Débora de Oliveira Bastos

Estudo da Circunferência no Ensino Médio: Sugestões de Atividades com a Utilização do *Software* GeoGebra

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Abril, 2014

Débora de Oliveira Bastos

Estudo da Circunferência no Ensino Médio: Sugestões de Atividades com a Utilização do *Software* GeoGebra

Dissertação submetida por Débora de Oliveira Bastos como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Universidade Federal do Rio Grande - FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF

Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Orientador: Dra. Cristiana Andrade Poffal

Coorientador: Dra. Cinthya Maria Schneider Meneghetti

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Abril, 2014

Colaboradores

Universidade Federal do Rio Grande
http://www.furg.br

Instituto de Matemática, Estatística e Física
http://www.imef.furg.br

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
http://www.profmat-sbm.org.br

Sociedade Brasileira de Matemática
http://www.sbm.org.br

Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
http://www.capes.gov.br

B327e Bastos, Débora de Oliveira

Estudo da circunferência no ensino médio: sugestões de atividades com a utilização do software GeoGebra / Débora de Oliveira Bastos. – 2014.

199 f.

Inclui anexos.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Orientadora: Drª. Cristiana Andrade Poffal.

Coorientadora: Drª. Cinthya Maria Schneider Meneghetti.

1. Matemática. 2. Geometria analítica. 3. Circunferência. 4. Ensino Médio. 4. GeoGebra. I. Poffal, Cristiana Andrade. II. Meneghetti, Cinthya Maria Schneider. III. Título.

CDU 51

Catalogação na fonte: Bibliotecário Clériston Ribeiro Ramos CRB10/1889

Débora de Oliveira Bastos

Estudo da Circunferência no Ensino Médio: Sugestões de Atividades com a Utilização do *Software* GeoGebra

Dissertação submetida por Débora de Oliveira Bastos como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Trabalho aprovado. Rio Grande, 05 de Abril de 2014

Cristiana Andrade Poffal

Dra. Cristiana Andrade Poffal
(Orientador - FURG)

Cinthya M. S. Meneghetti

Dra. Cinthya Maria Schneider Meneghetti
(Coorientadora - FURG)

Lisandra de O. Sauer

Dra. Lisandra de Oliveira Sauer
(Avaliador - UFPel)

Fabíola Aiub Sperotto

Dra. Fabíola Aiub Sperotto
(Avaliador - FURG)

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil
Abril, 2014

Este trabalho é dedicado aos meus pais Vilmar e Neuza, pela formação do meu caráter e aos meus alunos, pois é para o aprendizado deles que busco ser uma profissional melhor a cada dia.

Agradecimentos

Agradeço à Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, aos coordenadores do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT pela oportunidade oferecida aos professores da Escola Básica integrar um Mestrado em ensino da Matemática, à CAPES por oportunizar que este Mestrado fosse realizado com auxílio de bolsa de estudo e aos meus professores pertencentes ao quadro da Universidade Federal de Rio Grande - FURG. Citarei-os nominalmente, pois todos contribuíram imensamente com meu aperfeiçoamento. Agradecimentos duplos para Cristiana Poffal e Cinthya Maria Schneider por terem imensa paciência como professoras e orientadoras. Aos demais professores Lineia Schutz, Daiane Silva de Freitas, Adriano De Cezaro, André Meneghetti, Fabíola Aiub Sperotto, Edite Taufer, Fabiana Travessini De Cezaro, Mario Rocha Retamoso, Eneilson Campos Fontes e ao coordenador do curso na instituição Leandro Sebben Bellicanta.

Aos meus colegas de curso: Ivan Fabrício Braum Einhart, as aulas não seriam tão divertidas sem ele; Julio César Mohnsam, nossa enciclopédia matemática ambulante; Mauro Dinael Beilfuss Bartz, cujos desenhos no quadro geraram inveja a todos; Thiago Ehlers Martins, Ezequiel Bobsein Strasburg, Josias Neubert Savóis, Eliezer André Vellar e Seldomar Jeske Ehlert, pela companhia até o final do curso, Roberta da Silva Michaello, deixou saudade especialmente aos guris da turma; Rosenildo Floriano Paulino, cujas piadas de gaúcho foram memoráveis e Denise Conceição Costa Espírito Santo, além de colega, amiga de todas as horas.

Agradecimento especial ao professor Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso pertencente ao quadro da Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS, por ter-me apresentado o *software* GeoGebra.

À minha família e aos meus amigos, pela compreensão da ausência e suporte psicológico, sem os quais não seria possível chegar ao fim desse longo caminho, assim como a todos os obstáculos, que tornaram o gosto da vitória mais saboroso.

"Duas coisas são infinitas:
o universo e a estupidez humana.
Mas, no que respeita ao universo,
ainda não adquiri a certeza absoluta."
(Albert Einstein)

Resumo

Esta dissertação propõe sete atividades acerca do estudo da circunferência para alunos do Ensino Médio. A maioria das atividades propostas utilizam o *software* gratuito de geometria dinâmica GeoGebra como ferramenta de aprendizagem. Programa com diversas vantagens. Além da concepção da geometria dinâmica, a associação entre Geometria e Álgebra, relação enfatizada até no seu nome. As atividades sugeridas abordam os seguintes conteúdos: equações da circunferência (reduzida e geral), análise da equação completa do 2º grau a duas variáveis, método de completar quadrados para reestabelecimento do centro e medida do raio da circunferência, posição relativa entre ponto e circunferência, reta e circunferência e entre duas circunferências. No presente trabalho consta ainda uma análise de alguns livros didáticos para ciência do que está sendo oportunizado ao professor como subsídio para suas aulas. Associamos esta análise também com a argumentação de que o produto deste trabalho é inovador. Mostraremos também a análise das atividades que embasaram a proposta desse trabalho quando aplicadas nas turmas de 3º ano do Instituto Federal do Rio Grande do Sul - Campus Rio Grande, assim como os resultados de uma pesquisa feita sobre os conhecimentos prévios dos alunos sobre geometria do Ensino Fundamental, especificamente relacionados ao círculo.

Palavras-chaves: Geometria Analítica, circunferência, Ensino Médio, GeoGebra.

Abstract

This dissertation proposes seven activities on the study of circumference for High School students. Most of such proposed activities use the free software of the dynamic geometry Geogebra as learning tool, which offers a huge number of pros. Besides the dynamic geometry conception, the association between Geometry and Algebra - connection which is actually emphasized in its name - the suggested activities include the following content: circumference equations (reduced and general), analysis of total second degree equation to two variables, method of completing squares to reestablish the center and the measurement of the radius of the circumference, relative position between point and circumference, straight line and circumference, and between two circumferences. This paper also contains an analysis of some educational books for the teachers to realize what is being given to them as aid for their classes. We associated this analysis also with the argumentation that the product of this work is innovative. In addition, we will portray an analysis of the activities that based the proposal of our task when these were executed at the third year junior classes of the Instituto Federal do Rio Grande do Sul - Campus Rio Grande, as well as the results of a conducted survey that figured out the previous knowledge of geometry from Elementary School, specifically related to the circle shape.

Key-words: Analytical Geometry, circumference, High School, GeoGebra.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Rastro animado do ponto B 47
Figura 2 – Um exemplo relacionando o raio do círculo e o parâmetros c 49
Figura 3 – Um exemplo relacionando o centro do círculo A e os parâmetros a e b . 50
Figura 4 – Alternativas da questão do ENEM 52
Figura 5 – Desafio - Exercício 4 53
Figura 6 – Uso da Janela CAS - Um exemplo 56
Figura 7 – Um exemplo de construção para o item 11 68
Figura 8 – Um exemplo de construção para o item 13 68
Figura 9 – Campo de Futebol 70
Figura 10 – Radar 71
Figura 11 – Posições Relativas entre Reta e Círculo 73
Figura 12 – Um exemplo de construção para o item 14 75
Figura 13 – Um exemplo de construção para o item 16 75
Figura 14 – Um exemplo de construção para o item 18 76
Figura 15 – Desafio - item 3 77
Figura 16 – Construção para a atividade da posição relativa entre dois círculos . . . 82
Figura 17 – Posições relativas possíveis entre dois círculos 83
Figura 18 – Simulação relativa aos itens 4 a 7 85
Figura 19 – Simulação relativa ao item 8 86
Figura 20 – Simulação relativa aos círculos exteriores 86
Figura 21 – Simulação relativa aos círculos tangentes exteriores 88
Figura 22 – Simulação relativa aos círculos tangentes interiores 89
Figura 23 – Simulação relativa aos círculos interiores 90
Figura 24 – Simulação relativa aos círculos secantes 91

Figura 25 – Questão 5 98
Figura 26 – Questão 6 98
Figura 27 – Bandeira da Turquia 119
Figura 28 – Exercício 14 119

Figura 29 – Site oficial do GeoGebra 132
Figura 30 – Tela do Geogebra. 132
Figura 31 – Menu Arquivo 133
Figura 32 – Menu Editar 134
Figura 33 – Menu Exibir 134
Figura 34 – Menu Opções 135
Figura 35 – Menu Ferramentas 135

Figura 36 – Barra de Ferramentas 136
Figura 37 – Ferramentas disponíveis no Botão Mover. 136
Figura 38 – Ícone Ferramenta Mover 137
Figura 39 – Ferramentas disponíveis no Botão Ponto. 137
Figura 40 – Ícone Ferramenta Ponto 137
Figura 41 – Ícone Ferramenta Interseção de Dois Objetos 138
Figura 42 – Ícone Ferramenta Ponto Médio ou Centro 138
Figura 43 – Ferramentas disponíveis no Botão Reta. 139
Figura 44 – Ícone Ferramenta Reta 139
Figura 45 – Ícone Ferramenta Segmento 140
Figura 46 – Ícone Ferramenta Segmento com Comprimento Fixo 140
Figura 47 – Caixa de diálogo para definir comprimento de um segmento. 141
Figura 48 – Ferramentas disponíveis no Botão Reta Perpendicular. 141
Figura 49 – Ícone Ferramenta Reta Perpendicular 141
Figura 50 – Ícone Ferramenta Mediatriz 142
Figura 51 – Ícone Ferramenta Reta Tangente 142
Figura 52 – Ferramentas disponíveis no Botão Círculo 143
Figura 53 – Ícone Ferramenta Círculo dados Centro e Um dos seus Pontos 143
Figura 54 – Ícone Ferramenta Círculo dados Centro e Raio 144
Figura 55 – Caixa de diálogo para definir raio do círculo. 144
Figura 56 – Ícone Ferramenta Círculo definido por Três Pontos 144
Figura 57 – Ferramentas disponíveis no Botão Ângulo 145
Figura 58 – Ícone Ferramenta Distância 145
Figura 59 – Ferramentas disponíveis no Botão Texto 146
Figura 60 – Ícone Ferramenta Relação 147
Figura 61 – Ferramentas disponíveis no Botão Controle Deslizante. 147
Figura 62 – Aparência do Controle Deslizante na Janela de Visualização 147
Figura 63 – Ícone Ferramenta Controle Deslizante 148
Figura 64 – Caixa de diálogo da ferramenta controle deslizante. 148
Figura 65 – Ferramentas disponíveis no Botão Mover Janela de Visualização. 149
Figura 66 – Ícone Ferramenta Mover Janela de Visualização 149
Figura 67 – Ícone Ferramenta Ampliar 149
Figura 68 – Ícone Ferramenta Reduzir 149
Figura 69 – Caixa de seleção do Zoom 150
Figura 70 – Exibir/Esconder Objeto 150
Figura 71 – Exibir/Esconder Rótulo 150
Figura 72 – Caixa seleção Exibir/Esconder Objeto/Rótulo 151
Figura 73 – Esfera Exibir/Esconder Objeto 151
Figura 74 – Ícone Ferramenta Apagar 151

Figura 75 – Caixa auxiliar para selecionar apagar 152
Figura 76 – Caixa auxiliar para exibir a Malha 153
Figura 77 – Caixa auxiliar para exibir a janela Preferências 154
Figura 78 – Janela Preferências - aba Básico 154
Figura 79 – Janela Preferências - Inserir Legenda 154
Figura 80 – Habilitar Rastro 155
Figura 81 – Fixar Objeto 156
Figura 82 – Função Renomear 156
Figura 83 – Janela Preferências - Aba Cor 157
Figura 84 – Janela Preferências - Aba Estilo 157
Figura 85 – Alterar formato de equação de retas 158
Figura 86 – Caixa de Entrada 158
Figura 87 – Ferramentas da Janela CAS e suas linhas 159

Figura 88 – Alternativas da questão do ENEM 173
Figura 89 – Exercício 4 174

Figura 90 – Campo de Futebol 187
Figura 91 – Radar 188

Figura 92 – Desafio 191

Figura 93 – Círculos exteriores 199
Figura 94 – Círculos interiores 199
Figura 95 – Círculos tangentes exteriores 199
Figura 96 – Círculos tangentes interiores 199
Figura 97 – Círculos secantes 199
Figura 98 – Círculos concêntricos 199

Sumário

Introdução **17**

Motivação **27**

Objetivos **30**

1 Caracterização **32**
1.1 Público alvo 32
1.2 Pré-requisitos 32
1.3 Recomendações metodológicas 32
1.4 Dificuldades previstas 34

2 Análise de livros didáticos **35**
2.1 Coleção Novo Olhar: Matemática de Joamir Souza (2010) 35
2.2 Matemática de Manoel Paiva (2009) 37
2.3 Matemática Contexto e Aplicações de Luiz Roberto Dante (2011) 38
2.4 Conexões com a Matemática de Juliane Matsubara Barroso et al (2010) . . 39
2.5 Matemática de Kátia Smole e Cristina Stocco (2010) 41

3 Atividades propostas e soluções **44**
3.1 Atividade 1 - Definição e equação reduzida do círculo 46
3.2 Atividade 2 - Equação geral do círculo 54
3.3 Atividade 3 - Análise da equação completa de 2º grau a duas variáveis . . . 58
3.4 Atividade 4 - Método de completar quadrados 63
3.5 Atividade 5 - Posição relativa entre ponto e círculo 66
3.6 Atividade 6 - Posição relativa entre reta e círculo 72
3.7 Atividade 7 - Posição relativa entre dois círculos 78
3.7.1 Construção do GeoGebra circulo × circulo.ggb 78
3.7.2 Atividade 7 - Posição relativa entre dois círculos 81

4 Relato da aplicação das atividades **93**
4.1 Pesquisa prévia com os alunos 93
4.1.1 Questionário 1 94
4.1.2 Questionário 2 97
4.1.3 Glossário 100
4.2 Implementação do trabalho 101
4.2.1 Atividade do 1º dia 102

4.2.1.1 Relatório do 1º dia . . . 105
4.2.2 Atividade do 2º dia . . . 109
4.2.2.1 Relatório do dia 2 . . . 111
4.2.3 Atividade do 3º dia . . . 115
4.2.3.1 Relatório do dia 3 . . . 117
4.3 Análise geral dos resultados . . . 120

5 Possíveis continuações ou desdobramentos . . . 124

6 Considerações finais . . . 125

Referências . . . 127

Anexos 130

ANEXO A GeoGebra: uma introdução . . . 131
A.1 Barra de Menus . . . 133
A.1.1 Menu Arquivo . . . 133
A.1.2 Menu Editar . . . 134
A.1.3 Menu Exibir . . . 134
A.1.4 Menu Opções . . . 135
A.1.5 Menu Ferramentas . . . 135
A.1.6 Menu Janela . . . 135
A.1.7 Menu Ajuda . . . 136
A.2 Barra de Ferramentas . . . 136
A.2.1 Botão Mover . . . 136
A.2.1.1 Ferramenta Mover . . . 136
A.2.2 Botão Ponto . . . 137
A.2.2.1 Ferramenta Ponto . . . 137
A.2.2.2 Ferramenta Interseção de Dois Objetos . . . 138
A.2.2.3 Ponto Médio ou Centro . . . 138
A.2.3 Botão Reta . . . 138
A.2.3.1 Ferramenta Reta . . . 139
A.2.3.2 Ferramenta Segmento . . . 139
A.2.3.3 Ferramenta Segmento com Comprimento Fixo . . . 140
A.2.4 Botão Reta Perpendicular . . . 141
A.2.4.1 Ferramenta Reta Perpendicular . . . 141
A.2.4.2 Ferramenta Mediatriz . . . 142
A.2.4.3 Reta Tangente . . . 142
A.2.5 Botão Círculo . . . 143

A.2.5.1 Ferramenta Círculo dados Centro e Um dos seus Pontos . 143
A.2.5.2 Círculo dados Centro e Raio 144
A.2.5.3 Ferramenta Círculo definido por Três Pontos 144
A.2.6 Botão Ângulo 145
A.2.6.1 Ferramenta Distância, Comprimento ou Perímetro 145
A.2.7 Botão Texto 146
A.2.7.1 Ferramenta Relação 146
A.2.8 Botão Controle Deslizante 147
A.2.8.1 Ferramenta Controle Deslizante 147
A.2.9 Botão Mover Janela de Visualização 148
A.2.9.1 Ferramenta Mover Janela de Visualização 148
A.2.9.2 Ferramentas Ampliar e Reduzir 149
A.2.9.3 Ferramentas Exibir/Esconder Objeto e Exibir/Esconder Rótulo 150
A.2.9.4 Ferramenta Apagar 151
A.3 Janela de Álgebra e Janela de Visualização. 152
A.3.1 Habilitar Malha 152
A.3.2 Propriedades 153
A.3.2.1 Inserir e Exibir legenda 153
A.3.2.2 Exibir Rastro 155
A.3.2.3 Fixar Objeto 155
A.3.2.4 Renomear 155
A.3.2.5 Mudar a aparência dos objetos 156
A.3.2.6 Alterar tipo de equação 157
A.3.3 Caixa de Entrada 158
A.4 Janela CAS 158
A.5 Atividade Conhecendo o GeoGebra 159

ANEXO B Atividades para a iniciação do GeoGebra 166

ANEXO C Atividade de análise da definição e da equação reduzida do círculo 170

ANEXO D Atividade da análise da equação geral do círculo e o método de comparação 175

ANEXO E Atividade de análise da equação completa de 2º grau a duas variáveis 178

ANEXO F Atividade de completar quadrados 182

ANEXO G Atividade de análise das posições relativa entre ponto e círculo . 184

ANEXO H Atividade de análise das posições relativas entre reta e círculo . . 189

ANEXO I Atividade de análise das posições relativas entre dois círculos . . 192

Introdução

Muitos são os trabalhos e livros que discutem sobre como a Matemática é tida como difícil pelos alunos[1] e quanto a discrepância entre as tecnologias que usamos no cotidiano e as empregadas em sala de aula. Concordamos com esses pontos de vista. O presente trabalho, por isso, tem como objetivo principal oferecer uma alternativa para o professor de Ensino Médio trabalhar com Geometria Analítica e o estudo da circunferência de forma a facilitar o trabalho na sua sala de aula, utilizando a tecnologia digital e outros métodos.

Nossos alunos relatam muitas vezes que não sentiam dificuldade em Matemática no Ensino Fundamental. Como trabalhamos com Ensino Médio, os alunos descrevem que passaram a achar difícil, como se a Matemática houvesse mudado. O que nos faz pensar se realmente oferecemos Matemática aos alunos ou simplesmente reproduzimos resultados. Por exemplo, mostramos como aplicar a fórmula de Bhaskara ou o Teorema de Pitágoras em vez de oferecer subsídios para os alunos entendê-los, evitando a memorização. O uso de ferramentas computacionais propiciam o aprendizado de Matemática? O que é o saber matemático, ou pensar Matemática?

Micotti (1999, p. 163) defende que o saber matemático é diferente dos outros saberes, envolvendo método dedutivo, demonstrações, relações conceituais lógicas, singularidades das representações simbólicas e significados rigorosos. A autora continua discutindo sobre o saber matemático e a construção do saber matemático:

> Nas situações voltadas para a construção do saber matemático, o aluno é solicitado a pensar - fazer inferências sobre o que observa, a formular hipóteses - não, necessariamente, a encontrar uma resposta certa. A efetiva participação dos alunos neste processo depende dos significados das situações propostas, dos vínculos entre elas e os conceitos que já dominam. (MICOTTI, 1999, p. 165)

Esse conceito de construção do saber matemático norteou o presente trabalho e acreditamos que o uso de tecnologia digital, especificamente *softwares* de geometria dinâmica levam o aluno a pensar e a vincular o que ele já sabe com o novo conhecimento a adquirir. Observamos, segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2003, p. 13), que esse tipo de intervenção pode ser chamado de investigação matemática, pois o objetivo é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos e desconhecidos, procurando identificar propriedades. Uma investigação é dividida em quatro partes: exploração e formulação

[1] Empregamos a palavra aluno no sentido do dicionário Houaiss: lat. Alumnus, i "criança de peito, lactente, menino, aluno, discípulo", der. do verbo alére "fazer aumentar, crescer, desenvolver, nutrir, alimentar, criar, sustentar, produzir, fortalecer etc."e não na interpretação errônea "sem luz".

de questões, formulação de conjecturas, realização de testes e reformulação dos mesmos, se for o caso, e a demonstração dos resultados (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p. 20). Ponte, Brocardo e Oliveira ainda afirmam que vários estudos em educação mostraram que a investigação é uma poderosa forma de construir conhecimento.

Follador (2007, p. 18-19) atesta que mesmo havendo enorme discrepância entre a tecnologia existente e a presente nas escolas, essa diferença não poderá ser resolvida de maneira rápida. Dessa forma, o professor não deve esperar os meios propícios ideais para só então utilizar-se das ferramentas computacionais em sala de aula. Deve, por exemplo, no caso do professor de Matemática, usar a calculadora, pois é de custo acessível, já inserida normalmente no cotidiano da maioria, não está relacionada com as lacunas deixadas na formação acadêmica do professor em relação às tecnologias, pode tornar as aulas interessantes e ser uma poderosa aliada no processo de ensino-aprendizagem. A calculadora simples comparada a outras tecnologias parece totalmente ultrapassada, assim como hoje um lápis, um livro não nos parecem avanços tecnológicos. De qualquer forma, se Follador indica o uso da calculadora como uma alternativa para inserção de tecnologia para as escolas em que ela não é atualizada, que diremos daquelas que disponibilizam recursos avançados. A escola, através do professor, deve empregá-los com potencialidades muito maiores que a simples calculadora. Devemos ultrapassar as resistências e utilizar as tecnologias disponíveis.

Antes do simples uso da tecnologia, devemos repensar nossa postura e o que realmente queremos dos alunos. Temos, por isso, como objetivos gerais[2] incentivar a autonomia do aluno e vincular a isso a postura diferenciada do professor, além da inserção da tecnologia digital em sala de aula, conforme BRASIL. A tecnologia pode e deve ser usada como recurso ou metodologia, embora acreditamos ser de maior relevância a atitude do aluno em relação ao aprendizado. E essa atitude depende do professor. O professor propõe a ele ser ativo ou passivo diante da aprendizagem. Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) relacionam o aluno ativo com o seu processo de aprendizagem.

> Na disciplina de Matemática, como em qualquer outra disciplina escolar, o envolvimento ativo do aluno é uma condição fundamental da aprendizagem. O aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo. Esse é, precisamente, um dos aspectos fortes das investigações. Ao requerer a participação do aluno na formulação das questões a estudar, essa atividade tende a favorecer o seu envolvimento na aprendizagem. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p. 23)

Em face ao desenvolvimento da autonomia do aluno o professor não exerce mais a mesma função de detentor da informação. O pensamento que o papel do professor deve se diferenciar, não somente em aulas com o uso de ferramentas computacionais, mas como

[2] Para maiores detalhes veja capítulo Objetivos.

um todo, é observado por Rego. A autora descreve as implicações das teses de Vygotsky na importância da redefinição das funções do professor:

> Podemos dizer que, nessa abordagem, o professor deixa de ser visto como agente exclusivo de informação e formação dos alunos, uma vez que as interações estabelecidas entre as crianças também têm um papel fundamental na promoção de avanços no desenvolvimento individual. Isto não significa, no entanto, que seu papel seja dispensável ou menos importante. Muito pelo contrário, a função que ele desempenha no contexto escolar é de extrema relevância já que é o elemento mediador (e possibilitador) das interações entre os alunos e das crianças com os objetos de conhecimento. (REGO, 2010, p. 115).

É necessário desenvolver um novo perfil de profissional da educação, pertinente ao mundo em constante atualização. Segundo BRASIL (1998, p. 38) mediante ao aluno ser protagonista da construção de sua aprendizagem, o professor deve passar a ser organizador da aprendizagem, preparando as atividades que levem a construção de conceitos e procedimentos; facilitador da aprendizagem, interferindo nas informações que o aluno não poderia obter sozinho; mediador da aprendizagem promovendo a análise e o debate das propostas dos alunos; orientador de reformulações e da valorização das soluções mais adequadas. Na nossa proposta o professor deve assumir esses variados aspectos, por isso argumentamos que o envolvimento com esse tipo de atividade é muito maior que numa aula expositiva. Ponte, Brocardo e Oliveira (2003, p. 26) afirmam que mesmo na investigação matemática não podemos pensar que o aluno deve trabalhar totalmente isolado. O papel do professor é indispensável em aulas de investigação, atribuindo-lhe a função de ajudar o aluno a compreender o significado de investigar e a aprender a fazê-lo.

Com o acesso às tecnologias digitais no nosso cotidiano de maneira tão intensa, o uso dessas tecnologias em sala de aula deveriam ser naturais. Estamos vivenciando uma época em que a maioria dos professores são nascidos antes de 82. Pela teoria de Prensky (2001, p. 1) estes professores são chamados imigrantes digitais entrando em conflito com os alunos nascidos após 82 chamados de nativos digitais. Prensky (2001, p. 2) ainda ressalta as qualidades naturais dos nativos digitais, as quais os imigrantes digitais esforçam-se muito para adquirir: assimilam informação rapidamente, estão acostumados com processos paralelos e multi-tarefa, observam gráficos antes de ler os textos, preferem uma leitura aleatória a uma leitura do início ao fim de um texto e estão sempre conectados. Prensky comenta que os professores por serem imigrantes digitais falam uma outra linguagem em relação ao aluno, nativo digital e por isso não se entendem, o que vem a ser um entrave ao aprendizado. O TIC Educação 2012[3], pesquisa feita pelo CETIC BR[4] aponta que em 2012, no Brasil, apenas 17% dos professores pesquisados tinham menos de

[3] Pesquisa sobre o uso das Tecnologias de informação e comunicação nas escolas brasileiras feito anualmente desde 2011, em que 2012 foi o mais recente relatório divulgado.

[4] Centro de Estudos sobre as Tecnologias da Informação e da Comunicação do Brasil.

31 anos[5] (CETIC, 2013, p. 146). Talvez a teoria de Prensky explique o porquê da resistência de alguns professores ao uso de tecnologias no ensino e o desinteresse dos alunos por aulas expositivas. Na visão de Penteado:

> Acreditamos que, em geral, o professor enfrenta os desafios impostos pela profissão e busca criar alternativas, porém a introdução do computador na escola altera os padrões nos quais ele usualmente desenvolve sua prática. São alterações no âmbito das emoções, das relações e condições de trabalho, da dinâmica da aula, da reorganização do currículo, entre outras. (PENTADO, 1999, p. 298)

Por nossa experiência sabemos, que mesmo com boa vontade, muitos professores não conseguem trabalhar como gostariam em relação ao uso das tecnologias em sala de aula. Vemos como motivos importantes o extenso currículo de Matemática no Ensino Médio que faz o professor pensar quais conteúdos deveria sacrificar para aprofundar alguns com o uso de ferramentas computacionais e o grande número de alunos por turma. CETIC (2013, p. 159) informa que 79% dos professores pesquisados indicam o número insuficiente de computadores como causa do não uso das TIC's no cotidiano das práticas de ensino. Neste caso, o problema do número de computadores em um laboratório de informática seria atenuado se a maioria das escolas dispusessem de um profissional para assistir o professor nas aulas no laboratório de informática, assim o professor poderia conciliar melhor o trabalho em aula e no laboratório. Com o técnico presente o professor também não precisaria se preocupar com problemas de origem prática, como um programa travar, incidência de vírus, etc. Por outro lado há os que resistem, não pela impossibilidade de implantar a tecnologia em sala de aula. Follador (2007, p. 21) cita que a simples calculadora é tida como vilã por alguns professores sob alegação de supostamente impedir o raciocínio do aluno e tirar suas habilidades de cálculo o que imaginamos das demais tecnologias. Preocupação também citado por Borba e Penteado (2010, p. 12).

> Do ponto de vista da aprendizagem, o uso das calculadoras, bem como de outras mídias, não descarta a necessidade do aluno raciocinar para resolver ou formular problemas, mas sim, apenas muda o modo como este aluno irá raciocinar, levando-o a usar outro elemento além de lápis e de papel. (FOLLADOR, 2007, p. 20)

Sabemos dos incentivos do Governo Federal para o professor a usar as TIC's no ensino de modo geral. Em 2007 o projeto Proinfo[6] passou a ser Programa Nacional de Tecnologia Educacional e variadas ações foram implementadas, não apenas para fornecer

---

[5] Observamos o fato de Prensky relatar a realidade de seu país em que o avanço tecnológico é anterior ao nosso, mesmo hoje em dia. Isso quer dizer que a geração de nativos digitais do Brasil pode ter faixa etária menor, o que diminuiria ainda mais a porcentagem de professores nativos digitais da nossa realidade.

[6] Retirado de $http : //www.fnde.gov.br/programas/programa - nacional - de - tecnologia - educacional - proinfo$

os instrumentos, mas também a formação dos professores das redes públicas da Educação Básica. Vinculados ao Proinfo estão os projetos Um Computador por Aluno (UCA), o programa Banda Larga nas Escolas (PBLE), a distribuição de *tablets* para os professores de Ensino Médio e a distribuição de laboratórios de informática nas escolas da rede pública. Borba e Penteado (2010, p. 27) alertam que, sendo o Brasil um país de dimensões continentais e com culturas tão diversificadas, os programas nacionais podem não adaptar-se a todas as escolas, então o sucesso da implementação da informática na sala de aula também depende de ações localizadas articuladas às ações em larga escala.

Pentado reconhece que além dos programas do governo outras iniciativas estão sendo feitas, todavia equipar as escolas não é suficiente.

> Embora esforços tenham sido empreendidos para equipar as escolas com computadores e facilitar as diferentes possibilidades de seu uso, sabemos que ainda são poucos os professores que os utilizam em sua prática profissional. Este tem sido um dos fatores que dificultam a consolidação do seu uso nas escolas, uma vez que o professor é tido como um elemento fundamental nesse processo. (PENTADO, 1999, p. 298)

Borba e Penteado (2010, p. 23-24) comentam que apesar das escolas apoiarem o trabalho com informática, esse apoio não é generalizado. Borba e Penteado citam alguns empecilhos impostos pela direção que desestimulam o professor a trabalhar no laboratório de informática. Por exemplo, a imposição de um número excessivo de normas para o uso do laboratório, responsabilizar o professor pelos possíveis danos aos computadores, destinar salas pequenas para os laboratórios, inacesso a senha da internet e a ausência de um técnico ou profissional que possa auxiliar o professor, entre outros.

Devemos tomar cuidado para o emprego da tecnologia na educação não passar de mera troca de ferramentas: lápis e papel por computador. A pura inserção de tecnologia não significa a quebra da metodologia tradicional. Follador (2007, p. 20) argumenta que se a tecnologia está na sociedade, a escola faz parte da sociedade e alerta que sua simples introdução nada garante e antes é preciso traçar objetivos claros de ensino e aprendizagem para essa inserção. Ainda argumenta que embora aprender as funcionalidades técnicas das tecnologias sejam necessárias não podemos ficar limitados a esse simples manuseio. Questionamos, por isso, se há mudança essencial no professor que passava toda matéria no quadro, passar a disponibilizar o conteúdo pela internet, ou em apresentações com *slides* num projetor multimídia? Se houve o uso da tecnologia, não significa a mudança na capacidade do aluno aprender, embora admitamos que essas práticas são facilitadoras tanto para professores quanto para alunos.

A tecnologia não é um remédio milagroso para a educação, muito menos para o ensino da Matemática. Follador ressalta a importância de termos em mente que os *softwares* educacionais não resolvem os problemas de aprendizagem, eles são um incremento às possibilidades já existentes. Nessa linha de pensamento

> [. . .] o *software* a ser utilizado nas escolas não deve substituir as atividades educacionais já existentes - ele não deve ser simplesmente uma versão computadorizada dos atuais métodos de ensino. Isto se faz necessário pela própria mudança na nossa condição de vida e pelo fato de que a natureza do conhecimento mudou. (VALENTE, 1989, p. 2)

Acreditamos que o foco principal do uso das tecnologias digitais seja transformar a informação em conhecimento, basta saber tirar das tecnologias as suas potencialidades didáticas. D'Ambrosio esclarece:

> A escola não se justifica pela apresentação de conhecimento obsoleto e ultrapassado e muitas vezes morto. Sobretudo ao se falar em ciência e tecnologia. Será essencial para a escola estimular a aquisição, a organização, a geração e a difusão do conhecimento vivo, integrado nos valores e nas expectativas da sociedade. Isso será impossível de atingir sem a ampla utilização de tecnologia na educação. Informática e comunicações dominarão a tecnologia educativa do futuro. (D'AMBROSIO, 2012, p. 74)

Segundo Santaló (1996, p. 19) o problema está em como educar o homem informático, aproveitando-se de suas potencialidades e baseados no fato dele já estar inserindo num mundo informático, ou seja, adaptado a uma tecnologia que possibilita eficazes e diversificadas maneiras de agir. Ao mesmo tempo que a tecnologia permite essas atribuições às exige, por isso a escola deve evoluir para preparar indivíduos com os perfis exigidos deste mundo complexo e diversificado. Sobre o que ensinar Santaló (1996, p. 22) argumenta que o melhor é saber pouco e bem, embora com os mecanismos computacionais é possível saber muito e bem. A escola, ainda na visão de Santaló, deve preocupar-se em indicar o caminho para as possíveis extensões daquilo que se estuda e suas aplicações, de tal modo que, se o aluno necessitar de um conhecimento mais aprofundado possa o fazer por conta própria. Devemos visar no perfil do profissional, o profissional pró-ativo que sabe resolver problemas e sabe trabalhar em grupo. Essas características podem ser desenvolvidas em sala de aula através das tecnologias. Os PCN deixam bem claro o papel do uso das tecnologias para a formação do perfil do profissional exigido no mercado atual de trabalho.

> O trabalho ganha então uma nova exigência, que é a de aprender continuamente em um processo não mais solitário. O indivíduo, imerso em um mar de informações, se liga a outras pessoas, que, juntas, complementar-se-ão em um exercício coletivo de memória, imaginação, percepção, raciocínios e competências para a produção e transmissão de conhecimentos. Esse impacto da tecnologia, cujo instrumento mais relevante é hoje o computador, exigirá do ensino de Matemática um redirecionamento sob uma perspectiva curricular que favoreça o desenvolvimento de habilidades e procedimentos com os quais o indivíduo possa se reconhecer e se orientar nesse mundo do conhecimento em constante movimento. (BRASIL, 2000, p. 41)

Devemos conciliar, por isso, os vários aspectos da tecnologias digitais para o emprego em sala de aula.

O resultado mais recente, divulgado na imprensa, em relação ao desempenho do alunos diz que apenas 10% dos alunos do Ensino Médio saem com os conhecimentos que deveriam em Matemática[7]. Questionamos, por isso, as metodologias atuais implantadas. BRASIL (1998) retrata a prática mais frequente do ensino de Matemática, o que costumamos chamar de método tradicional, ou aulas expositivas. Prática em que o professor segue a sequência definição, exemplos, demonstração de propriedades, exercícios de aprendizagem, fixação e aplicação. Dessa forma, o professor pressupõe que o aluno aprenda pela reprodução.

> Assim, considera-se que uma reprodução correta é evidência de que ocorreu a aprendizagem. Essa prática de ensino tem se mostrado ineficaz, pois a reprodução correta pode ser apenas uma simples indicação de que o aluno aprendeu a reproduzir alguns procedimentos mecânicos, mas não apreendeu o conteúdo e não sabe utilizá-lo em outros contextos. (BRASIL, 1998, p. 37)

Essa é a maneira pela qual acreditamos ser o meio em que os professores atuantes hoje aprenderam nas suas vidas escolares e dessa forma adotam como prática docente. Borba e Penteado falam sobre a postura de alguns professores quanto a mudança:

> Alguns professores procuram caminhar numa zona de conforto onde quase tudo é conhecido, previsível e controlável. Conforto aqui está sendo utilizado no sentido de pouco movimento. Mesmo insatisfeitos, e em geral os professores se sentem assim, eles não se movimentam em direção a um território desconhecido. Muitos reconhecem que a forma como estão atuando não favorece a aprendizagem dos alunos e possuem um discurso que indica que gostariam que fosse diferente. Porém, no nível de usa prática, não conseguem se movimentar para mudar aquilo que não os agrada. Acabam cristalizando sua prática numa zona dessa natureza e nunca buscam caminhos que podem gerar as incertezas e imprevisibilidade. (BORBA; PENTEADO, 2010, p. 56)

Muitas dissertações e trabalhos de conclusão de curso focam o uso das TIC's em sala de aula. Isso sinaliza estarmos vivendo uma época de transição em que teremos o uso de tecnologia digital concomitante a outros fazeres na escola. Se até mesmo o uso de canetas esferográficas teve certa resistência, o que diremos de tecnologias avançadas, cuja manipulação não é tão fácil. Acreditamos que as TIC's serão utilizadas como ferramentas de aprendizagem em sua total potencialidade em sala de aula, é apenas uma questão de tempo.

Pesquisamos na Biblioteca Digital do PROFMAT para analisar os trabalhos de conclusão de curso e outras publicações e verificar o que está sendo oferecido ao professor

[7] $http://g1.globo.com/educacao/noticia/2013/03/apenas-10-dos-alunos-aprendem-o-ideal-em-matematica-no-ensino-medio.html$ Notícia baseada na Prova Brasil/ SAEB 2011.

em relação a Geometria Analítica, círculo e sobre o uso do programa GeoGebra. Verificamos que Geometria Analítica está no título de pelo menos quinze resultados, Geometria Analítica e GeoGebra são assuntos de pelo menos oito trabalhos e apenas um o foco do trabalho abrange a circunferência inserida na Geometria Analítica com o uso do *software* GeoGebra. Embora pelo menos outros três trabalhos contenham atividades relativas à circunferência sem ser o assunto principal do trabalho. Descreveremos o trabalho de quatro autores, cujos assuntos são afins com o nosso: Paulo Cézar Camargo Guedes (2013), Wellington Manuel Santos da Silva, Teófilo Oliveira de Paula (2013) e Jorge da Silva Werneck (2013).

Guedes (2013) introduz sua dissertação discutindo sobre o uso das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC's), após discorre sobre o *software* GeoGebra. Guedes não entra em detalhes da funcionalidade do mesmo. A primeira atividade tem como objetivo preparar o aluno para usar o programa. A segunda atividade aborda a distância entre pontos, a terceira aborda a posição relativa entre retas. A quarta atividade aborda a posição relativa entre reta e circunferência e entre duas circunferências. Guedes busca generalizar conceitos, porém através de situações restritas. Por exemplo, para análise da posição relativa entre reta e circunferência pede ao aluno esboçar a circunferência $\lambda : x^2 + y^2 = 8$ e a reta $s : y = x + c$ e instrui o aluno a decidir a posição relativa em função do parâmetro c. O aluno que obtiver êxito nesta questão não entenderá por completo e genericamente as condições necessárias e suficientes para uma reta ser secante, tangente ou exterior a uma circunferência.

Silva (2013) começa o seu trabalho citando a importância do uso de *softwares* dinâmicos na Geometria Analítica. Defende o estudo de vetores na Matemática do Ensino Básico, descrevendo suas vantagens. Como alega que os vetores são assunto no Ensino Médio só em Física, seu referencial teórico é relacionado ao Ensino Superior e ao material usado na disciplina de Geometria Analítica no PROFMAT. Descreve, em seguida, o GeoGebra brevemente e apresenta as atividades propostas aos professores. Abrange vários assuntos nas atividades: plano cartesiano, vetores, reta, posição relativa entre retas, círculo e posição relativas do círculo. Nas atividades o autor insere as definições, proposições e em seguida apresenta exercícios. A função do GeoGebra na execução das atividade não fica totalmente evidente. O trabalho não foi aplicado com alunos.

Paula (2013) após a introdução apresenta excelente análise sobre o estudo da Geometria no Brasil, chegando à Geometria Analítica e ao GeoGebra. Na sequência de seu trabalho apresenta as atividades sobre Geometria Analítica. Apresenta três atividades: o círculo como lugar geométrico, posição relativa entre duas circunferências e a última sobre a parábola como lugar geométrico. Cada atividade tem dois tutoriais. O primeiro o que o professor deve preparar antes de aplicar a atividade e o segundo um roteiro que deve ser seguido pelo aluno. As atividades relativas à circunferência foram aplicadas e autor alega:

> A observação durante a atividade e as respostas apresentadas pelos tutoriais não deixaram dúvidas que houve um entendimento do assunto, primeiro passo para a aprendizagem. Mesmo se tratando de um estudo piloto, onde ajustes deverão ser feitos, notou-se a eficiência do uso da tecnologia no ensino. (PAULA, 2013, p. 72)

Werneck (2013) aborda especificamente a circunferência. Introduz igualmente seu trabalho relatando o uso do computador na sala de aula. Sobre a informática, matemática e circunferência afirma:

> Fazer uma interação entre a Matemática e a Informática torna mais compreensível os conceitos matemáticos, pois o aluno poderá visualizar e compreender as definições da Geometria Analítica, especificamente, a circunferência. E com esse recurso, o professor pode aprofundar o conhecimento no conteúdo, porque a aprendizagem será mais prazerosa, devido ao uso do componente importante que é o lúdico. Assim, o professor poderá dar um maior dinamismo às aulas. (WERNECK, 2013, p. 14)

No capítulo seguinte, Werneck analisa uma pesquisa censitária com professores estaduais da cidade de Ji-Paraná em Roraima. Alguns aspectos gerais foram investigados: tempo de atuação do professor, titulação, instituição de ensino que se formou, avaliação do livro didático, entre outros. O resultado que mais nos chamou a atenção na pesquisa de Werneck (2013, p. 24) foi sobre o uso do laboratório de informática, em que $71,43\%$ dos entrevistados disseram usá-lo raramente ou nunca. O autor prossegue inserindo um estudo sobre *softwares* de geometria dinâmica, encaminhando o capítulo com as atividades sugeridas com a utilização do GeoGebra. O trabalho não detalha especificamente este programa, nem apresenta atividades para a iniciação do aluno ao GeoGebra, pois acredita que a manipulação do mesmo é bastante simples. As atividades sugeridas são iniciadas com a definição de círculo, a equação reduzida e geral da circunferência, evidenciando a relação entre seus coeficientes. O aluno deve analisar o significado de a, b e r em $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$. A segunda parte mostra as equações paramétricas da circunferência e a equação polar da mesma. A atividade segue com alguns exercícios resolvidos no GeoGebra. A última parte informa os critérios relacionados a posição relativa entre circunferências. O autor pede, então, para inserir a equação de sete circunferências para analisar a posição relativa entre pares delas. As atividades não foram aplicadas em sala de aula.

A partir da análise destas dissertações percebemos que o assunto Geometria Analítica e circunferência e o uso do *software* GeoGebra não são inéditos, embora acreditamos que nosso trabalho é diferenciado por: apresentar atividades detalhadas a fim de propiciar a execução com o mínimo de interferência do professor e por isso podem ser utilizadas no ensino a distância, introduzir o GeoGebra de maneira focada, através de uma atividade preparatória lúdica que sirva como base para este e outros trabalhos, apresentar as atividades no formato aplicável diretamente aos alunos, oferecer atividades sobre todos os conteúdos presentes nos livros didáticos de forma independente, ou seja, de maneira que o professor possa escolher o tópico o qual utilizará em sua sala de aula, oportunizar aos alunos a formar conjecturas e testá-las, ressaltar a importância e validade das ferramentas puramente algébricas e oferecer soluções comentadas ao professor. A maioria das atividades do GeoGebra é pensada para explorar a potencialidade dos *softwares* de geometria dinâmica, pois mover objetos possibilita maior observação, a fim de que o aluno não analise situações estáticas, percebe que se sua conjectura estiver certa não importa o movimento que faça, ela continua válida. Outro aspecto importante a considerar é o foco nos conteúdos propriamente ditos, ou seja, não são atividades para fixação ou introdução do conteúdo, visam à compreensão dos tópicos ministrados, normalmente introduzidos como pura informação. Por exemplo, não informamos o que significam os parâmetros na equação reduzida do círculo, através das atividades o aluno pode conjecturar sobre os seus significados e testar a veracidade das suas hipóteses.

Motivação

Trabalhamos no Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia Rio Grande do Sul Campus Rio Grande, antes Colégio Técnico Industrial Prof. Mário Alquati. Uma instituição que completa 50 anos em agosto de 2014 e sempre foi conhecida pela sua qualidade de ensino, envolvendo professores e alunos qualificados. Atualmente o Ensino Médio é integrado ao ensino técnico com cursos voltados para a indústria e, por isso exigem dos alunos muito conhecimento da área das exatas. Dessa forma, o corpo docente da área de Matemática almeja a excelência. O aluno deve aprender e ser aprovado é uma simples consequência do aprendizado. Na nossa instituição os professores não precisam alcançar índices de aprovação e nenhum aluno é aprovado através de conselhos ou pareceres. Acreditamos, por isso, ter uma maior autonomia tanto para aplicar uma metodologia de ensino quanto uma metodologia de avaliação.

O histórico e objetivos da instituição a qual trabalhamos fazem com que queiramos sempre fazer o melhor pelos alunos e trabalhar os conteúdos não apenas para cumprir a ementa. Visamos, principalmente, estimular os alunos a transformar a informação em conhecimento e empregar este conhecimento como ferramenta de trabalho, já que trabalhamos numa escola técnica. Buscamos mostrar ao aluno não apenas a fórmula ou como utilizá-la, mas o entendimento dos princípios de como se chegou a ela, onde poderá aplicar esse conhecimento e sua importância.

Nos últimos anos temos trabalhado com as turmas do 3º ano do Ensino Médio na modalidade Integrado, ou seja, cursos técnicos vinculados ao Ensino Médio. Os cursos da modalidade integrado têm duração de 4 anos, cujo 4º bimestre do 3º ano é destinado ao estudo da Geometria Analítica. O 4º bimestre encerra: o ponto (distância entre pontos, ponto médio); a reta (equações, condição de paralelismo e perpendicularidade) e a circunferência (equações, posições relativas com ponto, reta e outra circunferência).

Neste bimestre, em geral, as notas dos alunos caem, tanto porque alguns alunos já estão aprovados, ou quase, ou porque já estão cansados e estão focando o exame. O interesse e consequentemente a compreensão sobre o assunto diminuem. Até o estudo das retas, os alunos não demonstram dificuldades, pois estudaram a função afim no 1º ano, sabem interpretar seu gráfico e resolver problemas relacionados. Já o estudo da circunferência não é totalmente assimilado. Atribuímos à isto a falta de conhecimentos prévios do Ensino Fundamental sobre geometria e também à pouca habilidade em manipulações algébricas. Geralmente quando perguntamos o que é uma circunferência, ou círculo, os alunos respondem: “é uma bola” , ou “é uma coisa redonda”. Desconhecendo a característica geométrica que a define. Também apresentam dificuldade no reconhecimento da equação da circunferência, mesmo mostrando a construção dela desde a fórmula da distância. Acreditamos que a equação reduzida da circunferência não faz sentido para os alunos, por, talvez, nunca terem estudado Geometria pelo ponto de vista algébrico, pois é recorrente ouvirmos perguntas como "o que eu coloco no lugar do x e do y?" quando o enunciado do exercício pede para determinar uma equação.

Por pertencer ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do sul, cuja palavra tecnologia faz parte de seu nome, senti-mo-nos estimulados a desenvolver atividades que utilizem ferramentas computacionais. Dentre as disponíveis, acreditamos que o melhor *software* é o GeoGebra, para trabalhar com Geometria Analítica, pois além de ser gratuito e ter atualizações periódicas, o modo como ele relaciona geometria e álgebra é apropriado ao estudo da Geometria Analítica. A correspondência objeto-equação acontece em mão dupla. O programa tanto permite esboçar gráficos a partir das equações, assim como define as equações do que é traçado geometricamente. Também possui a vantagem da geometria dinâmica, que permite mover objetos e aplicar diversas transformações e automaticamente enxergar a mudança nas equações, assim como com áreas, ângulos, rotações, translações, etc. Cabe salientar a disponibilidade do *software* em várias plataformas: *Windows*, *Linux* e *Android*. Assim o GeoGebra pode ser manipulado em um computador, *tablet* ou celular.

Desenvolvemos atividades sobre circunferência, com os tópicos já citados, empregando o programa GeoGebra. Segundo Borba e Penteado (2010, p. 64) a inserção da tecnologia em sala de aula como ferramenta pedagógica não exclui abandonar outras tecnologias e o importante avaliar qual a mídia mais adequada para atingir nossos objetivos. Este autor considera quadro, giz, giz colorido, lápis, papel também tecnologias, mas tradicionais, tecnologias mais antigas. Devemos mesclar aulas com ferramentas computacionais e outros estilos, também por não podermos, via de regra, utilizar um laboratório de informática continuamente, ou pelos alunos também estarem impossibilitados de levar seus computadores portáteis para aula todos os dias.

Para embasar nossa proposta investigamos o conhecimento esperado dos alunos sobre geometria e círculo do Ensino Fundamental, assim como a opinião sobre ferramentas computacionais e sobre o programa GeoGebra. As conclusões deste estudo prévio levaram a implementar as atividades em três das cinco turmas de 3º ano, as quais somos responsáveis, com intuito de comparar os resultados obtidos pelos dois grupos. Aplicamos as atividades em três encontros com os alunos e a partir das dificuldades dos desdobramentos dessas atividades, as reformulamos e as apresentamos como o produto deste trabalho. A versão para aplicar com os alunos pode ser impressa diretamente dos anexos.

No capítulo 1 desta dissertação, discorremos sobre a caracterização das sugestões de atividade, especificamente sobre o pública-alvo o qual a proposta pode ser implementada; os pré-requisitos necessários; as recomendações para o bom andamento das atividades e as dificuldades previstas. No capítulo 2, apresentamos uma análise de cinco livros didáticos para discutir, entre outras coisas, a presença ou não de sugestões de uso de ferramentas computacionais no estudo da circunferência. No capítulo 3, mostramos as atividades sobre circunferência propostas em conjunto com soluções comentadas. No capítulo 4, apresentamos os resultados obtidos quando implementamos o trabalho em nossas turmas, no capítulo 5, os possíveis desdobramentos deste trabalho e no capítulo 7, as nossas considerações finais. Nos anexos apresentamos uma introdução ao GeoGebra, descrevendo as ferramentas e comandos básicos necessários para a implementação das atividades sobre circunferência e as atividades propriamente ditas, prontas para a impressão e implementação das mesmas em sala de aula.

Objetivos

Os objetivos das atividades sobre circunferência propostas deste trabalho foram norteados pelas discussões presentes nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), com base na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN) 9.394/96 promulgada em 1996. Foi a partir dessa lei que a estrutura do Ensino Médio foi alterada, dividindo o Ensino Médio em três grandes áreas: Linguagens, Códigos e suas Tecnologias, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias e Ciências Humanas e suas Tecnologias. Nota-se o termo tecnologia como algo inerente a cada uma delas, termo inserido nessa lei.

Temos como objetivos gerais consolidar a inserção da tecnologia no ensino de Matemática, o desenvolvimento da autonomia do aluno vinculado ao desempenho de um novo papel do professor e o trabalho em grupo. Como objetivos específicos: a identificação de regularidades que possibilitam o aluno a conjecturar sobre o assunto abordado, a compreensão dos conteúdos sobre circunferência, o desenvolvimento da relação entre os significados e as abordagens distintas de um mesmo ente matemático e a resolução de problemas a partir dos conhecimentos adquiridos. Os objetivos específicos são melhor detalhados antes de cada atividade proposta.

Os objetivos integram-se, pois, por exemplo, desejamos que o aluno aprenda a aprender devido ao desenvolvimento tecnológico chegar a um nível em que cada vez mais rápido as tecnologias tornam-se obsoletas. Assim se ensinarmos o aluno o funcionamento de um programa específico, esse conhecimento pode se tornar desnecessário antes do aluno se inserir no mercado de trabalho. Os PCN ressaltam esse aspecto:

> O impacto da tecnologia na vida de cada indivíduo vai exigir competências que vão além do simples lidar com as máquinas. A velocidade do surgimento e renovação de saberes e de formas de fazer em todas as atividades humanas tornarão rapidamente ultrapassadas a maior parte das competências adquiridas por uma pessoa ao início de sua vida profissional. (BRASIL, 2000, p. 41)

Os PCN enfatizam por diversas vezes a necessidade de desenvolver a autonomia do aluno e ensiná-lo a continuar aprendendo, responsabilidade de todas as áreas do Ensino Médio. A autonomia e a pesquisa em conjunto fazem com que o aluno confie no seu conhecimento. Da mesma forma, os PCN salientam muitas vezes a importância do uso da tecnologia na Educação. Discorrem, também, sobre a formalização do conhecimento matemático e de outras áreas, que passam pela observação de regularidades, generalização de padrões e poder de argumentação (BRASIL, 2000, p. 41-42). Aspectos estimulados na nossa proposta de trabalho, possibilitado pelo dinamismo do GeoGebra. Brandão esclarece que os programas de geometria dinâmica (GD), como o GeoGebra o é, motivaram um paradigma que incentiva o estabelecimento e o teste de conjecturas:

> Neste paradigma o aprendiz é incentivado a realizar testes e procurar descobrir invariantes/propriedades. A partir de observações sobre os testes, estabelece-se uma conjectura e depois passa-se a testá-la em múltiplos casos, para ganhar confiança na validade da conjectura e também para buscar argumentos que permitam sua demonstração. Neste sentido os programas de GD podem catalisar o processo de descoberta [...]. (BRANDãO, 2008, p. 32)

Os aspectos algébrico e geométrico do programa tornam possível ao aluno associar dois significados diferentes do mesmo ente matemático e como estes aspectos se relacionam. Isso é descrito como um objetivo do ensino de Matemática no Ensino Médio gerado por suas finalidades: "Reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações"(BRASIL, 2000, p. 42). No nosso trabalho recorremos a todo momento à observação e a partir dela o aluno pode gerar suas próprias conjecturas, pode testá-las e com a ajuda do professor demonstrar sua validade, ou não, transformando-as em conhecimento. O aspecto fundamental sobre a autonomia do aluno que ressaltamos é torná-lo consciente e co-responsável da própria aprendizagem.

> Quando, noutro exemplo, se propõem métodos de aprendizado ativo, em que os alunos se tornem protagonistas do processo educacional, não pacientes deste, quer se ter a certeza de que o conhecimento foi de fato apropriado pelos alunos, ou mesmo elaborado por eles. Mas o que também se pretende é educar para a iniciativa, pois a cidadania que se quer construir implica participação e não se realiza na passividade. (BRASIL, 2000, p. 54)

No capítulo seguinte apresentaremos os recursos mínimos necessários ao bom desenvolvimento das atividades propostas.

1 Caracterização

Nesse capítulo comentamos alguns recursos materiais necessários ao desenvolvimento das atividades propostas no capítulo 3, assim como os pré-requisitos que não são necessariamente objetos.

1.1 Público alvo

Esse trabalho é voltado para alunos de Ensino Médio. O estudo da circunferência na Geometria Analítica, geralmente é inserido no 3º ano do Ensino Médio, por isso focamos nosso trabalho para os alunos dessa série. A faixa-etária é importante, como estão para concluir o Ensino Básico, acreditamos terem maturidade suficiente para desenvolver as atividades propostas.

1.2 Pré-requisitos

Para aplicar nossa proposta por completo o professor deve ter disponível para a implementação do trabalho computadores em número maior ou igual à metade dos alunos de cada turma, pois propomos que os alunos agrupem-se em duplas, assim como o material disponível nos anexos desse trabalho. Nos computadores deve estar instalado o programa GeoGebra que não terá qualquer custo à escola, pois ele é livre. Se a escola disponibilizar de internet o professor ou técnico do laboratório de informática pode baixar o programa pelo *site* $http://www.geogebra.org/cms/pt\_BR/$. Se a escola não possuir internet, há uma versão de instalação em computadores sem conexão. O programa GeoGebra também tem versões para *tablets* e sistema *LINUX*.

Além dos materiais já citados, necessitamos alguns conhecimentos prévios em relação ao círculo e geometria do Ensino Fundamental. Se o professor acreditar que os alunos possam não se lembrar desses assuntos, sugerimos compor nas turmas um glossário ou resumos dos conteúdos necessários como pré-requisitos.

Antes de cada atividade, no capítulo 3, disponibilizamos os pré-requisitos em tópicos para melhor esclarecer o professor que desejar implementar o nosso trabalho.

1.3 Recomendações metodológicas

Depois de cada atividade, no capítulo 3, inserimos dicas ao professor, relativas às atividades específicas que são recomendações para o bom andamento do trabalho. A seguir colocamos recomendações gerais para a implementação de qualquer uma das sete atividades propostas nesse trabalho.

★ Se os alunos possuírem domínio do GeoGebra, as atividades podem ser realizadas no tempo estipulado. Recomendamos, antes de introduzir o conteúdo, executar com os discentes a atividade Conhecendo o GeoGebra, disponibilizada no anexo. Essa atividade contém todos os comandos necessários às atividades propostas.

★ Recomendamos que as atividades sejam executadas pelos estudantes em dupla. Assim, o número de computadores necessários diminui e as funções de cada um da dupla podem ser específicas. Um aluno pode ficar responsável pela manipulação no GeoGebra e o outro encarregado de ler as instruções e fazer os registros requisitados. Importante que ambos discutam sobre as perguntas e consigam chegar num acordo quanto à conclusão.

★ Cada atividade é dividida em partes. Também recomendamos que o professor as entregue separadamente. Por exemplo, só entregue a segunda parte após a primeira estar concluída. Diversas vezes, isso será absolutamente necessário, pois a parte seguinte contém as respostas da parte anterior.

★ O professor deve acompanhar todo o tempo o trabalho dos alunos, mesmo que eles não tenham dúvidas, nem peçam ajuda. O professor é extremamente responsável pelo ritmo da execução das atividades.

★ Recomendamos aos alunos com mais habilidades no GeoGebra ajudar os demais, pois o professor sozinho pode não conseguir atender toda a turma ao mesmo tempo. A escolha das duplas pode influenciar o resultado do trabalho.

★ A geometria dinâmica do GeoGebra embasou nossa proposta. Os alunos, quase todo tempo, devem mover os objetos construídos e observar relações entre eles. O professor deve recomendar aos alunos basearem suas conclusões após vários movimentos, não apenas em um ou dois.

★ Recomendamos, ainda, oferecer aos estudantes uma fonte de pesquisa sobre Geometria, especialmente sobre círculo/circunferência, do Ensino Fundamental. Mesmo se a escola não possuir internet, o professor pode disponibilizar livros, ou como fizemos e comentamos no capítulo 4 deste trabalho, cada turma montar um glossário de termos geométricos básicos. Dessa forma, estamos incentivando e ensinando aos alunos que em Matemática também há pesquisa.

★ Toda vez que as instruções pedirem ao aluno abrir um novo arquivo, peça para ele salvar o que foi feito anteriormente.

★ Devido às duplas trabalharem independentes umas das outras e cada uma ter ritmos distintos, assim como, nem todos chegarem às conclusões devidas, faz-se necessário uma conclusão dos conteúdos e seus respectivos objetivos. O professor pode propôr uma discussão com a turma inteira, indicar uma leitura ou um vídeo, ou ainda que façam seus próprios vídeos relacionando as atividades com a teoria do assunto baseada também em pesquisa. Isso pode constituir um meio de avaliar os alunos e ainda empregar outros recursos tecnológicos que tanto lhes são familiares.

★ Se os estudantes trabalharem com seus próprios computadores, *tablets*, ou celulares é indicado que o GeoGebra já esteja instalado.

1.4 Dificuldades previstas

Comentamos na Introdução que nossa proposta requer muito mais envolvimento, tanto dos professores, quanto dos alunos. Primeiro, devido ao domínio do *software* GeoGebra, além do conteúdo propriamente dito. O professor deve conhecê-los profundamente e ainda relacioná-los. Acreditamos que em pouco tempo o professor esteja plenamente capacitado para isso. Em relação aos alunos, na implementação pode haver certa dificuldade se os alunos gostarem de aulas expositivas, a ponto de resistirem à mudança. Como o público alvo são jovens, esperamos que essas dificuldades não ocorram. Mesmo que haja algum desconforto inicial, esse é inevitável, pois nenhum paradigma é quebrado, relacionamos às aulas expositivas, sem pelo menos um pouco de suor, mesmo que no sentido figurado.

No próximo capítulo apresentamos uma análise de livros didáticos, objetivando principalmente o uso de tecnologia digital como ferramenta pedagógica.

2 Análise de livros didáticos

Antes de elaborar as atividades propostas neste trabalho investigamos o que os livros didáticos oferecem para o professor trabalhar em sala de aula sobre o Estudo da Circunferência. Lemos vários livros e analisamos, neste capítulo, cinco obras publicadas nos últimos cinco anos, que acreditamos representar este conjunto. Destacamos entre elas: a quarta obra analisada, pois é o livro didático adotado pelo IFRS - Campus Rio Grande desde 2011 e a quinta obra, pois é o único livro, dentre os cinco, que sugere atividades de Geometria Analítica para sala de aula com o uso de um *software* que constrói gráficos no plano cartesiano.

De modo geral o conteúdo de Geometria Analítica, especificamente o estudo da circunferência é abordada de maneira muito semelhante. Por exemplo, a sequência didática: introdução, teoria, exemplos resolvidos e exercícios, abordados em todas as obras.

2.1 Coleção Novo Olhar: Matemática de Joamir Souza (2010)

Souza (2010) divide o estudo de Geometria Analítica em dois capítulos: Um para ponto e reta e outro, para a circunferência e as cônicas. Na apresentação do capítulo sobre Geometria Analítica há a explicação do funcionamento do GPS (*Global Positioning System* – Sistema de Posicionamento Global) relacionado com o estudo da circunferência, mais especificamente com a interseção de duas circunferências geradas por três satélites. As perguntas lançadas aos alunos na apresentação não exploram a Geometria Analítica. Acreditamos que seja pelo fato de neste momento a Geometria Analítica não ter sido tratada, já que o assunto é introdutório. O autor poderia ter utilizado o exemplo para explorar posições relativas entre circunferências. O tema não foi retomado.

A seguir, o livro apresenta um resumo sobre a história da Matemática relacionada ao conteúdo, destacando a importância de René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1665). Ao longo do capítulo o autor apresenta a seção Contexto, em que descreve problemas relacionados ao cotidiano e a outras áreas de conhecimento, os quais podem ser resolvidos com o auxílio da Geometria Analítica. Os exemplos utilizados são: eclipses solares e a formação do arco-íris. O autor poderia ter relacionado as questões propostas com o estudo da circunferência.

O capítulo sobre circunferência além do conteúdo propriamente dito, mostra obras artísticas de dois profissionais renomados Victor Vasarely (1906-1997) e Wassily Kandinsky (1886-1944) que usavam o círculo constantemente em suas obras. A parte teórica do estudo da circunferência começa com a sua definição:

> A circunferência é uma linha fechada em um plano, em que todos os pontos estão a uma mesma distância de um ponto fixo, denominado centro. Cada segmento de reta com uma extremidade no centro e outra na circunferência é chamado de raio. (SOUZA, 2010, p. 188)

Em decorrência da definição, o autor usa a fórmula da distância entre dois pontos para chegar à equação reduzida da circunferência, de maneira genérica. A equação geral da circunferência é obtida a partir do desenvolvimento da equação reduzida. Tanto na parte teórica quanto nos exercícios resolvidos a equação geral apresenta coeficientes unitários para x^2 e y^2. Apenas nos exercícios são utilizados coeficientes não unitários, o que poderia causar dúvida nos estudantes. O livro mostra duas formas de obter o centro da circunferência e a medida de seu raio a partir da equação geral: completar quadrados e por comparação. Isso é feito no desenvolvimento dos exemplos. O autor poderia explicar mais detalhadamente. A equação geral completa do 2º grau a duas variáveis não é trabalhada.

Além das equações da circunferência o livro aborda as posições relativas entre circunferência e ponto, circunferência e reta e entre duas circunferências. Para circunferência e ponto o autor parte de simples esquemas gráficos para relacionar a posição do ponto em relação ao círculo, dependendo da distância do ponto ao centro do círculo comparativamente ao tamanho do raio. Acaba por relacionar a substituição das coordenadas do ponto na equação da circunferência, sem justificativa adicional. Para circunferência e reta os critérios atribuídos para determinar a posição relativa pertinente: tangente, secante ou externa de acordo com a comparação da distância do centro da circunferência e a reta com a medida do raio desta, como estivesse apresentando uma definição, juntamente com um esquema gráfico. No desenvolvimento dos exemplos é acrescentado outro método: número de soluções do sistema com as equações da reta e da circunferência. Para a posição relativa entre circunferência e circunferência o autor mostra esquemas gráficos, relacionados diretamente às condições que devem ser satisfeitas para distinguir entre as seis posições possíveis. No caso a condição envolve a distância entre os centros das circunferências comparativamente à soma da medida dos raios e à diferença da medida dos raios em módulo. O livro ainda aborda inequações a partir das equações reduzida e geral da circunferência e encerra o capítulo com o estudo das cônicas.

A sequência didática para abordagem dos conteúdos é tradicional: partindo da definição, propriedades ou critérios já estabelecidos sem demonstração, com poucas justificativas; seguidos de exemplos resolvidos e finalizando com lista de exercícios. As partes iniciais dos capítulos e a seção Contexto, embora apresentem problemas muito interessantes relacionados a outras áreas do conhecimento poderiam ser mais aprofundados e utilizar mais a relação com o conteúdo de Geometria Analítica.

2.2 Matemática de Manoel Paiva (2009)

Paiva (2009) divide a Geometria Analítica em cinco capítulos, incluindo o estudo das cônicas. Na apresentação de cada capítulo do livro mostra um problema contextualizado. O primeiro capítulo discute os conceitos relacionados a ponto e reta e mostra um problema da migração das baleias à procura de temperaturas específicas. O autor introduz a Geometria Analítica com a seção intitulada Origem da Geometria Analítica e apesar disso não faz nenhuma relação com a história da matemática. Cita apenas, brevemente, quem criou a Geometria Analítica. Paiva (2009, p. 29) escreve em apenas uma frase: "Um exemplo notável dessa prática é a Geometria analítica concebida pelo matemática francês René Descartes (1596-1650)."

O problema contextualizado da apresentação do capítulo sobre circunferência mostra a ponte elevadiça[1] no porto de Barcelona, em que as partes móveis giram em torno de um ponto fixo, ou seja, traçam com o movimento arcos de circunferência. No início da parte teórica mostra o gráfico de uma circunferência específica e como chegar na sua equação reduzida. Em seguida, repete o mesmo procedimento de maneira genérica para obter a equação reduzida da circunferência. Não encontramos a definição de circunferência. Nos exercícios da primeira seção retoma o problema da ponte elevadiça explorando melhor o exemplo. Na sequência, explora a forma da equação reduzida, mostrando quando a equação pode representar um ponto ou um conjunto vazio. O livro mostra ainda a equação geral da circunferência a partir do desenvolvimento da equação reduzida, como todos os livros analisados para este trabalho. O autor explica que a equação pode ser multiplicada por uma constante real não nula e assim os coeficientes de x^2 e y^2 não são necessariamente unitários. Para determinar o centro e o raio da circunferência a partir da sua equação geral apresenta os mesmos métodos do livro anterior.

Dos livros estudados é o único que apresenta uma seção específica para analisar quando a equação completa de 2º grau a duas variáveis representa uma circunferência citando diretamente em que condições isso ocorre, embora sem demonstrá-las ou justificá-las. O autor se atém a isso sem comentar os casos de circunferências degeneradas, ou seja, quando a equação representa o conjunto vazio ou apenas um ponto, nem que essa equação pode representar uma cônica. A equação completa do 2º grau a duas variáveis também não é explorada no capítulo específico de cônicas, onde só apresentam as equações reduzidas das mesmas. O autor poderia ter relacionado a circunferência com as cônicas e as cônicas entre si, o que poderia acontecer devido ao fato de serem representadas algebricamente pela mesma equação.

Das posições relativas, discute-se acerca de ponto e circunferência e reta e circun-

[1] Embora tenhamos pesquisado o termo "elevadiço" e encontrarmos a grafia correta "levadiço" , a grafia usado no livro foi semelhante à primeira.

ferência, apenas. Os critérios usados para determinar essas posições relativas são muito semelhantes a Souza, até na ordem de apresentação. A diferença maior está na apresentação da posição relativa entre reta e circunferência pelo número de soluções do sistema com as suas equações. Neste livro, a interseção entre reta e círculo é abordada numa seção específica, mais detalhada, enquanto em Souza essa forma de determinar a posição relativa faz parte do desenvolvimento de um exemplo.

2.3 Matemática Contexto e Aplicações de Luiz Roberto Dante (2011)

Dante (2011) apresenta a Geometria Analítica em três capítulos: o primeiro, sobre ponto e reta, o segundo, sobre a circunferência e o terceiro, sobre seções cônicas. O autor introduz o conteúdo dissertando sobre o contexto histórico, os feitos de René Descartes e Pierre de Fermat, assim como as vantagens de unir Geometria e Álgebra num novo ramo da Matemática: "Essa integração entre Geometria e Álgebra foi responsável por grandes progressos na Matemática e nas outras ciências em geral." (DANTE, 2011, p. 50)

Na apresentação do capítulo da circunferência, o autor refere-se ao estudo de Geometria espacial em que a circunferência foi analisada, relacionando-a principalmente aos corpos redondos. Talvez, por isso, não tenha definido circunferência formalmente. Ainda comenta o uso de circunferência pelo seu caráter estético e seu caráter prático, como, por exemplo, a construção da boca de um poço. Logo após propõe exercícios antes da teoria propriamente dita, em que o autor apresenta algumas definições e faz um questionamento acerca dessas definições. Em seguida, introduz o capítulo falando de aspectos puramente relacionados à Geometria Analítica e ao que foi feito no capítulo anterior, ressaltando que:

> Em Geometria Analítica, a Álgebra e a Geometria se integram. Assim, problemas de Geometria são resolvidos por processos algébricos, e relações algébricas são interpretadas geometricamente. (DANTE, 2011, p. 82)

Em todo o capítulo há mais espaço destinado aos processos algébricos. Para obter a equação reduzida da circunferência o autor é bem objetivo, assim como para obter a equação geral da circunferência, pelo simples desenvolvimento da equação reduzida. A vantagem de Dante em relação aos outros autores é a abordagem para o método de completar quadrados através do qual transforma a equação geral da circunferência na equação reduzida e a partir daí determina as coordenadas do centro e o raio da circunferência. Ele desenvolve o processo com muito mais detalhes e mais explicações que os demais livros. Também apresenta o método de comparação e aí volta a ser objetivo. Após vários exemplos apresenta um problema resolvido numa seção chamada Tim-tim por tim-tim, em que mostra uma sequência de procedimentos para o aluno seguir, detalhando ainda mais o método de completar quadrados.

Após explorar as equações da circunferência, passa a analisar as posições relativas entre circunferência e reta e entre duas circunferências, mas não apresenta posição relativa entre ponto e circunferência. O critério apresentado para diferenciar posição relativa entre reta e circunferência são os mesmos já mencionados: a distância entre o centro da circunferência e a reta comparativamente com a medida do raio e o número de soluções do sistema com as equações da reta e da circunferência. A seguir, uma seção específica para analisar e resolver problemas sobre retas tangentes à circunferência e outra sobre posição relativa de duas circunferências. Nesta, mostra os esquemas das posições possíveis e a descrição dos critérios necessários e suficientes para distingui-las, no entanto, não apresenta demonstração ou justificativa.

O autor encerra o capítulo com duas seções, uma especial destinada a resolver problemas de geometria plana com as ferramentas da geometria analítica e a outra presente em todos os capítulos: a Matemática e as práticas sociais, abordando várias relações da circunferência com esportes olímpicos.

A sequência didática dos capítulos é levemente distinta dos outros livros devido à inserção de atividades antes de começar a teoria, nos quais realmente questiona o aluno sobre Geometria Analítica. Nos demais aspectos poderia apresentar novidades, por exemplo, mencionar a possibilidade de *softwares* para o ensino de Geometria Analítica. Apenas na versão Manual dos Professores, no anexo Manual Pedagógico do Professor, na seção Recursos didáticos auxiliares, o autor cita que o livro não é o único recurso que deve ser empregado, sugere então o uso de instrumentos e materiais, como compasso, régua, bússola, vídeos, computador, *Internet* e laboratório de ensino de matemática. Na sugestão do uso de computadores praticamente cita alguns *softwares*: Logo, *Cabri-géomètre II*, *Geometricks* e *Excel*. O único que sugere duas atividades é no *Cabri-géomètre II*. O primeiro sobre pontos notáveis do triângulo e o outro sobre o Teorema de Talles. Investigamos e constatamos que não foi preparado especialmente para o Volume 3 para Geometria Analítica, todos os volumes tem o anexo Manual Pedagógico do Professor idêntico.

2.4 Conexões com a Matemática de Juliane Matsubara Barroso et al (2010)

Damos atenção especial a esse livro, pois ele foi adotado como livro texto do IFRS - Campus Rio Grande na qual foi aplicada a proposta do presente trabalho. A unidade 2 é destinada a Geometria Analítica e está dividida em três capítulos: o primeiro sobre conceitos básicos e a reta; o segundo, aborda a circunferência e o terceiro, estuda as cônicas. Na introdução da unidade há uma explicação do que é Geometria Analítica, sua origem por René Descartes e a uma aplicação dos sistemas cartesianos em mapas, mostrando uma parte de um mapa de Brasília.

A introdução do capítulo de circunferência faz referência ao colisor de Hádrons construído na Suíça no formato de uma circunferência no subterrâneo da cidade de Genebra e uma breve descrição histórica sobre a circunferência. É o único livro que define lugar geométrico, informando: "Lugar geométrico plano é um conjunto de pontos que partilham uma propriedade de modo que: todos esses pontos atendam à tal propriedade; e, somente esses pontos tenham a tal propriedade." (BARROSO et al., 2010, p. 128)

A definição de lugar geométrico dá-se em prol da definição de circunferência, a fim de esclarecer melhor o conceito ao aluno: "Dados um ponto fixo C e uma distância r, a circunferência λ é o lugar geométrico dos pontos P do plano que estão à mesma distância r de C." (BARROSO et al., 2010, p. 129)

Obtém-se a equação reduzida da circunferência partindo da definição da distância entre dois pontos. Não foge ao padrão dos outros livros, desenvolvendo a equação reduzida para obter a equação geral da circunferência. Dessa vez, relaciona a equação geral da circunferência como sendo uma equação incompleta do 2º grau a duas variáveis. Em seguida demonstra em que condições a equação completa de 2º grau representa uma circunferência, o único livro dentre os analisados que mostra essa relação.

Na seção de posições relativas, Barroso et al. apresentam as três possibilidades: ponto e circunferência, reta e circunferência e entre duas circunferências. Insere à clássica abordagem da posição relativa entre ponto e circunferência, já citada em outros livros, um contexto que chama a atenção dos alunos: num esquema de um campo de futebol, três pontos destacados, representando três jogadores e suas posições relativas à circunferência central do campo de futebol. Um ponto, ou melhor, um jogador na circunferência, dentro da circunferência e o terceiro jogador fora da circunferência. A abordagem da posição relativa entre reta e circunferência e entre duas circunferências, quanto aos critérios que decidem que posição estão, não foge do usual. O autor também usa outros exemplos contextualizados para incrementar o estudo das demais posições relativas. Para reta e circunferência uma caixa de CD (*compact disc*) em que o próprio define uma circunferência tangente às bordas da caixa, assim como a relação das cordas de um violão com a sua "boca" que representariam retas secantes a uma circunferência. O exemplo contextualizado na posição relativa entre duas circunferências são duas engrenagens, relacionadas a circunferências tangentes exteriores e a citação do filme Tempos Modernos (1936) em que Charles Chaplin (1889-1977) atua e dirige.

Assim como nos livros analisados anteriormente, este não trabalha, nem menciona, o uso de *softwares* para o Estudo da Circunferência ou Geometria Analítica. A seguir, para encerrar a análise do livros didáticos o único livro que apresentou proposta de trabalho com o uso de tecnologia digital para o estudo de Geometria Analítica.

2.5 Matemática de Kátia Smole e Cristina Stocco (2010)

A Geometria Analítica em Smole e Stocco (2010) é apresentada na Parte 2, subdividida em quatro unidades. A primeira sobre o estudo do ponto, a segunda sobre o estudo da reta, a terceira sobre o estudo da circunferência e a quarta sobre o estudo das cônicas. As autoras introduzem o conteúdo mostrando um apanhado histórico, citando Descartes e Fermat. Entre as obras analisadas neste trabalho é a única que menciona Nicole d'Oresme (1323-1382) como o possível inventor da Geometria Analítica.

Na introdução da unidade sobre circunferência, o livro apresenta um problema sobre uma rede de postos policiais numa cidade. Apresenta um mapa e questiona sobre qual conjunto de pontos satisfazem algumas propriedades, em que um desses conjuntos é a circunferência. A seção "Equação da circunferência" começa a teoria com a definição de circunferência: "Circunferência é o conjunto de pontos de um plano que estão a uma mesma distância r de um ponto C fixado, chamado **centro** da circunferência." (SMOLE; STOCCO, 2010, p. 86)

Naturalmente, a obra chega à equação reduzida da circunferência pela distância entre o centro e um ponto genérico do plano pertencente à circunferência. Logo a seguir é apresentada a equação geral da circunferência em que os coeficientes já estão relacionados com as coordenadas do centro da circunferência e seu raio, por isso é apresentado apenas coeficientes de x^2 e y^2 iguais a unidade. Na verdade, não há distinção entre as equações, as autoras tratam como uma só equação, ou melhor, não há nomenclatura diferenciada para os estilos de equação. Nos exemplos, indicados a seguir, é empregada apenas a forma que comumente chamamos de equação reduzida. Nos exercícios resolvidos e nos problemas propostos, da mesma seção, as autoras apresentam apenas o formato da equação reduzida.

Na sequência, a obra trata das posições relativas, começando com a relação ponto e circunferência. Só então há alguma relação com o que chamamos de equação geral da circunferência, pois define como condição para um ponto de coordenadas $P(x_p, y_P)$ pertencer a um círculo satisfazer a equação $x_p^2 + y_p^2 - 2ax_p - 2by_b + a^2 + b^2 - r^2 = 0$ para P pertencer à região interior, deve satisfazer: $x_p^2 + y_p^2 - 2ax_p - 2by_b + a^2 + b^2 - r^2 < 0$ e para P pertencer à região exterior: $x_p^2 + y_p^2 - 2ax_p - 2by_b + a^2 + b^2 - r^2 > 0$. Essa abordagem justifica-se pelo relação gráfica das inequações associadas às posições relativas entre ponto e círculo. O livro chega a esses critérios, claramente, pela condição das distâncias.

Para a posição relativa entre reta e circunferência o critério adotado no livro é o número de pontos de interseção entre eles. Ele insere, no contexto, a propriedade da reta tangente para relacionar com o critério pela relação com a distância entre o centro da circunferência e a reta comparativamente com o raio da circunferência, embora só mostre um esquema gráfico, relacionando a distância mencionada com a posição relativa. Nos exercícios resolvidos o livro usa ambos os critérios.

A obra não aborda a teoria sobre a posição relativa entre dois círculos. Consta ainda uma seção sobre o reconhecimento da equação de uma circunferência a partir de equações do 2º grau a duas variáveis, mas não a versão completa. O método apresentado é apenas por comparação à equação estendida $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$, sem atribuição de fórmulas. Comenta que se for possível achar as coordenadas do centro e o raio, então a equação representa um círculo.

O diferencial deste livro é o emprego de tecnologia digital como recurso didático, ao longo de toda a obra, não somente nos capítulos referentes a Geometria Analítica. A parte de tecnologia é inserida nas seções "No Computador". Na Geometria Analítica essa seção aparece apenas com a unidade sobre circunferência em dois momentos. No primeiro, apresenta o aplicativo *Winplot*. Cita a origem e onde baixá-lo. Inicia a atividade com o aplicativo descrevendo as instruções para plotar o gráfico de uma circunferência. Pede, a seguir, para plotar o gráfico de quatro circunferências e pede para observar a posição entre elas, diferenciando se são tangentes, secantes, concêntricas ou se não possuem pontos em comum. No segundo momento, relaciona circunferência à arte. Expõe um exemplo citando a artista Sônia Dalaunay (1885-1979) e a sua fase abstracionista utilizando círculos como recurso. Mostra também uma obra da artista Beatriz Milhazes (1960-). A atividade, desta vez, pede para o aluno inspirar-se nas obras citadas, usando círculos, retas e as posições relativas entre eles, manuseando os programas *Winplot* e *Paintbrush*.

A unidade sobre circunferência encerra-se com uma seção sobre relação da matemática com a vida. Aprofunda o tema sobre círculos e arte, inclui outras obras e até menciona música. Notamos que a edição anterior da mesma obra não possui a seção sobre atividades com o computador.

O Quadro 1 traça um comparativo das cinco obras mencionadas quanto aos aspectos abordados na análise individual de maneira resumida.

O único assunto abordado por todos foi a posição relativa entre reta e circunferência. Ressaltamos o fato de não relacionarmos o livro de Dante como inserindo ferramenta computacional, pois só o fez nos anexos e não de uma forma voltada ao estudo da circunferência.

No próximo capítulo, mostramos as atividades acerca do estudo do círculo com o uso do *software* GeoGebra. Cabe ressaltar a presença nos anexos de um capítulo especificamente sobre este programa, caso o professor não o conheça ou nunca tenha o

Quadro 1 – Análise de livros didáticos do Ensino Médio - Volume 3

Autor Principal	Paiva (2009)	Barroso (2010)	Smole (2010)	Souza (2010)	Dante (2011)
Abordagem histórica	Não	Sim	Sim	Sim	Sim
Definição de circunferência	Não	Sim	Sim	Sim	Sim
Equação completa do 2º grau a duas variáveis	Sim	Não	Não	Não	Não
Reconhecimento da equação de uma circunferência	Sim	Não	Sim	Sim	Sim
Posição Relativa entre ponto e circunferência	Sim	Sim	Sim	Sim	Não
Posição Relativa entre reta e circunferência	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim
Posição Relativa entre duas circunferências	Não	Sim	Não	Sim	Sim
Uso de ferramenta computacional	Não	Não	Sim	Não	Não

manipulado. Nesta circunstância, recomendamos a leitura do anexo, antes de prosseguir com as atividades do próximo capítulo.

3 Atividades propostas e soluções

Neste capítulo apresentamos as atividades sugeridas para o estudo da circunferência para alunos de Ensino Médio. Dividimos os conteúdos normalmente trabalhados em sala de aula em sete atividades, as quais podem ser ministradas separadamente, conforme a necessidade do professor e da ementa da disciplina em sua escola. Lembramos que ao invés de usar o termo circunferência usaremos o termo círculo com o mesmo significado, pois é o termo utilizado pelo GeoGebra. As atividades abordam os assuntos: definição e equação reduzida do círculo; equação geral do círculo; análise da equação completa de 2º grau a duas variáveis; método de completar quadrados para transformar a equação geral em equação reduzida do círculo; posição relativa entre ponto e círculo; posição relativa entre reta e círculo e entre dois círculos.

Parece inacreditável que após décadas do desenvolvimento tecnológico computacional estejamos ainda tentando implementar de modo efetivo ferramentas computacionais na escola e a quebra do paradigma tradicional de ministrar aulas. Segundo Miskulin e Junior (2007):

> Com o avanço da ciência e tecnologia, por meio de pesquisas no campo da inteligência artificial produzindo robôs interativos e pesquisas sobre realidade virtual, torna-se inconcebível que a Educação seja tratada de forma tradicional. Sabe-se que o desenvolvimento tecnológico proporciona uma nova dimensão que transcende os paradigmas ultrapassados do ensino tradicional,[...]. Essa nova dimensão prioriza um novo conhecimento, um conhecimento que considera o desenvolvimento do pensamento reflexivo e criativo como aspecto fundamental da cognição humana. (MISKULIN; JUNIOR, 2007, p. 136)

Tentamos, com as atividades aqui propostas, fugir dos meios tradicionais de ensino, buscando propiciar aos alunos a construção do conhecimento reflexivo. Propomos atividades que abordam o conteúdo mencionado propriamente dito e sugerem como trabalhar esses conteúdos de maneira diferenciada, sem apenas expor os conteúdos. Não tratamos de problemas geradores, exercícios para introduzir, fixar ou revisar os conceitos. Visamos os conceitos principalmente, todavia propomos, por vezes, alguns exercícios de fixação. A nossa abordagem procura que o aluno chegue às conclusões devidas de maneira autônoma, embora sob supervisão e orientação fundamentais do professor. O objetivo diferencial da proposta é desenvolver a autonomia do aluno, tornando-o corresponsável pelo seu processo de aprendizagem, conforme já discutimos no capítulo Objetivos. Os alunos devem seguir o roteiro descrito nestas atividades de maneira independente. Os roteiros são instruções, formando uma lista de procedimentos para o aluno executar e chegar ao objetivo desejado, seja manipulando o GeoGebra ou esboçando seu raciocínio na própria folha de papel. O professor deve ser um guia para esclarecer possíveis dúvidas. Lembramos que nesta proposta o professor assume um papel diferente no processo de aprendizagem do aluno, não sendo mais o centro e o único responsável por ele.

O professor que acreditar no potencial dos alunos, que eles devem deixar de aprender por processos passivos, que quer desenvolver capacidades necessárias ao perfil de profissionais no mercado de trabalho atual, já argumentadas neste trabalho, pode acreditar na presente proposta. O aluno é capaz de aprender com maior autonomia, com isso objetivamos preparar o aluno igualmente para o Ensino Superior, onde necessita dessas habilidades. Borba e Penteado (2010, p. 45-46) argumenta que o uso das mídias em consonância com o enfoque pedagógico estimula a investigação matemática tanto do aluno quanto do professor, incentivando a formulação de conjecturas. Borba e Penteado acrescentam:

> Dessa forma, busca-se superar práticas antigas com a chegada desse novo ator informático. Tal prática está também em harmonia com uma visão de construção de conhecimento que privilegia o processo e não o produto-resultado em sala de aula, e com uma postura epistemológica que entende o conhecimento como tendo sempre um componente que depende do sujeito. (BORBA; PENTEADO, 2010, p. 46)

Follador (2007, p. 74) argumenta que o nível de dificuldade inserido nas atividades com os alunos depende de sua vida escolar anterior e da cultura a que tem acesso, pois há alunos do Ensino Médio que nunca tiveram contato com programas gráficos, por exemplo, em contrapartida, alunos do Ensino Fundamental já o tiveram e vice-versa. Assim, segundo a autora, não devemos pré-julgar o conhecimento anterior do aluno em relação a série a qual cursa, por isso não devemos subestimar a sua capacidade. Apesar de não subestimar o aluno, esperamos que eles tenham alguma dificuldade. Dificuldade natural, principalmente para o aluno que está acostumado a apenas receber informações. Brousseau (1996, p. 59) fala sobre a “desdidatificação” como sendo algo a ser implementado e construído pelo professor, embora pareça estranho tanto a professores quanto aos alunos. É não dizer aos alunos o que se quer deles, o que entendemos por não dar respostas prontas em que o aluno não precise pensar sobre o problema.

> Não pode dizer aos alunos o que quer deles, já que se o diz e os alunos fazem, não será porque o tenham pensado. Nesse caso, os alunos não se apropriaram da pergunta, simplesmente fizeram o que o professor desejava. O professor tenta obter algo que não pode dizer, por meios que não pode anunciar. (BROUSSEAU, 1996, p. 59)

Ressaltamos, por isso, a necessidade de o professor estar preparado, muito mais do que se fosse ministrar uma aula expositiva. Também porque, segundo Borba e Penteado (2010) o professor que utiliza tecnologias digitais deve estar preparado para o imprevisível, então devemos nos preparar no sentido de uma maior familiaridade com o *software*, além do conhecimento matemático-teórico relacionado ao programa. O professor ainda necessita, neste contexto, de constante atualização e aceitar as experiências e contribuições que os alunos têm a dar (BORBA; PENTEADO, 2010, p. 63). Além de conhecer bem o funcionamento do GeoGebra o professor deve saber lidar com os alunos que querem as respostas prontas, pois respondê-las vai de encontro à autonomia dos alunos.

O aluno que não está acostumado com essa prática, ou seja, que costuma receber as informações prontas de uma maneira apenas expositiva e não inquisitiva e até aquele com tendências autodidatas achará esta proposta cansativa, se for implementada na sua íntegra. Recomendamos ao professor escolher algumas das nossas atividades e mesclar com outras metodologias.

Para cada tópico trabalhado, expomos a atividade juntamente com a sua resolução. Na solução, o que se refere aos comandos do GeoGebra indicamos apenas um *hiperlink* caso o professor não lembre como executá-lo, remetendo ao anexo GeoGebra: uma introdução, onde consta a execução do comando em detalhes. Cada atividade possui um quadro de dicas para o professor. Na verdade, constam, nestes quadros, as dicas que o professor pode oferecer aos alunos para evitar as respostas diretas, possibilitando aos mesmos chegar às próprias descobertas. Disponibilizamos também as atividades propostas a eles, prontas para a impressão e execução, nos anexos deste trabalho.

Além de inserir o quadro de dicas para o professor, expomos algumas recomendações gerais para a implementação das atividades no capítulo 1.

3.1 Atividade 1 - Definição e equação reduzida do círculo

Objetivos:

▶ Compreensão da equação reduzida da circunferência e significado dos parâmetros desta equação.

▶ Obtenção da equação reduzida da circunferência.

▶ Resolução de problemas a partir das atividades.

Pré-requisitos:

▶ Definição de circunferência/círculo.

▶ As ferramentas básicas do GeoGebra.

Material necessário:

▶ Equipamento que tenha instalado o *software GeoGebra.*

▶ Folha de atividades para o aluno.

▶ Livros de Geometria para pesquisa que contenham a definição de circunferência ou o glossário feito pelos alunos.

Tempo necessário: Uma hora-aula.

Parte 1 - Definição de Círculo

1. Inicialize o programa GeoGebra.
2. Habilite a malha. Solução: Veja Comando A.3.1.
3. Marque um ponto A, no primeiro quadrante. Prefira coordenadas inteiras. Solução: Veja Comando A.2.2.1.
4. Deixe o ponto A fixo. Solução: Veja Comando A.3.2.3.
5. Faça pelo ponto A um segmento de comprimento fixo. Escolha o comprimento. O outro extremo do segmento será o ponto B. Solução: Veja Comando A.2.3.3.
6. Mude a cor do ponto B. Solução:Veja Comando A.3.2.5.
7. Habilite o rastro do ponto B. Solução: Veja Comando A.3.2.2.
8. Mova o segmento AB ou a extremidade B. Ou ainda, anime o ponto B. Solução: Veja Comando A.2.1.1. Para animar o ponto B clique com o botão direito do *mouse* no ponto e na caixa auxiliar selecine Animar.
9. Qual curva é traçada pelo rastro? Solução: Círculo (ou circunferência). A Figura 1 mostra a animação antes de completar uma volta.

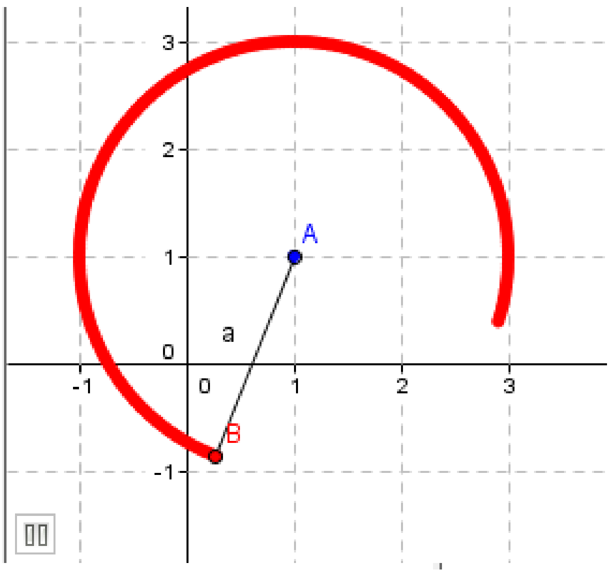


Figura 1 – Rastro animado do ponto B

10. Faça um círculo com a ferramenta Círculo dados Centro e um de seus Pontos. Centro em A e um de seus pontos B. Solução: Veja Comando A.2.5.1.

11. Amplie a Figura aproximando uma parte do círculo. Solução: Veja Comando A.2.9.2.

12. Mova novamente o ponto B. Solução: Veja Comando A.2.1.1.

13. O rastro do ponto B coincide com o círculo? (X) Sim ( ) Não

14. Por quê? Solução: Sim, porque o comprimento do segmento é fixo, logo cada ponto do rastro tem a mesma distância ao ponto A, ou seja, cada ponto do rastro pertence ao círculo.

15. No item 13: Se sua resposta foi negativa, pesquise a definição de círculo ou circunferência e verifique se o comprimento do segmento realmente está fixo, voltando a este item. Se foi afirmativa, responda as questões abaixo:

    a) O que representa o ponto A para o círculo? Solução: O seu centro.

    b) O que representa o segmento AB para o círculo? Solução: O seu raio.

Parte 2 - Equação Reduzida do Círculo

1. Abra um novo arquivo ou apague tudo o que está na Janela de Visualização. Solução: Veja Comando A.2.9.4.

2. Habilite a malha. Solução: Veja Comando A.3.1.

3. Faça um círculo usando a ferramenta Círculo dados Centro e Um de Seus Pontos, de forma que ele esteja contido no 1º quadrante do plano cartesiano. Solução: Veja Comando A.2.5.1.

4. Faça um segmento de extremidades em A e B.

   Observação 3.1.1. a) O GeoGebra nomeará o centro de A e o ponto do círculo de B.

   b) Escolha coordenadas inteiras para os pontos A e B.

   c) Procure que a medida do raio também seja um valor inteiro.

5. Observe a equação gerada pelo GeoGebra na Janela de Álgebra relativa a esse círculo.

6. Copie a equação aqui. Solução: Um exemplo, $(x-1)^2+(y-3)^2=4$.

   Observação 3.1.2. a) Chamamos esse tipo de equação de Equação Reduzida do Círculo.

b) Nesta equação, além das variáveis x e y e dos expoentes, aparecem três números, os chamaremos de parâmetros. A equação reduzida do circulo pode ser escrita na forma: $(x-a)^2+(y-b)^2=c$.

7. Mova o ponto A, passando por todos os quadrantes. Também mova o ponto B até conseguir responder: Veja Comando A.2.1.1.

   a) O parâmetro c pode ser negativo?
   ( ) Sim (X) Não

   b) Os parâmetros a e b:

      i. São sempre negativos? ( ) Sim (X) Não

      ii. Podem ter sinais contrários? (X) Sim ( ) Não

8. Mova o ponto B para apenas o raio do círculo mudar. Faça vários movimentos. Veja Comando A.2.1.1.

   a) Quais parâmetros na equação se alteram?

      i. Parâmetro a: ( ) Sim (X) Não

      ii. Parâmetro b: ( ) Sim (X) Não

      iii. Parâmetro c: (X) Sim ( ) Não

   b) Observe o parâmetro c e a medida do segmento AB na Janela de Álgebra. Responda:

      i. O parâmetro c é o raio do círculo? ( ) Sim (X) Não

      ii. O parâmetro c é o diâmetro do círculo? ( ) Sim (X) Não

      iii. Caso sua resposta tenha sido afirmativa a algum dos dois ítens anteriores, mova o ponto B de maneira que o raio assuma valores diferentes de 1 e diferentes de 2 e observe o parâmetro c. Escolha pelo menos dois valores para o raio.
      Solução: Na Figura 2 usamos o raio 5.

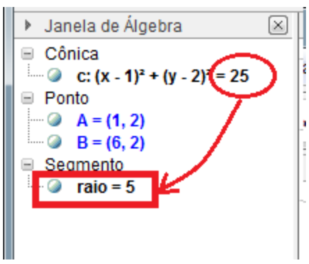


Figura 2 – Um exemplo relacionando o raio do círculo e o parâmetros c

c) O que é o parâmetro c, que relação ele tem com o raio? Solução: O parâmetro c é o raio ao quadrado.

9. Mova o círculo de maneira que o raio **NÃO** mude, para isso arraste o centro do círculo ou a linha do mesmo. Faça vários movimentos, comece com o centro do círculo pertencente ao 1º quadrante e vá alternando os quadrantes.

a) Quais parâmetros na equação se alteram?

i. Parâmetro a: (X) Sim ( ) Não

ii. Parâmetro b: (X) Sim ( ) Não

iii. Parâmetro c: ( ) Sim (X) Não

b) Observe as coordenadas do ponto A e os parâmetros a e b, ao mesmo tempo em que move o círculo (sem alterar o raio). Preste atenção ao quadrante a que pertence o ponto A e o sinal de suas coordenadas. Uma solução: Na Figura 3 destacamos a abscissa do centro e o parâmetro a em vermelho e a ordenada do centro e o parâmetro b em verde.

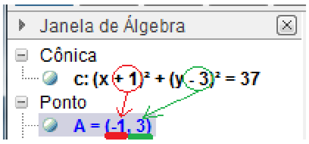


Figura 3 – Um exemplo relacionando o centro do círculo A e os parâmetros a e b

i. Quando o parâmetro a é positivo? Solução: Abscissa do A pertence ao 1º ou 4º quadrante. Ou: Quando a abscissa do A é positiva.

ii. Quando o parâmetro a é negativo? Solução: Abscissa do A pertence ao 2º ou 3º quadrante. Ou: Quando a abscissa do A é negativa.

iii. Quando o parâmetro b é positivo? Solução: Ordenada do A pertence ao 1º ou 2º quadrante. Ou: Quando a ordenada do A é positiva.

iv. Quando o parâmetro b é negativo? Solução: Ordenada do A pertence ao 3º ou 4º quadrante. Ou: Quando a ordenada do A é negativa.

c) O que representa o parâmetro a da equação do círculo? Solução: A abscissa do A, centro do círculo.

d) O que representa o parâmetro b da equação do círculo? Solução: A ordenada do A, centro do círculo.

10. O que significam as variáveis x e y na equação do círculo? Dica: lembre do significado das variáveis na equação de uma reta. Solução: Representam todos os infinitos pontos $P(x, y)$ do plano que pertencem ao círculo.

11. Construa o círculo de centro em $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$ e raio $r = \sqrt{6}$.

   a) Qual a equação deste círculo? Solução: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{4}\right)^2 = 6$.

   b) O significado dos parâmetros a, b e c continua valendo, mesmo não sendo valores inteiros? Solução: Sim.

12. Escreva a equação reduzida do círculo de centro $C(x_c, y_c)$ e de raio r: Solução: $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$.

Parte 3 - Exercícios

Resolva os exercícios a seguir no caderno. No desenvolvimento dos exercícios os argumentos devem ser algébricos e não baseados somente nas construções do GeoGebra.

Exercício 1. Em relação ao círculo de centro em $C(1, -2)$ e raio $r = 3$:

(a) Qual a equação reduzida desse círculo? $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$

(b) O ponto $A(4, -2)$ pertence ao círculo? E o ponto $B(-2, -4)$?
Solução: A: $(4 - 1)^2 + (-2 + 2)^2 = 9 + 0 = 9$.
Verifica a equação, logo A pertence ao círculo.
B: $(-2 - 1)^2 + (-4 + 2)^2 = 9 + 4 = 13 \neq 9$
Não verifica a equação, logo B não pertence ao círculo.

Exercício 2. Dentre as equações abaixo, indique quais representam círculos. Em caso afirmativo, determine o centro e o raio do mesmo, caso contrário, justifique.

(a) $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 1$ Solução: Sim, $C(-3, 1)$ e $r = 1$.

(b) $(x - 1)^2 - (y + 5)^2 = 16$ Solução: Não, os "quadrados" estão subtraindo um do outro e não somando. Se o aluno inserir esta equação no GeoGebra ele identificará a curva como uma hipérbole.

(c) $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 6$ Solução: Sim, $C(1, -4)$ e $r = \sqrt{6}$.

(d) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + 5 = 0$ Solução: Não, subtraindo 5 unidades de ambos os membros da equação, obtém-se $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = -5$. Assim, pela equação reduzida do círculo teríamos $r^2 = -5$ e nenhum número real r satisfaz essa equação. Ou seja, não existe raio e sem raio não existe círculo. Se o aluno inserir esta equação no GeoGebra ele identificará a equação como o conjunto vazio.

Observação 3.1.3. Insira as equações no GeoGebra e confira os resultados.

Exercício 3. (ENEM - 2013) Durante uma aula de Matemática, o professor sugere aos alunos que seja fixado um sistema de coordenadas cartesianas (x, y) e representa na lousa a descrição de cinco conjuntos algébricos I, II, II, IV e V, como se segue:

I – é a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 9$;

II – é a parábola de equação $y = -x^2 - 1$, com x variando de -1 a 1;

III – é o quadrado formado pelos vértices $(-2, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, 2)$ e $(-2, 2)$;

IV – é o quadrado formado pelos vértices $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$ e $(1, 2)$;

V – é o ponto $(0, 0)$.

A seguir, o professor representa corretamente os cinco conjuntos sobre uma mesma malha quadriculada, composta de quadrados com lados medindo uma unidade de comprimento cada, obtendo uma Figura. Qual das alternativa na Figura 4 foi desenhada pelo professor?

Solução: Os conjuntos III, IV e V não se alteram nas figuras, então o que determina a

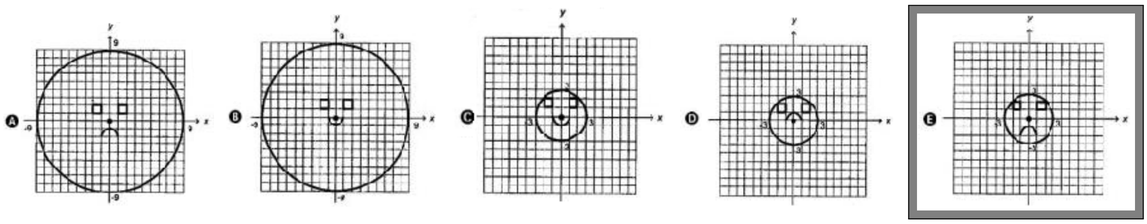


Figura 4 – Alternativas da questão do ENEM

resposta certa são os conjuntos I e II. O conjunto I é o círculo centrado na origem de raio 3. Logo, ficamos entre as alternativas c), d) e e). O conjunto II é uma parábola com a concavidade para baixo, logo, ficamos entre as alternativas d) e e). Agora, a interseção da parábola com o eixo y é o ponto $(0, -1)$. Portanto, a resposta correta é a letra e).

Exercício 4. (Desafio) Podemos utilizar os recursos da Geometria Analítica para resolver problemas puramente geométricos. Para isso devemos satisfazer as condições do problema numa disposição conveniente do plano cartesiano. Por exemplo, para provar: Se um triângulo está inscrito num círculo e o maior lado do triângulo é um diâmetro do círculo, então esse triângulo é retângulo, podemos pensar num círculo que esteja centrado na origem do plano cartesiano, de raio r e diâmetro contido no eixo ox. AB é o diâmetro do círculo, C é um ponto qualquer do círculo. Como na Figura 5. Responda:

(a) Qual teorema famoso que conhecemos da Geometria está relacionado aos triângulos retângulos? Solução: Teorema de Pitágoras. Um triângulo é retângulo se, e somente se a soma dos quadrados da medida dos catetos é igual a medida da hipotenusa ao quadrado.

(b) Na Geometria Analítica, como calculamos a medida dos lados de um triângulo? Solução: Calculando a distância entre dois pontos, no caso os vértices do triângulo.

(c) Se um ponto pertence ao círculo que sentença ele deve satisfazer? Solução: A equação do círculo, substituindo as variáveis pelas coordenadas dos pontos.

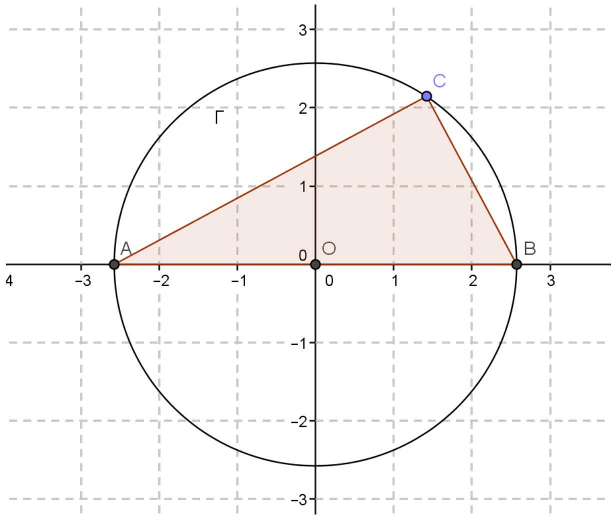


Figura 5 – Desafio - Exercício 4

(d) Agora com a Figura 5 e as respostas das perguntas anteriores, prove: Se um triângulo está inscrito num círculo e o maior lado do triângulo é um diâmetro do círculo, então esse triângulo é retângulo.

Solução: Considere os pontos $A(-r,0)$, $B(r,0)$ e $C(x,y)$. Como o ponto C pertence ao círculo sabemos que $x^2+y^2=r^2$, que é a equação do círculo de centro em $O(0,0)$ e raio r. Por sua vez, queremos mostrar que ABC é retângulo em B, para isso vamos verificar se ABC satisfaz o Teorema de Pitágoras, que diz que $d^2(A,B) = d^2(C,A)+d^2(C,B)$. Sabemos calcular distâncias e consequentemente seus quadrados: $d^2(A,B) = (2r)^2 = 4r^2$, pois sabemos que AB é um diâmetro do círculo.

Usando a fórmula da distância entre dois pontos: $d^2(C,A) = (x+r)^2+y^2$ e $d^2(C,B) = (x-r)^2+y^2$. Vamos mostrar que $d^2(C,A)+d^2(C,B) = d^2(A,B)$, de fato:

$$\begin{aligned}
d^2(C,A)+d^2(C,B) &= [(x+r)^2+y^2]+[(x-r)^2+y^2] = \\
&= (x^2+2xr+r^2+y^2)+(x^2-2xr+r^2+y^2) = \\
&= 2x^2+2y^2+2r^2 = 2(x^2+y^2)+2r^2 = \\
&= 2(r^2)+2r^2 = 4r^2 = d^2(A,B).
\end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

Dicas para o professor
✓ Pergunte aos alunos se a equação do círculo lhes lembra alguma fórmula estudada na Geometria Analítica. Essa resposta facilitará a compreensão da demonstração da equação reduzida no fechamento dos conteúdos.
✓ Ressalte a importância do significado das variáveis na equação do círculo. Se esse significado foi construído para as equações das retas, o aluno realizará as atividades no tempo previsto.
✓ Possivelmente as duplas não consigam completar o desafio. Nesse caso, recomende aos alunos resolvê-lo em casa. Se algum aluno conseguir, este pode explicar seus argumentos aos demais.
✓ Incentive o aluno a entender como a mediatriz pode ajudar nos problemas envolvendo círculos. Isso pode ser feito durante o estudo das retas.

3.2 Atividade 2 - Equação geral do círculo

Objetivos:
▶ Obtenção da equação geral do círculo a partir da equação reduzida.
▶ Determinação das coordenadas do centro e o raio do círculo a partir da equação geral do círculo através do método da comparação.
Pré-requisitos:
▶ Equação reduzida do círculo.
▶ As ferramentas básicas do GeoGebra.
Material necessário:
▶ Equipamento que tenha instalado o *software* GeoGebra, um por dupla.
▶ Folha de atividades para o aluno, uma por dupla.
Tempo necessário: Uma hora-aula.

Parte 1 - Equação Geral do Círculo

1. Escreva no caderno, a equação reduzida do círculo de centro em $C(3, 1)$ e raio 2. Solução: $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$.

   a) No caderno, desenvolva os quadrados da equação obtida e ordene seus termos como aparecem na equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Solução:

$$\begin{aligned}
(x-3)^2+(y-1)^2 &= 4\\
x^2-6x+9+y^2-2y+1 &= 4\\
x^2-6x+y^2-2y+10 &= 4\\
x^2+y^2-6x-2y+6 &= 0
\end{aligned}$$

b) Indique: $A = \underline{1}$ $B = \underline{0}$ $C = \underline{1}$ $D = \underline{-6}$ $E = \underline{-2}$ $F = \underline{6}$

Observação 3.2.1. A equação do círculo resultante, depois da ordenação dos coeficientes, é chamada de equação geral do círculo.

2. No caderno, escreva a equação reduzida do círculo de centro em $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ e raio $r = \frac{5}{2}$. Solução: $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$

   a) No caderno, desenvolva os quadrados da equação e ordene seus termos como aparecem na equação $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$. Deixe todos os coeficientes inteiros. Solução:

$$\begin{aligned}
\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2 &= \frac{25}{4}\\
x^2-x+\frac{1}{4}+y^2+3y+\frac{9}{4} &= \frac{25}{4}\\
x^2-x+y^2+3y+\frac{10}{4} &= \frac{25}{4}\\
x^2+y^2-x+3y-\frac{15}{4} &= 0\ (\times 4)\\
4x^2+4y^2-4x+12y-15 &= 0
\end{aligned}$$

   b) Indique: $A = \underline{4}$ $B = \underline{0}$ $C = \underline{4}$ $D = \underline{-4}$ $E = \underline{12}$ $F = \underline{-15}$

3. No GeoGebra, faça os círculos anteriores. Sugestão: digite as equações diretamente na caixa de entrada.

Observação 3.2.2. a) O GeoGebra admite na Janela de Álgebra a equação reduzida do círculo, mas também podemos alterar o formato da equação.

b) Por vezes, ao digitar uma equação na forma geral, o GeoGebra mostra na Janela de Álgebra a equação reduzida. Neste caso não é necessário mudar o formato, como indicado no item a seguir.

4. Mude o formato das equações para $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey=f$ e confira os resultados dos itens 1 e 2. Solução: Veja Comando A.3.2.6. Observe a Figura 6.

Observação 3.2.3. a) Há uma diferença da equação geral do círculo em relação ao formato do GeoGebra, o termo independente é posto no 2º membro da equação.

b) Podemos conferir o resultado de outra forma, usando a Janela CAS. Habilite-a na Barra de Menus → Exibir → Janela CAS e:

   i. Digite a equação reduzida do círculo na primeira linha da Janela CAS e tecle *Enter*. A equação estará semelhante ao formato desejado, apenas o termo independente não estará explicito, pois há uma constante antes do sinal de igual e outra depois do sinal de igual.

   ii. Clicando na "bolinha" ao lado da equação mostrada na Janela CAS, o GeoGebra esboça o traço do círculo.

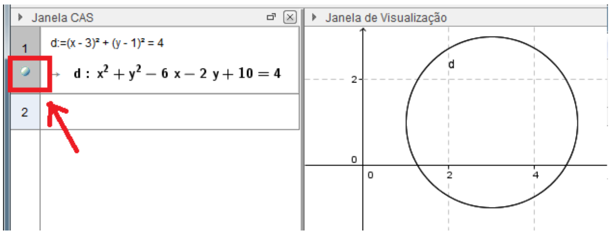


Figura 6 – Uso da Janela CAS - Um exemplo

5. É possível estabelecer alguma relação dos parâmetros x_c, y_c e r da equação reduzida com A, B, C, D, E e F da equação completa do 2º grau?
   ( ) Não ( )Sim (X) Nem todos Resposta esperada
   $A = \underline{?}$ $B = \underline{0}$ $C = \underline{?}$ $D = \underline{?}$ $E = \underline{?}$ $F = \underline{?}$

Parte 2 - Centro e raio do círculo a partir da equação geral do círculo

1. No caderno, escreva a equação reduzida do círculo de centro $C(x_c, y_c)$ e raio r. Solução: $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$.

2. No caderno, desenvolva os quadrados da equação obtida e ordene seus termos como aparecem na equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.
   Solução:

$$\begin{aligned}
(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 &= r^2 \\
x^2 - 2x_c x + x_c^2 + y^2 - 2y_c y + y_c^2 &= r^2 \\
x^2 - 2x_c x + y^2 - 2y_c y + x_c^2 + y_c^2 &= r^2 \\
x^2 + y^2 - 2x_c x - 2y_c y + x_c^2 + y_c^2 - r^2 &= 0
\end{aligned}$$

3. Indique $A = \underline{1}$ $B = \underline{0}$ $C = \underline{1}$ $D = \underline{-2x_c}$ $E = \underline{-2y_c}$ $F = \underline{x_c^2 + y_c^2 - r^2}$

   Observação 3.2.4. A partir das igualdades anteriores relacionadas a D, E e F podemos encontrar os coeficientes x_c, y_c e r. Para isso basta substituir nessas igualdades os dados da equação geral e isolar a constante que queremos. Em D, descobrimos o valor de x_c, em E, descobrimos o valor de y_c. Com os valores de x_c e de y_c, encontramos em F o valor de r. E assim determinamos o centro $C(x_c, y_c)$ do círculo e seu raio r.

4. No caderno, encontre as coordenadas do centro e raio do círculo de equação: $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 20 = 0$. Solução: Como $A = C = 1$ e $B = 0$, podemos proceder usando as igualdades do item 3:
   $D = -2x_c \quad \leftrightarrow \quad -10 = -2x_c \quad \leftrightarrow \quad x_c = 5$
   $E = -2y_c \quad \leftrightarrow \quad -4 = -2y_c \quad \leftrightarrow \quad y_c = 2$
   $F = x_c^2 + y_c^2 - r^2 \quad \leftrightarrow \quad 20 = 25 + 4 - r^2 \quad \leftrightarrow r^2 = 9 \quad \leftrightarrow \quad r = 3$
   $C(5, 2)$ e $r = 3$.

5. Digite a equação do círculo no GeoGebra, altere o formato da equação e confira o resultado do item anterior. Solução: Veja Comando A.3.2.6. O GeoGebra pode fazer a conversão automaticamente. Alerte os alunos.

6. No caderno, encontre as coordenadas do centro e raio do círculo de equação: $x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$. Solução: Como $A = C = 1$ e $B = 0$, podemos proceder usando as igualdades do item 3:
   $D = -2x_c \quad \leftrightarrow \quad -4 = -2x_c \quad \leftrightarrow \quad x_c = 2$
   $E = -2y_c \quad \leftrightarrow \quad 0 = -2y_c \quad \leftrightarrow \quad y_c = 0$
   $F = x_c^2 + y_c^2 - r^2 \quad \leftrightarrow \quad -12 = 4 + 0 - r^2 \quad \leftrightarrow \quad r^2 = 16 \quad \leftrightarrow \quad r = 4$
   $C(2, 0)$ e $r = 4$.

7. Digite a equação do círculo no GeoGebra, altere o formato da equação e confira o resultado do item anterior. Solução: Veja Comando A.3.2.6.

   Observação 3.2.5. As relações citadas no item 3 são válidas exclusivamente se $A = C = 1$. Não precisamos definir novas relações se estes coeficientes não forem iguais a 1. Basta dividir a equação por um número conveniente e, então, aplicar as relações usadas nos itens anteriores.

8. No caderno, determine as coordenadas do centro e raio do círculo de equação: $3x^2 + 3y^2 - 12x - 18y = 0$. Solução: Como $A = C = 3$ e $B = 0$, antes dividimos ambos os membros da equação por 3.
   $3x^2 + 3y^2 - 12x - 18y = 0 \;\; (\div 3)$
   $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$
   $D = -2x_c \quad \leftrightarrow \quad -4 = -2x_c \quad \leftrightarrow \quad x_c = 2$
   $E = -2y_c \quad \leftrightarrow \quad -6 = -2y_c \quad \leftrightarrow \quad y_c = 3$
   $F = x_c^2 + y_c^2 - r^2 \quad \leftrightarrow \quad 0 = 4 + 9 - r^2 \quad \leftrightarrow \quad r^2 = 13 \quad \leftrightarrow \quad r = \sqrt{13}$
   $C(2, 3)$ e $r = \sqrt{13}$.

9. Digite a equação do círculo no GeoGebra, altere o formato da equação e compare com o resultado do item anterior. Solução: Veja Comando A.3.2.6.

Dicas para o professor
✓ Para obter coeficientes inteiros lembre ao aluno que podemos multiplicar uma equação por um número real sem alterar sua essência.
✓ Independente da resposta do aluno ao item 5 da parte 1, diga que pode prosseguir, pois a próxima etapa ajudará a chegar à conclusão pretendida ou confirmá-la.
✓ Lembrar aos alunos que x_c, y_c e r representam números conhecidos, por isso x_c^2, y_c^2 e r^2 entram na composição do F, termo independente da equação.
✓ Nesta atividade o GeoGebra foi usado principalmente para conferir resultados. Podemos dizer aos alunos que o GeoGebra pode ser útil neste sentido, quando estiverem resolvendo exercícios em casa.

3.3 Atividade 3 - Análise da equação completa de 2º grau a duas variáveis

A equação completa do 2º grau a duas variáveis nem sempre representa um círculo. Isso só acontece em condições especiais, as quais trabalharemos nas atividades a seguir.

Objetivos:
▶ Determinação das condições para que a equação completa do 2º grau a duas variáveis represente um círculo.
▶ Reconhecimento quando a equação representa um ponto ou o conjunto vazio.
Pré-requisitos:
▶ Equação geral do círculo.
▶ As ferramentas básicas do GeoGebra.
Material necessário:
▶ Equipamento que tenha instalado o *software GeoGebra*.
▶ Uma folha de atividades para cada dupla.
Tempo necessário: Uma hora-aula.

Parte 1 - Análise da equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Considere a equação geral completa do 2º grau a duas variáveis $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$. Digite as equações no GeoGebra e registre a curva formada no lugar indicado. O GeoGebra identifica a curva, basta passar o *mouse* por cima do seu traçado ou da sua equação com a ferramenta Mover selecionada. Indique o centro e o raio da curva SOMENTE SE A EQUAÇÃO REPRESENTAR UM CÍRCULO, observando a equação reduzida na Janela de Álgebra. Antes de traçar uma próxima curva, esconda as anteriores para evitar a poluição visual na Janela de Visualização. Veja o Comando A.2.9.3.

1. $16x^2 + 16y^2 + 64x - 56y + 97 = 0$
   a) $A = \underline{16}$ $B = \underline{0}$ $C = \underline{16}$ $D = \underline{64}$ $E = \underline{-56}$ $F = \underline{97}$
   b) Curva: Círculo Centro? $C\left(-2, \frac{7}{4}\right)$ Raio? $r = 1$
2. $2x^2 + 3y^2 - 4x + 9y - 17 = 0$
   a) $A = \underline{2}$ $B = \underline{0}$ $C = \underline{3}$ $D = \underline{-4}$ $E = \underline{9}$ $F = \underline{-17}$
   b) Curva: Elipse Centro? ______ Raio? ______
3. $2x^2 - 2y^2 + 5x - 12y + 19 = 0$
   a) $A = \underline{2}$ $B = \underline{0}$ $C = \underline{-2}$ $D = \underline{5}$ $E = \underline{-12}$ $F = \underline{19}$
   b) Curva: Hipérbole Centro? ______ Raio? ______
4. $x^2 + 2xy + y^2 + 3x + 8y + 7 = 0$
   a) $A = \underline{1}$ $B = \underline{2}$ $C = \underline{1}$ $D = \underline{3}$ $E = \underline{8}$ $F = \underline{7}$
   b) Curva: Parábola Centro? ______ Raio? ______
5. $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$
   a) $A = \underline{1}$ $B = \underline{0}$ $C = \underline{1}$ $D = \underline{-6}$ $E = \underline{2}$ $F = \underline{0}$
   b) Curva: Círculo Centro? $C(3, -1)$ Raio? $r = \sqrt{10}$
6. $x^2 + 5x - 4y + 9 = 0$
   a) $A = \underline{1}$ $B = \underline{0}$ $C = \underline{0}$ $D = \underline{5}$ $E = \underline{-4}$ $F = \underline{9}$
   b) Curva: Parábola Centro? ______ Raio? ______
7. $2x^2 + 2y^2 + 4x - 5y + 12 = 0$
   a) $A = \underline{2}$ $B = \underline{0}$ $C = \underline{2}$ $D = \underline{4}$ $E = \underline{-5}$ $F = \underline{12}$
   b) Curva: Conjunto Vazio Centro? ______ Raio? ______
8. $3x^2 + 3y^2 + 18x + 24y + 21 = 0$
   a) $A = \underline{3}$ $B = \underline{0}$ $C = \underline{3}$ $D = \underline{18}$ $E = \underline{24}$ $F = \underline{21}$

b) Curva: Círculo Centro? $C(-3,-4)$ Raio? $r = 3\sqrt{2}$

9. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13 = 0$

a) $A = \underline{1}$ $B = \underline{0}$ $C = \underline{1}$ $D = \underline{-4}$ $E = \underline{-6}$ $F = \underline{13}$

b) Curva: Ponto Centro? ______ Raio? ______

10. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0$

a) $A = \underline{1}$ $B = \underline{0}$ $C = \underline{1}$ $D = \underline{-4}$ $E = \underline{-6}$ $F = \underline{12}$

b) Curva: Círculo Centro? $C(2,3)$ Raio? $r = 1$

Parte 2 - Condições necessárias para que as equações representem círculos

1. De todas as equações trabalhadas na parte 1 reescreva no espaço abaixo aquelas que representam círculos:

a) Solução: 1: $16x^2 + 16y^2 + 64x - 56y + 97 = 0$

b) Solução: 5: $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$

c) Solução: 8: $3x^2 + 3y^2 + 18x + 24y + 21 = 0$

d) Solução: 10: $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0$

2. Das equações que representam círculos observe os coeficientes A, B e C. Compare os coeficientes entre si.

a) Qual a relação entre os coeficientes A e C? Solução: $A = C \neq 0$

b) Qual deve ser o valor do coeficiente B? Solução: $B = 0$

c) Essas condições bastam para que uma equação seja de um círculo? Verifique nos itens 1 a 10 se existem outras equações que satisfaçam estas condições, mas não sejam círculos. Solução: Não basta que $A = C \neq 0$ e $B = 0$, pois as equações dos itens 7 e 9 satisfazem essas condições e não representam círculos.

Parte 3 - Condições suficientes para que as equações representem círculos

1. No caderno, proceda como de costume para determinar as coordenadas do centro e a medida do raio do círculo a partir da equação geral. Analise o que acontece.

a) Equação 7 - Parte 1) $2x^2 + 2y^2 + 4x - 5y + 12 = 0$
Solução:
$2x^2 + 2y^2 + 4x - 5y + 12 = 0 \ \ (\div 2)$
$x^2 + y^2 + 2x - \frac{5}{2}y + 6 = 0$

$D = -2x_c \quad \leftrightarrow \quad 4 = -2x_c \quad \leftrightarrow \quad x_c = -1$
$E = -2y_c \quad \leftrightarrow \quad -\dfrac{5}{2} = -2y_c \quad \leftrightarrow \quad y_c = \dfrac{5}{4}$
$F = x_c^2 + y_c^2 - r^2 \quad \leftrightarrow \quad 6 = 1 + \dfrac{25}{16} - r^2 \quad \leftrightarrow \quad r^2 = -\dfrac{55}{16} \quad \leftrightarrow \quad r \notin \mathbb{R}.$

b) Por que na Janela de Visualização do GeoGebra não aparece o traço da curva? Solução: Porque o valor do raio é imaginário, ou seja, não é um valor real, assim o raio não existe e assim não há círculo.

c) Equação 9 - Parte 1) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13 = 0$ Solução:
$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13 = 0$
$D = -2x_c \quad \leftrightarrow \quad -4 = -2x_c \quad \leftrightarrow \quad x_c = 2$
$E = -2y_c \quad \leftrightarrow \quad -6 = -2y_c \quad \leftrightarrow \quad y_c = 3$
$F = x_c^2 + y_c^2 - r^2 \quad \leftrightarrow \quad 13 = 4 + 9 - r^2 \quad \leftrightarrow \quad r^2 = 0 \quad \leftrightarrow \quad r = 0$

d) Por que na Janela de Visualização do GeoGebra aparece apenas um ponto para esta equação? Solução: Porque o raio sendo nulo, só há um ponto que satisfaz a equação, o ponto $P(2, 3)$. Com "raio" nulo, a equação representa o conjunto dos pontos do plano que distam 0 do centro, ou seja, o próprio centro.

2. Descreva qual o significado geométrico da equação $Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$ quando associamos a equação geral do círculo se:

   a) $r^2 < 0$: Solução: Representa o conjunto vazio.

   b) $r^2 = 0$: Solução: Representa um ponto.

   c) $r^2 > 0$: Solução: Representa um círculo.

Observação 3.3.1. Queremos saber a condição entre os coeficientes A, B, C, D, E e F para que a equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ represente um círculo. Já sabemos que $A = C \neq 0$ e $B = 0$. Sabemos também que podemos usar as relações $D = -2x_c$, $E = -2y_c$ e $F = x_c^2 + y_c^2 - r^2$ se, e só se $A = C = 1$.

3. Tome a equação $Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$ e divida por um número conveniente para que os coeficientes de x^2 e y^2 sejam iguais a unidade, ou seja, assuma a forma: $x^2 + y^2 + D'x + E'y + F' = 0$. Solução: Basta dividir ambos os membros da equação por A: $x^2 + y^2 + \dfrac{D}{A}x + \dfrac{E}{A}y + \dfrac{F}{A} = 0$.

4. Relacione os coeficientes D', E' e F' com A, D, E e F. Solução: igualando os coeficientes correspondentes das duas equações, $x^2 + y^2 + D'x + E'y + F' = 0$ e $x^2 + y^2 + \dfrac{D}{A}x + \dfrac{E}{A}y + \dfrac{F}{A} = 0$, como em uma igualdade de polinômios, temos $D' = \dfrac{D}{A}$, $E' = \dfrac{E}{A}$ e $F' = \dfrac{F}{A}$.

5. Use as igualdades $D' = -2x_c$, $E' = -2y_c$ e $F' = x_c^2 + y_c^2 - r^2$ para determinar:

a) x_c dependendo de A e D. Solução: Substituir as igualdades do enunciado nas igualdades do item 3 relativos a D': $x_c = -\dfrac{D'}{2} = -\dfrac{D}{2A}$.

b) y_c dependendo de A e E. Solução: O mesmo procedimento do item anterior, agora para E': $y_c = -\dfrac{E'}{2} = -\dfrac{E}{2A}$.

c) r^2 dependendo de A, D, E e F. Solução: Análogo aos itens anteriores, considerando F': $r^2 = x_c^2 + y_c^2 - F' = x_c^2 + y_c^2 - \dfrac{F}{A}$.

6. Reescreva a condição de r^2 do item 2 para a equação representar um círculo. Solução: Veja solução do item 2, subitem c: $r^2 > 0$.

7. Una os dois últimos resultados e estabeleça uma sentença envolvendo os coeficientes A, B, C, D, E e F para que a equação completa do 2º grau a duas variáveis represente um círculo. Solução: Temos $r^2 > 0$ e $r^2 = x_c^2 + y_c^2 - \dfrac{F}{A}$, logo $x_c^2 + y_c^2 - \dfrac{F}{A} > 0$. Se quisermos eliminar a fração, a condição fica: $Ax_c^2 + Ay_c^2 - F > 0$, além das condições $A = C \neq 0$ e $B = 0$.

Dicas para o professor

✓ Se o aluno precisar digitar uma equação com o termo xy, no GeoGebra deve ser usado o * para indicar a multiplicação entre as variáveis.

✓ Na identificação das curvas da parte 1 o aluno pode não perceber a ausência do traçado no conjunto vazio. Se ele estiver escondendo os traçados anteriores, pode facilitar. Como não há traçado na Janela de Visualização, indique a identificação da "curva" pela Janela de Visualização.

✓ No item 2a da parte 2 se o aluno apenas chegou a conclusão $A = C$ pergunte se os coeficientes podem ser nulos.

✓ Na parte 3 usamos $Ax^2+Ay^2+Dx+Ey+F = 0$ dentro das condições necessárias para a equação representar um círculo, pois $A = C$ e $B = 0$.

✓ No item 4 da parte 3 sugira a igualdade de polinômios: $x^2 + y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = x^2 + y^2 + D'x + E'y + F'$.

✓ Algumas questões são vagas propositalmente para não induzir o aluno à resposta sem reflexão.

✓ Diga aos alunos que no item 5 da parte 3 o que está sendo pedido, na linguagem deles é "isolar", x_c, y_c e r em cada uma das equações.

✓ Muitos resultados dependem dos itens anteriores, leia a resposta anterior do aluno e verifique se houve acerto para continuar. Se acertou diga que os itens e subitens estão relacionados, diga que revise as respostas anteriores para ajudar na resposta atual.

3.4 Atividade 4 - Método de completar quadrados

Completar quadrados é uma maneira alternativa de obter o centro e o raio do círculo a partir da sua equação geral. Além de ser um artifício usado em outros ramos da Matemática. O GeoGebra é empregado nesta atividade para conferir resultados algébricos. Isso é possível através da Janela CAS, que possui várias funções. Veja Figura 87.

Objetivos:
▶ Transformação da equação geral do círculo em equação reduzida.
Pré-requisitos:
▶ Equação geral do círculo.
▶ Produtos notáveis: quadrado da soma e quadrado da diferença.
Material necessário:
▶ Um computador por dupla, com o GeoGebra instalado.
▶ Folha de atividades para o aluno uma por dupla.
Tempo necessário: 30 minutos.

Transformar a equação geral do círculo em equação reduzida

Para não dependermos da memorização de mais fórmulas para obter as coordenadas do centro e a medida do raio de um círculo a partir da equação geral podemos usar uma ferramenta algébrica para passar da forma geral para reduzida. Forma em que facilmente são reconhecidos os elementos principais do círculo. Precisaremos apenas lembrar dos produtos notáveis: quadrado da soma e quadrado da diferença. Esse método é chamado de Completar Quadrados.

1. Reescreva os trinômios a seguir como um quadrado da soma, ou da diferença, lembrando que $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ ou $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$.
   a) $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$
   b) $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$
   c) $x^2 + 5x + \dfrac{25}{4} = \left(x + \dfrac{5}{2}\right)^2$
   d) $y^2 + 4y + 4 = (y + 2)^2$
   e) $y^2 + 14y + 49 = (y + 7)^2$
   f) $y^2 - 3y + \dfrac{9}{4} = \left(y - \dfrac{3}{2}\right)^2$
2. Confira seus resultados usando a Janela CAS. Vamos explicar o primeiro exemplo. Para conferir os demais, basta seguir os mesmos passos.

   a) Acesse na Barra de Menus: Menu Exibir → Janela CAS. A Janela de Álgebra não precisa estar aberta.

   b) Digite na linha 1 a expressão $x^2 - 2x + 1$.

   c) Clique no quarto botão da barra de ferramentas da Janela CAS: botão Fatorar.

d) Verifique o resultado com sua resposta.

3. Que constante falta acrescentar nas expressões abaixo para completar o quadrado? Após acrescentar, complete o quadrado.

a) $x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2$

b) $x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2$

c) $x^2 - 7x + \frac{49}{4} = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2$

d) $y^2 - 18y + 81 = (y-9)^2$

e) $y^2 + 16y + 64 = (y+8)^2$

f) $y^2 - 9y + \frac{81}{4} = \left(y - \frac{9}{2}\right)^2$

Observação 3.4.1. Confira os resultados usando a Janela CAS novamente como no item 1. Agora a sua resposta estará correta se o resultado da fatoração for um binômio no formato $(x \pm a)^2$. Se na fatoração o resultado for um produto de dois binômios ou o trinômio propriamente dito a constante que precisamos acrescentar não está correta.

Observação 3.4.2. Na equação do círculo se só somarmos uma constante para completar um quadrado estamos alterando o resultado desta equação, ou seja, encontraríamos um valor errado para o raio. Por isso, na matemática é muito usado o artifício de SOMAR ZERO, ou seja, somar o mesmo número que precisamos em ambos os membros da equação para não alterar a igualdade da mesma. Observe atentamente o exemplo abaixo:
Equação Dada $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$

Passo 1 $x^2 - 2x + y^2 + 4y = 11$ $\rightarrow$ Reordenar: separar variáveis.

Passo 2 $x^2 - 2x \boxed{+1} + y^2 + 4y \boxed{+4} = 11 \boxed{+1+4}$ $\rightarrow$ Acrescentar as constantes.

Passo 3 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$ $\rightarrow$ Completar os quadrados.

Passo 4 Centro $C(1, -2)$ e raio $r = 4$ $\rightarrow$ Determinar centro e raio.

4. No caderno, use os mesmos procedimentos para obter o centro e o raio do círculo, cuja equação geral é:

a) $x^2 + y^2 - 6x + 14y - 42 = 0$
Solução: $x^2 - 6x + y^2 + 14y = 42$
$x^2 - 6x \boxed{+9} + y^2 + 14y \boxed{+49} = 42 \boxed{+9+49}$
$(x-3)^2 + (y+7)^2 = 100$
Centro $C(3, -7)$ e raio $r = 10$.

b) $x^2 + y^2 + 10x - 18y + 42 = 0$
Solução: $x^2 + 10x + y^2 - 18y = -42$
$x^2 + 10x \boxed{+25} + y^2 - 18y \boxed{+81} = -42 \boxed{+25+81}$
$(x+5)^2 + (y-9)^2 = 64$
Centro $C(-5, 9)$ e raio $r = 8$.

c) $x^2 + y^2 + 8x + 16y - 64 = 0$

Solução: $x^2 + 8x + y^2 + 16y = 64$

$x^2 + 8x \boxed{+16} + y^2 + 16y \boxed{+64} = 64 \boxed{+16 + 64}$

$(x + 4)^2 + (y + 8)^2 = 144$

Centro $C(-4, -8)$ e raio $r = 12$.

d) $x^2 + y^2 - 7x + 9y + 32 = 0$

Solução: $x^2 - 7x + y^2 + 9y = -32$

$x^2 - 7x \boxed{+\frac{49}{4}} + y^2 + 9y \boxed{+\frac{81}{4}} = -32 \boxed{+\frac{49}{4} + \frac{81}{4}}$

$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

Centro $C\left(-\frac{7}{2}, -\frac{9}{2}\right)$ e $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $2x^2 + 2y^2 + 10x - 6y - 1 = 0$

Solução: $2x^2 + 2y^2 + 10x - 6y - 1 = 0 \ \ (\div 2)$

$x^2 + y^2 + 5x - 3y - \frac{1}{2} = 0$

$x^2 + 5x + y^2 - 3y = \frac{1}{2}$

$x^2 + 5x \boxed{+\frac{25}{4}} + y^2 - 3y \boxed{+\frac{9}{4}} = \frac{1}{2} \boxed{+\frac{25}{4} + \frac{9}{4}}$

$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 9$

Centro $C\left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ e $r = 3$

Observação 3.4.3. a) Para conferir os resultados do exercício 4, digite a equação geral do círculo na barra Entrada do GeoGebra.

b) Verifique a equação mostrada na Janela de Álgebra. Esta equação, geralmente é convertida automaticamente pelo GeoGebra na equação reduzida do círculo.

c) Se a equação não for convertida, como citado no item anterior, clique com o botão direito do *mouse* na equação ou no próprio círculo e selecione a opção: Equação $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$.

Dicas para o professor
✓ Para calcular a constante que precisamos acrescentar para completar o quadrado precisamos verificar o coeficiente de x (ou de y). O coeficiente de x (ou de y) é sempre o dobro do segundo termo do quadrado, então para determinar o segundo termo, basta dividir este coeficiente por 2.
✓ Se os coeficientes de x^2 e y^2 não forem unitários, antes de aplicar o método de completar quadrados é preciso dividir a equação por um número conveniente.
✓ No item 4, os quadrados que precisam ser completados são os mesmos dos itens 1 e 2, por isso esta atividade não requer mais tempo do que o estipulado. Alerte isso aos alunos.

3.5 Atividade 5 - Posição relativa entre ponto e círculo

Como descrito no Capítulo 4, relatamos a facilidade dos alunos deduzirem o critério para determinar a posição relativa entre ponto e círculo. É uma atividade realizada em bem menos que uma hora aula. Dessa forma pode ser dividida com outra atividade para encerrar o tempo de um período. Os exercícios recomendados nos mostram como o assunto pode ser relacionado com a realidade e com os interesses dos alunos.

Objetivos:
▶ Dedução do critério para determinar posição relativa entre ponto e círculo.
▶ Resolução de problemas relacionados.
Pré-requisitos:
▶ Definição de círculo.
▶ Ferramentas básicas do GeoGebra.
Material necessário:
▶ Equipamento que tenha instalado o *software GeoGebra*, um por dupla.
▶ Folha de atividades para o aluno, uma por dupla.
Tempo necessário: 25 minutos.

Parte 1 - Critério para Posição Relativa entre Ponto e círculo

Observação 3.5.1. O círculo divide o plano em duas partes, assim podemos dizer que o círculo é a fronteira entre a região interior e exterior. Dessa forma, um ponto pode estar:

i) No círculo - Um ponto pertencente a curva (linha).

ii) Na região interna - Um ponto interior ao círculo.

iii) Na região externa - Um ponto exterior ao círculo.

Para determinar um meio de como descobrir se um ponto pertence ao círculo, a sua região interior ou exterior, execute as seguintes instruções no GeoGebra:

1. Defina um círculo usando Centro e Um de Seus Pontos. Procure valores inteiros para as coordenadas dos pontos e medida do raio. Solução: Veja Comando A.2.5.1.

2. Renomeie o centro do círculo para C. Solução: Veja Comando A.3.2.4.

3. Faça um segmento que liga o centro do círculo e o ponto B, que pertence a ele. Será o segmento CB. Solução: Veja Comando A.2.3.2.

4. Observe a medida do segmento CB na Janela de Álgebra.

5. A medida do segmento CB representa o que para o círculo? Solução: Representa o raio do círculo.

6. Que conteúdo de Geometria Analítica se relaciona com o cálculo da medida de um segmento? Cálculo da distância entre dois pontos.

7. Calcule a distância do ponto C ao ponto B. Veja comando A.2.6.1.

   Observação 3.5.2. A equação reduzida do círculo nos informa o centro C e o raio r do círculo diretamente.

8. Lembre-se da definição de círculo e complete: Um ponto P, do plano, pertence a um círculo se, e só se: Solução: $d(C, P) = r$.

9. Agora insira um ponto A, que esteja na região externa do círculo. Solução: Veja Comando A.2.2.1.

10. Faça um segmento ligando o ponto A ao centro C do círculo: segmento CA. Calcule a distância entre A e C. Solução: Veja Comando A.2.3.2 e Comando A.2.6.1.

11. Mova o ponto A, sem deixar de pertencer à região exterior do círculo. Observe o valor da distância $\overline{CA}$[1] e compare com o valor da distância $\overline{CB}$. Solução: Fizemos uma simulação, exibida na Figura 7. Inserimos nela os valores que devemos comparar.

12. Pelo resultado do item anterior, complete: Um ponto P, do plano, é exterior ao círculo se, e só se: $d(C, P) > r$

[1] A notação usada pelo GeoGebra difere da utilizada nos livros didáticos, em que $\overline{CA}$ seria escrito como $d(C, A)$. Para distância entre ponto e reta a notação também difere. O GeoGebra mostraria $\overline{Pr}$ para distância do ponto P à reta r e nos livros didáticos apareceria $d(P, r)$.

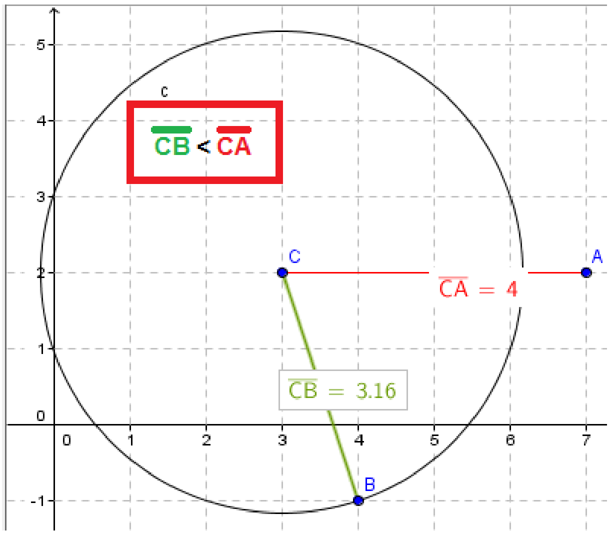


Figura 7 – Um exemplo de construção para o item 11

13. Mova o ponto A para que esteja na região interna do círculo. Mova o ponto A, sem deixar de pertencer à região interior do círculo. Observe o valor da distância $\overline{CA}$ compare com o valor da distância $\overline{CB}$. Solução: Fizemos uma simulação, exibida na Figura 8. Inserimos nela os valores que devemos comparar.

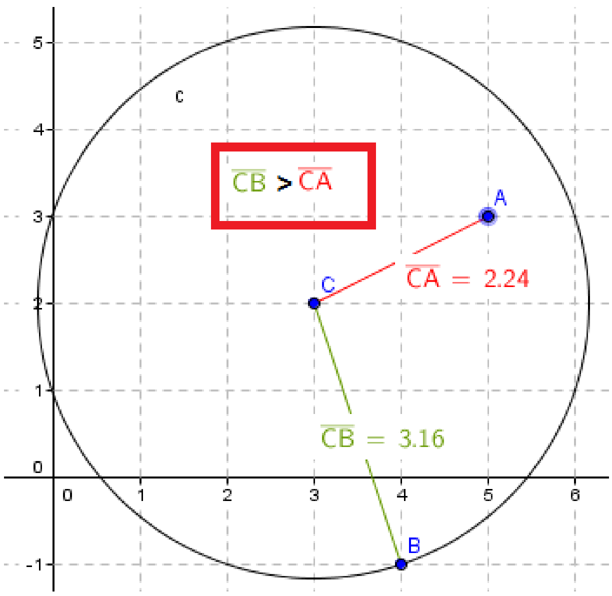


Figura 8 – Um exemplo de construção para o item 13

14. Pelo resultado do item anterior, complete: Um ponto P, do plano, é interior ao círculo se, e só se: $d(C, P) < r$.

Parte 2 - Resumo dos critérios da posição relativa: Ponto × Círculo

1. Preencha o Quadro 2 com os resultados da parte 1.

   Quadro 2 – Critérios para determinar a posição relativa entre ponto e círculo

Posição Relativa	Critério adotado
P pertence ao círculo	$d(C,P) = r$
P exterior ao círculo	$d(C,P) > r$
P interior ao círculo	$d(C,P) < r$

2. Qual sequência de procedimentos deve ser adotada para determinar a posição relativa de um ponto $P(x_p, y_p)$ e um círculo de equação $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$? Listamos os procedimentos necessários para responder a esta pergunta, contudo embaralhados. São eles:

Comparar a distância $d(C,P)$ com o raio r.
Determinar o centro C e o raio r do círculo.
Concluir qual a posição relativa.
Calcular a distância do ponto ao centro: $d(P,C)$.

   Organize na ordem adequada, determinando os passos a seguir:

Passo 1 Solução: Determinar o centro C e o raio r do círculo.

Passo 2 Solução: Calcular a distância do ponto ao centro: $d(P,C)$.

Passo 3 Solução: Comparar a distância $d(C,P)$ com o raio r.

Passo 4 Solução: Concluir qual a posição relativa.

Parte 3 - Exercícios

1. Desenvolva no seu caderno. Determine algebricamente a que região do plano determinado pelo círculo $\Gamma : (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 13$ estão os pontos $A(0,0)$, $B(0,2)$, $D(4,3)$ e $E(6,-3)$. Solução: $C(3,-1)$ e $r = \sqrt{13}$
   Sabendo como calcular a distância entre dois pontos $A(x_a, y_a)$ e $B(x_b, y_b)$:
   $d(A,B) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$, façamos:
   $d(A,C) = \sqrt{(0-3)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{10} < r \leftrightarrow$ A é interior a Γ
   $d(B,C) = \sqrt{(0-3)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{18} > r \leftrightarrow$ B é exterior a Γ
   $d(D,C) = \sqrt{(4-3)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{17} > r \leftrightarrow$ D é exterior a Γ
   $d(E,C) = \sqrt{(6-3)^2 + (-3+1)^2} = \sqrt{13} = r \leftrightarrow B \in \Gamma$

Observação 3.5.3. Os exercícios podem ser conferidos com a ferramenta Distância, Comprimento ou Perímetro do GeoGebra, embora algebricamente tenhamos o resultado exato e no GeoGebra o resultado com apenas duas casas decimais após a vírgula.

2. O círculo central da Figura 9, construída no GeoGebra, possui equação $\Gamma : x^2 + y^2 = 81$ em que a linha de meio de campo relaciona-se com o eixo oy e a bola no momento inicial do jogo fica na origem do plano cartesiano. Neste contexto, os jogadores Jonelson e Wanderson do time Esporte Clube Várzea Seca foram designados para ocupar a posição em cima da linha do círculo. Verifique se eles realmente ocuparam a posição correta. Em caso contrário, determine a posição dos jogadores em relação ao círculo central, assim como a posição do árbitro. Considere que os pontos $J(-7, 6)$, $W(-8, -4)$ e $A(4, 6)$ representam, respectivamente, as posições de Jonelson, Wanderson e o árbitro no começo do jogo.

   Solução: $C(0, 0)$ e $r = 9$

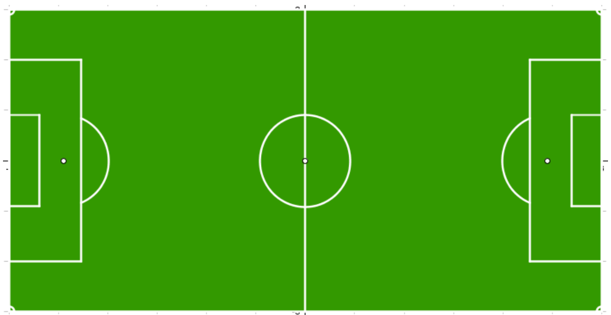


Figura 9 – Campo de Futebol

$d(J, C) = \sqrt{(-7-0)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{85} > r \ \leftrightarrow \ J$ é exterior a Γ

Ou seja, Jonelson não está na posição correta, está na região exterior do círculo.

$d(W, C) = \sqrt{(-8-0)^2 + (-4-0)^2} = \sqrt{80} < r \ \leftrightarrow \ W$ é interior a Γ

Ou seja, Wanderson não está na posição correta, está na região interior do círculo.

$d(A, C) = \sqrt{(4-0)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{52} < r \ \leftrightarrow \ A$ é interior a Γ

Ou seja, o árbitro está na região interior do círculo.

3. Um controlador de tráfego aéreo militar vê em seu radar dois aviões não identificados. A tela do radar é formada por quatro círculos concêntricos, inseridos num plano cartesiano, em que o centro dos círculos é a posição da torre de controle. As equações destes círculos são: $\Gamma_1 : (x-4)^2 + (y-3)^2 = 100$, $\Gamma_2 : (x-4)^2 + (y-3)^2 = 144$, $\Gamma_3 : (x-4)^2 + (y-3)^2 = 196$ e $\Gamma_4 : (x-4)^2 + (y-3)^2 = 256$, como mostra a Figura 10. Os procedimentos de defesa adotados são:

   a) Se um avião entrar na região da coroa circular formada por Γ_3 e Γ_4 é pedida sua identificação.

b) Se um avião, ainda não identificado, entrar na região da coroa circular formada por Γ_2 e Γ_3 é avisado dos procedimentos de interceptação e abate.

c) Se um avião, ainda não identificado, entrar na região da coroa circular formada por Γ_1 e Γ_2 é acompanhado por dois caças enviados pela base militar.

d) Se um avião, ainda não identificado, entrar na região interna do círculo Γ_1 ele é abatido.

e) Se um avião, ainda não identificado, estiver exatamente sobre um dos círculos o procedimento mais brando entre as regiões fronteiriças é adotado.

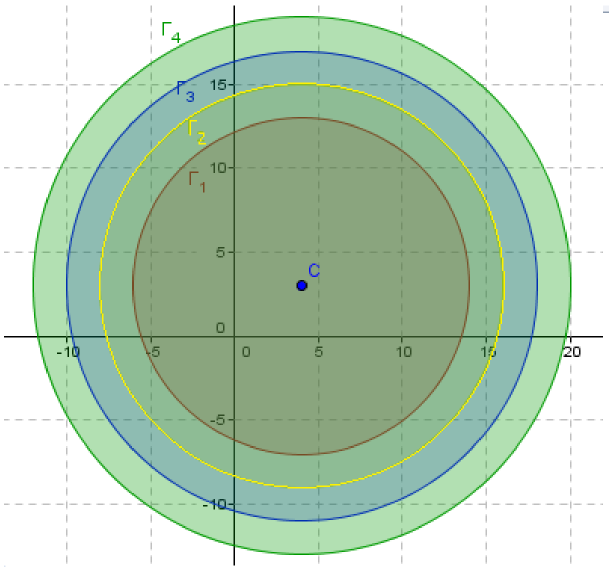


Figura 10 – Radar

Neste momento os aviões não identificados estão nas coordenadas $A(10, -5)$ e $B(-7, -4)$. Quais procedimentos de defesa devem ser adotados? Justifique sua resposta.

Solução: $C(4, 3)$, $r_1 = 10$, $r_2 = 12$, $r_3 = 14$ e $r_4 = 16$

$d(A, C) = \sqrt{(10-4)^2 + (-5-3)^2} = \sqrt{100} = 10 = r_1 \leftrightarrow A \in \Gamma_1$ O avião A é acompanhado pelos caças, pois é região fronteiriça e este é o procedimento mais brando. $d(B, C) = \sqrt{(-7-4)^2 + (-4-3)^2} = \sqrt{170}$

$leftrightarrow; r_2 < d(B, C) < r_3 \leftrightarrow B$ pertence a coroa circular formada por Γ_2 e Γ_3, então é apenas avisado dos procedimentos de interceptação e abate.

Dicas para o professor
✓ Para o item 6 da parte 1 liste no quadro todos os conteúdos de Geometria Analítica vistos até o momento com a ajuda dos alunos.
✓ Reforce a definição de círculo no início da aula, se puder, com textos alternativos equivalentes a definição trabalhada.
✓ O item 6 da parte 1 parece nada ter a ver com os objetivos da atividade, porém relacionam-se com os itens 8, 12 e 14. Já que anteriormente viu-se a fórmula da distância entre dois pontos, tornando o critério de posição relativa entre ponto e círculo muito prático.

3.6 Atividade 6 - Posição relativa entre reta e círculo

Objetivos:
▶ Dedução do critério para determinar posição relativa entre reta e círculo.
▶ Resolução de problemas relacionados.
Pré-requisitos:
▶ Definição de círculo.
▶ Definição de distância entre dois objetos.
▶ Definição e fórmula da distância entre ponto e reta.
▶ Ferramentas básicas do GeoGebra.
Material necessário:
▶ Equipamento que tenha instalado o *software GeoGebra*, um por dupla.
▶ Folha de atividades para o aluno, uma por dupla.
Tempo necessário: 25 minutos.

Parte 1 - Posição Relativa entre Reta e Círculo

1. No caderno, desenhe as três possibilidades de posição entre círculo e reta. Solução: Na Figura 11 encontra-se o esboço das três posições relativas: reta secante ao círculo, reta azul; reta tangente ao círculo, reta verde e reta exterior ao círculo, reta laranja.

2. O número de interseções das retas com o círculo definiria um critério para determinar qual posição relativa existe entre uma reta e um círculo? (X) Sim ( ) Não. Justifique. Solução: Porque é uma relação biunívoca, só há um número de pontos de interseção para cada posição relativa.

3. Para determinar os pontos comuns ao círculo e a reta, algebricamente, o que teria que ser resolvido? Solução: Sistema de equações.

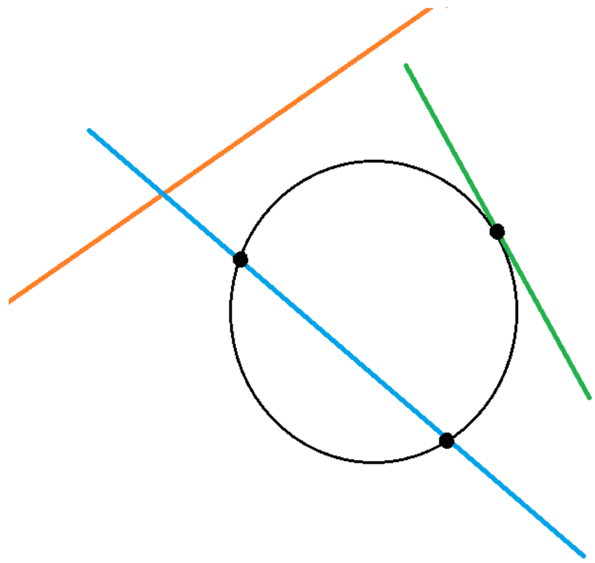


Figura 11 – Posições Relativas entre Reta e Círculo

4. Obtenha a posição relativa entre a reta s e o círculo Γ, cujas equações são : s : $2x - 3y + 8 = 0$ e $\Gamma : (x-5)^2 + (y-9)^2 = 5$.
   Solução: Como o sistema não é linear só podemos resolvê-lo por substituição.
   $$\begin{cases} (x-5)^2 + (y-9)^2 = 5 \\ 2x - 3y = -8 \end{cases}$$
   Substituímos $x = \dfrac{3y-8}{2}$ na equação do círculo, ficamos com a expressão: $13y^2 - 180y + 628 = 0$, cujo $\Delta = -256$, logo a equação não tem solução real. Dessa forma, o sistema não possui solução real, ou seja, a reta e o círculo não se interseccionam, portanto s é exterior à Γ.

   Observação 3.6.1. Podemos verificar a posição relativa no GeoGebra fazendo a interseção entre a reta e o círculo.

Parte 2 - Outro critério para determinar a posição entre reta e círculo

No GeoGebra:

1. Faça um círculo usando a ferramenta Círculo dados Centro e Um de seus Pontos. Veja Comando A.2.5.1.

2. Renomeie o centro do círculo para C. Veja Comando A.3.2.4.

3. Determine o segmento CB e calcule a distância entre C e B. Veja Comando A.2.3.2 e Comando A.2.6.1.

4. O que a medida do segmento CB representa para o círculo? Solução: A medida do seu raio.

5. Faça uma reta a, qualquer por dois pontos A e D, desde que a reta não passe pelo centro do círculo. Solução: Veja Comando A.2.3.1.

6. Obtenha a reta b, perpendicular a reta a, passando pelo centro do Círculo. Solução: Veja Comando A.2.4.1.

7. Obtenha o ponto E, de intersecção entre as retas a e b. Solução: Veja Comando A.2.2.2.

8. Obtenha o segmento CE, de extremos no centro do círculo e na interseção das retas. Solução: Veja Comando A.2.3.2.

9. Esconda a reta b. Solução: Veja Comando A.2.9.3.

10. Por construção, fizemos o segmento CE perpendicular à reta a. O segmento CE é o menor caminho que liga o centro à reta a? Solução: Sim. O menor caminho entre um ponto e uma reta é o segmento de reta que liga o ponto à reta e é perpendicular a ele. Queremos chegar no conceito de distância entre ponto e reta.

11. Então, o que a medida do segmento CE representa em relação ao ponto C e à reta a? Solução: Representa a distância do ponto C à reta a.

12. Calcule a distância entre o ponto C e a reta a. Solução: Veja Comando A.2.6.1.

13. Mova a reta a comparando as distâncias $\overline{Ca}$ e $\overline{CB}$. Solução: Veja Comando A.2.1.1.

14. Mova a reta a de maneira que ela seja EXTERIOR ao círculo. Observe e compare as distâncias $\overline{Ca}$ e $\overline{CB}$. Solução: Apresentamos uma simulação na Figura 12. Observe na Janela de Álgebra o destaque para os segmentos que pedimos para comparar.

15. Para generalizar os resultados: Considere os itens 4, 11 e 14 e complete: Uma reta s é exterior ao círculo Γ de centro C e raio r se, e somente se: $d(C, s) > r$.

16. Mova a reta a de maneira que ela seja TANGENTE ao círculo. Observe e compare as distâncias $\overline{Ca}$ e $\overline{CB}$. Solução: Apresentamos uma simulação na Figura 13. Observe na Janela de Álgebra o destaque para as distâncias que pedimos para comparar.

17. Para generalizar os resultados: Considere os itens 4, 11 e 16 e complete: A reta s é tangente ao círculo Γ de centro C e raio r se, e somente se: $d(C, s) = r$.

18. Mova a reta a de maneira que ela seja SECANTE ao círculo. Observe e compare as distâncias $\overline{Ca}$ e $\overline{CB}$. Solução: Apresentamos uma simulação na Figura 14. Observe na Janela de Álgebra o destaque para distâncias que pedimos para comparar.

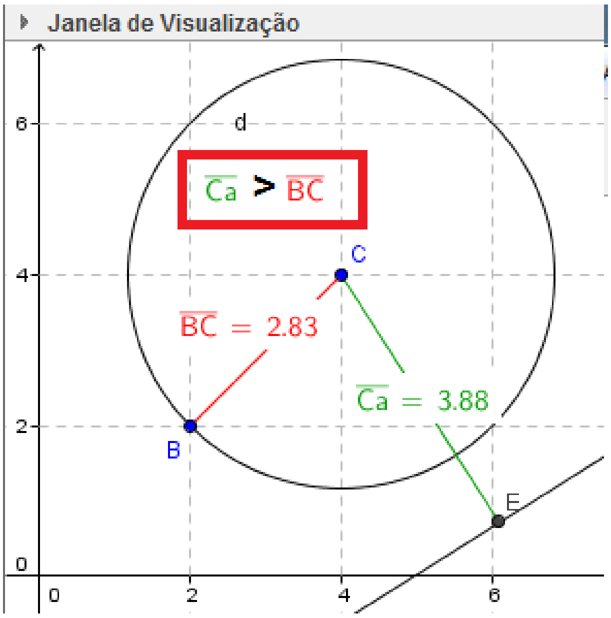


Figura 12 – Um exemplo de construção para o item 14

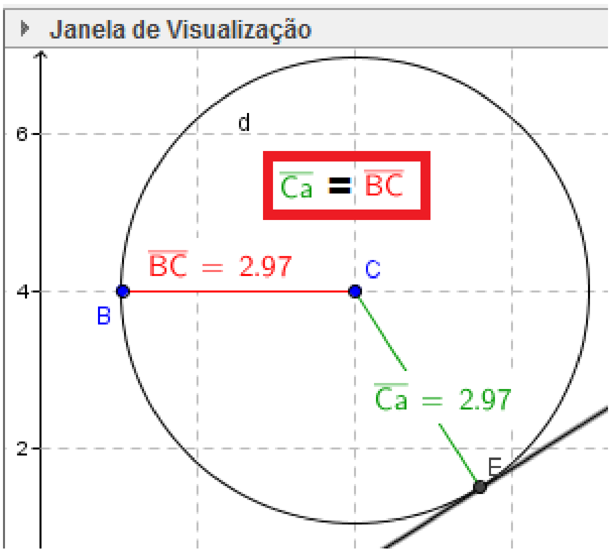


Figura 13 – Um exemplo de construção para o item 16

19. Para generalizar os resultados: Considere os itens 4, 11 e 18 e complete: A reta s é secante ao círculo Γ de centro C e raio r se, e somente se: $d(C, s) < r$.

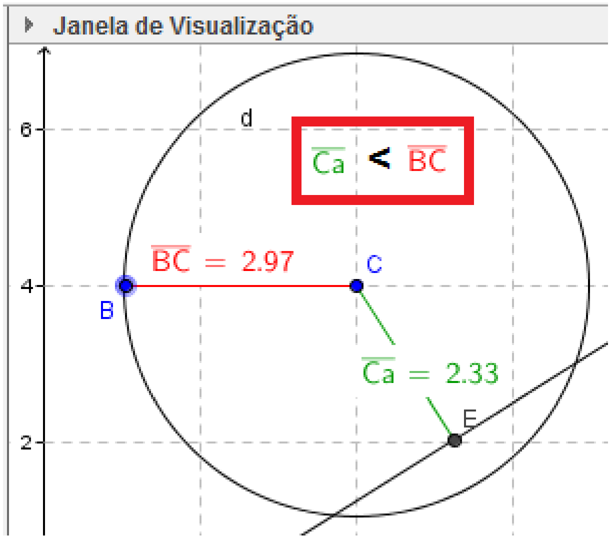


Figura 14 – Um exemplo de construção para o item 18

Parte 3 - Conclusão e Exercícios

1. Preencha o Quadro 3 com os resultados da parte 2.

Quadro 3 – Critérios para determinar a posição relativa entre reta e círculo

Posição Relativa	Critério adotado
s exterior ao círculo	$d(C,s) > r$
s tangente ao círculo	$d(C,s) = r$
s secante ao círculo	$d(C,s) < r$

2. **Exercício:** Considere o círculo Γ de equação: $\Gamma\ :\ (x-1)^2+(y-2)^2 = 25$ e as retas de equação $a:\ x-15y+105=0$, $b:\ x+y-4=0$, $s: 3x-4y-20=0$ e $h:\ 6x+5y+28=0$. Determine a posição relativa entre as retas a, b, s e h em relação ao círculo. Solução: $C(1,2)$ e $r=5$
Usaremos a fórmula da distância entre ponto $P(x_p, y_p)$ e reta $s: mx+ny+k=0$
$d(s,P) = \dfrac{|mx_p+ny_p+k|}{\sqrt{m^2+n^2}}$
$d(a,C) = \dfrac{|1-15\times 2+105|}{\sqrt{1^2+(-15)^2}} = \dfrac{76}{\sqrt{226}} > r \leftrightarrow$ A reta a é exterior à Γ.
$d(a,C)$ é um valor muito próximo do raio $r=5$. O aluno que fizer a construção no GeoGebra pode pensar que a reta é tangente ao círculo. Isso é proposital, pois não podemos basear nossas conclusões em um esboço, mesmo que bem feito pelo GeoGebra.
$d(b,C) = \dfrac{|1+2-4|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} < r \leftrightarrow$ A reta b é secante à Γ.

$$d(s,C) = \frac{|3\times 1 - 4\times 2 - 20|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{25}{\sqrt{25}} = 5 = r \leftrightarrow \text{A reta } s \text{ é tangente à } \Gamma.$$
$$d(h,C) = \frac{|6\times 1 + 5\times 2 + 28|}{\sqrt{6^2+5^2}} = \frac{44}{\sqrt{61}} > r \leftrightarrow \text{A reta } h \text{ é exterior à } \Gamma.$$

Observação 3.6.2. O aluno pode verificar este exercício digitando as equações da reta e do círculo na barra de Entrada do GeoGebra. Retificando em seguida o centro do círculo: usando a ferramenta Ponto Médio ou Centro, ou inserindo o ponto conhecido já que temos a equação reduzida do círculo. Em seguida podemos calcular a distância do centro à reta e verificar o critério da posição relativa.

3. **Desafio** Na Figura 15 a reta t é tangente ao círculo Γ, de centro C, pertencente ao eixo ox, e raio 7. A equação da reta é $t:\ y = -\frac{7}{24}x + \frac{7}{2}$. P é o ponto de interseção da reta t e o eixo ox e A é ponto de interseção de Γ e t. Nessas condições, determine a equação do círculo Γ. Solução: A reta t, sendo tangente a Γ, acarreta: $d(A,C) = r$

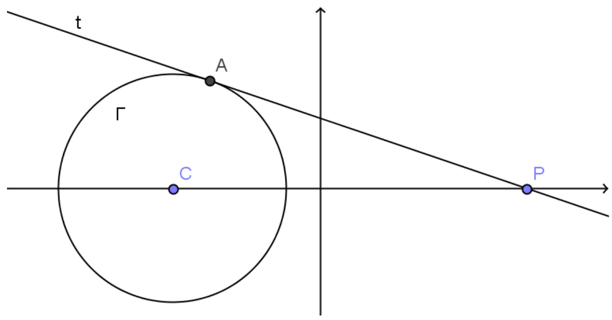


Figura 15 – Desafio - item 3

e que o segmento AC é perpendicular à reta t. Consequentemente, o triângulo PAC é retângulo, reto em A. A tangente do ângulo $\angle CPA$ só difere do coeficiente angular da reta t pelo sinal, pois são suplementares. Assim $tan(\angle CPA) = \frac{7}{24} = \frac{7}{AP}$. Obtemos $AP = d(A,P) = 24$. Pelo Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo PAC, encontramos $\overline{CP} = d(C,P) = 25$. Sabemos também as coordenadas do ponto P, pois é raiz da reta. $P(12,0)$ e assim $\overline{OP} = d(O,P) = 12$. Como $d(C,P) = d(C,O) + d(O,P)$, temos $d(C,O) = 13$. Como a figura indica que o centro está à esquerda da origem do plano cartesiano, encontramos $C(-13,0)$ e finalmente a equação de Γ: $(x+13)^2 + y^2 = 49$.

Observação 3.6.3. O aluno pode verificar este desafio no GeoGebra.

a) Digitar a equação da reta t na barra de Entrada.

b) Em seguida inserir um ponto que pertença ao eixo x e que esteja à esquerda da origem, como na Figura 15.

c) Renomear este ponto para C, será o centro do círculo.

d) Obter um círculo com centro C e raio $r = 7$.

e) Determinar a interseção da reta com o círculo e calcular a distância de C à reta.

f) A princípio o círculo não está na posição certa. Mover o centro C até a distância $\overline{Ct}$ ser coerente com as condições do enunciado.

Dicas para o professor

✓ Provavelmente os alunos conheçam a posição da reta tangente pelo seu nome. Os nomes não estão indicados juntamente com a atividade para não induzir os alunos. Recomende que eles anotem o nome das outras posições: reta secante e reta exterior ao círculo.

✓ No item 4 da parte 1, se o professor já trabalhou com interpretação geométrica de sistemas de equações ou foi assunto de anos anteriores na sua escola, cite como dica: o assunto já foi visto.

✓ No Ensino Médio não ensinamos o aluno a resolver sistemas não lineares, eles podem ser resolvidos por substituição. O que importa, no caso é saber o número de soluções e não a solução em si.

✓ O segmento CE do item 10 da parte 2 representa a distância entre ponto e reta, assim é fundamental que na introdução da Geometria Analítica tenha definido-se distância para responder à pergunta deste item: Distância entre dois objetos é a medida do menor caminho que os une. Relacione a construção com a definição de distância entre ponto e reta.

✓ Se o aluno não conseguir resolver o desafio do item 3 da parte 3 em aula, indique-o como tarefa para casa e repasse aos alunos as dicas na Observação 3.6.3. Ressalte que as dicas não resolvem o problema algebricamente, só conseguimos com elas descobrir a resposta.

3.7 Atividade 7 - Posição relativa entre dois círculos

Para dinamizar a atividade, o professor deve disponibilizar uma construção específica feita no GeoGebra para os alunos manipularem e daí conjecturar e deduzir os critérios que os levem a determinar a posição relativa entre dois círculos. O aluno poderia, ele mesmo, confeccionar tal construção, todavia o esforço e o tempo para fazê-la não se justifica, pois faria de modo mecânico.

3.7.1 Construção do GeoGebra circulo $\times$ circulo.ggb

Queremos disponibilizar ao aluno uma construção no GeoGebra que o ajude a deduzir os critérios que possibilitam determinar a posição relativa entre dois círculos.

Essa construção mostra dois círculos, cujas modificações são limitadas para facilitar que os círculos possam assumir as seis possíveis posições relativas, movendo os centros dos círculos ou alterando a medida de seus raios. Para alterar essas medidas a construção impedirá alterá-las diretamente, o farão através de controles deslizantes (veja Comando A.2.8.1) para cada um dos raios. Isso impede o aluno de desfazer alguma estrutura importante ou inviabilizar alguma das posições relativas dos círculos. Na construção consta, além dos controles deslizantes, três segmentos destacados, cujas medidas são: soma dos raios, distância entre os centros e diferença dos raios em módulo. Comparando a medida desses segmentos, os alunos podem concluir qual relação esses números devem satisfazer para indicar a posição relativa pertinente aos círculos. Usaremos os termos: Círculos concêntricos, círculos secantes, círculos exteriores, círculos interiores, círculos tangentes interiores e círculos tangentes exteriores para nos referirmos às posições relativas mencionadas. Em todas as instruções foram incluídos *hiperlinks* para os comandos do GeoGebra, caso o professor não lembre como executá-los. Os passos para a construção estão publicados no vídeo
"Análise posição relativa entre dois círculos."

Construção

1. Habilite a Malha. Veja Comando A.3.1.

2. Insira um controle deslizante, de maneira a estar contido totalmente no 2º quadrante. Veja Comando A.2.8.1:

   a) Nome do controle: r_1, para isso digite r_1.

      Observação 3.7.1. Este dispositivo controlará o raio do primeiro círculo.

   b) Determine o intervalo de valores: min $\boxed{0}$ max $\boxed{4}$.

      Observação 3.7.2. O raio não pode assumir valores negativos e também como o raio poderá assumir o valor máximo 4 o círculo ficará dimensionado no campo da tela.

   c) Mude a cor do controle deslizante, para azul. Veja Comando A.3.2.5.

3. Insira outro controle deslizante, abaixo do primeiro alinhado à esquerda. Veja Comando A.2.8.1.

   a) Nome do controle: r_2, para isso digite r_2.

   b) Determine o intervalo de valores: min $\boxed{0}$ max $\boxed{4}$

   c) Mude a cor do controle deslizante, para vermelho.

      Observação 3.7.3. Este dispositivo controlará o raio do segundo círculo.

4. Determine uma reta a digitando sua equação na barra de Entrada: $y = 3$. Veja Subseção A.3.3.

5. Insira dois pontos na reta a que estejam no 1º quadrante. Eles serão os centros dos dois círculos. Veja Comando A.2.2.1.

   a) Altere o nome do ponto da esquerda para C_1. Digite na caixa de diálogo C_1.

   b) Altere o nome do ponto da direita para C_2. Digite na caixa de diálogo C_2.

6. Esconda a reta a. Veja Comando A.2.9.3.

7. Use a ferramenta Círculo dados Centro e Raio para obter o primeiro círculo, c. Com o centro C_1 use o raio r_1. Digite na caixa de diálogo r_1. Veja Comando A.2.5.2.

8. Use a ferramenta Círculo dados Centro e Raio para obter o segundo círculo, d. Com o centro C_2 use o raio r_2. Digite na caixa de diálogo r_2. Veja Comando A.2.5.2.

   Observação 3.7.4. O GeoGebra relacionará o valor mensurado no controle deslizante para o raio do círculo. Faça o teste, mova os botões dos controles deslizantes.

9. Determine um segmento, b, de extremos C_1 e C_2. Veja Comando A.2.3.2.

10. Mude a cor e a espessura do segmento C_1C_2, sugerimos a cor verde. Veja Comando A.3.2.5.

11. Esconda o rótulo do segmento b. Veja Comando A.2.9.3.

12. Mova um dos controles deslizantes ou os centros dos círculos para estes interceptarem-se. Veja Comando A.2.1.1.

13. Determine a interseção dos círculos. Serão os pontos A e B. Veja Comando A.2.2.2.

14. Renomeie o ponto superior da interseção dos círculos para P. Veja Comando A.3.2.4.

15. Renomeie o ponto inferior da interseção dos círculos para Q. Veja Comando A.3.2.4.

16. Faça um segmento, e, que ligue C_1 a P. Veja Comando A.2.3.2.

17. Mude a cor do segmento e, para azul. Veja Comando A.3.2.5.

18. Esconda o rótulo do segmento e. Veja Comando A.2.9.3.

19. Faça um segmento, f, que ligue C_2 a P. Veja Comando A.2.3.2.

20. Mude a cor do segmento f para vermelho. Veja Comando A.3.2.5.

21. Esconda o rótulo do segmento f. Veja comando A.2.9.3.

Observação 3.7.5. Os segmentos e e f representam os raios de c e d, respectivamente. Usando as cores citadas o aluno associará a medida dos raios com seus respectivos controles, não somente por estarem identificados por escrito. O apelo visual das cores é mais eficiente.

22. No 2º quadrante, abaixo dos controles deslizantes, alinhado pela esquerda, insira um segmento de comprimento fixo, g. Use o comprimento $r_1 + r_2$, para isso digite na caixa de diálogo r_1+r_2. Veja Comando A.2.3.3.

23. Insira uma legenda em g: $r_1 + r_2$ digitando r_1+r_2. Escolha mostrar a legenda como rótulo. Veja Comando A.3.2.1.

24. Abaixo do segmento g, alinhado pela esquerda, insira outro segmento de comprimento fixo, h: digite na caixa de diálogo b para o comprimento do novo segmento ter a mesma medida do segmento C_1C_2. Veja Comando A.2.3.3.

Observação 3.7.6. O segmento b é a distância dos centros dos círculos.

25. Insira uma legenda em h: $d(C_1, C_2)$ digitando d(C_1,C_2). Escolha mostrar a legenda como rótulo. Veja Comando A.3.2.1.

26. Altere a cor do segmento h para verde, para o aluno associar ao segmento b, de extremos em C_1 e C_2 na Janela de Visualização. Veja Comando A.3.2.5.

27. Abaixo do segmento h, alinhado pela esquerda, insira um segmento de comprimento fixo: i. Use o comprimento $|r_1 - r_2|$: digite na caixa de diálogo abs(r _1-r _2). Veja Comando A.2.3.3.

28. Insira uma legenda em i: $|r_1 - r_2|$, digitando |r _1-r _2|. Escolha mostrar a legenda como rótulo. Veja Comando A.3.2.1.

29. Feche a Janela de Álgebra.

30. Salve o arquivo com o nome circulo×circulo.

Mostramos a construção final, após todas estas etapas na Figura 3.7.1.

3.7.2 Atividade 7 - Posição relativa entre dois círculos

Nesta atividade, incluímos nas partes 1 e 2 a análise de certas desigualdades que parece estar descontextualizada ou inapropriada. O motivo pelo qual inserimos estas desigualdades foi o fato dos estudantes serem redundantes na conclusão dos critérios para determinar a posição relativa entre círculos. Por exemplo: para determinar se um círculo de centro C_1 e medida do raio r_1 está interior a outro de centro C_2 e medida do raio r_2

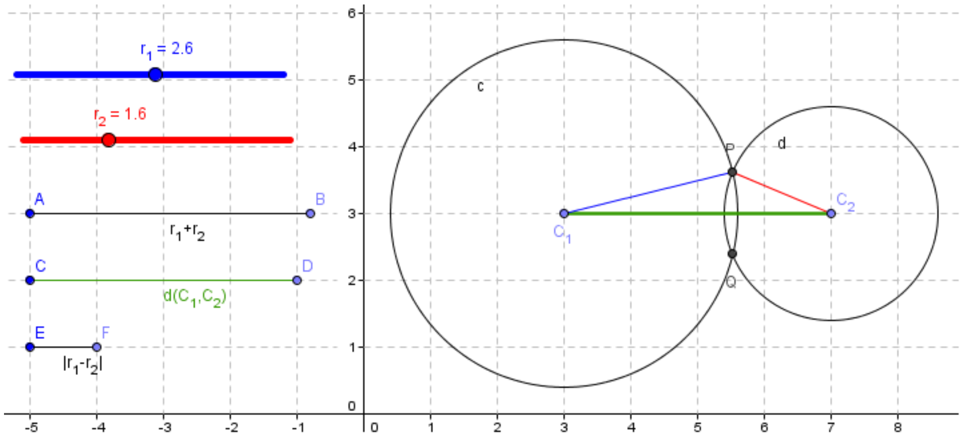


Figura 16 – Construção para a atividade da posição relativa entre dois círculos

precisam identificar que $d(C_1, C_2) < |r_1 - r_2|$ e $d(C_1, C_2) < r_1 + r_2$. Sendo que a última desigualdade é desnecessária, visto que $|r_1 - r_2| < r_1 + r_2$ em qualquer circunstância.

Objetivos:

▶ Dedução do critério para determinar posição relativa entre dois círculos.

▶ Resolução problemas relacionados.

Pré-requisitos:

▶ Definição de círculo.

▶ Ferramentas básicas do GeoGebra.

Material necessário:

▶ Equipamento que tenha instalado o *software GeoGebra*, um por dupla.

▶ Folha de atividades, uma por dupla.

▶ Folha Anexo, uma por dupla.

▶ Construção circulo×circulo.ggb disponibilizada aos alunos num arquivo pronto.

Tempo necessário: Uma hora aula.

Parte 1 - Discussão sobre Posição Relativa entre Dois Círculos

1. Esboce, no caderno, as posições possíveis entre dois círculos, apenas um esquema. Dica: São seis. (Desconsideramos círculos coincidentes). Solução: Na Figura 17 há o esboço das seis posições possíveis.

2. Peça ao professor a folha intitulada Posições Relativas entre dois Círculos . Nela estão todas as posições relativas possíveis com a definição de cada uma e os termos usados para nos referirmos a elas. Veja Anexo I.

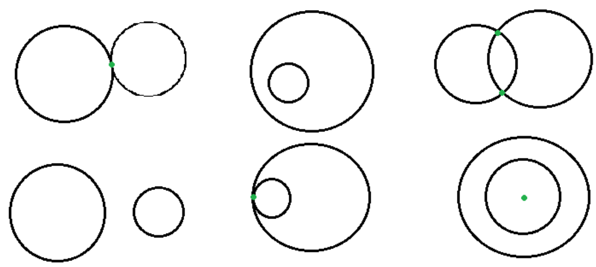


Figura 17 – Posições relativas possíveis entre dois círculos

3. O número de pontos em que os círculos se interseccionam serve de critério para sabermos a posição relativa entre os círculos? ( ) Sim (X) Não
   Justifique sua resposta. Solução: Não, pois para cada número de pontos de interseção há mais de uma posição relativa relacionada. Por exemplo, para um ponto de interseção há a possibilidade de serem tangentes exteriores ou interiores. Observamos que quando desenhamos dois círculos no GeoGebra e usamos a ferramenta Relação (veja comando A.2.7.1) aparecem mensagens como "o círculo c não intercepta o círculo d" ou "o círculo c intercepta o círculo d" , no entanto, nada diz sobre o número de pontos da interseção. A mensagem para círculos concêntricos é apenas "o círculo c não intercepta o círculo d".

   Observação 3.7.7. Para determinar a posição relativa entre dois círculos teremos suas equações. Assim obteremos os centros de ambas, assim como a medida de seus raios. Serão essas as informações necessárias para determinar a posição relativa entre dois círculos.

4. Apenas com o centro dos círculos e seus raios é possível identificar alguma das posições relativas? Qual? Justifique sua resposta. Solução: Sim, pois os círculos concêntricos têm o mesmo centro e raios diferentes, já que excluímos a possibilidade de círculos coincidentes.

5. Considere dois círculos de centros C_1 e C_2 e raios r_1 e r_2, respectivamente. Qual o sinal de desigualdade, $<$ ou $>$, correto para preencher a lacuna na sentença abaixo:

$$r_1 + r_2 \;\underline{\geq}\; |r_1 - r_2|$$

6. Considere $a < b$, sabendo que a e b são números reais positivos, responda:

   a) Se $c < a$, então $c < b$? (X) Sim ( ) Não
   b) Se $c < b$, então $c < a$? ( ) Sim (X) Não
   c) Se $c > a$, então $c > b$? ( ) Sim (X) Não
   d) Se $c > b$, então $c > a$? (X) Sim ( ) Não

Parte 2 - Continuação das análises

Observação 3.7.8. Retomando os resultados dos itens 5 e 6 da parte 1, sabemos ser sempre verdade que $|r_1 - r_2| < r_1 + r_2$, já que r_1 e r_2 representam raios dos círculos e portanto valores positivos. Aprofundaremos a análise das desigualdades que nos auxiliarão a determinar os critérios das posições relativas entre dois círculos de maneira mais eficiente. Dessa forma, nos próximos itens associaremos o valor a, citado no item 6 da parte 1, ao número $|r_1 - r_2|$ e o valor b ao número $r_1 + r_2$.

Preencha as lacunas abaixo com o sinal adequado de desigualdade: $<$ ou $>$.

1. Se $c < |r_1 - r_2|$, então $c \underline{<} r_1 + r_2$.
2. Se $c > r_1 + r_2$, então $c \underline{>} |r_1 - r_2|$.

Observação 3.7.9. Considerando a condição $a < b$.

I. "Se $c < a$, então $c < b$." significa que não precisamos verificar $c < b$ se já sabemos que $c < a$. É automático.

II. "Se $c > b$, então $c > a$." significa que não precisamos verificar $c > a$ se já temos $c > b$.

III. Se $c < b$, com $a < b$, não sabemos se $c < a$ ou $a < c$, precisaríamos verificar qual das duas desigualdades acontecem. Só então, concluímos se $a < c < b$ ou $c < a$.

IV. Se $c < a$ é redundante dizer que $c < a < b$, pois $a < b$ é condição pré-estabelecida.

V. Essas desigualdades são geradas a partir da comparação de um número com outros dois. Como dissemos, às vezes, basta comparar com um deles, pois a relação com o outro é automática. Será necessário aplicar esse raciocínio na parte 3 desta atividade. Aqui comparar quer dizer decidir qual relação de desigualdade é válida, qual o maior? Qual o menor?

Parte 3 - Explorando o arquivo circulo×circulo.ggb do GeoGebra

1. Abra o arquivo circulo×circulo.ggb do GeoGebra.

   Observação 3.7.10. Os objetos que podem ser alterados são: os centros, embora só em movimentos direita $\leftrightarrows$ esquerda possam ser feitos; os raios dos círculos nos controles, chamados Controles Deslizantes, localizados no canto superior esquerdo da Janela de Visualização.

2. Mova os controles deslizantes e veja como se comporta a construção. Observe o que representam os segmentos AB, CD e EF. Também mova os centros dos círculos. Solução: Veja Comando A.2.1.1.

   Observação 3.7.11. Perceba que mesmo movendo os centros só na direção esquerda $\leftrightarrows$ direita, os círculos assumem todas as posições relativas possíveis.

3. Coloque o centro C_1 no meio do primeiro quadrante de forma a ficar com as coordenadas inteiras. Solução: Uma simulação consta na Figura 18. A posição central no quadrante possibilita mover o centro C_2 apenas, facilitando os círculos assumirem todas as posições relativas.

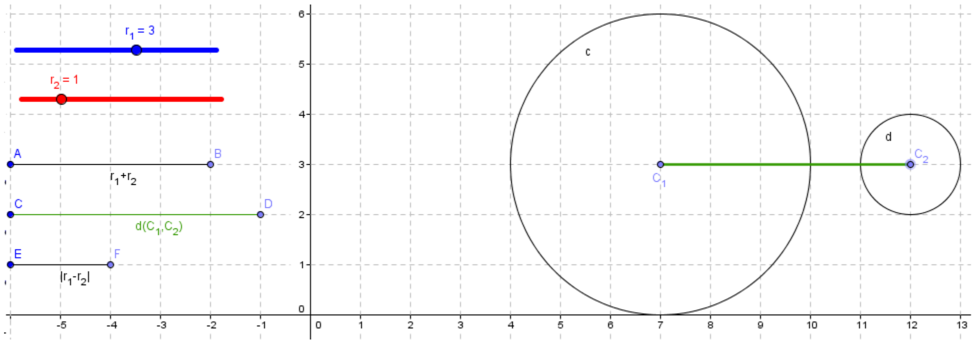


Figura 18 – Simulação relativa aos itens 4 a 7

4. Escolha para o raio r_1 um dos valores: 2, 3 ou 4. Medidas inteiras facilitam a visualização. Solução: Observe ainda a Figura 18, nela escolhemos $r_1 = 3$.

5. Escolha para o raio r_2 um valor inteiro menor que o valor de r_1. Solução: Observe novamente a Figura 18, nela escolhemos $r_2 = 1$. O raio $r_2 < r_1$ permite que ao transladar C_2 para esquerda, o círculo com esse centro, torne-se interior ao círculo de centro C_1.

6. Coloque C_2 numa posição à esquerda de C_1 de maneira que os círculos sejam exteriores. Solução: Observe mais uma vez a Figura 18. Assumimos esta posição como inicial, até o círculo de centro C_2 estar à esquerda do círculo de centro em C_1.

7. Mova C_2 lentamente para à esquerda e observe todas as posições relativas possíveis assumidas: Exteriores $\rightarrow$ Tangentes Exteriores $\rightarrow$ Secantes $\rightarrow$ Tangentes Interiores $\rightarrow$ Interiores $\rightarrow$ Concêntricas $\rightarrow$ Interiores $\rightarrow$ Tangentes Interiores $\rightarrow$ Secantes $\rightarrow$ Tangentes Exteriores $\rightarrow$ Exteriores.
   Solução: A Figura 19 é uma simulação da posição final, referida no item anterior, cuja posição inicial encontra-se na Figura 18.

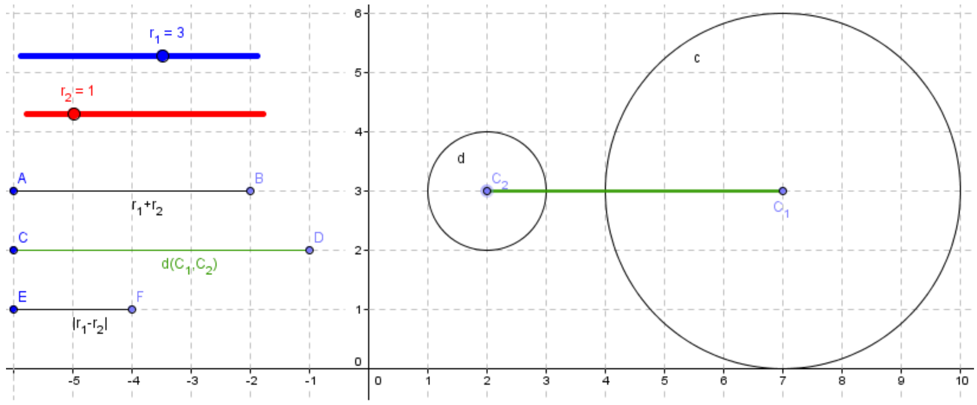


Figura 19 – Simulação relativa ao item 8

Observação 3.7.12. Para fixar a posição relativa tangente interior ou tangente exterior tenha o cuidado de parar numa posição em que o GeoGebra mostre os pontos de interseção coincidentes entre os círculos.

Parte 4 - Posições relativas entre dois círculos

1. **Análise da posição: Círculos Exteriores**

   a) Mova o centro C_1 para a esquerda, mantendo-o no primeiro quadrante e modifique os raios de forma a manter os círculos exteriores. Solução: Voltar o círculo de centro C_1 ao canto esquerdo do primeiro quadrante permite maior variação dos raios e posição de C_2 para analisar a posição Círculos Exteriores. Veja Figura 20.

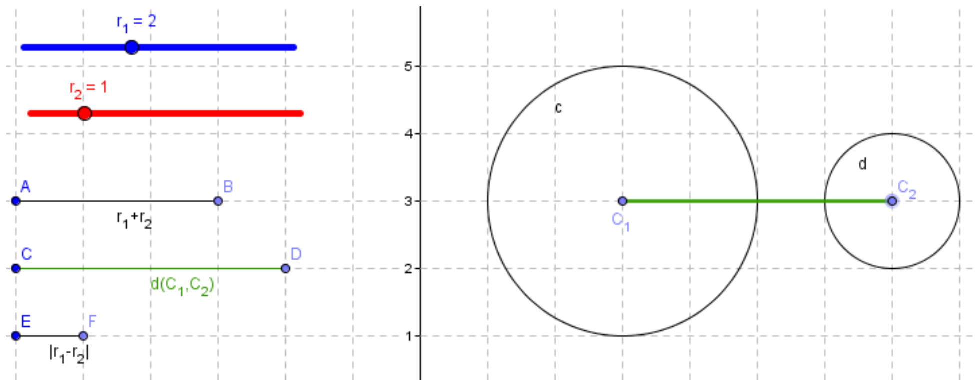


Figura 20 – Simulação relativa aos círculos exteriores

   b) Mova apenas C_2 sempre mantendo os círculos exteriores. Solução: Observe na Figura 20 que há mais espaço para variar as coordenadas de C_2. Movendo somente o centro C_2, apenas o segmento CD altera sua medida.

c) Compare a medida do segmento $CD = d(C_1, C_2)$ com a medida dos segmentos $AB = r_1 + r_2$ e $EF = |r_1 - r_2|$. Solução: Observe na Figura 20 os segmentos mencionados no lado esquerdo.

d) Agora, apenas altere o raio r_2 mantendo os círculos exteriores. Solução: Observe na Figura 20 que há mais espaço para variar a medida de r_2. Movendo somente o raio r_2, os segmento AB e EF alteram suas medidas.

e) Compare a medida do segmento $CD = d(C_1, C_2)$ com a medida dos segmentos $AB = r_1 + r_2$ e $EF = |r_1 - r_2|$. Solução: O aluno deve perceber que seja alterando a posição dos centros ou a medida do raio, $d(C_1, C_2)$ sempre supera as outras medidas.

f) Preencha as lacunas abaixo com o sinal adequado: $<$, $>$, $=$, $\leq$ ou $\geq$.

   i. $d(C_1, C_2) \;>\; r_1 + r_2$
   ii. $d(C_1, C_2) \;>\; |r_1 - r_2|$

g) Lembre-se do item 1 e da Observação 3.7.9 da Parte 2 e responda: Para termos dois círculos exteriores é necessário satisfazer às duas condições anteriores, do item f, subitens i. e ii.?

   i. ( ) Sim. Então, unindo as duas sentenças, como fica a condição?
   ii. (X) Não. Então é suficiente satisfazer qual das condições? $d(C_1, C_2) > r_1 + r_2$.

2. **Análise da posição: Círculos Tangentes Exteriores**

Observação 3.7.13. Quando os círculos estão tangentes exteriores, o GeoGebra mostra os pontos de interseção coincidentes: $P \equiv Q$. É mais fácil definir essa posição quando os centros e os raios assumem valores inteiros.

a) Mova o centro C_1 para o meio do primeiro quadrante, mova C_2 e modifique os raios de forma a obter círculos tangentes exteriores. Solução: Uma simulação consta na Figura 21. Essa posição é mais difícil de obter, por isso, centralizando C_1 no 1º quadrante, podemos com o mesmos raios ter o círculo de centro C_2 à esquerda, representado pela linha pontilhada, e à direita, representada pela linha contínua, do círculo de centro C_1. Nas duas situações os círculos estão tangentes exteriores.

b) Quando encontrar círculos tangentes exteriores, compare a medida do segmento $CD = d(C_1, C_2)$ com a medida dos segmentos $AB = r_1 + r_2$ e $EF = |r_1 - r_2|$. Solução: Observe na Figura 21 os segmentos mencionados no lado esquerdo.

c) Mova o centro C_2 e modifique os raios de forma a obter outra posição em que os círculos sejam tangentes exteriores. Solução: Na Figura 21 temos duas formas de obter círculos exteriores.

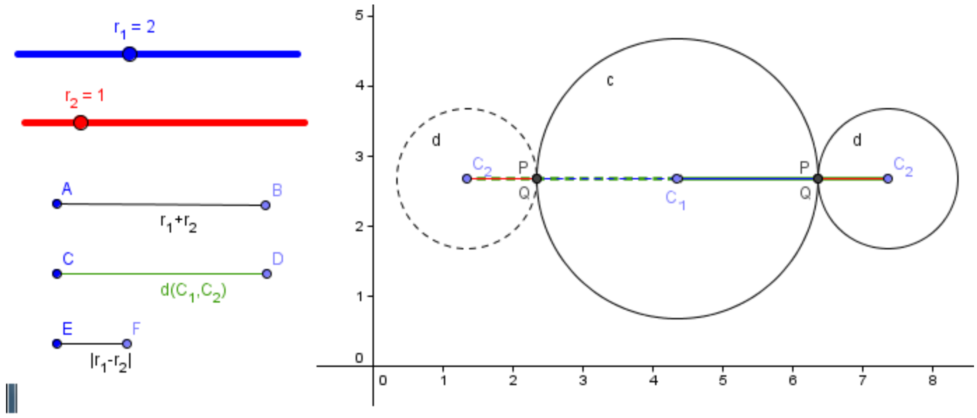


Figura 21 – Simulação relativa aos círculos tangentes exteriores

d) Compare a medida do segmento $CD = d(C_1, C_2)$ com a medida dos segmentos $AB = r_1 + r_2$ e $EF = |r_1 - r_2|$. Solução: O aluno deve perceber que, seja alterando a posição dos centros, ou a medida do raio, $d(C_1, C_2)$ coincide com a medida do segmento AB.

e) Procure outras posições em que os círculos sejam tangentes exteriores e compare os segmentos novamente. Não é exagero o número de variações pedido da posição Tangentes Exteriores. Quanto mais o aluno obtém formas diferentes da mesma posição relativa, mais fácil percebe a condição necessária para a posição.

f) Preencha as lacunas abaixo com o sinal adequado: $<$, $>$, $=$, $\leq$ ou $\geq$.

   i. $d(C_1, C_2) \ = \ r_1 + r_2$

   ii. $d(C_1, C_2) \ > \ |r_1 - r_2|$

g) Lembre-se do item 1 e da Observação 3.7.9 da Parte 2 e responda: Para termos dois círculos tangentes exteriores é necessário satisfazer às duas condições anteriores, do item f, subitens i. e ii.?

   i. ( ) Sim. Então, unindo as duas sentenças, como fica a condição?

   ii. (X) Não. Então é suficiente satisfazer qual das condições? $d(C_1, C_2) = r_1 + r_2$.

3. **Análise da posição: Círculos Tangentes Interiores**

Observação 3.7.14. Quando os círculos estão tangentes interiores, o GeoGebra mostra os pontos de interseção coincidentes: $P \equiv Q$. É mais fácil definir essa posição quando os centros e os raios assumem valores inteiros.

a) Mova C_2 e modifique os raios de forma a obter círculos tangentes interiores. Solução: O círculo de centro C_1 pode voltar ao canto esquerdo do primeiro quadrante e com raio maior, pois o círculo de centro C_2 fica contido ao círculo de centro C_1. Veja Figura 22.

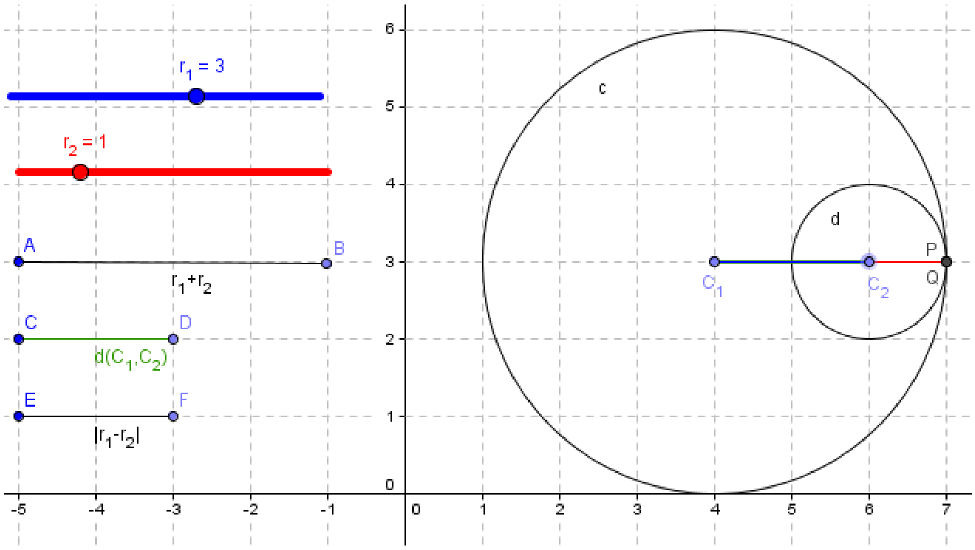


Figura 22 – Simulação relativa aos círculos tangentes interiores

b) Quando encontrar círculos tangentes interiores, compare a medida do segmento $CD = d(C_1, C_2)$ com a medida dos segmentos $AB = r_1 + r_2$ e $EF = |r_1 - r_2|$. Solução: Observe o canto esquerdo da Figura 22 os segmentos mencionados.

c) Mova o centro C_2, modifique os raios e encontre outra forma de obter círculos tangentes interiores.

d) Compare a medida do segmento $CD = d(C_1, C_2)$ com a medida dos segmentos $AB = r_1 + r_2$ e $EF = |r_1 - r_2|$. Solução: Observe o canto esquerdo da Figura 22 $CD = EF$. Podemos realmente verificar a igualdade usando a ferramenta Relação. Veja o Comando A.2.7.1.

e) Procure outras posições em que os círculos sejam tangentes interiores e compare os segmentos novamente.

f) Preencha as lacunas abaixo com o sinal adequado: $<, >, =, \leq$ ou $\geq$.

   i. $d(C_1, C_2) \;<\; r_1 + r_2$

   ii. $d(C_1, C_2) \;=\; |r_1 - r_2|$

g) Lembre-se do item 1 e da Observação 3.7.9 da Parte 2 e responda: Para termos dois círculos tangentes interiores é necessário satisfazer às duas condições anteriores, do item f, subitens i. e ii.?

   i. ( ) Sim. Então, unindo as duas sentenças, como fica a condição?

   ii. (X) Não. Então é suficiente satisfazer qual das condições? $d(C_1, C_2) = |r_1 - r_2|$.

4. **Análise da posição: Círculos Interiores**

   a) Mova C_2 e modifique os raios de forma a obter círculos interiores. Solução: Observe a Figura 23.

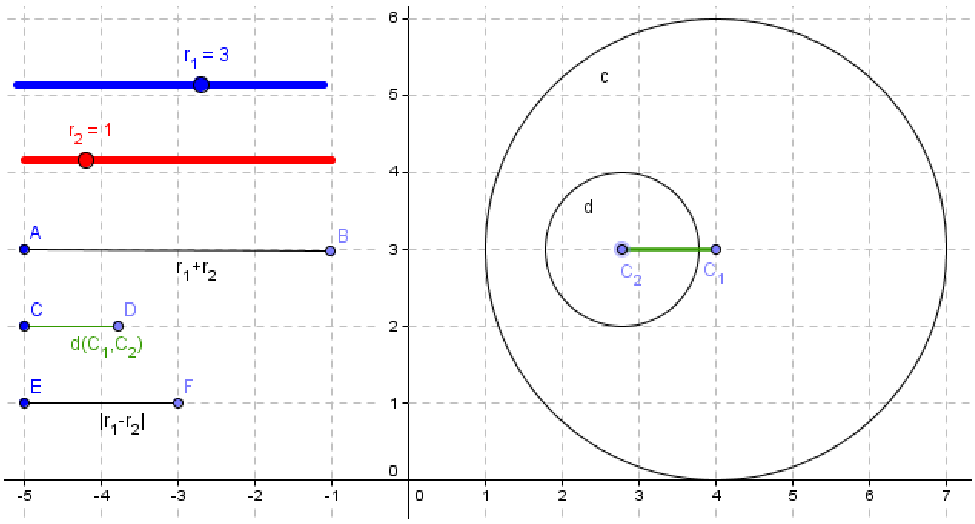


Figura 23 – Simulação relativa aos círculos interiores

   b) Compare a medida do segmento $CD = d(C_1, C_2)$ com a medida dos segmentos $AB = r_1 + r_2$ e $EF = |r_1 - r_2|$. Solução: Observe o canto esquerdo da Figura 23.

   c) Mova o centro C_2, modifique os raios e encontre outras formas de obter círculos interiores.

   d) Compare a medida do segmento $CD = d(C_1, C_2)$ com a medida dos segmentos $AB = r_1 + r_2$ e $EF = |r_1 - r_2|$. Solução: Observe o canto esquerdo da Figura 23, tem-se $CD < EF$.

   e) Procure outras posições em que os círculos sejam interiores e compare os segmentos citados novamente.

   f) Preencha as lacunas abaixo com o sinal adequado: $<$, $>$, $=$, $\leq$ ou $\geq$.

      i. $d(C_1, C_2)$ $<$ $r_1 + r_2$

      ii. $d(C_1, C_2)$ $<$ $|r_1 - r_2|$

   g) Lembre-se do item 1 e da Observação 3.7.9 da Parte 2 e responda: Para termos dois círculos interiores é necessário satisfazer às duas condições anteriores, do item f, subitens i. e ii.?

      i. ( ) Sim. Então, unindo as duas sentenças, como fica a condição?

      ii. (X) Não. Então é suficiente satisfazer qual das condições? $d(C_1, C_2) < |r_1 - r_2|$.

5. **Análise da posição: Círculos Secantes**

   a) Mova C_2 e modifique os raios de forma a obter círculos secantes. Solução: Observe a Figura 24.

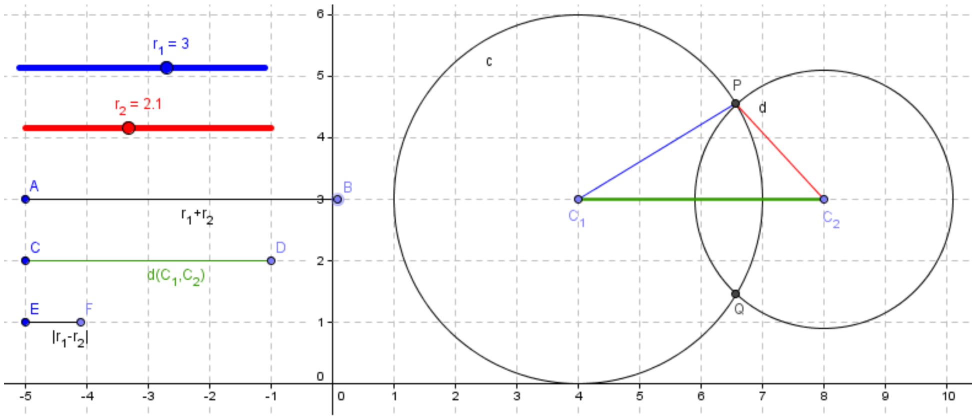


Figura 24 – Simulação relativa aos círculos secantes

   b) Compare a medida do segmento $CD = d(C_1, C_2)$ com a medida dos segmentos $AB = r_1 + r_2$ e $EF = |r_1 - r_2|$. Solução: Observe o canto esquerdo da Figura 24 e os segmentos mencionados.

   c) Mova o centro C_2, modifique os raios e encontre outras formas de obter círculos secantes.

   d) Compare a medida do segmento $CD = d(C_1, C_2)$ com a medida dos segmentos $AB = r_1 + r_2$ e $EF = |r_1 - r_2|$. Solução: Observe a Figura 24, a condição pode não ficar clara visualizando os segmentos. O aluno pode pensar por exclusão. Se os círculos fossem exteriores, então $CD > AB$, se fossem tangentes exteriores, então $CD = AB$ e assim por diante. Restando $EF < CD < AB$. Ou, ressalte o triângulo PC_1C_2 formado, pelas desigualdades triangulares, que são as condições de existência de um triângulo, chegamos a mesma conclusão.

   e) Procure outras posições em que os círculos sejam secantes e compare os segmentos citados novamente.

   f) Preencha as lacunas abaixo com o sinal adequado: $<$, $>$, $=$, $\leq$ ou $\geq$.

      i. $d(C_1, C_2) \ < \ r_1 + r_2$

      ii. $d(C_1, C_2) \ > \ |r_1 - r_2|$

   g) Lembre-se do item 1 e da Observação 3.7.9 da Parte 2 e responda: Para termos dois círculos secantes é necessário satisfazer às duas condições anteriores, do item f, subitens i. e ii.?

      i. (X) Sim. Então, unindo as duas sentenças, como fica a condição? $|r_1 - r_2| < d(C_1, C_2) < r_1 + r_2$.

ii. ( ) Não. Então é suficiente satisfazer qual das condições?

Parte 5 - Conclusão

1. Associe a coluna da direita com a da esquerda, isto é, relacione a posição relativa dos círculos de centro C_1 e C_2 e medida dos raios r_1 e r_2, respectivamente aos critérios obtidos na parte 3.

a) Círculos Exteriores	(f) $C_1 \equiv C_2$ e $r_1 \neq r_2$
b) Círculos Tangentes Exteriores	(e) $d(C_1, C_2) < \lvert r_1 - r_2 \rvert$
c) Círculos Secantes	(b) $d(C_1, C_2) = r_1 + r_2$
d) Círculos Tangentes Interiores	(d) $d(C_1, C_2) = \lvert r_1 - r_2 \rvert$
e) Círculos Interiores	(a) $d(C_1, C_2) > r_1 + r_2$
f) Círculos Concêntricos	(c) $\lvert r_1 - r_2 \rvert < d(C_1, C_2) < r_1 + r_2$

2. Preencha o Quadro 4 analisando a posição relativa entre dois círculos.

Quadro 4 – Critérios para determinar a posição relativa entre dois círculos

Posição Relativa	Critério adotado
Círculos Concêntricos	$C_1 \equiv C_2$ e $r_1 \neq r_2$
Círculos Secantes	$\lvert r_1 - r_2 \rvert < d(C_1, C_2) < r_1 + r_2$
Círculos Interiores	$d(C_1, C_2) < \lvert r_1 - r_2 \rvert$
Círculos Tangentes Exteriores	$d(C_1, C_2) = r_1 + r_2$
Círculos Exteriores	$d(C_1, C_2) > r_1 + r_2$
Círculos Tangentes Interiores	$d(C_1, C_2) = \lvert r_1 - r_2 \rvert$

Dicas para o professor

✓ A Observação 3.7.9 deve ser entendida para o aluno concluir a parte 4, se o aluno tiver dificuldade de entender essas afirmações, mostre as relações na reta real, em que pontos equivalem a números, ser menor equivale a um ponto estar à esquerda de outro e ser maior equivale a um ponto estar à direita de outro.

✓ A posição círculos concêntricos não é analisada como as demais, pois a condição que deve ser satisfeita foi definida na item 4 da parte 1.

No próximo capítulo faremos a análise da implementação das atividades, discutindo resultados e principalmente as mudanças necessárias para superar as dificuldades que ocorreram durante a execução do trabalho.

4 Relato da aplicação das atividades

O IFRS - Campus Rio Grande na modalidade Integrado possui seis cursos no seu quadro dos quais somos responsáveis por cinco de suas turmas de 3º ano, que são Refrigeração e Climatização, Informática para Internet, Geoprocessamento, Automação Industrial e Fabricação Mecânica. As turmas são definidas por curso. Escolhemos, porém, apenas três das cinco turmas para aplicar as atividades, a fim de comparar o rendimento dos estudantes. O 4º bimestre é reservado ao estudo de Geometria Analítica. No IFRS - Campus Rio Grande a carga horária semanal de Matemática consta de um encontro de 120 minutos. Situação atípica em relação a maioria dos estabelecimentos de ensino. Devido a problemas de calendário durante o ano, destinamos apenas três encontros para o estudo da circunferência. Os conteúdos ministrados costumam ser: equações da circunferência, método de completar quadrados para transformar a equação geral em reduzida, reconhecimento de uma circunferência dada a equação completa de 2º grau a duas variáveis, posições relativas entre: ponto e circunferência, reta e circunferência e entre duas circunferências. Devido ao tempo e ainda a necessidade de introduzir o GeoGebra teríamos que excluir algo da lista. Optamos por inserir todos os conteúdos nos três dias de atividades e distribuir o que é essencial no início de cada atividade, prevendo o estudante que não tivesse tempo de fazer tudo, ao menos teria feito a parte essencial.

4.1 Pesquisa prévia com os alunos

Investigamos diversos aspectos sobre o trabalho antes de ser aplicado com os alunos, pois tínhamos dúvidas sobre, principalmente, o conhecimento prévio do aluno sobre Geometria e círculo do Ensino Fundamental. Investigamos da mesma forma a opinião dos estudantes sobre o emprego de ferramentas computacionais em aulas de disciplinas de formação geral, porque sabemos da resistência de alguns cursos que trabalham constantemente em laboratórios de informática e ficam exauridos com esse tipo de atividade. Outro fator pesquisado foi o nível de conhecimento dos discentes sobre o GeoGebra, mesmo empregando o *software* ao longo do ano e sabidamente aplicado por outros professores de Matemática nos anos anteriores. A investigação foi feita na forma de questionário, aplicado em todas as turmas. Conseguimos a partir dos resultados, decidir em quais turmas seria implementado o trabalho com o GeoGebra e consequentemente àquelas que assumiram o papel de turmas controle.

4.1.1 Questionário 1

O aluno foi instruído a não se identificar. Oitenta alunos responderam a este questionário. Analisaremos as respostas de modo geral, sem nos ater a um estudo estatístico aprofundado, apresentamos apenas alguns valores, quando conveniente. Transcrevemos algumas respostas interessantes ou inusitadas de relevância para o tema.

As primeiras perguntas triviais, sobre idade, sexo e curso. As perguntas 4, 5 e 6 são relativas ao conceito de circunferência e sobre a distinção dos termos círculo e circunferência, pois no trabalho proposto o significado é o mesmo.

4. O que entendes por circunferência?
5. Diferencias o significado dos termos: circunferência e círculo?
   ( ) Sim ( ) Não
6. Se respondeste afirmativamente à pergunta anterior, descreva o que é cada um para ti. Se respondeste negativamente, pule esta pergunta.
   a) Circunferência:
   b) Círculo:

Os alunos responderem segundo alguns padrões. Em relação à pergunta 4, a maioria não definiu circunferência, ou melhor, não há caracterizou com o que distingue de todas as outras figuras geométricas. Um grupo de alunos relacionou a circunferência como o bordo do círculo e este por sua vez a área da circunferência. Muitas respostas curiosas, citamos duas: “Circunferência representa um círculo vazio ou o contorno de um círculo. Círculo representa uma circunferência preenchida.” e “Uma reta (curvada) que começa em um ponto e termina no mesmo, fazendo uma volta completa.” Outro grupo de alunos, em menor número, escreveu simplesmente como sendo algo redondo ou de forma circular. Muitos alunos referiram-se simplesmente como uma figura geométrica ou alguma característica tão genérica que poderia representar qualquer coisa, como, por exemplo: “Círculo é uma união de pontos.” Houve ainda a incidência da descrição dos elementos do círculo, por exemplo, citando raio, centro, diâmetro e 360º. A minoria mencionou a propriedade da distância, embora às vezes confusa, como é o caso da resposta: “É um ponto central, em que todos seus outros pontos se distancia de uma mesma distância, chamado raio.” Apenas duas respostas poderíamos considerar corretas. Quanto às perguntas 5 e 6, mais da metade dos alunos disseram diferenciar os termos círculo e circunferência. Dentre estes a resposta mais frequente, como esperávamos, foi relacionar circunferência com o bordo do círculo e círculo com a área preenchida. Também muito frequente, mas em menor número, os alunos que disseram ser a circunferência o bordo do círculo, mas quando foram descrever o círculo não souberam, ou responderam algo vago, ou absurdo. Ainda foi incidente a relação que um tem uma propriedade e a outra não completamente. Relacionado a este estilo de resposta, citamos: "A circunferência é uma figura circular, mas não fecha 360º necessariamente. Círculo é plano, fechando 360º." Dentre os que disseram não à pergunta 5, alguns foram contraditórios, 10% do total, pois na resposta da pergunta 4 relacionaram os termos como conceitos distintos.

As perguntas 7, 8 e 9 relacionam-se ao estudo do círculo no Ensino Fundamental.

7. O que estudaste, que te lembras, sobre circunferência/círculo no ensino fundamental?

8. Sentias alguma dificuldade, qual e por quê?

9. O que tu realmente sabes sobre circunferência/círculo?

Quanto às perguntas de 7 a 9 constatamos que mais da metade dos discentes alega não lembrar ou não ter estudado o assunto no Ensino Fundamental. As respostas restantes mais incidentes na pergunta 7 em ordem decrescente: área, perímetro e diâmetro. Foram as respostas mais frequentes também à pergunta 9. Geralmente, o que responderam na 7, repetiram na 9, apesar de não necessariamente estarem certos. Algumas respostas da pergunta 9 foram soltas, como simplesmente πr^2 ou $2\pi r$, nesse sentido não podemos concluir se o aluno realmente sabe o que significa. Em relação à pergunta 8, percebemos alguns argumentos interessantes. Quase metade dos alunos cita não ter dificuldades sobre o assunto, ou pelo conteúdo ser abordado de maneira muito simples na época, ou por ser só aplicação de fórmulas, ou porque não estudaram geometria no Ensino Fundamental. Resposta curiosa: "Não, no Ensino Fundamental eu era boa em matemática." Alguns ainda argumentam, já que não lembram do que foi visto, não poderiam lembrar da mesma forma se tinham dificuldades. Apenas 25% alegaram ter dificuldades, com justificativas tão diversificadas que não pudemos agrupá-las. Dentre estas, algumas respostas chamam atenção: "Sim, nunca gostei de matemática." e "Sim, na parte de problemas que envolvem geometria, porque acho muito abstrato."

Para decidir em que turmas aplicaríamos as atividades com o GeoGebra, levamos em consideração os resultados das questões 10 a 12, descritas a seguir. Quanto ao uso de tecnologia nas disciplinas de formação geral, houve maior rejeição na turma de Automação Industrial. Conciliado ao fato de ser a turma com maior número de alunos, o que tornaria a dinâmica das atividades mais difícil. Optamos por tê-la como turma controle. Cabe salientar que o curso de Automação Industrial é considerado dentre todos os que possuem os alunos com melhor desempenho acadêmico, relacionado, talvez, ao fato de ser o curso com maior taxa aluno por vaga no teste de classificação para o ingresso no IFRS - Campus Rio Grande. Em relação ao nível de conhecimento do GeoGebra, todas as turmas optaram, em maior número, pela terceira alternativa: "O professor já mostrou em aula, mas nunca manipulei." Dessa forma, essa questão não serviu para selecionar as turmas. A resposta a esta questão também nos fez organizar uma atividade preparatória com o GeoGebra com maior cuidado.

10. Gostas de aulas com o uso de tecnologia computacional (uso de *softwares*) nas disciplinas de formação geral?
    ( ) Sim ( ) Não

11. Conheces o *software* GeoGebra?
    ( ) Não conheço.
    ( ) Só ouvi falar.
    ( ) O professor já mostrou em aula, mas nunca manipulei.
    ( ) Já usei, mas não lembro quase de nada.
    ( ) Tenho algum domínio.
    ( ) Sou nível avançado.

12. Podes levar um *notebook* para as aulas?
    ( ) Sim ( ) Não

Quanto à possibilidade do aluno levar seu próprio computador para sala de aula, a turma que menos alunos, percentualmente, poderiam levá-lo foi a turma de Refrigeração e Climatização, então optamos por essa turma também servir de controle. O IFRS - Campus Rio Grande, possui vários laboratórios de informática disponíveis. Todas as salas de aula da instituição têm projetor multimídia e *Internet Wireless*, não havendo empecilho para o trabalho na própria sala de aula. Optamos por implementar as atividades em sala de aula para comodidade dos alunos usarem seus próprios computadores e manterem o programa instalado possibilitando o uso para as tarefas complementares solicitadas para casa. Além disso, tornam o computador acessível no lugar em que eles são necessários. Segundo Trucano (2011, p. 66):

> Reconhece-se também que, se o objetivo é que os computadores e as TIC's contribuam diretamente para o processo de aprendizado nas principais matérias, é preciso colocá-los onde as principais matérias estão sendo ensinadas – como nas salas de aula. A mudança para o modelo de informática "um para um", em que cada aluno (e/ou professor) tem seu próprio *laptop*, pode ser vista em alguns aspectos como um prolongamento dessa crença. Isso não quer dizer que os laboratórios de informática das escolas sejam uma má ideia. Tampouco significa que são uma boa ideia.

No primeiro questionário deixamos, propositalmente, as perguntas sobre circunferência e círculo sem alternativas para não induzir os alunos, pois é diferente ler um nome e parecer familiar do que realmente saber o conceito. No segundo questionário enunciamos exercícios simples relacionados diretamente aos conceitos trabalhados no Ensino Fundamental, esperando que a leitura do enunciado remetesse àquele conceito.

4.1.2 Questionário 2

Os alunos foram instruídos a não se identificarem e para não deixar as questões em branco e assim registrassem que não sabiam ou não lembravam como resolver. Responderam ao segundo questionário, 84 alunos. O resultado principal que queremos analisar são as respostas em que o aluno alega não saber, juntamente com os erros essenciais cometidos.

Dedicamos maior atenção a primeira pergunta, pois ela está vinculada ao conceito de circunferência, cujo resultado no primeiro questionário ficou aquém do desejado.

1. O compasso, sem defeitos, traça uma circunferência perfeita, real? Ou aproximada? Por quê?

Na primeira pergunta não consideramos respostas certas ou erradas, pois isso depende da justificativa do aluno. Surpreendeu-nos o número de respostas "Não sei", ou em branco, totalizaram 20%, pois não dependia diretamente de um conteúdo, mas sim de um ponto de vista sobre o assunto. Dentre os aproximadamente 37% de respostas: "traça circunferência perfeita", os argumentos foram entre a alegação que o compasso foi feito para isso, ou relacionando, como esperávamos, com a característica da equidistância, como representa a resposta: "Acho que real, pois ele vai riscar a mesma distância em volta de um ponto." Os argumentos para justificar que o compasso traça uma circunferência aproximada foram ou porque nenhum instrumento é preciso ou porque sempre haverá erro humano. Escolhemos uma frase para representar esse grupo de resposta: "Não traça uma circunferência perfeita real, traça uma aproximada, porque todos os instrumentos de medição tem um erro de incerteza." Também argumentaram no sentido de nenhuma figura poder representar um conceito matemático perfeito. A resposta a seguir representa este raciocínio: "Aproximada, a nível microscópico e matemático nunca é perfeito."

2. Calcule o comprimento de uma circunferência de raio 2 cm.

3. Qual a área de um círculo com raio 3?

Na pergunta 2, 33% responderam não saber e 11% tentaram resolver, sem êxito. Já esperávamos que esta pergunta teria maioria de acerto. Esta e a pergunta 3, pois área e comprimento da circunferência foram os assuntos mais frequentes na pergunta 9 do questionário 1. O percentual de acerto para a questão 3, foi até um pouco menor que a anterior, 53%, o que mudou nessa questão foi o percentual de respostas "Não sei", 14%. Temos 33% de respostas incorretas. Interpretamos esse resultado pelo fato dos alunos terem alegado saber a área do círculo. Ou melhor, por ser um assunto bem trabalhado no Ensino Fundamental, os estudantes lembram, mesmo que vagamente, e resolvem o exercício deixando menos respostas sem desenvolvimento.

4. O que é diâmetro de um círculo?

Na questão 4, 62% dos alunos responderam "$2r$", e assim fica claro que eles compreendem o diâmetro como uma medida, um número. Até nas demais respostas a maioria respondeu ser uma distância, ou seja, também um valor numérico. Isso faz-nos pensar nos princípios matemáticos que passamos, especialmente no Ensino Fundamental. Matemática é apenas fazer cálculos, é apenas o conhecimento dos números? Como mudar essa concepção tão arraigada nos nossos alunos e em muitos professores? Em relação ao conceito de diâmetro, doze alunos relacionaram com algo que passa pelo centro da circunferência. Nenhum relacionou a segmento, e mesmo com esses doze alunos, a maioria relacionou à medida. Poucos não o fizeram, mas equivocaram-se de qualquer maneira, como o aluno que respondeu: "Diâmetro é uma reta dentro do círculo que cruza sua origem, centro."

5. O que é diâmetro de um círculo? Na Figura 25 considere P, Q e R pontos da circunferência e o ponto O o centro da mesma. Se $\alpha = 25^o$, qual a medida do ângulo β?

6. Se QR é um diâmetro da circunferência e P é um ponto qualquer da mesma, qual o valor do ângulo β? Observe Figura 26.

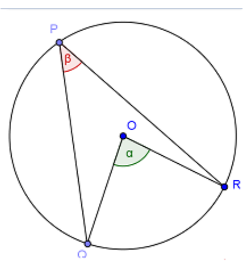


Figura 25 – Questão 5

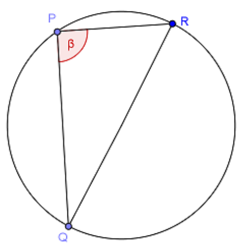


Figura 26 – Questão 6

À questão 5, 77% alegaram não saber e 13% erraram a resposta. À questão 6 o índice de acerto foi maior: 43%, embora acreditamos na influência da figura sobre o resultado, que pode ter induzido aos alunos responderem 90º, embora na Figura 26 tivemos o cuidado de não construir a figura com o ângulo correto, embora muito aproximado. Admitimos que o resultado seria mais confiável se na questão 6 não houvesse figura.

7. Qual a relação existente entre raio e diâmetro de um círculo?

A questão 7, pelo ponto de vista dos alunos, repetiu a pergunta 4, muitos colocaram: "Idem 4", ou algo similar. Embora nesta pergunta esperássemos realmente a relação $d = 2r$ e na 4 o conceito de diâmetro, deveríamos ter formulado a pergunta inserindo a palavra medida. Costumamos dizer "O raio do círculo é r."e deveríamos dizer "A medida do raio é r.", pois o estudante acaba associando o raio, ou diâmetro a uma medida. Ainda assim, o resultado foi distinto da questão 4, pois 82% reponderam que o diâmetro é duas vezes o raio, ou mensagem equivalente. Apenas 8% responderam não saber.

8. Considere duas cordas não paralelas de um círculo. Obtendo as mediatrizes destas cordas, elas se interseccionam num ponto. Que ponto é esse para o círculo?

9. Descreva o que é reta secante a um círculo? Sabes descrever alguma propriedade?

10. Descreva o que é reta tangente a um círculo? Sabes descrever alguma propriedade?

Comentamos em aula, durante o estudo da reta, a propriedade da mediatriz. Acreditamos que isso refletiu nos 25% de acerto da questão 8. Pode parecer um percentual baixo, mas comparado às outras questões, principalmente as questões de 9 a 11, é alto. Na questão 9, apenas $0,5\%$ dos estudantes fizeram colocações plausíveis. Até mesmo o número de discentes que alegarem ser a reta secante o inverso do cosseno foi maior, com 7% das duplas. Já 85% dos alunos disseram não saber. O índice de acerto sobre a definição de reta tangente foi de 13%. Esperávamos um percentual maior, pois é um assunto que costuma ser relacionado a outras áreas do conhecimento. Curiosamente, 9% dos estudantes responderam ser reta tangente a razão entre seno e cosseno. Acreditamos que isso se deve ao forte estudo de funções trigonométricas, assim como a resposta da reta secante. O aluno desatento, ou que lê muito rapidamente a pergunta só se atém às palavras: tangente e secante e assim associa à trigonometria.

A última questão não investiga os conhecimentos básicos de Geometria do Ensino Fundamental, tem outro caráter. Teve o objetivo de verificar se o aluno sozinho poderia pensar em completar quadrados apenas lembrando-se dos produtos notáveis.

11. Sabendo que $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$, reescreva o trinômio $x^2 - 6x + 10$ como soma de dois quadrados.

Nenhum aluno acertou acertou a questão 11. Pelo menos 21% dos alunos tentaram encontrar a resposta. Por esse resultado, preparamos a atividade de completar quadrados com muito mais cuidado, com uma espécie de roteiro que o aluno pudesse seguir com maior entendimento do que está fazendo.

Pela grande quantidade de respostas em branco e pelos alunos que alegaram não saber os resultados pedidos, resolvemos implementar um glossário com a definição de alguns termos, propriedades e fórmulas de Geometria e círculo do Ensino Fundamental. Cada turma montou o seu glossário, até mesmo nas turmas nas quais não implementamos as atividades com o GeoGebra. Cada aluno ficou responsável por um igual número de termos. Os discentes publicaram estes termos, com sua fonte, em uma página no *site* da turma, a qual usamos para trocar informações fora da sala de aula. Como incentivo, dissemos aos alunos que poderiam usar o glossário como consulta na prova, desde que os termos fossem publicados até uma certa data limite. A seguir apresentamos a lista de termos que compõe o glossário.

4.1.3 Glossário

1. Área de um polígono: Fórmula de Heron.
2. Área: polígono qualquer de n lados.
3. Baricentro.
4. Circunferência:
   a) definição.
   b) ângulo inscrito × ângulo central.
   c) cálculo da área da coroa circular.
   d) cálculo da área do setor circular.
   e) cálculo da área.
   f) cálculo do comprimento.
   g) definição de diâmetro.
   h) definição de corda.
   i) polígonos inscritos e circunscritos: definição.
   j) polígonos inscritos e circunscritos: propriedades.
   k) potência de um ponto em relação à circunferência.
   l) propriedade da mediatriz de uma corda.
   m) propriedade de duas circunferências tangentes.
   n) propriedade do triângulo retângulo inscrito.
   o) relação diâmetro × raio.
   p) relação entre duas cordas que se cortam.

   q) relação entre duas secantes concorrentes.
   r) relação entre tangente e secante.
   s) reta secante à circunferência.
   t) reta tangente à circunferência.

5. Incentro.
6. Ortocentro.
7. Perímetro: definição.
8. Teorema de Pitágoras.
9. Teorema de Talles
10. Teorema de Talles: casos particulares no triângulo.
11. Triângulo:
    a) classificação quanto à medida dos lados.
    b) classificação quanto aos ângulos.
    c) definição de altura.
    d) mediana de um triângulo.
    e) propriedade triangular.
    f) soma dos ângulos internos.

Embora não recomendemos expressamente essa investigação anterior para implementação da nossa proposta, sabemos da sua importância e como isso altera a relação aluno-professor. Segundo Miskulin e Junior (2007, p. 138) trata das novas relações entre discentes e docentes com a existência e uso das TIC's. Os autores afirmam que o professor deve conhecer o aluno, compreender o seu trabalho e suas ideias, influenciando a parceria entre ambos. O que acreditamos influenciar diretamente nas ferramentas de avaliação e o resultado das mesmas.

4.2 Implementação do trabalho

O método de avaliação no 4º bimestre foi constituído de forma diferente para inserir o trabalho proposto sobre circunferência. Normalmente a nota bimestral é composta de 3,0 pontos para a avaliação diária; 7,0 pontos para a prova bimestral e o limite de 1,5 pontos para atividades extras facultativas ou até o máximo de 10 pontos no bimestre. Com a alteração, designamos 3,0 pontos para a avaliação diária, realizadas antes das atividades sobre circunferência; 4,0 pontos para a prova bimestral; limite de 1,5 pontos para atividades extras facultativos ou até o máximo de 10 pontos no bimestre, incluindo o glossário e 3,0 pontos para as atividades sobre circunferência que incluíram o trabalho feito em sala de aula e um relatório complementar feito como atividade para casa. O objetivo do relatório foi de explorar tópicos complementares sobre circunferência e também avaliar a atividade feita em sala de aula.

Organizamos os alunos em duplas e cada um da dupla ficou responsável por levar um computador. Instruímos a eles trazerem computador com o GeoGebra instalado e também já terem o primeiro contato com o programa em casa. Indicamos alguns *links* de vídeos tutoriais, para isso. Recomendamos, que durante as aulas, um dos integrantes da dupla ficasse responsável pela manipulação no GeoGebra, quando fosse utilizado e o outro, responsável pela leitura das instruções e anotações devidas.

No início da primeira atividade discutimos sobre o uso dos termos circunferência e círculo. Seriam usados indistintamente com a tendência do emprego mais frequente do termo círculo. Explicamos que muitos autores não fazem a distinção habitual usada pelos alunos e que o próprio GeoGebra adota o termo círculo. Entregamos as atividades de cada dia na sua íntegra.

Descreveremos as atividades aplicadas comentando-as de modo geral. Elas se assemelham ao que foi proposto no capítulo 3, por isso não as transcreveremos nesta análise. É importante ressaltar que as atividades foram executadas e a partir da análise dos resultados foi reformulada para a proposta didática sobre o estudo da circunferência, objetivo deste trabalho. Os comentários visam esclarecer o que motivou as alterações feitas.

4.2.1 Atividade do 1° dia

Realizaram esta atividade vinte e quatro duplas de alunos.

Parte 1 - Explorar o GeoGebra e suas funções principais

Fizemos uma pequena explanação no início da atividade usando o projetor multimídia. Acrescentamos a explicação das ferramentas Mover e Mover Janela de Visualização e também a relação entre a Janela de Visualização e a Janela de Álgebra. Em seguida, em forma de instruções sequenciais, instruímos aos alunos utilizarem várias ferramentas do GeoGebra. As mais simples: Ponto, Reta, digitar coordenadas e equações na caixa de Entrada, Círculos dados Centro e Um de seus Pontos, dados Centro e Raio, dados Três Pontos, obter Interseção de Dois Objetos, calcular Ângulos, definir Polígono, alterar a aparência de objetos, entre outros itens, sem finalidade específica. Destinamos a esta etapa não mais que 10 minutos. Notamos, mesmo pedindo as funções específicas de que necessitaríamos nas etapas seguintes, que os alunos perguntaram, principalmente, onde se localizavam as ferramentas. Ou seja, não executaram os comandos pedidos. Vimos a necessidade de elaborar uma atividade específica para o conhecimento do GeoGebra separadamente às atividades propostas e ainda encerrando um objetivo ou construção específica. Apresentamos uma proposta de iniciação ao GeoGebra no anexo deste trabalho.

Parte 2 - Definição de círculo

Orientamos uma construção extremamente simples, bastante análoga a Atividade 1 - Parte 1 da proposta do nosso trabalho, inserida no capítulo 3. Simplesmente criar um segmento de comprimento fixo em que uma das extremidades também é fixa e a outra com cor diferenciada e rastro habilitado. Ao mover a extremidade possível, o rastro traça um círculo. Perguntamos aos alunos se esse traço realmente era um círculo.

Como atividade inicial, todas as duplas a executaram com êxito. Analisando os resultados, dezessete duplas responderam sim e justificaram pela distância do ponto A ao ponto B não mudar, ou pelo comprimento do segmento ser fixo, como bem explicado por uma dupla: "Sim, porque todos os pontos têm a mesma distância de A." Se compararmos ao resultado do primeiro questionário, sobre a definição de círculo, acreditamos que houve avanço no conceito trabalhado. Para a versão final do trabalho não modificamos essencialmente essa etapa.

Parte 3 - Equação do círculo

Análoga à parte 1 da atividade 2. Pedimos aos alunos construírem um círculo e observar sua equação na Janela de Álgebra. Com os movimentos permitidos pelo GeoGebra, orientamos a fazer modificações no raio, nas coordenadas do centro e perceber o que ocorria com a equação. Esta etapa tem por objetivo reconhecer os parâmetros presentes na equação do círculo. O termo independente da equação foi o primeiro a ser descoberto. Muito rapidamente associaram ao raio, embora não perceberam a relação indireta, pois usando raio $r = 1$ o aluno poderia pensar que o parâmetro era o próprio raio e usando raio $r = 2$ poderia pensar em diâmetro. Neste caso, instruímos a usar outros raios de preferência com coordenadas inteiras e a confusão se desfez. Já a associação das coordenadas do centro não foi tão rápida. Orientamos, então o aluno observar as coordenadas do centro na Janela de Álgebra e observar os dois primeiros parâmetros. A dica foi bastante válida, todavia a relação do sinal não ficou tão evidente. Resolvemos tornar a atividade mais minuciosa, deixando bastante claro as alterações do sinal de cada parâmetro e qual a relação deles com as coordenadas do centro e a medida do raio.

Ao final desta etapa, dezesseis duplas concluíram devidamente a relação de todos os coeficientes, três duplas não se expressaram com clareza, duas duplas confundiram-se apenas ao pensar no diâmetro ao invés de r^2, uma dupla acertou apenas a relação de r^2, outra dupla não conseguiu apenas esta relação e uma dupla não realizou esta etapa da atividade.

Parte 4 - Explorando a equação do círculo

Tinha por objetivo exaltar a importância de conhecermos a equação de um círculo e algumas condições necessárias e suficientes para obter a equação de um círculo e seu gráfico. Pedimos aos alunos para obter um círculo usando a ferramenta Circulo definido por Três Pontos e analisar se apenas visualizando seu gráfico era possível determinar as coordenadas do centro. A princípio eles entenderam que sim, pois conseguiam posições específicas em que enxergavam o centro, por exemplo, se dois dos pontos formasse um diâmetro. Mostramos que esse seria um caso particular, mas a resposta deveria ser em qualquer caso. Lembramos o que tínhamos acabado de analisar: a equação e assim perceberam, de modo geral, que bastava observar a Janela de Álgebra e verificar os parâmetros citados na etapa anterior.

A partir do círculo determinado por três de seus pontos dezesseis duplas disseram obter as coordenadas do centro e a medida do raio a partir da equação, duas duplas usaram a ferramenta do GeoGebra Ponto Médio ou Centro, quatro duplas não conseguiram determinar as informações pedidas e duas duplas deixaram a pergunta em branco. Perguntamos a seguir, se por três pontos passa um único círculo. Dezessete duplas alegaram que sim, quatro duplas discordaram e as demais não responderam à pergunta. Questionamos ainda, se havia situação em que três pontos não definiriam um círculo. Doze duplas afirmaram que a condição é ter três pontos alinhados, quatro duplas disseram que é ter dois pontos coincidentes, sete duplas não conseguiram obter uma posição em que os três pontos não definissem um círculo e uma dupla deixou esta pergunta em branco.

Acreditamos, pelas análises feitas, que esta etapa da atividade deveria ser inserida como uma tarefa complementar e priorizar outros aspectos do círculo durantes as aulas.

Parte 5 - Exercícios

Colocamos alguns exercícios, mas em número excessivo. Os alunos apenas conseguiram resolver a questão 143 do ENEM 2013. Chamou atenção dos alunos, pois eles haviam participado deste exame há pouquíssimo tempo e tiveram oportunidade de analisar a questão profundamente, agora entendendo o que significava a equação da circunferência. Catorze duplas conseguiram resolver a questão, duas duplas erraram e as demais deixaram em branco. O segundo exercício apenas três duplas tentaram resolver, mas não conseguiram concluí-lo, os demais deixaram em branco. O terceiro exercício apenas duas duas duplas tentaram resolvê-lo, os demais deixaram em branco. Os demais exercícios foram todos deixados em branco. Na versão final da nossa proposta selecionamos apenas quatro exercícios e um foi indicado como desafio, pela sua complexidade, inseridos na parte 3 da atividade 1 do capítulo 3.

4.2.1.1 Relatório do 1° dia

Recomendamos aos estudantes responder o relatório em casa e devolvê-lo na aula seguinte. Instruímos aos alunos que o relatório era individual, embora as atividades tivessem sido feitas em dupla e que procurassem responder só com os conhecimentos abordados em sala de aula. Responderam ao relatório trinta e nove alunos.

1. O que aprendeste na aula do dia "tal"?

Em ordem decrescente de frequência, foram citados: aprender a manipular o GeoGebra vinte e oito vezes, a equação do círculo vinte vezes, circunferência doze vezes, círculo quatro vezes, diferença entre círculo e circunferência quatro vezes, definição de círculo duas vezes, fazer gráficos duas vezes e retas duas vezes.

2. Podemos obter a equação de uma circunferência conhecido apenas seu centro? Justifique.

3. Podemos obter a equação de uma circunferência conhecido apenas seu raio? Justifique.

4. O que temos que conhecer no mínimo da circunferência para estabelecer sua equação?

5. Há outras possibilidades? Cite-as.

Apenas um aluno deixou estas perguntas em branco. Entre os demais todos afirmaram que o centro era insuficiente para ter a equação da circunferência. Aproximadamente 26% dos alunos responderam que apenas com o raio é possível obter a equação da circunferência. Embora rigorosamente o raio seja um segmento de reta que liga o centro a um dos pontos do círculo e com ele sim, poderíamos obter a equação de um círculo. Pelos questionários aplicados na pesquisa prévia, os alunos concebem raio como apenas um número, neste sentido se equivocaram nas respostas. Os argumentos foram variados, tomamos a seguinte frase como exemplo: "Sim, pois o diâmetro é $2r$, assim obtém-se a equação." Quase 77% dos alunos responderam que o mínimo que se deve conhecer da circunferência é o seu centro e seu raio. Poucos citaram outras maneiras possíveis de obter a equação da circunferência. Aproximadamente 31% dos alunos responderam que não há outras possibilidades e quase 18% deixaram a resposta em branco. Citaram centro e ponto aproximadamente 13%, três pontos cerca de 15%. Cerca de 28% dos alunos deram respostas absurdas, como, por exemplo, triângulo retângulo. Talvez, neste caso, quisessem dizer três pontos ao invés de triângulo retângulo. As porcentagens ultrapassam 100%, pois alguns alunos citaram mais de uma possibilidade. Uma resposta nos chamou atenção, o que poderia explicar a porcentagem de alunos que disseram que a única maneira de obter a equação do círculo é através do centro e raio do mesmo: “Para estabelecer sua equação não, mas para formarmos uma circunferência sim, onde ainda podemos formá-la por três ou mais pontos.” Há necessidade de alertar os alunos que é possível obter a equação de um círculo conhecidos três de seus pontos algebricamente.

6. De modo geral como é a equação de um círculo conhecidos o centro $C(x_c, y_c)$ e a medida do raio r?

Cerca de 75% dos alunos responderam corretamente, aproximadamente 13% erraram, embora alguns responderam parcialmente, 7% deixaram a resposta em branco e 5% disseram não lembrar ou não saber. Não sabemos realmente se os alunos fizeram algum tipo de consulta, mas o objetivo da pergunta foi atingido. Independente se o aluno consultou ou não, fez o registro e reviu a equação do círculo, necessária para a continuação do trabalho.

7. As instruções e perguntas das atividades de aula foram claras?
( ) Sim ( ) Não
8. Precisaste chamar o professor:
( ) Nenhuma vez ( ) Poucas vezes ( ) Muitas vezes
9. Conseguistes fazer todas as atividades durante a aula?
( ) Sim ( ) Não
10. Tiveste alguma dificuldade para fazer as atividades? Quais?

As perguntas de 7 a 12[1], são fundamentais para a avaliação da atividade e embasar as modificações necessárias para melhorar os resultados atingidos. Elas foram replicados em todos os relatórios. Aproximadamente 82% dos alunos disseram que as perguntas foram claras. Esperávamos um percentual menor, pois alguns questionamentos eram vagos propositalmente para não induzir as respostas, ou para não fornecer as respostas de partes anteriores. Acreditamos que pelo relatório ser identificado, os alunos tiveram a tendência de responder sim. De qualquer forma, separando as atividades em etapas e entregando-as separadamente, como propomos no capítulo 3 pudemos deixar as perguntas mais claras. Detalhamos mais as perguntas e inserimos mais alternativas nas respostas, quando possível.

Já comentamos que este tipo de aula requer muito mais de professores e alunos. A pergunta 8 foi apenas para registrar este fato. Fomos requisitados a todo momento e o cansaço ao final da aula é muito maior em comparação a uma aula expositiva. Na percepção dos alunos, 56% responderam precisar do professor poucas vezes e 31% muitas vezes. As respostas podem ter sido tendenciosas, apenas analisando a pergunta 9 tivemos

[1] As questões 11 e 12 são analisadas na próxima página.

certeza, pois constatamos que ninguém conseguiu fazer todas as atividades, mesmo assim, 28% dos alunos alegaram ter feito todas as questões.

A questão 10 exigiu maior atenção, pois está vinculada diretamente as modificações necessárias para melhorar nossa proposta. Cerca de 38% dos alunos responderam não terem tido dificuldades, cerca de 13% alegaram ter tido dificuldades por não terem estudado o assunto no Ensino Fundamental, outros 13% alegaram a falta de tempo, 10% dos alunos responderam que tiveram pouca dificuldade e com o mesmo percentual responderem ter tido dificuldade nos exercícios. Ainda 8% responderam não ter tido dificuldade por causa das intervenções da professora. As demais respostas foram deixadas em branco. Dentre as respostas, uma cabe registrar. Sobre o *software*: "Apesar do GeoGebra ser novo para mim, ele é bem simples de mexer."

11. Qual tua opinião sobre as atividades realizadas em aula? Conseguiste deduzir conceitos que não sabias antes?

12. Tens alguma sugestão ou crítica?

A opinião dos alunos na maioria foi positiva. Apenas 13% não opinou. Os argumentos dos alunos ficaram em torno das atividades serem fáceis, dinâmicas, interessantes, produtivas, divertidas, ou simplesmente boas. Transcreveremos algumas frases dos alunos, pois acreditamos servirem de incentivo ao professor implementar nossa proposta:

- "Foi um jeito inovador para se passar uma matéria nova para a turma."
- "Achei interessantes, pois tivemos a nossa disposição o GeoGebra, cujo foi um recurso facilitador e esclarecedor de dúvidas."
- "Minha opinião é de que estas atividades estimulam o pensamento e o raciocínio."
- "Sim, nos fez deduzir a fórmula de uma forma descontraída, sem o prof falar e nós decorarmos."
- "Acredito que todas as atividades foram de grande proveito, pois com elas conseguimos usar a lógica para resolver os problemas."
- "Sim, foi possível desenvolver novos conhecimentos, mesmo com essa forma diferente."

Notamos que a última frase foi dita por um aluno bastante arraigado ao modo tradicional de dar aulas. Alguns alunos ainda citaram o fato de mesmo as atividades serem interessantes, foram mais complicadas. Acreditamos neste ponto de vista, especialmente do aluno, pois geralmente não são exigidos nas aulas em que sua função é apenas ouvir.

Muitos alunos não quiseram fazer sugestões. As respostas dos que opinaram foram valiosas. Foi frequente a questão do falta de tempo e clareza das instruções. Como já argumentamos anteriormente, as atividades foram reformuladas especificamente pensando nesses dois itens. Alguns alunos sugeriram fazer esse tipo de aula outras vezes e um até escreveu que deveria ser feito desde o primeiro ano do Ensino Médio.

13. Exercício: Apenas com o que viste em aula usando um sistema cartesiano ortogonal, generalizando o problema. Demonstre: Se uma corda AB é perpendicular a um diâmetro CD de um círculo, o ponto M, de intersecção entre a corda e o diâmetro é ponto médio da corda AB.

14. Exercício no GeoGebra: Digite na barra de Entrada do GeoGebra a equação $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 13 = 0$. Procure não dividir a equação.

    a) Gráfico de qual curva?

    b) Quais são as coordenadas do centro e a medida do raio?

    c) Consegues relacionar os coeficientes de x e y e o termo independente com o centro e o raio?

Pela dificuldade dos alunos em demonstração, alteramos o exercício 13 colocando maiores informações e dicas, inserindo-o na lista de exercícios. Nenhum aluno conseguiu demonstrar o exercício 13, dos quais dezesseis alunos deixaram a resposta em branco. As tentativas de resolver o problema foram esboçar uma figura que retratasse as condições do problema. Vinte e dois alunos apenas esboçaram uma figura, dos quais nove desenharam a "corda" AB fora do círculo. Um aluno, além da figura, tentou argumentar com palavras, mas só repetiu o enunciado do problema.

O exercício 14 era uma prévia para fazer a ligação com a atividade do 2º dia. Em relação a este exercício, apenas oito alunos deixaram a questão em branco, seis deram respostas absurdas. Os demais chegaram ao centro e raio do círculo, pois o GeoGebra transforma a equação geral na reduzida automaticamente, assim as respostas do item c) foram relacionadas à equação reduzida. Apenas um aluno atribui à resposta os coeficientes da equação geral, argumentando corretamente.

Formatamos estes relatórios para melhor concluir a validade das atividades, por isso não recomendamos a implementação dos mesmos. Ao invés desse relatório o professor deve fazer o fechamento das atividades, como já sugerimos no capítulo 1. Para o fechamento do primeiro dia da atividade fizemos um vídeo[2] abrangendo o que era esperado concluir durante a aula. O vídeo ficou longo, quase trinta minutos e assim, até mesmo

[2] $http://www.youtube.com/watch?v=fzOCsdiFj7s$.

pela questão do tempo, pelas provas estarem próximas, optamos nas demais atividades por disponibilizar uma espécie de gabarito das atividades feitas em aula no *site* da turma.

4.2.2 Atividade do 2º dia

Vinte e uma duplas compareceram às aulas da atividade do 2º dia.

Parte 1 - Explorar o GeoGebra e suas funções principais

Começamos cada dia com a execução de alguns comandos do GeoGebra, aqueles que iríamos necessitar no decorrer das demais atividades. Aqueles alunos que já se sentiam à vontade com o *software* poderiam pular essa parte. Essa introdução era mais voltada aos alunos que faltaram no primeiro dia.

Parte 2 - Equação Geral do Círculo

Iniciamos recapitulando a equação reduzida do círculo, dois exemplos foram sugeridos. Em seguida, pedimos para os alunos desenvolverem os quadrados das equações e ordenar os termos resultantes como na equação geral completa do 2º grau a duas variáveis, à semelhança da atividade 2 parte 1, inserida no capítulo 3. Todos os alunos chegaram a equação geral sem problemas. Após essa breve manipulação da equação geral do círculo, só com exemplos concretos cerca de 52% das duplas não souberam relacionar os coeficientes. Isto era esperado, pois só manipularam coeficientes numéricos. Cerca de 19% das duplas responderam $A = C = 1$, $B = 0$, $D = -2x_c$, $E = -2y_c$ e $F = x_c^2 + y_c^2 - r^2$, as demais duplas responderam coerentemente, porém faltando a relação entre A e C, ou faltando F, ou ainda com algum sinal trocado. Alertamos que não necessariamente $A = C = 1$, como no caso do segundo exemplo, cujos coeficientes ficaram fracionários, para evitar isso multiplicamos a equação por um número conveniente e assim $A = C \neq 1$.

A sequência da atividade foi semelhante à atividade 3 parte 1 do capítulo 3, com a intenção de os alunos interpretarem a equação geral de segundo grau completa a duas variáveis e observar que esta pode gerar diversos tipos de curvas conforme seus coeficientes, inclusive degenerações do círculo como o conjunto vazio e o ponto. Erramos ao colocar esta atividade antes da análise dos coeficientes da equação geral do círculo. Aos alunos pareceu realmente deslocada, por isso resolvemos fragmentar e desconectar estas atividades na versão final disponível no capítulo 3. A análise da equação geral do círculo ficou numa etapa e a análise da equação completa de 2º grau a duas variáveis em outra. Como implementamos a atividade em três turmas e tivemos esta dificuldade com a primeira, recomendamos à segunda turma alterar a sequência do trabalho, sem alterar o material que já estava impresso. Com isso já notamos um avanço no entendimento e no número de itens realizados. Na terceira turma, cuja aula era ministrada em dia posterior tivemos tempo de reconfigurar o material e os resultados foram melhores ainda.

Na análise da equação completa, os alunos, em geral, ficaram intrigados como a mesma estrutura de equação poderia gerar tantas curvas diferentes. Apenas no conjunto vazio recorreram mais à professora, pois os alunos pensaram que era erro do programa ou de digitação, pois não conseguiam encontrar o "gráfico". Precisamos instruir que na Janela de Álgebra, o GeoGebra, mesmo não fazendo o gráfico, identificava a curva, ou no caso o conjunto vazio. Com o decorrer da atividade os alunos perceberam que as condições $A = C$ e $B = 0$ eram necessárias, mas não suficientes justamente pelos casos em que a equação gerava o conjunto vazio e o ponto. Assim, faltou descobrir a condição suficiente para a equação geral completa do 2º grau a duas variáveis representar um círculo, por isso inserimos na versão final deste trabalho a análise das condições necessárias e suficientes de maneira detalhada e com um tempo adequado.

No item que os alunos deveriam responder qual condição os coeficientes A, B e C devem satisfazer para a equação representar um círculo cerca de 28% das duplas deixaram a resposta em branco, embora tenham respondido a parte anterior sobre a identificação das curvas. Cerca 57% das duplas responderam $A = C$ e $B = 0$, pois, no caso de B, não teria como um termo destes aparecer desenvolvendo os quadrados da equação reduzida, já que os quadrados para a variável x e y são "separados". Cerca de 5% das duplas respondeu apenas $A = C$ e 10% aproximadamente ainda complementaram com o fato de $A = C \neq 0$, incluindo a condição $B = 0$.

Já esperávamos que com exemplos específicos dificilmente os estudantes iriam associar todos os coeficientes da equação geral do círculo, por isso propusemos o desenvolvimento da equação reduzida tomada genericamente, de modo análogo à parte 2 da atividade 2 sugerida no capítulo 3. Com o simples desenvolvimento da equação reduzida do círculo os alunos puderam observar a relação dos coeficientes A, B, C, D, E e F da equação geral do círculo com as coordenadas do centro do círculo e a medida do seu raio. Com isso eles puderam resolver exercícios de reestabelecer o centro e o raio do círculo a partir da equação geral do mesmo. Nem todos tiveram sucesso nesta parte da atividade. Cerca de dois terços das duplas chegaram na relação desejada, cerca de 23% deram respostas incoerentes e cerca de $9,5\%$ deixou estes itens em branco. Cabe ressaltar que as duplas que não fizeram estes itens pertenciam à primeira turma a qual implementamos a atividade. Consideramos o percentual de sucesso alto, pois chegaram à conclusão sozinhos, embora os alunos tenham perguntado com frequência qual era o formato da resposta, se poderiam responder apenas com palavras, ou com igualdades. Observamos que poderíamos detalhar e facilitar o trabalho do aluno simplesmente inserindo um espaço para relacionar cada coeficiente, como a versão proposta neste trabalho e não apenas responder a uma pergunta geral, como fizemos na implementação em sala de aula. Como os resultados da questão anterior relacionavam-se a $A = C = 1$ perguntamos em seguida se o aluno poderia proceder da mesma maneira se $A = C \neq 1$. Ressaltamos a possibilidade de, independente dos valores de A e de C que o aluno antes de comparar os coeficientes, dividir a equação por um número conveniente. Analisamos o restabelecimento do centro e medida do raio de uma equação geral do círculo em que $A = C = 3$. Cerca de 43% dos alunos obtiveram êxito, um terço das duplas falharam, algumas pela análise do sinal das coordenadas do centro e 24% não fizeram o exercício.

Parte 3 - Completar quadrados

Inserimos o método de completar quadrados para transformar a equação geral do círculo na equação reduzida. Tínhamos a questão do tempo e optamos por priorizar o método de comparação para o aluno reestabelecer o centro e a medida do raio do círculo, por isso colocamos esta parte no fim da atividade. Este exercício é análogo à atividade 4 do capítulo 3. Das vinte e uma duplas que compareceram a aula seis conseguiram realizar os primeiros passos, aqueles que dependiam única e exclusivamente dos produtos notáveis e quatro duplas conseguiram efetivamente completar quadrados. Observamos, por isso, que o empecilho do sucesso desta parte da atividade foi a questão do tempo, pois as duplas que conseguiram chegar aos itens referentes a completar quadrados conseguiram transformar a equação geral na equação reduzida do círculo, mostrando que a atividade foi acessível. Cabe ainda notar que nenhum dos alunos nos chamou a fim de esclarecer dúvidas em relação a completar quadrados.

Parte 4 - Posição relativa entre ponto e círculo

Análoga à atividade 5 parte 1. Julgamos que a maioria dos alunos não conseguiriam realizar esta etapa da atividade por falta de tempo. Já tínhamos preparado a atividade do terceiro dia replicando-a. Apenas uma dupla conseguiu neste dia concluir a atividade, respondendo-a com exatidão. Cabe salientar que sempre preparamos mais atividades do que comportaria o tempo de aula, pois os alunos têm ritmos diferentes. Evitamos com isso que alguns fiquem ociosos por terem terminado todas as tarefas.

4.2.2.1 Relatório do dia 2

Além de avaliar a efetividade das atividades os relatórios também tinham como objetivo o aluno fixar os conhecimentos vistos em aula, registrar conclusões importantes e prepará-los para a atividade da aula seguinte. Repetimos algumas perguntas, especialmente aquelas sobre a qualidade das atividades. Responderam ao relatório 38 alunos.

2. Faça um resumo dos conteúdos trabalhados nessa aula.

A questão 1 é idêntica ao relatório 1. Esta e a pergunta 2 tinham o objetivo de levar o aluno a pensar sobre o que foi visto na aula anterior. Os alunos tiveram a tendência de responder às duas perguntas com respostas semelhantes. Quase 90% das respostas referenciaram o conteúdo trabalhado. Em oposição ao relatório do dia 1 em que o foco principal para os alunos era o GeoGebra. Neste relatório o GeoGebra só foi citado em 10% das respostas. O GeoGebra em algumas partes da atividade foi apenas coadjuvante das performances desejadas, pois serviu para conferência de resultados. Na etapa da atividade em que informamos várias equações completas do 2º grau a duas variáveis para o estudante concluir quais condições são necessárias para esta representar um círculo o uso do GeoGebra foi fundamental, pois o programa identificou o traçado de cada curva e a partir desta observação o aluno pode concluir que mesmo que $A = C \neq 0$ e $B = 0$ a equação pode não representar um círculo.

3. Se pensarmos nas duas formas para determinar as coordenadas do centro e a medida do raio do círculo a partir da equação geral da circunferência: relação com os coeficientes A, B, C, D, E e F; completamento de quadrado. Qual preferes? Por quê?

4. O critério para determinar a posição relativa entre ponto e circunferência é comparar a distância entre o ponto P e o centro C do círculo com a medida do seu raio r. Pensaste em algo diferente para determinar essa posição relativa em aula? E agora, consegues pensar em um modo alternativo? Em caso afirmativo, descreva.

Como a maioria dos estudantes não conseguiu atingir a parte do completar quadrados e a posição relativa entre ponto e círculo instruímos os alunos a deixar estas questões em branco. Apesar disso, apenas 5% dos discentes deixaram a questão 3 em branco e 13% a questão 4 em branco. Se os alunos tivessem realizado ambos os métodos esta análise seria de grande valia, pois confronta dois aspectos: o aluno prefere decorar fórmulas ou não ter que memorizá-las? Infelizmente, não temos essa resposta.

5. O que mais te ajudou a chegar às conclusões pedidas?
   ( ) Seguir o roteiro foi suficiente.
   ( ) Chamei a professora.
   ( ) O colega da dupla ajudou.
   ( ) GeoGebra.
   ( ) Outro. Descreva.

Resolvemos inserir esta pergunta para melhor diagnosticar a eficiência das atividades implementadas. Sob o ponto de vista de 58% dos alunos, a professora foi o fator mais relevante. Isso ratifica a importância do nosso papel, exercendo essa nova função de orientadores do aprendizado e não somente transmissores da informação. Cerca de 18% dos alunos responderam que os fatores mais relevantes foram a intervenção da professora juntamente com o colega de dupla, que evidencia a importância agora do trabalho em grupo. Cerca de 18% dos discentes alegaram que o roteiro foi suficiente para chegar às conclusões pedidas e 6% ressaltaram apenas o colega de dupla como chave para a compreensão das conclusões pedidas. Não foi citada qualquer outra influência.

As perguntas 6, 7 e 8 são idênticas às 7, 8 e 9 do relatório 1. O percentual de alunos que responderam ser claras as perguntas das atividades aumentou em relação ao relatório 1. O percentual chegou a 90%. Compreendemos que a diferença é pequena, mas acreditamos que foi devido à adaptação dos alunos ao estilo de aula. A percepção dos estudantes em relação a necessidade de recorrer ao professor mudou substancialmente. Houve quase empate em relação ao discente precisar poucas ou muitas vezes do professor, $44,7\%$ e $47,4\%$ respectivamente. As respostas em relação à conclusão das tarefas foi coerente desta vez, apenas dois alunos responderam "sim" sem realmente o terem feito.

As perguntas 9 e 10 deste relatório são idênticas às perguntas 10 e 11 do relatório anterior. As perguntas 11 e 12 foram obtidas separando a pergunta 12 do relatório 1, pois os estudantes têm a tendência de responder neste caso a apenas uma das perguntas. As dificuldades alegadas na execução das atividades giraram em torno dos mesmos itens: interpretação, tempo, falta de conhecimentos do Ensino Fundamental são as mais citadas. Aproximadamente 29% disseram não ter tido dificuldade e 13% alegaram ter dificuldades, mas esclarecidas pela professora ou colega de dupla. A única dificuldade que não consta no relatório anterior foi a relação conturbada com o colega de dupla, embora a escolha das duplas tenha sido livre. Uma frase contextualiza a nossa crença em relação ao ponto de vista do aluno em relação a esta metodologia de ensino: "Não tive dificuldade, apenas foi difícil chegar às conclusões sem ter tudo de mão beijada."

A opinião dos alunos quanto à atividade também foi bastante semelhante ao relatório anterior, como já dissemos: interessantes, importantes, boas ou ótimas, produtivas, dinâmicas, esclarecedoras, úteis, entre outras. Alguns alunos escreveram que esta atividade estava mais fácil ou melhor que a anterior, também acreditamos que seja pela adaptação do aluno ao sistema adotado. Para citar opiniões não tão boas: difíceis, maçantes, pouco flexível e "mais ou menos". Um aluno alegou não possuir opinião. Transcreveremos algumas frases bastante interessantes e vão ao encontro dos objetivos da nossa proposta:

- "As atividades realizadas em aula foram boas, pois estamos aprendendo o conteúdo de um modo alternativo."
- "Interessantes pelo fato das tentativas e erros no GeoGebra o que ajuda na compreensão do conteúdo."
- "Difícil, mas no fim faz sentido."
- "Acredito que em termos de didática seja bom, porque não ficamos apenas reproduzindo o que entendemos sem entender de onde parte."
- "Muito legais, pois com a prática e o computador do lado as coisas se tornam mais claras."

- "As atividades me proporcionaram um melhor entendimento da matéria de maneira mais dinâmica e fácil de compreender. Achei também um ótimo método de introduzir o GeoGebra no dia-a-dia do aluno, o auxiliando na matéria."

Chamou-nos atenção em relação à pergunta 11, foi o percentual de alunos que alegaram nada de novo ter aprendido, cerca de 26%. Talvez por continuarmos o assunto sobre círculos. Em relação às sugestões ou críticas nada diferente ao relatório anterior. Destacamos duas frases, respostas desse item, por pontos de vista totalmente distintos:

- "Não tenho sugestões, pois acho que a metodologia usada pela professora satisfaz às expectativas e ensina com eficiência a matéria."
- "Acho que conseguiria aprender melhor com a aula dada pela professora do que fazendo as atividades desse gênero, pois gravo melhor as matérias com as interpretações da professora sobre a matemática."

Podemos perceber que a última colocação é de um aluno acostumado ao sistema de aulas expositivas em que os estudantes se atêm a reproduzir resultados.

13. Considere a equação geral da circunferência $Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$.

    a) Crie um exemplo de equação em que $D = 0$. Digite a equação no GeoGebra. Esse círculo gerado tem alguma característica geométrica peculiar? Tente distinguir do caso em que $D \neq 0$.

    b) Crie um exemplo de equação em que $E = 0$. Digite a equação no GeoGebra. Esse círculo gerado tem alguma característica geométrica peculiar? Tente distinguir do caso em que $E \neq 0$.

    c) Crie um exemplo de equação em que $F = 0$. Digite a equação no GeoGebra. Esse círculo gerado tem alguma característica geométrica peculiar? Tente distinguir do caso em que $F \neq 0$.

    d) Se não conseguires responder ao itens anteriores, crie vários outros exemplos nas condições citadas.

A questão 13 tinha o objetivo que complementar a atividade de sala de aula. A conclusão esperada era os alunos reconhecerem as circunferências, cujo centro pertencesse ao eixo y, caso $D = 0$; ao eixo x, caso $E = 0$ e contivesse a origem, caso $F = 0$. Apenas 13% perceberam as três relações, 8% perceberam a relação relativa aos coeficientes D e E e outros 8% perceberam a relação do coeficiente F. Acreditamos que os alunos que não observaram as propriedades desejadas, basearam-se em um pequeno número de observações, ou seja, acreditamos que tentaram observar apenas o resultado de uma equação e não seguiram a sugestão do item d).

14. Exercício: Um avião militar está aproximando-se de uma região inimiga. O radar mostra a aproximação perigosa de três aviões. Considere que o avião é centro da circunferência $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 5 = 0$, imagine o radar como o plano cartesiano ortogonal. O raio da circunferência é a distância mínima necessária para os mísseis teleguiados serem capazes de atingir um alvo, em qualquer direção que estejam em relação a trajetória do avião. Os aviões inimigos estão localizados no radar como os pontos $A(7, 4)$, $B(1, -1)$ e $C(6, -1)$. Qual avião apresenta maior perigo? Justifique sua resposta com base na posição relativa entre ponto e circunferência.

15. Exercício: (UFRGS-2010) A equação $x^2 + y^2 + 4x - 6y + m = 0$ representa um círculo se e somente se:
( ) $m > 0$ ( ) $m < 0$ ( ) $m > 13$ ( ) $m > -13$ ( ) $m < 13$
Apresente o desenvolvimento.

16. Exercício: Dê uma interpretação geométrica dos sistemas genéricos abaixo. Não resolva, só responda e descreva as possibilidades.

$$\begin{cases} (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2 \\ ax + by + c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (x - x_{c1})^2 + (y - y_{c1})^2 = r_1^2 \\ (x - x_{c2})^2 + (y - y_{c2})^2 = r_2^2 \end{cases}$$

O exercício 14 era relativo a posição entre ponto e círculo e, por isso, não precisava ser feito. Mesmo assim, metade dos alunos resolveram o exercício e um quarto acertou a questão. Os exercícios 15 e 16 tiveram maior índice de abstenção: aproximadamente 55% e 84%, respectivamente. O número de soluções adequadas foi baixo: 18% e 3%, respectivamente.

4.2.3 Atividade do 3º dia

Ao implementar esta atividade julgamos que os discentes não teriam tempo suficiente para completá-la. Ao mesmo tempo, temos o entendimento da importância da compreensão das posições relativas do círculo e não queríamos deixar nenhuma análise de lado. Optamos por fazer uma orientação conjunta, mudando a dinâmica da aula em relação às duas aulas anteriores. Em vez de criar um espaço de discussão em duplas, resolvemos implantar uma discussão com todo o grupo, ficando cada dupla responsável por preencher as lacunas do material e resolvendo os exercícios propostos. Sabemos que, por isso, a maioria das duplas simplesmente anotou o que outros alunos argumentaram. As respostas foram praticamente padronizadas, portanto não analisamos o que os alunos responderam em relação ao percentual de sucesso e de realização da tarefa. Relatamos apenas o andamento da atividade e o relatório deste dia. Esta aula foi parecida com a ministrada nas turmas controle, a diferença maior é que as turmas controle não tinham o material impresso.

Parte 1 - Posição relativa entre ponto e círculo

Análoga à parte 1 da atividade 5 do capítulo 3. As turmas de Fabricação Mecânica e Geoprocessamento precisaram resolver a atividade completa para a maioria entender as condições para descobrir a posição relativa entre ponto e círculo. Já a turma de Informática para a *Internet* chegou à conclusão pedida apenas relacionando a condição de um ponto pertencer ao círculo. Obtiveram de maneira bastante intuitiva a relação da distância entre o ponto e o centro do círculo em comparação com o raio do mesmo, apenas visualizando o círculo com seu centro e o segmento que liga o mesmo ao ponto. Como resolvemos separar tudo o que foi implementado em atividades menores, complementamos esta atividade inserindo um quadro com os critérios analisados e a melhor ordem dos procedimentos a executar para determinar a posição relativa de um ponto em relação a um círculo. Inserimos também exercícios com temas relacionados ao interesse dos alunos, os quais não constavam na versão original implementada aos alunos.

Parte 2 - Posição relativa entre reta e círculo

Análoga à atividade 6, partes 1 e 2 do capítulo 3. Os alunos não tiveram dificuldades e compreenderam as posições relativas possíveis entre reta e círculo. Eles compreenderam que a solução do sistema com as equações do círculo e da reta, ou melhor, o número de soluções do sistema está relacionado com a posição relativa analisada, pois no bimestre anterior, trabalhamos com os sistemas de equações e a interpretação geométrica. Da mesma forma, concluíram que a distância entre o centro do círculo à reta, comparando-a com o raio é outra forma de determinar a posição relativa. Os estudantes comentaram o fato de que para determinar a posição relativa entre ponto e círculo usamos uma distância, assim como para determinar a posição relativa entre reta e círculo. Isso levou os discentes a questionar se o critério para determinar a posição relativa entre dois círculos também dependeria de alguma distância.

Parte 3 - Posição relativa entre dois círculos

Análoga à atividade 7, partes 1 e 4. Mostramos como sugerido a construção detalhada no capítulo 3 subseção 3.7.1, notamos que os alunos observaram a tela do projetor multimídia e não fizeram os movimentos nos seus computadores, embora chegaram à conclusão a contento. Nos anos anteriores, implementamos atividades semelhantes com os alunos e observamos a ordem que eles compreendiam a posição relativa entre círculos, deixando-os totalmente livres para fundamentá-las. Com pequenas variações os alunos entendiam os critérios das posições relativas na ordem proposta: círculos concêntricos, círculos exteriores, círculos tangentes (interiores ou exteriores), círculos interiores e por último, círculos secantes. A sequência das posições relativas adotada na proposta deste trabalho, foi montada pensando no grau de dificuldade percebido pelos estudantes. Notamos também, com as experiências de anos anteriores, que era preciso sugerir sempre a relação da distância entre os centros e a soma ou subtração dos raios do círculo. O que não ocorria com a posição relativa entre círculo e ponto e entre círculo e reta, nestes casos os alunos chegavam à conclusão pensando nas distâncias de uma maneira natural. Desta forma, concebemos a construção sugerida no GeoGebra, inserindo a sugestão, todavia deixando a cargo do aluno todas as comparações necessárias. Observamos que embora a análise dos círculos secantes fossem sempre deixados por último, a comparação com a soma dos raios e com a subtração dos raios, isto é, com esses dois valores, pareceu natural. Ou seja, com a utilização da construção pronta foi mais delicado os alunos compreenderem que se a distância entre os centros dos círculos, por exemplo, fosse maior que a soma dos raios, não precisaríamos verificar que também era maior que a subtração dos raios. Para resolver este impasse implementamos à atividade 7, a parte 2, a qual deixa bastante claro esta e outras relações.

4.2.3.1 Relatório do dia 3

Responderam ao relatório trinta e seis alunos. Não analisaremos tão detalhadamente este relatório, já que o andamento da aula foi conduzido de outra forma em relação às aulas anteriores. Algumas perguntas não teriam sentido, como, por exemplo, a questão que analisa o fator facilitador preponderante para o aluno chegar às conclusões necessárias, já que as decisões foram tomadas coletivamente.

A primeira pergunta, idêntica a dos outros relatórios, não apresentou novidades. Cabe salientar a dificuldade dos alunos expressarem ideias matemáticas ou aprofundar a resposta. Alguns citaram o assunto geral apenas: círculos.

Na segunda questão pedimos aos alunos preencherem quadros semelhantes aos propostos nas atividades 5, 6 e 7, resumindo os critérios adequados às posições relativas entre ponto e círculo, reta e círculo e entre dois círculos. Acreditamos ser uma forma dos alunos fazerem o fechamento do conteúdo e transcrevê-lo de uma maneira prática a fim de resolver problemas relacionados a eles. Alguns alunos confundiram-se apenas, em vez de preencher com os critérios, preencheram com a definição das posições relativas. Trinta e um alunos completaram o quadro adequadamente, representando aproximadamente 86% das respostas. Um aluno apenas deixou os quadros em branco e os demais confundiram-se com a definição, como já foi citado.

3. a) É possível traçar uma reta tangente ao círculo por um ponto interior a ele?
   ( ) Sim. Como?
   ( ) Não. Por quê?

   b) É possível traçar uma reta tangente ao círculo por um ponto do círculo?
   ( ) Sim. Quantas? Como?
   ( ) Não. Por quê?

   c) É possível traçar uma reta tangente ao círculo por um ponto exterior ao círculo?
   ( ) Sim. Quantas? Como?
   ( ) Não. Por quê?

Esta questão tinha o objetivo de complementar as atividades feitas em sala de aula, em aspectos que não teríamos tempo de fazê-lo. Deveríamos ter indicado o emprego do GeoGebra para esta questão explicitamente, pois o número de acertos foi bem abaixo do esperado. O maior número de acerto foi ao item a), com aproximadamente 44%. Os alunos que não acertaram na maioria, não justificaram coerentemente, por exemplo, responderam simplesmente com a palavra “interior”. Ao item b) o índice de acerto caiu a 22%. A maioria poderia ter evitado o erro se tivesse usado o GeoGebra, pois os que não justificaram adequadamente imaginaram que existiriam muitas retas tangentes ao círculo passando por um ponto do mesmo, como se o fato de o ângulo entre a reta e o segmento que liga o centro ao ponto em comum não precisasse ser de 90º. Já ao item c) apenas $5,5\%$, aproximadamente, deram respostas adequadas. Os demais alegaram que se o ponto é exterior ao círculo não há tangente, pois o ponto deve ser comum ao círculo. Outra vez o GeoGebra poderia ter ajudado nas conclusões deste item, pois possui uma ferramenta específica Reta Tangente.

As perguntas de 5 a 12 são idênticas as de mesmo número no relatório anterior. Não há sentido em analisá-las devido ao fato da aula ter sido conduzida de maneira distinta das anteriores. Apenas em relação às críticas houve comentários alusivos a essa alteração, pois a aula foi realmente corrida. Alguns comentários em relação ao próprio relatório: “A aula é maneira, mas os relatórios são chatos.”

13. Exercício: A bandeira da Turquia, esboçada na Figura 27 é composta de uma lua crescente e uma estrela num fundo vermelho. A lua crescente pode ser esboçada pela composição de duas circunferências. O GeoGebra é um programa em que isso pode ser feito desde que se saibam as equações das circunferências e assim a bandeira deve ser inserida no plano cartesiano ortogonal, fazendo com que a circunferência maior seja tangente ao eixo y, que a circunferência menor é tangente interna a maior e que os centros das circunferências estejam no eixo x, com abscissas positivas. Sabendo que o diâmetro da maior é 18 cm e o da menor é 14 cm, determine:

    a) as equações das duas circunferências.

    b) a área da "lua crescente".

14. Exercício: Na Figura 28, a reta s passa pelo ponto P e pelo centro da circunferência de raio R, interceptando-a no ponto Q, entre P e o centro. Além disso, a reta t passa por P, é tangente à circunferência e forma um ângulo α com a reta s. Se $PQ = 2R$, então qual o COEFICIENTE ANGULAR da reta t?

15. Exercício: No projeto de um parque de diversão o engenheiro quer colocar duas rodas gigantes de tamanhos diferentes uma próxima à outra. Ele as representou no plano cartesiano como circunferências de equação: $\Gamma_1 : (x-2)^2+(y-4)^2 = 5$ e $\Gamma_2 : (x-4,5)^2+(y-1,5)^2 = 1,69$. Há algum problema no projeto do parque quanto a essas rodas gigantes? Justifique sua resposta.

Figura 27 – Bandeira da Turquia

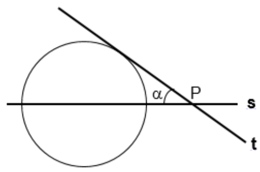


Figura 28 – Exercício 14

Estes execícios foram replicados na lista, pois esperamos uma dificuldade inicial por parte dos alunos. Muitas respostas ficaram em branco. Para as questões 13, 14 e 15 respectivamente: 55,5%, 61% e 47%. Este relatório deveria ser entregue no último dia de aula do ano letivo. Assim interpretamos essa abstenção de respostas ao cansaço dos estudantes e não a sua incapacidade. A questão 13 teve apenas 20% de acerto, apesar de ser bastante simples. Exigia do aluno basicamente enxergar os círculos no plano cartesiano. O discente não precisaria aplicar o critério dos círculos tangentes interiores, só visualizar essa posição na bandeira da Turquia. A questão 14 poderia ser resolvida apenas com trigonometria simples, no triângulo retângulo, um pouco de conhecimento de estudo da reta. Inserimos esta questão nas atividades do círculo, pois o aluno deveria saber que o segmento que une o centro do círculo ao ponto de tangência com a reta deve fazer um ângulo de 90º com ela. Apenas um sexto dos alunos acertaram esta questão. Dentre os três exercícios, o maior índice de acerto ocorreu no problema 15, mesmo assim apenas cerca de 28% dos discentes resolveram esta questão corretamente.

4.3 Análise geral dos resultados

O principal problema que nos defrontamos foi o questão do tempo. Embora soubéssemos que dificilmente os estudantes cumpririam todos os itens, pensávamos que as aulas de 120 minutos seriam suficientes para a realização de boa parte das atividades. O efeito foi contrário, tornou a execução das atividades exaustivas, principalmente no terceiro dia. Por isso, fizemos tantas subdivisões da proposta inicial, pensando também nas escolas com períodos de 45 a 50 minutos. Dessa forma, com as atividades fracionadas, o professor pode escolher as que forem mais convenientes, aplicando-as concomitantemente a outras metodologias de ensino/aprendizagem ou completando-as com exercícios e fechamento dos conteúdos.

Outro aspecto alterado foi o estilo das instruções. Pensamos em não detalhar inicialmente cada atividade para não fornecer em alguns itens as respostas dos anteriores. Percebemos que isso deixou os alunos um pouco desorientados e recorrendo muito ao professor, o contrário da nossa proposta. Resolvemos este problema, simplesmente indicando ao professor, entregar as partes de cada atividade separadamente, conforme as duplas finalizassem cada etapa. Resolvemos também tornar a versão final das atividades propostas mais longa em número de itens e subitens, inserindo um maior número de respostas com alternativas, mesmo que sejam apenas de sim ou não. As atividades, contudo, tornaram-se mais claras para ser executadas de forma autônoma e em menos tempo. Também diminuímos o número de exercícios mantendo os diversos níveis de dificuldade. Alguns itens do trabalho aplicado foram organizados num único parágrafo e muitas vezes os alunos perguntaram o que era para ser feito. Precisamos, na maioria das interseções, fazer uma leitura pausada por frase e isso bastava para o aluno conseguir executar o que se pedia.

As leis da Física nos esclarecem que um corpo tem a tendência de continuar no estado em que está. Se está em movimento continua em movimento. Se está estagnado tem a tendência de continuar em estagnação. É a Lei da Inércia, podemos relacionar o ensino essa lei. Se acostumamos nossos alunos a apenas receber informações, sem nada questionar, a energia necessária para tirá-los deste estado deve ser muito maior. Notamos que durante as atividades alguns alunos chamavam-nos porque alegavam não ter entendido as instruções e apenas ao lê-las os alunos compreendiam. Talvez seja por falta de clareza do texto, falta de vírgulas. Acreditamos ser os efeitos da Inércia. Haverá sempre a resistência de alguns. Notamos, com a análise dos relatórios o comentário de alguns terem dificuldades principalmente no primeiro contato com esse método, mas apenas dois alunos ressaltaram somente aspectos negativos da proposta. Transcrevemos duas frases retratando o paradigma do método tradicional:

- "Não consigo aprender, nesta aula, tanto quanto com as aulas normais."
- "Acredito estas atividades não sejam muito proveitosas, relacionando com o método habitual."

Esse pode ser um problema crucial para a execução da nossa proposta, os alunos saírem de sua inércia. Inércia muitas vezes impostas por nós, pois da mesma forma exige que saiamos também da mesmice de aulas expositivas. As teorias de Vygotsky discutidas por Rego falam sobre a transmissão de conteúdos, base das aulas expositivas:

> A escola deve ser capaz de desenvolver nos alunos capacidades intelectuais que lhes permitam assimilar plenamente os conhecimentos acumulados. Isto quer dizer que ela não deve se restringir à transmissão de conteúdos, mas, principalmente, ensinar o aluno a pensar, ensinar formas de acesso e apropriação do conhecimento elaborado, de modo que ele possa praticá-las autonomamente ao longo de sua vida, além de usa permanência na escola. (REGO, 2010, p. 108)

Nós, professores, temos o papel de usar a Lei da Inércia em nosso favor, mas relacionado ao movimento contínuo. Por outro lado, o aluno enfastiado de apenas ouvir o professor durante a aula achará a proposta difícil, mas interessante. Foi o que relataram os alunos quando propomos a avaliação das atividades.

Para comparar as turmas em que aplicamos a proposta deste trabalho e as turmas controle, devemos antes contextualizá-las. Já citamos que a turma do curso de Automação Industrial é tida como a de melhor rendimento acadêmico. Realmente, podemos notar que era a maior turma em que trabalhamos no 3º ano, com 28 alunos. Já a turma de Fabricação Mecânica possuía 11 alunos. Isto se deve ao fato dos alunos de Automação serem aprovados em maior número tanto do primeiro para o segundo ano, quanto do segundo para o terceiro ano. As médias das turmas em que aplicamos as atividades com o GeoGebra foram: 5,8 para a turma de Geoprocessamento; 5,9 para a turma de Fabricação Mecânica e 6,6 para a turma de Informática para *Internet*. Já as médias nas turmas controle foram 4,7 para a turma de Refrigeração e Climatização e 6,3 para a turma de Automação Industrial.

A primeira aula da semana era com a turma de Fabricação Mecânica, a segunda com a turma de Geoprocessamento, dadas no mesmo dia e por último na turma de Informática para *Internet*. Nos três dias da implementação das atividades tivemos a experiências com as primeiras turmas e pensávamos em adaptações que poderiam ser feitas para a turma de Informática. Atribuímos a essa adaptação o mérito por ser esta turma a única a melhorar a média em relação ao bimestre anterior. Notamos que o trabalho sempre se desenvolvia de uma maneira mais eficaz na turma de Informática. Percebemos também que na prova bimestral[3] desta turma, os alunos optaram em maior número, por resolver questões que envolviam círculos. Nas turmas controle, observamos o contrário, os alunos evitaram resolver questões que envolviam círculos. Outro fato a destacar é o decrescimento das notas no 4º bimestre em relação ao 3º. Como já citamos, a turma de Informática foi o único curso que aumentou sua média, todavia nas turmas controle a diferença entre as médias foi maior. No quadro 5 agrupamos as informações citadas e acrescentamos as médias das turmas dos mesmos cursos em 2012.

Quadro 5 – Alguns aspectos das turmas do 3º ano do IFRS - Campus Rio Grande

Curso	Média do 4º bimestre	Diferença da média em relação ao 3º bimestre	Números de alunos	Média do 4º bimestre de 2012
Informática para *Internet*	$6,6$	$+0,4$	22	$4,8$
Geoprocessamento	$5,8$	$-0,9$	16	$5,1$
Fabricação Mecânica	$5,9$	$-1,0$	11	
Automação Industrial	$6,3$	$-1,3$	28	$4,6$
Refrigeração	$4,7$	$-2,1$	15	$4,8$

Observamos que em 2012 o curso de Fabricação Mecânica não tinha turma de 3º ano. Com exceção da média do curso de Refrigeração e Climatização todas as notas melhoraram no ano de 2013. Embora a análise das notas seja interessante, não podemos chegar a conclusões extremas. Por exemplo, a média dos alunos de Automação Industrial em 2012 é idêntica a do curso de Refrigeração no mesmo ano, mas o perfil dos alunos é totalmente diferente. Boa parte dos estudantes do curso de Automação Industrial não precisavam de nota para a aprovação no 4º bimestre, o que não ocorreu com a turma de Refrigeração e Climatização.

Em relação à versão inicial, atividades com pleno sucesso foram replicadas, àquelas em que não atingimos os objetivos como esperávamos foram retiradas ou detalhadas.

[3] A prova bimestral possuía oito questões, com todo o conteúdo de Geometria Analítica e os alunos escolhiam resolver apenas quatro.

Todas as modificações feitas tiveram o objetivo de tornar as atividades mais claras, coerentes, facilitando ao máximo a tarefa do professor e dos alunos. Analisando o conjunto de dados, acreditamos que os resultados obtidos a partir da implementação da nossa proposta tem o potencial maior que o rendimento alcançado na turma de Informática. Podemos sustentar esta afirmação, pois se a versão inicial sofreu algumas adaptações para a turma de Informática e os resultados foram melhores nesta turma, com as modificações realizadas para o presente trabalho a compreensão dos estudantes em relação ao estudo do círculo pode melhorar ainda mais.

No próximo capítulo apresentamos algumas propostas para tornar o atual trabalho ainda melhor e outros trabalhos possíveis em consequência deste.

5 Possíveis continuações ou desdobramentos

Uma possível continuação do presente trabalho consiste em elaborar atividades similares em Geometria Analítica principalmente para o estudo de retas, em que o GeoGebra viabiliza o estudo de três tipos de equações, a saber: reduzida, geral e paramétrica. Notamos, porém, que o presente trabalho não está completo, pois o objetivo primeiro é oferecer subsídio ao professor que quer trabalhar com Geometria Analítica de maneira diferenciada. Precisamos inserir as atividades complementares para cada um dos tópicos visando outros aspectos não estudados, exercícios para fixar o conteúdo em que o aluno possa resolver utilizando o GeoGebra e apenas algebricamente, assim como atividades para o encerramento dos conteúdos. Por exemplo, poderíamos produzir vídeos e disponibilizar na internet.

O melhor desdobramento imaginado seria tornar as atividades citadas neste trabalho interativas, ou seja, que as instruções não dependessem de uma folha de papel e o aluno pudesse ler as instruções ao mesmo tempo em que as executa. Imaginamos usar recursos computacionais em que seja possível encaminhar as atividades direcionando-as conforme as respostas dos alunos. Por exemplo, na atividade 1, em que o aluno deve perceber que o rastro do ponto é um círculo, se ele argumenta que não, após essa resposta poderia aparecer uma caixa de diálogo com a definição de círculo, depois a pergunta poderia ser repetida, se o aluno insistisse na negativa, a mensagem poderia sugerisse a verificação do comprimento do segmento usado. Se o aluno insistisse ainda na negativa, só então o programa poderia direcionar a resposta. Dessa forma o fechamento do conteúdo poderia ser feito juntamente com as atividades, o que seria extremamente vantajoso em relação a otimização do tempo.

No próximo capítulo analisaremos o presente trabalho como um todo, assim como o encerramento da discussão sobre tecnologias na educação e o emprego do *software* GeoGebra.

6 Considerações finais

Sabemos que este trabalho não responde a todas as perguntas, nem oferece uma garantia milagrosa de aprendizagem, mas é o início de uma discussão necessária que poderá trazer muitos frutos em relação à quebra do paradigma tradicional tão arraigado nas nossas escolas e incentivar o uso das TIC's em nossas salas de aula.

Ao longo deste trabalho citamos muitos autores que defendem o uso das TIC's na escola. Citamos agora Miskulin e Junior (2007, p. 138-139) que resume as vantagens do emprego planejado e sistêmico com as TIC's nas práticas pedagógicas: o desenvolvimento da autonomia do aluno; o acesso a informação com rapidez e facilidade; a confrontação e verificação de diversas fontes de informação, proporcionando a estruturação dos saberes; o desenvolvimento das competências de análise e reflexão; o conhecimento e compreensão de outras culturas; a organização do pensamento do aluno; o trabalho em grupo, independente da origem geográfica dos participantes; entre outras citadas pelo autor. Implementamos nossas atividades com objetivos a abranger algumas dessas vantagens apontadas por Miskulin e Junior, especialmente a autonomia do aluno e o trabalho em grupo.

Discutimos e defendemos o uso do GeoGebra, um *software* de geometria dinâmica, que possibilita à investigação matemática, através da nossa proposta. A investigação matemática é um meio em que o aluno pode observar os objetos matemáticos, levantar conjecturas, testá-las e levantar hipóteses que sirvam de argumentação definitiva para a construção do saber. Observamos serem estes alguns dos pontos diferenciais do nosso trabalho e o que o torna inovador. O potencial do uso das TIC's é infinito sendo limitado apenas pela nossa criatividade.

Cabe ressaltar que uma versão das atividades propostas foram aplicadas com alunos de 3º ano do Ensino Médio. Mostramos as etapas do nosso trabalho, as pesquisas prévias com os alunos, o glossário implementado para diminuir as dificuldades originadas pela pouca habilidade com Geometria do Ensino Fundamental, as atividades propriamente ditas, devidamente resolvidas e comentadas, oferecendo ao professor que quiser implementá-las diversas dicas e orientações e, por fim, os comentários em relação ao andamento das aulas em que ministramos a presente proposta. A partir dos resultados obtidos, já promissores, as atividades foram reformuladas a fim de ultrapassar as dificuldades que ocorreram, oferecendo ao professor uma proposta de aulas diferenciadas testadas, recomendadas e devidamente fundamentadas teoricamente. As sete atividades propostas são divididas em partes. O *software* GeoGebra cumpre papéis distintos, seja como foco principal da investigação matemática, seja como ferramenta para verificar resultados. Todas as atividades, incluindo a de introdução ao GeoGebra estão disponíveis nos anexos de modo ao professor poder imprimir diretamente para a aplicação com os seus alunos. Consta nos anexos também uma importante iniciação ao GeoGebra, em que focamos as ferramentas necessárias para a implementação das atividades.

Percebemos a partir da análise dos questionários e dos relatórios após as atividades, como o estudo de Geometria dos nossos alunos no Ensino Fundamental foi apontado muitas vezes como falho e por isso cogitamos ser este um motivo pelo qual os mesmos não conseguem assimilar totalmente o ensino de Geometria Analítica no Ensino Médio. Acreditamos que o presente trabalho ajudou a alterar concepções errôneas em relação aos fundamentos do estudo da circunferência. Em geral, a avaliação dos alunos em relação às atividades propostas foi bastante positiva. Descreveram-nas como inovadoras, dinâmicas, interessantes, importantes, entre outros adjetivos. Ressaltamos que os problemas ocorridos nas primeiras turmas possibilitaram uma readequação para a aplicação das atividades na turma de Informática. Embora não tenhamos feito um estudo estatístico profundo, notamos o melhor desempenho nas notas bimestrais desta turma em relação a todas as outras. A média das notas desta turma foi 6,6 enquanto que a turma de Geoprocessamento foi de 5,8 e da turma de Fabricação Mecânica de 5,9. Nas turmas que não aplicamos o trabalho as médias foram de 6,3 na turma de Automação Industrial e de 4,7 na turma de Refrigeração e Climatização. Cabe salientar que muitos fatores influíram nesta nota, o cansaço dos alunos por ser final de ano, o desinteresse daqueles que já estavam em exame, entre outros.

Sabemos das diversas dificuldades da implementação de atividades que envolvam tecnologias, mas não podemos fazer disso um empecilho para levar a tecnologia à escola. Dessa forma, apresentamos nossa proposta, entre outras razões, para incentivar o professor que não teve na sua formação o uso de tecnologias como prática pedagógica a fazê-lo. Também oferecemos a análise de livros didáticos disponíveis em relação ao estudo da circunferência para os professores que utilizam esta ferramenta como suporte para a preparação das suas aulas. Essa análise também serviu para orientar este trabalho em relação ao uso das TIC's na Geometria Analítica.

Através da implementação prática das atividades, percebemos o ganho relacionado ao emprego das TIC's citado por Miskulin e Junior (2007, p. 140): a criação de um ambiente de aprendizagem colaborativa e conhecimento compartilhado pela troca de experiências entre professor e alunos. Compartilhar talvez seja o verbo mais usado atualmente devido a diversas redes sociais das quais os jovens participam, e podemos usá-lo a favor do trabalho do professor.

Referências

BARROSO, J. M. et al. *Conexões com a Matemática*. São Paulo: Moderna, 2010. Citado na página 40.

BORBA, M. de C.; PENTEADO, M. G. *Informática e Educação Matemática*. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010. Citado 6 vezes nas páginas 20, 21, 23, 28, 45 e 46.

BRANDãO, L. de O. Programação geométrica: uso de geometria dinâmica para programação. In: CARVALHO, L. M. et al. (Ed.). *História e Tecnologia no Ensino da Matemática*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008. II, p. 29–43. Citado 3 vezes nas páginas 30, 31 e 131.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília, 1998. 152 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 23.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio - Parte III*. Brasília, 2000. 58 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Citado 4 vezes nas páginas 18, 22, 30 e 31.

BROUSSEAU, G. Os diferentes papéis do professor. In: SAIZ, C. P. . I. (Ed.). *Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas*. Porto Alegre: artmed, 1996. p. 54–78. Citado na página 45.

CETIC, C. de Estudos sobre as Tecnologias da Informação e da C. *TIC Educação 2012 Pesquisa sobre o uso das Tecnologias de informação e comunicação nas escolas brasileiras*. São Paulo, 2013. Disponível em: <http://cetic.br/publicacoes/2012/tic-educacao-2012.pdf>. Acesso em: 03.01.2014. Citado na página 20.

D'AMBROSIO, U. *Educação Matemática: da teoria a prática*. 23. ed. Campinas: Papirus, 2012. Citado na página 22.

DANTE, L. R. *Matemática Contexto & Aplicações*. São Paulo: Ática, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 42.

FOLLADOR, D. *Tópicos Especiais no Ensino de Matemática: Tecnologias e Tratamento da Informação*. Curitiba: IBPEX, 2007. Citado 4 vezes nas páginas 18, 20, 21 e 45.

GUEDES, P. C. C. *Algumas aplicações do software GeoGebra ao ensino da Geometria Analítica*. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Matemática - UFES, Vitória, abril 2013. Disponível em: <http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle-/123456789/587/2011_00376_PAULO_CEZAR_CAMARGO_GUEDES.pdf?sequence=1>. Acesso em: 11.09.2013. Citado na página 24.

MICOTTI, M. C. de O. O ensino e as propostas pedagógicas. In: BICUDO, M. A. V. (Ed.). *Pesquisa em Educação Matemática: Concepçoes e Perspectivas*. São Paulo: Unesp, 1999. p. 153–167. Citado na página 17.

MISKULIN, R. G. S.; JUNIOR, D. P. A relação entre aprendizagem significativa e aprendizagem colaborativa: um estudo de caso utilizando tic's e mapas concentuais. In: MENDES, J. R.; GRANDO, R. C. (Ed.). *Múltiplos Olhares: Matemática e produção de conhecimento*. São Paulo: Musa, 2007. p. 136–150. Citado 4 vezes nas páginas 44, 101, 125 e 126.

PAIVA, M. *Matemática*. São Paulo: Moderna, 2009. Citado na página 37.

PAULA, T. O. de. *O Ensino de Geometria Analítica com o Uso do GeoGebra*. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Ciências Exatas - UFRRJ, Rio de Janeiro, abril 2013. Disponível em: <http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789-/510/2011_00405_TE%C3%93FILO_OLIVEIRA_DE_PAULA.pdf?sequence=1>. Acesso em: 11.09.2013. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 25.

PENTADO, M. G. Novos atores, novos cenários: discutindo a inserção dos computadores na profissao docente. In: BICUDO, M. A. V. (Ed.). *Pesquisa em Educação Matemática: Concepçoes e Perspectivas*. São Paulo: Unesp, 1999. p. 297–313. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 21.

PONTE, J. P. da; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações Matemáticas na Sala de Aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2003. Citado 3 vezes nas páginas 17, 18 e 19.

PRENSKY, M. Digital natives, digital immigrants part 1. *On the Horizon*, MCB University Press, v. 9, n. 5, p. 1–6, outubro 2001. Citado na página 19.

REGO, T. C. *Vygotsky*. 21. ed. Petrópolis: Vozes, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 121.

SANTALó, L. A. Matemática para não matemáticos. In: PARRA, C.; SAIZ, I. (Ed.). *Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas*. Porto Alegre: artmed, 1996. p. 17–31. Citado na página 22.

SILVA, W. M. S. da. *Uma Abordagem Dinâmica e Inovadora para o Ensino da Geometria Analítica no Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Matemática - UFAL, Maceió, abril 2013. Disponível em: <http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream-/handle/123456789/383/2011_00251_WELLINGTON_MANOEL_SANTOS_DA_SILVA-.pdf?sequence=1>. Acesso em: 11.09.2013. Citado na página 24.

SMOLE, K.; STOCCO, C. *Matemática Ensino Médio*. São Paulo: Saraiva, 2010. Citado na página 41.

SOUZA, J. R. de. *Matemática: Novo Olhar*. São Paulo: FTD, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 36.

TRUCANO, M. Alguns desafios para os formuladores de políticas educativas na era das tic. In: BARBOSA, A. F. (Ed.). *TIC Educação 2011 Pesquisa sobre o uso das Tecnologias de informação e comunicação nas escolas brasileiras*. São Paulo: Comitê Gestor da Internet no Brasil, 2011. p. 65–71. Disponível em: <http://op.ceptro.br-/cgi-bin/cetic/tic-educacao-2011.pdf>. Acesso em: 03.01.2014. Citado na página 96.

VALENTE, J. A. Questão do *software*: parâmetros para o desenvolvimento de *software* educativo. *Memo*, Núcleo de Informática Aplicada à Educação, n. 24, p. 1–13, 1989. Disponível em: <http://www.nied.unicamp.br/ojs/index.php/memos/article/view/79-/78>. Acesso em: 06.01.2014. Citado na página 22.

WERNECK, J. da S. *Uso do GeoGebra no ensino de Matemática com atividades de aplicação em Geometria Analítica: A circunferência*. Dissertação (Mestrado) — Fundação Universidade Federal de Rondônia, Porto Velho, fevereiro 2013. Disponível em: <http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/357-/2011_00223_JORGE_DA_SILVA_WERNECK.pdf?sequence=1>. Acesso em: 11.09.2013. Citado na página 25.

Anexos

ANEXO A – GeoGebra: uma introdução

Muitos são os programas que exploram geometria de uma maneira didática, tantos outros são eficientes em plotar gráficos de funções. O que fez escolhermos o GeoGebra para o desenvolvimento das atividades propostas neste trabalho, além de ser gratuito, disponível em várias plataformas em português e ser constantemente atualizado, foi o fato de relacionar a Geometria com a Álgebra, exatamente a concepção de Geometria Analítica. Se usamos as ferramentas do *software* para diretamente obter uma figura geométrica, tudo relacionado a essa figura estará explícito na chamada Janela de Álgebra, como, por exemplo, ao obter um triângulo na chamada Janela de Visualização, as coordenadas dos vértices, área e medida dos lados estarão relacionados na Janela de Álgebra, como ilustrado na Figura 30. Além disso o GeoGebra é fácil de manipular, por exemplo, cada função disponível mostra ajuda informando como e para que utilizar a ferramenta. É perfeitamente possível fazer construções geométricas apenas usando o *software* sem qualquer consulta a tutoriais, embora seja extremamente recomendável para aproveitamento máximo do programa. É fácil de ser instalado e muito rápido. Ao mesmo tempo tem potencialidades de utilização no Ensino Superior, possibilidade de programação, construção de animações, entre outros itens. Outra vantagem, que nos fez escolher o programa, na verdade o fundamento do GeoGebra, é trabalhar com geometria dinâmica (GD), ou seja, tudo o que é feito geometricamente pode ser transladado como um simples selecionar e arrastar do *mouse*. Vinculado a esse movimento as informações presentes na Janela de Álgebra alteram-se simultaneamente, permitindo análises mais profundas sobre a Geometria.

Brandão cita algumas vantagens dos programas GD e portanto característica do GeoGebra.

> Uma vantagem importante da GD é a necessidade de explicitar as relações entre objetos geométricos (como pontos, retas ou circunferências). Outra vantagem é sua interatividade uma vez feita a construção pode-se mover algum ponto inicial e o programa redesenha, de modo aparentemente contínuo, todos os objetos da construção preservando suas relações. Vem daí o termo **dinâmica** do nome GD, mas esta geometria também poderia ser chamada de **geometria interativa**, devido à sua característica chave da interatividade com o usuário. (BRANDãO, 2008, p. 30)

O *download* do programa GeoGebra pode ser feito pelo *site*: $http://www.geogebra.org/cms/pt\_BR/$. A tela inicial do *site* do GeoGebra está reproduzida na Figura 29.

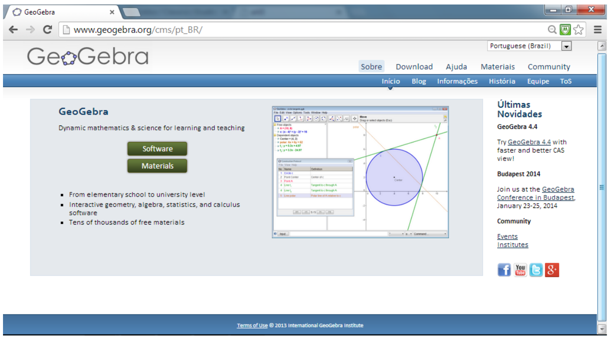


Figura 29 – Site oficial do GeoGebra

Utilizamos a versão GeoGebra 4.4. Na Figura 30 a tela principal do GeoGebra indica suas regiões: Barra de Menus, Barra de Ferramentas, Janela de Álgebra, Janela CAS, Janela de Visualização e Barra de Entrada.

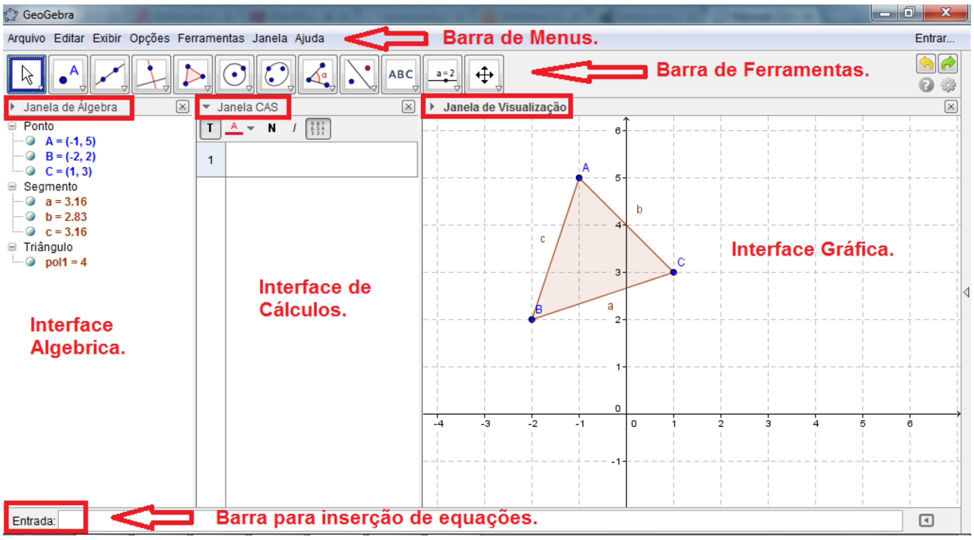


Figura 30 – Tela do Geogebra.

Mostramos na Figura 30 as regiões principais do GeoGebra. Destacamos a Janela de Álgebra que é a interface do programa, mostrando todos os aspectos algébricos do que é feito na Janela de Visualização. Por sua vez, a Janela de Visualização é a interface do programa onde inserimos as construções e onde os gráficos são traçados. Empregaremos também a Janela CAS nas atividades propostas. Esta janela possibilita, entre outras coisas, a fatoração de expressões algébricas. O programa possui outras regiões que não serão necessárias para o desenvolvimento das atividades propostas neste trabalho, como, por exemplo, uma planilha eletrônica. Analisaremos cada uma das regiões do programa e os recursos que cada uma tem a oferecer.

A nomenclatura usada para os objetos é semelhante à usada na Geometria. Por exemplo, retas tem nomes de letras latinas minúsculas; pontos tem nomes de letras latinas maiúsculas; funções são descritas por $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e assim por diante. Os mais usados são letras latinas minúsculas. Podem representar nomes de retas, de círculos, de segmentos, de constantes. O GeoGebra, a medida que o usuário faz suas construções, atribui nomes em ordem alfabética. Se objetos nomeados pelo mesmo estilo de símbolo são criados, o GeoGebra vai respeitando a ordem alfabética. Por exemplo, criou-se a partir de um documento em branco: uma reta, um segmento e um círculo. Seus nomes respectivamente serão a, b e c, permitindo que o usuário faça uma rápida associação ao protocolo de construção. O programa permite alterar esses nomes, usando letras gregas inclusive. Frisamos este aspecto do GeoGebra, pois nas construções descritas nas atividades propostas, assumimos no texto a sequência de nomes adotados pelo *software* e quando da necessidade de alterá-los.

A.1 Barra de Menus

Os menus disponíveis são: Arquivo, Editar, Exibir, Opções, Ferramentas, Janela e Ajuda.

A.1.1 Menu Arquivo

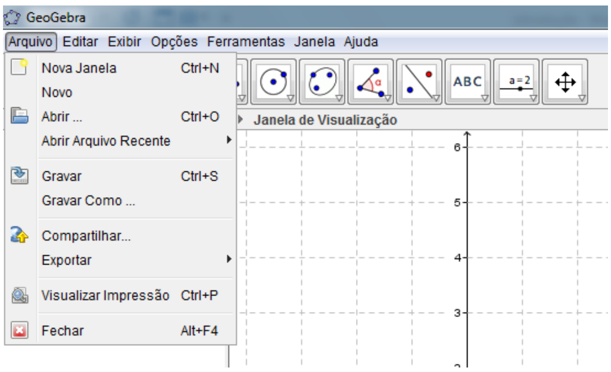


Figura 31 – Menu Arquivo

O menu Arquivo possui opções comuns a muitos programas, como mostra a Figura 31. Destacamos a opção Exportar que possibilita o uso das construções feitas no GeoGebra de muitas formas. Seja como uma figura, como uma página html, ou como código fonte, útil para quem sabe programar. Os arquivos do GeoGebra também podem ser exportados para o *GeoGebra Tube*, basta o usuário possuir uma conta neste espaço. Vale a pena pesquisar sobre o assunto, por exemplo, para divulgar as construções e avanços dos alunos na *web*.

A.1.2 Menu Editar

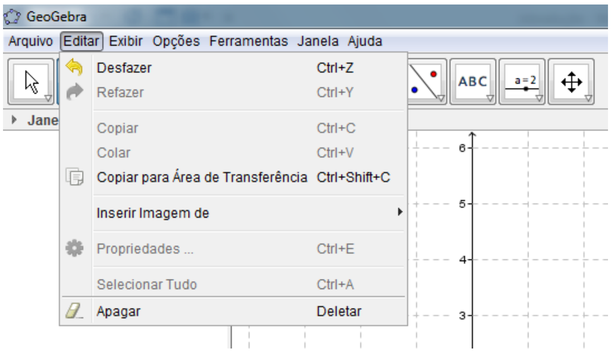


Figura 32 – Menu Editar

O menu Editar também possui muita similaridade com outros programas, como mostra a Figura 32. O GeoGebra disponibiliza outras formas de executar os mesmos comandos. Por exemplo, Apagar. Podemos selecionar o objeto que queremos deletar com o botão direito do *mouse*. Aparecerá uma caixa de possibilidades, entre elas Apagar.

A.1.3 Menu Exibir

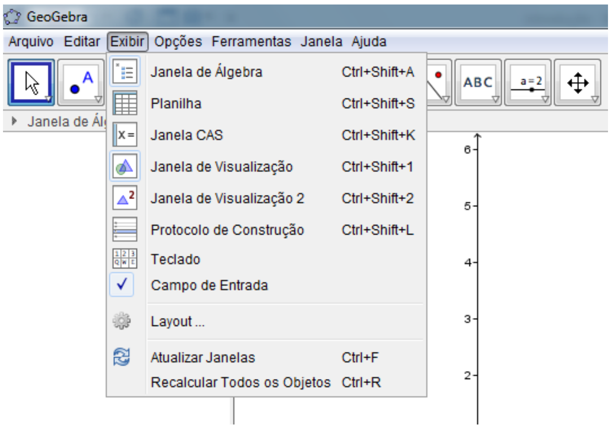


Figura 33 – Menu Exibir

O menu Exibir mostra ou esconde janelas disponíveis do programa. As opções nesse menu constam na Figura 33. Por exemplo, se o usuário do programa quiser fazer construções puramente geométricas pode desabilitar a Janela de Álgebra. O usuário pode fechar a Janela de Álgebra diretamente no seu canto superior direito. Aqui destaco a janela Protocolo de Construção, que possibilita mostrar como foi feita uma construção passo a passo, mostrando todos os objetos envolvidos na ordem em que foi feita a construção.

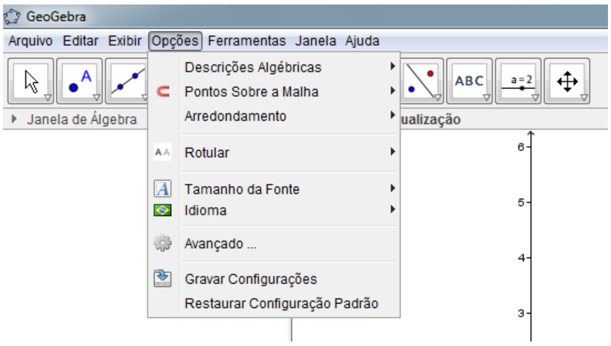


Figura 34 – Menu Opções

A.1.4 Menu Opções

O menu Opções possibilita alterar configurações do programa. Algumas configurações disponíveis: o tamanho de fonte, o número de casas decimais exibidas para os números no item Arredondamento, o idioma, o estilo gráfico dos pontos sobre a malha, entre outras, como mostra a Figura 34.

A.1.5 Menu Ferramentas

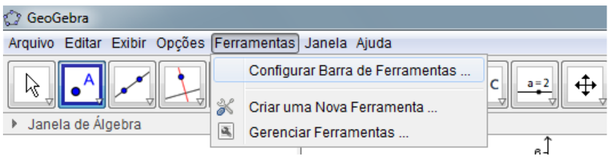


Figura 35 – Menu Ferramentas

O menu Ferramentas, como mostra a Figura 35, apresenta poucas opções. São mais úteis para usuários avançados. Destacamos a função Criar uma Nova Ferramenta que possibilita, a partir das funções já existentes, ao usuário criar suas próprias ferramentas. Por exemplo, para construir um círculo no GeoGebra a partir de um diâmetro do mesmo. Após executar os procedimentos pertinentes, selecionamos a opção Criar uma Nova Ferramenta. A janela vinculada a essa operação pede o que serão os objetos iniciais e finais da nova ferramenta. Inserimos também o nome da nova ferramenta e o ícone vinculado a ela, assim como o texto referente a ajuda da ferramenta criada. Após o procedimento concluído, o GeoGebra inclui o ícone da nova ferramenta na Barra de Ferramentas.

A.1.6 Menu Janela

O menu Janela disponibiliza abrir uma nova janela e alternar entre janelas se várias estiverem abertas.

A.1.7 Menu Ajuda

A utilização do menu Ajuda requer que o usuário esteja conectado à internet.

A.2 Barra de Ferramentas

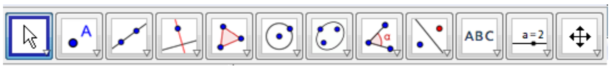


Figura 36 – Barra de Ferramentas

A barra de ferramentas possui doze botões diferenciados, como mostra a Figura 36, cada qual contendo várias opções de ferramentas. Exploramos apenas os botões os quais contém funções empregadas nas atividades propostas neste trabalho. Não analisaremos os botões: Polígono, Cônicas, Ângulo e Reflexão, localizados respectivamente 5ª, 7ª, 8ª e 9ª posições da esquerda para direita. A todas as ferramentas está vinculada uma mensagem de ajuda, com o nome e como ativar a ferramenta. É importante observar este recurso.

A.2.1 Botão Mover

São três as ferramentas disponíveis neste botão, como mostra a Figura 37. São elas: mover, rotação em torno de um ponto e gravar para a planilha de cálculo.

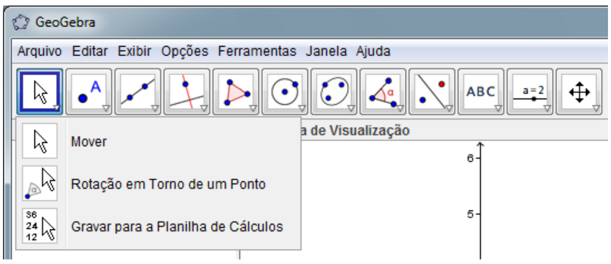


Figura 37 – Ferramentas disponíveis no Botão Mover.

A.2.1.1 Ferramenta Mover

Essa ferramenta é responsável pelo princípio do GeoGebra: a geometria dinâmica. Com ela podemos mover quaisquer objetos pertencentes à Janela de Visualização. O ícone desta ferramenta é exposto na Figura 38.

Comandos: Ferramenta Mover. ↣ Selecione na barra de ferramentas: 1º botão ⟶ 1ª ferramenta. Clique com o *mouse* no objeto e arraste-o. ↣ Ou tecle *Esc* no teclado, em seguida clique com o *mouse* no objeto e arraste-o.

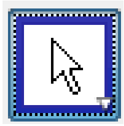


Figura 38 – Ícone Ferramenta Mover

Observação A.2.1. As ferramentas inseridas no mesmo botão: Rotação em Torno de Um Ponto e Gravar para a Planilha de Cálculos não serão empregadas neste trabalho.

A.2.2 Botão Ponto

São seis as ferramentas disponíveis neste botão, como mostra a Figura 39. São elas: ponto, ponto em objeto, vincular/desvincular ponto, interseção de dois objetos, ponto médio ou centro e número complexo.

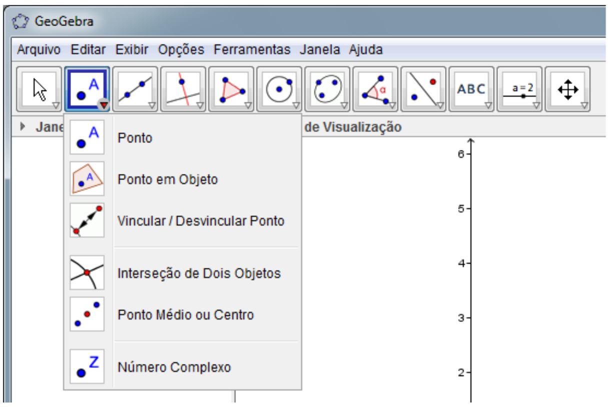


Figura 39 – Ferramentas disponíveis no Botão Ponto.

A.2.2.1 Ferramenta Ponto

Essa ferramenta insere novos pontos na Janela de Visualização. O ícone desta ferramenta é exposto na Figura 40.

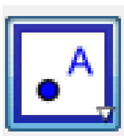


Figura 40 – Ícone Ferramenta Ponto

Comando: Ferramenta Ponto. ↣ Selecione na barra de ferramentas: 2º botão ⟶ 1ª ferramenta e clique com o *mouse* na Janela de Visualização nas coordenadas que se queira o ponto.

A.2.2.2 Ferramenta Interseção de Dois Objetos

Essa ferramenta determina os pontos de interseção entre objetos, como o próprio nome esclarece. O ícone desta ferramenta é exposto na Figura 41.

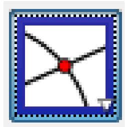


Figura 41 – Ícone Ferramenta Interseção de Dois Objetos

Comandos: Ferramenta Interseção de Dois Objetos. ↣ Selecione na barra de ferramentas: 2º botão ⟶ 4ª ferramenta e clique com o *mouse* em cada objeto que se queira a interseção. ↣ Ou selecione a ferramenta Ponto, passe o mouse próximo à região da interseção e quando o GeoGebra mostrar uma caixa de texto com os objetos para obter a interseção e clique.

A.2.2.3 Ponto Médio ou Centro

Essa ferramenta determina o ponto médio de um segmento, o ponto médio entre dois pontos e ainda o centro de um círculo, ou cônica. O ícone desta ferramenta é exposto na Figura 42.

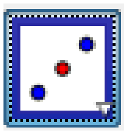


Figura 42 – Ícone Ferramenta Ponto Médio ou Centro

Comando: Ferramenta Ponto Médio ou Centro. ↣ Selecione na barra de ferramentas: 2º botão ⟶ 5ª ferramenta, clique com o *mouse* no segmento, em dois pontos consecutivamente ou na curva da cônica que se queira determinar o centro.

Observação A.2.2. As ferramentas inseridas no mesmo botão: Ponto em Objeto, Vincular/Desvincular Ponto e Números Complexos não serão usadas neste trabalho.

A.2.3 Botão Reta

São sete as ferramentas disponíveis neste botão, como mostra a Figura 43. São elas: reta, segmento, segmento com comprimento fixo, semirreta, caminho poligonal, vetor e vetor a partir de um ponto.

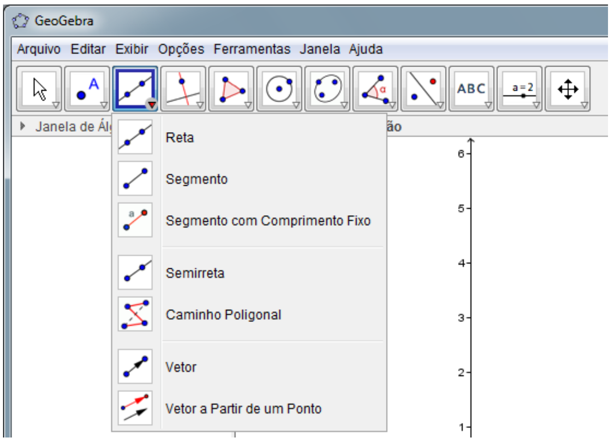


Figura 43 – Ferramentas disponíveis no Botão Reta.

A.2.3.1 Ferramenta Reta

Essa ferramenta insere reta a partir de dois pontos. O ícone desta ferramenta é exposto na Figura 44.

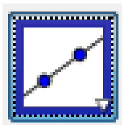


Figura 44 – Ícone Ferramenta Reta

Comandos: Ferramenta Reta.
$\rightarrowtail$ Selecione na barra de ferramentas: 3º botão $\longrightarrow$ 1ª ferramenta e clique com o *mouse* em dois pontos já existentes na Janela de Visualização.
$\rightarrowtail$ Ou selecione na barra de ferramentas: 3º botão $\longrightarrow$ 1ª ferramenta e clique com o *mouse* na Janela de Visualização nas coordenadas que se queira os pontos da reta.

A.2.3.2 Ferramenta Segmento

Essa ferramenta insere um segmento a partir de dois pontos. O ícone desta ferramenta é exposto na Figura 45.

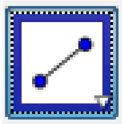


Figura 45 – Ícone Ferramenta Segmento

Comando: Ferramenta Segmento.
$\rightarrowtail$ Selecione na barra de ferramentas: 3º botão $\longrightarrow$ 2ª ferramenta e clique com o *mouse* em dois pontos já existentes na Janela de Visualização.
$\rightarrowtail$ Ou selecione na barra de ferramentas: 3º botão $\longrightarrow$ 2ª ferramenta e clique com o *mouse* na Janela de Visualização nas coordenadas que se queira os pontos do segmento. Os pontos não precisam ser pré-existentes.

A.2.3.3 Ferramenta Segmento com Comprimento Fixo

Essa ferramenta insere um segmento e permite escolher o seu comprimento. A princípio o segmento assume uma posição horizontal. Se o segmento for movido, mesmo pela extremidade final o comprimento não se altera. O ícone desta ferramenta é exposto na Figura 46.

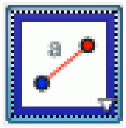


Figura 46 – Ícone Ferramenta Segmento com Comprimento Fixo

Comando: Ferramenta Segmento com Comprimento Fixo.
$\hookrightarrow$ Selecione na barra de ferramentas: 3º botão $\longrightarrow$ 3ª ferramenta e clique com o *mouse* em um ponto, pré-existente, ou nas coordenadas que se queira a extremidade inicial do segmento.
$\hookrightarrow$ O GeoGebra abre uma caixa de diálogo. Digite nela o comprimento desejado. Veja a Figura 47.

Observação A.2.3. As ferramentas inseridas no mesmo botão: Semirreta, Caminho Poligonal, Vetor e Vetor a Partir de um Ponto não serão empregadas neste trabalho.

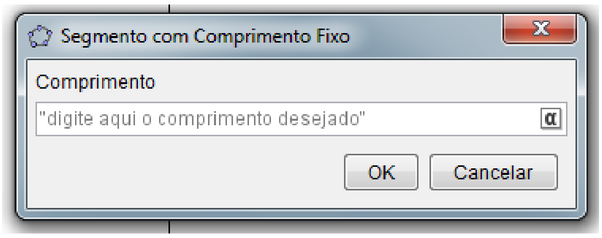


Figura 47 – Caixa de diálogo para definir comprimento de um segmento.

A.2.4 Botão Reta Perpendicular

São oito as ferramentas disponíveis neste botão, como mostra a Figura 48. São elas: reta perpendicular, reta paralela, mediatriz, bissetriz, reta tangente, reta polar ou diametral, reta de regressão linear e lugar geométrico. São ferramentas vinculadas a existência de mais de um objeto envolvendo uma propriedade geométrica específica.

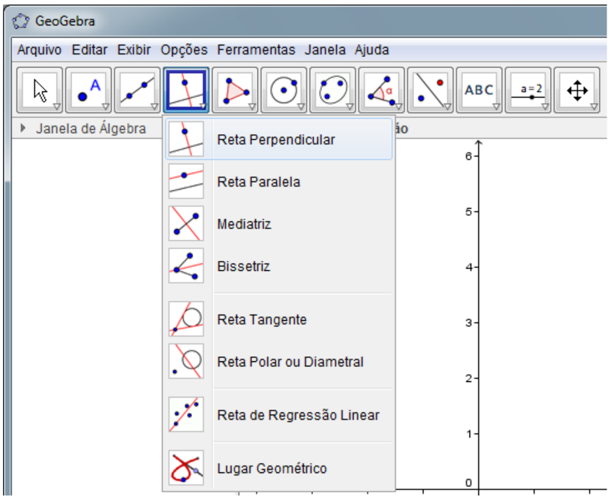


Figura 48 – Ferramentas disponíveis no Botão Reta Perpendicular.

A.2.4.1 Ferramenta Reta Perpendicular

Essa ferramenta determina uma reta perpendicular a uma outra reta, ou segmento, passando por um ponto. Este ponto pode tanto estar fora da reta inicial, quanto fora da reta inicial. O ícone desta ferramenta é exposto na Figura 49.

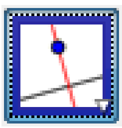


Figura 49 – Ícone Ferramenta Reta Perpendicular

Comando: Ferramenta Reta Perpendicular. ↣ Selecione na barra de ferramentas: 3º botão ⟶ 1ª ferramenta e clique com o *mouse* no ponto e em seguida na reta, ou segmento.

A.2.4.2 Ferramenta Mediatriz

Essa ferramenta determina a reta mediatriz de um segmento. Empregamos essa ferramenta diretamente, apenas, na atividade preliminar sobre o GeoGebra. Não é pedida diretamente nas atividades sobre círculos, mas pode ser usada como recurso para resolver os exercícios, pois a reta mediatriz é o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam de dois pontos dados. Assim o aluno pode, pelos conhecimentos do Ensino Fundamental, encontrar o centro de um círculo pela intersecção das mediatrizes de duas de suas cordas. O ícone desta ferramenta é exposto na Figura 50.

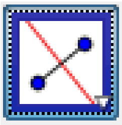


Figura 50 – Ícone Ferramenta Mediatriz

Comando: Ferramenta Mediatriz. ↣ Selecione na barra de ferramentas: 4º botão ⟶ 3ª ferramenta e clique com o *mouse* no segmento ou nos dois pontos que definem o segmento.

A.2.4.3 Reta Tangente

Essa ferramenta determina a reta tangente a um círculo, a uma cônica ou a uma função passando por um ponto. O ícone desta ferramenta é exposto na Figura 51.

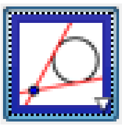


Figura 51 – Ícone Ferramenta Reta Tangente

Comando: Ferramenta Reta Tangente. ↣ Selecione na barra de ferramentas: 4º botão ⟶ 5ª ferramenta, clique com o *mouse* no ponto e em seguida no círculo, cônica ou função.

Observação A.2.4. As ferramentas inseridas no mesmo botão: Reta Paralela, Bissetriz, Reta Polar ou Diametral, Reta de Regressão Linear e Lugar Geométrico não serão empregadas neste trabalho.

A.2.5 Botão Círculo

São oito as ferramentas disponíveis neste botão, como mostra a Figura 52. São elas: círculo dados centro e um dos seus pontos, círculo dados centro e raio, compasso, círculo definido por três pontos, semicírculo definido por dois pontos, arco circular, arco circuncircular, setor circular e setor circuncircular.

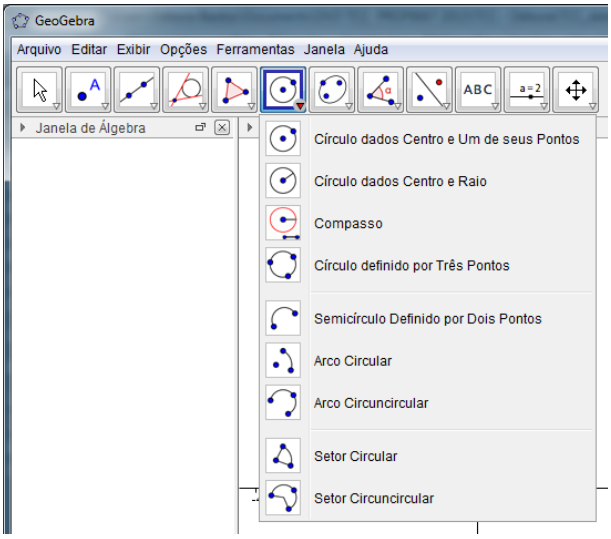


Figura 52 – Ferramentas disponíveis no Botão Círculo

A.2.5.1 Ferramenta Círculo dados Centro e Um dos seus Pontos

Essa ferramenta determina um círculo a partir de dois pontos. Um será o seu centro e o outro, um ponto pertencente a ele. O ícone desta ferramenta é exposto na Figura 53.

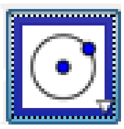


Figura 53 – Ícone Ferramenta Círculo dados Centro e Um dos seus Pontos

Comando: Círculo dados Centro e um dos seus Pontos. ↣ Selecione na barra de ferramentas: 6º botão ⟶ 1ª ferramenta, clique com o *mouse* no primeiro ponto, este será o centro do círculo, e no segundo, este pertencerá ao círculo.

A.2.5.2 Círculo dados Centro e Raio

Essa ferramenta determina um círculo a partir do centro e escolhido o raio, como o nome da ferramenta indica. O ícone desta ferramenta é exposto na Figura 54.

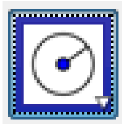


Figura 54 – Ícone Ferramenta Círculo dados Centro e Raio

Comando: Ferramenta Círculo dados Centro e Raio.
$\hookrightarrow$ Selecione na barra de ferramentas: 6º botão $\longrightarrow$ 2ª ferramenta.
$\hookrightarrow$ Clique com o *mouse* no ponto que será o centro do círculo.
$\hookrightarrow$ O GeoGebra abre uma caixa de diálogo, digite nela o comprimento desejado. Veja Figura 55.

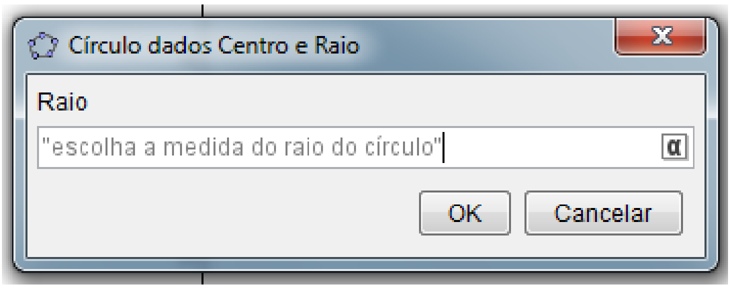


Figura 55 – Caixa de diálogo para definir raio do círculo.

A.2.5.3 Ferramenta Círculo definido por Três Pontos

Essa ferramenta determina um círculo a partir de três pontos. Todos pertencem ao círculo. O ícone desta ferramenta é exposto na Figura 56.

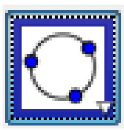


Figura 56 – Ícone Ferramenta Círculo definido por Três Pontos

Comandos: Ferramenta Círculo definido por Três Pontos.
↣ Selecione na barra de ferramentas: 6º botão ⟶ 4ª ferramenta e clique com o *mouse* em três pontos pré-existentes em sequência.
↣ Selecione na barra de ferramentas: 6º botão ⟶ 4ª ferramenta e clique com o *mouse* três vezes em lugares distintos na Janela de Visualização.

Observação A.2.5. As ferramentas inseridas no mesmo botão: Compasso, Semicírculo definido por Dois Pontos, Arco Circular, Arco Circuncircular, Setor circular e Setor circuncircular.

A.2.6 Botão Ângulo

São seis as ferramentas disponíveis neste botão, como mostra a Figura 57. Só usaremos, nas atividades propostas no capítulo 3, a ferramenta Distância, Comprimento ou Perímetro.

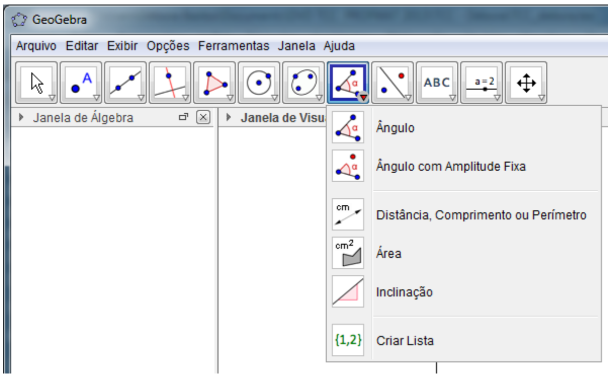


Figura 57 – Ferramentas disponíveis no Botão Ângulo

A.2.6.1 Ferramenta Distância, Comprimento ou Perímetro

Essa ferramenta calcula a distância entre dois objetos, sejam eles pontos, ponto e reta, duas retas. Da mesma forma calcula o comprimento de segmentos, perímetros de círculo entre outras coisas. Nos interessa o calculo de distância entre dois pontos e entre ponto e reta. O ícone desta ferramenta é exposto na Figura 58.

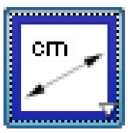


Figura 58 – Ícone Ferramenta Distância

Comando: Ferramenta Distância.
↣ Selecione na barra de ferramentas: 8º botão ⟶ 3ª ferramenta e clique com o *mouse* nos pontos e em seguida na reta, ou segmento.

A.2.7 Botão Texto

São seis as ferramentas disponíveis neste botão, como mostra a Figura 59. São elas: texto, inserir imagem, caneta, função à mão livre, relação, calculadora de probabilidades e inspetor de funções.

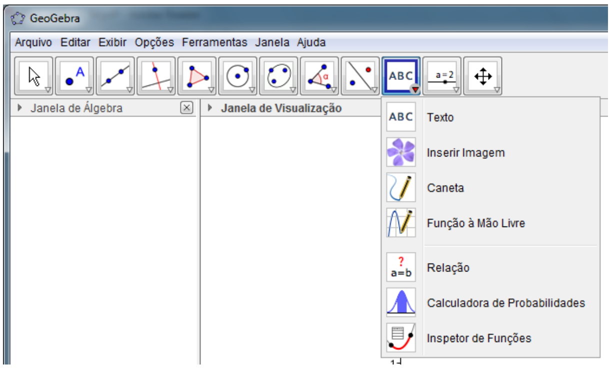


Figura 59 – Ferramentas disponíveis no Botão Texto

Esse botão apresenta ferramentas não presentes nas primeiras versões do GeoGebra. Chamou-nos atenção a ferramenta Caneta, com a qual é possível fazer traços livres na Janela de Visualização, como também a ferramenta Inspetor de Funções, com a qual permite calcular área sob a curva de uma função, mostra pontos de máximo e mínimo, raízes, determina retas tangentes e até determina círculos osculadores. A ferramenta deste botão que nos interessa para esse trabalho é a função Relação, analisada a seguir.

A.2.7.1 Ferramenta Relação

Essa ferramenta compara dois objetos de mesma natureza. A resposta depende de qual objeto está sendo analisado. Por exemplo, se forem selecionados dois segmentos, a ferramenta retorna se eles têm a mesma medida; se forem selecionados duas retas a ferramenta retorna se elas possuem ponto de interseção. Se objetos de natureza diferente são selecionados o programa gera uma mensagem de erro. O ícone desta ferramenta é exposto na Figura 60.

Comando: Ferramenta Relação.
↣ Selecione na barra de ferramentas: 10º botão ⟶ 5ª ferramenta e clique com o *mouse* nos objetos a ser comparados.

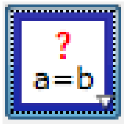


Figura 60 – Ícone Ferramenta Relação

A.2.8 Botão Controle Deslizante

São quatro as ferramentas disponíveis neste botão, como mostra a Figura 61. São elas: controle deslizante, caixa para exibir/esconder objetos, botão e campo de entrada.

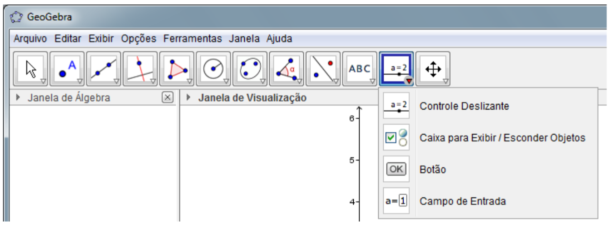


Figura 61 – Ferramentas disponíveis no Botão Controle Deslizante.

Esse botão apresenta ferramentas avançadas e não as usaremos, com exceção da ferramenta Controle Deslizante, analisada a seguir.

A.2.8.1 Ferramenta Controle Deslizante

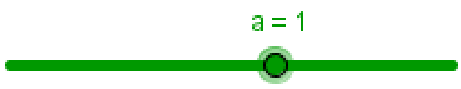


Figura 62 – Aparência do Controle Deslizante na Janela de Visualização

Essa ferramenta permite associar a qualquer objeto um número, com o qual podemos alterar através de um botão deslizante vinculado a uma barra, chamado controle deslizante. A aparência final do controle na Janela de Visualização consta na Figura 62. Se o botão é movido para a esquerda o valor associado diminui e se é movido para a direita o número aumenta. Um controle deslizante pode ser inserido, independente de estar vinculado a um objeto, embora seja essa a sua função. O intervalo que o número alterado pelo controle deslizante pode ser escolhido, assim como a aparência da barra do controle. O intervalo padrão é de -5 a 5. Por exemplo, com um controle deslizante a definido, se inserirmos um círculo pela ferramenta Círculo dados Centro e Raio e relacionarmos o raio desse círculo ao número a o raio do círculo será controlado pelo controle deslizante, podendo assumir os valores positivos do intervalo definido. O ícone desta ferramenta é exposto na Figura 63.

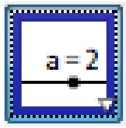


Figura 63 – Ícone Ferramenta Controle Deslizante

Comando: Ferramenta Controle Deslizante. ↪ Selecione na barra de ferramentas: 11º botão ⟶ 1ª ferramenta. ↪ Clique com o *mouse* na área da Janela de Visualização em que se queira mostrar o controle. ↪ O GeoGebra abrirá uma caixa de diálogo em que poderemos alterar o nome do controle; se representa um número, um ângulo ou um número inteiro; a posição vertical ou horizontal de sua aparência, entre outros. Faça suas escolhas. Veja Figura 64.

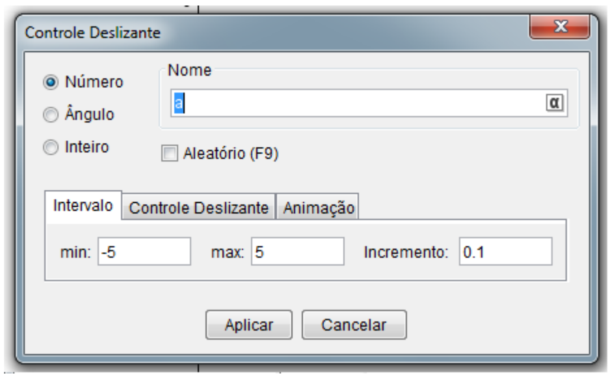


Figura 64 – Caixa de diálogo da ferramenta controle deslizante.

A.2.9 Botão Mover Janela de Visualização

São seis as ferramentas disponíveis neste botão, como mostra a Figura 65. São elas: mover janela de visualização, ampliar, reduzir, exibir/esconder objeto, exibir/esconder rótulo, copiar estilo visual e apagar.

A.2.9.1 Ferramenta Mover Janela de Visualização

O GeoGebra não possui barras de rolamento para visualizar áreas fora da Janela de Visualização padrão, isso é feito com a ferramenta Mover Janela de Visualização. Embora nas atividades não peçamos este comando explicitamente, ele pode ser usado com muita frequência. O ícone desta ferramenta é exposto na Figura 66.

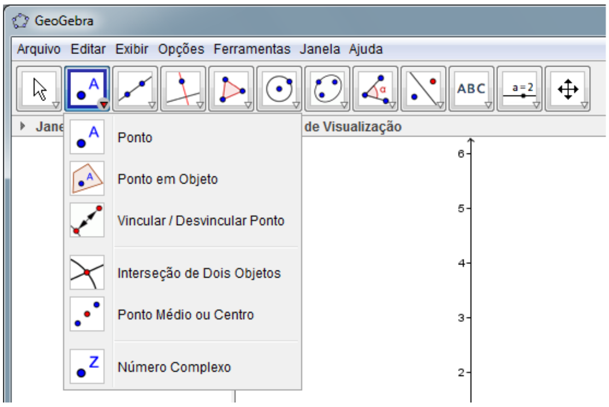


Figura 65 – Ferramentas disponíveis no Botão Mover Janela de Visualização.

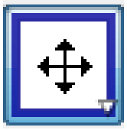


Figura 66 – Ícone Ferramenta Mover Janela de Visualização

Comando: Ferramenta Mover Janela de Visualização. ↪ Selecione na barra de ferramentas: 12º botão ⟶ 1ª ferramenta. ↪ Numa região fora dos eixos, com o ícone Mão visível arraste a tela da Janela de Visualização com o *mouse*.

A.2.9.2 Ferramentas Ampliar e Reduzir

São as ferramentas responsáveis pelo *zoom* na Janela de Visualização, a fim de aproximar ou afastar a imagem. O ícone da ferramenta Ampliar apresenta-se na Figura 67 e o ícone da ferramenta Reduzir na Figura 68.

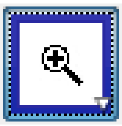


Figura 67 – Ícone Ferramenta Ampliar

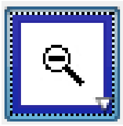


Figura 68 – Ícone Ferramenta Reduzir

Comandos: Ferramenta Reduzir e ampliar.
↣ Selecione na barra de ferramentas: 12º botão ⟶ 2ª ferramenta (para ampliar) e 3ª ferramenta (para reduzir).
↣ Ou numa região vazia da Janela de Visualização:

↪ Clique com o botão direito do *mouse*.

↪ Vá para a opção *Zoom* e selecionar a percentagem de *zoom* desejada. Veja Figura 69.

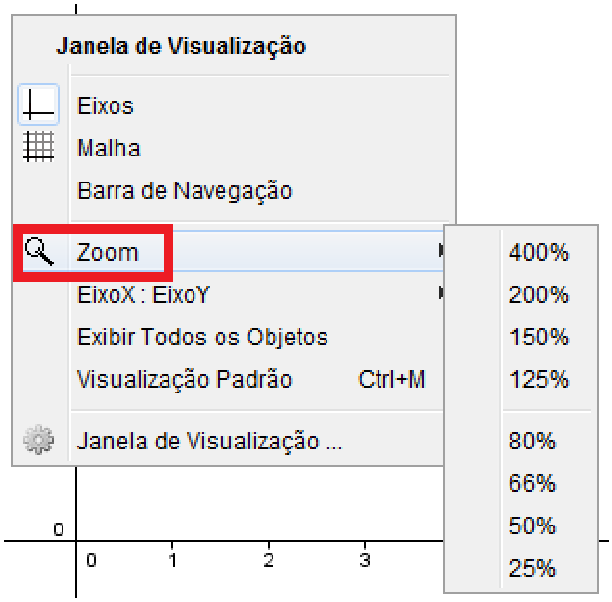


Figura 69 – Caixa de seleção do Zoom

A.2.9.3 Ferramentas Exibir/Esconder Objeto e Exibir/Esconder Rótulo

Por vezes objetos que são auxiliares não precisam estar visíveis na Janela de Visualização e podemos escondê-los, ou apenas esconder seus rótulos. Isso evita a poluição visual na tela. Essas ferramentas nos auxiliam neste sentido.

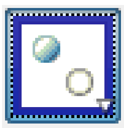


Figura 70 – Exibir/Esconder Objeto

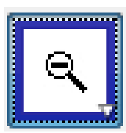


Figura 71 – Exibir/Esconder Rótulo

Comandos: Função Exibir/Esconder Rótulo, Exibir/Esconder Objeto.
$\rightarrowtail$ Selecione na barra de ferramentas: 12º botão $\longrightarrow$ 4ª ferramenta (para objeto), ou 5ª ferramenta (para rótulo) e clicar no objeto que se deseja esconder, ou esconder seu rótulo.
$\rightarrowtail$ Ou na Janela de Visualização, ou na Janela de Álgebra clique com o botão direito do *mouse* no objeto, ou sua equação, e selecionar na caixa de diálogo Exibir/Esconder Objeto ou Exibir/Esconder Rótulo. Veja Figura 72.
$\rightarrowtail$ Ou para esconder objeto clique na esfera do lado da definição algébrica do objeto na Janela de Álgebra. Veja Figura 73.

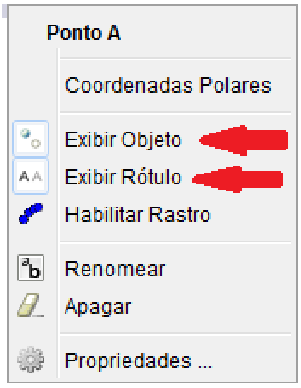


Figura 72 – Caixa seleção Exibir/Esconder Objeto/Rótulo

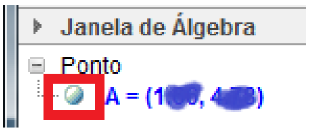


Figura 73 – Esfera Exibir/Esconder Objeto

A.2.9.4 Ferramenta Apagar

Ferramenta indispensável. Não a usamos diretamente nas atividades, embora seja necessária a todo momento. O ícone desta ferramenta é exposto na Figura 74.

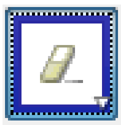


Figura 74 – Ícone Ferramenta Apagar

Comandos: Ferramenta Apagar.
↣ Selecione na barra de ferramentas: 12º botão ⟶ 7ª ferramenta e clique no objeto que se deseja apagar.
↣ Ou na Janela de Visualização ou na Janela de Álgebra clicar com o botão direito do *mouse* no objeto, ou sua equação, e selecionar na caixa auxiliar Apagar. Veja Figura 75.
↣ Ou selecione o objeto, seja na Janela de Álgebra ou na Janela de Visualização e use a tecla *Del* do teclado.

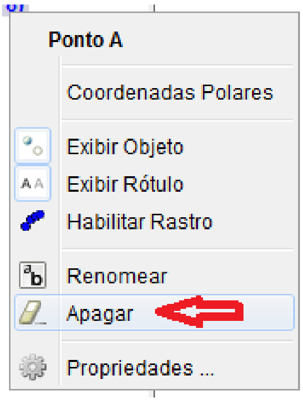


Figura 75 – Caixa auxiliar para selecionar apagar

Observação A.2.6. A ferramenta inserida no mesmo botão: Copiar Estilo Visual não é empregada neste trabalho.

A.3 Janela de Álgebra e Janela de Visualização.

A Janela de Álgebra é fundamental no contexto da Geometria Analítica. O relacionamento entre a Janela de Álgebra e a Janela de Visualização é perfeito. Tudo entre estas janelas se vincula. Muitos comandos podem ser feitos em ambas as janelas. Como, por exemplo, acessar alterar cor, estilo do objeto; apagar, esconder objeto, esconder rótulo, entre outras. Esses comandos entre outros, não estão inseridas na Barra de Menus, nem na Barra de Ferramentas e são importantes de ser destacadas.

A.3.1 Habilitar Malha

Habilitar a malha no GeoGebra facilita a inserção de pontos com coordenadas inteiras e comprimentos inteiros. Isso é necessário para facilitar a observação do aluno, pois se os números envolvidos são fracionários, por aparecer uma representação decimal finita, o aluno pode ser levado a enganar-se. Por exemplo, se o aluno está comparando o comprimento de dois segmentos em que duas casas após a vírgula são iguais, o aluno entende que realmente são iguais e isso não é necessariamente verdade.

Comando: Função Habilitar Malha.
↪ Clique com o botão direito do *mouse* numa região sem objetos na Janela de Visualização.
↪ Na caixa auxiliar selecione Malha. Veja Figura 76.

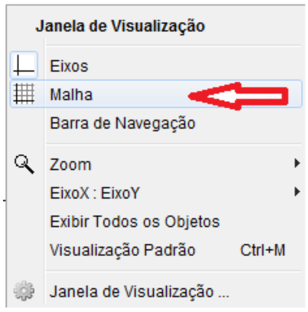


Figura 76 – Caixa auxiliar para exibir a Malha

Observação A.3.1. Se algo estiver selecionado na Janela de Visualização ou na Janela de Álgebra, outra caixa auxiliar é aberta e assim não é possível habilitar a malha.

A.3.2 Propriedades

Muitas vezes queremos alterar a aparência de um objeto, habilitar seu rastro, ou fixá-lo na Janela de Visualização, entre outros recursos. Todos inseridos na opção Propriedades.

Comando Para abrir a janela Propriedades:
↪ Clique com o botão direito do *mouse* num objeto qualquer da Janela de Visualização ou da Janela de Álgebra. ↪ Na caixa auxiliar selecione Propriedades. Veja Figura 77.

Ao abrir a janela Preferências, usualmente, o GeoGebra mostra a aba Básico, como mostra a Figura 78. Nesta aba podemos alterar o nome do objeto, ver como o objeto foi definido, podemos inserir legenda, selecionar tipo de rótulo, exibir rastro, fixar objeto e ainda definir um objeto como auxiliar.

A.3.2.1 Inserir e Exibir legenda

Podemos inserir uma legenda e fazê-la visível na Janela de Visualização, junto ao objeto associado.

Figura 77 – Caixa auxiliar para exibir a janela Preferências

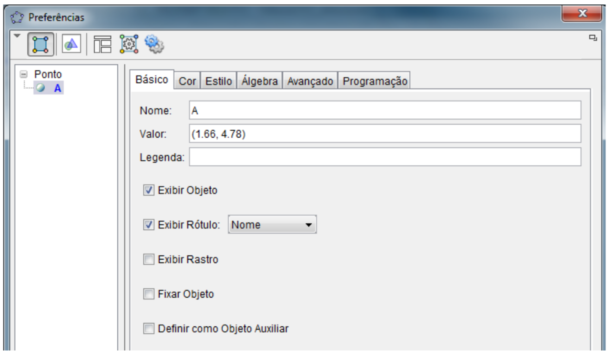


Figura 78 – Janela Preferências - aba Básico

Comando: Função Exibir Legenda.
↪ Com a janela Preferências aberta, veja 77, na aba Básico, insira a legenda desejada. A Figura 79 mostra um exemplo.
↪ Na opção Exibir Rótulo selecione Legenda.
↪ Feche a janela Preferências. A formatação é salva automaticamente.

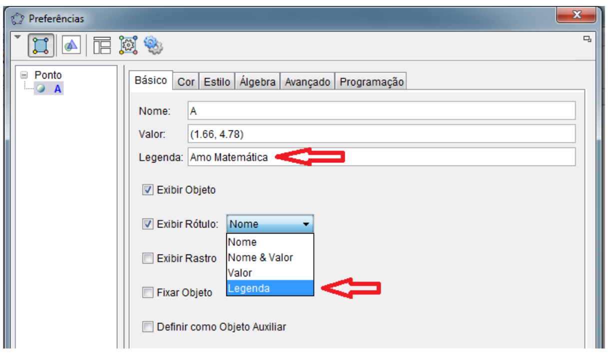


Figura 79 – Janela Preferências - Inserir Legenda

A.3.2.2 Exibir Rastro

Com a função Exibir Rastro ativada, ao mover o objeto o GeoGebra produz uma sombra, da mesma cor do objeto, onde ele passa.

Comandos: Função Habilitar Rastro.
$\rightarrowtail$ Com a janela Preferências aberta, veja 77, na aba Básico, selecione Exibir Rastro. Veja 78.
$\rightarrowtail$ Ou clique com o botão direito do *mouse* no objeto e na caixa auxiliar e selecione Habilitar Rastro. Veja Figura 80.

Figura 80 – Habilitar Rastro

Observação A.3.2. Para apagar o rastro, basta aplicar Mover a Janela de Visualização. Ver 66.

A.3.2.3 Fixar Objeto

Se um objeto está fixo, ou seja, com a função Fixar Objeto ativada a ferramenta Mover não tem efeito.

Comando: Função Fixar Objeto.
$\rightarrowtail$ Com a janela Preferências aberta, veja 77, na aba Básico, selecione Fixar Objeto. Veja Figura 81.

A.3.2.4 Renomear

Podemos renomear livremente os objetos do GeoGebra. Até se quisermos dar nomes inapropriados, como, por exemplo, o nome de um ponto usando letra minúscula.

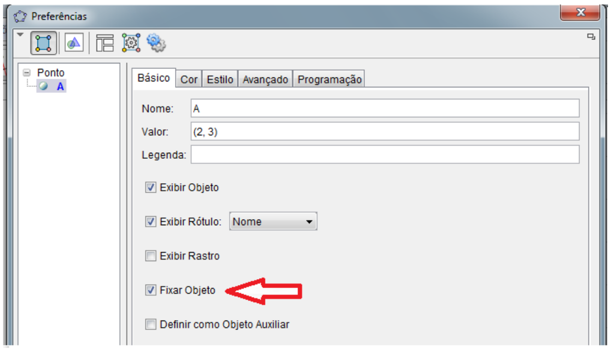


Figura 81 – Fixar Objeto

Comandos: Função Renomear.
↣ Com a janela Preferências aberta, veja 77, na aba Básico, na barra ao lado do nome digite outro a sua vontade.
↣ Ou clique com o botão direito do *mouse* no objeto, ou na Janela de Visualização, ou na Janela de Álgebra, em seguida na caixa auxiliar e selecione Renomear. O GeoGebra abre uma caixa de diálogo, insira um novo nome. Veja Figura 82.

Figura 82 – Função Renomear

A.3.2.5 Mudar a aparência dos objetos

No GeoGebra é possível mudar a cor do objeto, tornar o preenchimento mais ou menos opaco, alterar o estilo e espessura da borda.

Comando: Mudar a aparência dos objetos.
Mude a cor de um objeto:
↣ Com a janela Preferências aberta, veja 77, na aba Cor, selecione a cor desejada. Veja a Figura 83
Modifique a transparência do preenchimento de um objeto:
↣ Com a janela Preferências aberta, veja 77, na aba Cor, altere a transparência. Em que 0 torna o preenchimento transparente e 100 torna totalmente opaco. Veja a Figura 83
Modifique o espessura da borda de um objeto:
↣ Com a janela Preferências aberta, veja 77, na aba Estilo, altere a espessura da linha, numa escala de 0 a 13. Veja a Figura 84
Modifique o estilo do traçado da borda de um objeto:
↣ Com a janela Preferências aberta, veja 77, na aba Estilo, altere o estilo: linha contínua, linha tracejada, linha pontilhada, entre outras. Veja a Figura 84.

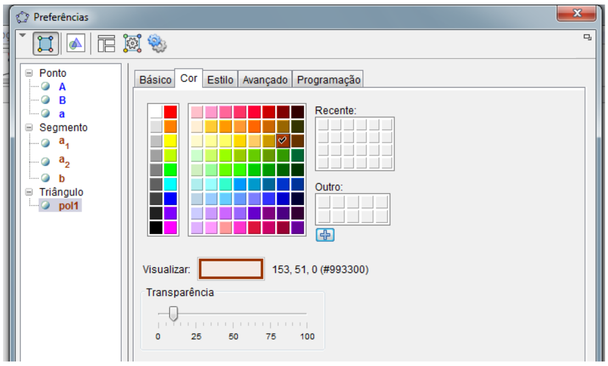


Figura 83 – Janela Preferências - Aba Cor

Figura 84 – Janela Preferências - Aba Estilo

A.3.2.6 Alterar tipo de equação

Entre os objetos que geram equações, como é o caso de retas, círculos, entre outras, o GeoGebra disponibiliza formatos diferentes de visualização. O formato depende da natureza do objeto. Por exemplo, para retas o GeoGebra disponibiliza as equações: reduzida, normal e paramétrica; para círculos, as equações: reduzida e geral.

Comando: Função Alterar Equação.
↣ Com a janela Preferências aberta, veja 77, na aba Álgebra, selecione o formato da equação desejada. Veja Figura 85.

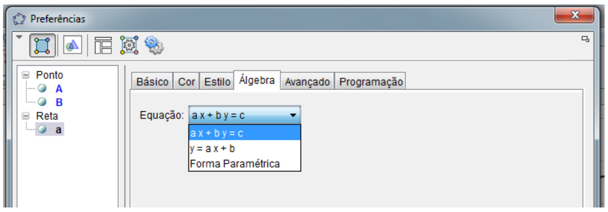


Figura 85 – Alterar formato de equação de retas

Observação A.3.3. Uma vez com a janela de Preferências aberta, para alterar um objeto, o GeoGeobra permite alterar as configurações de todos os objetos, pela barra localizada à esquerda da janela que lista tudo o que está contido na Janela de Visualização. Ver novamente a Figura 78.

A.3.3 Caixa de Entrada

Figura 86 – Caixa de Entrada

Podemos inserir alguns objetos na Janela de Visualização através da caixa de Entrada. Pontos, retas, funções, vetores, círculos, cônicas, inequações, curvas de nível, entre outros. As aplicações são amplas. O cuidado devido é quanto à escrita dessas expressões. Por exemplo, uma função $y = x^3 - 5x^2 + 4x - 2$ para ser inserida no GeoGebra deve ser digitada: $y = x\ \hat{}\ 3 - 5x\ \hat{}\ 2 + 4x - 2$. O GeoGebra não reconhece a expressão xy, se temos uma função implícita teremos que usar o símbolo $*$ para indicar a multiplicação. Funções modulares $y = |x|$, devemos digitar y=abs(x). Nas atividades propostas neste trabalho não precisaremos mais que esses exemplos.

A.4 Janela CAS

A Janela CAS, *Computer Algebra System*, é dividida em linhas, possuindo muitos recursos de cálculo. Possui barra de ferramentas própria, como mostra a Figura 87. As ferramentas disponíveis são: Avaliar, Calcular Valor Numérico, Manter Entrada, Fatorar, Expandir, Substituir, Resolver, Resolver Numericamente, Derivar, Calculadora de Probabilidades, Apagar.

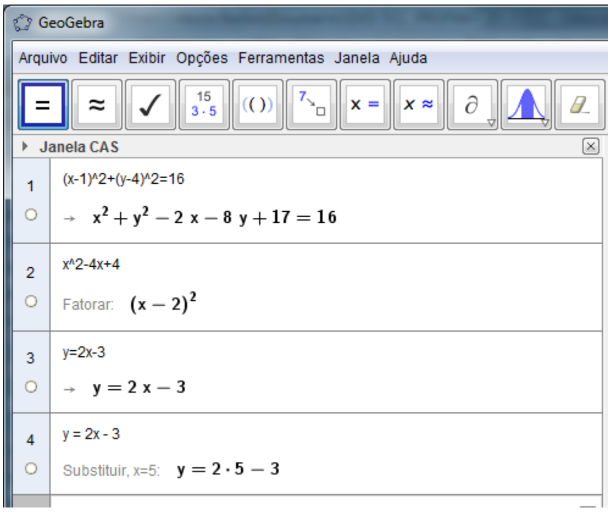


Figura 87 – Ferramentas da Janela CAS e suas linhas

Usaremos principalmente a ferramenta Fatorar. Observe na linha 2 da Janela CAS da Figura 87. Digitamos a expressão $x^2 - 4x + 4$ e utilizamos a ferramenta Fatorar. O GeoGebra devolveu como resposta $(x-2)^2$. Ajudará na atividade de completar quadrados.

A.5 Atividade Conhecendo o GeoGebra

Recomendamos essa atividade para os professores que nunca tenham trabalhado com o GeoGebra com seus alunos. Pode ser considerada a Atividade Zero para quem implementar as atividades propostas neste trabalho. Para estas, essa é recomendada como pré-requisito. Como as aplicações deste *software* são vastas, focaremos as funções e procedimentos necessários para o desenvolvimento das demais atividades. Junto com as instruções há a explicação do funcionamento de cada comando, o que será indicado por "Solução".

Objetivos:
▶ Compreensão do funcionamento do GeoGebra: uso das ferramentas necessárias às atividades propostas para o trabalho com o conteúdo Estudo do Círculo de Geometria Analítica.
Material necessário:
▶ Equipamento que tenha instalado o *software GeoGebra*, um por dupla.
▶ Folha de atividades para o aluno (parte 3), uma por dupla.
▶ Equipamento multimídia.
Tempo necessário: Uma hora-aula.

Parte 1 - Apresentação do programa

Após uma breve explicação sobre o programa GeoGebra, seus potenciais e sua utilidade, suas vantagens e objetivos, recomendamos que ao iniciar a atividade o professor manipule o programa ressaltando aos alunos certos itens:

1. Mostre as regiões do GeoGebra: Barra de Menus, Barra de Ferramentas, Janela de Visualização, Janela de Álgebra e Entrada. Veja Figura 30.
2. Mostre a ajuda oferecida pelo programa para cada ferramenta selecionada.
3. Recomende que a malha da tela esteja ativada. Veja Comando A.3.1.
4. Construa, por exemplo, uma reta definida por dois pontos, veja Comando A.2.3.1, e:
   a) Mostre que associado à reta na Janela de Visualização há sua respectiva equação na Janela de Álgebra;
   b) Mostre que o programa permite trasladar a reta, e qualquer objeto construído na Janela de Visualização, desde que a ferramenta Mover esteja habilitada. Veja Comando A.2.1.1.
5. Destaque a importância das ferramentas Mover Janela de Visualização, Ampliar e Reduzir para acessar áreas que fogem da tela padrão, pois o GeoGebra não tem barra de rolamento. Veja os Comando A.2.9.2 e Função A.2.9.1.

Parte 2 - Primeiro contato com o GeoGebra

Sugira aos alunos que explorem cada região do GeoGebra visualizando as opções de todas as barras e, em seguida, façam construções livres usando o maior número de ferramentas possível. Incentive o aluno a investigar o que o botão direito do *mouse* oferece. Destine, no máximo, 10 minutos para essa parte.

Parte 3 - Ferramentas básicas do GeoGebra

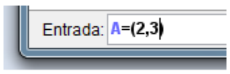
Esta parte o aluno deve executar sem explicação prévia do professor, discutindo com sua dupla, pedindo ajuda ao professor, se necessário. As instruções abaixo devem ser entregues em uma folha para a dupla de alunos. A sequência proposta está nos anexos pronta para impressão e aplicação em sala de aula.

Conhecendo o GeoGebra

Tente realizar as atividades apenas seguindo o roteiro indicado, é importante. Chame o professor se necessário. Se achar a Janela de Visualização poluída, com muitas construções, abra um novo arquivo, ou apague tudo que estiver nela. Habilitar a malha, ajuda, em relação a obter coordenadas inteiras dos pontos. Observe sempre a ajuda disponibilizada pelo programa.

1- Construção Animada

Siga as instruções abaixo:

1. Abra um novo arquivo do GeoGebra: Barra de Menus → Arquivo → Novo. Solução: Veja Menu A.1.1.
2. Habilite a malha: Clique com o botão direito do *mouse* numa região vazia da Janela de Visualização. Aparecerá uma caixa auxiliar, selecione Malha. Solução: Veja Comando A.3.1.
3. Insira um ponto A, usando a caixa de Entrada: 

. Solução: Veja Subseção A.3.3.
4. Insira um ponto B, usando a ferramenta Ponto: .Solução: Veja Comando A.2.2.1.
5. Determine uma reta a, que passa pelos pontos A e B, usando a ferramenta Reta: . Solução: Veja Comando A.2.3.1.
6. Mova a reta, usando a ferramenta Mover: . Mova tanto clicando nos pontos, quanto clicando na reta. Solução: Veja Comando A.2.1.1.
7. Altere o nome da reta a para r: Clique com o botão direito do *mouse* na reta. Na caixa auxiliar selecione Renomear e na caixa de diálogo digite r. Solução: Veja Comando A.3.2.4.
8. Insira um ponto C, na reta r. Basta, com a ferramenta Ponto ativada clicar com o *mouse* na reta. Solução: Veja Comando A.2.2.1.

9. Insira um ponto D, fora da reta. Solução: Veja Comando A.2.2.1.

10. Faça um círculo de centro em D passando pelo ponto C, usando a ferramenta Círculo dados Centro e Um de seus Pontos:. Solução: Veja Comando A.2.5.1.

11. Insira um ponto E, em cima da linha do círculo. Solução: Veja Comando A.2.2.1.

12. Altere a cor do ponto E: Clique com o botão direito do *mouse* no ponto. Na caixa auxiliar selecione Propriedades. Na janela Preferências, acesse a aba Cor e escolha a cor de sua preferência. Solução: Veja Comando A.3.2.5.

13. Ainda na janela de Preferências acesse a aba Básico e selecione Exibir Rastro. Também podemos exibir rastro selecionando Habilitar Rastro nas opções da caixa auxiliar quando clicamos com o botão direito do *mouse* no objeto. Solução: Veja Comando A.3.2.2.

    Observação A.5.1. Na janela Preferências há muitas opções de configurações, aproveite e observe as funções de cada aba. Fechando a janela, todas as alterações estão salvas.

14. Insira um círculo de centro em E e raio 2, usando a ferramenta Círculo dados Centro e Raio:. Solução: Veja Comando A.2.5.2.

15. Clique com o botão direito no ponto C e na caixa auxiliar selecione Animar. Observe. Solução: Essa função não é necessária nas atividades propostas de círculo. Aqui tem a pretensão de incrementar a atividade, dando um incentivo ao aluno não apenas executar uma sequência de comandos.

16. Pause a animação. Para isso, observe o símbolo de *pause* no canto inferior esquerdo da Janela de Visualização, clique nele. Se não houver este símbolo, clique novamente com o botão direito do *mouse* no ponto C e desabilite a função Animar.

17. Para enxergar melhor o traçado, aplique um *zoom* -, usando a ferramenta Reduzir: . Solução: Veja Comando A.2.9.2.

18. Centralize a construção e mova a Janela de Visualização. Para isso selecione a ferramenta Mover Janela de Visualização: . Basta clicar na Janela de Visualização com o *mouse* e arrastar. Solução: Veja Comando A.2.9.1.

19. Volte a animar. Para isso, clique no símbolo de *play*. Se não houver esta opção, clique novamente com o botão direito do *mouse* e selecione Animar. Observe o traçado.

    Observação A.5.2. Movendo a Janela de Visualização todos os rastros são apagados.

20. Anime também o ponto E e observe o novo traçado.

    Observação A.5.3. Se não enxergar todo o traçado reduza mais o *zoom* e centralize melhor a construção, como fizemos nos itens 17 e 18.

2 - Círculo × Mediatriz

1. Abra um novo arquivo, ou delete tudo o que está na Janela de Visualização. Solução: Veja Comando A.2.9.4.

2. Insira um círculo que passa por três pontos. Para isso selecione a ferramenta Círculo definido por Três Pontos: . Os pontos não precisam ser previamente inseridos. A ferramenta possibilita determinar os pontos ao mesmo tempo que se define o círculo. Solução: Veja Comando A.2.5.3.

3. Determine segmentos AB e AC. Para isso use a ferramenta Segmento: . Solução: Veja Comando A.2.3.2.

4. Determine a reta mediatriz do segmento AB. Para isso selecione a ferramenta Mediatriz:  e clique no segmento (ou nos dois pontos A e B). Solução: Veja Comando A.2.4.2.

5. Determine a reta mediatriz do segmento AC. Basta clicar nos dois pontos A e C, em qualquer ordem. A ferramenta já deve estar habilitada. Solução: Veja Comando A.2.4.2.

    Observação A.5.4. Você sabe quais são as propriedades da reta mediatriz de um segmento? Pesquise.

6. Obtenha a interseção das retas mediatrizes. Para isso, selecione a ferramenta: Interseção de Dois Objetos: e clique nas mediatrizes em sequência. A interseção é ponto D. Solução: Veja Comando A.2.2.2.

7. Esconda os objetos: segmentos a e b e as mediatrizes d e e. Para isso, observe na Janela de Álgebra as esferas nos lados das equações. Clique nas esferas e o objeto é escondido. Também podemos esconder objetos selecionando a ferramenta: Exibir/Esconder Objeto: . Solução: Veja Comando A.2.9.3.

    Observação A.5.5. Escondendo o objeto ele não é apagado. Para exibir o objeto escondido, basta clicar na esfera (vazia) novamente.

8. Determine o centro do círculo. Para isso, selecione a ferramenta Ponto Médio ou Centro: . O centro é ponto E. Solução: Veja Comando A.2.2.3.

9. Qual a relação entre o ponto D, interseção das mediatrizes, e o ponto E, centro do círculo? Se quiser, use a ferramenta Relação: e clique nos dois pontos na Janela de Álgebra. Solução: São pontos coincidentes. Veja Comando A.2.7.1.

3 - Construção Animada 2

1. Abra um novo arquivo ou delete tudo o que está na Janela de Visualização.
2. Obtenha a reta r, digitando na caixa de Entrada a sua equação: $r : 3x+4y-15 = 0$. Solução: Veja Subseção A.3.3.
3. Insira um ponto A fora da reta. Solução: Veja Comando A.2.2.1.
4. Fixe o ponto A. Para isso, clique com o botão direito do *mouse* no ponto A. Na caixa auxiliar, acesse Propriedades. Na janela Preferências na aba Básico clique em Fixar Objeto. Feche a janela. Solução: Veja Comando A.3.2.3.

   Observação A.5.6. Se um objeto está fixo, a ferramenta Mover não tem efeito sobre ele.

5. Determine a reta perpendicular à reta r passando pelo ponto A. Para isso, selecione a ferramenta Reta Perpendicular: . Clique na reta r e no ponto A em sequência. A reta perpendicular tem o nome a. Solução: Veja Comando A.2.4.1.
6. Insira um ponto B na reta r. Solução: Veja Comando A.2.2.1.
7. Determine por B um segmento de comprimento fixo, de tamanho 2. Para isso, selecione a ferramenta Segmento com Comprimento Fixo: clique no ponto B e digite na caixa de diálogo: 2. Feche a caixa de diálogo, clicando em *OK* ou *Enter* no teclado. A outra extremidade do segmento é o ponto C. Solução: Veja Comando A.2.3.3.
8. Determine o segmento AC. Solução: Veja Comando A.2.3.2.
9. Esconda o rótulo do segmento AC. Para isso, clique no segmento AC com o botão direito do *mouse* e na caixa auxiliar selecione Exibir Rótulo. Solução: Veja Comando A.2.9.3.
10. Esconda o rótulo do segmento BC. Solução: Veja Comando A.2.9.3.
11. Altere a cor do ponto C, habilite o seu rastro e o anime. Solução: Veja Comando A.3.2.5.
12. Observe a curva traçada.

13. Pause a animação e em seguida anime o ponto B.

14. Observe a curva traçada. Verifique se a curva feita pelos colegas é semelhante ou diferente.

Dicas para o professor
✓ Se a dúvida for quanto a execução do comando, sempre pergunte ao aluno se ele leu a ajuda oferecida pelo GeoGebra.
✓ No GeoGebra o que normalmente chamamos de circunferência é chamado de círculo. Diga que há certos autores que não fazem distinção entre esses termos e que são usados para designar a curva em si e não a área interna da mesma.
✓ Incentive a pesquisa sobre lugar geométrico, reta mediatriz, cordas e círculos, relacionados à construção 2, para o aluno entender, porque a interseção das mediatrizes das cordas é o centro do círculo.

Após um primeiro contato com o *software*, o aluno está apto a resolver as atividades deste trabalho propostas no capítulo 3.

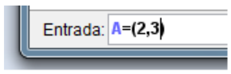
ANEXO B – Atividades para a iniciação do GeoGebra

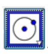
Conhecendo o GeoGebra

Tente realizar as atividades apenas seguindo o roteiro indicado, é importante. Chame o professor se necessário. Se achar a Janela de Visualização poluída, com muitas construções, abra um novo arquivo, ou apague tudo que estiver nela. Habilitar a malha, ajuda, em relação a obter coordenadas inteiras dos pontos. Observe sempre a ajuda disponibilizada pelo programa.

1- Construção Animada

Siga as instruções abaixo:

1. Abra um novo arquivo do GeoGebra: Barra de Menus → Arquivo → Novo.
2. Habilite a malha: Clique com o botão direito do *mouse* numa região vazia da Janela de Visualização. Aparecerá uma caixa auxiliar, selecione Malha.
3. Insira um ponto A, usando a caixa de Entrada: 

.
4. Insira um ponto B, usando a ferramenta Ponto: .
5. Determine uma reta a, que passa pelos pontos A e B, usando a ferramenta Reta: .
6. Mova a reta, usando a ferramenta Mover: . Mova tanto clicando nos pontos, quanto clicando na reta.
7. Altere o nome da reta a para r: Clique com o botão direito do *mouse* na reta. Na caixa auxiliar selecione Renomear e na caixa de diálogo digite r.
8. Insira um ponto C, na reta r. Basta, com a ferramenta Ponto ativada clicar com o *mouse* na reta.
9. Insira um ponto D, fora da reta.
10. Faça um círculo de centro em D passando pelo ponto C, usando a ferramenta Círculo dados Centro e Um de seus Pontos: .

11. Insira um ponto E em cima da linha do círculo.

12. Altere a cor do ponto E: Clique com o botão direito do *mouse* no ponto. Na caixa auxiliar selecione Propriedades. Na janela Preferências, acesse a aba Cor e escolha a cor de sua preferência.

13. Ainda na janela de Preferências acesse a aba Básico e selecione Exibir Rastro. Também podemos exibir rastro selecionando Habilitar Rastro nas opções da caixa auxiliar quando clicamos com o botão direito do *mouse* no objeto.

    Observação B.0.7. Na janela Preferências há muitas opções de configurações, aproveite e observe as funções de cada aba. Fechando a janela, todas as alterações estão salvas.

14. Insira um círculo de centro em E e raio 2, usando a ferramenta Círculo dados Centro e Raio: .

15. Clique com o botão direito no ponto C e na caixa auxiliar selecione Animar. Observe.

16. Pause a animação. Para isso, observe o símbolo de *pause* no canto inferior esquerdo da Janela de Visualização, clique nele. Se não houver este símbolo, clique novamente com o botão direito do *mouse* no ponto C e desabilite a função Animar.

17. Para enxergar melhor o traçado, aplique um *zoom* -, usando a ferramenta Reduzir: .

18. Centralize a construção e mova a Janela de Visualização. Para isso selecione a ferramenta Mover Janela de Visualização: . Basta clicar na Janela de Visualização com o *mouse* e arrastar.

19. Volte a animar. Para isso, clique no símbolo de *play*. Se não houver esta opção, clique novamente com o botão direito do *mouse* e selecione Animar. Observe o traçado.

    Observação B.0.8. Movendo a Janela de Visualização todos os rastros são apagados.

20. Anime também o ponto E e observe o novo traçado.

    Observação B.0.9. Se não enxergar todo o traçado reduza mais o *zoom* e centralize melhor a construção, como fizemos nos itens 17 e 18.

2 - Círculo × Mediatriz

1. Abra um novo arquivo, ou delete tudo o que está na Janela de Visualização.

2. Insira um círculo que passa por três pontos. Para isso selecione a ferramenta Círculo definido por Três Pontos: . Os pontos não precisam ser previamente inseridos. A ferramenta possibilita determinar os pontos ao mesmo tempo que se define o círculo.

3. Determine segmentos AB e AC. Para isso use a ferramenta Segmento: .

4. Determine a reta mediatriz do segmento AB. Para isso selecione a ferramenta Mediatriz:  e clique no segmento (ou nos dois pontos A e B).

5. Determine a reta mediatriz do segmento AC. Basta clicar nos dois pontos A e C, em qualquer ordem. A ferramenta já deve estar habilitada.

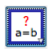
   Observação B.0.10. Você sabe quais são as propriedades da reta mediatriz de um segmento? Pesquise.

6. Obtenha a interseção das retas mediatrizes. Para isso, selecione a ferramenta: Interseção de Dois Objetos: e clique nas mediatrizes em sequência. A interseção é ponto D.

7. Esconda os objetos: segmentos a e b e as mediatrizes d e e. Para isso, observe na Janela de Álgebra as esferas nos lados das equações. Clique nas esferas e o objeto é escondido. Também podemos esconder objetos selecionando a ferramenta: Exibir/Esconder Objeto: .

   Observação B.0.11. Escondendo o objeto ele não é apagado. Para exibir o objeto escondido, basta clicar na esfera (vazia) novamente.

8. Determine o centro do círculo. Para isso, selecione a ferramenta Ponto Médio ou Centro: . O centro é ponto E.

9. Qual a relação entre o ponto D, interseção das mediatrizes, e o ponto E, centro do círculo? Se quiser, use a ferramenta Relação:  e clique nos dois pontos na Janela de Álgebra.

3 - Construção Animada 2

1. Abra um novo arquivo ou delete tudo o que está na Janela de Visualização.

2. Obtenha a reta r, digitando na caixa de Entrada a sua equação: $r : 3x+4y-15 = 0$.

3. Insira um ponto A fora da reta.

4. Fixe o ponto A. Para isso, clique com o botão direito do *mouse* no ponto A. Na caixa auxiliar, acesse Propriedades. Na janela Preferências na aba Básico clique em Fixar Objeto. Feche a janela.

   Observação B.0.12. Se um objeto está fixo, a ferramenta Mover não tem efeito sobre ele.

5. Determine a reta perpendicular à reta r passando pelo ponto A. Para isso, selecione a ferramenta Reta Perpendicular: . Clique na reta r e no ponto A em sequência. A reta perpendicular tem o nome a.

6. Insira um ponto B na reta r.

7. Determine por B um segmento de comprimento fixo, de tamanho 2. Para isso, selecione a ferramenta Segmento com Comprimento Fixo:  Clique no ponto B e digite na caixa de diálogo: 2. Feche a caixa de diálogo, clicando em *OK* ou *Enter* no teclado. A outra extremidade do segmento é o ponto C.

8. Determine o segmento AC.

9. Esconda o rótulo do segmento AC. Para isso, clique no segmento AC com o botão direito do *mouse* e na caixa auxiliar selecione Exibir Rótulo.

10. Esconda o rótulo do segmento BC.

11. Altere a cor do ponto C, habilite o seu rastro e o anime.

12. Observe a curva traçada.

13. Pause a animação e em seguida anime o ponto B.

14. Observe a curva traçada. Verifique se a curva feita pelos colegas é semelhante ou diferente.

ANEXO C – Atividade de análise da definição e da equação reduzida do círculo

Parte 1 - Definição de Círculo

1. Inicialize o programa GeoGebra.
2. Habilite a malha.
3. Marque um ponto A, no primeiro quadrante. Prefira coordenadas inteiras.
4. Deixe o ponto A fixo.
5. Faça pelo ponto A um segmento de comprimento fixo. Escolha o comprimento. O outro extremo do segmento será o ponto B.
6. Mude a cor do ponto B.
7. Habilite o rastro do ponto B.
8. Mova o segmento AB ou a extremidade B. Ou ainda, anime o ponto B.
9. Qual curva é traçada pelo rastro?
10. Faça um círculo com a ferramenta Círculo dados Centro e um de seus Pontos. Centro em A e um de seus pontos B.
11. Amplie a figura aproximando uma parte do círculo.
12. Mova novamente o ponto B.
13. O rastro do ponto B coincide com o círculo? ( ) Sim ( ) Não
14. Por quê?
15. No item 13: Se sua resposta foi negativa, pesquise a definição de círculo ou circunferência e verifique se o comprimento do segmento realmente está fixo, voltando a este item. Se foi afirmativa, responda as questões abaixo:
    a) O que representa o ponto A para o círculo?
    b) O que representa o segmento AB para o círculo?

Parte 2 - Equação Reduzida do Círculo

1. Abra um novo arquivo ou apague tudo o que está na Janela de Visualização.
2. Habilite a malha.
3. Faça um círculo usando a ferramenta Círculo dados Centro e Um de Seus Pontos, de forma que ele esteja contido no 1º quadrante do plano cartesiano.
4. Faça um segmento de extremidades em A e B.

   Observação C.0.13. a) O GeoGebra nomeará o centro de A e o ponto do círculo de B.

   b) Escolha coordenadas inteiras para os pontos A e B.

   c) Procure que a medida do raio também seja um valor inteiro.

5. Observe a equação gerada pelo GeoGebra na Janela de Álgebra relativa a esse círculo.
6. Copie a equação aqui.

   Observação C.0.14. a) Chamamos esse tipo de equação de Equação Reduzida do Círculo.

   b) Nesta equação, além das variáveis x e y e dos expoentes, aparecem três números, os chamaremos de parâmetros. A equação reduzida pode ser escrita da forma: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = c$.

7. Mova o ponto A, passando por todos os quadrantes. Também mova o ponto B até conseguir responder:

   a) O parâmetro c pode ser negativo?
      ( ) Sim ( ) Não

   b) Os parâmetros a e b:

      i. São sempre negativos? ( ) Sim ( ) Não

      ii. Podem ter sinais contrários? ( ) Sim ( ) Não

8. Mova o ponto B para apenas o raio do círculo mudar. Faça vários movimentos.

   a) Quais parâmetros na equação se alteram?

      i. Parâmetro a: ( ) Sim ( ) Não

      ii. Parâmetro b: ( ) Sim ( ) Não

      iii. Parâmetro c: ( ) Sim ( ) Não

b) Observe o parâmetro c e a medida do segmento AB na Janela de Álgebra. Responda:

i. O parâmetro c é o raio do círculo? ( ) Sim ( ) Não

ii. O parâmetro c é o diâmetro do círculo? ( ) Sim ( ) Não

iii. Caso sua resposta tenha sido afirmativa a algum dos dois itens anteriores, mova o ponto B de maneira que o raio assuma valores diferentes de 1 e diferentes de 2 e observe o parâmetro c. Escolha pelo menos mais dois valores para o raio.

c) O que é o parâmetro c, que relação ele tem com o raio?

9. Mova o círculo de maneira que o raio **NÃO** mude, para isso arraste o centro do círculo ou a linha do mesmo. Faça vários movimentos, comece com o centro do círculo pertencente ao 1º quadrante e vá alternando os quadrantes.

a) Quais parâmetros na equação se alteram?

i. Parâmetro a: ( ) Sim ( ) Não

ii. Parâmetro b: ( ) Sim ( ) Não

iii. Parâmetro c: ( ) Sim ( ) Não

b) Observe as coordenadas do ponto A e os parâmetros a e b, ao mesmo tempo em que move o círculo (sem alterar o raio). Preste atenção ao quadrante a que pertence o ponto A e o sinal de suas coordenadas.

i. Quando o parâmetro a é positivo?

ii. Quando o parâmetro a é negativo?

iii. Quando o parâmetro b é positivo?

iv. Quando o parâmetro b é negativo?

c) O que representa o parâmetro a da equação do círculo?

d) O que representa o parâmetro b da equação do círculo?

10. O que significam as variáveis x e y na equação do círculo? Dica: lembre do significado das variáveis na equação de uma reta.

11. Construa o círculo de centro em $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$ e raio $r = \sqrt{6}$.

a) Qual a equação deste círculo?

b) O significado dos parâmetros a, b e c continua valendo, mesmo não sendo valores inteiros?

12. Escreva a equação reduzida do círculo de centro $C(x_c, y_c)$ e de raio r.

Parte 3 - Exercícios

Resolva os exercícios a seguir no seu caderno. No desenvolvimento dos exercícios os argumentos devem ser algébricos e não baseados somente nas construções do GeoGebra.

Exercício 1. Em relação ao círculo de centro em $C(1,-2)$ e raio $r=3$:

(a) Qual a equação reduzida desse círculo?

(b) O ponto $A(4,-2)$ pertence ao círculo? E o ponto $B(-2,-4)$?

Exercício 2. Dentre as equações abaixo, indique quais representam círculos. Em caso afirmativo, determine o centro e o raio do mesmo, caso contrário, justifique.

(a) $(x+3)^2+(y-1)^2=1$

(b) $(x-1)^2-(y+5)^2=16$

(c) $(x-1)^2+(y+4)^2=6$

(d) $(x-3)^2+(y-1)^2+5=0$

Observação C.0.15. Insira as equações no GeoGebra e confira os resultados.

Exercício 3. (ENEM - 2013) Durante uma aula de Matemática, o professor sugere aos alunos que seja fixado um sistema de coordenadas cartesianas (x,y) e representa na lousa a descrição de cinco conjuntos algébricos I, II, II, IV e V, como se segue:

I – é a circunferência de equação $x^2+y^2=9$;

II – é a parábola de equação $y=-x^2-1$, com x variando de -1 a 1;

III – é o quadrado formado pelos vértices $(-2,1)$, $(-1,1)$, $(-1,2)$ e $(-2,2)$;

IV – é o quadrado formado pelos vértices $(1,1)$, $(2,1)$, $(2,2)$ e $(1,2)$;

V – é o ponto $(0,0)$.

A seguir, o professor representa corretamente os cinco conjuntos sobre uma mesma malha quadriculada, composta de quadrados com lados medindo uma unidade de comprimento cada, obtendo uma figura. Qual das alternativa na Figura 88 foi desenhada pelo professor?

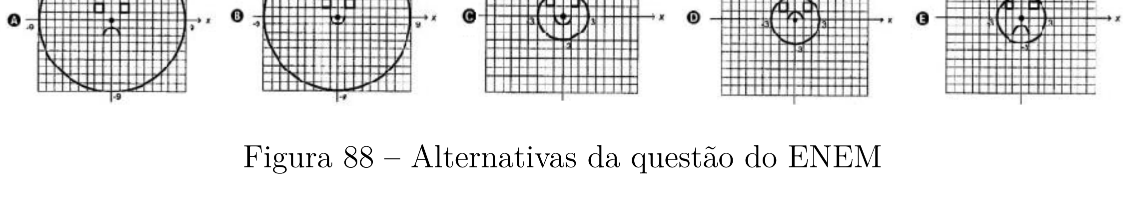


Figura 88 – Alternativas da questão do ENEM

Exercício 4. Desafio Podemos utilizar os recursos da Geometria Analítica para resolver problemas puramente geométricos. Para isso devemos envolver os objetos do problema numa disposição conveniente do plano cartesiano. Por exemplo, para provar: Se um triângulo está inscrito num círculo e o maior lado do triângulo é um diâmetro do círculo, então esse triângulo é retângulo, podemos pensar num círculo que esteja centrado na origem do plano cartesiano, de raio r e diâmetro contido no eixo ox. AB é o diâmetro do

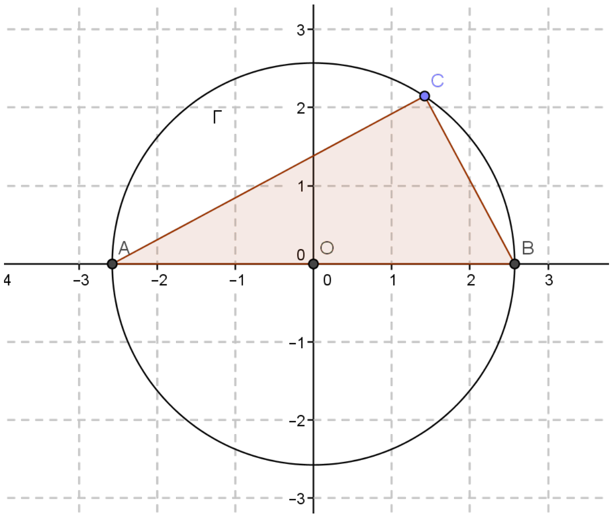


Figura 89 – Exercício 4

círculo, C é um ponto qualquer do círculo. Como na Figura 89. Responda:

(a) Qual teorema famoso que conhecemos da Geometria está relacionado aos triângulos retângulos?

(b) Na Geometria Analítica, como calculamos a medida dos lados de um triângulo?

(c) Se um ponto pertence ao círculo que sentença ele deve satisfazer?

(d) Agora com a Figura 89 e as respostas das perguntas anteriores, prove: Se um triângulo está inscrito num círculo e o maior lado do triângulo é um diâmetro do círculo, então esse triângulo é retângulo.

ANEXO D – Atividade da análise da equação geral do círculo e o método de comparação

Parte 1 - Equação Geral do Círculo

1. Escreva no caderno a equação reduzida do círculo de centro em $C(3, 1)$ e raio 2.

   a) No caderno, desenvolva os quadrados da equação obtida e ordene seus termos como aparecem na equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

   b) Indique: $A =$ ___ $B =$ ___ $C =$ ___ $D =$ ___ $E =$ ___ $F =$ ___

2. No caderno, escreva a equação reduzida do círculo de centro em $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ e raio $r = \frac{5}{2}$.

   a) No caderno, desenvolva os quadrados da equação e ordene seus termos como aparecem na equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Deixe todos os coeficientes inteiros.

   b) Indique: $A =$ ___ $B =$ ___ $C =$ ___ $D =$ ___ $E =$ ___ $F =$ ___

3. No GeoGebra, faça os círculos anteriores. Sugestão: digite diretamente na caixa de Entrada.

   Observação D.0.16. a) O GeoGebra admite na Janela de Álgebra a equação reduzida do círculo, mas também podemos alterar o formato da equação.

   b) Por vezes, ao digitar uma equação na forma geral, o GeoGebra mostra na Janela de Álgebra a equação reduzida. Neste caso não é necessário mudar o formato, como indicado no item a seguir.

4. Mude o formato das equações para $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = f$ e confira os resultados dos itens 1 e 2.

   Observação D.0.17. a) Há uma diferença da equação geral do círculo em relação ao formato do GeoGebra: o termo independente é posto no 2º membro da equação.

   b) Podemos conferir o resultado de outra forma: usando a Janela CAS. Habilite-a: Barra de Menus → Exibir → Janela CAS e:

i. Digite a equação reduzida do círculo na primeira linha da Janela CAS e tecle *Enter*. A equação estará semelhante ao formato desejado, apenas o termo independente não estará explícito, pois há uma constante antes do sinal de igual e outra depois do sinal de igual.

ii. Clicando na "bolinha" ao lado da equação mostrada, na Janela CAS, o GeoGebra esboça o traço do círculo.

5. É possível estabelecer alguma relação dos parâmetros x_c, y_c e r da equação reduzida com A, B, C, D, E e F da equação completa do 2º grau?
   ( ) Não ( ) Sim ( ) Nem todos
   $A =$ ___ $B =$ ___ $C =$ ___ $D =$ ___ $E =$ ___ $F =$ ___

Parte 2 - Centro e raio do círculo a partir da equação geral do círculo

1. No caderno, escreva a equação reduzida do círculo de centro $C(x_c, y_c)$ e raio r.

2. No caderno, desenvolva os quadrados da equação obtida e ordene seus termos como aparecem na equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

3. Indique $A =$ ___ $B =$ ___ $C =$ ____ $D =$ ____ $E =$ ____ $F =$ _____

   Observação D.0.18. A partir das igualdades anteriores relacionadas a D, E e F podemos encontrar os coeficientes x_c, y_c e r. Para isso basta substituir nessas igualdades os dados da equação geral e isolar a constante que queremos. Em D, descobrimos o valor de x_c, em E, descobrimos o valor de y_c. Com os valores de x_c e de y_c, encontramos, em F o valor de r. E assim determinamos o centro $C(x_c, y_c)$ do círculo e seu raio r.

4. No caderno, encontre as coordenadas do centro e raio do círculo de equação: $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 20 = 0$.

5. Digite a equação do círculo no GeoGebra, altere o formato da equação e confira o resultado do item anterior.

6. No caderno, encontre as coordenadas do centro e raio do círculo de equação: $x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$.

7. Digite a equação do círculo no GeoGebra, altere o formato da equação e confira o resultado do item anterior.

   Observação D.0.19. As relações citadas no item 3 são válidas exclusivamente se $A = C = 1$. Não precisamos definir novas relações se estes coeficientes não forem iguais a 1. Basta dividir por um número conveniente e, então, aplicar as relações usadas nos itens anteriores.

8. No caderno, determine as coordenadas do centro e raio do círculo de equação: $3x^2 + 3y^2 - 12x - 18y = 0$.

9. Digite a equação do círculo no GeoGebra, altere o formato da equação e compare com o resultado do item anterior.

ANEXO E – Atividade de análise da equação completa de 2º grau a duas variáveis

Parte 1 - Análise da equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Considere a equação geral completa do 2º grau a duas variáveis $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Digite as equações no GeoGebra e registre a curva formada no lugar indicado. O GeoGebra identifica a curva, basta passar o *mouse* por cima do seu traçado ou da sua equação com a ferramenta Mover selecionada. Indique o centro e o raio da curva SOMENTE SE A EQUAÇÃO REPRESENTAR UM CÍRCULO, observando a equação reduzida na Janela de Álgebra. Antes de traçar uma próxima curva, esconda as anteriores para evitar a poluição visual da Janela de Visualização.

1. $16x^2 + 16y^2 + 64x - 56y + 97 = 0$

   a) $A =$ ___ $B =$ ___ $C =$ ___ $D =$ ___ $E =$ ___ $F =$ ___

   b) Curva: ____________ Centro? ________ Raio? ______

2. $2x^2 + 3y^2 - 4x + 9y - 17 = 0$

   a) $A =$ ___ $B =$ ___ $C =$ ___ $D =$ ___ $E =$ ___ $F =$ ___

   b) Curva: ____________ Centro? ________ Raio? ______

3. $2x^2 - 2y^2 + 5x - 12y + 19 = 0$

   a) $A =$ ___ $B =$ ___ $C =$ ___ $D =$ ___ $E =$ ___ $F =$ ___

   b) Curva: ____________ Centro? ________ Raio? ______

4. $x^2 + 2xy + y^2 + 3x + 8y + 7 = 0$

   a) $A =$ ___ $B =$ ___ $C =$ ___ $D =$ ___ $E =$ ___ $F =$ ___

   b) Curva: ____________ Centro? ________ Raio? ______

5. $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$

   a) $A =$ ___ $B =$ ___ $C =$ ___ $D =$ ___ $E =$ ___ $F =$ ___

   b) Curva: ____________ Centro? ________ Raio? ______

6. $x^2 + 5x - 4y + 9 = 0$

   a) $A =$ ___ $B =$ ___ $C =$ ___ $D =$ ___ $E =$ ___ $F =$ ___

   b) Curva: ____________ Centro? ________ Raio? ______

7. $2x^2 + 2y^2 + 4x - 5y + 12 = 0$

   a) $A =$ ___ $B =$ ___ $C =$ ___ $D =$ ___ $E =$ ___ $F =$ ___

   b) Curva: ____________ Centro? ________ Raio? ______

8. $3x^2 + 3y^2 + 18x + 24y + 21 = 0$

   a) $A =$ ___ $B =$ ___ $C =$ ___ $D =$ ___ $E =$ ___ $F =$ ___

   b) Curva: ____________ Centro? ________ Raio? ______

9. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13 = 0$

   a) $A =$ ___ $B =$ ___ $C =$ ___ $D =$ ___ $E =$ ___ $F =$ ___

   b) Curva: ____________ Centro? ________ Raio? ______

10. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0$

   a) $A =$ ___ $B =$ ___ $C =$ ___ $D =$ ___ $E =$ ___ $F =$ ___

   b) Curva: ____________ Centro? ________ Raio? ______

Parte 2 - Condições necessárias para que as equações representem círculos

1. De todas as equações trabalhadas na parte 1 reescreva no espaço abaixo aquelas que representam círculos:

   a) ______________________________

   b) ______________________________

   c) ______________________________

   d) ______________________________

2. Das equações que representam círculos observe os coeficientes A, B e C. Compare os coeficientes entre si.

   a) Qual a relação entre os coeficientes A e C?

   b) Qual deve ser o valor do coeficiente B?

   c) Essas condições bastam para que uma equação seja de um círculo? Verifique nos itens 1 a 10 se existem outras equações que satisfaçam estas condições, mas não sejam círculos.

Parte 3 - Condições suficientes para que as equações representem círculos

1. No caderno, proceda como de costume para determinar as coordenadas do centro e raio do círculo a partir da equação geral. Analise o que acontece.

   a) Equação 7 - Parte 1) $2x^2 + 2y^2 + 4x - 5y + 12 = 0$

   b) Por que na Janela de Visualização do GeoGebra não aparece o traço da curva?

   c) Equação 9 - Parte 1) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13 = 0$

   d) Por que na Janela de Visualização do GeoGebra aparece apenas um ponto para esta equação?

2. Descreva qual o significado geométrico da equação $Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$ quando associamos a equação geral do círculo se:

   a) $r^2 < 0$: ___________________

   b) $r^2 = 0$: ___________________

   c) $r^2 > 0$: ___________________

   Observação E.0.20. Queremos saber a condição entre os coeficientes A, B, C, D, E e F para que a equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ represente um círculo. Já sabemos que $A = C \neq 0$ e $B = 0$. Sabemos também que podemos usar as relações $D = -2x_c$, $E = -2y_c$ e $F = x_c^2 + y_c^2 - r^2$ se, e só se $A = C = 1$.

3. Tome a equação $Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$ e divida por um número conveniente para que os coeficientes de x^2 e y^2 sejam iguais a unidade, ou seja, assuma a forma: $x^2 + y^2 + D'x + E'y + F' = 0$.

4. Relacione os coeficientes D', E' e F' com A, D, E e F.

5. Use as igualdades $D' = -2x_c$, $E' = -2y_c$ e $F' = x_c^2 + y_c^2 - r^2$ para determinar:

   a) x_c dependendo de A e D.

   b) y_c dependendo de A e E.

   c) r^2 dependendo de A, D, E e F.

6. Reescreva a condição de r^2 do item 2 para a equação representar um círculo.

7. Una os dois últimos resultados e estabeleça uma sentença envolvendo os coeficientes A, B, C, D, E e F para que a equação geral do 2º grau a duas variáveis represente um círculo.

ANEXO F – Atividade de completar quadrados

Transformar a equação geral do círculo em equação reduzida

Para não dependermos da memorização de mais fórmulas para obter as coordenadas do centro e a medida do raio de um círculo a partir da equação geral podemos usar uma ferramenta algébrica para passar da forma geral para reduzida. Forma em que facilmente são reconhecidos os elementos principais do círculo. Precisaremos apenas lembrar dos produtos notáveis: quadrado da soma e quadrado da diferença. Esse método é chamado de Completar Quadrados.

1. Reescreva os trinômios a seguir como um quadrado da soma, ou da diferença, lembrando que $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ ou $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$.

   a) $x^2 - 2x + 1 =$ d) $y^2 + 4y + 4 =$

   b) $x^2 - 6x + 9 =$ e) $y^2 + 14y + 49 =$

   c) $x^2 + 5x + \frac{25}{4} =$ f) $y^2 - 3y + \frac{9}{4} =$

2. Confira seus resultados usando a Janela CAS. Vamos explicar o primeiro exemplo. Para conferir os demais, basta seguir os mesmos passos.

   a) Acesse na Barra de Menus: Menu Exibir → Janela CAS. A Janela de Álgebra não precisa estar aberta.

   b) Digite na linha 1 a expressão $x^2 - 2x + 1$.

   c) Clique no quarto botão da barra de ferramentas da Janela CAS: botão Fatorar.

   d) Verifique o resultado com sua resposta.

3. Que constante falta acrescentar nas expressões abaixo para completar o quadrado? Após acrescentar, complete o quadrado.

   a) $x^2 + 8x + \quad =$ d) $y^2 - 18y + \quad =$

   b) $x^2 + 10x + \quad =$ e) $y^2 + 16y + \quad =$

   c) $x^2 - 7x + \quad =$ f) $y^2 - 9y + \quad =$

   Observação F.0.21. Confira os resultados usando a Janela CAS novamente como no item 1. Agora a sua resposta estará correta se o resultado da fatoração for um binômio no formato $(x \pm a)^2$. Se na fatoração o resultado for um produto de dois binômios ou o trinômio propriamente dito a constante que precisamos acrescentar não está correta.

Observação F.0.22. Na equação do círculo se só somarmos uma constante para completar um quadrado estamos alterando o resultado desta equação e assim encontraríamos um valor errado para o raio. Por isso, na matemática é muito usado o artifício de SOMAR ZERO, ou seja, somar o número que precisamos em ambos membros da equação para não alterar a igualdade da mesma. Observe atentamente o exemplo abaixo:
Equação Dada $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$

Passo 1	$x^2 - 2x + y^2 + 4y = 11$	$\rightarrow$ Reordenar: separar variáveis.
Passo 2	$x^2 - 2x \boxed{+1} + y^2 + 4y \boxed{+4} = 11 \boxed{+1+4}$	$\rightarrow$ Acrescentar as constantes.
Passo 3	$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$	$\rightarrow$ Completar os quadrados.
Passo 4	Centro $C(1, -2)$ e raio $r = 4$.	$\rightarrow$ Determinar centro e raio.

4. No caderno, use os mesmos procedimentos para obter o centro e o raio do círculo, cuja equação geral é:

   a) $x^2 + y^2 - 6x + 14y - 42 = 0$

   b) $x^2 + y^2 + 10x - 18y + 42 = 0$

   c) $x^2 + y^2 + 8x + 16y - 64 = 0$

   d) $x^2 + y^2 - 7x + 9y + 32 = 0$

   e) $2x^2 + 2y^2 + 10x - 6x - 1 = 0$

Observação F.0.23. a) Para conferir os resultado dos exercício 4, digite a equação geral do círculo na barra de Entrada do GeoGebra.

b) Verifique a equação mostrada na Janela de Álgebra. Esta equação, geralmente é convertida automaticamente pelo GeoGebra na equação reduzida do círculo.

c) Se a equação não for convertida, como citado no item anterior, clique com o botão direito do *mouse* na equação ou no próprio círculo e selecione a opção: Equação $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$.

ANEXO G – Atividade de análise das posições relativa entre ponto e círculo

Parte 1 - Critério para Posição Relativa entre Ponto e círculo

Observação G.0.24. O círculo divide o plano em duas partes, assim podemos dizer que o círculo é a fronteira entre a região interior e exterior. Dessa forma, um ponto pode estar:

i) No círculo - Um ponto pertencente a curva (linha).

ii) Na região interna - Um ponto interior ao círculo.

iii) Na região externa - Um ponto exterior ao círculo.

Para determinar um meio de como descobrir se um ponto pertence ao círculo, a sua região interior ou exterior, execute as seguintes instruções no GeoGebra:

1. Defina um círculo usando Centro e Um de Seus Pontos. Procure valores inteiros para as coordenadas e medida do raio.
2. Renomeie o centro do círculo para C.
3. Faça um segmento que liga o centro do círculo e o ponto B, que pertence a ele. Será o segmento CB.
4. Observe a medida do segmento CB na Janela de Álgebra.
5. A medida do segmento CB representa o que para o círculo?
6. Que conteúdo de Geometria Analítica se relaciona- com o cálculo da medida de um segmento?
7. Calcule a distância do ponto C ao ponto B.

   Observação G.0.25. A equação reduzida do círculo nos informa o centro C e o raio r do círculo diretamente.

8. Lembre-se da definição de círculo e complete: Um ponto P, do plano, pertence a um círculo se, e só se:

9. Agora insira um ponto A, que esteja na região externa do círculo.

10. Faça um segmento ligando o ponto A ao centro C do círculo: segmento CA. Calcule a distância entre A e C.

11. Mova o ponto A, sem deixar de pertencer à região exterior do círculo. Observe o valor da distância $\overline{CA}$ e compare com o valor da distância $\overline{CB}$.

12. Pelo resultado do item anterior, complete: Um ponto P, do plano, é exterior ao círculo se, e só se:

13. Mova o ponto A para que esteja na região interna do círculo. Mova o ponto A, sem deixar de pertencer à região interior do círculo. Observe o valor da distância $\overline{CA}$ e compare com o valor da distância $\overline{CB}$.

14. Pelo resultado do item anterior, complete: Um ponto P, do plano, é interior ao círculo se, e só se:

Parte 2 - Resumo dos critérios da posição relativa: Ponto $\times$ Círculo

1. Preencha o Quadro 6 com os resultados da parte 1.

   Quadro 6 – Critérios para determinar a posição relativa entre ponto e círculo

Posição Relativa	Critério adotado
P pertence ao círculo	$d(C, P) = r$
P exterior ao círculo	$d(C, P) > r$
P interior ao círculo	$d(C, P) < r$

2. Qual sequência de procedimentos deve ser adotada para determinar a posição relativa de um ponto $P(x_p, y_p)$ e um círculo de equação $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$? Listamos os procedimentos necessários para responder a esta pergunta, contudo embaralhados. São eles:

Comparar a distância $d(C, P)$ com o raio r.
Determinar o centro C e o raio r do círculo.
Concluir qual a posição relativa.
Calcular a distância do ponto ao centro: $d(P, C)$.

   Organize na ordem adequada, determinando os passos a seguir:

Passo 1 ____________________________________

Passo 2 ____________________________________

Passo 3 ____________________________________

Passo 4 ____________________________________

Parte 3 - Exercícios

1. Desenvolva no caderno. Determine algebricamente a que região do plano determinado pelo círculo $\Gamma : (x-3)^2+(y+1)^2 = 13$ estão os pontos $A(0,0)$, $B(0,2)$, $D(4,3)$ e $E(6,-3)$.

   Observação G.0.26. Os exercícios podem ser conferidos com a ferramenta Distância, Comprimento ou Perímetro do GeoGebra, embora algebricamente tenhamos o resultado exato e no GeoGebra o resultado com apenas duas casas decimais após a vírgula.

2. O círculo central da Figura 90, construída no GeoGebra, possui equação $\Gamma : x^2+y^2 = 81$ em que a linha de meio de campo relaciona-se com o eixo oy e a bola no momento inicial do jogo fica na origem do plano cartesiano. Neste contexto, os jogadores Jonelson e Wanderson do time Esporte Clube Várzea Seca foram designados para ocupar a posição em cima da linha do círculo. Verifique se eles realmente ocuparam a posição correta. Em caso contrário, determine a posição dos jogadores em relação ao círculo central, assim como a posição do árbitro. Considere que os pontos $J(-7,6)$, $W(-8,-4)$ e $A(4,6)$ representam as posições de Jonelson, Wanderson e o árbitro no começo do jogo.

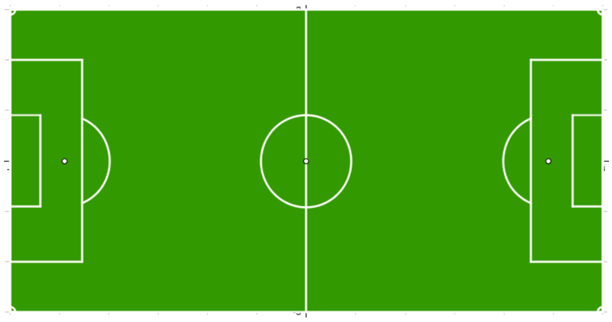


Figura 90 – Campo de Futebol

3. Um controlador de tráfego aéreo militar vê em seu radar dois aviões não identificados. A tela do radar é formada por quatro círculos concêntricos, inseridos num plano cartesiano, em que o centro dos círculos é a posição da torre de controle. As equações destes círculos são: $\Gamma_1 : (x-4)^2+(y-3)^2 = 100$, $\Gamma_2 : (x-4)^2+(y-3)^2 = 144$, $\Gamma_3 : (x-4)^2+(y-3)^2 = 196$ e $\Gamma_4 : (x-4)^2+(y-3)^2 = 256$, como mostra a Figura 91. Os procedimentos de defesa adotados são:

   a) Se um avião entrar na região da coroa circular formada por Γ_3 e Γ_4 é pedida sua identificação.

b) Se um avião, ainda não identificado, entrar na região da coroa circular formada por Γ_2 e Γ_3 é avisado dos procedimentos de interceptação e abate.

c) Se um avião, ainda não identificado, entrar na região da coroa circular formada por Γ_1 e Γ_2 é acompanhado por dois caças enviados pela base militar.

d) Se um avião, ainda não identificado, entrar na região interna do círculo Γ_1 ele é abatido.

e) Se um avião, ainda não identificado, estiver exatamente sobre um dos círculos o procedimento mais brando entre as regiões fronteiriças é adotado.

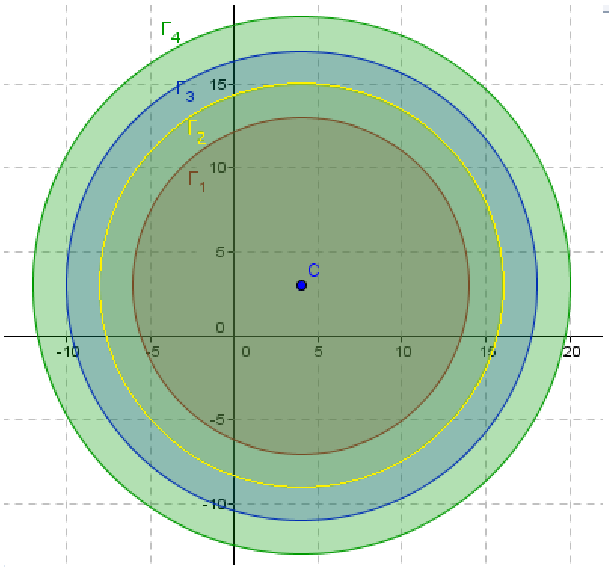


Figura 91 – Radar

Neste momento os aviões não identificados estão nas coordenadas $A(10,-5)$ e $B(-7,-4)$. Quais procedimentos de defesa devem ser adotados para estes aviões? Justifique sua resposta.

ANEXO H – Atividade de análise das posições relativas entre reta e círculo

Parte 1 - Primeira Análise

1. No caderno, desenhe as três possibilidades de posição entre círculo e reta.
2. O número de interseções das retas com o círculo definiria um critério para determinar qual posição relativa existe entre uma reta e um círculo? ( ) Sim ( ) Não. Justifique.
3. Para determinar os pontos comuns ao círculo e a reta, algebricamente, o que teria que ser resolvido?
4. Obtenha a posição relativa entre a reta s e o círculo Γ, cujas equação são : s : $2x - 3y + 8 = 0$ e o círculo $\Gamma : (x-5)^2 + (y-9)^2 = 5$.

   Observação H.0.27. Podemos verificar a posição relativa no GeoGebra fazendo a interseção entre reta e o círculo.

Parte 2 - Outro critério para determinar a posição entre reta e círculo

No GeoGebra:

1. Faça um círculo usando a ferramenta Círculo dados Centro e Um de seus Pontos.
2. Renomeie o centro do círculo para C.
3. Determine o segmento CB e calcule a distância entre C e B.
4. O que a medida do segmento CB representa para o círculo?
5. Faça uma reta a, qualquer por dois pontos A e D, desde que a reta não passe pelo centro do círculo.
6. Obtenha a reta b, perpendicular à reta a, passando pelo centro do Círculo.
7. Obtenha o ponto E, de intersecção entre as retas a e b.
8. Obtenha o segmento CE, de extremos no centro do círculo e na interseção das retas.
9. Esconda a reta b.
10. Por construção, fizemos o segmento CE perpendicular à reta a. O segmento CE é o menor caminho que liga o centro à reta a?
11. Então, o que a medida do segmento CE representa em relação ao ponto C e à reta a?
12. Calcule a distância entre o ponto C e a reta a.
13. Mova a reta a comparando as distâncias $\overline{Ca}$ e $\overline{CB}$.
14. Mova a reta a de maneira que ela seja EXTERIOR ao círculo. Observe e compare as distâncias $\overline{Ca}$ e $\overline{CB}$.
15. Para generalizar os resultados: Considere os itens 4, 11 e 14 e complete: Uma reta s é exterior ao círculo Γ de centro C e raio r se, e somente se:
16. Mova a reta a de maneira que ela seja TANGENTE ao círculo. Observe e compare as distâncias $\overline{Ca}$ e $\overline{CB}$.
17. Para generalizar os resultados: Considere os itens 4, 11 e 16 e complete: A reta s é tangente ao círculo Γ de centro C e raio r se, e somente se:
18. Mova a reta a de maneira que ela seja SECANTE ao círculo. Observe e compare as distâncias $\overline{Ca}$ e $\overline{CB}$.
19. Para generalizar os resultados: Considere os itens 4, 11 e 18 e complete: A reta s é secante ao círculo Γ de centro C e raio r se, e somente se:

Parte 3 - Conclusão e exercícios

1. Preencha o Quadro 7 com os resultados da parte 2.

Quadro 7 – Critérios para determinar a posição relativa entre reta e círculo

Posição Relativa	Critério adotado
s exterior ao círculo	
s tangente ao círculo	
s secante ao círculo	

2. **Exercício** Considere o círculo Γ de equação: $\Gamma \ : \ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ e as retas de equação $a: \ x - 15y + 105 = 0$, $b: \ x + y - 4 = 0$, $s: 3x - 4y - 20 = 0$ e $h: \ 6x + 5y + 28 = 0$. Determine a posição relativa entre as retas a, b, s e h em relação ao círculo.

   Observação H.0.28. O aluno pode verificar este exercício digitando as equações da reta e do círculo na barra de Entrada do GeoGebra. Retificando em seguida o centro do círculo: usando a ferramenta Ponto Médio ou Centro, ou inserindo o ponto conhecido já que temos a equação reduzida do círculo. Em seguida, podemos calcular a distância do centro à reta e verificar o critério da posição relativa.

3. **Desafio** Na Figura 92 a reta t é tangente ao círculo Γ, de centro C, pertencente ao eixo ox, e raio 7. A equação da reta é $t: \ y = -\frac{7}{24}x + \frac{7}{2}$. P é o ponto de interseção da reta t e o eixo ox e A é ponto de interseção de Γ e t. Nessas condições, determine a equação do círculo Γ.

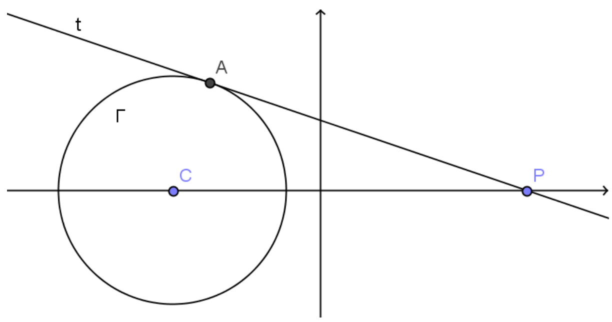


Figura 92 – Desafio

ANEXO I – Atividade de análise das posições relativas entre dois círculos

Parte 1 - Discussão Inicial

1. Esboce, no caderno, as posições possíveis entre dois círculos, apenas um esquema. Dica: São seis. (Desconsideramos círculos coincidentes).

2. Peça ao professor a folha intitulada Posições Relativas entre dois Círculos. Nela está todas as posições relativas possíveis com a definição de cada uma e os termos usados para nos referirmos a elas.

3. O número de pontos em que os círculos se interseccionam serve de critério para sabermos a posição relativa entre os círculos? ( ) Sim ( ) Não
   Justifique sua resposta.

   Observação I.0.29. Para determinar a posição relativa entre dois círculos teremos suas equações. Assim obteremos os centros de ambas, assim como a medida de seus raios. Serão essas as informações necessárias para determinar a posição relativa entre dois círculos.

4. Apenas com o centro dos círculos e seus raios é possível identificar alguma das posições relativas? Qual? Justifique sua resposta.

5. Considere dois círculos de centros C_1 e C_2 e raios r_1 e r_2, respectivamente. Qual o sinal de desigualdade, $<$ ou $>$ correto para preencher a lacuna na sentença abaixo:

$$r_1 + r_2 \ \underline{\qquad} \ |r_1 - r_2|$$

6. Considere $a < b$, sabendo que a e b são números reais positivos, responda:

   a) Se $c < a$, então $c < b$? ( ) Sim ( ) Não

   b) Se $c < b$, então $c < a$? ( ) Sim ( ) Não

   c) Se $c > a$, então $c > b$? ( ) Sim ( ) Não

   d) Se $c > b$, então $c > a$? ( ) Sim ( ) Não

Parte 2 - Continuação das análises

Observação I.0.30. Retomando os resultados dos itens 5 e 6 da parte 1, sabemos ser sempre verdade que $|r_1 - r_2| < r_1 + r_2$, já que r_1 e r_2 representam raios dos círculos e portanto valores positivos. Aprofundaremos a análise das desigualdades que nos auxiliarão a determinar os critérios das posições relativas entre dois círculos de maneira mais eficiente. Dessa forma, nos próximos itens associaremos o valor a, citado no item 6 da parte 1, ao número $|r_1 - r_2|$ e o valor b ao número $r_1 + r_2$.

1. Preencha as lacunas abaixo com o sinal adequado de desigualdade: $<$ ou $>$.

   a) Se $c < |r_1 - r_2|$, então c ___ $r_1 + r_2$.

   b) Se $c > r_1 + r_2$, então c ___ $|r_1 - r_2|$.

   Observação I.0.31. Considerando a condição $a < b$.

   I. "Se $c < a$, então $c < b$." significa que não precisamos verificar $c < b$ se já sabemos que $c < a$. É automático.

   II. "Se $c > b$, então $c > a$." significa que não precisamos verificar $c > a$ se já temos $c > b$.

   III. Se $c < b$, com $a < b$, não sabemos se $c < a$ ou $a < c$, precisaríamos verificar qual das duas desigualdades acontecem. Só então, concluímos se $a < c < b$ ou $c < a$.

   IV. Se $c < a$ é redundante dizer que $c < a < b$, pois $a < b$ é condição pré-estabelecida.

   V. Essas desigualdades são geradas a partir da comparação de um número com outros dois. Como dissemos, às vezes basta comparar com um deles, pois a relação com o outro é automática. Será necessário aplicar esse raciocínio na parte 3 desta atividade. Aqui comparar quer dizer decidir qual relação de desigualdade é válida, qual o maior? Qual o menor?

Parte 3 - Explorando o arquivo circulo×circulo.ggb do GeoGebra

1. Abra o arquivo circulo×circulo.ggb do GeoGebra.

   Observação I.0.32. Os objetos que podem ser alterados são: os centros, embora só em movimentos direita $\leftrightarrows$ esquerda possam ser feitos; os raios dos círculos nos controles, chamados Controles Deslizantes, localizados no canto superior esquerdo da Janela de Visualização.

2. Mova os controles deslizantes e veja como se comporta a construção. Observe o que representam os segmentos AB, CD e EF. Também mova os centros dos círculos.

   Observação I.0.33. Perceba que mesmo movendo os centros só na direção esquerda $\leftrightarrows$ direita, os círculos assumem todas as posições relativas possíveis.

3. Coloque o centro C_1 no meio do primeiro quadrante de forma a ficar com as coordenadas inteiras.

4. Escolha para o raio r_1 um dos valores: 2, 3 ou 4. Medidas inteiras facilitam a visualização.

5. Escolha para o raio r_2 um valor inteiro menor que o valor de r_1.

6. Coloque C_2 numa posição à esquerda de C_1 de maneira que os círculos sejam exteriores.

7. Mova C_2 lentamente para a esquerda e observe todas as posições relativas possíveis assumidas: Exteriores $\rightarrow$ Tangentes Exteriores $\rightarrow$ Secantes $\rightarrow$ Tangentes Interiores $\rightarrow$ Interiores $\rightarrow$ Concêntricas $\rightarrow$ Interiores $\rightarrow$ Tangentes Interiores $\rightarrow$ Secantes $\rightarrow$ Tangentes Exteriores $\rightarrow$ Exteriores.

   Observação I.0.34. Para fixar a posição relativa tangente interior ou tangente exterior tenha o cuidado de parar numa posição em que o GeoGebra mostre os pontos de interseção coincidentes entre os círculos.

Parte 4 - Posições relativas entre dois círculos

1. **Análise da posição: Círculos Exteriores**

   a) Mova o centro C_1 para a esquerda, mantendo-o no primeiro quadrante e modifique os raios de forma a manter os círculos exteriores.

   b) Mova apenas C_2 sempre mantendo os círculos exteriores.

   c) Compare a medida do segmento $CD = d(C_1, C_2)$ com a medida dos segmentos $AB = r_1 + r_2$ e $EF = |r_1 - r_2|$.

   d) Agora, apenas altere o raio r_2 mantendo os círculos exteriores.

   e) Compare a medida do segmento $CD = d(C_1, C_2)$ com a medida dos segmentos $AB = r_1 + r_2$ e $EF = |r_1 - r_2|$.

   f) Preencha as lacunas abaixo com o sinal adequado: $<$, $>$, $=$, $\leq$ ou $\geq$.

      i. $d(C_1, C_2)$ _____ $r_1 + r_2$

      ii. $d(C_1, C_2)$ _____ $|r_1 - r_2|$

   g) Lembre-se do item 1 e da Observação I.0.31 da Parte 2 e responda: Para termos dois círculos exteriores é necessário satisfazer às duas condições anteriores, do item f, subitens i. e ii.?

      i. ( ) Sim. Então, unindo as duas sentenças, como fica a condição?

      ii. ( ) Não. Então é suficiente satisfazer qual das condições?

2. **Análise da posição: Círculos Tangentes Exteriores**

   Observação I.0.35. Quando os círculos estão tangentes exteriores, o GeoGebra mostra os pontos de interseção coincidentes: $P \equiv Q$. É mais fácil definir essa posição quando os centros e os raios assumem valores inteiros.

   a) Mova o centro C_1 para o meio do primeiro quadrante, mova C_2 e modifique os raios de forma a obter círculos tangentes exteriores.

   b) Quando encontrar círculos tangentes exteriores, compare a medida do segmento $CD = d(C_1, C_2)$ com a medida dos segmentos $AB = r_1 + r_2$ e $EF = |r_1 - r_2|$.

   c) Mova o centro C_2, modifique os raios de forma a obter outra posição em que os círculos são tangentes exteriores.

   d) Compare a medida do segmento $CD = d(C_1, C_2)$ com a medida dos segmentos $AB = r_1 + r_2$ e $EF = |r_1 - r_2|$.

   e) Procure outras posições em que os círculos sejam tangentes exteriores e compare os segmentos novamente.

   f) Preencha as lacunas abaixo com o sinal adequado: $<$, $>$, $=$, $\leq$ ou $\geq$.

i. $d(C_1, C_2)$ ____ $r_1 + r_2$

ii. $d(C_1, C_2)$ ____ $|r_1 - r_2|$

g) Lembre-se do item 1 e da Observação I.0.31 da Parte 2 e responda: Para termos dois círculos tangentes exteriores é necessário satisfazer às duas condições anteriores, do item f, subitens i. e ii.?

i. ( ) Sim. Então, unindo as duas sentenças, como fica a condição?

ii. ( ) Não. Então é suficiente satisfazer qual das condições?

3. **Análise da posição: Círculos Tangentes Interiores**

Observação I.0.36. Quando os círculos estão tangentes interiores, o GeoGebra mostra os pontos de interseção coincidentes: $P \equiv Q$. É mais fácil definir essa posição quando os centros e os raios assumem valores inteiros.

a) Mova C_2 e modifique os raios de forma a obter círculos tangentes interiores.

b) Quando encontrar círculos tangentes interiores, compare a medida do segmento $CD = d(C_1, C_2)$ com a medida dos segmentos $AB = r_1 + r_2$ e $EF = |r_1 - r_2|$.

c) Mova o centro C_2, modifique os raios e encontre outra forma de obter círculos tangentes interiores.

d) Compare a medida do segmento $CD = d(C_1, C_2)$ com a medida dos segmentos $AB = r_1 + r_2$ e $EF = |r_1 - r_2|$.

e) Procure outras posições em que os círculos sejam tangentes interiores e compare os segmentos novamente.

f) Preencha as lacunas abaixo com o sinal adequado: $<$, $>$, $=$, $\leq$ ou $\geq$.

i. $d(C_1, C_2)$ ____ $r_1 + r_2$

ii. $d(C_1, C_2)$ ____ $|r_1 - r_2|$

g) Lembre-se do item 1 e da Observação I.0.31 da Parte 2 e responda: Para termos dois círculos tangentes interiores é necessário satisfazer as duas condições anteriores, do item f, subitens i. e ii.?

i. ( ) Sim. Então, unindo as duas sentenças a condição fica:

ii. ( ) Não. Então é suficiente satisfazer condição:

4. **Análise da posição: Círculos Interiores**

a) Mova C_2 e modifique os raios de forma a obter círculos interiores.

b) Compare a medida do segmento $CD = d(C_1, C_2)$ com a medida dos segmentos $AB = r_1 + r_2$ e $EF = |r_1 - r_2|$.

c) Mova o centro C_2, modifique os raios e encontre outra forma de obter círculos interiores.

d) Compare a medida do segmento $CD = d(C_1, C_2)$ com a medida dos segmentos $AB = r_1 + r_2$ e $EF = |r_1 - r_2|$.

e) Procure outras posições em que os círculos sejam interiores e compare os segmentos novamente.

f) Preencha as lacunas abaixo com o sinal adequado: $<$, $>$, $=$, $\leq$ ou $\geq$.

   i. $d(C_1, C_2)$ _____ $r_1 + r_2$

   ii. $d(C_1, C_2)$ _____ $|r_1 - r_2|$

g) Lembre-se do item 1 e da Observação I.0.31 da Parte 2 e responda: Para termos dois círculos interiores é necessário satisfazer às duas condições anteriores, do item f, subitens i. e ii.?

   i. ( ) Sim. Então, unindo as duas sentenças, como fica a condição?

   ii. ( ) Não. Então é suficiente satisfazer qual das condições?

5. **Análise da posição: Círculos Secantes**

a) Mova C_2 e modifique os raios de forma a obter círculos secantes.

b) Compare a medida do segmento $CD = d(C_1, C_2)$ com a medida dos segmentos $AB = r_1 + r_2$ e $EF = |r_1 - r_2|$.

c) Mova o centro C_2, modifique os raios e encontre outras formas de obter círculos secantes.

d) Compare a medida do segmento $CD = d(C_1, C_2)$ com a medida dos segmentos $AB = r_1 + r_2$ e $EF = |r_1 - r_2|$.

e) Procure outras posições em que os círculos sejam secantes e compare os segmentos novamente.

f) Preencha as lacunas abaixo com o sinal adequado: $<$, $>$, $=$, $\leq$ ou $\geq$.

   i. $d(C_1, C_2)$ _____ $r_1 + r_2$

   ii. $d(C_1, C_2)$ _____ $|r_1 - r_2|$

g) Lembre-se do item 1 e da Observação I.0.31 da Parte 2 e responda: Para termos dois círculos secantes é necessário satisfazer às duas condições anteriores, do item f, subitens i. e ii.?

   i. ( ) Sim. Então, unindo as duas sentenças, como fica a condição?

   ii. ( ) Não. Então é suficiente satisfazer qual das condições?

Parte 4 - Conclusão

1. Associe a coluna da direita com a da esquerda, isto é, relacione a posição relativa dos círculos de centro C_1 e C_2 e medida dos raios r_1 e r_2, respectivamente aos critérios obtidos na parte 3.

a) Círculos Exteriores	___ $C_1 \equiv C_2$ e $r_1 \neq r_2$
b) Círculos Tangentes Exteriores	___ $d(C_1, C_2) < \|r_1 - r_2\|$
c) Círculos Secantes	___ $d(C_1, C_2) = r_1 + r_2$
d) Círculos Tangentes Interiores	___ $d(C_1, C_2) = \|r_1 - r_2\|$
e) Círculos Interiores	___ $d(C_1, C_2) > r_1 + r_2$
f) Círculos Concêntricos	___ $\|r_1 - r_2\| < d(C_1, C_2) < r_1 + r_2$

2. Preencha o Quadro 8 analisando a posição relativa entre dois círculos.

Quadro 8 – Critérios para determinar a posição relativa entre dois círculos

Posição Relativa	Critério adotado
Círculos Concêntricos	
Círculos Secantes	
Círculos Interiores	
Círculos Tangentes Exteriores	
Círculos Exteriores	
Círculos Tangentes Interiores	

Posições Relativas entre dois círculos

Os círculos estão representados no primeiro quadrante por acaso. Não é o quadrante em que estão que define a posição, pois é RELATIVA!

Círculos Exteriores
Definição: Não possuem intersecção e a região interior não tem área comum. Veja Figura 93.

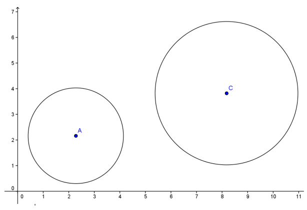


Figura 93 – Círculos exteriores

Círculos Interiores
Definição: Não tem pontos em comum e as regiões internas dos círculos possuem área em comum. Veja Figura 94.

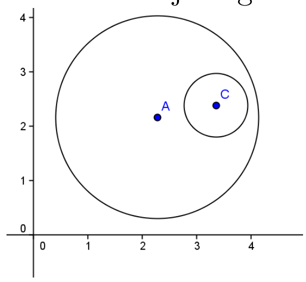


Figura 94 – Círculos interiores

Círculos Tangentes Exteriores
Definição: Tem UM ponto em comum e as regiões internas dos círculos não possuem área em comum. Veja Figura 95.

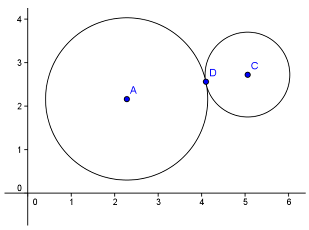


Figura 95 – Círculos tangentes exteriores

Círculos Tangentes Interiores
Definição: Tem UM ponto em comum e as regiões internas dos círculos POSSUEM área em comum. Veja Figura 96.

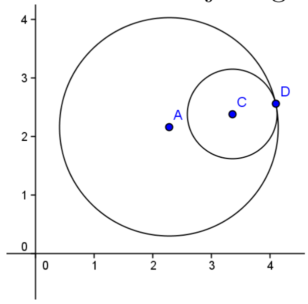


Figura 96 – Círculos tangentes interiores

Círculos Secantes
Definição: Possuem DOIS pontos em comum. Veja Figura 97.

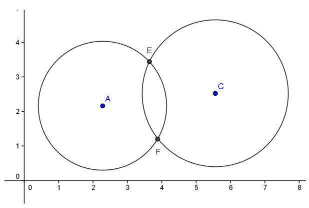


Figura 97 – Círculos secantes

Círculos Concêntricos
Definição: Têm o mesmo centro e raios diferentes. Veja Figura 98.

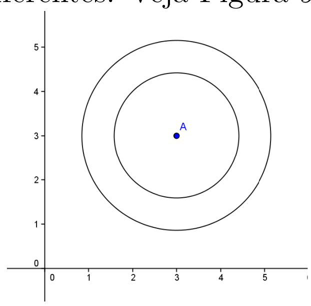


Figura 98 – Círculos concêntricos