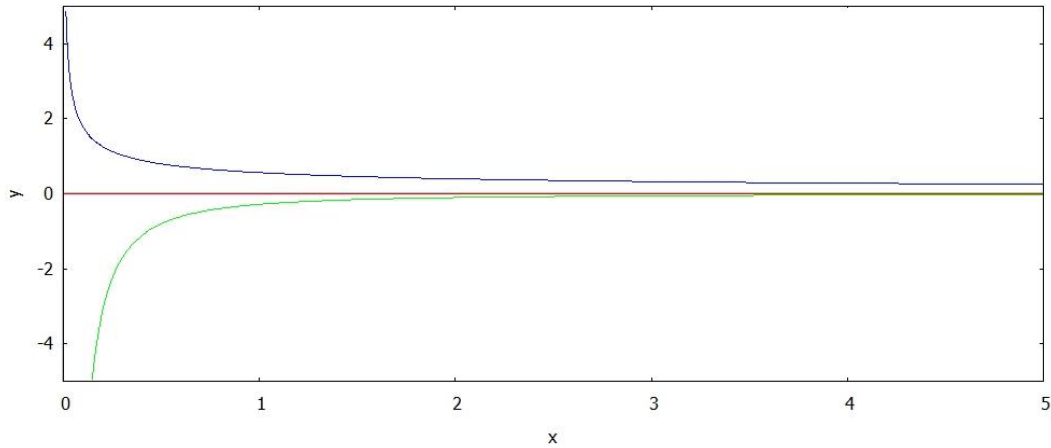


Figura 4.1: Derivada fracionária (4.43) para  $a = 0$ ,  $\gamma = 0$  e  $\alpha = \frac{1}{2}$  (Azul),  $1$  (Vermelho),  $\frac{3}{2}$  (Verde).

Um resultado importante ilustrado na figura 4.1, é que a derivada fracionária de

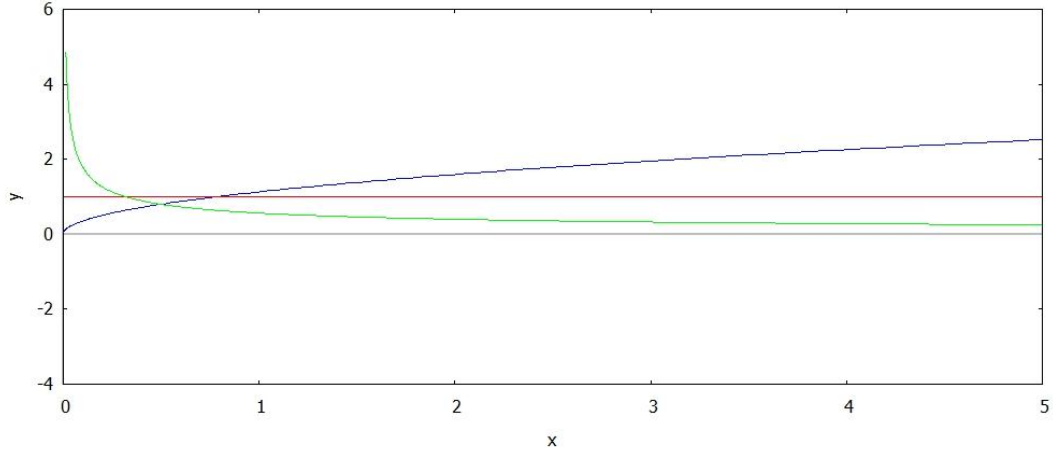


Figura 4.2: Derivada fracionária (4.43) para  $a = 0$ ,  $\gamma = 1$  e  $\alpha = \frac{1}{2}$  (Azul),  $1$  (Vermelho),  $\frac{3}{2}$  (Verde).

Riemann-Liouville de uma constante não é nula. Da equação (4.43) com  $\gamma = 0$  para  $\alpha > 0$ , sendo que  $\alpha \notin \mathbb{N}$ , chegamos ao seguinte resultado:

$${}_a D_x^\alpha (a - x)^0 = \frac{(x - a)^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)}. \quad (4.45)$$

Para derivada fracionária à direita, obtemos de forma análoga,

$${}_x D_b^\alpha (b - x)^0 = \frac{(b - x)^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)}. \quad (4.46)$$

É importante observar que as derivadas de uma constante se anulam se tivermos  $\alpha \in \mathbb{N}$  devido aos polos da função gamma nos pontos  $0, -1, -2, \dots$ , reproduzindo os resultados do cálculo usual.

Como último exemplo, vamos calcular a derivada de Riemann-Liouville da função exponencial. Expandindo em Taylor a função exponencial

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + . \quad (4.47)$$

Usando (4.43) em (4.47) para  $a = 0$  resulta

$$D_x^\alpha e^x = \left( \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha} + \frac{\Gamma(2)x^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{\Gamma(3)x^{2-\alpha}}{2!\Gamma(3-\alpha)} + \frac{\Gamma(4)x^{3-\alpha}}{3!\Gamma(4-\alpha)} + \dots \right). \quad (4.48)$$

De (4.48) podemos escrever

$$D_x^\alpha e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)x^{n-\alpha}}{(n)!\Gamma(n+1-\alpha)}. \quad (4.49)$$

Como temos que  $\Gamma(n+1) = n!$ , ficamos com:

$$D_x^\alpha e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)}, \quad (4.50)$$

onde o lado direito da equação (4.50), pode ser comparado com a função de Mittag-Leffer  $x^{-\alpha} E_{1,1-\alpha}(x)$  [8].

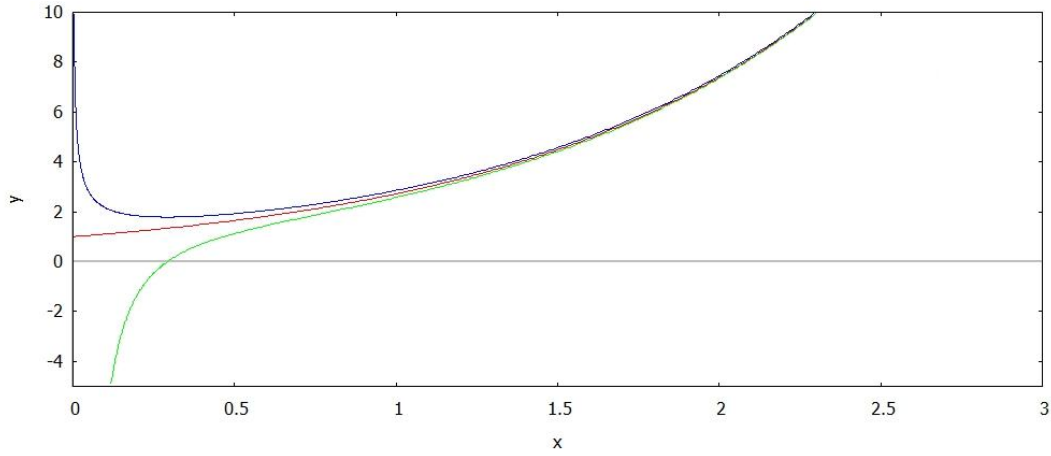


Figura 4.3: Derivada fracionária da função exponencial (4.50) para  $\alpha = \frac{1}{2}$  (Azul), 1 (Vermelho),  $\frac{3}{2}$  (Verde).

Finalmente, para desenvolver o Princípio da Mínima Ação com Lagrangianas envolvendo derivadas de ordem fracionária, precisamos de mais algumas propriedades ilustradas abaixo.

### 4.1.3 Lei dos Expoentes para o Cálculo Fracionário de Riemann-Liouville

Vimos que as integrais fracionárias de Riemann-Liouville satisfazem as leis de expoente (4.15) e (4.16). Como veremos, essa lei não é satisfeita pelas derivadas fracionárias. Sabemos que para as derivadas usuais ( $m$  e  $n$  inteiros), temos:

$$D^m D^n f(x) = D^n D^m f(x) = D^{m+n} f(x). \quad (4.51)$$

O mesmo não é válido para derivadas fracionárias de Riemann-Liouville, onde podemos ter, por exemplo:

$${}_a D_{x_a}^\alpha D_x^\beta f(x) = {}_a D_{x_a}^\beta D_x^\alpha f(x) = {}_a D_x^{\alpha+\beta} f(x), \quad (4.52)$$

$${}_a D_{x_a}^\alpha D_x^\beta f(x) \neq {}_a D_{x_a}^\beta D_x^\alpha f(x) = {}_a D_x^{\alpha+\beta} f(x) \quad (4.53)$$

e

$${}_a D_{x_a}^\alpha D_x^\beta f(x) = {}_a D_{x_a}^\beta D_x^\alpha f(x) \neq {}_a D_x^{\alpha+\beta} f(x). \quad (4.54)$$

Vamos ilustrar a falha da Lei dos Expoentes para as derivadas de Riemann-Liouville nos exemplos a seguir, utilizando a equação (4.43). Para um primeiro exemplo, escolhemos  $f(x) = (x - a)$  e  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ . Ficamos com:

$$\begin{aligned} {}_a D_{x_a}^\alpha D_x^\beta f(x) &= {}_a D_{x_a}^{\frac{1}{2}} D_x^{\frac{1}{2}} (x - a) = 1, \\ {}_a D_{x_a}^\beta D_x^\alpha f(x) &= {}_a D_{x_a}^{\frac{1}{2}} D_x^{\frac{1}{2}} (x - a) = 1, \\ {}_a D_x^{\alpha+\beta} f(x) &= {}_a D_x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} (x - a) = {}_a D_x^1 (x - a) = 1. \end{aligned}$$

Agora com  $f(x) = (x - a)^{-\frac{1}{2}}$  e  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ . Temos:

$$\begin{aligned} {}_a D_{x a}^{\alpha} D_x^{\beta} f(x) &= {}_a D_{x a}^{\frac{1}{2}} D_x^{\frac{1}{2}} (x - a)^{-\frac{1}{2}} = 0, \\ {}_a D_{x a}^{\beta} D_x^{\alpha} f(x) &= {}_a D_{x a}^{\frac{1}{2}} D_x^{\frac{1}{2}} (x - a)^{-\frac{1}{2}} = 0, \\ {}_a D_x^{\alpha+\beta} f(x) &= {}_a D_x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} (x - a) = {}_a D_x^1 (x - a)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{(x - a)^{-\frac{3}{2}}}{2}. \end{aligned}$$

Como último exemplo usamos  $f(x) = (x - a)^{\frac{1}{2}}$ ,  $\alpha = \frac{1}{2}$  e  $\beta = \frac{3}{2}$ . Com estes dados chegamos a

$$\begin{aligned} {}_a D_{x a}^{\alpha} D_x^{\beta} f(x) &= {}_a D_{x a}^{\frac{1}{2}} D_x^{\frac{3}{2}} (x - a)^{\frac{1}{2}} = 0, \\ {}_a D_{x a}^{\beta} D_x^{\alpha} f(x) &= {}_a D_{x a}^{\frac{3}{2}} D_x^{\frac{1}{2}} (x - a)^{\frac{1}{2}} = -\frac{(x - a)^{-\frac{3}{2}}}{4}, \\ {}_a D_x^{\alpha+\beta} f(x) &= {}_a D_x^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} (x - a)^{\frac{1}{2}} = {}_a D_x^2 (x - a)^{\frac{1}{2}} = -\frac{(x - a)^{-\frac{3}{2}}}{4}. \end{aligned}$$

Embora nossos exemplos envolvam apenas derivadas à esquerda, o mesmo continua válido para derivadas à direita.

#### 4.1.4 Teorema Fundamental do Cálculo e as Relações entre Integrais e Derivadas de Riemann-Liouville

Vamos estudar relações importantes entre as derivadas e integrais de Riemann-Liouville. No cálculo usual, sabemos que a derivada é a operação inversa à esquerda à integração, ou seja, para qualquer inteiro  $m > 0$ , temos:

$${}_a D_x^m {}_a J_x^m f(x) = f(x). \quad (4.55)$$

Podemos verificar facilmente que no cálculo fracionário a derivada de Riemann-Liouville

também é o operador inverso à esquerda da integral fracionária, ou seja,

$$\begin{aligned} {}_a D_x^\alpha J_x^\alpha f(x) &= \frac{d^n}{dx^n} {}_a J_x^{n-\alpha} J_x^\alpha f(x) \\ &= \frac{d^n}{dx^n} {}_a J_x^n f(x) = f(x), \end{aligned} \quad (4.56)$$

onde usamos (4.66). Portanto:

$${}_a D_x^\alpha J_x^\alpha f(x) = f(x).$$

De forma análoga

$${}_x D_b^\alpha J_b^\alpha f(x) = f(x).$$

Enquanto a derivada de Riemann-Liouville é a operação inversa à esquerda da integral, pode-se provar que a integral não é o inverso à direita da derivada. Isso também ocorre no cálculo usual, onde do teorema fundamental do cálculo, temos:

$${}_a J_x^1 D_x^1 f(x) = \int_a^x \frac{df(t)}{dt} dt = f(x) - f(a), \quad (4.57)$$

portanto  ${}_a J_x^1 D_x^1 f(x) = f(x)$ , somente se  $f(a) = 0$ . O análogo do teorema fundamental do cálculo para derivadas e integrais de Riemann-Liouville é dado por

$${}_a J_x^\alpha D_x^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{-\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)} \lim_{t \rightarrow a^+} D_x^{n-k-1} {}_a J_t^{n-\alpha} f(t) \quad (4.58)$$

e

$${}_x J_b^\alpha D_b^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k-1} \frac{(b-x)^{-\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)} \lim_{t \rightarrow b^-} D_x^{n-k-1} {}_t J_b^{n-\alpha} f(t). \quad (4.59)$$

A prova pode ser vista em [10, 11].

#### 4.1.5 Integração por Partes

A integração por partes desempenha um papel importante na obtenção da equação de Euler-Lagrange. No caso das derivadas fracionárias, a integração por partes relaciona a derivada à direita com a derivada à esquerda de Riemann-Liouville. Seja  $f(x)$  e  $g(x)$  funções contínuas, com  $f(a) = f(b) = 0$  ou  $g(a) = g(b) = 0$ , temos:

$$\int_a^b g(x)_x D_b^\alpha f(x) dx = \int_a^b f(x)_a D_x^\alpha g(x) dx, \quad (4.60)$$

onde  $0 < \alpha < 1$ .

Para provarmos a integração por partes (4.60), primeiramente vamos provar a relação abaixo:

$$\int_a^b \psi(x)_a J_x^\alpha \phi(x) dx = \int_a^b \phi(x)_x J_b^\alpha \psi(x) dx. \quad (4.61)$$

De (4.14), temos:

$$\begin{aligned} \int_a^b \phi(x)_x J_b^\alpha \psi(x) dx &= \int_a^b \phi(x) \left[ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (x-t)^{\alpha-1} \psi(t) dt \right] dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \int_x^b (x-t)^{\alpha-1} \phi(x) \psi(t) dt dx. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Fazendo a mudança de variável  $x \leftrightarrow t$  do lado direito, e trocando a ordem de integração de (4.62)(ver Figura 4.4), obtemos:

$$\begin{aligned} \int_a^b \phi(x)_x J_b^\alpha \psi(x) dx &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \int_a^x (t-x)^{\alpha-1} \phi(t) \psi(x) dx dt \\ &= \int_a^b \psi(x) \left[ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (t-x)^{\alpha-1} \phi(t) dt \right] dx \\ &= \int_a^b \psi(x)_a J_x^\alpha \phi(x) dx, \end{aligned}$$

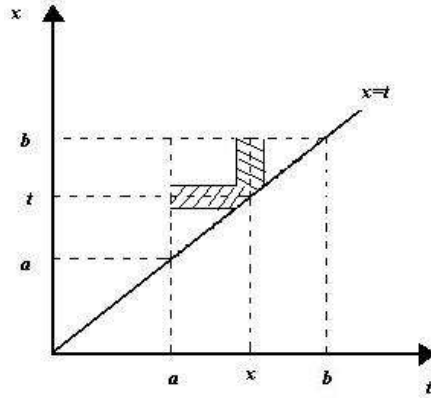


Figura 4.4: Região de integração da (4.62).

que é o resultado que queremos provar em (4.61).

Agora vamos provar a integração por partes (4.60). Usamos  ${}_x D_b^\alpha = -\frac{d}{dx} J_b^{1-\alpha}$ , para  $0 < \alpha < 1$ . Temos:

$$\begin{aligned} \int_a^b g(x) {}_x D_b^\alpha f(x) dx &= \int_a^b g(x) \left[ -\frac{d}{dx} J_b^{1-\alpha} f(x) \right] dx \\ &= -g(x) J_b^{1-\alpha} f(x) \Big|_a^b + \int_a^b \left[ \frac{d}{dx} g(x) \right] J_b^{1-\alpha} f(x) dx, \end{aligned} \quad (4.63)$$

onde fizemos integração por partes. Se  $g(a) = g(b) = 0$ , ficamos com

$$\int_a^b g(x) {}_x D_b^\alpha f(x) dx = \int_a^b \left[ \frac{d}{dx} g(x) \right] J_b^{1-\alpha} f(x) dx, \quad (4.64)$$

e usando (4.61), obtemos:

$$\int_a^b g(x) {}_x D_b^\alpha f(x) dx = \int_a^b \left[ {}_a J_x^{1-\alpha} \frac{d}{dx} g(x) \right] f(x) dx. \quad (4.65)$$

Finalmente, do cálculo usual sabemos que  $\frac{d}{dx} \int_a^x \phi(t) dt = \frac{d}{dx} {}_a J_x^1 \phi(x) = \phi(x)$ . Portanto,



podemos escrever (4.65) como

$$\begin{aligned}
\int_a^b g(x) {}_x D_b^\alpha f(x) dx &= \int_a^b \left[ \frac{d}{dx} {}_a J_x^1 {}_x J_x^{1-\alpha} \frac{d}{dx} g(x) \right] f(x) dx \\
&= \int_a^b \left[ \frac{d}{dx} {}_a J_x^{1-\alpha} {}_a J_x^1 \frac{d}{dx} g(x) \right] f(x) dx \\
&= \int_a^b \left[ \frac{d}{dx} {}_a J_x^{1-\alpha} (g(x) - g(a)) \right] f(x) dx \\
&= \int_a^b \left[ \frac{d}{dx} {}_a J_x^{1-\alpha} g(x) \right] f(x) dx \\
&= \int_a^b f(x) {}_a D_x^\alpha g(x) dx,
\end{aligned}$$

que é o resultado (4.60) que queremos mostrar.

## 4.2 Cálculo Fracionário de Caputo

Vimos na seção anterior que a derivada fracionária de Riemann-Liouville de uma constante é diferente de zero quando  $\alpha$  não é inteiro. Uma consequência deste resultado é que, na resolução das equações diferenciais contendo derivadas de Riemann-Liouville, condições iniciais usuais não podem ser aplicadas. Devido a este fato, o uso das derivadas de Riemann-Liouville em aplicações não é direto. Para contornar esta dificuldade, Caputo [10, 11, 14, 23] propôs uma nova derivada fracionária invertendo a ordem entre a derivada e a integral fracionária de Riemann-Liouville. A derivada fracionária de Caputo à esquerda e à direita de ordem  $\alpha > 0$  é definida, respectivamente da seguinte maneira:

$${}_a^C D_x^\alpha f(x) = {}_a J_x^{n-\alpha} D_x^n f(x) \quad (4.66)$$

e

$${}_x^C D_b^\alpha f(x) = (-1)^n {}_x J_b^{n-\alpha} D_x^n f(x), \quad (4.67)$$

onde  $n - 1 < \alpha \leq n$ . Pode-se escrever ainda:

$${}^C D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^x f^{(n)}(t)(x - t)^{n-1-\alpha} dt, \quad n - 1 < \alpha \leq n \quad (4.68)$$

e

$${}^C D_b^\alpha f(x) = (-1)^n \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_x^b f^{(n)}(t)(x - t)^{n-1-\alpha} dt, \quad n - 1 < \alpha \leq n, \quad (4.69)$$

onde  $f^{(n)} = \frac{d^n f(t)}{dt^n}$ , sendo  $n$  inteiro. Podemos ver diretamente das definições (4.68) e (4.69), que a derivada de Caputo de uma constante é zero. Do ponto de vista matemático a derivada de Caputo é mais restritiva no sentido que a função  $f(x)$  deve admitir derivada de ordem  $n$  para podermos aplicá-la. No caso das derivadas de Riemann-Liouville, a função não precisa ser diferenciável, de fato, podemos calcular a derivada de Riemann-Liouville mesmo de funções não diferenciáveis como a função Weierstrass [24]. Apesar das diferenças, podemos relacionar a derivada de Caputo de uma função com sua derivada de Riemann-Liouville. De (4.66), temos que:

$${}^C D_x^\alpha f(x) = {}_a J_x^{n-\alpha} D_x^n f(x) = {}_a D_x^\alpha {}_a J_x^\alpha {}_a J_x^{n-\alpha} D_x^n f(x) = {}_a D_x^\alpha {}_a J_x^n D_x^n f(x). \quad (4.70)$$

De (4.8), através de integração por partes podemos observar que

$${}_a J_x^n D_x^n f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} D^k f(a) \frac{(x-a)^k}{k!}. \quad (4.71)$$

Substituindo (4.71) em (4.70), ficamos com:

$${}^C D_x^\alpha f(x) = {}_a D_x^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} D^k f(a) {}_a D_x^\alpha \frac{(x-a)^k}{k!}. \quad (4.72)$$

Usando o resultado da derivada da função potência (4.43), resulta em:

$${}^C D_x^\alpha f(x) = {}_a D_x^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} D^k f(a) \frac{(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}. \quad (4.73)$$

Note que para  $\alpha = m$  inteiro a derivada de Riemann-Liouville se reduz a uma derivada usual, ou seja,  ${}_a D_x^n f(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}$ . Portanto, a derivada de Caputo difere da derivada usual por uma função polinomial. Se tivermos  $\alpha \geq 0$  e assumindo uma função  $f(x)$ , tal que  ${}^C D_x^\alpha f(x)$  e  ${}_a D_x^\alpha f(x)$  existam, e impondo a condição de que  $D^k f(a) = 0$ , para  $k=0,1,\dots,n-1$ , ficamos com:

$${}^C D_x^\alpha f(x) = {}_a D_x^\alpha f(x). \quad (4.74)$$

De forma análoga, para a derivada à direita ficamos com:

$${}^C D_b^\alpha f(x) = {}_x D_b^\alpha f(x), \quad (4.75)$$

ou seja, se o valor da função e suas derivadas  $D^k f(x)$ , (para  $k = 0,1,\dots,n-1$ ) forem nulas, as derivadas de Caputo e Riemann-Liouville coincidem.

### 4.2.1 Integração por Partes

Para o desenvolvimento do Princípio da Mínima Ação precisamos utilizar a integração por partes para derivadas de Caputo. Seja  $0 < \alpha < 1$  e  $g(x)$  uma função com  $g(a) = g(b) = 0$ , então:

$$\int_a^b f(x) {}^C D_x^\alpha g(x) dx = \int_a^b g(x) {}_x D_b^\alpha f(x) dx \quad (4.76)$$

e

$$\int_a^b f(x) {}_x^C D_b^\alpha g(x) dx = \int_a^b g(x) {}_a D_x^\alpha f(x) dx. \quad (4.77)$$

A prova das (4.76) e (4.77), seguem diretamente da integração por partes de Riemann-Liouville (4.60), como  $g(a) = g(b) = 0$ , temos que  ${}_a^C D_x^\alpha g(x) = {}_a D_x^\alpha g(x)$  e  ${}_x^C D_b^\alpha g(x) = {}_x D_b^\alpha g(x)$ . É importante notar que a integração por partes (4.76) e (4.77), relaciona as derivadas de Caputo com as de Riemann-Liouville.

## Capítulo 5

# Formulação Lagrangiana para Sistemas Dissipativos com Derivadas de Ordem Superior

Neste capítulo generalizamos e modificamos a formulação de Riewe para Lagrangianas de sistemas não conservativos, envolvendo derivadas de ordem superior ( $n = 3, 4, 5, \dots$ ). Lagrangianas com derivadas de ordem superior são encontradas em várias áreas da física como: correções para renormalização de teorias de campos e de gauge [25], gravidade [26], física da energia escura [27], eletrodinâmica [28], e outros problemas [29]. Devido a gama de aplicações e a necessidade de um formalismo que trabalhe com sistemas dissipativos, este capítulo tem como objetivo, levando em conta a formulação proposta por Riewe, obter a equação de Euler-Lagrange generalizada para sistemas com derivadas de ordem superior. Como exemplo de aplicação, vamos formular pela primeira vez uma Lagrangiana quadrática para o problema da carga pontual acelerada [30], onde a força de recuo devido a radiação eletromagnética é proporcional a  $\ddot{x}$ .

Riewe propôs em [6] que o Princípio da Mínima Ação poderia ser generalizado para

sistemas não conservativos, envolvendo forças dissipativas proporcionais à velocidade, pelo uso de Lagrangianas envolvendo derivadas fracionárias de ordem  $\alpha = \frac{1}{2}$  (como discutimos no capítulo 3). Na proposta de Riewe, a equação de movimento é obtida minimizando o funcional Ação, ou seja,

$$S = \int_a^b L(x, \dot{x}, {}_b D_x^{\frac{1}{2}}) dt, \quad (5.1)$$

e tomando o limite  $a \rightarrow b$ . A necessidade de tomarmos o limite ficará clara quando fizermos o exemplo da força de atrito. Note que no limite de  $a \rightarrow b$  não leva à restrições sobre a física de problemas conservativos, já que sobre trajetórias de sistemas conservativos a Ação é estacionária, e a equação de Euler-Lagrange correspondente não dependendo dos valores de  $a$  e  $b$ . No entanto, o limite  $a \rightarrow b$  proposto por Riewe não é bem definido, levando a inconsistências.

Generalizaremos na próxima seção a Ação de Riewe (5.1) para sistemas dissipativos de ordem superior. Na seção 5.2 resolvemos a inconsistência do  $a \rightarrow b$  e formulamos nosso Princípio da Mínima Ação.

## 5.1 Equação de Euler-Lagrange Generalizada para Derivadas de Ordem Superior

Nesta seção generalizaremos a formulação de Riewe (5.1), para Lagrangianas dependentes de derivadas fracionárias de ordem superior. Seja  $\alpha_j \in \mathbb{R}$ , com  $0 < \alpha_j < 1$ , onde  $(j=0,1,\dots,n)$ . A Ação  $S$  que iremos tratar é dada por:

$$S = \int_a^b L \left( t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^n x}{dt^n}, {}^C D_t^{\alpha_0} x, {}^C D_t^{\alpha_1} \frac{dx}{dt}, \dots, {}^C D_t^{\alpha_n} \frac{d^n x}{dt^n}, {}^C D_b^{\alpha_0} x, {}^C D_b^{\alpha_1} \frac{dx}{dt}, \dots, {}^C D_b^{\alpha_n} \frac{d^n x}{dt^n} \right) dt \quad (5.2)$$

onde as funções  $x \in C^{n+2}[a,b]$ , satisfazem as condições de limite fixo  $x(a) = x_a^{(0)}$ ,  $x(b) = x_b^{(0)}$ , e  $\frac{d^j x(a)}{dt^j} = x_a^{(j)}$ ,  $\frac{d^j x(b)}{dt^j} = x_b^{(j)}$ , com  $x(a)^j$  e  $x(b)^j \in \mathbb{R}$ , e  $L \in C^2[a,b]X\mathbb{R}^{3n+3}$ . Para obtermos a equação de Euler-Lagrange para a Ação (5.2), definimos uma família de funções (variações fracas)

$$x = x^* + \epsilon\mu, \quad (5.3)$$

onde  $x^*$  é a solução que extremiza a Ação (5.2),  $\epsilon \in \mathbb{R}$ , e  $\mu$  é uma função definida em  $[a,b]$  que satisfaz as condições

$$\mu(a) = \mu(b) = 0, \quad \frac{d^j \mu(a)}{dx^j} = \frac{d^j \mu(b)}{dx^j} = 0, \quad (5.4)$$

onde ( $j=1, \dots, n$ ). A  $n$ -ésima derivada de (5.3) é

$$\frac{d^j x}{dt^j} = \frac{d^j x^*}{dt^j} + \epsilon \frac{d^j \mu}{dt^j}. \quad (5.5)$$

Pelo fato de  $x^*$  ser a função que extremiza a Ação, o funcional  $S[x] = S[x^* + \epsilon\mu]$  é máximo e mínimo para  $\epsilon = 0$ . Temos portanto,  $\frac{dS}{d\epsilon}|_{\epsilon=0} = 0$ . Diferenciando (5.2) em relação a  $\epsilon$ , ficamos com:

$$\begin{aligned} \delta S = \frac{dS}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} &= \int_a^b \left( \frac{\partial L}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \epsilon} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{d^j x}{dt^j} \right)} \frac{\partial \left( \frac{d^j x}{dt^j} \right)}{\partial \epsilon} \right. \\ &+ \left. \sum_{j=0}^n \left( \frac{\partial L}{\partial \left( {}^C D_t^{\alpha_j} \frac{d^j x}{dt^j} \right)} \frac{\partial \left( {}^C D_t^{\alpha_j} \frac{d^j x}{dt^j} \right)}{\partial \epsilon} + \frac{\partial L}{\partial \left( {}^C D_b^{\alpha_j} \frac{d^j x}{dt^j} \right)} \frac{\partial \left( {}^C D_b^{\alpha_j} \frac{d^j x}{dt^j} \right)}{\partial \epsilon} \right) \right) dt \Big|_{\epsilon=0} = 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

De (5.5) podemos escrever

$${}^C D_b^{\alpha_j} \frac{d^j x}{dt^j} = {}^C D_b^{\alpha_j} \frac{d^j x^*}{dt^j} + \epsilon {}^C D_b^{\alpha_j} \frac{d^j \mu}{dt^j}, \quad {}^C D_a^{\alpha_j} \frac{d^j x}{dt^j} = {}^C D_a^{\alpha_j} \frac{d^j x^*}{dt^j} + \epsilon {}^C D_a^{\alpha_j} \frac{d^j \mu}{dt^j}, \quad (5.7)$$

então

$$\frac{\partial \left( {}^C D_b^{\alpha_j} \frac{d^j x}{dt^j} \right)}{\partial \epsilon} = {}^C D_b^{\alpha_j} \frac{d^j \mu}{dt^j}, \quad \frac{\partial \left( {}^C D_t^{\alpha_j} \frac{d^j x}{dt^j} \right)}{\partial \epsilon} = {}^C D_t^{\alpha_j} \frac{d^j \mu}{dt^j}. \quad (5.8)$$

É fácil observar de (5.3) e (5.5) que  $\frac{\partial x}{\partial \epsilon} = \mu$  e  $\frac{\partial \left( \frac{d^j x}{dt^j} \right)}{\partial \epsilon} = \frac{d^j \mu}{dt^j}$ . Substituindo esses valores e os da equação (5.8) em (5.6), vamos ter o seguinte resultado para a variação da Ação:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} &= \int_a^b \left( \mu \frac{\partial L}{\partial x} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{d^j x}{dt^j} \right)} \frac{d^j \mu}{dt^j} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=0}^n \left( \frac{\partial L}{\partial \left( {}^C D_t^{\alpha_j} \frac{d^j x}{dt^j} \right)} {}^C D_t^{\alpha_j} \frac{d^j \mu}{dt^j} + \frac{\partial L}{\partial \left( {}^C D_b^{\alpha_j} \frac{d^j x}{dt^j} \right)} {}^C D_b^{\alpha_j} \frac{d^j \mu}{dt^j} \right) \right) dt = 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Por integração por partes, o segundo termo da equação (5.9) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{d^j x}{dt^j} \right)} \frac{d^j \mu}{dt^j} dt &= \int_a^b \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{d^j x}{dt^j} \right)} \frac{d^{j-1} \mu}{dt^{j-1}} \right] dt + \int_a^b (-1)^1 \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{d^j x}{dt^j} \right)} \frac{d^{j-1} \mu}{dt^{j-1}} dt \\ &= (-1)^0 \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{d^j x}{dt^j} \right)} \frac{d^{j-1} \mu}{dt^{j-1}} \Big|_a^b + \int_a^b (-1)^1 \frac{d}{dt} \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{d^j x}{dt^j} \right)} \frac{d^{j-2} \mu}{dt^{j-2}} \right] dt \\ &\quad + \int_a^b (-1)^2 \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{d^j x}{dt^j} \right)} \frac{d^{j-2} \mu}{dt^{j-2}} dt \\ &= (-1)^0 \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{d^j x}{dt^j} \right)} \frac{d^{j-1} \mu}{dt^{j-1}} \Big|_a^b + (-1)^1 \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{d^j x}{dt^j} \right)} \frac{d^{j-2} \mu}{dt^{j-2}} \Big|_a^b \\ &\quad + \int_a^b (-1)^2 \frac{d}{dt} \left[ \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{d^j x}{dt^j} \right)} \frac{d^{j-3} \mu}{dt^{j-3}} \right] dt \\ &= \dots + \sum_{l=1}^j (-1)^{l-1} \frac{d^{l-1}}{dt^{l-1}} \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{d^j x}{dt^j} \right)} \frac{d^{j-1} \mu}{dt^{j-1}} \Big|_a^b + \int_a^b (-1)^j \frac{d^j}{dt^j} \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{d^j x}{dt^j} \right)} \mu dt. \end{aligned}$$



Usando as condições de contorno (5.4), obtemos:

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{d^j x}{dt^j} \right)} \frac{d^j \mu}{dt^j} dt = \int_a^b (-1)^j \frac{d^j}{dt^j} \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{d^j x}{dt^j} \right)} \mu dt. \quad (5.10)$$

Já o terceiro e o quarto termo da equação (5.9), usando a propriedade (4.76) e (4.77) da integração por partes, se reduzem a

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial \left( {}^C D_b^{\alpha_j} \frac{d^j x}{dt^j} \right)} {}^C D_b^{\alpha_j} \frac{d^j \mu}{dt^j} dt = \int_a^b \frac{d^j \mu}{dt^j} {}_a D_t^{\alpha_j} \frac{\partial L}{\partial \left( {}^C D_b^{\alpha_j} \frac{d^j x}{dt^j} \right)} dt \quad (5.11)$$

e

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial \left( {}^C D_t^{\alpha_j} \frac{d^j x}{dt^j} \right)} {}^C D_t^{\alpha_j} \frac{d^j \mu}{dt^j} dt = \int_a^b \frac{d^j \mu}{dt^j} {}_t D_b^{\alpha_j} \frac{\partial L}{\partial \left( {}^C D_t^{\alpha_j} \frac{d^j x}{dt^j} \right)} dt. \quad (5.12)$$

substituindo (5.11) e (5.12) em (5.9) resulta

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} &= \int_a^b \left( \mu \frac{\partial L}{\partial x} + \sum_{j=1}^n (-1)^j \mu \frac{d^j \mu}{dt^j} \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{d^j x}{dt^j} \right)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=0}^n \left( \frac{d^j \mu}{dt^j} {}_a D_t^{\alpha_j} \frac{\partial L}{\partial \left( {}^C D_b^{\alpha_j} \frac{d^j x}{dt^j} \right)} + \frac{d^j \mu}{dt^j} {}_t D_b^{\alpha_j} \frac{\partial L}{\partial \left( {}^C D_t^{\alpha_j} \frac{d^j x}{dt^j} \right)} \right) \right) dt = 0. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Novamente somos conduzidos a integração por partes no terceiro e quarto termo da equação (5.13). Procedendo de forma análoga a (5.10), obtemos:

$$\int_a^b \frac{d^j \mu}{dt^j} {}_a D_t^{\alpha_j} \frac{\partial L}{\partial \left( {}^C D_b^{\alpha_j} \frac{d^j x}{dt^j} \right)} = \int_a^b (-1)^j \frac{d^j}{dt^j} \left( {}_a D_t^{\alpha_j} \frac{\partial L}{\partial \left( {}^C D_b^{\alpha_j} \frac{d^j x}{dt^j} \right)} \right) \mu dt \quad (5.14)$$

e

$$\int_a^b \frac{d^j \mu}{dt^j} {}_t D_b^{\alpha_j} \frac{\partial L}{\partial \left( {}^C D_t^{\alpha_j} \frac{d^j x}{dt^j} \right)} = \int_a^b (-1)^j \frac{d^j}{dt^j} \left( {}_t D_b^{\alpha_j} \frac{\partial L}{\partial \left( {}^C D_t^{\alpha_j} \frac{d^j x}{dt^j} \right)} \right) \mu dt. \quad (5.15)$$

Substituindo (5.14) e (5.15) em (5.13), obtemos finalmente:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} &= \int_a^b \left[ \frac{\partial L}{\partial x} + \sum_{j=1}^n (-1)^j \frac{d^j}{dt^j} \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{d^j x}{dt^j} \right)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{d^j}{dt^j} \left( {}_t D_b^{\alpha_j} \frac{\partial L}{\partial \left( {}_a D_t^{\alpha_j} \frac{d^j x}{dt^j} \right)} + {}_a D_t^{\alpha_j} \frac{\partial L}{\partial \left( {}_t D_b^{\alpha_j} \frac{d^j x}{dt^j} \right)} \right) \right] \mu dt = 0. \end{aligned} \quad (5.16)$$

A integral (5.16) deve ser nula para qualquer função  $\mu(t)$  satisfazendo as condições de contorno (5.4). Portanto, o integrando deve ser identicamente nulo, ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} + \sum_{j=1}^n (-1)^j \frac{d^j}{dt^j} \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{d^j x}{dt^j} \right)} \\ + \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{d^j}{dt^j} \left( {}_t D_b^{\alpha_j} \frac{\partial L}{\partial \left( {}_a D_t^{\alpha_j} \frac{d^j x}{dt^j} \right)} + {}_a D_t^{\alpha_j} \frac{\partial L}{\partial \left( {}_t D_b^{\alpha_j} \frac{d^j x}{dt^j} \right)} \right) = 0, \end{aligned} \quad (5.17)$$

onde (5.17) é a equação de Euler-Lagrange para a Ação (5.2) que generaliza a formulação de Riewe para sistemas dissipativos de ordem superior.

## 5.2 O Princípio da Mínima Ação para Sistemas Lineares Autonomos de Ordem Qualquer

Nesta seção propomos uma modificação da Princípio da Mínima Ação para sistemas dissipativos formulado por Riewe. Como discutimos no início do capítulo, na proposta de Riewe as equações de movimento são obtidas extremizando o funcional (5.1) e tomando o limite  $a \rightarrow b$ . No entanto, este limite não é bem definido nos trabalhos de Riewe, o que leva a imprecisões. Veremos como corrigir esta falha, propondo um Princípio da Mínima Ação consistente para esses sistemas. Além disso, vamos generalizar a Ação para sistemas lineares autonomos de ordem qualquer.

### 5.2.1 O Limite $a \rightarrow b$ e o Princípio da Mínima Ação

Em sua formulação original Riewe propôs que no limite  $a \rightarrow b$  as derivadas de Riemann-Liouville à direita podem ser substituídas, ou aproximadas por derivada à esquerda, ou seja,

$${}_t D_b^{\frac{1}{2}} f(t) \approx {}_a D_t^{\frac{1}{2}} f(t). \quad (5.18)$$

No entanto, esta aproximação (5.18) não é bem definida. De fato ambas as derivadas  ${}_t D_b^{\frac{1}{2}} f(t)$  e  ${}_a D_t^{\frac{1}{2}} f(t)$  são funções reais, o que inviabiliza a aproximação (5.18) usada por Riewe. Embora ambas as derivadas vão ao infinito, a razão  $\frac{{}_t D_b^{\frac{1}{2}} f(t)}{{}_a D_t^{\frac{1}{2}} f(t)}$ , é em geral, uma quantidade não definida.

Ao invés de trabalhar com a definição de Riemann-Liouville, vamos usar as derivadas de Caputo. Primeiro vamos mostrar que no limite  $a \rightarrow b$  as derivadas, tendem a zero ou, de forma equivalente (como  $a < t < b$  para  $a \rightarrow b$ , temos  $t \rightarrow b$ ):

$$\lim_{a \rightarrow t} {}_a^C D_t^\alpha f(t) = \lim_{a \rightarrow t} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t f^1(u)(t-u)^{-\alpha} du = 0 \quad (5.19)$$

e

$$\lim_{t \rightarrow b} {}_t^C D_b^\alpha f(t) = \lim_{t \rightarrow b} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_t^b f^1(u)(u-t)^{-\alpha} du = 0, \quad (5.20)$$

onde  $0 < \alpha < 1$  e  $f^1(u) = \frac{df(u)}{du}$ . Vamos provar (5.19) e (5.20) para funções  $f \in C^1[a,b]$ . Neste caso  $f^1(u)$  é contínua nos intervalos  $[a,t]$  e  $[t,b]$ . Portanto, devem existir números reais  $K, L, M, N$  tais que  $K \leq f^1(u) \leq L$  para todo  $u \in [a,t]$  e  $M \leq f^1(u) \leq N$  para todo  $u \in [t,b]$ , respectivamente. Então

$$K \int_a^t f^1(u)(t-u)^{-\alpha} du \leq \int_a^t f^1(u)(t-u)^{-\alpha} du \leq L \int_a^t f^1(u)(t-u)^{-\alpha} du \quad (5.21)$$

e

$$M \int_t^b f^1(u)(u-t)^{-\alpha} du \leq \int_t^b f^1(u)(u-t)^{-\alpha} du \leq N \int_t^b f^1(u)(u-t)^{-\alpha} du. \quad (5.22)$$

Usando as relações (4.28) e (4.29) com  $\gamma = 0$ , obtemos:

$$K \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha+1)}(t-a)^\alpha \leq \int_a^t f^1(u)(t-u)^{-\alpha} du \leq L \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha+1)}(t-a)^\alpha \quad (5.23)$$

e

$$M \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha+1)}(b-t)^\alpha \leq \int_t^b f^1(u)(u-t)^{-\alpha} du \leq N \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha+1)}(b-t)^\alpha. \quad (5.24)$$

Como no limite  $a \rightarrow t$  temos  $(t-a)^\alpha \rightarrow 0$  e para  $t \rightarrow b$  temos  $(b-t)^\alpha \rightarrow 0$ . Tomando os limites em (5.23) e (5.24), obtemos as equações (5.19) e (5.20). É fácil observar que as derivadas de Riemann-Liouville divergem, quando derivamos em relação ao tempo os resultados encontrados em (5.23) e (5.24) e tomamos o limite de  $a \rightarrow b$ .

Vamos analisar o que ocorre com a razão  $\frac{{}^C D_b^\alpha f(t)}{{}^C D_t^\alpha f(t)}$  no limite  $a \rightarrow b$ . Neste caso temos:

$$\frac{M \int_t^b (u-t)^{-\alpha} du}{L \int_a^t (t-u)^{-\alpha} du} \leq -\frac{{}^C D_b^\alpha f(t)}{{}^C D_t^\alpha f(t)} \leq \frac{N \int_t^b (u-t)^{-\alpha} du}{K \int_a^t (t-u)^{-\alpha} du}, \quad (5.25)$$

onde usamos  $K \leq f^1(u) \leq L$  para  $u \in [a,t]$  e  $M \leq f^1(u) \leq N$  para  $u \in [t,b]$ . Usando novamente as relações (4.28) e (4.29), obtemos:

$$\frac{M}{L} \left( \frac{b-t}{t-a} \right)^\alpha \leq -\frac{{}^C D_b^\alpha f(t)}{{}^C D_t^\alpha f(t)} \leq \frac{N}{K} \left( \frac{b-t}{t-a} \right)^\alpha \quad (5.26)$$

Vemos da equação (5.26) que a razão  $\frac{{}^C D_b^\alpha f(t)}{{}^C D_t^\alpha f(t)}$ , não pode ser determinada no caso geral, quando tomamos o limite  $a \rightarrow b$ . Isso porque, quando  $t$  é um número qualquer

do conjunto  $[a,b]$ , o limite

$$\lim_{a \rightarrow b} \left( \frac{b-t}{t-a} \right)^\alpha \quad (5.27)$$

é indefinido. Por exemplo, escolhendo  $t$  como o ponto médio  $t = \frac{a+b}{2}$ , temos:

$$\lim_{a \rightarrow b} \left( \frac{b-t}{t-a} \right)^\alpha = \lim_{a \rightarrow b} \left( \frac{2b-b-a}{b+a-2a} \right)^\alpha = \lim_{a \rightarrow b} \left( \frac{b-a}{b-a} \right)^\alpha = 1. \quad (5.28)$$

Por outro lado, escolhendo  $t = \frac{b+2a}{3}$ , obtemos:

$$\lim_{a \rightarrow b} \left( \frac{b-t}{t-a} \right)^\alpha = \lim_{a \rightarrow b} \left( \frac{3b-b-2a}{b+2a-a} \right)^\alpha = \lim_{a \rightarrow b} 2 \left( \frac{b-a}{b-a} \right)^\alpha = (2)^\alpha. \quad (5.29)$$

Portanto, para que o limite (5.27) faça sentido, e a razão entre as derivadas (5.26) seja bem definida, devemos especificar como o limite  $a \rightarrow b$  deve ser tomado no nosso Princípio da Mínima Ação. Note que se escolhermos  $t$  como o ponto médio, ou seja,  $t = \frac{a+b}{2}$ , tomando o limite  $a \rightarrow b$  em (5.26), obtemos:

$$\lim_{a \rightarrow b} \frac{{}^C D_b^\alpha f(t)}{{}^C D_t^\alpha f(t)} = -1, \quad (5.30)$$

onde usamos (5.28) e o fato de que podemos escolher as constantes  $K, L, M, N$  tais que  $\lim_{a \rightarrow b} K = \lim_{a \rightarrow b} L = \lim_{a \rightarrow b} M = \lim_{a \rightarrow b} N = f^1(b)$ , pois  $f^1(t)$  é contínua. Portanto, para  $b-a \ll 1$  temos da (5.30)

$${}^C D_b^\alpha f(t) \approx -{}^C D_t^\alpha f(t), \quad (5.31)$$

para  $t$  sendo o ponto médio do intervalo  $[a,b]$ .

Agora podemos formular o nosso Princípio da Mínima Ação de forma consistente. Pelo nosso princípio, as trajetórias dos sistemas autônomos lineares de ordem qualquer são obtidas extremizando a Ação (5.2) e tomando o limite  $a \rightarrow b$ , com  $t = \frac{a+b}{2}$  na

equação de Euler-Lagrange.

### 5.3 Lagrangiana Para Sistemas Dissipativos

Nesta seção vamos utilizar nosso Princípio da Mínima Ação para obter a equação de movimento de dois sistemas dissipativos. O primeiro é o problema do atrito linear discutido no capítulo 3, e o segundo é o problema da carga elétrica acelerada.

#### 5.3.1 Atrito Linear

Riewe propôs em [6] pela primeira vez uma Lagrangiana física para o problema do atrito linear, usando a Ação (5.1). Como nosso Princípio da Mínima Ação (5.2) generalizada a proposta de Riewe, vamos aplicá-lo para o problema do atrito linear antes de propor uma Lagrangiana para a carga acelerada. A Lagrangiana para uma partícula de massa  $m$  sob a ação de forças de atrito proporcionais à velocidade [6] é:

$$L(t, x, \dot{x}, {}^C D_b^{\frac{1}{2}} x) = \frac{1}{2} m (\dot{x})^2 - V(x) + \frac{1}{2} \gamma ({}^C D_b^{\frac{1}{2}} x)^2, \quad (5.32)$$

onde  $V(x)$  é a energia potencial das forças conservativas atuando sobre o sistema, e o ultimo termo, contendo uma derivada fracionária, desempenha o papel de “ energia potencial” das forças conservativas. Sem perda de generalidade nessa Lagrangiana só consideremos derivadas à direita [6]. Analisando as dependências da Lagrangiana da equação (5.32), concluímos que na equação (5.16) no primeiro somatório  $j = 1$  e no segundo somatório  $j = 0$ . Além disso,  $\alpha_0 = \frac{1}{2}$ , e como temos derivadas só a direita, a equação de Euler-Lagrange fica

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial (\dot{x})} + {}^C D_t^{\frac{1}{2}} \frac{\partial L}{\partial \left( {}^C D_b^{\frac{1}{2}} x \right)} = 0. \quad (5.33)$$

Substituindo (5.32) em (5.33), obtemos:

$$m\ddot{x} + \frac{\partial V}{\partial x} - \gamma_a D_t^{\frac{1}{2}} C D_b^{\frac{1}{2}} x = 0. \quad (5.34)$$

É importante observar que (5.34) depende de derivadas fracionárias de Caputo e Riemann-Liouville. Como discutimos no início do capítulo, pelo Princípio da Mínima Ação proposto no trabalho, as equações de movimento são obtidas pelo extremo da Ação, e tomando o limite de  $a \rightarrow b$  com  $t = \frac{a+b}{2}$ , podemos aproximar as derivadas fracionárias (5.31)

$${}^C D_b^{\frac{1}{2}} x \approx -{}^C D_t^{\frac{1}{2}} x. \quad (5.35)$$

Então de (5.34), ficamos com

$$m\ddot{x} + \frac{\partial V}{\partial x} + \gamma_a D_t^{\frac{1}{2}} C D_a^{\frac{1}{2}} x = 0. \quad (5.36)$$

Ainda necessitamos manipular o terceiro termo da equação (5.36), para isso utilizamos a propriedade (4.15). Com isso obtemos a seguinte relação:

$${}_a D_t^{\frac{1}{2}} C D_t^{\frac{1}{2}} x = \frac{d}{dt} {}_a J_t^{\frac{1}{2}} {}_a J_t^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dt} x(t) = \frac{d}{dt} {}_a J_t^1 \frac{d}{dt} x(t) = \frac{d}{dt} x(t). \quad (5.37)$$

Por fim, substituindo (5.37) em (5.34), obtemos a equação característica do movimento.

$$m\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad (5.38)$$

onde  $F = -\frac{\partial V}{\partial x}$  são as forças conservativas atuando no sistema.

Finalmente, antes de formular uma Lagrangiana para a carga acelerada, vamos mostrar que a Lagrangiana é física no sentido de fornecer relações fisicamente consistentes para o momentum e para o Hamiltoniano do sistema. Definindo as seguintes

variáveis canônicas

$$q_{\frac{1}{2}} = {}^C D_b^{\frac{1}{2}} x \quad q_1 = \dot{x},$$

temos os seguintes momenta

$$p_{\frac{1}{2}} = \frac{\partial L}{\partial q_{\frac{1}{2}}} = \gamma_t^C D_b^{\frac{1}{2}} x \quad (5.39)$$

e

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial q_1} = m\dot{x} \quad (5.40)$$

e o Hamiltoniano

$$\begin{aligned} H(p,q) &= q_1 p_1 + q_{\frac{1}{2}} p_{\frac{1}{2}} - L(p,q) \\ &= m\dot{x}^2 + \gamma({}^C D_b^{\frac{1}{2}} x)^2 - \frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x) - \frac{\gamma}{2}({}^C D_b^{\frac{1}{2}} x)^2 \\ &= \frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x) + \frac{\gamma}{2}({}^C D_b^{\frac{1}{2}} x)^2. \end{aligned} \quad (5.41)$$

De (5.40) e (5.41) vemos que a Lagrangiana fracionária é física, pois o momentum  $p_1 = m\dot{x}$  é físico, assim como Hamiltoniano  $H(p,q)$  (soma da energia cinética com as energias potenciais das forças conservativas e dissipativas). O momentum  $p_{\frac{1}{2}}$ , embora não tenha interpretação física direta, se anula no limite  $a \rightarrow b$ , que deve ser tomado para obtermos as equações de movimento. Além disso, no limite  $a \rightarrow b$ , o Hamiltoniano (5.41) se reduz a energia total do sistema  $H(p,q) = \frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x)$ , que é a energia armazenada no sistema no instante  $a \leq t \leq b$ .

### 5.3.2 Radiação de Freamento

Finalmente, a Ação (5.2) permite formular, pela primeira vez, uma Lagrangiana



quadrática para o problema da carga acelerada (Veja apêndice A). Vamos considerar a seguinte Lagrangiana quadrática [7]:

$$L(t, x, \dot{x}, {}^C D_b^{\frac{1}{2}} \dot{x}) = \frac{1}{2} m (\dot{x})^2 - V(x) + \frac{2e^2}{6c^3} ({}^C D_b^{\frac{1}{2}} \dot{x})^2, \quad (5.42)$$

onde o último termo é a “energia potencial” das forças de freamento. Analisando as ordens das derivadas da Lagrangiana (5.42) e considerando somente derivadas fracionárias de caputo a direita, observamos que em (5.15) no primeiro e no segundo somatório  $j = 1$  e  $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ . Assim a equação de Euler-Lagrange fica:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{d}{dt} \left( {}^C D_t^{\frac{1}{2}} \frac{\partial L}{\partial ({}^C D_t^{\frac{1}{2}} \dot{x})} \right) = 0. \quad (5.43)$$

Substituindo a Lagrangiana (5.42) na equação (5.43), obtemos:

$$m\ddot{x} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{2e^2}{3c^3} \frac{d}{dt} \left( {}^C D_t^{\frac{1}{2}} {}^C D_t^{\frac{1}{2}} \dot{x} \right) = 0. \quad (5.44)$$

Utilizando a relação (5.31) com  $f(t)$  substituído por  $\dot{x}$ . A equação (5.44) fica:

$$m\ddot{x} + \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{2e^2}{3c^3} \frac{d}{dt} \left( {}^C D_t^{\frac{1}{2}} {}^C D_t^{\frac{1}{2}} \dot{x} \right) = 0. \quad (5.45)$$

Usando (4.15), observamos que:

$${}^C D_t^{\frac{1}{2}} {}^C D_t^{\frac{1}{2}} \dot{x} = \frac{d}{dt} {}^C J_t^{\frac{1}{2}} {}^C J_t^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dt} \dot{x}(t) = \frac{d}{dt} {}^C J_t^1 \frac{d}{dt} \dot{x}(t) = \frac{d}{dt} \ddot{x}(t) \quad (5.46)$$

Substituindo a equação (5.46) em (5.45), obtemos a equação de movimento da carga acelerada

$$m\ddot{x} + \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{x} = 0, \quad (5.47)$$

onde o terceiro termo de (5.47) é a força de radiação de freamento e  $F = -\frac{\partial V}{\partial x}$  é uma força externa conservativa.

Para finalizar, podemos verificar facilmente que a Lagrangiana (5.42) é física. Definindo as seguintes variáveis canônicas

$$q_{\frac{3}{2}} = {}^C D_b^{\frac{1}{2}} \dot{x}, \quad q_1 = \dot{x},$$

temos os seguintes momentuns

$$p_{\frac{3}{2}} = \frac{\partial L}{\partial q_{\frac{3}{2}}} = \frac{2e^2}{3c^3} {}^C D_b^{\frac{1}{2}} \dot{x} \quad (5.48)$$

e

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial q_1} = m\dot{x}. \quad (5.49)$$

Portanto, usando a transformação de Legendre o Hamiltoniano fica

$$\begin{aligned} H(p,q) &= q_1 p_1 + q_{\frac{3}{2}} p_{\frac{3}{2}} - L(p,q) \\ &= m\dot{x}^2 + \frac{2e^2}{3c^3} ({}^C D_b^{\frac{1}{2}} \dot{x})^2 - \frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x) - \frac{2e^2}{6c^3} ({}^C D_b^{\frac{1}{2}} \dot{x})^2 \\ &= \frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x) + \frac{2e^2}{6c^3} ({}^C D_b^{\frac{1}{2}} \dot{x})^2. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Novamente, o momentum  $p_1 = m\dot{x}$  é fisicamente consistente, assim como o Hamiltoniano (energia cinética mais potenciais das forças conservativas e dissipativas). O momentum não físico  $p_{\frac{3}{2}}$  desaparece no limite  $a \rightarrow b$ . Neste limite o Hamiltoniano coincide com a energia total armazenada no sistema  $H = \frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x)$ .

## Capítulo 6

# Considerações Finais

Neste trabalho, generalizamos o Princípio da Mínima Ação, proposto inicialmente por Riewe para forças de atrito proporcionais à velocidade, para sistemas não conservativos, contendo forças dissipativas lineares com derivadas de qualquer ordem. Nessa generalização, corrigimos a inconsistência matemática da formulação de Riewe associada ao limite indo à zero, do intervalo de tempo definindo a Ação. Além disso, obtivemos a equação de Euler-Lagrange para sistemas lineares autônomos de ordem qualquer, incluindo derivadas fracionárias. Como um primeiro exemplo, aplicamos nosso Princípio da Mínima Ação para o caso da força de atrito proporcional à velocidade, onde construímos uma Lagrangiana puramente real em contraste à Lagrangiana de Riewe com termos imaginário. Após, formulamos pela primeira vez uma Lagrangiana física para o problema da carga pontual acelerada, analisando ambos momentum e Hamiltoniano canônicos associados. Uma Lagrangiana é dita física se fornece relações fisicamente consistentes para o momentum e o Hamiltoniano do sistema.



## Apêndice A

# A Equação de Movimento para a Carga Acelerada

Neste apêndice obteremos a equação de movimento para a carga acelerada não relativística. Partindo dos potenciais retardados escalar e vetor [30], respectivamente

$$\phi = \int \frac{1}{X} \xi_{t-\frac{x}{c}} dV, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{1}{X} \mathbf{J}_{t-\frac{x}{c}} dV. \quad (\text{A.1})$$

Se as velocidades das cargas são pequenas em relação à velocidade da luz, a distribuição de cargas não varia com o tempo, assim podemos desenvolver  $\xi_{t-\frac{x}{c}}$  e  $\mathbf{J}_{t-\frac{x}{c}}$  em série de potência de  $\frac{X}{c}$ . Expandindo o potencial escalar e vetor em  $\frac{X}{c}$ , obtemos

$$\phi^{(n)} = \int \frac{\xi}{X} dV - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \xi dV + \frac{1}{2!c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int X \xi dV - \frac{1}{3!c^3} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \int X^2 \xi dV + \dots + (\text{A.2})$$

e

$$\mathbf{A}^{(n)} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}}{X} dV - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{J} dV + \frac{1}{2!c^3} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int X \mathbf{J} dV - \frac{1}{3!c^4} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \int X^2 \mathbf{J} dV + \dots + (\text{A.3})$$

Como queremos termos de terceira ordem em  $\frac{1}{c}$  na equação de movimento. Pegamos o

termo de terceira ordem no potencial escalar em  $\frac{1}{c}$  e o de segunda ordem no potencial vetor em  $\frac{1}{c}$ . Temos, respectivamente

$$\phi^{(3)} = -\frac{1}{6c^3} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \int X^2 \xi dV \quad (\text{A.4})$$

e

$$\mathbf{A}^{(2)} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{J} dV. \quad (\text{A.5})$$

Faremos a seguinte transformação de Gauge nos potenciais

$$\phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f \quad (\text{A.6})$$

e escolhemos uma função, afim de que o potencial escalar se anule. Esta função seria

$$f = -\frac{1}{6c^3} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \xi X^2 dV, \quad (\text{A.7})$$

assim o potencial vetor fica

$$\mathbf{A}'^{(2)} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{J} dV - \nabla \left( -\frac{1}{6c^3} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \xi X^2 dV \right). \quad (\text{A.8})$$

Usando  $\nabla \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla X$ , ficamos com

$$\mathbf{A}'^{(2)} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{J} dV - \frac{1}{6c^3} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \xi \nabla X^2 dV \quad (\text{A.9})$$

$$= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{J} dV - \frac{1}{3c^3} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \xi \mathbf{X} dV. \quad (\text{A.10})$$

Como  $e = \int \xi dV$  e  $\mathbf{X}$  sendo o raio vetor que liga o elemento de carga a um ponto de observação. Ele é dado por  $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 - \mathbf{x}$ , onde  $\mathbf{X}_0$  é o raio vetor que liga um ponto qualquer até um ponto de observação e  $\mathbf{x}$  o raio vetor do elemento de carga.

Consequentemente,  $\dot{\mathbf{X}} = -\dot{\mathbf{x}}$  e

$$\mathbf{A}'^{(2)} = -\frac{2e\ddot{\mathbf{x}}}{3c^2}. \quad (\text{A.11})$$

Usando  $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi$  resulta

$$\mathbf{E} = \frac{2e\ddot{\mathbf{x}}}{3c^3}. \quad (\text{A.12})$$

Sendo que a carga  $e$  está submetida a uma força  $\mathbf{f} = e\mathbf{E}$ , temos

$$\mathbf{f} = \frac{2e^2\ddot{\mathbf{x}}}{3c^3}, \quad (\text{A.13})$$

onde  $\mathbf{f}$  é a força de freamento de uma carga em movimento no campo externo [30].





# Referências Bibliográficas

- [1] J.P.Baptista, Os princípios fundamentais ao longo da história da física, Revista Brasileira de Ensino de Física **28**,4 (2006).
- [2] I.C.Moreira, Maupertuis (1698-1759) e o Princípio da Mínima Ação, Revista Brasileira de Ensino de Física **21**,172 (1999).
- [3] J.C.Maxwell, Matter and Motion, New York: The Macmillan Co, (1920).
- [4] J. Larmor, M.A., F.R.S, Aether and Matter, Cambridge University Press, (1900).
- [5] P. S. Bauer, Dissipative Dynamical Systems, Harvard University, **17**,331 (1931).
- [6] F.Riewe, Phy.Rev.E, **53** (1996).
- [7] M. J. Lazo and C. E. Krumreich, Lagrangian formulation for open and dissipative systems with higher-order derivative, submetido para a publicação.
- [8] K. B. Oldham and J. Spanier, The Fractional Calculus, Academic Press, New York (1974).
- [9] J. Sabatier, O. P. Agrawal e J. A. Tenreiro Machado (eds), Advances in Fractional Calculus: Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering, Springer, Netherlands (2007).
- [10] A.A.Kilbas, H.M.Srivastava e J.J.Trujillo, Theory and Application of Fractional Differential Equations, Elsevier, Amsterdam (2006).

- [11] K.Diethelm, The Analysis of Fractional Diferrential Equations: And Application-Oreeted Exposition Using Differential Operators of Caputo Type, Springer-Verlag, Berlin Hidelberg, (2010).
- [12] R. Hilfer (ed), Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific, Singapore (2000).
- [13] R. L. Magin, Fractional Calculus in Bioengineering, Begell House Publisher (2006).
- [14] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, Fractional Integrals and Derivatives - Theory and Applications, Gordon and Breach, Linghorne, PA (1993).
- [15] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Technical University Kosice, Slovak Republic, 198 (1999).
- [16] A.P.B. da Silva e R.A.Martins, Maupertuis e o princípio de ação mínima:análise crítica, Revista Brasileira de Ensino de Física **29**, 625 (2007).
- [17] A.P.B. da Silva e R.A.Martins, Maupertuis d'Alembert e o princípio de ação mínima na óptica: uma análise crítica, Revista Brasileira de Ensino de Física **29**, 455 (2007).
- [18] L.A.Paris, Analytical Dynamics, London, (1965).
- [19] N.A.Lemos, Mecânica Analítica, São Paulo, (2004).
- [20] H. Godstein, C.Poole, J.Safko,Classical Mechanics,(1980).
- [21] K.W.H.Stevens, Proc. Phys. Soc. London **72**, 1027 (1958).
- [22] E.Celeghini, M. Rasetti, M. Tarlini, and G. Vitiello, Mod. Phys. Lett. **B3**,1213 (1989).
- [23] K. S. Miller and B. Ross, An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, Wiley, New York (1993).

- [24] K.M.Kolwankar e A.D.Gangal, *Chaos*, **6**, 505 (1996).
- [25] L.D.Faddeev and A.A.Slavnow, *Gauge Field, Itroudction to Quantum Theory*, North Horland,Amsterdam (1985).
- [26] K.Stelle, *Phy.Rev.D* 16 953 (1977); E.S.Fradkin and A.A.Tseyllin, *Nuel.Phy.B*201(1982)469D.G.Boulware and S.Deser, *Phy.Rev.D* 25 2556 (1985).
- [27] D.Birell and P.CW.Davies, *Quantum field in curved space*, Cambridge University press, Cambridge(1982).
- [28] G.w Gibbons, arXiv:hep-th/0302199; S.M.Carroll, M.Homan, and M.Trodden, *Phy.Rev.D* 68 023509 (2003); R.P Woodard, *Lect. Notes Phys.* 720 403 (2007).
- [29] B.Podolsky and P.Schwed, *Rev.Mod.Phy.* 20(1948)40; J.A Wheeler and R.P. Feynmann, *Rev. Mod. Phy.* 21 (1949) 425; E.H.Kerner, *J.Math.Phy.*3 35 (1962).
- [30] L.D.Landau and E.M.Lifshitz, *The Classical Theory of Field*, Butterworth- Heine- mann, Oxford (1980).