JOHNY CARVALHO SILVA

A Influência das Condições Iniciais e das Equações de Estado no Estudo Hidrodinâmico da Interferometria de Píons

Rio Grande
2014

A Influência das Condições Iniciais e das Equações de Estado no Estudo Hidrodinâmico da Interferometria de Píons

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

"A INFLUÊNCIA DAS CONDIÇÕES INICIAIS E DAS EQUAÇÕES DE ESTADO NO ESTUDO HIDRODINÂMICO DA INTERFEROMETRIA DE PÍONS"

JOHNY CARVALHO SILVA

Orientador: Prof. Dr. Otavio Socolowski Junior.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande, como parte dos requesitos necessários para obtenção do título de Mestre em Física.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Otavio Socolowski Junior. (Orientador/FURG)
Prof. Dr. Victor Paulo B. Gonçalves (IFM/UFPel)
Prof. Dr. Cristiano Brenner Mariotto (FURG)
Prof. Dr. Cláudio Masumi Maekawa (Suplente/FURG)

Rio Grande
2014

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Catalogação da Publicação
Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central / FURG

S586i Silva, Johny Carvalho.
A influência das condições iniciais e das equações de estado no estudo hidrodinâmico da interferometria de Píons / Johny Carvalho Silva. – 2014.
155 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande/FURG, Programa de Pós-Graduação em Física.

Orientador: Dr. Otavio Socolowski Junior.

1. Colisão nuclear. 2. Hidrodinâmica. 3. Modelo de Bjorken. 4. Equação de estado. 5. Interferometria de Píons. 6. Efeito HBT. 7. HBT. I. Socolowski Junior, Otavio. II. Título.

CDU 53

Catalogação na fonte: Bibliotecária Flávia Reis de Oliveira CRB10/1946

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE - FURG

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

pgfisica@furg.br - HTTP://www.pgfisica.furg.br

IMEF
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E FÍSICA

"A influência das condições iniciais e das equações de estado no estudo hidrodinâmico da interferometria de píons"

"JOHNY CARVALHO SILVA"

Orientador: Prof. Dr. Otavio Socolowski Junior

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física, Instituto de Matemática, Estatística e Física, da Universidade Federal do Rio Grande - FURG, como parte dos requesitos necessários à obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada por:

Prof. Dr. Otavio Socolowski Junior (Presidente)

Prof. Dr. Victor Paulo Barros Gonçalves

Prof. Dr Cristiano Brenner Mariotto

Rio Grande, 16 de julho de 2014

Aos meus filhos,
Emille e Johny Segundo.

Agradecimento

Ao meu Orientador, Prof. Dr. Otavio Socolowski Junior, inicialmente, pela honra, distinção e confiança em mim depositada ao aceitar-me como seu aluno de mestrado. Com seu profissionalismo, aliado aos seus atributos pessoais: simpatia, camaradagem e cooperação, soube, com rara maestria e bom humor, orientar-me neste trabalho, mesmo nos momentos difíceis, como, por exemplo, período em que fui transferido para o Rio de Janeiro. Ali, com a minha transferência, criou-se uma barreira espacial que tornaria tudo mais difícil. Porém, o professor Otavio com sua capacidade criativa, paciência, elevado estado de espírito e temperamento sociável, driblou, com eficácia, a distância de forma que, sob sua orientação, esta dissertação se concretizasse.

Por fim, quero manifestar, mais uma vez, os meus sinceros agradecimentos, não só pelas orientações, mas também pelos ensinamentos.

Resumo

Neste trabalho, realizamos um estudo de interferometria de píons idênticos, usando um modelo hidrodinâmico com diferentes equações de estado e diferentes condições iniciais. Os cálculos hidrodinâmicos são realizados para colisões centrais Au + Au na energia do RHIC, $\sqrt{s} = 130$A GeV, usando simetria cilíndrica e invariância por boost de Lorentz ao longo do eixo de colisão. Três tipos de equações de estado são usadas: a primeira é para um gás de píons ultrarrelativísticos; a segunda é uma equação de estado com transição de fase de primeira ordem entre um plasma de quarks e glúons (QGP) e um gás de ressonância com correção de volume excluído; a terceira é uma equação de estado da QCD com uma transição do tipo *crossover* entre o QGP e a fase de hádrons. Distribuições de *momentum* transversal de píons e raios HBT para píons são calculados. Os resultados são comparados com dados experimentais das colaborações STAR e PHENIX do RHIC. Conclui-se que os resultados dos raios HBT são muito semelhantes para ambas as equações de estado, primeira ordem e QCD. No entanto, os raios HBT são muito mais sensíveis à introdução de uma velocidade transversal inicial (pré-termalização) nos cálculos hidrodinâmicos, mostrando que as condições iniciais desempenham um papel importante na compreensão dos dados HBT.

Palavras-Chave: Colisão Nuclear; Hidrodinâmica; Modelo de Bjorken; Equação de Estado; Interferometria de Píons; Efeito HBT; Raios HBT.

Abstract

In this work, we perform a study of interferometry of identical pions, by using a hydrodynamical model with different equations of state and different initial conditions. The hydrodynamical calculations are performed for central Au + Au collisions at RHIC energy of $\sqrt{s} = 130\,\mathrm{A}$ GeV, by using cylindrical symmetry and Lorentz boost invariance along the collision axis. Three types of equations of state are used: the first one is for an ultrarelativistic pion gas; the second one is an equation of state with first-order phase transition between a quark-gluon plasma (QGP) and a resonance gas with excluded volume correction; the third one is a QCD equation of state with a crossover transition between the QGP and the hadron phase. Transverse momentum distributions of pions and HBT radii for pions are calculated. The results are compared with experimental data from STAR and PHENIX collaborations at RHIC. We conclude that the results of the HBT radii are very similar for both first order and QCD equations of state. However, the HBT radii are much more sensitive to the introduction of an initial (pre-thermal) transverse velocity in the hydrodynamical calculations, showing that the initial conditions play an important role in understanding HBT data.

Keywords: Nuclear Collision; Hydrodynamics; Bjorken Model; Equation of State; Pion Interferometry; HBT Effect; HBT Radii.

Convenções e Notações

Ao longo deste texto, usaremos $\hbar = c = k_{_B} = 1$, onde $\hbar$ é a constante reduzida de Planck, c é a velocidade da luz e $k_{_B}$ é a constante de Boltzmann. Abaixo, seguem algumas notações utilizadas no texto

$g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$	tensor métrico
$x^\mu = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)$	4-vetor posição x
$u^\mu = \left(u^0, u^1, u^2, u^3\right)$	4-velocidade u
$p^\mu = \left(p^0, p^1, p^2, p^3\right)$	*4-momentum* p
$\tau = \sqrt{t^2 - z^2}$ e $\kappa = \frac{1}{2} \ln \frac{t+z}{t-z}$	coordenadas hiperbólicas do fluido
$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$	coordenada cilíndrica do fluido
$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$	ângulo azimutal associado à posição de um elemento de fluido
$\phi = \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right)$	ângulo azimutal da velocidade do elemento de fluido
$\theta_i, \quad i = 1, 2$	ângulo entre o *momentum* p da partícula e o eixo da colisão
$\theta_{_K}$	ângulo entre o *momentum* médio K de um par de partículas e o eixo da colisão
$K^\mu = \frac{1}{2}\left(p_1^\mu + p_2^\mu\right)$	*momentum* médio K de um par de partículas

$q^\mu = p_1^\mu - p_2^\mu$	*momentum* relativo q de um par de partículas
$u^\mu = (u^0, \boldsymbol{u}) = \gamma(1, \boldsymbol{v})$	4-velocidade do fluido
$\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$	3-velocidade do fluido
$\gamma = \left(1 - \boldsymbol{v}^2\right)^{-\frac{1}{2}}$	fator gama de Lorentz
$v_{_T} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$	velocidade transversal do fluido
$Y_{_T} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + v_{_T}}{1 - v_{_T}}$	rapidez transversal do fluido
$Y_{_L} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + v_z}{1 - v_z}$	rapidez longitudinal do fluido
$C_2(p_1, p_2)$	função de correlação para duas partículas
$S(x, K)$	função de emissão
$\tilde{S}(q, K)$	transformada de Fourier da função de emissão
$E_p = \sqrt{m^2 + p^2}$	energia
$\Theta(x)$	função Degrau de Heaviside
$\delta(x)$	função Delta de Dirac
$\Gamma(x)$	função Gama de Euler
$\zeta(x)$	função Zeta de Riemann

Lista de Figuras

1.1 Composição dos hádrons - Cores dos Quarks. Retirada da referência [26] 33

2.1 Distribuição de partículas carregadas, colaboração PHOBOS, para colisões Au+Au à $\sqrt{s} = 130\,\mathrm{A\ GeV}$, com várias centralidades. As curvas sólidas representam os melhores ajustes para os dados na região $-4,9 < \eta < 4,9$, e as regiões sombreadas representam a faixa de erro. Retirada da referência [40]. 44

2.2 Representação do modelo de Bjorken para uma colisão núcleo-núcleo no plano zt. As linhas cheias (grossas) são as trajetórias dos núcleos que se deslocam quase à velocidade da luz, $v \approx c$. As linhas cheias finas são as coordenadas hiperbólicas τ_0 e τ_{fo} (hipérboles) e a velocidade longitudinal tipo *scaling* z/t que coincide com a rapidez espaçotempo. 49

2.3 Representação modelo de Bjorken – [superior] os núcleos A e B se aproximando do ponto de colisão. [centro] os núcleos colidem no ponto $(z,t) = (0,0)$. [inferior] os núcleos A′ e B′ se afastando do ponto de colisão, deixando um grande número de partículas produzidas em torno de $z = 0$. 55

2.4 Distribuição de partículas carregadas em função da pseudo-rapidez $dN_{ch}/d\eta$, para as centralidades, de cima para baixo, 0–5%, 5–10%, 10–20%, 20–30%, 30–40%, e 40–50%. Dados da colaboração BRAHMS para colisões Au+Au com energia de $\sqrt{s_{_{NN}}} = 130$ GeV. Retirada da referência [51]. 57

2.5 Densidade de energia, em $\mathrm{GeV/fm^3}$, no plano de rapidez média. A esquerda, temos um único evento. A direita, média sobre 30 eventos. Retirada da referência [34]. . . . 58

2.6 Uma representação diferente das mesmas condições iniciais mostrada na figura 2.5, na região central de rapidez. O eixo vertical representa a densidade de energia em unidades de $\mathrm{GeV/fm^3}$. Retirada da referência [34]. 58

3.1 EoS 1ST com correção de volume-excluído, com a fase QGP para os sabores de quarks: *up* (u), *down* (d) e *strange* (s). A temperatura crítica $T_{\mathrm{c}} = 160\,\mathrm{MeV}$ e constante de sacola $B = 380\,\mathrm{MeV/fm^3}$. A esquerda, EoS 1ST até uma densidade de energia de 16 $\mathrm{GeV/fm^3}$. A direita, mostramos a região de transição de fase com mais detalhes. . . . 74

3.2 Comparação dos dados da QCD na rede com extensão temporal $N_\tau = 6$ e $N_\tau = 8$ e o traço, $\mathcal{T}^\mu{}_\mu(T)/T^4$, usando as parametrizações (3.60) e (3.61). As linhas cheia, pontilhada e tracejada correspondem as parametrizações usando $s95p$, $s95n$ e $s90f$ respectivamente. Retirada da referência [58]. 78

3.3 EoS da QCD na rede usando as parametrizações (3.60) e (3.61). No gráfico da esquerda a pressão e densidade de energia e no da direita a velocidade do som, ambos em função da temperatura. Retirada da referência [58]. 79

3.4 Comparação entre as EoS QCD-s95p e 1ST, com temperatura crítica 160 MeV. A esquerda o comportamento das EoS até uma densidade de energia de 16 GeV/fm^3. A direita é mostrado em destaque a região de transição de fase. 80

3.5 Comparação entre as EoS QCD-s95p e 1ST. A quantidade $\varepsilon(T)/T^4$ é adimensional. Neste gráfico fica claro a mudança abrupta da EoS 1ST na região de transição de fase. 80

4.1 Representação simplificada de uma fonte extensa de píons, onde um píon de *momentum* p_1, emitido de x_1 e detectado em x_1' e outro píon idêntico ao primeiro, de *momentum* p_2, emitido de x_2 e detectado em x_2'. Uma vez que os píons são indistinguíveis, existem duas combinações possíveis para esta observação, ilustrada por duas linhas contínuas e duas linhas hachuradas. 88

4.2 Sistema *out-side-long*. A direção *out* é orientada paralela a componente transversal do *momentum* médio, a direção *long* é orientada paralela ao eixo do feixe e a direção *side* é orientada perpendicular a estas duas últimas. Adaptação da referência [69]. 92

4.3 Funções de correlação de Bose-Einstein para π^-. Nos gráficos superior esquerdo, superior direito e abaixo, são mostradas as figuras das funções de correlação nas direções *out, side* e *long*, respectivamente. Em cada figura, a função de correlação é integrado com respeito aos outros dois componentes de 0 a 35 MeV / c, segundo a colaboração STAR. Retirada da referência [76]. 97

4.4 Ilustração da correlação HBT com a parametrização Bertch-Pratt. Nas colisões não-centrais [repesentação à direita], os eixos principais podem ser diferentes das direções *out-side-long*. Adaptado da referência [86]. 98

5.1 Distribuição de píons em função de p_{T} usando o modelo de Bjorken sem expansão transversal, para colisões Au+Au a 130A GeV com centralidade (0–5%). As linhas pontilhada, contínua e hachurada são distribuições teóricas usando as EoS GPI, 1ST e QCD respectivamente. As alturas das curvas foram normalizadas. Os dados experimentais são da colaboração PHENIX [50]. 102

5.2 Distribuição de píons em função de p_{T} usando o modelo de Bjorken com expansão transversal, para colisões Au+Au a 130A GeV com centralidade (0–5%). As linhas contínua, hachurada e tracejada são distribuições teóricas usando as EoS 1ST, QCD e GPI respectivamente. As alturas das curvas foram normalizadas.Os dados experimentais são da colaboração PHENIX [50]. 104

5.3 Distribuição de píons em função de $p_{\rm T}$ usando o modelo de Bjorken com expansão transversal e u_{T_0} com $\alpha = 0.10$, para colisões Au+Au a 130A GeV com centralidade (0–5%). As linhas contínua e hachurada são distribuições teóricas usando as EoS 1ST e QCD respectivamente. As alturas das curvas foram normalizadas. Os dados experimentais são da colaboração PHENIX [50]. 105

5.4 Distribuição de píons em função de $p_{\rm T}$ usando o modelo de Bjorken com expansão transversal e u_{T_0} com $\alpha = 0.12$, para colisões Au+Au a 130A GeV com centralidade (0–5%). As linhas contínua e hachurada são distribuições teóricas usando as EoS 1ST e QCD respectivamente. As alturas das curvas foram normalizadas. Os dados experimentais são da colaboração PHENIX [50]. 106

5.5 A direita (esquerda), mostramos as hipersuperfícies de freeze-out para as EoS 1ST e QCD com (sem) fluxo transversal inicial com velocidade transversal inicial de $u_{T_0} \neq 0$ com $\alpha = 0.1$ ($u_{T_0} = 0$). A densidade de energia inicial é de $10.5\,{\rm GeV/fm^3}$ e a temperatura de freeze-out é de $T_{\rm fo} = 120$ MeV. 107

5.6 A direita (esquerda), mostramos as hipersuperfícies de freeze-out para as EoS 1ST e QCD com (sem) fluxo transversal inicial com velocidade transversal inicial de $u_{T_0} \neq 0$ com $\alpha = 0.12$ ($u_{T_0} = 0$). A densidade de energia inicial é de $10.5\,{\rm GeV/fm^3}$ e a temperatura de freeze-out é de $T_{\rm fo} = 130$ MeV. 107

5.7 Raios HBT para colisão central (0–5%) com $\varepsilon_0 = 10.5\,{\rm GeV/fm^3}$ e $T_{\rm fo} = 120\,{\rm MeV}$. Hidrodinâmica calculada usando a EoS 1ST (QCD) círculo claro (círculo escuro) sem fluxo transversal inicial, $u_{\rm T} = 0$, e cruz clara (cruz escura) com fluxo transversal inicial, $u_{\rm T}$ com $\alpha = 0.10$, os pontos quadrados abertos (quadrados fechados) são dados experimentais da colaboração STAR [81] (PHENIX [82]). 109

5.8 Raios HBT para colisão central (0–5%) com $\varepsilon_0 = 10.5\,{\rm GeV/fm^3}$ e $T_{\rm fo} = 120\,{\rm MeV}$. Hidrodinâmica calculada usando a EoS 1ST (QCD) círculo claro (círculo escuro) sem fluxo transversal inicial, $u_{\rm T} = 0$, e cruz clara (cruz escura) com fluxo transversal inicial, $u_{\rm T}$ com $\alpha = 0.12$, os pontos quadrados abertos (quadrados fechados) são dados experimentais da colaboração STAR [81] (PHENIX [82])). 110

5.9 Raios HBT para colisão central (0–5%) com $\varepsilon_0 = 10.5\,{\rm GeV/fm^3}$ e $T_{\rm fo} = 130\,{\rm MeV}$. Hidrodinâmica calculada usando a EoS 1ST (QCD) círculo claro (círculo escuro) sem fluxo transversal inicial, $u_{\rm T} = 0$, e cruz clara (cruz escura) com fluxo transversal inicial, $u_{\rm T}$ com $\alpha = 0.10$, os pontos quadrados abertos (quadrados fechados) são dados experimentais da colaboração STAR [81] (PHENIX [82]). 111

5.10 Raios HBT para colisão central (0–5%) com $\varepsilon_0 = 10.5\,{\rm GeV/fm^3}$ e $T_{\rm fo} = 130\,{\rm MeV}$. Hidrodinâmica calculada usando a EoS 1ST (QCD) círculo claro (círculo escuro) sem fluxo transversal inicial, $u_{\rm T} = 0$, e cruz clara (cruz escura) com fluxo transversal inicial, $u_{\rm T}$ com $\alpha = 0.12$, os pontos quadrados abertos (quadrados fechados) são dados experimentais da colaboração STAR [81] (PHENIX [82]). 112

5.11 Raios HBT para colisão central (0–5%). Hidrodinâmica calculada usando a EoS 1ST, $T_{\rm fo} = 130\,\mathrm{MeV}$ com as $\varepsilon_0 = 15.8\,\mathrm{GeV/fm^3}$ (cruz), $\varepsilon_0 = 10.5\,\mathrm{GeV/fm^3}$ (círculo escuro) e $\varepsilon_0 = 8.0\,\mathrm{GeV/fm^3}$ (círculo claro). Os pontos quadrados abertos (quadrados fechados) são dados experimentais da colaboração STAR [81] (PHENIX [82]). 113

5.12 Hipersuperfícies de freeze-out para as EoS 1ST e QCD com fluxo transversal inicial. A temperatura de freeze-out é de $T_{\rm fo} = 120$ MeV e o parâmetro $\alpha = 0.10$ para a velocidade transversal inicial. A densidade de energia inicial é de $8.0\,\mathrm{GeV/fm^3}$ (na parte superior), de $10.5\,\mathrm{GeV/fm^3}$ (no centro) e de $15.8\,\mathrm{GeV/fm^3}$ (na parte inferior). . 115

A.1 (a) O parâmetro de impacto b é a distância entre os eixos horizontais que passam pelos centros dos núcleos; (b) Número de nucleons participantes N_{part} (região cinza) e de nucleons espectadores N_{esp} (região branca). Retirada da referência [84]. 124

A.2 Representação esquemática das classes de centralidade (estes valores são ilustrativos não são reais). Retirada da referência [85]. 124

D.1 Aproximação MMC. A área do círculo será determinada como sendo: a probabilidade de encontrarmos pontos dentro do círculo multiplicada pela área do quadrado. 146

Lista de Tabelas

1.1 Lista de partículas conhecidas até 1932 28
1.2 Lista de partículas conhecidas até 1947 30
1.3 Lista de algumas partículas conhecidas até 1965 31
1.4 Partículas fermiônicas e partículas bosônicas do Modelo Padrão 33

3.1 Fator de degenerescência para quarks (g_{q}), glúons (g_{g}) e plasma (g_{qgp}). 69
3.2 Valores de parâmetros para diferentes fits da EoS. 76

Sumário

1 Introdução **25**

1.1 Histórico das Partículas Elementares 27

1.1.1 Partículas conhecidas até 1932 27

1.1.2 Partículas conhecidas até 1947 28

1.1.3 Algumas partículas conhecidas até 1965 30

1.2 Quarks e Cores 31

1.3 Cromodinâmica Quântica 32

2 Hidrodinâmica Relativística **37**

2.1 Equações Hidrodinâmicas para Fluidos Relativísticos 38

2.1.1 Tensor Energia-*Momentum* e Correntes Conservadas 39

2.1.2 Fluido Ideal 40

2.2 Modelo de Bjorken 42

2.2.1 Coordenadas $\tau\rho\varphi\kappa$ e simetria cilíndrica 43

2.3 Desacoplamento 48

2.4 Distribuição de *Momentum* Transversal de Partículas 50

2.4.1 Modelo de Bjorken com Expansão Transversal e Simetria Cilíndrica . . . 52

2.5 Condições Iniciais 53

3 Equação de Estado **61**

3.1 Ensemble Grão-Canônico 61

3.2 Estatística de Fermi-Dirac e Bose-Einstein 62

3.2.1 Gás ideal de Fermi-Dirac 63

3.2.2 Gás ideal de Bose-Einstein 64

3.3 Fase de Plasma de Quarks e Glúons 65

3.4 Fase Hadrônica 69
3.4.1 Correção de Volume-Excluído 71
3.5 Transição de Fase de 1ª Ordem 74
3.6 Equação de Estado da QCD 74

4 Interferometria HBT **83**
4.1 Breve Histórico 83
4.2 Interferometria HBT na Física Nuclear 84
4.3 Correlação de *Momenta* de Píons 85
4.3.1 Função de Correlação de Partículas Idênticas 85
4.4 Parametrização da Função de Correlação 92
4.4.1 Sistema de Coordenadas *Out-Side-Long* 92
4.4.2 Função de Emissão 95
4.5 Raios HBT 98

5 Resultados Numéricos **101**
5.1 Distribuição de Píons em Função de p_{T} 101
5.1.1 Modelo de Bjorken sem Expansão Transversal 101
5.1.2 Modelo de Bjorken com Expansão Transversal 103
5.2 Raio HBT em Função de K_{T} 106

6 Conclusão **117**

A Definições, Equações e Conceitos Básicos **119**
A.1 Rapidez da Partícula e Rapidez do Fluido 119
A.2 Centralidade da Colisão 123
A.3 Transformação de Coordenadas e Derivada Covariante 123
A.4 Coordenadas $txyz$ e Coordenadas $\tau\rho\varphi\kappa$ 125
A.5 Símbolo de Levi-Civita 129

B Modelo de Bjorken **131**
B.1 Modelo de Bjorken sem Expansão Transversal 131
B.2 Modelo de Bjorken com Expansão Transvesal e Simetria Cilíndrica 133
B.3 Ondas de Som no Fluido 137

C Gás Ideal de Bósons Ultrarrelativístico **141**

D Simulação Numérica **145**

D.1 Método Monte Carlo 145

D.1.1 Geradores de Números Pseudo-Aleatórios 146

D.2 Integração por Método Monte Carlo 147

D.2.1 Integrais Multidimensionais 148

D.2.2 *Importance Sampling* 148

Referências Bibliográficas **151**

Capítulo 1

Introdução

"Eu entendo que um homem possa olhar para baixo, para a terra, e ser um ateu; mas não posso conceber que ele olhe para os céus e diga que não existe um Deus."
Abraham Lincoln

O estudo do fenômeno das colisões ultrarrelativísticas de íons pesados, tem como objetivo principal explorar o comportamento da matéria nuclear em condições extremas de temperatura e densidade de energia [1]. Nessas colisões, uma grande quantidade de energia é depositada em uma pequena região do espaço, acredita-se que seja formado um novo estado da matéria, no qual quarks e glúons encontram-se desconfinados, o chamado plasma de quarks e glúons (QGP – Quark Gluon Plasma). Esse plasma pode ter existido nos primeiros instantes após o Big Bang e pode, ainda hoje, existir no interior de estrelas de nêutrons, onde a pressão gravitacional mantém a matéria sob condições extremas. O interesse em se entender as propriedades desse QGP é uma das razões da intensa investigação experimental que são feitas em grandes aceleradores, a saber: o SPS (*Super Proton Syncroton*) do CERN [1] (*European Organization for Nuclear Research*), onde colisões com energias de 17 GeV por nucleon no centro de massa eram feitas; o RHIC (*Relativistic Heavy Ion Collider*) do BNL (*Brookhaven National Laboratory*), onde colisões acontecem a uma energia de até 200 GeV por nucleon no centro de massa; e o LHC (*Large Hadron Collider*) do CERN, onde colisões com energias de até 14 TeV por nucleon no centro de massa serão feitas. Cálculos numéricos da cromodinâmica quântica (QCD na rede) mostram que, para determinadas condições de temperatura e densidade de energia, ocorre uma transição de fase entre a matéria ordinária (composta de prótons e nêutrons) e o QGP. O entendimento das propriedades do QGP não é uma tarefa fácil. Embora exista uma teoria para as interações fortes, a QCD, que prediz a própria existência do plasma, não sabemos como resolvê-la para um sistema tão complexo como aquele formado nessas colisões. Para este fim, vem sendo empregado cada vez mais modelos fenomenológicos (que possam ser resolvidos) para descrever as várias etapas da colisão. Um deles é o modelo hidrodinâmico relativístico. O uso da dinâmica de fluidos em colisões de altas energias tem uma longa tradição

[1] A sigla CERN vem do francês (*Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire*) para "Conselho Europeu para Pesquisa Nuclear", o órgão provisório fundada em 1952 com o mandato de estabelecer uma organização de pesquisa de física fundamental, de nível mundial na Europa.

[2, 3, 4, 5], que teve início com os trabalhos de Landau [6], que aplicou a hidrodinâmica relativística para estudar colisões hadrônicas. Um dos principais atrativos no uso da hidrodinâmica no estudo das colisões relativísticas é que são necessários poucos parâmetros para se entender, de forma razoável, os dados experimentais. Além disso é uma ótima ferramenta para se estudar as condições iniciais da colisão, e a equação de estado da matéria formada. Uma vez que a equação de estado é conhecida e uma condição inicial é especificada, as equações de movimento determinam exclusivamente a dinâmica da colisão. Nas colisões realizadas no RHIC e atualmente no LHC, os núcleos são acelerados em direções opostas e colidem produzindo um grande número de partículas num pequeno volume. Modelos hidrodinâmicos são aplicados para descrever a matéria formada em tais colisões supondo que o sistema atinja rapidamente um estado de equilíbrio térmico local. A medida que essa matéria se expande e esfria, ela retorna novamente à fase hadrônica. Com o contínuo processo de expansão o fluido torna-se cada vez mais frio e rarefeito, até que ocorre o desacoplamento, ou seja, a emissão de hádrons que posteriormente serão detectados. Esse processo de desacoplamento é tratado, neste trabalho, via modelo de freeze-out, ou seja, ele ocorre a uma temperatura bem definida, chamada de temperatura de freeze-out. Neste trabalho vamos verificar, sob o ponto de vista hidrodinâmico, a influência das condições iniciais (CI) e das equações de estado (EoS) no efeito HBT (Hanbury Brown-Twiss) [7, 8, 9]. O efeito HBT permite fazermos uma estimativa das dimensões espaçotemporais da região emissora de partículas, usando a análise de correlações quânticas entre partículas idênticas. Neste trabalho, estaremos interessados em analisar a correlação entre píons idênticos (interferometria de píons). Para isto, vamos comparar o tamanho da fonte de emissão de partículas, obtido através de uma função de correlação de partículas baseada em um modelo hidrodinâmico, com dados experimentais dos experimentos PHENIX (*Pioneering High Energy Nuclear Interaction eXperiment*) e STAR (*Solenoidal Tracker At RHIC*) do RHIC. Os cálculos hidrodinâmicos serão realizados para colisões centrais Au+Au na energia do RHIC, $\sqrt{s} = 130\,\mathrm{A}$ GeV.

Vamos agora, apresentar como esta dissertação encontra-se estruturada. Neste capítulo faremos uma breve introdução do histórico e desenvolvimento do estudo das partículas. No capítulo 2, iniciamos com a derivação das equações da hidrodinâmica para fluidos ideais relativísticos. Em seguida, usando o modelo de Bjorken, discutimos as soluções unidimensionais, usando uma EoS para um gás ideal de píons. Discutimos também, o processo de desacoplamento das partículas do fluido formado na colisão, o chamado processo de freeze-out. Calculamos as distribuições de *momentum* transversal de partículas, usando o modelo hidrodinâmico de Bjorken com e sem expansão transversal. Por fim, fazemos uma estimativa da densidade de energia inicial para colisões centrais Au+Au na energia do RHIC, $\sqrt{s} = 130\,\mathrm{A}$ GeV. No capítulo 3, apresentamos alguns conceitos básicos sobre a estatística de Fermi-Dirac e Bose-Einstein. Apresentamos três equações de estado: (i) gás ideal de píons (sem a presença de um QGP); (ii) equação de estado de primeira ordem, em que a fase de QGP é representada por um gás ideal de quarks (u, d e s) e glúons e a fase hadrônica é representada por um gás de ressonâncias com correções de volume; e (iii) equação de estado baseada na QCD, em que a transição de fase é do tipo *crossover*. No capítulo 4, apresentamos uma visão geral sobre o efeito HBT, apresentamos as funções de correlação HBT de duas partículas, a parametrização no sistema *out-side-long*, e a obtenção dos raios HBT com a dependência do *momentum* médio

transversal. No capítulo 5, são mostradas as comparações dos resultados das distribuições de *momenta* de píons e dos raios HBT, com os dados experimentais. No capítulo 6, terminamos com uma conclusão. Nos apêndices A, B, C e D são mostrados detalhes de cálculos citadas no corpo da dissertação.

1.1 Histórico das Partículas Elementares

1.1.1 Partículas conhecidas até 1932

Na década de 1890, Becquerel, Marie e Pierre Curie, Röntgen, Rutherford, Thomson e outros, estudavam os raios α, β e γ. Em 1895, o físico alemão Wilhelm Conrad Röntgen, que estudava o fenômeno da luminescência produzida por raios catódicos, anuncia a descoberta dos raios-X [10, 11, 12]. Experimentos com tubos de raios catódicos levaram o físico inglês Joseph John Thomson, em 1897, à conclusão de que os raios catódicos eram partículas subatômicas de carga negativa: os **elétrons** [10, 11, 13]. Mais tarde, verificou-se que os raios α eram na verdade núcleos de hélio e os raios β eram compostos por elétrons. Em 1900, Paul Ulrich Villard estudando do decaimento do urânio descobre que os raios γ (fótons de altíssima energia) [11]. Naquele mesmo ano, Max Planck apresentou seu artigo [14] "Sobre a Teoria da Lei de Distribuição de Energia do Espectro Normal" – para explicar as propriedades observadas da radição térmica, Planck considerou que a radiação eletromagnética é quantizada [10]. Em 1905, o físico alemão Albert Einstein desenvolveu uma teoria muito simples porém revolucionária para explicar o efeito fotoelétrico[2]. De acordo com essa teoria, um *quantum* de luz transfere toda a sua energia a um único elétron, independentemente da existência de outros *quanta* de luz [10, 11]. Em 1909, os físicos: o neozelandês Ernest Rutherford, o inglês Ernest Marsden, e o alemão Hans Geiger (estes dois últimos alunos de Rutherford), bombardearam folhas de ouro finíssimas com partículas de carga positiva (patículas α). O resultado do experimento causou profunda estranheza. Parte dessas partículas ricocheteavam bruscamente ao atingir a lâmina de ouro. Dois anos depois, Rutherford descreveu sua conclusão: o átomo continha um caroço maciço, de carga elétrica positiva, no qual estava 99,99% de sua massa. Em 1919, ele associara a carga positiva nuclear a uma nova partícula: o **próton** [10, 11], cerca de 2 mil vezes mais pesado que o elétron. Em 1923, o físico norte-americano Arthur Holly Compton realizou um experimento de espalhamento que ficou conhecido como efeito Compton. Para explicar tal espalhamento a luz deveria ter um comportamento corpuscular – naquele experimento Compton já usara a constante de Planck. O experimento de Compton convenceu os físicos do comportamento corpuscular da luz em escala subatômica; um *quanta* de luz passou a ser chamada de **fóton**[3] [11, 15]. Em 1928 um jovem inglês, Paul A. M. Dirac, publicou um trabalho propondo uma nova teoria do elétron, onde previa a existência de antipartículas. Outro jovem brilhante, o austríaco Wolfgang Pauli, sugeri, em 1930, que no decaimento beta devia haver emissão de outra partícula além do elétron. Seus cálculos indicavam que essa partícula – o neutrino ν – deveria ter uma massa muito pequena e carga nula [10, 11]. Em maio de 1932, o

[2] Descoberto, em 1887, por Heinrich Hertz.

[3] Nome sugerido pelo químico Gilbert Lewis em 1926 [11].

físico inglês James Chadwick mostrou que o próton dividia o núcleo (cujo diâmetro é da ordem de 10^{-14} m) com outra partícula: o **nêutron** [10, 11, 16], sem carga elétrica e levemente mais pesado que o próton. Nessa altura, as partículas elementares conhecidas eram as mostradas na tabela 1.1 e parecia que o átomo apresentara seu contorno final.

Tabela 1.1: Lista de partículas conhecidas até 1932

Partícula	**Símbolo**	**Carga elétrica**	**Massa**[a] **(MeV)**
Fóton	γ	0	$< 1\times10^{-21}$
Elétron	e^-	-1	0.511
Próton	p	$+1$	938.272
Nêutron	n	0	939.565

[a]Referência [17].

1.1.2 Partículas conhecidas até 1947

Concordou-se então que o átomo era composto por um núcleo – prótons e nêutrons – rodeado de elétrons ligados a ele por forças elétricas [10, 11]. A partir desse modelo do átomo os princípios da química foram completamente estabelecidos [10, 11]. Era possível explicar as propriedades dos elementos, peso atômico, modo como os compostos químicos se formam, bem como muitas outras propriedades. Os fótons eram como partículas que transportavam a luz e outras perturbações eletromagnécias, e a sua emissão e absorção, bem como a propagação através do espaço, eram bem compreendidas [10, 11]. Embora ainda houvesse situações específicas a serem exploradas com o uso desse conhecimento, acreditava-se que era possível obter uma total compreensão da matéria com base nessa lista (ver tabela 1.1) de partículas. Porém havia alguns pontos que precisavam de respostas, como por exemplo, a força que mantém o núcleo unido, em face da repulsão eletrostática entre os seus prótons, e o problema[4] do decaimento beta, que ameaçava uma das mais queridas leis da Física: a lei da conservação da energia [10, 11]. Um processo típico do decaimento beta é o bismuto-210 quando decai para o polônio-210 e um elétron

$$^{210}_{83}\mathrm{Bi} \longrightarrow {}^{210}_{84}\mathrm{Po} + e^-. \tag{1.1}$$

O estudo experimental deste processo mostra que a energia total dos produtos do decaimento é menor que a energia total do núcleo original de bismuto, aparentemente parte da energia desaparece completamente [10, 11]. Para resolver este problema, o físico italiano Enrico Fermi, com base nas ideias de Pauli sobre o neutrino, começa a desenvolver uma teoria sobre o decaimento beta. Ainda no ano de 1932, o norte-americano Carl Anderson detectou uma partícula de carga positiva com massa igual à do elétron (o **pósitron**) [10, 11, 18]. Pouco

[4]O físico dinamarquês Niels Bohr, chegou a defender a ideia de que o princípio da conservação da energia, não era válido para o decaimento beta [10, 19].

depois, percebeu-se que todas as partículas teriam sua correspondente antipartícula (como previsto por Dirac). Em 1933, Fermi publica sua teoria sobre o decaimento beta, propondo a interação fraca. A energia que faltava no decaimento beta era transportada pelo neutrino e assim a equação[5] correta para a reação (1.1) era:

$$^{210}_{83}\mathrm{Bi} \longrightarrow {}^{210}_{84}\mathrm{Po} + e^- + \overline{\nu}_e. \tag{1.2}$$

Essa teoria explicava tão bem a variação da energia dos elétrons emitidos que a existência do neutrino foi aceita pelos físicos muito antes de sua observação direta.

Em 1935, o físico japonês Hideki Yukawa propôs uma ideia ousada para solucionar um dos problemas mencionados anteriormente: o que mantém o núcleo atômico unido. Os prótons, sendo carregados positivamente, deveriam repelir-se imediatamente, visto que os nêutrons não possuem carga elétrica e que a força gravitacional no interior do núcleo é tão fraca que é desprezível. Sua ideia era que deveria haver outra força, específica do núcleo. Tal força deveria ser de curto alcance (cerca do diâmetro de um núcleo), mas ao mesmo tempo forte o suficiente para ultrapassar as forças elétricas do núcleo. Então Yukawa propôe que, assim como a interação eletromagnética se dá pela troca de fótons entre as partículas com carga elétrica, deveria existir algo semelhante entre prótons e nêutrons. Surgia então, a ideia do méson[6] [10, 20]. Em 1937, no Instituto de Tecnologia da Califórnia, foi encontrada uma nova partícula que, a princípio, parecia ser a partícula postulada por Yukawa. Descoberta por S. Neddermeyer, C. D. Anderson e colaboradores, esta partícula podia ser melhor descrita como um elétron pesado, pois era semelhante ao elétron em quase todos os aspectos, a exceção era a massa, cerca de 200 vezes a massa do elétron [10, 11, 21]. Porém, observou-se que essa nova partícula – conhecida hoje como **múon** μ – interagia muito pouco com núcleos para que a identificação fosse correta.

O méson de Yukawa (hoje conhecido como méson pi ou simplemente píon) só foi detectado em 1947, na observação de raios cósmicos por uma equipe da universidade de Bristol (UK), liderada pelo inglês Cecil Powell e com participação do físico brasileiro César Lattes [10, 11, 22]. No ano seguinte, Lattes e o norte-americano Eugene Gardner detectaram **píons** produzidos artificialmente no acelerador de partículas da universidade da Califórnia, em Berkeley (USA) [10, 11, 23]. Essa descoberta mostrou que a produção e a detecção de partículas podiam ser feitas de modo mais controlado com o desenvolvimento de aceleradores mais potentes e detectores mais precisos [10, 11].

Embora a lista de partículas conhecidas tenha crescido consideravelmente, compare as tebelas 1.1 e 1.2, este crescimento não tornou a Física mais complicada. Pelo contrário, agora, usando estas partículas, as forças nucleares podiam ser entendidas em termos de troca de méson pi; os detalhes do decaimento beta era explicado pela hipótese do neutrino; e a descoberta do pósitron conduziu a uma interpretação aceitável da teoria do elétron de Dirac.

[5] Naquela época o neutrino ainda não havia sido detectado e era apenas uma partícula postulada chamada de neutrino. Na equação (1.2) estamos usando notação atual.

[6] Do grego, "médio", pois sua massa estaria entre a do próton e a do elétron.

Tabela 1.2: Lista de partículas conhecidas até 1947

Partícula	**Símbolo**	**Carga elétrica**	**Massa**[a] **(MeV)**
Fóton	γ	0	$< 1\times10^{-21}$
Neutrino[b]	ν_e	0	< 0.002
Antineutrino[b]	$\overline{\nu}_e$	0	< 0.002
Elétron	e^-	-1	0.511
Pósitron	e^+	$+1$	0.511
Múon	μ^-	-1	105.658
Antimúon	μ^+	$+1$	105.658
Méson pi	π^+	$+1$	139.570
	π^0	0	134.976
	π^-	-1	139.570
Próton	p	$+1$	938.272
Antiproton[b]	$\overline{p}$	-1	938.272
Nêutron	n	0	939.565
Antineutron[b]	$\overline{n}$	0	939.565

[a]Referência [17]. [b]Postuladas, não detectadas.

1.1.3 Algumas partículas conhecidas até 1965

A partir da década da 1950, com o desenvolvimento de aceleradores e detectores mais sofisticados, muitas outras partículas foram descobertas. Então, em razão do rápido crescimento do números de partículas, houve a necessidade de uma classificação. Inicialmente, as partículas foram classificadas de acordo com sua massa. Partículas com massas próximas da massa do elétron foram chamadas de *léptons*; partículas com massas próximas da massa dos núcleons foram chamadas de *bárions*; e partículas com massa entre os valores das massas dos léptons e bárions foram chamadas de *mésons*. Porém, esse critério logo apresentou problemas. Com a descoberta de léptons pesados (múon e tau) com massas próximas as dos mésons e bárions, respectivamente, o critério da massa se mostrou inadequado. Então, as partículas foram classificadas[7] de acordo com os tipos de interações das quais participam. As partículas que participam da interação forte além das interações fraca e eletromagnética, foram chamadas de *hádrons*; e as partículas que participam das interações fraca e eletromagnética, foram chamadas de *léptons*. Os hádrons são partículas nucleares e se dividem em várias espécies: bárions (prótons, nêutrons) e mésons. Os léptons são partículas não-nucleares e se dividem em vários tipos: elétron, múon, tau e neutrinos.

A lista de partículas continuava crescendo e esse grande número de partículas "elementares"

[7]Outras classificações também foram feitas ou propostas como, por exemplo, a classificação estatística: *férmions* (Fermi-Dirac) que são partículas com spin semi-inteiro; e *bósons* (Bose-Einstein) que são partículas com spin inteiro. Porém, não vamos enumerá-las aqui.

levou a ideia de que estas partículas não representavam o nível mais elementar da estrutura da matéria e que devia existir um outro nível de estrutura. Em 1964, os físicos norte-americanos Murray Gell-Mann e George Zweig propuseram uma família de partículas subnucleares, para tentar explicar as propriedades das partículas recém-descobertas: os quarks[8] [24, 25]. Na tabela 1.3 temos uma lista parcial de algumas partículas conhecidas em 1965 [10, 11]. Ini-

Tabela 1.3: Lista de algumas partículas conhecidas até 1965

	Partícula	**Símbolo**	**Carga elétrica**	**Massa**[a] **(MeV)**
LÉPTONS	Elétron	e^-	-1	0.511
	Múon	μ^-	-1	105.658
	Neutrino do elétron	ν_e	0	< 0.002
	Neutrino do múon	ν_μ	0	< 0.19
MÉSONS	Píon$^+$	π^+	$+1$	139.570
	Píon^0	π^0	0	134.976
	Píon$^-$	π^-	-1	139.570
	Káon^0	K^0	0	497.614
	Káon$^+$	K^+	$+1$	493.677
	Eta^0	η^0	0	547.862
BÁRIONS	Próton	p	$+1$	938.272
	Nêutron	n	0	939.565
	Lâmbda	Λ^0	0	1115.683
	Sigma$^+$	Σ^+	$+1$	1189.37
	Sigma^0	Σ^0	0	1192.642
	Sigma$^-$	Σ^-	-1	1197.449
	Xi^0	Ξ^0	0	1314.86
	Xi$^-$	Ξ^-	-1	1321.71

[a]Referência [17].

cialmente essa família de partículas subnucleares seria formada por três tipos ou sabores de quarks: *up (u)*, *down (d)* e *strange (s)*.

1.2 Quarks e Cores

A teoria dos quarks baseia-se numa proposta feita por Gell-Mann e colaboradores, nela os hádrons não são partículas elementares e sim estruturas compostas por outras partículas,

[8]Gell-Mann chamou essas partículas subnucleares de *quarks*, inspirado numa passagem – "three quarks for Muster Mark" – do romance *Finnegans Wake*, do irlandês James Joyce [26], enquanto Zweig as chamou de *ases* (cartas do baralho). O termo que ficou conhecido foi quarks.

os quarks, que são partículas verdadeiramente elementares. Os quarks possuem algumas características peculiares, como por exemplo, a carga elétrica fracionária. O quark u tem carga elétrica igual à 2/3 e os quarks d e s têm carga elétrica igual à -1/3. Os quarks u e d possuem isospin[9] igual à 1/2 e estranheza[10] igual à 0. Ao contrário destes, o quark s tem isospin igual à 0 e estranheza igual à -1. Todos têm número bariônico, B, igual à 1/3. Cada bárion (antibárion) é uma combinação de três quarks (antiquarks), o próton[11] é uud, o nêutron é udd, o Σ^+ é uus e assim por diante. Cada méson é formado por um par quark-antiquark, o π^+ é $u\bar{d}$ e o K^+ é $u\bar{s}$. Diferentes combinações desses quarks podiam explicar todos os mésons e bárions conhecidos [24, 25, 26, 27]. No entanto, o modelo apresentou problemas. A ressonância bariônica Δ^{++} de spin 3/2 é composto de três quarks $u_\uparrow u_\uparrow u_\uparrow$ com o mesmo spin $+1/2$ [26]. Isto violaria o princípio de exclusão de Pauli – duas partículas de spin semi-inteiro não podem ocupar simultaneamente o mesmo estado quântico. Para contornar esse problema, o físico O. W. Greenberg propõe a existência de um novo número quântico para os quarks: a *cor* [26, 28]. Assim, o estado de cor seria uma propriedade dos quarks e estes poderiam assumir três cores primárias, denotadas simbolicamente por R, G e B (*Red*, *Green* e *Blue*). Então, reescrevendo os quarks que compõem a ressonância Δ^{++} como $u_{\uparrow R}u_{\uparrow G}u_{\uparrow B}$ o princípio de Pauli era reestabelecido e isto parecia ter resolvido o problema. No entanto, com a introdução do número quântico de cor teríamos muitos estados para o próton: $u_R u_G d_B$, $u_R u_G d_G$, $u_B u_R d_R$, e assim por diante [26]. Porém, existe apenas um estado para o próton. Então, para evitar a proliferação do número de estados, uma vez que isto nos levaria a um conflito direto com a observação, postulou-se: *"todas as partículas observadas na natureza são brancas ou incolores"*, ou seja, as combinações devem ser tais que o estado ligado resultante seja invariante sob rotações no espaço RGB [26, 27]. Isto implica que os três quarks (antiquarks) que compõem um bárion (antibárion) sejam RGB ($\bar{R}\bar{G}\bar{B}$), e a composição do par quark-antiquark de um méson seja $R\bar{R} + G\bar{G} + B\bar{B}$, onde $\bar{R}$ (cyan), $\bar{G}$ (magenta) e $\bar{B}$ (yellow) são cores complementares, veja a figura 1.1. A teoria que descreve a dinâmica de cores (interação forte) dos quarks é chamada *cromodinâmica quântica* ou simplesmente QCD (*quantum chromodynamics*). Na seção seguinte mostraremos alguns aspectos dessa teoria.

1.3 Cromodinâmica Quântica

A comodinâmica quântica (QCD) é a teoria física que descrever a interação forte. Nela a interação entre os quarks é mediada pela troca de glúons[12] [26, 27]. A interação forte juntamente com a interação eletromagnética e a interação fraca formam o chamado Modelo Padrão. Esse modelo, desenvolvido entre 1970 e 1973, descreve a física atômica e subatômica a partir de um conjunto de partículas fermiônicas (léptons e quarks) e partículas bosônicas (bósons) ver tabela 1.4 [26, 27].

Os parâmetros da QCD são as massas dos quarks e o valor da constante de acomplamento.

[9] Número quântico que serve para distinguir hádrons de cargas elétricas diferentes nas interações fortes.
[10] Número quântico necessário para explicar a produção e os modos de decaimento de certas partículas.
[11] Note que a carga elétrica, $Q_{el} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 1$, e o número bariônico, $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$, são conservados.
[12] Glúons são os *quanta* do campo de cor responsável pela interalção forte.

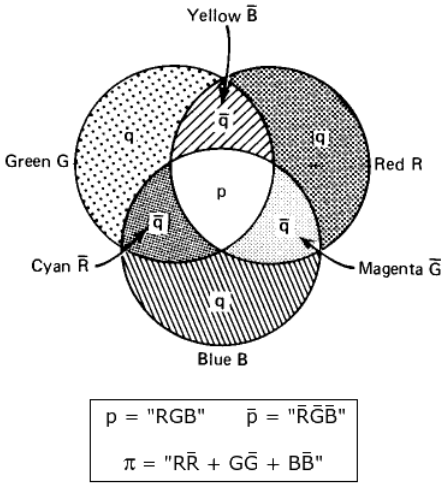

Figura 1.1: Composição dos hádrons - Cores dos Quarks. Retirada da referência [26]

Tabela 1.4: Partículas fermiônicas e partículas bosônicas do Modelo Padrão

	Partícula	**Símbolo**	**Carga elétrica**	**Carga bariônica**	**Massa[a] (GeV)**
LÉPTONS	Elétron	e^-	-1	0	5.109×10^{-4}
	Múon	μ^-	-1	0	1.056×10^{-1}
	Tau	τ^-	-1	0	1.777
	Neutrino do elétron	ν_e	0	0	$< 2.000\times10^{-9}$
	Neutrino do múon	ν_μ	0	0	$< 1.9\times10^{-4}$
	Neutrino do tau	ν_τ	0	0	$< 1.82\times10^{-4}$
QUARKS	Up	u	$+2/3$	$1/3$	0.0023
	Down	d	$-1/3$	$1/3$	0.0048
	Strange	s	$-1/3$	$1/3$	0.095
	Charm	c	$+2/3$	$1/3$	1.275
	Bottom	b	$-1/3$	$1/3$	4.18
	Top	t	$+2/3$	$1/3$	173.07
BÓSONS	Fóton	γ	0	0	$< 1\times10^{-24}$
	Bóson W	W^+	$+1$	0	80.385
		W^-	-1	0	80.385
	Bóson Z	Z^0	0	0	91.188
	Glúons, $i = 1 \ldots 8$.	g_i	0	0	0

[a]Referência [17].

A constante de acoplamento da QCD é obtida de maneira similar à da teoria eletrofraca[13] ou QED (*quantum electrodynamics*) [26]. Na QED a intensidade da força eletromagnética é dada pela constante de acoplamento entre os elétrons

$$\alpha\left(Q^2\right) = \frac{\alpha_0}{1 - \dfrac{\alpha_0}{3\pi}\log\left(\dfrac{Q^2}{m_e^2}\right)} \tag{1.3}$$

onde Q é o *momentum* transferido entre os dois elétrons, α_0 é a constante de estrutura fina, e m_e é a massa do elétron [11, 26]. Similarmente, a constante de acoplamento da QCD é dada por

$$\alpha_s\left(Q^2\right) = \frac{12\pi}{(33 - 2n_f)\log\left(Q^2/\Lambda^2\right)}, \quad \text{onde} \quad \Lambda^2 = \mu^2 \exp\left[\frac{-12\pi}{(33 - 2n_f)\,\alpha_s\left(\mu^2\right)}\right]. \tag{1.4}$$

O parâmetro Λ é uma variável pertubativa e define a região de validade para aplicação de métodos pertubativos, μ é um parâmetro livre da QCD, introduzido no processo de renormalização, e n_f é o número de sabores [11, 26]. Na QED as partículas carregadas interagem por meio da troca de fótons, enquanto que na QCD a interação se dá por meio da troca de glúons. No entanto, há uma diferença entre os mediadores dessas interações. Os glúons carregam carga de cor, diferentemente dos fótons que não carregam a carga elétrica. Isto permite que os quarks troquem de cor quando interagem, e ainda, como os glúons carregam carga de cor, podem interagir entre si. Isto reflete as diferenças entre as interações forte (QCD) e eletrofraca (QED).

Na equação (1.4) o acoplamento α_s diminui com o aumento de Q^2 e, portanto, torna-se pequeno para interações de curta distância, ou seja, para os valores de Q^2 muito maior do que Λ^2 o acoplamento efetivo é pequeno e uma descrição perturbativa em termos de quarks e glúons, que interagem fracamente, faz sentido. Esta propriedade é chamada de *liberdade assintótica*[14] [26, 29, 30]. Por outro lado, para Q^2 da ordem de Λ^2 a constante de acoplamento α_s cresce de forma logarítmica, e os quarks e os glúons vão se organizando em grupos fortemente ligados, ou seja, em hádrons. Isto é conhecido como *confinamento dos quarks*. Como o acoplamento α_s não é desprezível a baixas energias, cálculos por meio de teoria de pertubação, que se baseia em uma expansão a acoplamentos fracos, ficam inviabilizados. Para o estudo do comportamento do sistema quarks-glúons em baixas energias como, por exemplo, no equilíbrio de fase ou transição de fase usa-se modelos fenomenológicos. Um desses modelos é o chamado *modelo de sacola do MIT* [26, 31]. Esse modelo considera os quarks livres (liberdade assintótica) no interior de uma região no espaço denominada de *sacola*. A estabilidade da sacola (hádron) é assegurada através de um parâmetro denominado constante de sacola, B, cujos valores estão relacionados à densidade de energia da matéria de quarks, em outras palavras, B é a pressão do vácuo sobre o hádron mantendo os quarks confinados. O aumento da densidade de energia dos quarks, no interior da sacola, pode exceder a pressão B da sacola rompendo-a e permitindo que os quarks deixem o confinamento do hádron. Nesta configuração, a matéria nuclear se encontra

[13] Combinação das interações eletromagnética e fraca.

[14] Em 2004 os físico D. J. Gross, F. Wilczek e H. D. Politzer foram laureados com o prêmio Nobel de Física pelos trabalhos sobre a *liberdade assintótica* na teoria da interação forte, proposta na década de 1970 [29, 30].

em uma nova fase, que passou a ser conhecida como plasma de quarks e glúons (QGP). Nesta configuração, a matéria nuclear se encontra em uma nova fase, que passou a ser conhecida como *plasma de quarks e glúons* (QGP) [1]. A transição para essa fase de plasma (QGP) requer uma densidade da ordem de $1\,\mathrm{GeV/fm^3}$. Densidades de energia dessa ordem podem ser obtidas em uma colisão de núcleos pesados no regime relativístico. Nessas colisões, milhares de partículas são produzidas. E o estudo do comportamento da matéria nessas condições pode ser feito por meio da hidrodinâmica relativística. No próximo capítulo faremos a derivação das equações da hidrodinâmica para fluidos ideais relativísticos.

Capítulo 2

Hidrodinâmica Relativística

"Somente um principiante que não sabe nada sobre ciência diria que a ciência descarta a fé. Se você realmente estudar a ciência, ela certamente o levará para mais perto de Deus."
James Clerk Maxwell

O uso da hidrodinâmica relativística para descrever colisões hadrônicas teve sua origem com os trabalhos de Landau [6], como um aperfeiçoamento às ideias de Fermi[1] [5]. No início dos anos 50, Fermi assume que numa colisão hadrônica, a energia disponível no centro de massa do sistema é liberada em um pequeno volume com tamanho típico de uma nuvem de píons em torno de um nucleon. Ele assume ainda que o sistema atinge o equilíbrio na sua fase de compressão máxima, e em seguida se quebra instantaneamente emitindo hádrons. Esta última hipótese é modificada no modelo hidrodinâmico de Landau, que usa a mesma representação física para a fase inicial da colisão, porém ao invés de assumir a quebra instantânea, Landau permite uma expansão da matéria antes que os hádrons se desacoplem. Atualmente, o modelo hidrodinâmico vem sendo empregado largamente para descrever a evolução da matéria formada em colisões nucleares de altíssimas energias. De acordo com o modelo, dois núcleos – contraídos[2] pelo fator de Lorentz na direção longitudinal – colidem e depois de um processo complexo que envolve colisões microscópicas dos constituintes nucleares, uma matéria quente e densa é formada [34]. Assume-se que essa matéria atinge um equilíbrio térmico local[3] e sua evolução é governada pelas equações da hidrodinâmica relativística: equações de conservação de energia-*momentum* e números quânticos (números bariônico, estranheza, carga, etc.). Outros ingredientes necessários no modelo são as condições iniciais da colisão e a equação de

[1] Trabalhos originais de Fermi, podem ser encontrados nas referências [32, 33].

[2] No RHIC, as partículas são aceleradas com velocidades que correspondem a cerca de 99,995% da velocidade da luz no vácuo. O fator de contração de Lorentz para essa velocidade é aproximadamente $\gamma_{\mathrm{RHIC}} \approx 100$. Considerando núcleos de ouro, o comprimento contraído de ambos na direção longitudinal é $\approx 0.14\,\mathrm{fm}$ e, na direção transversal de $\approx 14\,\mathrm{fm}$. No LHC, as velocidades são da ordem de 99,9999991% da velocidade da luz no vácuo, com isto, temos um fator de contração de Lorentz de $\gamma_{\mathrm{LHC}} \approx 7450$.

[3] Equilíbrio térmico local significa que durante uma escala de tempo de interesse, todos os graus de liberdade do sistema estão em equilíbrio uns com os outros, desse modo podemos descrever um elemento de volume do fluido como tendo uma temperatura e pressão.

estado da matéria formada . O tratamento hidrodinâmico pode ser aplicado enquanto o livre caminho médio das partículas que constituem o sistema for muito menor que a escala de comprimento que caracteriza o mesmo. A medida que o fluido se expande e esfria, o livre caminho médio aumenta e quando este torna-se da ordem das dimensões do sistema o tratamento hidrodinâmico não pode ser mais aplicado. A partir daí, as partículas se desacoplam do fluido e se movem sem sofrer interações até o detector. Esse processo é chamado de *freeze-out*.

2.1 Equações Hidrodinâmicas para Fluidos Relativísticos

Assumindo que nas colisões nucleares ultrarrelativísticas, a matéria formada atinja um equilíbrio termodinâmico local, podemos descrevê-la como um meio contínuo, sem estrutura, *um fluido* de volume V, temperatura T e pressão P. A hidrodinâmica, estuda os fluidos de forma macroscópica, ou seja, sem perguntar sobre sua natureza microscópica. E portanto, esta consiste em uma excelente ferramenta para descrevermos a evolução da matéria formada nas colisões nucleares de altíssimas energias.

Atingir o equilíbrio termodinâmico local, significa que a pressão e a temperatura estão variando tão lentamente, que para um dado elemento de fluido, pode-se supor o equilíbrio termodinâmico nas "vizinhanças" do mesmo [35, 36]. A priori, não há uma prescrição quanto ao tamanho real dessa "vizinhança", ou elemento de fluido. Aqui, o elemento de fluido refere-se a uma pequena parte do fluido, cujo volume V é muito grande comparado ao tamanho microscópico das partículas, mas ao mesmo tempo, é muito pequeno quando comparado ao volume de todo o sistema. Vamos considerar que o equilíbrio termodinâmico local é aplicável enquanto o livre caminho médio de uma partícula entre duas colisões for muito menor que as dimensões características do sistema. Para descrevermos o estado de movimento de um fluido, é necessário obtermos a sua velocidade, $\boldsymbol{v}(x,y,z,t)$, e duas outras quantidades termodinâmicas pertencentes ao fluido, por exemplo a pressão $P(x,y,z,t)$ e a densidade $\varrho(x,y,z,t)$. A partir destas últimas, em conjunto com uma equação de estado, todas as quantidades termodinâmicas são determinadas, ou seja, dado as componentes da velocidade $\boldsymbol{v}$, a pressão P e a densidade ϱ, o estado de movimento do fluido é completamente determinado [37]. Na dinâmica de fluidos não-relativísticos, a equação de conservação de massa é dada por

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \boldsymbol{v}) = 0, \tag{2.1}$$

onde ϱ é a densidade de massa, $\boldsymbol{v}$ é a velocidade do elemento de fluido em relação ao referencial do laboratório. Ressaltamos que $\boldsymbol{v}(x,y,z,t)$ é a velocidade do fluido num determinado ponto (x,y,z) do espaço em um determinado tempo t, ou seja, refere-se a um dado ponto fixo no espaço e não às partículas específicas do fluido. A 4-velocidade u^μ de um fluido ou elemento de fluido é definida, (ver apêndice A), como

$$u^\mu = \left(u^0, \boldsymbol{u}\right) = \gamma(1, \boldsymbol{v}), \quad \text{onde} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \tag{2.2}$$

e a condição de normalização dada por

$$u^\mu u_\mu = \left(u^0\right)^2 - \boldsymbol{u}^2 = 1. \tag{2.3}$$

Para obtermos o equivalente relativístico da equação de conservação de massa (2.1) devemos levar em conta a contração de Lorentz do volume por um fator u^0. Como a densidade de massa não é uma quantidade conservada no caso relativístico, vamos substituí-la por uma quantidade conservada genérica, a qual chamaremos de densidade de cargas generalizadas n_i, definida no referencial de repouso do fluido, onde $i = 1, \ldots, N$. No referencial em movimento a densidade de cargas generalizadas será $n_i u^0$. Essas cargas generalizadas podem ser: a carga elétrica, o número bariônico, a estranheza, o isospin, etc [5]. Substituindo ϱ por $n_i u^0$ na equação (2.1) e usando a componente espacial da 4-velocidade, $\boldsymbol{u} = \gamma \boldsymbol{v}$, obtemos a equação da continuidade na forma covariante

$$\begin{aligned} \partial_0 \left(n_i u^0\right) + \nabla \cdot \left(n_i u^0 \frac{\boldsymbol{u}}{u^0}\right) &= 0, \\ \partial_0 \left(n_i u^0\right) - \partial_1 \left(n_i u^1\right) - \partial_2 \left(n_i u^2\right) - \partial_3 \left(n_i u^3\right) &= 0, \\ \partial_0 \left(n_i u^0\right) - \partial_j \left(n_i \boldsymbol{u}^j\right) &= 0, \\ \partial_\mu \left(n_i u^\mu\right) &= 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Desta última, equação (2.4), temos uma 4-corrente conservada generalizada, $j_i^\mu = n_i u^\mu$, que é um vetor contravariante. Podemos obter as equações de movimento da hidrodinâmica relativística partindo das leis de conservacão da energia, *momentum* e cargas generalizadas.

2.1.1 Tensor Energia-*Momentum* e Correntes Conservadas

Considere, por simplicidade, um único elemento de fluido caracterizado localmente pelo seu tensor energia-*momentum* $T^{\mu\nu}(x)$ e por suas N correntes $j_i^\mu(x)$ de cargas generalizadas. Considere ainda, um 4-volume V_4 arbitrário delimitado por uma hipersuperfície Σ no espaço de Minkowski. O 4-vetor normal a um elemento infinitesimal $d\Sigma$ desta hipersuperfície é $d\sigma_\mu(x)$, e o 4-vetor tangente ao $d\Sigma$ é $\sigma_\mu(x)$. Por definição $d\sigma \cdot \sigma = 0$. O fluxo de cargas generalizadas e energia-*momentum* através de um elemento infinitesimal $d\Sigma$ da hipersuperfície Σ é dado por

$$dj_i \equiv d\sigma_\mu \, j_i^\mu, \quad i = 1, \ldots, N \tag{2.5a}$$

$$dP^\nu \equiv d\sigma_\mu \, T^{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, \ldots, 3. \tag{2.5b}$$

Supondo não haver fontes nem sorvedouros de cargas e energia-*momentum* dentro do 4-volume V_4, o fluxo total de energia-*momentum* e de carga através da hipersuperfície Σ é dado por

$$\oint_\Sigma d\sigma_\mu \, j_i^\mu = 0 \tag{2.6a}$$

$$\oint_\Sigma d\sigma_\mu \, T^{\mu\nu} = 0. \tag{2.6b}$$

Aplicando o Teorema de Gauss nas equações (2.6) obtemos

$$\int_{V_4} d^4x\, \partial_\mu\, j_i^\mu = 0 \tag{2.7a}$$

$$\int_{V_4} d^4x\, \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \tag{2.7b}$$

Como o 4-volume V_4 é arbitrário, é necessário que os integrandos se anulem em (2.7)

$$\partial_\mu\, j_i^\mu = 0 \tag{2.8a}$$

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \tag{2.8b}$$

Estas são as equações de movimento da hidrodinâmica relativística e representam a conservação local da carga generalizada e energia-*momentum* no fluido [37], onde cada valor de ν corresponde a um componente do *4-momentum* e cada valor de μ é um componente da 4-corrente associada [36], sendo uma equação para a conservação da energia, três equações para o *3-momentum* e N equações para as cargas generalizadas. De modo mais específico temos:

(a) T^{00} é a densidade de energia;

(b) T^{0j} é a densidade da j-ésima componente do *3-momentum*, com $j = 1, 2, 3$;

(c) T^{i0} é o fluxo de energia na direção do eixo i; e

(d) T^{ij} é o fluxo da j-ésima componente do *3-momentum* na direção do eixo i.

Assim, existem $4 + N$ equações para $10 + 4N$ variáveis independentes, que são as 10 componentes independentes[4] do tensor energia-*momentum* $T^{\mu\nu}(x)$ e as 4 componentes independentes da 4-corrente $j_i^\mu(x)$ das N cargas generalizadas. Portanto, o sistema hidrodinâmico não é fechado e sendo assim é, a priori, impossível resolvê-lo por completo, havendo, portanto, necessidade de hipóteses adicionais para tal. Uma possibilidade é fornecer outras $6 + 3N$ equações de movimento a fim de fechar o sistema. Outra possibilidade é reduzir o número de variáveis desconhecidas introduzindo hipóteses simplificadoras [38]. Neste trabalho iremos adotar a simplificação comumente usada em colisões nucleares ultrarelativísticas, a de fluido ideal.

2.1.2 Fluido Ideal

Considera-se como fluido ideal aquele sem viscosidade, condutividade térmica nula, e densidade constante em todos os pontos do espaço e em todos os instantes de tempo, ou seja, a densidade é isotrópica [27, 35, 37]. Consideramos que numa colisão nuclear ultrarrelativística, o equilíbrio termodinâmico local seja estabelecido, e ainda, que a matéria formada na

[4] O tensor de segunda ordem $T^{\mu\nu}(x)$ é simétrico, portanto temos apenas 10 componentes independentes.

colisão seja modelada como um fluido ideal, caracterizado por seu tensor energia-*momentum*, $T^{\mu\nu}(x)$, e suas N correntes $j_i^{\mu}(x)$ de cargas generalizadas. Neste caso, as componentes T^{i0} e T^{0j} do tensor energia-*momentum* serão nulas. Em outras palavras, não haverá fluxo de energia, nem densidade de *momentum* no referencial de repouso do fluido, ou seja, o tensor energia-*momentum*, $\bar{T}^{\mu\nu}(x)$, no referencial de repouso do fluido é diagonal [5, 36], dado por

$$\bar{T}^{\mu\nu}(x) = \begin{pmatrix} \varepsilon(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P(x) \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

onde $\varepsilon(x)$ é a densidade local de energia e $P(x)$ a pressão local.

Note que a matriz (2.9) é simplemente a lei de Pascal, a qual diz que a pressão exercida por uma porção do fluido é a mesma em todas as direções e perpendicular a área em que atua. A componente da força sobre um elemento de área $d\boldsymbol{s}$ é dada por $T^{ij}ds_j$. Assim, no referencial de repouso, temos: $\bar{T}^{ij}ds_j = P\delta^{ij}ds_j = Pds_i$.

O tensor energia-*momentum*, $T^{\mu\nu}$, pode ser escrito num outro referencial qualquer usando uma transformação de Lorentz

$$T^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}\bar{T}^{\rho\sigma} \tag{2.10}$$

onde $\Lambda^{\mu\nu}$ é a matriz de transformação de Lorentz.

Para isto, vamos considerar o fluido movendo-se com uma 4-velocidade u^{μ}, definida em (2.2), a qual está relacionada com a 4-velocidade $\bar{u}^{\nu} = (1, 0, 0, 0)$ do referencial de repouso pela transformação de Lorentz da seguinte forma

$$u^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\bar{u}^{\nu}. \tag{2.11}$$

Note que (2.11) pode ser escrita como

$$u^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{0}\bar{u}^{0} + \Lambda^{\mu}{}_{i}\bar{u}^{i} = \Lambda^{\mu}{}_{0}. \tag{2.12}$$

O tensor métrico $g^{\mu\nu}$ nas coordenadas $txyz$ é dado por

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

Num referencial qualquer (2.13) é dado por

$$g^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}\,\bar{g}^{\rho\sigma}, \tag{2.14}$$

Separando os termos espaciais e temporal em (2.14) e usando a relação (2.12) temos

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} &= \Lambda^{\mu}{}_{0}\Lambda^{\nu}{}_{0}g^{00} + \Lambda^{\mu}{}_{i}\Lambda^{\nu}{}_{j}\bar{g}^{ij} \\ &= \Lambda^{\mu}{}_{0}\Lambda^{\nu}{}_{0} - \Lambda^{\mu}{}_{i}\Lambda^{\nu}{}_{j}\delta^{ij} \qquad (2.15) \\ \Lambda^{\mu}{}_{i}\Lambda^{\nu}{}_{j}\delta^{ij} &= \Lambda^{\mu}{}_{0}\Lambda^{\nu}{}_{0} - g^{\mu\nu}. \qquad (2.16) \end{aligned}$$

Por fim, substituindo (2.9), (2.12) e (2.16) em (2.10), obtemos o tensor energia-*momentum* num referencial qualquer

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}(x) &= \Lambda^{\mu}{}_{0}\Lambda^{\nu}{}_{0}\bar{T}^{00} + \Lambda^{\mu}{}_{i}\Lambda^{\nu}{}_{j}\bar{T}^{ij} \\ &= \Lambda^{\mu}{}_{0}\Lambda^{\nu}{}_{0}\,\varepsilon + \Lambda^{\mu}{}_{i}\Lambda^{\nu}{}_{j}\,\delta^{ij}P \\ &= \Lambda^{\mu}{}_{0}\Lambda^{\nu}{}_{0}\,\varepsilon + (\Lambda^{\mu}{}_{0}\Lambda^{\nu}{}_{0} - g^{\mu\nu})\,P \\ &= u^{\mu}u^{\nu}\varepsilon + (u^{\mu}u^{\nu} - g^{\mu\nu})P \\ &= (\varepsilon + P)u^{\mu}u^{\nu} - Pg^{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Agora, podemos determinar o movimento do fluido, usando (2.17) e as equações de conservação da energia-*momentum* e correntes de cargas generalizadas

$$\partial_{\mu}T^{\mu\nu}(x) = 0 \tag{2.18a}$$

$$\partial_{\mu}\,j_{i}^{\mu}(x) = 0, \tag{2.18b}$$

onde as correntes $j_{i}^{\mu}(x)$ de cargas generalizadas, são dadas por

$$j_{i}^{\mu}(x) = n_{i}(x)u^{\mu}(x), \tag{2.19}$$

e $n_{i}(x)$ é a i-ésima densidade de carga conservada.

Com isto, temos $5+N$ variáveis independentes, a saber: densidade de energia $\varepsilon(x)$, pressão $P(x)$, componentes do vetor fluxo, $v_{x}(x)$, $v_{y}(x)$, $v_{z}(x)$ e as densidades de cargas conservadas $n_{1}(x), n_{2}(x), \cdots, n_{N}(x)$, para um conjunto de $4+N$ equações. A equação que falta para fechar o sistema (2.18) é a equação de estado (EoS) que relaciona as diversas grandezas termodinâmicas, como pressão, P, densidade de energia, ε, temperatura, T, potenciais químicos, μ_{i}, densidade de cargas conservadas, n_{i}, densidade de entropia, s, etc. Na aproximação de fluido ideal, somente a EoS contém informação sobre da natureza microscópica das partículas que compõe o fluido. Por meio da EoS, podemos estudar as transições de fase entre o QGP e a matéria hadrônica, que são fundamentais na descrição quantitativa das colisões nucleares ultrarrelativísticas [27, 38].

2.2 Modelo de Bjorken

Uma simplificação importante que podemos fazer nas equações da hidrodinâmica é usar a aproximação de Bjorken [39]. O modelo (ou aproximação) de Bjorken propõe que numa colisão ultrarrelativística, a espessura longitudinal dos núcleos que colidem se aproxima de zero, quando $v \approx c$. Neste limite, o tamanho longitudinal da região de colisão também tende a zero e, assim, o sistema não tem uma escala longitudinal. Como resultado, a velocidade longitudinal de um elemento de fluido que emerge da região de colisão, em torno do ponto $z=0$ e $t=0$, obedece a uma lei de escala, em que a velocidade aumenta com a distância z.

Esta simetria requer que a velocidade do fluido na direção longitudinal tenha a forma $v_z = z/t$. Isto é chamado de *fluxo de Bjorken* [5, 35, 27]. Bjorken baseou seu modelo no fato de que as distribuições de partículas em rapidez, dN/dy, ou pseudorapidez, $dN/d\eta$, produzidas em colisões de altas energias, são aproximadamente constantes (apresentam um platô) na região central de rapidez. Em outras palavras, significa que ao longo do eixo da colisão a região central de rapidez é invariante por boost de Lorentz. Na figura 2.1 temos distribuições de partículas carregadas, colaboração PHOBOS [40], para colisões Au+Au à $\sqrt{s} = 130\,\mathrm{A\ GeV}$, com várias centralidades[5], onde é possível observar, na região central de pseudorapidez, a existência de um platô. Originalmente, o trabalho de Bjorken considerou um fluido sem expansão transversal (1+1 dimensões). No entanto, essa hipótese só é razoável para tempos pequenos comparados ao raio transversal do fluido (ou raio transversal do núcleo). Para tempos maiores, a expansão transversal deve ser considerada. Isso ficará evidente posteriormente quando compararmos simulações com e sem expansão transversal com dados experimentais.

2.2.1 Coordenadas $\tau\rho\varphi\kappa$ e simetria cilíndrica

Neste trabalho, vamos considerar apenas colisões centrais tipo Au+Au. Neste caso, podemos imaginar a matéria formada na colisão como sendo cilindricamente simétrica. Para tratar esse tipo de problema e utilizar o modelo de Bjorken é conveniente introduzir novas coordenadas: cilíndricas, ρ e φ, e hiperbólicas, τ e κ, definidas como

$$\tau = \sqrt{t^2 - z^2} \tag{2.20a}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2.20b}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \tag{2.20c}$$

$$\kappa = \frac{1}{2}\ln\frac{t+z}{t-z} = \tanh^{-1}\left(\frac{z}{t}\right). \tag{2.20d}$$

As relações inversas dadas por

$$t = \tau\cosh\kappa \tag{2.21a}$$

$$x = \rho\cos\varphi \tag{2.21b}$$

$$y = \rho\sin\varphi \tag{2.21c}$$

$$z = \tau\sinh\kappa. \tag{2.21d}$$

Vamos denotar por $x'^{\mu} = \left(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3\right)$ o 4-vetor posição nas coordenadas $txyz$, e por $x^{\mu} = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)$ o 4-vetor posição nas coordenadas $\tau\rho\varphi\kappa$. O tensor métrico nas coordenadas $\tau\rho\varphi\kappa$ é dado por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\tau^2 \end{pmatrix} \qquad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/\rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/\tau^2 \end{pmatrix}. \tag{2.22}$$

[5] As colisões nucleares podem ser centrais (maior número de nucleons participantes) até periféricas (maior número de nucleons espectadores), ver seção A.2 do apêndice A.

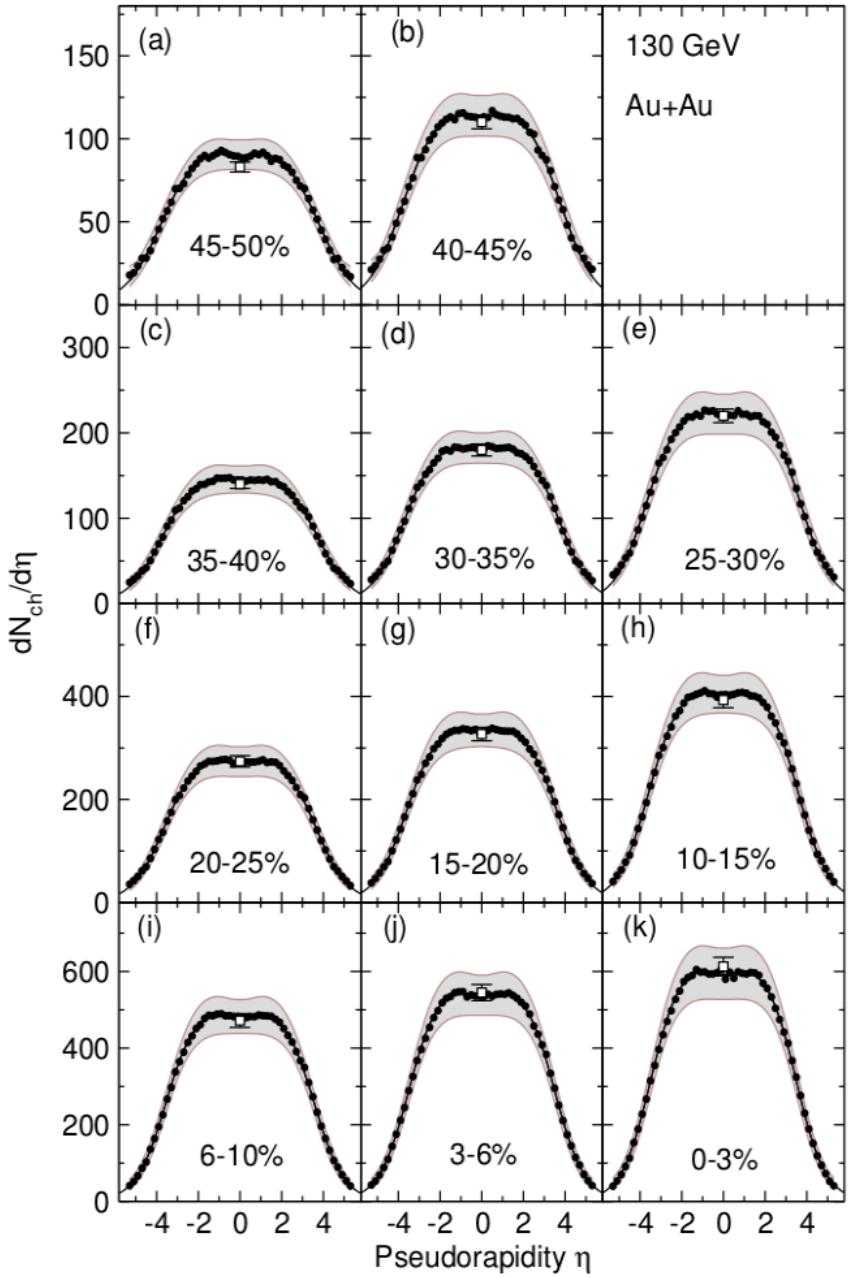

Figura 2.1: Distribuição de partículas carregadas, colaboração PHOBOS, para colisões Au+Au à $\sqrt{s} = 130\,\mathrm{A\ GeV}$, com várias centralidades. As curvas sólidas representam os melhores ajustes para os dados na região $-4,9 < \eta < 4,9$, e as regiões sombreadas representam a faixa de erro. Retirada da referência [40].

Podemos parametrizar a 4-velocidade de um elemento do fluido em termos da rapidez longitudinal $Y_{_L}$, da rapidez transversal $Y_{_T}$ e do ângulo azimutal da velocidade, ϕ, definidos como

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) \tag{2.23a}$$

$$Y_{_T} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+v_{_T}}{1-v_{_T}} \tag{2.23b}$$

$$Y_{_L} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+v_z}{1-v_z}, \tag{2.23c}$$

em que $v_{_T} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. Assim, a 4-velocidade nas coordenadas $txyz$ é escrita como

$$\begin{aligned} u'^{\mu} &= (u'^0, u'^1, u'^2, u'^3) = (u'^t, u'^x, u'^y, u'^z) \\ &= (\cosh Y_{_T}\cosh Y_{_L}, \sinh Y_{_T}\cos\phi, \sinh Y_{_T}\sin\phi, \cosh Y_{_T}\sinh Y_{_L})\,. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Nas coordenadas $\tau\rho\varphi\kappa$ a 4-velocidade é escrita como

$$\begin{aligned} u^{\mu} &= (u^0, u^1, u^2, u^3) = (u^{\tau}, u^{\rho}, u^{\varphi}, u^{\kappa}) \\ &= \cosh Y_{_T}\left(\cosh(Y_{_L}-\kappa), \tan Y_{_T}\cos(\phi-\varphi), \frac{1}{\rho}\tan Y_{_T}\sin(\phi-\varphi), \frac{1}{\tau}\sinh(Y_{_L}-\kappa)\right). \end{aligned} \tag{2.25}$$

Nessas coordenadas, o *4-momentum* $p^{\mu} = \left(p^0, p^1, p^2, p^3\right)$ é dado por

$$\begin{aligned} p^{\mu} &= \left(p^0, p^1, p^2, p^3\right) = (p^{\tau}, p^{\rho}, p^{\varphi}, p^{\kappa}) \\ &= \left(m_{_T}\cosh(y-\kappa), p_{_T}\cos(\theta-\varphi), \frac{1}{\rho}p_{_T}\sin(\theta-\varphi), \frac{1}{\tau}m_{_T}\sinh(y-\kappa)\right), \end{aligned} \tag{2.26}$$

onde $m_{_T}$ e y são, respectivamente, a massa transversal e a rapidez da partícula, e θ seu o ângulo de espalhamento em relação ao eixo-z (ver apêndice A.1).

Como estamos interessados em simetria cilíndrica, vamos tomar o ângulo azimutal da velocidade (2.23a) igual ao ângulo azimutal da posição (2.20c). Usando a aproximação de Bjorken, em que $v_z = z/t$, a rapidez longitudinal (2.23c) coincide com a coordenada hiperbólica (2.20d). Assim, podemos escrever a 4-velocidade, nas coordenadas $\tau\rho\varphi\kappa$, com simetria cilíndrica, $\phi = \varphi$, e aproximação de Bjorken, $Y_L = \kappa$, como

$$u^{\mu} = (\cosh Y_{_T}, \sinh Y_{_T}, 0, 0)\,. \tag{2.27}$$

Podemos agora, escrever as equações da hidrodinâmica nas coordenadas $\tau\rho\varphi\kappa$. Isto pode ser feito, usando a derivada covariante, que para o 4-vetor genérico A^{α}, é definida da seguinte forma

$$A^{\alpha}{}_{;\beta} = \partial_{\beta}A^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}A^{\gamma} \tag{2.28}$$

e, para as componentes do tensor genérico de segunda ordem $B^{\alpha\beta}$ é dada por

$$B^{\alpha\beta}{}_{;\gamma} = \partial_\gamma B^{\alpha\beta} + \Gamma^\alpha{}_{\sigma\gamma} B^{\alpha\sigma} + \Gamma^\beta{}_{\sigma\gamma} B^{\sigma\beta}, \tag{2.29}$$

onde $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ é o símbolo de Christoffel, definido por

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\gamma\sigma} \left(\partial_\alpha g_{\sigma\beta} + \partial_\beta g_{\sigma\alpha} - \partial_\sigma g_{\alpha\beta} \right). \tag{2.30}$$

O tensor energia-*momentum* $T^{\mu\nu}$, equação (2.17), obedece a uma lei de conservação definida em (2.18a). Essa igualdade, pode ser generalizada substituindo a derivada parcial pela derivada covariante, equação (2.29), fornecendo

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0 \quad \longrightarrow \quad \partial_\mu T^{\mu\nu} + \Gamma^\mu{}_{\sigma\mu} T^{\sigma\nu} + \Gamma^\nu{}_{\sigma\mu} T^{\mu\sigma} = 0. \tag{2.31}$$

Podemos reescrever (2.31) para $\nu = 0$ e $\nu = i$, onde $i = 1, 2, 3$ como

$$\begin{aligned} T^{\mu 0}{}_{;\mu} &= \partial_\mu T^{\mu 0} + \Gamma^\mu{}_{\sigma\mu} T^{\sigma 0} + \Gamma^0{}_{\sigma\mu} T^{\mu\sigma} \\ &= \partial_0 T^{00} + \partial_1 T^{10} + \partial_2 T^{20} + \partial_3 T^{30} + \left(\Gamma^0{}_{\sigma 0} + \Gamma^1{}_{\sigma 1} + \Gamma^2{}_{\sigma 2} + \Gamma^3{}_{\sigma 3} \right) T^{\sigma 0} \\ &\qquad + \Gamma^0{}_{\sigma 0} T^{0\sigma} + \Gamma^0{}_{\sigma 1} T^{1\sigma} + \Gamma^0{}_{\sigma 2} T^{2\sigma} + \Gamma^0{}_{\sigma 3} T^{3\sigma} \end{aligned} \tag{2.32a}$$

$$\begin{aligned} T^{\mu i}{}_{;\mu} &= \partial_\mu T^{\mu i} + \Gamma^\mu{}_{\sigma\mu} T^{\sigma i} + \Gamma^i{}_{\sigma\mu} T^{\mu\sigma} \\ &= \partial_0 T^{0i} + \partial_1 T^{1i} + \partial_2 T^{2i} + \partial_3 T^{3i} + \left(\Gamma^0{}_{\sigma 0} + \Gamma^1{}_{\sigma 1} + \Gamma^2{}_{\sigma 2} + \Gamma^3{}_{\sigma 3} \right) T^{\sigma i} \\ &\qquad + \Gamma^i{}_{\sigma 0} T^{0\sigma} + \Gamma^i{}_{\sigma 1} T^{1\sigma} + \Gamma^i{}_{\sigma 2} T^{2\sigma} + \Gamma^i{}_{\sigma 3} T^{3\sigma}. \end{aligned} \tag{2.32b}$$

Nas coordenadas $\tau\rho\varphi\kappa$ os únicos símbolos de Christoffel não nulos são:

$$\Gamma^0_{33} = \tau \tag{2.33a}$$

$$\Gamma^1_{22} = -\rho \tag{2.33b}$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{\rho} \tag{2.33c}$$

$$\Gamma^3_{03} = \Gamma^3_{30} = \frac{1}{\tau}. \tag{2.33d}$$

Substituindo (2.33) nas equações (2.32) obtemos (ver apêndice B.2)

$$\partial_\tau T^{00} + \partial_\rho T^{10} + \frac{1}{\rho} T^{10} + \frac{1}{\tau} T^{00} + \tau\, T^{33} = 0 \tag{2.34a}$$

$$\partial_\tau T^{01} + \partial_\rho T^{11} + \partial_\varphi T^{21} + \partial_\kappa T^{31} + \frac{1}{\rho} T^{11} + \frac{1}{\tau} T^{01} - \rho\, T^{22} = 0. \tag{2.34b}$$

Com as equações (2.22) e (2.27), podemos obter a partir de (2.17) as componentes do tensor energia-*momentum*

$$T^{00} = (\varepsilon + P)\, u^0 u^0 - P g^{00} = (\varepsilon + P) \cosh^2 Y_{_T} - P \tag{2.35a}$$

$$T^{11} = (\varepsilon + P)\, u^1 u^1 - P g^{11} = (\varepsilon + P) \sinh^2 Y_{_T} + P \tag{2.35b}$$

$$T^{22} = (\varepsilon + P)\, u^2 u^2 - P g^{22} = \frac{P}{\rho^2} \tag{2.35c}$$

$$T^{33} = (\varepsilon + P)\, u^3 u^3 - P g^{33} = \frac{P}{\tau^2} \tag{2.35d}$$

$$T^{01} = T^{10} = (\varepsilon + P)\, u^0 u^1 - P g^{01} = (\varepsilon + P) \cosh Y_{_T} \sinh Y_{_T}, \tag{2.35e}$$

as demais componentes são todas nulas. Por fim, substuindo (2.35) em (2.34) obtemos

$$\begin{aligned} &\partial_\tau \left((\varepsilon + P) \cosh^2 Y_{_T} - P \right) + \partial_\rho \left((\varepsilon + P) \cosh Y_{_T} \sinh Y_{_T} \right) \\ &\qquad + \frac{1}{\rho} \left((\varepsilon + P) \cosh Y_{_T} \sinh Y_{_T} \right) + \frac{1}{\tau} \left((\varepsilon + P) \cosh^2 Y_{_T} - P \right) + \tau \frac{P}{\tau^2} = 0 \end{aligned} \tag{2.36a}$$

$$\begin{aligned} &\partial_\tau \left((\varepsilon + P) \cosh Y_{_T} \sinh Y_{_T} \right) + \partial_\rho \left((\varepsilon + P) \sinh^2 Y_{_T} + P \right) \\ &\qquad + \frac{1}{\rho} \left((\varepsilon + P) \sinh^2 Y_{_T} + P \right) + \frac{1}{\tau} \left((\varepsilon + P) \cosh Y_{_T} \sinh Y_{_T} \right) - \rho \frac{P}{\rho^2} = 0. \end{aligned} \tag{2.36b}$$

Estas equações (2.36) podem ser escritas de uma forma mais compacta, fazendo as seguintes definições (ver apêndice B.2)

$$E \equiv T^{00} = (\varepsilon + P)\, \gamma_{_T}^2 - P \tag{2.37a}$$

$$M \equiv T^{01} = T^{10} = (\varepsilon + P)\, \gamma_{_T}^2 v_{_T} = (E + P)\, v_{_T} \tag{2.37b}$$

$$T^{11} = (\varepsilon + P)\, \gamma_{_T}^2 v_{_T}^2 + P = M v_{_T} + P, \tag{2.37c}$$

onde $\gamma_{_T} = \cosh Y_{_T}$.

Substituindo essas definições (2.37) nas equações (2.36) obtemos

$$\partial_\tau E + \partial_\rho \left((E + P)\, v_{_T} \right) + (E + P) \left(\frac{1}{\tau} + \frac{v_{_T}}{\rho} \right) = 0 \tag{2.38a}$$

$$\partial_\tau M + \partial_\rho \left(M v_{_T} + P\right) + M\left(\frac{1}{\tau} + \frac{v_{_T}}{\rho}\right) = 0. \tag{2.38b}$$

Estas, (2.38), são as equações de conservação de energia e *momentum*, no caso de simetria cilíndrica e na aproximação de Bjorken e serão resolvidas numericamente em nossas simulações por meio do algoritmo relativístico HLLE (*Harten–Lax–van Leer–Einfeldt*) [41, 42].

Na ausência de uma expansão transversal, $v_{_T} = 0$ ou $Y_{_T} = 0$, nas equações (2.38) ou (2.36) respectivamente, estas se reduzem à

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} = -\frac{\varepsilon + P}{\tau}, \tag{2.39}$$

que pode ser resolvida analiticamente (ver apêndice B) considerando uma forma simples de equação de estado como, por exemplo, a EoS de um gás ideal ultrarrelativístico, dada por $P = \varepsilon/3$ (ver apêndice C). Assim, substituindo $P = \varepsilon/3$ na equação (2.39) obtemos

$$\frac{ds}{d\tau} + \frac{s}{\tau} = 0 \quad \therefore \quad s(\tau) = \frac{s_0 \tau_0}{\tau}, \qquad \frac{d\varepsilon}{d\tau} + \frac{\varepsilon + P}{\tau} = 0 \quad \therefore \quad \varepsilon(\tau) = \varepsilon_0 \left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^{\frac{4}{3}}. \tag{2.40}$$

Os resultados (2.40) são interessantes porque nos dizem que a densidade de entropia s diminui inversamente proporcional à τ, independente da equação de estado do fluido, enquanto que a densidade de energia depende desta última.

2.3 Desacoplamento

O desacoplamento ou *freeze-out* é a transição da matéria de um estado de equilíbrio termodinâmico com uma pressão finita para um estado onde as partículas fluem livremente sem pressão [35, 43]. Na figura 2.2 temos uma representação simplificada do modelo de Bjorken para uma colisão núcleo-núcleo no plano zt. As linhas cheias (grossas) são as trajetórias dos núcleos que se deslocam quase à velocidade da luz, $v \approx c$. As linhas cheias (finas) são as coordenadas hiperbólicas τ_0 e τ_{fo} (hipérboles) e $v_z = z/t$ é a velocidade longitudinal tipo *scaling* que coincide com a rapidez espaçotempo. Os núcleos colidem ponto $(z, t) = (0, 0)$, no referencial do centro de massa. A matéria criada na colisão se expande passando por um estágio de pré-termalização (região abaixo da hipérbole τ_0) e, em seguida, por um estágio de termalização (região entre as hipérboles τ_0 e τ_{fo}). Neste último estágio é feito o tratamento hidrodinâmico da matéria, iniciando com uma fase de QGP, passando por uma fase mista, e por fim, uma fase hadrônica. A medida que a matéria se expande e esfria, a densidade das partículas vai diminuindo e seu livre caminho médio vai aumentando até se tornar da ordem das dimensões do sistema, neste ponto o tratamento hidrodinâmico não pode ser mais aplicado. Este processo leva as partículas, que antes tinham um movimento coletivo, a se desacoplarem (freeze-out) do sistema e tornarem-se objetos não-interagentes, conservando seus *momenta*[6], viajando livremente para os detectores [35].

[6] Considerando que não há decaimentos.

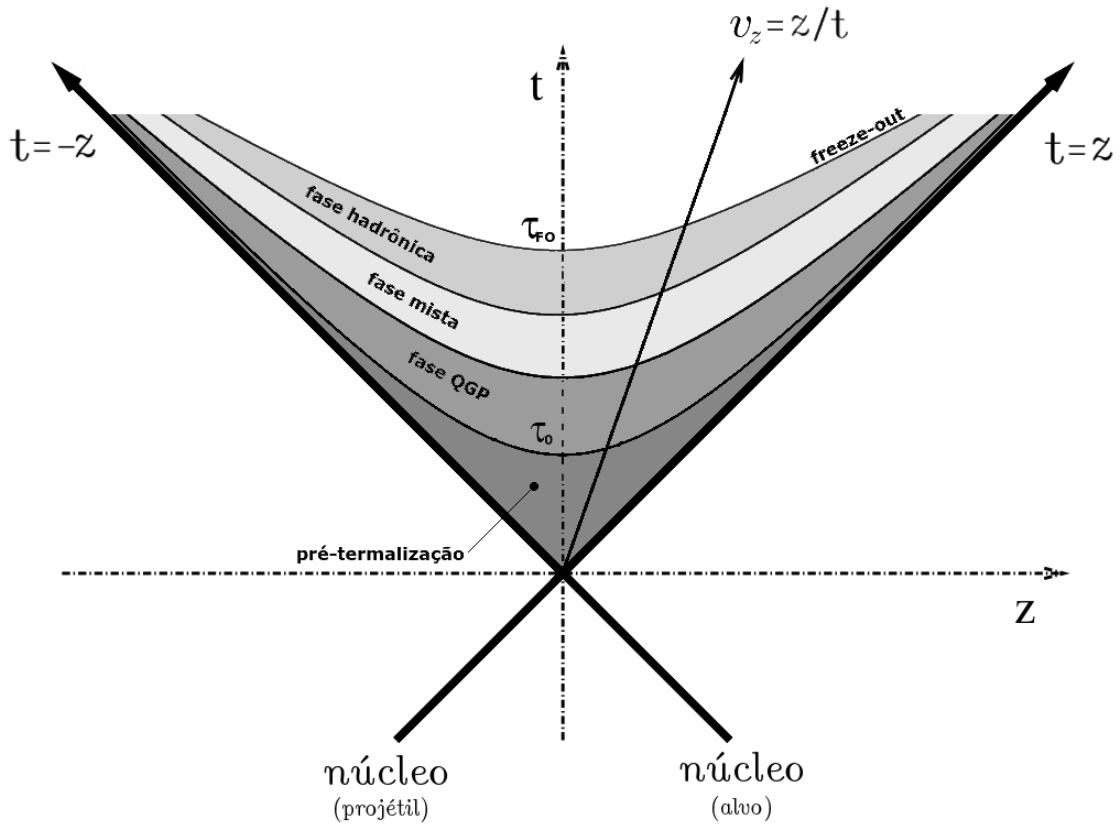

Figura 2.2: Representação do modelo de Bjorken para uma colisão núcleo-núcleo no plano zt. As linhas cheias (grossas) são as trajetórias dos núcleos que se deslocam quase à velocidade da luz, $v \approx c$. As linhas cheias finas são as coordenadas hiperbólicas τ_0 e $\tau_{\rm fo}$ (hipérboles) e a velocidade longitudinal tipo *scaling* z/t que coincide com a rapidez espaçotempo.

A transição entre o regime hidrodinâmico – onde as interações são suficientemente fortes para uma abordagem coletiva ser válida – e o regime em que as partículas são não-interagentes, inclui fases intermediárias que só podem ser descritas por uma teoria cinética dos gases [5]. No entanto, seguindo os passos de Landau, podemos fazer hipóteses simplificadoras, assumindo que a transição ocorra de maneira abrupta, com o sistema indo diretamente do regime hidrodinâmico ao regime de partículas livres.

Para isto, vamos definir uma hipersuperfície Σ de espessura[7] infinitesimal como sendo a interface entre a região de regime hidrodinâmico e a região de regime não-interagente[8]. A transição entre essas regiões é chamada de *freeze-out*. A superfície de freeze-out, Σ, é uma hipersuperfície tridimensional no espaço de Minkowski, determinada a partir do vínculo de desacoplamento $T(\tau,\rho) = T_{\rm fo}$. Ou seja, a hipersuperfície é determinada encontrando-se todos os pontos do espaçotempo para os quais a temperatura tenha atingido o valor $T_{\rm fo}$. Quando as partículas cruzam a interface Σ, elas saem do regime hidrodinâmico, caracterizado por uma distribuição de equilíbrio $f(x,p)$ e passam ao regime de partículas livres, caracterizada pela distribuição da teoria cinética. Na hipersuperfície, a função distribuição de equilíbrio é aproximadamente igual a função distribuição da teoria cinética. Com isto, o número total de partículas que atravessa um elemento da superfície freeze-out é dado por

$$dN = d\sigma_\mu j^\mu = \int \frac{d^3p}{E} d\sigma_\mu p^\mu f(x,p) \tag{2.41}$$

onde j^μ é uma 4-corrente de partículas, p^μ é o *4-momentum* e $f(x,p)$ uma função distribuição de equilíbrio. Para generalizarmos (2.41) de forma que possamos adicionar as distribuições dos diferentes elementos de fluido da superfície *freeze-out* vamos integrar o termo invariante $d\sigma_\mu p^\mu f(x,p)$ sobre toda a hipersuperfície Σ e obtermos a distribuição invariante de *momentum* de partículas de toda a hipersuperfície

$$E\frac{dN}{d^3p} = \int_\Sigma d\sigma_\mu p^\mu f(x,p), \tag{2.42}$$

essa é a fórmula de Cooper-Frye [35], usada nos códigos hidrodinâmicos. A partir deste cálculos, podemos obter informações de outros parâmetros termodinâmicos do fluxo sobre a superfície de freeze-out. Estas informações permitem-nos calcular muitos Observáveis e compará-los com os dados existentes [35, 43].

2.4 Distribuição de *Momentum* Transversal de Partículas

Imediatamente antes das partículas se desacoplarem, ou seja, antes de cruzarem Σ, elas ainda estão em equilíbrio termodinâmico local, de tal forma que a sua distribuição é descrita

[7] Em um sistema real a hipersuperfície deve ter espessura espacial finita, comparável às dimensões do sistema, onde os efeitos dissipativos e de não equilíbrio podem ocorrer [38].

[8] Regime onde as partículas se movem livremente sem sofrer interações.

pela função de distribuição de Wigner $f(x,p)$. Para um gás ideal, com 4-velocidade de fluxo $u^\mu(x)$, essa função distribuição é dada por

$$f_i(x,p) = \frac{g_i}{(2\pi)^3}\frac{1}{e^{(u\cdot p-\mu_i)/T_{\rm fo}} \mp 1}, \tag{2.43}$$

onde g_i é o número de graus de liberdade, μ_i é o potencial químico da i-ésima partícula emitida. O sinal $-(+)$ refere-se a bósons (férmions). Nesse trabalho estamos considerando $\mu_i = 0$. Assim, a distribuição de *momentum* de partículas de toda a superfície Σ é dada por

$$E\frac{dN_i}{d^3p} = \frac{g_i}{(2\pi)^3}\int\limits_\Sigma \frac{d\sigma_\mu\, p^\mu}{e^{u\cdot p/T_{\rm fo}} \mp 1}, \tag{2.44}$$

onde $d^3p = dp_z dp_y dp_x = dp_z d^2p_{_T} = E\, dy\, p_{_T} dp_{_T}\, d\theta$.

A superfície Σ é uma hipersuperfície tridimensional no espaço de Minkowski, que pode ser parametrizada utilizando-se três parâmetros. Como estamos considerando simetria cilíndrica e invariância de Lorentz ao longo do eixo longitudinal, nas coordenadas $\tau\rho\varphi\kappa$, podemos identificar dois destes parâmetros com as coordenadas φ e κ. Para o terceiro parâmetro, iremos denotar por ζ e as coordenadas τ e ρ irão depender apenas deste, ou seja, $\tau = \tau(\zeta)$ e $\rho = \rho(\zeta)$. Assim, ζ parametriza a superfície Σ (superfície de freeze-out) e sua orientação é no sentido anti-horário, definida no intervalo $\zeta \in [0,1]$.

O elemento de superfície $d\sigma_\mu$ pode ser calculado usando a fórmula da geometria diferencial

$$d\sigma_\mu \;=\; \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\frac{\partial\sigma^\alpha}{\partial u}\frac{\partial\sigma^\beta}{\partial v}\frac{\partial\sigma^\gamma}{\partial w}dudvdw, \tag{2.45}$$

onde $\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}$ é o tenso de Levi-Civita e $\mu,\alpha,\beta,\gamma = 0,\ldots,3$ (ver apêndice A).

Vamos tomar o espaço $\left(\sigma^0,\sigma^1,\sigma^2,\sigma^3\right) = (\tau,\rho,\varphi,\kappa)$ e os parâmetros ζ, φ e κ e calcularmos as componentes de $d\sigma_\mu$

$$\begin{aligned}
d\sigma^0 = d\sigma_0 &= \epsilon_{0ijk}\frac{\partial\sigma^i}{\partial\zeta}\frac{\partial\sigma^j}{\partial\kappa}\frac{\partial\sigma^k}{\partial\varphi}d\zeta d\varphi d\kappa \\
&= \left[\epsilon_{0123}\frac{\partial\rho}{\partial\zeta}\frac{\partial\varphi}{\partial\kappa}\frac{\partial\kappa}{\partial\varphi} + \epsilon_{0132}\frac{\partial\rho}{\partial\zeta}\frac{\partial\kappa}{\partial\kappa}\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi} + \epsilon_{0312}\frac{\partial\kappa}{\partial\zeta}\frac{\partial\rho}{\partial\kappa}\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi}\right. \\
&\quad \left. + \epsilon_{0321}\frac{\partial\kappa}{\partial\zeta}\frac{\partial\varphi}{\partial\kappa}\frac{\partial\rho}{\partial\varphi} + \epsilon_{0213}\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\frac{\partial\rho}{\partial\kappa}\frac{\partial\kappa}{\partial\varphi} + \epsilon_{0231}\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\frac{\partial\kappa}{\partial\kappa}\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\right] d\zeta d\varphi d\kappa \\
&= -\rho\tau\frac{\partial\rho}{\partial\zeta}\, d\zeta d\kappa d\varphi
\end{aligned} \tag{2.46}$$

$$
\begin{aligned}
d\sigma^1 = -d\sigma_1 &= -\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\frac{\partial\sigma^\alpha}{\partial\zeta}\frac{\partial\sigma^\beta}{\partial\kappa}\frac{\partial\sigma^\gamma}{\partial\varphi}d\zeta d\varphi d\kappa \\
&= -\Bigg[\epsilon_{1230}\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\frac{\partial\kappa}{\partial\kappa}\frac{\partial\tau}{\partial\varphi} + \epsilon_{1203}\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\frac{\partial\tau}{\partial\kappa}\frac{\partial\kappa}{\partial\varphi} + \epsilon_{1023}\frac{\partial\tau}{\partial\zeta}\frac{\partial\varphi}{\partial\kappa}\frac{\partial\kappa}{\partial\varphi} + \\
&\quad + \epsilon_{1032}\frac{\partial\tau}{\partial\zeta}\frac{\partial\kappa}{\partial\kappa}\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi} + \epsilon_{1320}\frac{\partial\kappa}{\partial\zeta}\frac{\partial\varphi}{\partial\kappa}\frac{\partial\tau}{\partial\varphi} + \epsilon_{1302}\frac{\partial\kappa}{\partial\zeta}\frac{\partial\tau}{\partial\kappa}\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi}\Bigg]d\zeta d\varphi d\kappa \\
&= -\rho\tau\frac{\partial\tau}{\partial\zeta}\,d\zeta d\kappa d\varphi
\end{aligned} \tag{2.47}
$$

$$
\begin{aligned}
d\sigma^2 = -d\sigma_2 &= -\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\frac{\partial\sigma^\alpha}{\partial\zeta}\frac{\partial\sigma^\beta}{\partial\kappa}\frac{\partial\sigma^\gamma}{\partial\varphi}d\zeta d\varphi d\kappa \\
&= -\Bigg[\epsilon_{2301}\frac{\partial\kappa}{\partial\zeta}\frac{\partial\tau}{\partial\kappa}\frac{\partial\rho}{\partial\varphi} + \epsilon_{2310}\frac{\partial\kappa}{\partial\zeta}\frac{\partial\rho}{\partial\kappa}\frac{\partial\tau}{\partial\varphi} + \epsilon_{2013}\frac{\partial\tau}{\partial\zeta}\frac{\partial\rho}{\partial\kappa}\frac{\partial\kappa}{\partial\varphi} + \\
&\quad + \epsilon_{2031}\frac{\partial\tau}{\partial\zeta}\frac{\partial\kappa}{\partial\kappa}\frac{\partial\rho}{\partial\varphi} + \epsilon_{2103}\frac{\partial\rho}{\partial\zeta}\frac{\partial\tau}{\partial\kappa}\frac{\partial\kappa}{\partial\varphi} + \epsilon_{2130}\frac{\partial\rho}{\partial\zeta}\frac{\partial\kappa}{\partial\kappa}\frac{\partial\tau}{\partial\varphi}\Bigg]d\zeta d\varphi d\kappa \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.48}
$$

$$
\begin{aligned}
d\sigma^3 = -d\sigma_3 &= -\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\frac{\partial\sigma^\alpha}{\partial\zeta}\frac{\partial\sigma^\beta}{\partial\kappa}\frac{\partial\sigma^\gamma}{\partial\varphi}d\zeta d\varphi d\kappa \\
&= -\Bigg[\epsilon_{3012}\frac{\partial\tau}{\partial\zeta}\frac{\partial\rho}{\partial\kappa}\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi} + \epsilon_{3021}\frac{\partial\tau}{\partial\zeta}\frac{\partial\varphi}{\partial\kappa}\frac{\partial\rho}{\partial\varphi} + \epsilon_{3102}\frac{\partial\rho}{\partial\zeta}\frac{\partial\tau}{\partial\kappa}\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi} + \\
&\quad + \epsilon_{3120}\frac{\partial\rho}{\partial\zeta}\frac{\partial\varphi}{\partial\kappa}\frac{\partial\tau}{\partial\varphi} + \epsilon_{3201}\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\frac{\partial\tau}{\partial\kappa}\frac{\partial\rho}{\partial\varphi} + \epsilon_{3210}\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\frac{\partial\rho}{\partial\kappa}\frac{\partial\tau}{\partial\varphi}\Bigg]d\zeta d\varphi d\kappa \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{2.49}
$$

com isto obtemos

$$
d\sigma_\mu = \rho\tau\left(-\frac{d\rho}{d\zeta}, \frac{d\tau}{d\zeta}, 0, 0\right)d\zeta d\varphi d\kappa. \tag{2.50}
$$

2.4.1 Modelo de Bjorken com Expansão Transversal e Simetria Cilíndrica

Na aproximação de Bjorken com expansão transversal o produto do elemento de superfície (2.50) com o *4-momentum* (2.26), nas coordenadas $\tau\rho\varphi\kappa$ é dado por

$$
d\sigma_\mu\, p^\mu = -\tau\rho\frac{d\rho}{d\zeta}m_{_T}\cosh\left(y-\kappa\right)d\zeta d\varphi d\kappa + \tau\rho\frac{d\tau}{d\zeta}p_{_T}\cos\left(\theta-\varphi\right)d\zeta d\varphi d\kappa, \tag{2.51a}
$$

e o produto da 4-velocidade (2.27) com o *4-momentum* (2.26) dado por

$$
u_\mu p^\mu = m_{_T}\cosh\left(y-\kappa\right)\cosh Y_{_T} - p_{_T}\cos\left(\theta-\varphi\right)\sinh Y_{_T}. \tag{2.51b}
$$

Com estes produtos (2.51), podemos obter a partir de (2.44) a distribuição *momentum* transversal de partículas

$$\frac{dN_i}{dyp_{_T}dp_{_T}d\theta} = \frac{g_i}{(2\pi)^3}\int_{\Sigma} d\zeta d\varphi d\kappa \frac{-\tau\rho\frac{d\rho}{d\zeta}m_{_T}\cosh(y-\kappa)+\tau\rho\frac{d\tau}{d\zeta}p_{_T}\cos(\theta-\varphi)}{e^{\left(m_{_T}\cosh(y-\kappa)\cosh Y_{_T}-p_{_T}\cos(\theta-\varphi)\sinh Y_{_T}\right)/T_{\rm fo}}\mp 1}, \tag{2.52}$$

que no caso de píons é dada por

$$\frac{dN_\pi}{dyp_{_T}dp_{_T}d\theta} = \frac{g_\pi}{(2\pi)^3}\int_{\Sigma} d\zeta d\varphi d\kappa \frac{-\tau\rho\frac{d\rho}{d\zeta}m_{_T}\cosh(y-\kappa)+\tau\rho\frac{d\tau}{d\zeta}p_{_T}\cos(\theta-\varphi)}{e^{\left(m_{_T}\cosh(y-\kappa)\cosh Y_{_T}-p_{_T}\cos(\theta-\varphi)\sinh Y_{_T}\right)/T_{\rm fo}}- 1}. \tag{2.53}$$

Sem a expansão transversal, $Y_{_T}=0$, a distribuição (2.53) se reduz a

$$\frac{dN_\pi}{dyp_{_T}dp_{_T}d\theta} = \frac{g_\pi}{(2\pi)^3}\int_{\Sigma} d\zeta d\varphi d\kappa \frac{-\tau\rho\frac{d\rho}{d\zeta}m_{_T}\cosh(y-\kappa)+\tau\rho\frac{d\tau}{d\zeta}p_{_T}\cos(\theta-\varphi)}{e^{\left(m_{_T}\cosh(y-\kappa)\right)/T_{\rm fo}}- 1}. \tag{2.54}$$

Neste caso, a superfície de freeze-out é dada simplemente pela coordenada hiperbólica τ, e o estado termodinâmico inicial de todos os elementos de fluido é o mesmo ao longo da hipérbole $\tau=\tau_{\rm fo}=cte$ [5, 38], ver figura 2.2, com isto temos $\frac{d\tau}{d\zeta}=0$. Assim, podemos escrever (2.54) como

$$\begin{aligned}
\frac{dN_\pi}{dyp_{_T}dp_{_T}d\theta} &= -\frac{g_\pi m_{_T}}{(2\pi)^3}\tau_{\rm fo}\int_{\Sigma} d\zeta d\varphi d\kappa \frac{\rho\frac{d\rho}{d\zeta}\cosh(y-\kappa)}{e^{\left(m_{_T}\cosh(y-\kappa)\right)/T_{\rm fo}}- 1} \\
&= -\frac{g_\pi m_{_T}}{(2\pi)^3}\tau_{\rm fo}\int_{R_{\rm A}}^{0}\rho\, d\rho\int_{0}^{2\pi}d\varphi\int_{-\infty}^{+\infty}d\kappa\frac{\cosh(y-\kappa)}{e^{\left(m_{_T}\cosh(y-\kappa)\right)/T_{\rm fo}}- 1} \\
&= \frac{g_\pi m_{_T}}{(2\pi)^2}\,\tau_{\rm fo}\,\frac{R_{\rm A}^2}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}d\kappa\frac{\cosh(y-\kappa)}{e^{\left(m_{_T}\cosh(y-\kappa)\right)/T_{\rm fo}}- 1},
\end{aligned} \tag{2.55}$$

onde $R_{\rm A}$ é o raio do núcleo.

2.5 Condições Iniciais

Há duas formas de condições iniciais usadas na abordagem hidrodinâmica das colisões nucleares ultrarrelativísticas. Em uma delas, usa-se condições iniciais evento-a-evento, que são mais próximas ao que acontece em um experimento. Outro tipo são as condições iniciais suaves, que correspondem a uma média sobre várias eventos. Recentemente, tem se mostrado [44, 45, 46] que o uso das condições iniciais evento-a-evento são fundamentais para se entender

os dados experimentais, como por exemplo, o fluxo elíptico[9]. No entanto, por questão de simplicidade, usaremos neste trabalho as condições iniciais suaves.

Para estimarmos a densidade de energia inicial, ε_0, da matéria nuclear gerada na colisão, vamos considerar uma colisão central tipo A + A. Uma representação simplificada da colisão é mostrada na figura 2.3. Dois núcleos, no referencial do centro de massa, com velocidades próximas a velocidade da luz e direções opostas, colidem produzindo uma grande quantidade de matéria.

Os núcleos sofrem um achatamento na direção longitudinal devido à contração de Lorentz nessa direção. Assumindo que a energia da colisão é extremamente alta [39, 48], podemos representa os núcleos por discos finos, desprezando sua espessura na direção longitudinal. Muitas partículas são produzidas num curto intervalo, em torno do ponto $(z,t) = (0,0)$. Esta produção é caracterizada por uma distribuição de rapidez, dN/dy, como uma função da variável rapidez y. A velocidade longitudinal de uma partícula com rapidez y pode ser obtida usando a primeira e a quarta componente do 4-*momentum* (ver apêndice A.1)

$$v_z = \frac{p_z}{E} = \tanh y. \tag{2.56}$$

A velocidade longitudinal de uma partícula num ponto z qualquer do fluido é dada, no modelo de Bjorken, por

$$\frac{z}{t} = v_z = \tanh y. \tag{2.57}$$

Com os resultados (2.56) e (2.57) podemos relacionar a posição de uma partícula no espaçotempo com sua variável rapidez y (ver apêndice A.1)

$$t = \tau \cosh y \tag{2.58}$$

$$z = \tau \sinh y, \tag{2.59}$$

e, com isto, expressar a variável rapidez y em termos das variáveis do espaçotempo z e t

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{t+z}{t-z}. \tag{2.60}$$

A partir da relação da rapidez y com a coordenada espacial z, a distribuição de rapidez dN/dy pode ser escrita como uma distribuição espacial, e desta a densidade de energia inicial pode ser estimada.

A densidade de energia inicial, ε_0, de um elemento de fluido é definida no referencial no qual o elemento de fluido está em repouso. No referencial do centro de massa, a matéria nuclear gerada na colisão está em repouso em $z = 0$. Considerando uma pequena fatia da seção reta do eixo da colisão, como descrito na parte inferior da figura 2.3, o volume inicial do fluido pode ser aproximado por $S\Delta z$, onde S é a área transversal onde os núcleos se sobrepõem

[9] Fluxo ou escoamento elíptico v_2 é uma das medidas do comportamento coletivo da matéria criada em colisões nucleares de alta energia [47].

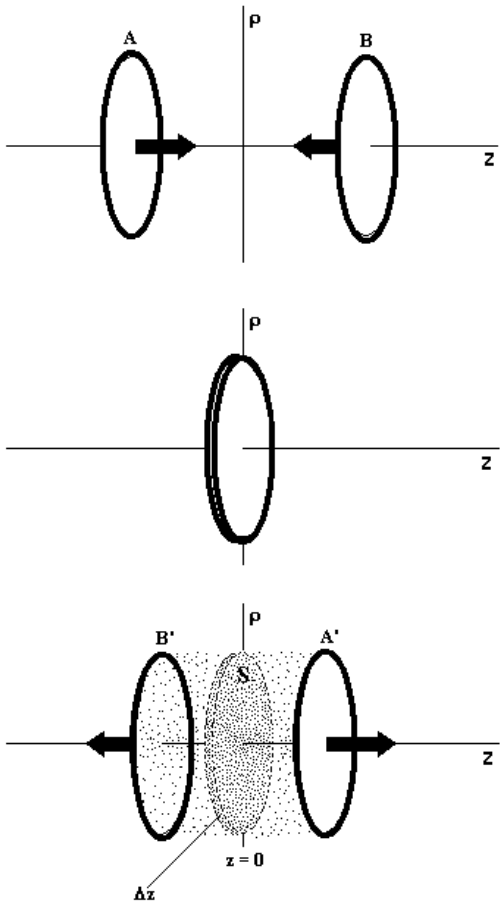

Figura 2.3: Representação modelo de Bjorken – [superior] os núcleos A e B se aproximando do ponto de colisão. [centro] os núcleos colidem no ponto $(z,t) = (0,0)$. [inferior] os núcleos A′ e B′ se afastando do ponto de colisão, deixando um grande número de partículas produzidas em torno de $z = 0$.

e Δz é o tamanho na direção z. Então, o número de partículas por unidade de volume em $z = 0$ é dado por

$$\begin{aligned}\frac{\triangle N}{\mathcal{S}\triangle z} &= \frac{1}{\mathcal{S}}\frac{dN}{dy}\left.\frac{dy}{dz}\right|_{y=0} \\ &= \frac{1}{\mathcal{S}}\frac{dN}{dy}\left.\frac{1}{\tau_0\cosh y}\right|_{y=0}.\end{aligned} \tag{2.61}$$

A energia de uma partícula com rapidez y é dada por $m_{_T}\cosh y$. Com isto, a densidade de energia inicial, ε_0, na região de área transversal $\mathcal{S}$ e coordenada hiperbólica τ_0 é dada por

$$\begin{aligned}\varepsilon_0(\tau_0) &= m_{_T}\cosh y\frac{\triangle N}{\mathcal{S}\triangle z} \\ &= \left.\frac{m_{_T}}{\tau_0\mathcal{S}}\frac{dN}{dy}\right|_{y=0},\end{aligned} \tag{2.62}$$

onde τ_0 é o intervalo de tempo para a termalização do fluido e a área transversal S é igual a $\pi R_{_A}^2$ onde $R_{_A} = r_0 A^{\frac{1}{3}}$ e $r_0 = 1.2\,\text{fm}$.

Esta foi a estimativa para a densidade de energia inicial ε_0 feita por Bjorken. A quantidade τ_0, "tempo próprio[10]", na qual o plasma é produzido, não é uma quantidade conhecida. Bjorken estimou essa quantidade em 1 fm [39], e este é geralmente o valor encontrada na literatura. Porém outros valores também podem ser contrados como, por exemplo, $\tau_0 = 0.1$ fm no trabalho de S. Pratt [49]. Neste trabalho iremos adotar os valores da coordenada hiperbólica τ_0 no intervalo $0.2\,\text{fm} \leq \tau_0 \leq 0.4\,\text{fm}$.

A quantidade de energia deixada pelos núcleos na região de interação é caracterizada por uma distribuição de rapidez, dN/dy, ou distribuição de pseudo-rapidez, $dN/d\eta$. Podemos estimar o valor da densidade de energia inicial, ε_0, a partir dos valores experimentais $\left.\frac{dN}{dy}\right|_{y=0}$ e $\left.\frac{dN}{d\eta}\right|_{\eta=0}$.

[10] Muitas vezes a coordenada hiperbólica τ é chamada de tempo próprio. Isto porque neste caso, $v_z = z/t$, a coordenada hiperbólica τ ganha a mesma forma do tempo próprio. Vejamos, o tempo próprio é dado por $\tau = \gamma^{-1}t$ onde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ é o fator gama de Lorentz. No nosso caso, $\beta = v_z$ (lembrando que estamos usando $c = 1$). Então $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v_z^2}}$ e, assim, podemos escrever $\tau = t\sqrt{1-v_z^2}$. A coordenada hiperbólica é definida como $\tau \equiv \sqrt{t^2 - z^2}$, que pode ser reescrita como $\tau = t\sqrt{1-\frac{z^2}{t^2}} = t\sqrt{1-v_z^2}$ que, neste caso, tem a mesma forma do tempo próprio.

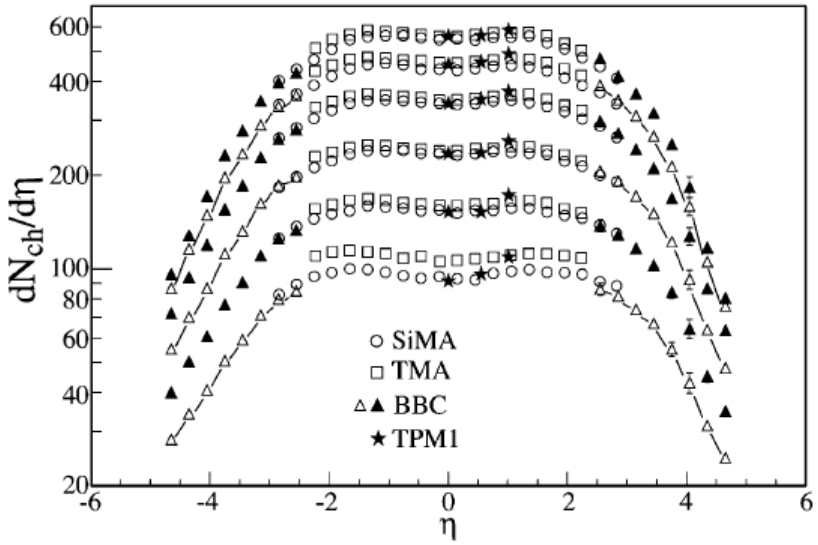

Figura 2.4: Distribuição de partículas carregadas em função da pseudo-rapidez $dN_{ch}/d\eta$, para as centralidades, de cima para baixo, 0–5%, 5–10%, 10–20%, 20–30%, 30–40%, e 40–50%. Dados da colaboração BRAHMS para colisões Au+Au com energia de $\sqrt{s_{NN}} = 130$ GeV. Retirada da referência [51].

Colisões $^{197}\mathrm{Au} + {}^{197}\mathrm{Au}$, no RHIC, à $\sqrt{s_{\mathrm{NN}}} = 130\,\mathrm{GeV}$, no referencial do centro de massa, centralidade (0–5%), fornecem $\left.\frac{dN}{dy}\right|_{y=0} \approx 683$ e $\langle m_{\mathrm{T}} \rangle \approx 0.4\,\mathrm{GeV}$, seguindo a colaboração PHENIX [50] e $\left.\frac{dN}{d\eta}\right|_{\eta=0} \approx 553$, segundo a colaboração BRAHMS [51], ver figura 2.4. A área transversal da região de interação é dada por $S = \pi\left(1.2 \times 197^{\frac{1}{3}}\right)^2 \approx 153\,\mathrm{fm}^2$. Então, por exemplo, para um tempo de termalização $\tau_0 = 0.2\,\mathrm{fm}$ a densidade de energia inicial dada por (2.62) é $\varepsilon_0(0.2) \approx 15\,\mathrm{GeV} \cdot \mathrm{fm}^{-3}$. Nas figuras 2.5 e 2.6, mostramos condições iniciais produzidas pelo gerador de eventos NeXuS, para uma colisão central de Au + Au em 130A GeV [34].

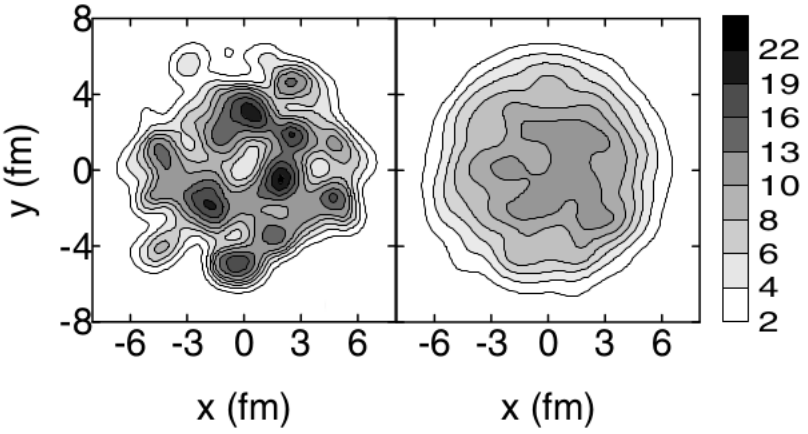

Figura 2.5: Densidade de energia, em GeV/fm^3, no plano de rapidez média. A esquerda, temos um único evento. A direita, média sobre 30 eventos. Retirada da referência [34].

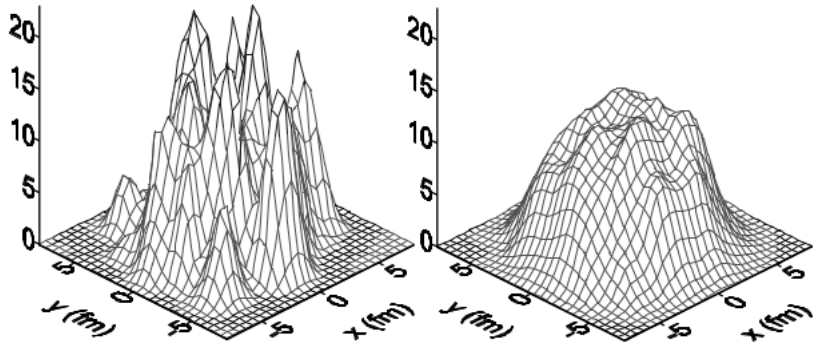

Figura 2.6: Uma representação diferente das mesmas condições iniciais mostrada na figura 2.5, na região central de rapidez. O eixo vertical representa a densidade de energia em unidades de GeV/fm^3. Retirada da referência [34].

Na esquerda dos gráficos (figuras 2.5 e 2.6) temos uma distribuição de densidade de energia de um único evento, na região central de rapidez, apresentando várias bolhas de matéria de alta densidade e pouca simetria. Na direita dos gráficos temos uma média sobre 30 eventos que apresenta uma distribuição de densidade de energia mais simétrica e suave. Neste trabalho usaremos condições iniciais simétricas e suaves, na região $\rho < R_{_A}$, dadas por

$$\varepsilon_0\left(\tau_0,\rho\right) = \frac{m_{_T}}{\tau_0 \mathcal{S}} \left.\frac{dN}{dy}\right|_{y=0} \Theta\left(R_{_A}-\rho\right). \tag{2.63}$$

O tempo de termalização que usaremos em nossas simulações numéricas será de $\tau_0 = 0.3\,\mathrm{fm}$. Esse tempo é aproximadamente duas a três vezes maior que o tempo necessário para, em

uma colisões central $^{197}\mathrm{Au} + {}^{197}\mathrm{Au}$, no RHIC, à $\sqrt{s_{\mathrm{NN}}} = 130\,\mathrm{GeV}$, os núcleos passarem um pelo o outro (ver figura 2.3). Usamos esse tempo, juntamente com dados experimentais da colaboração PHENIX [50], para nossa estimativa de densidade de energia inicial e obtivemos por meio de (2.63) o valor de $\varepsilon_0 \approx 10.5\,\mathrm{GeV}\cdot\mathrm{fm}^{-3}$. Esse valor de densidade de energia inicial é coerente com estimativas obtidas com métodos mais sofisticados como, por exemplo, o gerador de eventos NeXuS, veja os gráficos da direita (condições suaves) nas figuras 2.5 e 2.6.

Temos agora a densidade de energia inicial (condição inicial) e as equações da hidrodinâmica relativística. Para descrevermos o movimento do fluido a partir desta condição inicial, precisamos de mais uma equação a fim de complementar as equações (2.38). Essa equação será uma equação de estado (EoS), a qual descreveremos no próximo capítulo.

Capítulo 3

Equação de Estado

"Se Deus não existe, não se perde nada acreditando nele,
mas se ele existe, perde-se muito não acreditando."
Blaise Pascal

No capítulo anterior, discutimos o caso da hidrodinâmica relativística para descrever a evolução da matéria formada em uma colisão nuclear ultrarrelativística, onde supomos a existência de um equilíbrio térmico local. Para resolver as equações da hidrodinâmica precisamos, além das condições iniciais, de uma equação de estado. No nosso caso, precisamos de uma equação de estado que descreva a fase do QGP, a fase de hádrons e a transição entre elas. Para isto, vamos utilizar, neste trabalho, três tipos de equações de estado: (i) gás ideal de píons (sem a presença de um QGP); (ii) transição de fase de primeira ordem entre um QGP e um gás de ressonâncias com correção de volume; e (iii) baseada na QCD, em que a transição de fase entre o QGP e o gás de hádrons é do tipo *crossover*[1]. Inicialmente, o fluido é formado por uma fase de plasma de quarks e glúons. A medida em que este se expande e esfria parte da matéria passa para uma fase hadrônica. O processo de expansão continua, e a partir de um certo tempo, toda matéria gerada na colisão estará na fase hadrônica. Dessa forma, precisamos de uma equação de estado (EoS) que descreva tanto a fase de plasma quanto a fase hadrônica.

3.1 Ensemble Grão-Canônico

Vamos, inicialmente, relembrar o formalismo do *ensemble grão-canônico*. A função de partição do ensemble grão-canônico é dada por [52]

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(V,\beta,\mu) = \sum_{\alpha} e^{-\beta(E_\alpha - \mu N_\alpha)}, \qquad \text{onde} \quad \beta = \frac{1}{T}. \tag{3.1}$$

A partir desta, todas as quantidades termodinâmicas podem ser obtidas. A saber:

[1] Transição suave com características de uma transição de 2ª ordem.

$$\langle E\rangle = -\left.\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \beta}\right|_{\mu}; \tag{3.2a}$$

$$\langle N\rangle = \frac{1}{\beta}\left.\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \mu}\right|_{\beta}; \tag{3.2b}$$

$$\langle S\rangle = \beta\left(\langle E\rangle - \mu\langle N\rangle\right) + \ln \mathcal{Z}. \tag{3.2c}$$

Em geral, quando o sistema é suficientemente grande, a relação termodinâmica extensiva

$$\langle S\rangle = \beta\langle E\rangle - \beta\mu\langle N\rangle + \beta PV, \tag{3.2d}$$

é valida. Então, a partir de (3.2c) e (3.2d), identificamos

$$\frac{1}{\beta}\ln \mathcal{Z} = PV, \tag{3.3}$$

como sendo o potencial termodinâmico para o ensemble grão-canônico.

3.2 Estatística de Fermi-Dirac e Bose-Einstein

Vamos considerar um gás de partículas idênticas, em equilíbrio termodinâmico, num volume V a temperatura T. Se a interação das partículas é fraca o suficiente, cada partícula tem o seu próprio movimento, sendo esse independente de todas as outras. Isto nos permite escrever a energia total do gás em um estado α, onde existem n_1 partículas no estado $i = 1$, n_2 partículas no estado $i = 2$, etc., como $E_\alpha = n_1\varepsilon_1 + n_2\varepsilon_2 + n_3\varepsilon_3 + \cdots = \sum_i n_i\varepsilon_i$ onde a soma estende-se por todos os estados i possíveis de uma partícula. O número total de partículas, N, do gás é dado por $\sum_i n_i = N$. Os números de ocupação, ou o número de partículas em cada estado, são limitados pelo princípio da exclusão de Pauli[2]. Para dois casos particulares temos:

$$\begin{cases} n = 0 \text{ ou } 1 & \text{Fermi-Dirac (FD)} \\ n = 0, 1, 2, \ldots & \text{Bose-Einstein (BE).} \end{cases}$$

A diferença entre os dois casos é determinada pela natureza da partícula. As partículas que seguem a estatística FD são chamadas de *férmions* (por exemplo: elétrons, quarks) e partículas que seguem a estatística BE são chamadas de *bósons* (por exemplo: fótons, glúons).

[2] A função de onda de um sistema de partículas idênticas deve ser simétrica (bósons) ou antissimétrica (férmions) com respeito a permutação de partículas.

3.2.1 Gás ideal de Fermi-Dirac

Para o gás ideal de Fermi, o número de partículas n_i para cada estado i é limitado a 0 ou 1. Assim, a função de partição (3.1) torna-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}(V,\beta,\mu) &= \sum_{\alpha} e^{-\beta(E_\alpha - \mu N_\alpha)} \\
&= \sum_{n_1,n_2,n_3,\ldots} e^{-\beta[(n_1\varepsilon_1+n_2\varepsilon_2+n_3\varepsilon_3+\cdots)-(n_1\mu+n_2\mu+n_3\mu+\cdots)]} \\
&= \sum_{n_1}\sum_{n_2}\sum_{n_3}\cdots\sum_{n_i} e^{-\beta\sum_i n_i(\varepsilon_i-\mu)} \\
&= \prod_i \sum_{n_i=0}^{1} e^{-\beta n_i(\varepsilon_i-\mu)} \\
&= \prod_i \left[1+e^{-\beta(\varepsilon_i-\mu)}\right] \\
&= \exp\sum_i \ln\left[1+e^{-\beta(\varepsilon_i-\mu)}\right]. \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

Podemos substituir a soma sobre todos os estados i por uma integral[3] em $\vec{k}$, lembrando que para um gás ideal uma partícula no estado i é tomada como uma onda plana no estado de *momentum* $\vec{k}$. Com isto, obtemos

$$\ln\mathcal{Z}(V,\beta,\mu) = g\frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3k \ln\left[1+e^{-\beta(\varepsilon_k-\mu)}\right], \qquad (3.5)$$

onde ε_k é a energia do estado com *momentum* $\vec{k}$ e g é um fator estatístico da partícula.

Usando (3.5) e as relações termodinâmicas (3.2) podemos calcular a energia total do sistema

$$\begin{aligned}
\langle E\rangle &= -\left.\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\mathcal{Z}(V,T,\mu)\right|_{\mu V} \\
&= g\frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3k \frac{\varepsilon_k e^{-\beta(\varepsilon_k-\mu)}}{1+e^{-\beta(\varepsilon_k-\mu)}} \\
&= g\frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3k \frac{\varepsilon_k}{e^{\beta(\varepsilon_k-\mu)}+1}, \qquad (3.6a)
\end{aligned}$$

o número total de partículas,

$$\begin{aligned}
\langle N\rangle &= \frac{1}{\beta}\left.\frac{\partial}{\partial\mu}\ln\mathcal{Z}(V,T,\mu)\right|_{\beta} \\
&= g\frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3k \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k-\mu)}+1}. \qquad (3.6b)
\end{aligned}$$

[3] No limite termodinâmico, $\sum_i \longrightarrow g\frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3k$, podemos trocar o somatório (discreto) por uma integral (contínuo) pois no espectro, os níveis de energia entre 0 e ε estão suficientemente próximos.

e a pressão,

$$P = \frac{g}{(2\pi)^3}\frac{1}{\beta}\int d^3k\, \ln\left[1 + e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu)}\right]. \tag{3.6c}$$

Substituindo as equações (3.6) em (3.2d) obtemos a entropia do gás de Fermi. As equações (3.6a) e (3.6b) mostram que no gás de Fermi o número médio de ocupação para o nível de energia ε_k é dada por

$$\bar{n}_{\mathrm{F}}(\varepsilon_k) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)} + 1}, \tag{3.7}$$

que é conhecida como *distribuição de Fermi-Dirac*.

3.2.2 Gás ideal de Bose-Einstein

Para o gás de Bose-Einstein, não há limitação para o número de ocupação n_i, assim, temos que somar sobre todos os inteiros positivos

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}(V,\beta,\mu) &= \sum_{\alpha} e^{-\beta(E_\alpha - \mu N_\alpha)} \\
&= \sum_{n_1,n_2,n_3,\ldots} e^{-\beta[(n_1\varepsilon_1 + n_2\varepsilon_2 + n_3\varepsilon_3 + \cdots) - (n_1\mu + n_2\mu + n_3\mu + \cdots)]} \\
&= \sum_{n_1}\sum_{n_2}\sum_{n_3}\cdots\sum_{n_i} e^{-\beta\sum_i n_i(\varepsilon_i - \mu)} \\
&= \prod_i \sum_{n_i=0}^{\infty} e^{-\beta n_i(\varepsilon_i - \mu)} \\
&= \prod_i \frac{1}{1 - e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)}} \\
&= \exp\left\{-\sum_i \ln\left[1 - e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)}\right]\right\},
\end{aligned} \tag{3.8}$$

onde assumimos que $\varepsilon_i - \mu > 0$ para assegurar a convergência. Integrando sobre todos os estado de onda plana, temos

$$\ln \mathcal{Z}(V,\beta,\mu) = -g\,\frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3k\, \ln\left[1 - e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)}\right]. \tag{3.9}$$

Procedendo de modo análogo ao gás de Fermi, as expressões para energia, número de partículas e pressão de um gás de bósons, são dadas respectivamente por

$$\langle E\rangle = g\,\frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3k \frac{\varepsilon_k}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)} - 1}; \tag{3.10a}$$

$$\langle N\rangle = g\,\frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3k \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k-\mu)}-1}; \tag{3.10b}$$

$$P = -\frac{g}{(2\pi)^3}\frac{1}{\beta}\int d^3k\,\ln\left[1-e^{-\beta(\varepsilon_k-\mu)}\right]. \tag{3.10c}$$

A entropia pode ser obtida substituindo (3.10) em (3.2d). A probabilidade de ocupação do nível de energia ε_k para um gás de bóson é dada por

$$\bar{n}_{\rm B}(\varepsilon_k) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k-\mu)}-1}, \tag{3.11}$$

que é conhecida como *distribuição de Bose-Einstein.*

3.3 Fase de Plasma de Quarks e Glúons

Em altas temperaturas, as interações entre quarks e glúons são desprezíveis[4]. Com isto, podemos idealizar um sistema quark-glúon em equilíbrio térmico, à temperatura T, ocupando um volume V como sendo não interagente, sem massa e com número bariônico líquido igual a zero, ou seja, o número de quarks e antiquarks no sistema são iguais.

Nesta fase, o gás ideal é formado basicamente por glúons, quarks *up* (u), quarks *down* (d) e quarks *strange* (s). A energia de um sistema de quarks sem massa com potencial químico bariônico nulo, volume V e temperatura T é dada por [48]

$$E_{\rm q}(T) = g_{\rm q}\frac{V}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{p^3dp}{1+e^{\beta p}}. \tag{3.12}$$

Fazendo um mudança de variável $\beta p = p/T = z \longrightarrow dp = Tdz$ e usando a série geométrica $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $|x|<1$ em (3.12) temos

$$\begin{aligned}
E_{\rm q}(T) &= g_q\,\frac{V}{2\pi^2}T^4\int_0^\infty \frac{z^3dz}{1+e^z} \\
&= g_q\,\frac{V}{2\pi^2}T^4\int_0^\infty z^3\,e^{-z}dz\frac{1}{e^{-z}+1} \\
&= g_q\,\frac{V}{2\pi^2}T^4\int_0^\infty z^{4-1}e^{-z}dz\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,e^{-nz} \\
&= g_q\,\frac{V}{2\pi^2}T^4\,\Gamma(4)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n+1)^4},
\end{aligned} \tag{3.13}$$

[4]Quando os quarks estão próximos uns dos outros, ele interagem muito fracamente, com isto, podemos dizer que eles se comportam aproximadamente como partículas livres. Esta propriedade foi chamada de liberdade assintótica (ver seção 1.3).

onde $\Gamma(z)$ é a função gama. Podemos ainda, manipular o somatório de (3.13) de forma que possa ser comparado com a função zeta de Riemann, $\zeta(x)$, definida por

$$\zeta(x) = \sum_{m=1,2,3,..} \frac{1}{m^x}. \tag{3.14}$$

Para isto, vamos em primeiro lugar, fazer $n+1=m$ e separar em soma dos termos ímpares e pares. Em seguida, somar e subtrair um somatório par e reagrupar

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(n+1)^4} &= \sum_{m=1,3,5,..} \frac{1}{m^4} - \sum_{m=2,4,6,..} \frac{1}{m^4} \\
&= \sum_{m=1,3,5,..} \frac{1}{m^4} + \sum_{m=2,4,6,..} \frac{1}{m^4} - \sum_{m=2,4,6,..} \frac{1}{m^4} - \sum_{m=2,4,6,..} \frac{1}{m^4} \\
&= \sum_{m=1,2,3,..} \frac{1}{m^4} - 2 \sum_{m=2,4,6,..} \frac{1}{m^4}.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Agora, para agruparmos novamente os dois somatórios vamos fazer $m = 2\ell$ no somatório par. Como os índices são mudos trocamos o índice ℓ por m e, em seguida usamos função zeta de Riemann (3.14) para obtermos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(n+1)^4} &= \sum_{m=1,2,3,..} \frac{1}{m^4} - 2 \sum_{\ell=1,2,3,..} \frac{1}{(2\ell)^4} \\
&= \left(1 - \frac{2}{2^4}\right) \sum_{m=1,2,3,..} \frac{1}{m^4} \\
&= \frac{7}{8} \sum_{m=1,2,3,..} \frac{1}{m^4} \\
&= \frac{7}{8}\zeta(4).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Com a equação (3.16) e os valores das funções gama $\Gamma(4) = 6$ e zeta $\zeta(4) = \dfrac{\pi^4}{90}$, podemos obter a partir de (3.13) a densidade de energia dos quarks

$$\begin{aligned}
E_{\mathrm{q}}(T) &= 6 \times \frac{7}{8} \times \frac{\pi^4}{90} \left(g_{\mathrm{q}} \frac{V}{2\pi^2} T^4 \right) \\
\varepsilon_{\mathrm{q}}(T) &= 3 \times \frac{7}{8} \times g_{\mathrm{q}} \frac{\pi^2}{90} T^4.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

A densidade de energia de um gás de quarks-antiquarks à temperatura T é dada por

$$\varepsilon_{\mathrm{q}}(T) + \varepsilon_{\bar{\mathrm{q}}}(T) = 3 \times \frac{7}{8} \left(g_{\mathrm{q}} + g_{\bar{\mathrm{q}}}\right) \frac{\pi^2}{90} T^4. \tag{3.18}$$

Para férmions e bósons sem massa, a pressão, P, está relacionada com a densidade de energia, ε, da seguinte forma: $P = \varepsilon/3$ (ver apêndice C). Usando esta relação em (3.18) obtemos

$$P_{\mathrm{q}}(T) + P_{\bar{\mathrm{q}}}(T) = \frac{7}{8}\left(g_{\mathrm{q}} + g_{\bar{\mathrm{q}}}\right)\frac{\pi^2}{90}T^4. \tag{3.19}$$

que é a pressão de um gás de quark-antiquark a temperatura T.

A energia dos glúons num sistema de volume V e temperatura T é dada por

$$E_{\mathrm{g}}(T) = g_{\mathrm{g}}\frac{V}{2\pi^2}\int_0^\infty p^3 dp \frac{1}{e^{\beta p} - 1}, \tag{3.20}$$

onde g_{g} é degenerescência dos glúons. Resolvendo (3.20) de maneira análoga a (3.12) temos

$$\begin{aligned}
E_{\mathrm{g}}(T) &= g_{\mathrm{g}}\frac{V}{2\pi^2}T^4\int_0^\infty \frac{z^3 dz}{e^z - 1}, \\
&= g_{\mathrm{g}}\frac{V}{2\pi^2}T^4\int_0^\infty z^{4-1}\, e^{-z}\, dz \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nz} \\
&= g_{\mathrm{g}}\frac{V}{2\pi^2}T^4\,\Gamma(4)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^4} \\
&= \Gamma(4)\,\zeta(4)\,g_{\mathrm{g}}\,\frac{V}{2\pi^2}\,T^4 \\
\varepsilon_{\mathrm{g}}(T) &= 3 \times g_{\mathrm{g}}\,\frac{\pi^2}{90}\,T^4.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Usando a relação entre a densidade de energia e a pressão, $P = \varepsilon/3$, (ver apêndice C) obtemos a pressão para um gás ideal de glúons

$$P_{\mathrm{g}}(T) = g_{\mathrm{g}}\,\frac{\pi^2}{90}\,T^4. \tag{3.22}$$

Somando as pressões (3.19) e (3.22) obtemos pressão total do gás ideal de quarks e glúons, como

$$P(T) = \left[g_{\mathrm{g}} + \frac{7}{8}\left(g_{\mathrm{q}} + g_{\bar{\mathrm{q}}}\right)\right]\frac{\pi^2}{90}\,T^4. \tag{3.23}$$

Em baixas temperaturas, as interações entre quarks e glúons devem ser levadas em consideração. Para essa abordagem vamos considerar um modelo simples, criado por um grupo de pesquisadores do MIT, conhecido como *modelo de sacola do MIT*. Esse modelo tem como proposta descrever os hádrons em geral. Nele, os quarks são tratados como partículas sem massa no interior de uma sacola com dimensões finitas. Fora da sacola, os quarks são infinitamente massivos [48]. Todas as incertezas do cálculo das energias, devidas às interações, são resumidas postulando uma densidade de energia constante B, associada a sacola. Pode-se

imaginar que o hádron se assemelha a uma bolha de gás imersa em um fluido perfeito. A dinâmica da bolha é determinada pelo balanço entre a pressão externa do fluido (vácuo) e a pressão termodinâmica do gás confinado (quarks e glúons). A densidade de energia do plasma será a soma das densidades (3.18) e (3.21), referente as densidades de energia do gás ideal de quarks e glúons repectivamente, mais um termo B referente a sacola

$$\varepsilon_{\text{qgp}}(T) = 3\, g_{\text{qgp}}\, \frac{\pi^2}{90}\, T^4 + B, \tag{3.24}$$

onde g_{qgp} é degenerescência do plasma de quarks e glúons, dada por

$$g_{\text{qgp}} = g_{\text{g}} + \frac{7}{8}\left(g_{\text{q}} + g_{\bar{\text{q}}}\right). \tag{3.25}$$

A pressão do plasma será resultado do balanço entre a pressão do vácuo e a pressão termodinâmica do gás de quarks e glúons (3.23) – confinamento dos quarks – dada por

$$P_{\text{qgp}}(T) = \frac{1}{3}\left(\varepsilon_{\text{qgp}} - 4B\right) = g_{\text{qgp}}\, \frac{\pi^2}{90}\, T^4 - B. \tag{3.26}$$

A densidade de entropia pode ser obtida a partir da relação termodinâmica (3.2d), usando as expressões (3.24) e (3.26), como

$$s_{\text{qgp}}(T) = 4\, g_{\text{qgp}}\, \frac{\pi^2}{90}\, T^3. \tag{3.27}$$

A degenerescência g_{qgp} depende do número de sabores de quarks considerados. Por exemplo, para dois sabores temos:

- degenerescência dos quarks e antiquarks

$$g_{\text{q}} = g_{\bar{\text{q}}} = N_{\text{spin}} \times N_{\text{cor}} \times N_{\text{sabor}} = 2 \times 3 \times 2$$

- degenerescência dos glúons[5]

$$g_{\text{g}} = N_{\text{spin}} \times (N_{\text{cor}}^2 - 1) = 2 \times 8$$

- degenerescência plasma de quarks e glúons

$$g_{\text{qgp}} = g_{\text{g}} + \frac{7}{8}\left(g_{\text{q}} + g_{\bar{\text{q}}}\right) = 37$$

A tabela 3.1 mostra fatores de degenerescência com $N_{\text{cor}} = 3$ para mais sabores.

[5]Para maiores detalhes com o número de cor dos glúons, $N_{\text{cor}}^2 - 1$, veja em *Introduction to Elementary Particles*, D. Griffiths, p.280 da referência [11].

Tabela 3.1: Fator de degenerescência para quarks ($g_{\rm q}$), glúons ($g_{\rm g}$) e plasma ($g_{\rm qgp}$).

$N_{\rm sabor}$	**0**	**2**	**3**	**4**
$g_{\rm g}$	16	16	16	16
$g_{\rm q}$	0	24	36	48
$g_{\rm qgp}$	16	37	47.5	58

Retirada da referência [27].

3.4 Fase Hadrônica

A interação forte entre hádrons é mais complicada e difícil de ser incorporada numa EoS de uso prático [34]. Entretanto, no regime do RHIC, quase todas as partículas podem ser tratadas com a estatística de Boltzmann, em razão da energia térmica ser suficientemente alta em comparação à energia de interação entre os hadrons [52]. Com isto, a fase hadrônica pode ser aproximada por um gás de hádrons, formado por diferentes espécies de partículas e antipartículas. A pressão total, $P_{\rm H}$, será a soma das pressões individuais dada por

$$P_{\rm H}(T,\mu) = \sum_i P_i(T,\mu_i), \tag{3.28}$$

onde μ é o potencial químico total da fase hadrônica, P_i e μ_i são respectivamente, a pressão e o potencial químico da i-ésima partícula.

As pressões (3.6c) e (3.10c) podem ser reescritas da seguinte forma

$$P_i(T,\mu_i) = \pm\frac{g_i}{2\pi^2}\frac{1}{\beta}\int dk\, k^2\, \ln\left[1 \pm e^{-\beta\left(\sqrt{k^2+m_i^2}-\mu_i\right)}\right], \tag{3.29}$$

onde o sinal $+\,(-1)$ é usando para férmions (bósons), g é a degenerescência.

Usando uma série de Taylor, $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$, se $x<1$, podemos expandir o integrando (3.29), para $e^{-\beta(m-\mu)} < 1$

$$\ln\left[1 \pm e^{-\beta(\varepsilon_k-\mu_i)}\right] = \pm\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\mp 1)^{n-1}}{n}e^{-n\beta(\varepsilon_k-\mu_i)}, \tag{3.30}$$

e, reescrever a equação (3.29) da seguinte forma

$$P_i(T,\mu_i) = \pm\frac{g_i}{2\pi^2}\frac{1}{\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\mp 1)^{n-1}}{n}e^{n\beta\mu_i}\Phi(\beta n, m_i), \tag{3.31}$$

onde

$$\Phi(n\beta, m_i) = \int_0^\infty dk\, k^2 e^{-n\beta\varepsilon_k} = \int_0^\infty dk\, k^2 e^{-n\beta\sqrt{k^2+m_i^2}}, \tag{3.32}$$

que, por conveniência, pode ser reescrita, conforme abaixo, fazendo-se a seguinte mudança de variável, $x = k/m_i \longrightarrow m_i dx = dk$,

$$\Phi(n\beta, m_i) = m_i^3 \int_0^\infty dx\, x^2 e^{-n\beta m_i\sqrt{1+x^2}}. \tag{3.33}$$

Podemos comparar (3.33) com a representação integral da função de Bessel modificada, que é definida como

$$K_\nu(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^\infty dx\, \frac{x^{2\nu}}{\sqrt{1+x^2}}\, e^{-z\sqrt{1+x^2}}. \tag{3.34}$$

Para isto, vamos manipular (3.34) de forma à identificarmos com (3.33) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
K_1(z) &= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\frac{z}{2}\int_0^\infty dx\, \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\, e^{-z\sqrt{1+x^2}} \\
\frac{1}{z}K_1(z) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\int_0^\infty dx\, \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\, e^{-z\sqrt{1+x^2}} \\
\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z}K_1(z)\right) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\frac{d}{dz}\int_0^\infty dx\, \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\, e^{-z\sqrt{1+x^2}} \\
\frac{2\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z}K_1(z)\right) &= -\int_0^\infty dx\, x^2 e^{-z\sqrt{1+x^2}}.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

E, como $\frac{d}{dx}\left[x^{-n}K_n(x)\right] = -x^{-n}K_{n+1}(x)$, temos

$$\begin{aligned}
\Phi(n\beta, m_i) &= -m_i^3\,\frac{2\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z}K_1(z)\right)\right]_{z=n\beta m} \\
&= m_i^3\left[\frac{1}{z}K_2(z)\right]_{z=n\beta m}.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Assim, com este último resultado podemos reescrever (3.31)

$$P(T,\mu) = \frac{g}{2\pi^2}\frac{m^3}{\beta}\sum_{n=1}^\infty \frac{(\mp 1)^{n-1}}{n}\, e^{n\beta\mu}\left[\frac{1}{z}K_2(z)\right]_{z=n\beta m}. \tag{3.37a}$$

Como a pressão é expressa como uma função de T e μ, podemos obter a densidade de partículas $n = \frac{\partial P}{\partial \mu}\,|_\beta$ e densidade de energia $\varepsilon = -\frac{\partial(\beta P)}{\partial \beta}\,|_\mu$

$$n(T,\mu_i) = \frac{g m_i^3}{2\pi^2}\sum_{n=1}^\infty \frac{(\mp 1)^{n-1}}{n}\, e^{n\beta\mu_i}\left[\frac{1}{z}K_2(z)\right]_{z=n\beta m_i} \tag{3.37b}$$

$$\varepsilon(T,\mu_i) = \frac{g m_i^4}{2\pi^2}\sum_{n=1}^\infty \frac{(\mp 1)^{n-1}}{n}\, e^{n\beta\mu_i}\left[\frac{1}{z}\left(\frac{3}{z}K_2(z) + K_1(z)\right)\right]_{z=n\beta m_i}. \tag{3.37c}$$

As séries (3.37) convergem muito lentamente para $e^{-\beta(m-\mu)} \to 1$. Já para $e^{-\beta(m-\mu)} \geq 1$, não convergem [52]. No limite de Boltzmann, $e^{-\beta(m-\mu)} \ll 1$, as séries convergem muito rapidamente e, na prática, basta apenas o primeiro termo para uma boa aproximação. Neste limite, não há diferença entre bósons e férmions, logo, podemos reescrever as séries (3.37) como

$$P_i(T,\mu_i) \approx \frac{g}{2\pi^2}\, m_i^2\, T^2\, e^{\frac{\mu_i}{T}}\, K_2\Big(\frac{m_i}{T}\Big) \tag{3.38a}$$

$$n_i(T,\mu_i) \approx \frac{g}{2\pi^2}\, m_i^2\, T\, e^{\frac{\mu_i}{T}}\, K_2\Big(\frac{m_i}{T}\Big) \tag{3.38b}$$

$$\varepsilon_i(T,\mu_i) \approx \frac{g}{2\pi^2}\, m_i^3\, T\, e^{\frac{\mu_i}{T}} \left[K_1\Big(\frac{m_i}{T}\Big) + \frac{3T}{m_i} K_2\Big(\frac{m_i}{T}\Big)\right]. \tag{3.38c}$$

Para o gás de píons temos

$$P_\pi(T) = \frac{g_\pi}{2\pi^2}\, m_\pi^2\, T \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_2\left[\frac{m_\pi}{T}\,(1+n)\right]}{(1+n)^2}. \tag{3.39}$$

Por fim, usando (3.38a) e (3.39), podemos obter a partir (3.28) a pressão total da fase hadrônica, pressão das partículas e antipartículas que formam o gás ideal de hádrons, como

$$P_{\text{H}}(T,\mu) \approx \sum_i \frac{g_i}{2\pi^2}\, m_i^2\, T^2\, e^{\frac{\mu_i}{T}}\, K_2\Big(\frac{m_i}{T}\Big) + \frac{g_\pi}{2\pi^2}\, m_\pi^2\, T \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_2\left[\frac{m_\pi}{T}\,(1+n)\right]}{(1+n)^2}. \tag{3.40}$$

3.4.1 Correção de Volume-Excluído

Neste trabalho, iremos considerar a inclusão de todos os hádrons conhecidos no modelo de gás ideal. Entretanto, o trabalho realizado por Yen, Greiner e Yang [53], mostra que o modelo de gás ideal pode se tornar inadequado em colisões A+A de altas energias. Isto porque os parâmetros freeze-out químico[6], temperatura e potencial químico bariônico – obtidos por eles – a partir de *fits* da razão do número de partículas, nas energias do AGS e SPS, provocam valores artificialmente grandes na densidade total do número de partículas, muito além daqueles esperados no freeze-out térmico. Eles também mostram que a densidade de número de partículas ultrapassa qualquer estimativa experimental, seja obtida a partir da multiplicidade de partícula, seja a partir da medição do volume do sistema no freeze-out, utilizando o método de interferometria de píons [53, 54]. Isto deixa claro que a descrição de um gás ideal requer uma modificação para ajustar o tamanho do sistema.

Para suprimir os grandes valores indesejáveis de densidade de número de partículas é introduzido uma interação repulsiva entre os hádrons a pequenas distâncias. Este procedimento é conhecido como volume-excluído tipo van der Waals (VDW). A repulsão tipo VDW não altera essencialmente as proporções numéricas das partículas, mas causa um forte efeito de supressão sobre os valores das densidades de número de partículas [52].

[6] O freeze-out químico é um estágio da colisão onde não há energia suficiente para que as colisões inelásticas entre os constituintes da matéria continuem acontecendo, ou seja, não há reações de troca de sabores.

A modificação no sistema para introduzir o volume-excluído tipo VDW é feita substituindo o volume V, do sistema, por $V - vN$ na função de partição canônica $Z(T, N, V)$, e escrevendo a função de partição grão-canônica $\mathcal{Z}(T, \mu, V)$ em termos desta última

$$\mathcal{Z}(T, \mu, V) = \sum_{N=0}^{\infty} e^{\frac{\mu N}{T}} Z(T, N, V). \tag{3.41}$$

Com isto, obtemos

$$\mathcal{Z}^{(\mathrm{ex})}(T, \mu, V) = \sum_{N=0}^{\infty} e^{\frac{\mu N}{T}} Z(T, N, V - vN)\Theta(V - vN), \tag{3.42}$$

onde v é o parâmetro que corresponde ao volume-excluído da partícula, dado por $v = 4v_0$ sendo $v_0 = \frac{4}{3}\pi r_0^3$ o volume e o raio r_0 da "esfera-dura" [43, 54]. Na equação acima o superíndice $^{(\mathrm{ex})}$ refere-se ao o volume-excluído tipo VDW.

Na equação (3.42) há uma dificuldade no cálculo da soma em N, devido à N-dependências do "volume efetivo", $V - vN$ [54]. Para contornar essa dificuldade, realiza-se uma transformada de Laplace

$$\widehat{\mathcal{Z}}^{(\mathrm{ex})}(T, \mu, x) = \int_0^{\infty} dV \exp(-xV)\mathcal{Z}^{(\mathrm{ex})}(T, \mu, V). \tag{3.43}$$

Substituindo $\mathcal{Z}^{(\mathrm{ex})}(T, \mu, V)$ em (3.43) pela soma infinita (3.42), fazendo a mudança de variável de integração, $V \to \widehat{V}$, em cada termo da série, e em seguida, usando (3.41) para reescrever (3.43) obtemos

$$\widehat{\mathcal{Z}}^{(\mathrm{ex})}(T, \mu, x) = \int_0^{\infty} d\widehat{V} \exp(-x\widehat{V})\mathcal{Z}(T, \widehat{\mu}, \widehat{V}), \tag{3.44}$$

onde $\widehat{\mu} \equiv \mu - vTx$ e $\widehat{V} \equiv V - vN$.

Usando o potencial termodinâmico para o ensemble grão-canônico (3.3),

$$P^{(\mathrm{ex})}(T, \mu) \equiv T \lim_{V\to\infty} \frac{\ln \mathcal{Z}^{(\mathrm{ex})}(T, \mu, V)}{V}, \tag{3.45}$$

no limite termodinâmico, $V \to \infty$, a função de partição grão-canônica é dada por

$$\mathcal{Z}^{(\mathrm{ex})}(T, \mu, V)\Big|_{V\to\infty} \sim \exp\left(\frac{P^{(\mathrm{ex})}(T, \mu)V}{T}\right). \tag{3.46}$$

Desta última é possível ver, a partir da equação (3.43), que existe uma singularidade em algum ponto x^* na equação (3.44). Portanto, a singularidade em (3.44), no ponto $x^*(T, \mu)$, nos dá a pressão do sistema[7]

$$x^*(T, \mu) = \frac{P^{(\mathrm{ex})}(T, \mu)}{T} \quad \longrightarrow \quad P^{(\mathrm{ex})}(T, \mu) = T\, x^*(T, \mu). \tag{3.47}$$

[7] A conexão da singularidade de x em (3.44) com o seu comportamento assintótico quando $V \to \infty$ é uma propriedade matemática da transformada de Laplace [54].

Combinando as equações (3.45) e (3.47) encontramos

$$x^*(T,\mu) = \lim_{\widehat{V}\to\infty} \frac{\ln \mathcal{Z}(T,\widetilde{\mu},\widehat{V})}{\widehat{V}}, \qquad \widetilde{\mu} \equiv \mu - vT\, x^*(T,\mu). \tag{3.48}$$

E, com as equações (3.40) e (3.47), encontramos a partir de (3.48) a equação para a pressão $P^{(\mathrm{ex})}(T,\mu)$ de um gás com correção de volume-excluído de VDW no formalismo de ensemble grão-canônico

$$P^{(\mathrm{ex})}(T,\mu) = P_{\mathrm{H}}(T,\widetilde{\mu}), \qquad \widetilde{\mu} \equiv \mu - vP^{(\mathrm{ex})}(T,\mu). \tag{3.49}$$

Uma extensão do procedimento de volume-excluído VDW para várias espécies de partículas, $i = 1,\ldots,h$, é obtida a partir de um *ansatz*, fazendo-se uma substituição $V \to V - \sum_{i=1}^{h} v_i N_i$. Com efeito, a função da pressão na formulação grão-canônica é dada por [43, 54]

$$P^{(\mathrm{ex})}(T,\mu_1,\ldots,\mu_h) = \sum_{i=1}^{h} P_H\left(T, \mu_i - v_i P^{(\mathrm{ex})}(T,\mu_1,\ldots,\mu_h)\right). \tag{3.50}$$

A partir de (3.50) podemos calcular as densidades de: número de partículas; energia; e entropia para o gás de hádrons com a correção de volume-excluído VDW

$$n_i^{(\mathrm{ex})}(T,\mu_1,\ldots,\mu_h) \equiv \left(\frac{\partial P}{\partial \mu_i}\right)_{T,\mu_1,\ldots,\mu_{1-1},\mu_{1+1},\ldots,\mu_h} = \frac{n_i(T,\widetilde{\mu}_i)}{1+\sum_{j=1}^{h} v_j\, n_i(T,\widetilde{\mu}_i)} \tag{3.51}$$

$$s^{(\mathrm{ex})}(T,\mu_1,\ldots,\mu_h) \equiv \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{\mu_1,\ldots,\mu_h} \frac{\sum_{i=1}^{h} s_i(T,\widetilde{\mu}_i)}{1+\sum_{j=1}^{h} v_j\, n_j(T,\widetilde{\mu}_j)} \tag{3.52}$$

$$\varepsilon^{(\mathrm{ex})}(T,\mu_1,\ldots,\mu_h) \equiv Ts - P + \sum_{i=1}^{h} \mu_i n_i = \frac{\sum_{i=1}^{h} \varepsilon_i(T,\widetilde{\mu}_i)}{1+\sum_{j=1}^{h} v_j\, n_j(T,\widetilde{\mu}_j)}, \tag{3.53}$$

onde

$$\widetilde{\mu}_i \equiv \mu_i - v_i P^{(\mathrm{ex})}(T,\mu_1,\ldots,\mu_h), \qquad i = 1,\ldots,h. \tag{3.54}$$

As quantidades termodinâmicas com a correção de volume-excluído VDW obtidas acima, serão incluídas numericamente em nossas EoS.

3.5 Transição de Fase de 1ª Ordem

Na região de transição de fase – região onde as duas fases coexistem – devemos ter a condição $P^{(\mathrm{ex})}(T,\mu) = P_{\mathrm{qgp}}(T,\mu)$. Então, igualando as equações[8] (3.50) e (3.26) para um plasma de quarks e glúons com três sabores u, d e s descrito no modelo de sacola, com $B = 380\,\mathrm{MeV/fm^3}$, obtemos uma temperatura crítica $T_\mathrm{c} = 160\,\mathrm{MeV}$.

Na figura 3.1, temos uma EoS com transição de fase de 1ª ordem para um gás de hádrons com correção de volume (1ST), com a fase QGP dada por (3.26) para os sabores de quarks: *up* (u), *down* (d) e *strange* (s). A temperatura crítica da transição de fase é $T_\mathrm{c} = 160\,\mathrm{MeV}$. À esquerda, mostramos EoS 1ST até uma densidade de energia de 16 $\mathrm{GeV/fm^3}$, e à direita, mostramos a região de transição de fase com mais detalhes.

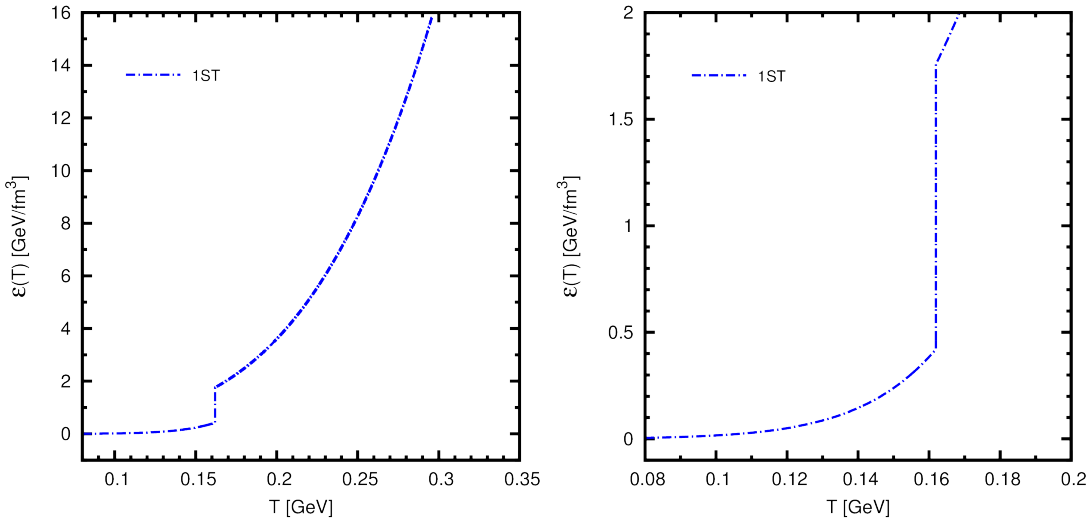

Figura 3.1: EoS 1ST com correção de volume-excluído, com a fase QGP para os sabores de quarks: *up* (u), *down* (d) e *strange* (s). A temperatura crítica $T_\mathrm{c} = 160\,\mathrm{MeV}$ e constante de sacola $B = 380\,\mathrm{MeV/fm^3}$. A esquerda, EoS 1ST até uma densidade de energia de 16 $\mathrm{GeV/fm^3}$. A direita, mostramos a região de transição de fase com mais detalhes.

3.6 Equação de Estado da QCD

A Cromodinâmica quântica (QCD) é uma teoria física, baseada em primeiros princípios [55, 56], que descreve as interações fortes. Essas interações ocorrem entre quarks mediadas por glúons. Sendo a QCD considerada a teoria correta para descrever a interação de quarks e glúons [48] é interessante estudar as fases da matéria utilizando também essa teoria. Cálculos

[8] Para evitar que a notação fique carregada, a partir deste ponto não mais colocaremos o superíndice $^{(\mathrm{ex})}$ referente ao o volume-excluído de VDW nas quantidades termodinâmicas.

termodinâmicos para a QCD, realizados através de simulação numérica numa rede finita, são conhecidos como QCD na rede[9].

A formulação da QCD na rede associa os campos de quarks $\psi(x)$ e os campos de antiquarks $\bar{\psi}(x)$ aos pontos $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ de uma estrutura hipercúbica [55]. Ou seja, o espaçotempo contínuo é discretizado através da introdução de um espaçotempo euclidiano $N_s^3 \times N_t$, transformando-o em uma rede de pontos 4-dimensional, com volume V e temperatura T, definidos por

$$V = (aN_s)^3 \qquad \text{e} \qquad T = \frac{1}{aN_t}, \tag{3.55}$$

onde a é espaçamento entre os pontos da rede, N_s é o número de sítios da rede em uma direção do espaço e N_t na direção do tempo.

Os campos de matéria (campos fermiônicos) são definidos nestes pontos e os campos de interação (campos bosônicos) são definidos nas linhas que ligam um ponto a outro da rede.

Ao longo de uma linha de física constante (LCP)[10], isto é, para as massas dos quarks constantes e para volumes suficientemente grandes, a temperatura é o único parâmetro intensivo da termodinâmica a controlar. Assim, existe apenas uma grandeza termodinâmica independente para ser calculada. Todas as outras quantidades termodinâmicas são obtidas a partir da função de partição da QCD [57]. Uma vez que a pressão é dada pelo logaritmo da função de partição, podemos de modo análogo à (3.1) e (3.3), usando as relações termodinâmicas (3.2) obtemos

$$P = \frac{1}{V} T \ln Z(T, V) \tag{3.56a}$$

$$\varepsilon = \frac{T^2}{V} \frac{\partial}{\partial T} \ln Z(T, V), \tag{3.56b}$$

onde $Z(T, V)$ é a função de partição da QCD[11].

Na QCD na rede, a pressão, a densidade de energia e a densidade de entropia são obtidas através do cálculo do traço do tensor energia-*momentum*, $\mathcal{T}^{\mu}{}_{\mu}(T)$, expresso em unidades da quarta potência da temperatura, $\mathcal{T}^{\mu}{}_{\mu}/T^4$. Por sua vez, este pode ser obtido usando as relações (3.56a) e (3.56b) derivando-se a pressão com respeito à temperatura.

$$\frac{\mathcal{T}^{\mu}{}_{\mu}(T)}{T^4} \equiv \frac{\varepsilon - 3P}{T^4} = T \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{P}{T^4}\right). \tag{3.57}$$

[9] O estudo não-perturbativo da QCD é possível na formulação de rede. A QCD na rede é uma simulação numérica que pode ser utilizada no estudo de vários regimes físicos onde uso da QCD perturbativa não é possível.

[10] Sigla do inglês *line of constant physics (LCP)*. Todos os cálculos foram realizados sobre uma linha de física constante (LCP), ou seja, quando a temperatura é aumentada as massas dos quarks "nus" foram ajustadas de tal modo que os valores das massas dos hádrons, avaliada em temperatura zero, fiquem aproximadamente constante [57].

[11] Não iremos entrar em detalhes sobre a função de partição da QCD por não fazer parte do escopo deste trabalho. Estamos interessados apenas na equação de estado (EoS). Para maiores de detalhes com a função de partição QCD veja as referências [55, 56, 57, 58, 59, 60].

A equação de estado da QCD pode ser calculada através da quantidade (3.57), também conhecida como traço anômalo [57, 58, 60]. A diferença de pressão à temperatura T e $T_{\rm L}$ pode ser expressa como uma integral do traço anômalo[12]

$$\frac{P(T)}{T^4} - \frac{P(T_{\rm L})}{T_{\rm L}^4} = \int_{T_{\rm L}}^{T} dT' \frac{1}{T'^5} \mathcal{T}^{\mu}{}_{\mu}(T'), \tag{3.58}$$

onde $T_{\rm L}$ é um valor arbitrário de temperatura que normalmente é escolhido no regime de baixa temperatura. Para valores suficientemente pequenos a pressão e outras quantidades termodinâmicas são suprimidas exponencialmente por fatores de Boltzmann [57, 58]. É conveniente extrapolar para $T_{\rm L} \to 0$, no limite em que $\frac{P}{T_{\rm L}^4} \to 0$.

As densidades de energia, ε, e de entropia, s, são obtidas combinando-se os resultados de (3.57) e (3.58)

$$\frac{\varepsilon}{T^4} = \frac{\mathcal{T}^{\mu}{}_{\mu}}{T^4} + \frac{3P}{T^4}, \qquad \frac{s}{T^3} = \frac{\varepsilon}{T^4} + \frac{P}{T^4}. \tag{3.59}$$

Na região de alta temperatura, $T > 250$ MeV, a função (3.57) pode ser parametrizada utilizando-se a seguinte forma polinomial inversa [57, 58]

$$\frac{\mathcal{T}^{\mu}{}_{\mu}(T)}{T^4} = \frac{\varepsilon - 3P}{T^4} = \frac{d_2}{T^2} + \frac{d_4}{T^4} + \frac{c_1}{T^{n1}} + \frac{c_2}{T^{n2}}, \tag{3.60}$$

onde os valores dos parâmetros $d_2, d_4, c_1, c_2, n_1, n_2$ e T_0 encontram-se na Tabela 3.2. Esta parametrização funciona bem no intervalo de temperatura de interesse. Além disso, é flexível o suficiente para fazer a correspondência com o resultado do modelo do Gás Hadrônico Ressonante (HRG) na região de baixa temperatura, $T < 180$ MeV [60].

Tabela 3.2: Valores de parâmetros para diferentes fits da EoS.

	d_2 (GeV^2)	d_4 (GeV^4)	c_1 (GeV^{n1})	c_2 (GeV^{n2})	n_1	n_2	T_0 (MeV)
$s95p$	0.2660	2.403×10^{-3}	-2.809×10^{-7}	6.073×10^{-23}	10	30	183.8
$s95n$	0.2654	6.563×10^{-3}	-4.370×10^{-5}	5.774×10^{-6}	8	9	171.8
$s90f$	0.2495	1.355×10^{-2}	-3.237×10^{-3}	1.439×10^{-14}	5	18	170.0

Na tabela 3.2, os rótulos "$s95$" e "$s90$" referem-se a fração da densidade de entropia de um gás ideal a $T = 800\,\mathrm{MeV}$ (95% e 90%, respectivamente) ao passo que os rótulos "p", "n" e "f" referem-se a um tratamento específico do pico do traço anômalo ou seu correspondente para o HRG. Ou seja, "n" representa um ajuste sem restrições: a utilização dos dados para

[12] Este procedimento é conhecido como Método Integral [58].

$T > 250\,\mathrm{MeV}$ e T_0 como um parâmetro livre no ajuste. "p" significa ter um ponto adicional nos dados de $5,7 \pm 0,15$ em $T = 206\,\mathrm{MeV}$ para limitar o pico, e "f" representa um valor fixo $T_0 = 170\,\mathrm{MeV}$ no ajuste. O procedimento mais detalhado de realizar o ajuste para os dados na rede, combinando com o modelo HRG pode ser encontrado em [57, 58].

O modelo HRG é simples e tem apenas alguns parâmetros livres. Apesar disso, é bem sucedido em descrever as propriedades em massa de multiplicidades de hádrons médios em colisões de alta energia. O modelo leva em conta as interações atrativas entre hádrons através da presença de ressonâncias, mas ignora as interações repulsivas. As interações repulsivas são, no entanto, necessárias para capturar os aspectos qualitativos básicos de interações fortes, por exemplo, a transição de fase entre o gás de hádrons de ressonância e o plasma de quarks-glúons. Além disso, as interações repulsivas modificam fortemente as propriedades do HRG [61]. A forma mais comum de incluir interações repulsivas no modelo de HRG é correção de volume-excluído tipo VDW descrita na seção anterior.

Na região de baixa temperatura, $T < 180$ MeV, a função (3.57) pode ser parametrizada, utilizando-se o modelo de HRG quimicamente equilibrado com ressonâncias de até $2\,\mathrm{GeV}$ (massa), como

$$\frac{\varepsilon - 3P}{T^4} = a_1 T + a_2 T^3 + a_3 T^4 + a_4 T^{10}, \tag{3.61}$$

onde $a_1 = 4.654\ \mathrm{GeV}^{-1}$, $a_2 = -879\ \mathrm{GeV}^{-3}$, $a_3 = 8081\ \mathrm{GeV}^{-4}$ e $a_4 = -7039000\ \mathrm{GeV}^{-10}$, num intervalo de temperatura $70 < T < 190\,\mathrm{MeV}$.

Na figura 3.2, temos os resultados da QCD na rede comparados com o traço anômalo, usando as parametrizações dadas por (3.60) e (3.61). O gráfico mostra três parametrizações: $s95p$ (linha cheia), $s95n$ (linha pontilhada), e $s90f$ (linha tracejada). Todas as parametrizações descrevem os resultados da rede para $T > 250$ MeV. Na região de baixa temperatura, $T < 170$ MeV, estas ficam significativamente superiores aos resultados da rede. E, na região do pico as parametrizações do traço anômalo estão abaixo dos dados da rede. Em geral, os *fits* não reproduzem os dados da rede na região de pico ($190\,\mathrm{MeV} < T < 250\,\mathrm{MeV}$). Isso vem da restrição imposta sobre a densidade de entropia em $T = 800$ MeV [57]. Por outro lado, a altura do pico do traço anômalo pode ser afetada por efeitos de discretização. Isto pode ser visto como resultado da diferença entre as extensões temporais $N_\tau = 6$ e $N_\tau = 8$. Assumindo que os efeitos da discretização na altura do pico são proporcionais a $1/N_\tau^2$ estimou-se o valor do traço anômalo em $T = 206$ MeV como sendo 5.7 ± 0.15. Esse valor foi usado nos fits como um ponto adicional dos dados na rede [60].

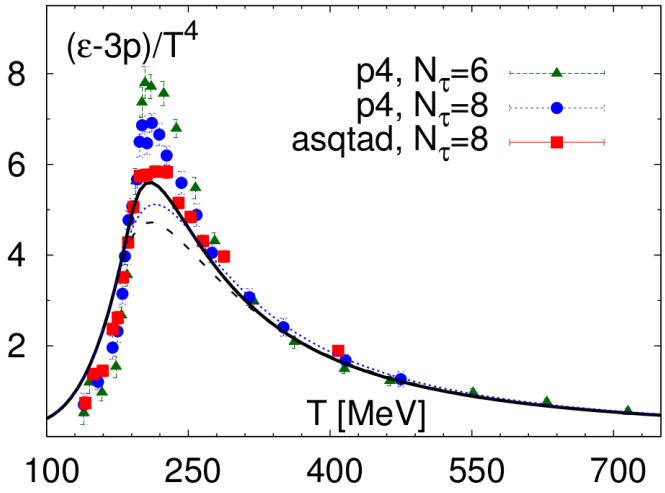

Figura 3.2: Comparação dos dados da QCD na rede com extensão temporal $N_\tau = 6$ e $N_\tau = 8$ e o traço, $\mathcal{T}^\mu{}_\mu(T)/T^4$, usando as parametrizações (3.60) e (3.61). As linhas cheia, pontilhada e tracejada correspondem as parametrizações usando $s95p$, $s95n$ e $s90f$ respectivamente. Retirada da referência [58].

Usando (3.58), a EoS da QCD pode ser obtido a partir destas parametrizações, (3.60) e (3.61), integrando sobre a temperatura

$$\frac{P(T)}{T^4} - \frac{P(T_{\rm L})}{T_{\rm L}^4} = \int_{T_{\rm L}}^{T} dT' \, \frac{\varepsilon - 3P}{T'^5}, \tag{3.62}$$

no intervalo $70 < T < 190\,\mathrm{MeV}$, temos a fase hadrônica

$$P_{\rm H}(T) = T^4 \left[0.1661 + \int_{T_{\rm L}}^{T} dT' \left(a_1 + a_2 T'^2 + a_3 T'^3 + a_4 T'^9 \right) \right], \tag{3.63}$$

onde $T_{\rm L} = 70\,\mathrm{MeV}$ e $P(T_{\rm L})/T_{\rm L}^4 = 0.1661$.

E, no intervalo $184 < T < 800\,\mathrm{MeV}$, temos a fase do plasma

$$P_{\rm QGP}(T) = P_{\rm H}(T_{\rm H}) + T^4 \int_{T_{\rm H}}^{T} dT' \left(\frac{d_2}{T^3} + \frac{d_4}{T^5} + \frac{c_1}{T^{n1+1}} + \frac{c_2}{T^{n2+1}} \right), \tag{3.64}$$

onde $T_{\rm H} = 184\,\mathrm{MeV}$ e os parâmetros $d_2, d_4, c_1, c_2, n_1, n_2$ foram usados com os valores de $s95p$.

As EoS obtidas por meio da integração (3.58) sobre a temperatura, usando as parametrizações (3.60) e (3.61), são mostrados na figura 3.3 [gráfico a esquerda]. A diferença mais evidente entre as diferentes parametrizações é o comportamento a temperaturas elevadas. Isto acontece, devido às diferentes restrições da densidade de entropia à $T = 800$ MeV que, naturalmente, se manifestam também na densidade de energia e na pressão. Por outro lado, as diferentes alturas

do pico do traço anômalo causam apenas uma pequena diferença na pressão e na densidade de energia em torno de $T = 200$ MeV [gráfico a direita]. Essa diferença se manifesta de forma mais clara na velocidade do som[13] – veja as linhas paralelas verticais no gráfico em torno de $T = 200$ MeV – onde uma mudança de temperatura causa rápidas mudanças na velocidade do som de HRG para a QCD na rede, sendo que nessa última a parametrização $s95p$ apresenta mudanças muito mais rápidas do que as outras duas.

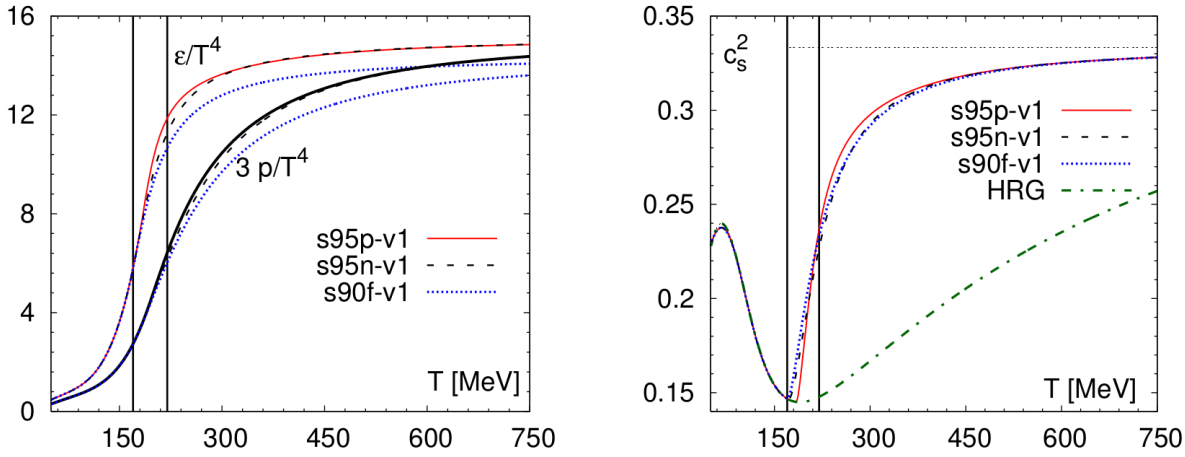

Figura 3.3: EoS da QCD na rede usando as parametrizações (3.60) e (3.61). No gráfico da esquerda a pressão e densidade de energia e no da direita a velocidade do som, ambos em função da temperatura. Retirada da referência [58].

Na figura 3.4, no gráfico da esquerda, temos a comparação entre a EoS da QCD e a EoS com transição de fase de 1ª ordem, até uma densidade de energia de 16 GeV/fm^3. No gráfico da direita, temos o detalhe da transição de fase para temperaturas na região de confinamento. Como esperado a EoS da QCD-s95p concorda com a EoS 1ST nessa região.

Na figura 3.5 mostramos novamente o detalhe da transição de fase, onde a densidade de energia foi dividida pela temperatura elevada a quarta potência, a fim de possibilitar uma melhor comparação entre as EoS QCD-s95p e 1ST. As duas EoS crescem rapidamente até a temperatura crítica T_C (ou seja, elas são idênticas na fase hadrônica). No gráfico fica claro que na região de transição de fase, há uma mudança abrupta da EoS 1ST entre as fases de plasma e hadrônica (característica de uma transição de 1ª ordem) enquanto que para EoS QCD-s95p temos uma mudança suave tipo *crossover* (característica de uma transição de 2ª ordem), onde as propriedades do fluido variam continuamente.

[13] A propagação de pequenas perturbações num fluido são chamadas de ondas de som (ver seção B.3 do apêndice B).

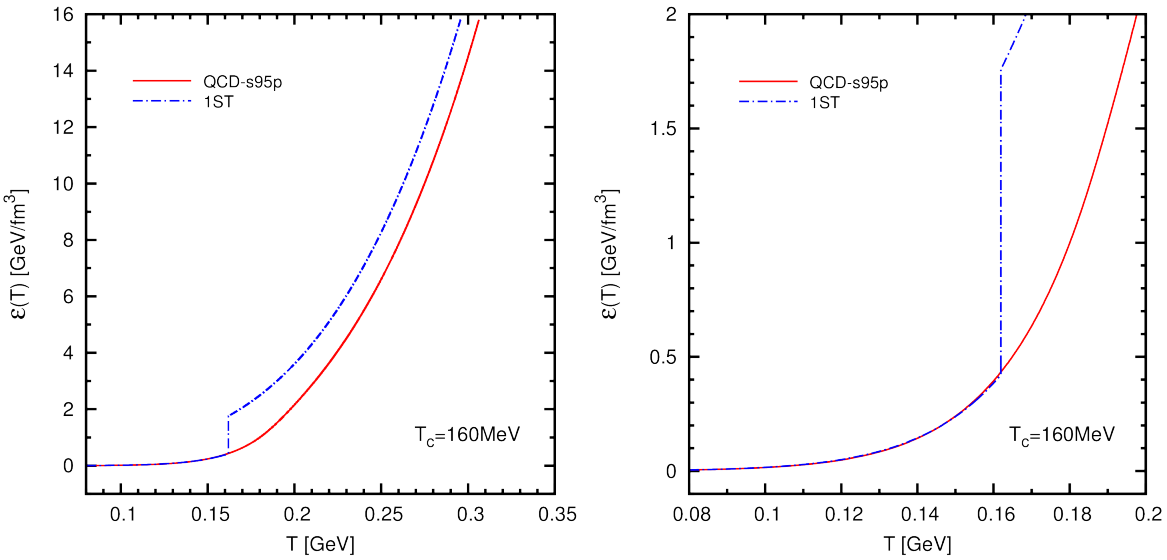

Figura 3.4: Comparação entre as EoS QCD-s95p e 1ST, com temperatura crítica 160 MeV. A esquerda o comportamento das EoS até uma densidade de energia de 16 GeV/fm^3. A direita é mostrado em destaque a região de transição de fase.

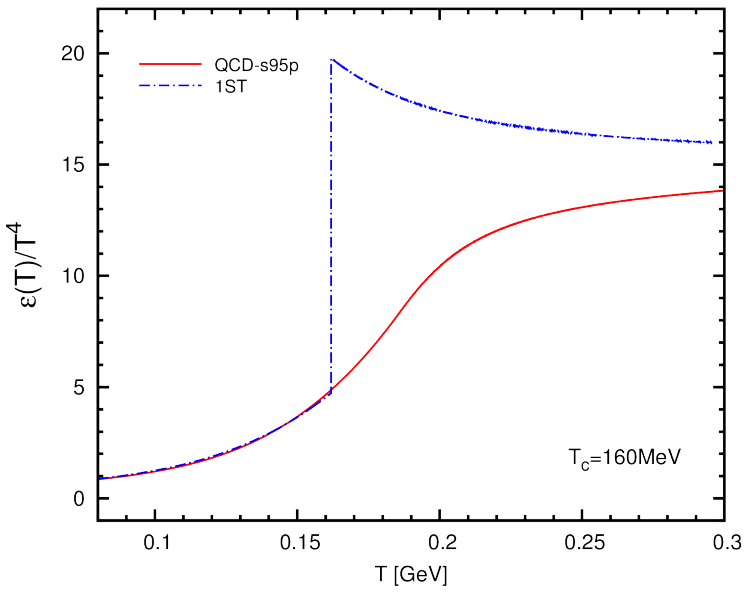

Figura 3.5: Comparação entre as EoS QCD-s95p e 1ST. A quantidade $\varepsilon(T)/T^4$ é adimensional. Neste gráfico fica claro a mudança abrupta da EoS 1ST na região de transição de fase.

No capítulo anterior obtivemos as equações de movimento da hidrodinâmica relativística e uma estimativa para a densidade de energia inicial. Agora, com as equações de estado descritas neste capítulo, podemos calcular as distribuições de *momenta* de píons em função de p_T usando aquelas equações e condição inicial. Usaremos essas distribuições de píons para realizarmos ajustes na temperatura de freeze-out do nosso modelo.

Capítulo 4

Interferometria HBT

"Acredito que o objetivo da nossa vida seja a busca da felicidade. Isto está claro. Quer se acredite em religião ou não, quer se acredite nesta religião ou naquela, todos nós buscamos algo melhor na vida. Portanto, acho que a motivação da nossa vida é a felicidade."
Dalai Lama

4.1 Breve Histórico

Em 1932 o norte-americano Karl G. Jansky fez observações que indicavam que o ruído de fundo que afetava comunicações em ondas curtas[1] vinha de algum ponto fixo no espaço, a saber, região mais densa da Via Láctea. Então, em 1938 G. Reber constrói o primeiro radiotelescópio direcional de grande porte[2], que operando no comprimento de onda de 6,5m confirma as observações de Jansky. Porém, seu trabalho perdeu continuidade com a II Guerra Mundial.

A tecnologia de radar[3], desenvolvida durante a guerra, abriu um novo campo de pesquisa no período do pós-guerra, a radioastronomia, que logo levou à descoberta de brilhantes "estrelas de rádio" no céu. Entretanto, não se tinha ideia de quão grande eram essas fontes – por exemplo, *Cassiopeia A* e *Cygnus A* – e o problema imediato foi como medir seus tamanhos [9].

A técnica padrão utilizada até então, era a interferometria de amplitude ou de Michaelson, na qual se comparam as amplitudes da luz (fonte medida) em dois pontos separados – por exemplo, convergindo os dois sinais usando uma lente produz-se um padrão de difração em função da separação dos pontos – e a partir da estrutura do padrão de difração pode-se determinar o tamanho angular da fonte. Usando esta técnica Michaelson mediu o diâmetro angular do sistema de luas de Júpiter em 1891 e K. Schwarzschild mediu, pela primeira vez,

[1] Comprimento de onda na ordem dos 15m.

[2] A antena tinha 9m de diâmetro.

[3] Nos radares pulsos de radiação são emitidos, refletem e são detectados. Em radioastronomia os sinais emitidos pelos corpos celestes são detectados.

o diâmetro angular de estrelas binárias em 1895. No entanto, havia um problema no uso da interferometria de amplitude. Para fontes de tamanho angular grande, era necessário apenas uma pequena separação dos dois detectores. Já para fontes pequenas era necessário separar os telescópios por distâncias enormes, por exemplo, em lados opostos do Atlântico.

O problema foi resolvido em 1949, no observatório Jodrell Bank (EUA), pelo radioastrônomo Robert Hanbury Brown. Sua formulação básica foi: "*se a radiação recebida em dois lugares é mutuamente coerente, então a flutuação na intensidade dos sinais recebidos naqueles dois locais está também correlacionada*" [62]. Para trabalhar na análise matemática das correlações de intensidade Hanbury trouxe para seu grupo Richard Q. Twiss e, em 1950 usando dois rádio telescópios operando no comprimento de onda de 2,4m, Hanbury-Brown e Twiss demonstram a técnica da interferometria de intensidade medindo o diâmetro do sol. Seis anos depois, analisaram as fontes de ondas de rádio nas galáxias *Cassiopeia A* e *Cygnus A* [63] e mediram do diâmetro angular de Sirius [64].

Embora demonstrada teórica e experimentalmente não era óbvio que a interferometria de intensidade também pudesse ser aplicada à luz, uma vez que, naquela época, as ondas de rádio eram comumente entendidas como campos clássicos. Então, Hanbury-Brown e Twiss realizaram uma experiência óptica na qual a imagem de um arco de mercúrio de alta pressão – lâmpada de vapor de mercúrio – foi concentrada através de um sistema de filtros formando um feixe de luz concentrado, sendo em seguida, separado por um espelho semi-prateado em dois novos feixes e detectados por fotomultiplicadores [7]. Ao medirem a intensidade das correlações entre os dois feixes separados, eles essencialmente compararam as intensidades de dois pontos diferentes do feixe não separado, e através da variação do comprimento do caminho relativo entre o espelho e os fotomultiplicadores, podiam variar o tempo de separação, τ, dos pontos. Em resumo, eles descobriram que para τ muito grande não existem correlações de intensidade, e que as correlações aumentam com a diminuição τ. Esta experiência[4] foi a demonstração crucial de que os fótons de um feixe térmico, aparentemente não correlacionados, tendem a ser detectados em pares [9].

4.2 Interferometria HBT na Física Nuclear

Embora a nova técnica de interferometria desenvolvida, por Hanbury-Brown e Twiss, tenha tido o propósito de determinar as dimensões de objetos astrofísicos, essa ideia foi usada na Física Nuclear para o estudar a estrutura espaçotemporal da região de interação em colisões nucleares [65, 66].

A interferometria foi usada experimentalmente pela primeira vez por Goldhaber, Goldhaber, Lee e Pais para determinar o tamanho da região de produção do píon em colisões $p\bar{p}$ [67]. Eles observaram que pares de píons de mesma carga apresentam uma probabilidade maior de serem emitidos em ângulos pequenos que pares de píons de cargas opostas. Este efeito foi associado à extensão da fonte de píons [35].

[4] A experiência mostra que sem dúvida os fótons em dois feixes de luz coerentes são correlacionados, e que essa correlação é preservada no processo de emissão fotoelétrica. Além disso, os resultados quantitativos estão de acordo com aqueles previstos pela teoria eletromagnética clássica e o princípio de correspondência [7].

Tendo em vista que o produto mais abundante nas colisões de íons pesados são os píons é natural utilizarmos a correlação de píons para o estudo da geometria da fonte no freeze-out, e com isto, obtermos as características espaçotemporais da fonte emissora. Neste trabalho, vamos nos concentrar no estudo da correlação de píons. Essa correlação, também é conhecida como interferometria de píons.

4.3 Correlação de *Momenta* de Píons

4.3.1 Função de Correlação de Partículas Idênticas

Para compreender a origem desta correlação é necessário uma descrição do estado dos píons desde a sua origem – instante de sua produção na fonte emissora – até sua detecção, incluindo sua propagação a partir dos pontos da fonte [48, 68]. Como a correlação de *momentum* de duas partículas envolve a detecção de partículas idênticas é necessário levar em conta a simetria da função de onda.

Inicialmente, vamos considerar uma fonte extensa na qual um único píon de *momentum* $p=\left(p^0,\boldsymbol{p}\right)$ é emitido[5] no ponto $x=(t,\boldsymbol{x})$ e detectado no ponto $x'=(t',\boldsymbol{x}')$ – posição do detector. A trajetória clássica para um píon se propagar de x para x' é dada pela relação aproximada

$$\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}\approx\left(\boldsymbol{p}/p^0\right)\left(t'-t\right), \tag{4.1}$$

onde $\boldsymbol{p}/p^0=d\boldsymbol{x}'/dt'$ é a velocidade do píon. Lembremos que na fonte existem muitos outros pontos, x, que satisfazem essa relação.

A amplitude de probabilidade quântica, para um píon sair de um ponto x e chegar em um ponto x', pode ser obtida usando-se o método da integral de caminho de Feynman, dada pela soma do fator de fase $e^{iS(n)}$ sobre todos os n caminhos de x até x'

$$\psi\left(p\colon\, x\to x'\right)=\sum_n e^{iS(n)}, \tag{4.2}$$

onde $S(n)$ é a ação da partícula, cujo o valor depende do caminho n no espaçotempo.

A contribuição dominante para a soma sobre os n caminhos vem da trajetória clássica (4.1). As outras contribuições provenientes de caminhos diferentes desta última variam muito, mas com sinais opostos, e se cancelam quando realizamos a soma em (4.2). Portanto, é razoável aproximar a amplitude de probabilidade quântica, por um único termo que descreve as ações dos píons com *momentum* p ao longo da trajetória clássica de x para x' [48]. Com isto, a amplitude de probabilidade[6], $\psi(p\colon\, x\to x')$, pode ser aproximada por

$$\psi(p\colon\, x\to x')\approx e^{iS_{cl}(p\colon x\to x')}, \tag{4.3}$$

[5] As medidas de p e x não têm precisão suficiente para determinar o ponto de origem do píon na fonte. Sabe-se apenas que ele é emitido da fonte.

[6] Considerando que a magnitude da amplitude de probabilidade seja unitária e que não há perdas por atenuação ou absorção.

onde a ação é dada por $S_{cl}(p:\ x \to x') = \int_t^{t'} L\,dt$. A lagrangiana do sistema é dada por $L = -m\sqrt{1-v^2}$. Expandindo L em potências de v e desprezando os termos de ordens mais altas, temos $L \approx \frac{1}{2}mv^2 - m$ [68]. Portanto, a integral da ação para uma partícula que sai de um ponto x e chega em um ponto x', ao longo da trajetória clássica é dada por

$$\begin{aligned} S_{cl}(p:\ x \to x') &= \left[\frac{1}{2}m\left(\frac{d\boldsymbol{x}'}{dt'}\right)^2 - m\right]\left(t'-t\right) \\ &= m\left(\frac{d\boldsymbol{x}'}{dt'}\right)^2\left(t'-t\right) - \left[\frac{1}{2}m\left(\frac{d\boldsymbol{x}'}{dt'}\right)^2 + m\right]\left(t'-t\right). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Usando (4.1) para reescrever o primeiro termo de (4.4), temos

$$\begin{aligned} m\left(\frac{d\boldsymbol{x}'}{dt'}\right)^2\left(t'-t\right) &= m\frac{d\boldsymbol{x}'}{dt'}\cdot\frac{d\boldsymbol{x}'}{dt'}\left(t'-t\right) \\ &\approx m\frac{d\boldsymbol{x}'}{dt'}\cdot\frac{(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})}{(t'-t)}\left(t'-t\right) \\ &= \boldsymbol{p}\cdot\left(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}\right). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Como o segundo termo de (4.4) é

$$E = p^0 \approx \frac{1}{2}m\left(\frac{d\boldsymbol{x}'}{dt'}\right)^2 + m, \tag{4.6}$$

obtemos, destas duas últimas

$$\begin{aligned} S_{cl}(p:\ x \to x') &\approx -p^0\left(t'-t\right) + \boldsymbol{p}\cdot\left(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}\right) \\ &= p\cdot\left(x-x'\right). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Com isto, a amplitude de probabilidade, (4.3), para um píon de *momentum* p, emitido a partir de um ponto x da fonte e detectado num ponto x', é dada, aproximadamente, por

$$\psi(p:\ x \to x') \approx e^{ip\cdot(x-x')}. \tag{4.8}$$

A amplitude de probabilidade total, $\Psi\left(p:\ \sum_x \to x'\right)$, será a soma das amplitudes de probabilidades (4.8) de todos os pontos da fonte

$$\begin{aligned} \Psi\left(p:\ \textstyle\sum_x \to x'\right) &= \sum_x A(p,x)e^{i\phi(x)}\psi(p:\ x \to x') \\ &= \sum_x A(p,x)e^{i\phi(x)}e^{ip\cdot(x-x')}, \end{aligned} \tag{4.9}$$

onde as quantidades $A(p,x)$ e $\phi(x)$ são respectivamente a magnitude e a fase – da amplitude de probabilidade – que caracterizam a produção do píon de *momentum* p, emitido a partir de um ponto x do espaço, na região de colisão. Cabe ressaltar que a fase $\phi(x)$ está relacionada

com a produção do píon enquanto que a fase $ip \cdot (x - x')$ está relacionada com a propagação do píon.

A distribuição de *momentum* ou densidade de probabilidade, $\mathcal{P}(p)$, de um píon de *momentum* p, produzido a partir de um ponto x da fonte e detectado num ponto x' é dada pelo módulo quadrado da amplitude de probabilidade total

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(p) &= \left|\Psi\left(p\colon \textstyle\sum_x \to x'\right)\right|^2 \\ &= \left|\sum_x A(p,x) e^{i\phi(x)} e^{ip\cdot(x-x')}\right|^2 . \end{aligned} \tag{4.10}$$

Expandindo o lado direito de (4.10) em termos independentes de $\phi(x)$ e termos contendo $\phi(x)$ obtemos

$$\mathcal{P}(p) = \sum_x A^2(p,x) + \sum_{\substack{x,y \\ x\neq y}} A(p,x)A(p,y) e^{i\phi(x)} e^{-i\phi(y)} e^{ip\cdot(x-y)}. \tag{4.11}$$

O segundo termo do lado direito de (4.11) não contribui em razão dos termos de fase serem aleatórios e se cancelarem na soma, com isto, temos

$$\mathcal{P}(p) = \sum_x A^2(p,x). \tag{4.12}$$

Especificando uma densidade de pontos de emissão, $\varrho(x)$, podemos substituir o somatório por uma integral, $\sum_x \to \int dx \varrho(x)$, e integrarmos sobre todos os pontos x da fonte

$$\mathcal{P}(p) = \int dx \varrho(x) A^2(p,x). \tag{4.13}$$

A equação (4.13) pode ser comparada com a propriedade da função de distribuição do espaço de fase, $S(p,x)$, integrada sobre as coordenadas x, dada por

$$\mathcal{P}(p) = \int dx\, S(p,x), \tag{4.14}$$

que é o análogo clássico da função de Wigner[7] [48, 69, 70]. Comparando (4.13) e (4.14) obtemos a relação entre a função distribuição, $S(p,x)$, e a magnitude da produção, $A(p,x)$, de píons

$$S(x,p) = A^2(p,x)\varrho(x). \tag{4.15}$$

Podemos ainda escrever a magnitude de produção $A(p,x)$ em termos da função da distribuição $S(x,p)$ do espaço de fase, como

$$A(p,x) = \sqrt{\frac{S(x,p)}{\varrho(x)}}. \tag{4.16}$$

[7] Ao integrarmos a função de Wigner em uma das variáveis do espaço de fase, recuperamos a densidade de probabilidade [71, 72].

Agora, vamos considerar o caso de detecção de dois píons idênticos na fonte extensa. Na figura 4.1, (linhas contínuas) temos a representação de um píon de *momentum* p_1, emitido de x_1 e detectado em x'_1 e outro píon, idêntico ao primeiro, de *momentum* p_2, emitido de x_2 e detectado em x'_2. A amplitude de probabilidade, neste caso, é dada por

$$\psi(p_1\colon x_1 \to x'_1)\psi(p_2\colon x_2 \to x'_2) \approx e^{ip_1\cdot(x_1-x'_1)}e^{ip_2\cdot(x_2-x'_2)}. \tag{4.17}$$

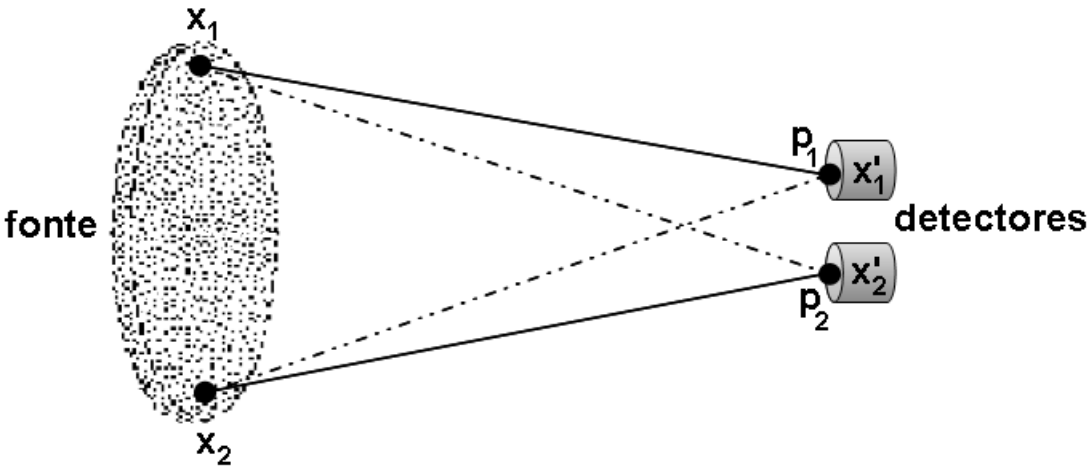

Figura 4.1: Representação simplificada de uma fonte extensa de píons, onde um píon de *momentum* p_1, emitido de x_1 e detectado em x'_1 e outro píon idêntico ao primeiro, de *momentum* p_2, emitido de x_2 e detectado em x'_2. Uma vez que os píons são indistinguíveis, existem duas combinações possíveis para esta observação, ilustrada por duas linhas contínuas e duas linhas hachuradas.

A amplitude de probabilidade para detecção de um píon com *momentum* p_1 em x'_1 e outro píon idêntico com *momentum* p_2 em x'_2 é dada por

$$\Psi_{12}(p_1p_2\colon x_1x_2 \to x'_1x'_2) = A(p_1,x_1)e^{i\phi(x_1)}e^{ip_1\cdot(x_1-x'_1)}A(p_2,x_2)e^{i\phi(x_2)}e^{ip_2\cdot(x_2-x'_2)}. \tag{4.18}$$

Em razão da indistinguibilidade dos píons, podemos ter o caso onde um píon de *momentum* p_1 é emitido de x_2 é detectado em x'_1 e outro píon, idêntico ao primeiro, de *momentum* p_2 é emitido de x_1 e é detectado em x'_2, figura 4.1 (linhas hachuradas). Neste casos, a amplitude de probabilidade é dada por

$$\Psi_{21}(p_1p_2\colon x_2x_1 \to x'_1x'_2) = A(p_1,x_2)e^{i\phi(x_2)}e^{ip_1\cdot(x_2-x'_1)}A(p_2,x_1)e^{i\phi(x_1)}e^{ip_2\cdot(x_1-x'_2)}. \tag{4.19}$$

Como os píons obedecem a estatística de Bose-Einstein, a amplitude de probabilidade deve ser simétrica com respeito à troca dos índices

$$\Psi(p_1p_2\colon x_1x_2 \to x_1'x_2') = \Psi(p_1p_2\colon x_2x_1 \to x_1'x_2'). \tag{4.20}$$

Note que os únicos índices que distinguem os dois píons idênticos são os das coordenadas x_1 e x_2 da fonte. A amplitude de probabilidade que satisfaz essa simetria é a soma das amplitudes de probabilidades (4.18) e (4.19), dada por

$$\begin{aligned}\Psi(p_1p_2\colon\ x_1x_2 \to x_1'x_2') &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_{12}(p_1p_2\colon x_1x_2 \to x_1'x_2') + \frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_{21}(p_1p_2\colon x_2x_1 \to x_1'x_2') \\ &= e^{i\phi(x_1)}e^{i\phi(x_2)}\Phi(p_1p_2\colon\ x_1x_2 \to x_1'x_2'),\end{aligned} \tag{4.21}$$

onde $\Phi(p_1p_2\colon\ x_1x_2 \to x_1'x_2')$ é a parte da amplitude de probabilidade que não depende de $\phi(x_i)$, definida por

$$\begin{aligned}\Phi(p_1p_2\colon\ x_1x_2 \to x_1'x_2') \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{ & A(p_1,x_1)A(p_2,x_2)e^{ip_1\cdot(x_1-x_1')}e^{ip_2\cdot(x_2-x_2')} \\ & + A(p_1,x_2)A(p_2,x_1)e^{ip_1\cdot(x_2-x_1')}e^{ip_2\cdot(x_1-x_2')}\Big\}.\end{aligned} \tag{4.22}$$

A priori, os dois píons poderiam ter sido produzidos em quaisquer outros dois pontos na fonte. Para levarmos isto em consideração é preciso somar, sobre todas as combinações possíveis de produção de pares de píons a partir de dois pontos quaisquer na fonte. Com isto, a amplitude de probabilidade total para dois píons idênticos, com *momenta* p_1 e p_2, produzidos a partir de dois pontos quaisquer na fonte, e detectados em seus respectivos detectores, localizados em x_1' e x_2', é dada por

$$\Psi(p_1p_2\colon\ \textstyle\sum\{x_1x_2\} \to x_1'x_2') = \displaystyle\sum_{x_1,x_2} e^{i\phi(x_1)}e^{i\phi(x_2)}\Phi(p_1p_2\colon\ x_1x_2 \to x_1'x_2'). \tag{4.23}$$

E a distribuição de *momentum* ou distribuição de probabilidade, $\mathcal{P}_2(p_1,p_2)$, é dada pelo módulo quadrado da amplitude de probabilidade total (4.23)

$$\mathcal{P}_2(p_1,p_2) = \frac{1}{2!}\left|\Psi(p_1p_2\colon\ \textstyle\sum\{x_1x_2\} \to x_1'x_2')\right|^2. \tag{4.24}$$

Os resultados das equações acima são bastante gerais, e podem ser aplicados, por exemplo, para o estudo de correlações de *momentum* de dois píons, tanto para fontes caóticas quanto para fontes coerentes. Neste trabalho, vamos aplicar estes resultados para estudarmos a correlação de *momentum* de uma fonte caótica[8]. Uma fonte caótica é descrita como uma fonte cuja fase $\phi(x)$ é uma função aleatória de x. Fazendo uso dessa aleatoriedade das fases $\phi(x)$, vamos substituir (4.23) em (4.24) e em seguida separar em termos independentes de $\phi(x)$ e termos contendo $\phi(x)$ para obtermos

[8]Dependendo das propriedades das fases $\phi(x)$ associada com os pontos na origem da emissão dos píons, a fonte estendida pode ser: coerente, caótica ou parcialmente caótica. A função de correlação de dois píons idênticos é dependente do grau de coerência da fonte [48].

$$\mathcal{P}_2(p_1,p_2) = \frac{1}{2}\sum_{x_1,x_2}\Bigg\{\Phi^*\big(p_1p_2\colon y_1y_2 \to x_1'x_2'\big)\Big|_{\substack{y_1=x_1\\y_2=x_2}}\Phi(p_1p_2\colon x_1x_2 \to x_1'x_2') + \Phi^*\big(p_1p_2\colon y_1y_2 \to x_1'x_2'\big)\Big|_{\substack{y_2=x_1\\y_1=x_2}}\Phi(p_1p_2\colon x_1x_2 \to x_1'x_2')\Bigg\} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{x_1,\,y_1,\,x_2,\,y_2\\ \{x_1,\,x_2\}\neq\{y_1,\,y_2\}}}\Big\{ e^{i[\phi(x_1)+\phi(x_2)-\phi(y_1)-\phi(y_2)]} \times \Phi^*\big(p_1p_2\colon y_1y_2 \to x_1'x_2'\big)\Phi(p_1p_2\colon x_1x_2 \to x_1'x_2')\Big\}. \tag{4.25}$$

Note que os dois termos da primeira somatória são iguais, em razão da simetria dos índices. Já a contribuição da segunda somatória é nula, em razão da existência de um grande número de termos de mesma magnitude, porém com fases aleatórias, que por sua vez, acabam cancelando uns aos outros. Com isto, a equação (4.25) torna-se

$$\mathcal{P}_2(p_1,p_2) = \sum_{x_1,x_2}\left|\Phi(p_1p_2 : x_1x_2 \to x_1'x_2')\right|^2. \tag{4.26}$$

Especificando uma densidade $\varrho(x)$ por unidade de volume, no ponto x da fonte, podemos fazer $\sum_{x_1,x_2} \to \int \varrho(x_1)\varrho(x_2)$ e escrever (4.26) como uma integral dupla

$$\mathcal{P}_2(p_1,p_2) = \iint dx_1dx_2\varrho(x_1)\varrho(x_2)\left|\Phi(p_1p_2 : x_1x_2 \to x_1'x_2')\right|^2. \tag{4.27}$$

Expandindo o termo $\Phi(p_1p_2 : x_1x_2 \to x_1'x_2')$

$$\mathcal{P}_2(p_1,p_2) = \int dx_1\varrho(x_1)A^2(p_1,x_1)\int dx_2\varrho(x_2)A^2(p_2,x_2) + \int dx_1\varrho(x_1)A(p_1,x_1)A(p_2,x_1)e^{i(p_1-p_2)\cdot x_1} \times \int dx_2\varrho(x_2)A(p_2,x_2)A(p_1,x_2)e^{i(p_2-p_1)\cdot x_2}, \tag{4.28}$$

e, usando (4.13) obtemos

$$\mathcal{P}_2(p_1,p_2) = \mathcal{P}(p_1)\mathcal{P}(p_2) + \left|\int dx\, e^{i(p_1-p_2)\cdot x}\varrho(x)A(p_1,x)A(p_2,x)\right|^2. \tag{4.29}$$

Agora, vamos introduzir uma função de densidade efetiva, $\varrho_{\text{eff}}(x\colon p_1p_2)$, definida como

$$\varrho_{\text{eff}}(x\colon p_1p_2) \equiv \frac{\varrho(x)A(p_1,x)A(p_2,x)}{\sqrt{\mathcal{P}(p_1)\mathcal{P}(p_2)}}. \tag{4.30}$$

e reescrever (4.29) usando essa densidade

$$\mathcal{P}_2(p_1,p_2) = \mathcal{P}(p_1)\mathcal{P}(p_2)\left(1+\left|\int dx\, e^{i(p_1-p_2)\cdot x}\varrho_{\text{eff}}(x\colon\, p_1p_2)\right|^2\right). \tag{4.31}$$

A equação (4.30), pode ser escrita em termos da densidade de probabilidade (4.13) e da função distribuição (4.15), como

$$\rho_{\text{eff}}(x\colon\, p_1p_2) = \frac{\sqrt{S(x,p_1)S(x,p_2)}}{\sqrt{\int dx S(x,p_1)\int dx S(x,p_2)}}. \tag{4.32}$$

A transformada de Fourier da $\varrho_{\text{eff}}(x\colon\, p_1p_2)$ é definida por

$$\tilde{\varrho}_{\text{eff}}(q\colon\, p_1p_2) = \int dx\, e^{iq\cdot x}\varrho_{\text{eff}}(x\colon\, p_1p_2), \tag{4.33}$$

onde $q=(q^0,\boldsymbol{q})$ é o *momentum* relativo definido como

$$q = p_1 - p_2. \tag{4.34}$$

Reescrevendo a densidade de probabilidade, $\mathcal{P}_2(p_1,p_2)$, em termos da transformada de Fourier da densidade efetiva, (4.33), obtemos

$$\mathcal{P}_2(p_1,p_2) = \mathcal{P}(p_1)\mathcal{P}(p_2)\left(1+|\tilde{\varrho}_{\text{eff}}(q\colon\, p_1p_2)|^2\right). \tag{4.35}$$

A função de correlação, $C_2(p_1,p_2)$, é definida como a razão entre a probabilidade, $\mathcal{P}_2(p_1,p_2)$, de detectarmos duas partículas com momenta p_1 e p_2 simultaneamente e o produto das probabilidades, $\mathcal{P}(p_1)\mathcal{P}(p_2)$, de observarmos as partículas com momenta p_1 e p_2 separadamente

$$C_2(p_1,p_2) = \frac{\mathcal{P}_2(p_1,p_2)}{\mathcal{P}(p_1)\mathcal{P}(p_2)}, \tag{4.36}$$

ou ainda,

$$C_2(p_1,p_2) = 1+|\tilde{\varrho}_{\text{eff}}(q\colon\, p_1p_2)|^2. \tag{4.37}$$

Agora, vamos definir o *momentum* médio do par de partículas de *momenta* p_1 e p_2 como

$$K = \frac{1}{2}(p_1+p_2), \tag{4.38}$$

e fazer uma expansão de $S(x,p_i)$ com respeito a $S(x,K)$

$$S(x,p_1) = S(x,K) + \left.\frac{\partial S(x,p)}{\partial p^\mu}\right|_{p=K}\frac{q^\mu}{2} + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 S(x,p)}{\partial p^\mu\partial p^\nu}\right|_{p=K}\frac{q^\mu q^\nu}{4} + \cdots \tag{4.39}$$

$$S(x,p_2) = S(x,K) - \left.\frac{\partial S(x,p)}{\partial p^\mu}\right|_{p=K}\frac{q^\mu}{2} + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 S(x,p)}{\partial p^\mu\partial p^\nu}\right|_{p=K}\frac{q^\mu q^\nu}{4} + \cdots. \tag{4.40}$$

Podemos escrever o produto, $S(x,p_1)S(x,p_2)$ da seguinte forma

$$\sqrt{S(x,p_1)S(x,p_2)} = S(x,K) + \mathcal{O}(q^\mu q^\nu). \tag{4.41}$$

Desprezando os termos de segunda ordem em q^μ, (4.41), a densidade efetiva, $\varrho_{\text{eff}}(x:\ p_1p_2)$, definida (4.32) torna-se

$$\varrho_{\text{eff}}(x:\ p_1p_2) = \frac{S(x,K)}{\sqrt{\int dxS(x,p_1)\int dxS(x,p_2)}}. \tag{4.42}$$

Com as equações (4.33) e (4.42), encontramos a partir de (4.37) a função de correlação em termos dos *momenta* q e K

$$C_2(q,K) = 1 + \frac{\left|\int dx\, e^{iq\cdot x}S(x,K)\right|^2}{\int dxS(x,K+\frac{1}{2}q)\int dxS(x,K-\frac{1}{2}q)}. \tag{4.43}$$

4.4 Parametrização da Função de Correlação

4.4.1 Sistema de Coordenadas *Out-Side-Long*

Para o cálculo da função de correlação vamos usar o sistema de coordenadas *out-side-long,* figura 4.2, proposto por G. Bertsch e S. Pratt [73, 74]. Nesse sistema a direção *out* é orientada paralela a componente transversal do *momentum* médio $\boldsymbol{K}$, a direção *long* é orientada paralela ao eixo do feixe e a direção *side* é orientada perpendicular a estas duas últimas. Para definirmos

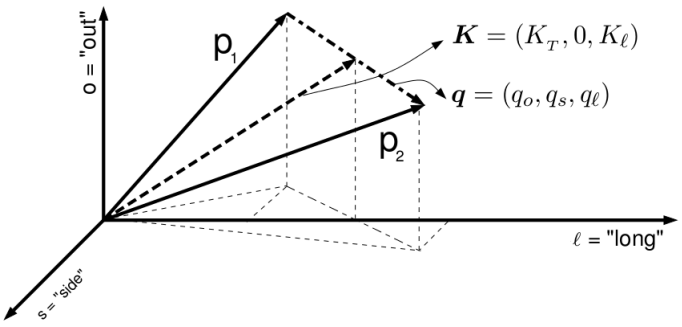

Figura 4.2: Sistema *out-side-long*. A direção *out* é orientada paralela a componente transversal do *momentum* médio, a direção *long* é orientada paralela ao eixo do feixe e a direção *side* é orientada perpendicular a estas duas últimas. Adaptação da referência [69].

os eixos *out, side* e *long* vamos considerar duas partículas com *momenta* $\boldsymbol{p}_1$ e $\boldsymbol{p}_2$, cujos *momenta*

médio $\boldsymbol{K}$ e relativo $\boldsymbol{q}$ são dados respectivamente por

$$\boldsymbol{K} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2) \tag{4.44}$$

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2. \tag{4.45}$$

E, as relações inversas são dadas por

$$\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{K} + \frac{\boldsymbol{q}}{2} \tag{4.46}$$

$$\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{K} - \frac{\boldsymbol{q}}{2}. \tag{4.47}$$

Agora, vamos definir os seguintes vetores unitários: $\hat{\boldsymbol{x}}_o$, $\hat{\boldsymbol{x}}_s$ e $\hat{\boldsymbol{x}}_\ell$ nas suas respectivas direções *out* (o), *side* (s) e *long* (ℓ)

$$\hat{\boldsymbol{x}}_o = \frac{\boldsymbol{K}_{_T}}{K_{_T}} \tag{4.48a}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_s = \hat{\boldsymbol{x}}_\ell \times \hat{\boldsymbol{x}}_o \tag{4.48b}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_\ell = \hat{\boldsymbol{x}}_z, \tag{4.48c}$$

onde $\boldsymbol{K}_{_T}$ é o *momentum* médio transversal definido como

$$\boldsymbol{K}_{_T} = K_x\hat{\boldsymbol{x}} + K_y\hat{\boldsymbol{y}}. \tag{4.49}$$

Reescrendo (4.48) em termos das componentes do *momentum* médio transversal

$$\hat{\boldsymbol{x}}_o = \frac{K_x}{K_{_T}}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{K_y}{K_{_T}}\hat{\boldsymbol{y}} \tag{4.50a}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_s = \frac{K_x}{K_{_T}}(\hat{\boldsymbol{x}}_\ell \times \hat{\boldsymbol{x}}) + \frac{K_y}{K_{_T}}(\hat{\boldsymbol{x}}_\ell \times \hat{\boldsymbol{y}}) = \frac{K_x}{K_{_T}}(\hat{\boldsymbol{z}} \times \hat{\boldsymbol{x}}) + \frac{K_y}{K_{_T}}(\hat{\boldsymbol{z}} \times \hat{\boldsymbol{y}}) = \frac{K_x}{K_{_T}}\hat{\boldsymbol{y}} - \frac{K_y}{K_{_T}}\hat{\boldsymbol{x}} \tag{4.50b}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_\ell = \hat{\boldsymbol{x}}_z, \tag{4.50c}$$

cuja as relações inversas são

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \frac{K_x}{K_{_T}}\hat{\boldsymbol{x}}_o - \frac{K_y}{K_{_T}}\hat{\boldsymbol{x}}_s \tag{4.51a}$$

$$\hat{\boldsymbol{y}} = \frac{K_y}{K_{_T}}\hat{\boldsymbol{x}}_o + \frac{K_x}{K_{_T}}\hat{\boldsymbol{x}}_s \tag{4.51b}$$

$$\hat{\boldsymbol{z}} = \hat{\boldsymbol{x}}_\ell. \tag{4.51c}$$

O *momentum* relativo $\boldsymbol{q}$ nessa nova base é escrito como

$$\begin{aligned}\boldsymbol{q} &= q_x\hat{\boldsymbol{x}} + q_y\hat{\boldsymbol{y}} + q_z\hat{\boldsymbol{z}} \\ &= q_x\left(\frac{K_x}{K_T}\hat{\boldsymbol{x}}_o - \frac{K_y}{K_T}\hat{\boldsymbol{x}}_s\right) + q_y\left(\frac{K_y}{K_T}\hat{\boldsymbol{x}}_o + \frac{K_x}{K_T}\hat{\boldsymbol{x}}_s\right) + q_z\hat{\boldsymbol{x}}_\ell \\ &= \left(\frac{q_xK_x + q_yK_y}{K_T}\right)\hat{\boldsymbol{x}}_o + \left(\frac{q_yK_x - q_xK_y}{K_T}\right)\hat{\boldsymbol{x}}_s + q_z\hat{\boldsymbol{x}}_\ell \\ &= \left[\frac{\boldsymbol{q}_T\cdot\boldsymbol{K}_T}{K_T}\right]\hat{\boldsymbol{x}}_o + \left[\frac{(\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{q})_z}{K_T}\right]\hat{\boldsymbol{x}}_s + q_z\hat{\boldsymbol{x}}_\ell \\ &= q_o\hat{\boldsymbol{x}}_o + q_s\hat{\boldsymbol{x}}_s + q_\ell\hat{\boldsymbol{x}}_\ell, \end{aligned} \tag{4.52}$$

onde definimos

$$q_o = \frac{\boldsymbol{q}_T\cdot\boldsymbol{K}_T}{K_T} = \frac{q_xK_x + q_yK_y}{K_T} \tag{4.53a}$$

$$q_s = \frac{(\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{q})_z}{K_T} = \frac{q_yK_x - q_xK_y}{K_T} \tag{4.53b}$$

$$q_\ell = q_z. \tag{4.53c}$$

O *momentum* médio $\boldsymbol{K}$ nessa nova base é escrito como

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K} &= K_x\hat{\boldsymbol{x}} + K_y\hat{\boldsymbol{y}} + K_z\hat{\boldsymbol{z}} \\ &= K_T\hat{\boldsymbol{x}}_o + K_z\hat{\boldsymbol{x}}_\ell \\ &= K_o\hat{\boldsymbol{x}}_o + K_\ell\hat{\boldsymbol{x}}_\ell \end{aligned} \tag{4.54}$$

onde definimos

$$K_o = K_T \tag{4.55a}$$

$$K_\ell = K_z. \tag{4.55b}$$

Por fim, os *momenta* $\boldsymbol{p}_1$ e $\boldsymbol{p}_2$ nesta nova base são dados por

$$\boldsymbol{p}_1 = \left(K_o + \frac{q_o}{2}\right)\hat{\boldsymbol{x}}_o + \left(\frac{q_s}{2}\right)\hat{\boldsymbol{x}}_s + \left(K_\ell + \frac{q_\ell}{2}\right)\hat{\boldsymbol{x}}_\ell \tag{4.56a}$$

$$\boldsymbol{p}_2 = \left(K_o - \frac{q_o}{2}\right)\hat{\boldsymbol{x}}_o + \left(-\frac{q_s}{2}\right)\hat{\boldsymbol{x}}_s + \left(K_\ell - \frac{q_\ell}{2}\right)\hat{\boldsymbol{x}}_\ell, \tag{4.56b}$$

Para partículas idênticas, píons por exemplo, o produto dos *momenta* médio K e relativo q fornece

$$\begin{aligned} q_\mu K^\mu &= q_0K^0 - \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{K} && (4.57a)\\ &= \frac{1}{2}\left(m_\pi^2 - m_\pi^2\right) \\ &= 0, && (4.57b)\end{aligned}$$

onde

$$q_0 = E_{p_1} - E_{p_2} = \sqrt{m_\pi^2 + p_1^2} - \sqrt{m_\pi^2 + p_2^2} \tag{4.58a}$$

e

$$K^0 = \frac{1}{2}\left(E_{p_1} + E_{p_2}\right) = \sqrt{m_\pi^2 + p_1^2} + \sqrt{m_\pi^2 + p_2^2}. \tag{4.58b}$$

Definindo $\beta = K/K^0$ e substituindo em (4.57), para o caso de partículas com massas iguais, temos

$$q_\mu \beta^\mu = q^0 \frac{K^0}{K^0} - \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\beta} \quad \longrightarrow \quad q^0 = \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\beta}, \tag{4.59}$$

onde β é a velocidade do par de partículas. Dessa condição, temos que apenas três das quatro componentes do *momentum* relativo são independentes, o que reduz em uma dimensão a função de correlação quando comparada com a dimensão da estrutura do espaçotempo.

4.4.2 Função de Emissão

A função de emissão $S(x, \boldsymbol{K})$ é uma distribuição clássica do espaço de fase. Em modelos hidrodinâmicos, por exemplo, esta distribuição do espaço de fase é tomada em um local de equilíbrio térmico, localizada na hipersuperfície de freeze-out [35, 72]. Com base na equação (2.42), podemos dizer que ela é uma função que descreve a densidade do espaço de fase da fonte emissora. Sua interpretação física pode ser entendida como sendo o número de partículas emitidas no elemento do espaço de fase por unidade de tempo, e sua expressão é dada por

$$S(x, \boldsymbol{K}) = \frac{g_\pi}{(2\pi)^3}\int \frac{d\sigma_\mu K^\mu(x')\delta^{(4)}(x'-x)}{e^{[K\cdot u(x')]/T_{\rm fo}} - 1}, \tag{4.60}$$

onde g_π é o número de graus de liberdade do píon e K, u, $T_{\rm fo}$ e $d\sigma$ são, respectivamente, o *momentum* médio, a 4-velocidade do fluido, a temperatura de freeze-out, e o 4-vetor normal a um elemento infinitesimal da hipersuperfície freeze-out.

A integração da função de emissão sobre o espaçotempo, produz uma distribuição de *momentum* invariante, dada por

$$\frac{dN_\pi}{dy_{_K} K_{_T} dK_{_T} d\theta_{_K}} = \int dx S(x, \boldsymbol{K}) = \frac{g_\pi}{(2\pi)^3}\int \frac{d\sigma_\mu K^\mu}{e^{[K\cdot u]/T_{\rm fo}} - 1}. \tag{4.61}$$

Note que no lado direito da igualdade (4.61) é possível identificar a fórmula de Cooper-Frye, ver seção 2.3. Usando o modelo hidrodinâmico descrito no capítulo 2, podemos escrever os produtos do *momentum* médio K^μ com o 4-vetor $d\sigma_\mu$ e com a velocidade u_μ, da seguinte forma

$$d\sigma_\mu K^\mu = -\tau\rho\frac{d\rho}{d\zeta} M_{\rm T}\cosh\left(y_{\rm K} - \kappa\right) d\zeta d\varphi d\kappa + \tau\rho\frac{d\tau}{d\zeta} K_{\rm T}\cos\left(\theta_{\rm K} - \varphi\right) d\zeta d\varphi d\kappa \tag{4.62a}$$

$$u_\mu K^\mu = \left(M_{_T}\cosh\left(y_{_K} - \kappa\right)\cosh Y_{_T} - K_{_T}\cos\left(\theta_{_K} - \varphi\right)\sinh Y_{_T}\right). \tag{4.62b}$$

Esses produtos (4.62) foram obtidos de modo análogo aos produtos (2.51) da seção 2.4.1. Porém, para este caso temos que $M_T \approx \sqrt{m_\pi^2 + \boldsymbol{K}_T^2}$ é a massa transversal, e y_K, $\theta_{\rm K}$ são respectivamente a rapidez e o ângulo associados ao *momentum* médio K. Com isto, a equação (4.61) pode escrita como

$$\int dx S(x,\boldsymbol{K}) = \frac{g_\pi}{(2\pi)^3}\int \frac{\left[-\tau\rho\frac{d\rho}{d\zeta}M_T\cosh\left(y_K-\kappa\right)+\tau\rho\frac{d\tau}{d\zeta}K_T\cos\left(\theta_K-\varphi\right)\right]d\zeta d\varphi d\kappa}{e^{\left[\left(M_T\cosh\left(y_K-\kappa\right)\cosh Y_T - K_T\cos\left(\theta_K-\varphi\right)\sinh Y_T\right)\right]/T_{\rm fo}}\mp 1}. \tag{4.63}$$

Vamos agora, obter a função de correlação (4.43) de forma mais compacta. Para isto, vamos usar a transformada de Fourier da função de emissão (4.61), definida por

$$\tilde{S}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{K}) = \int dx\, e^{iq\cdot x} S(x,\boldsymbol{K}). \tag{4.64a}$$

Podemos ainda, reescrever essa transformada da seguinte forma

$$\tilde{S}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{K}) = R(\boldsymbol{q},\boldsymbol{K}) + I(\boldsymbol{q},\boldsymbol{K}) \tag{4.64b}$$

onde

$$R(\boldsymbol{q},\boldsymbol{K}) = \int dx\, S(x,\boldsymbol{K})\cos\left(q\cdot x\right) \tag{4.65a}$$

$$I(\boldsymbol{q},\boldsymbol{K}) = i\int dx\, S(x,\boldsymbol{K})\sin\left(q\cdot x\right). \tag{4.65b}$$

Então, com (4.65) podemos reescrever a função de correlação (4.43) a partir de (4.64) como

$$C_2(\boldsymbol{q},\boldsymbol{K}) = 1 + \left|\frac{R(\boldsymbol{q},\boldsymbol{K})}{\tilde{S}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{K})}\right|^2 + \left|\frac{I(\boldsymbol{q},\boldsymbol{K})}{\tilde{S}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{K})}\right|^2. \tag{4.66}$$

As integrais da função de correlação, (4.66), para píons, são dadas por

$$R(\boldsymbol{q},\boldsymbol{K}) = \frac{g_\pi}{(2\pi)^3}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{-\tau\rho\frac{d\rho}{d\zeta}M_T\cosh(y_K-\kappa)\cos(q\cdot x)\,d\zeta d\varphi d\kappa}{e^{\left[\left(M_T\cosh\left(y_K-\kappa\right)\cosh Y_T - K_T\cos\left(\theta_K-\varphi\right)\sinh Y_T\right)\right]/T_{\rm fo}}-1} + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{\tau\rho\frac{d\tau}{d\zeta}K_T\cos(\theta_K-\varphi)\cos(q\cdot x)\,d\zeta d\varphi d\kappa}{e^{\left[\left(M_T\cosh\left(y_K-\kappa\right)\cosh Y_T - K_T\cos\left(\theta_K-\varphi\right)\sinh Y_T\right)\right]/T_{\rm fo}}-1}\right\} \tag{4.67a}$$

$$I(\boldsymbol{q},\boldsymbol{K}) = \frac{g_\pi}{(2\pi)^3}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{-\tau\rho\frac{d\rho}{d\zeta}M_T\cosh(y_K-\kappa)i\sin(q\cdot x)\,d\zeta d\varphi d\kappa}{e^{\left[\left(M_T\cosh\left(y_K-\kappa\right)\cosh Y_T - K_T\cos\left(\theta_K-\varphi\right)\sinh Y_T\right)\right]/T_{\rm fo}}-1} + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{\tau\rho\frac{d\tau}{d\zeta}K_T\cos(\theta_K-\varphi)i\sin(q\cdot x)\,d\zeta d\varphi d\kappa}{e^{\left[\left(M_T\cosh\left(y_K-\kappa\right)\cosh Y_T - K_T\cos\left(\theta_K-\varphi\right)\sinh Y_T\right)\right]/T_{\rm fo}}-1}\right\} \tag{4.67b}$$

$$\tilde{S}(\mathbf{0},\boldsymbol{K}) = \frac{g_\pi}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{1}\frac{\left[-\tau\rho\frac{d\rho}{d\zeta}M_T\cosh(y_K-\kappa)+\tau\rho\frac{d\tau}{d\zeta}K_T\cos(\theta_K-\varphi)\right]d\zeta d\varphi d\kappa}{e^{\left[\left(M_T\cosh\left(y_K-\kappa\right)\cosh Y_T - K_T\cos\left(\theta_K-\varphi\right)\sinh Y_T\right)\right]/T_{\rm fo}}-1}. \quad (4.67c)$$

onde a quantidade $q\cdot x$ nas integrais (4.67a) e (4.67b) é dada por

$$\begin{aligned} q\cdot x &= q_0\,\tau\cosh\kappa - q_1\,\rho\cos\varphi - q_2\,\rho\sin\varphi - q_3\,\tau\sinh\kappa \\ &= q_0\tau\cosh\kappa - (q_o\cos\theta_K - q_s\sin\theta_K)\,\rho\cos\varphi \\ &\qquad - (q_s\cos\theta_K + q_o\sin\theta_K)\,\rho\sin\varphi - q_\ell\tau\sinh\kappa. \end{aligned} \quad (4.68)$$

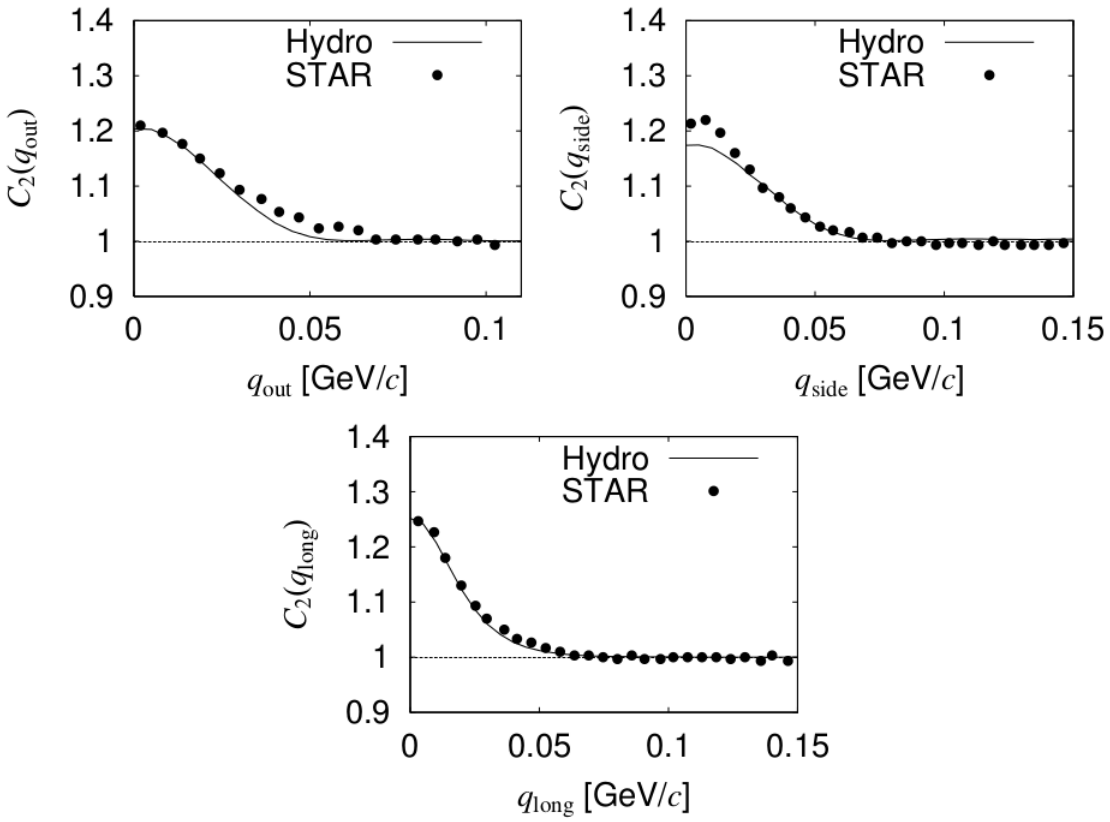

Figura 4.3: Funções de correlação de Bose-Einstein para π^-. Nos gráficos superior esquerdo, superior direito e abaixo, são mostradas as figuras das funções de correlação nas direções *out, side* e *long*, respectivamente. Em cada figura, a função de correlação é integrado com respeito aos outros dois componentes de 0 a 35 MeV / c, segundo a colaboração STAR. Retirada da referência [76].

4.5 Raios HBT

A técnica de interferometria HBT nos permite extraír informação direta sobre a estrutura do espaçotempo da fonte de emissão partículas criadas na colisão nuclear [75]. Isto é feito por meio da função de correlação de partículas idênticas, cuja característica mais importante é a sua largura, a qual está associada ao tamanho espaçotemporal da região de emissão de partículas. Na figura 4.3, temos o gráfico de uma função de correlação de píons idênticos para uma colisão Au+Au $\sqrt{s_{NN}} = 130$ GeV. Nos gráficos superior esquerdo, superior direito e abaixo, são mostradas as figuras das funções de correlação nas direções *out, side* e *long*, respectivamente. Em cada gráfico, a função de correlação é integrado com respeito aos outros dois componentes de 0 a 35 MeV/c, segundo a colaboração STAR [76].

A largura da função de correlação é obtida, no sistema de coordenadas *out-side-long*, por meio dos chamados raios HBT. Nesse sistema os raios, $R_{\rm out}$, $R_{\rm side}$ e $R_{\rm long}$, são obtidos ajustando-se a função de correlação por uma gaussiana [35, 48, 69] dada por

$$C_2(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{K}) = 1 + \lambda \exp\left[-R_o^2(\boldsymbol{K})q_o^2 - R_s^2(\boldsymbol{K})q_s^2 - R_\ell^2(\boldsymbol{K})q_\ell^2\right], \tag{4.69}$$

onde λ é um parâmetro associado a caoticidade do sistema e R_i, $i = o, s, \ell$, são os parâmetros gaussianos ou raios HBT, que estão relacionados com a região de emissão de partículas. Assim, os raios HBT dão essencialmente as larguras da função de correlação nas direções *out-side-long*. Na figura 5.4, mostramos uma ilustração da correlação HBT com a parametrização Bertch-Pratt (ver seção 4.4). Onde [repesentação à esquerda] *long* (longitudinal) é a direção do eixo do feixe; *out* (exterior) é perpendicular ao eixo do feixe e está voltada para a direção das parículas; e *side* (lateralmente) é o sentido perpendicular a ambas as direções *long* e *side*. Para colisões não-centrais [repesentação à direita], os eixos principais podem ser diferentes das direções *out-side-long* e os ângulos de Euler, θ, que aparecem podem ser relacionados com os parâmetros R_i. Nesse trabalho, como já dissemos antes, iremos considerar apenas colisões

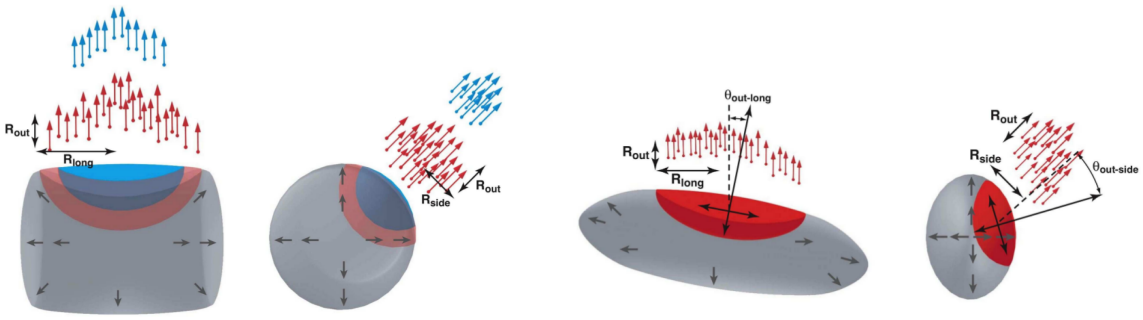

Figura 4.4: Ilustração da correlação HBT com a parametrização Bertch-Pratt. Nas colisões não-centrais [repesentação à direita], os eixos principais podem ser diferentes das direções *out-side-long*. Adaptado da referência [86].

centrais e correlação de píons idênticos.

As simulações dos raios HBT serão feitas utilizando o modelo hidrodinâmico apresentado no capítulo 2 e as equações de estado apresentas no capítulo 3. Para resolvermos as integrais (4.67) da função de correlação (4.66), usaremos o método Monte Carlo (ver apêndice D). Os resultados das simulações serão mostrados no próximo capítulo.

Capítulo 5

Resultados Numéricos

"O sentido da vida consiste em que não
tem nenhum sentido dizer que a vida não tem sentido."
Niels Bohr

Neste capítulo, vamos apresentar os nossos resultados das distribuições de *momenta* de píons e da interferometria HBT calculados para energia do RHIC. Nosso modelo hidrodinâmico é baseado na prescrição de Bjorken para as colisões de íons pesados em altas energias. As simulações computacionais foram feitas utilizando-se simetria cilíndrica para os cálculos da hidrodinâmica, conforme descrito nas seções 2.2 e 2.3. Para esses cálculos, levamos em consideração as condições iniciais, o critério de desacomplamento freeze-out e as equações de estado. Nosso objetivo é verificar a influência das condições iniciais e das equações de estado nos raios HBT, de modo que os resultados possam nos dar uma indicação de como reproduzir os dados de interferometria HBT no RHIC. As condições iniciais (CI) usadas são suaves e simétricas. Isto pode ser entendido como uma média das condições iniciais sobre diversos eventos como mostram, por exemplo, as figuras 2.5 e 2.6 produzidas pelo gerador de eventos NeXuS, para colisões centrais de Au + Au em 130A GeV [34]. O desacomplamento, para uma dada temperatura freeze-out, será feito usando a fórmula Cooper-Frye, equação (2.42), conforme descrito na seção 2.3. As equações de estado (EoS) usadas nos cálculos hidrodinâmicos são as equações descritas no capítulo 3, a saber: Gás de Píons (GPI), Transição de fase 1ª Ordem (1ST) e QCD. O valor usado para a densidade de energia inicial foi de $10.5\,\mathrm{GeV/fm^3}$, obtido com a equação (2.63), usando $\tau_0 = 0.3$ fm. Para a temperatura de freeze-out, usamos os valores de temperatura de 120 MeV, 130 MeV, 135 MeV e 140 MeV.

5.1 Distribuição de Píons em Função de p_{T}

5.1.1 Modelo de Bjorken sem Expansão Transversal

As distribuições de píons em função de p_{T} foram calculadas usando a equação (2.55), modelo de Bjorken sem expansão transversal e as EoS GPI, 1ST e QCD para colisões Au + Au

a 130 GeV, no referencial do centro de massa com centralidade (0–5%). Estimamos o raio do ouro[1] como sendo $R_A \approx 7$ fm. Usamos as temperaturas de freeze-out de 120 MeV, 130 MeV, 135 MeV e 140 MeV. Na figura 5.1, mostramos a comparação dos resultados obtidos com os dados experimentais da colaboração PHENIX [50]. As linhas pontilhada, tracejada e hachurada são distribuições teóricas usando as EoS GPI, 1ST e QCD respectivamente.

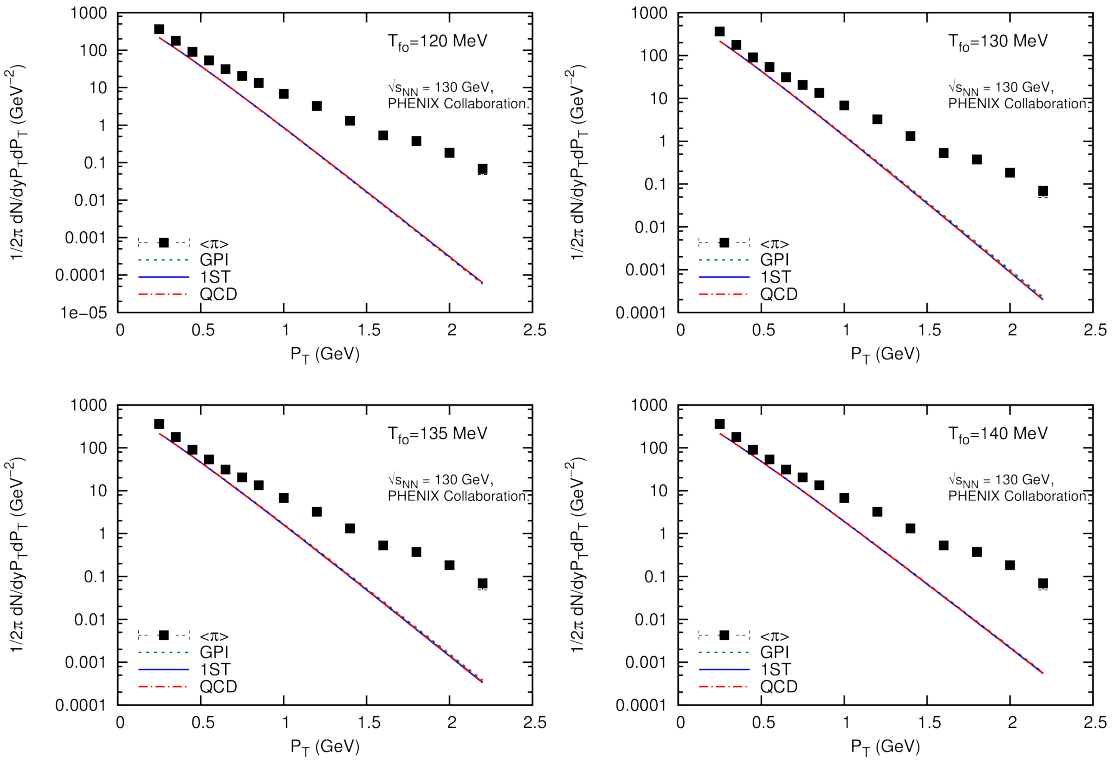

Figura 5.1: Distribuição de píons em função de p_{T} usando o modelo de Bjorken sem expansão transversal, para colisões Au+Au a 130A GeV com centralidade (0–5%). As linhas pontilhada, contínua e hachurada são distribuições teóricas usando as EoS GPI, 1ST e QCD respectivamente. As alturas das curvas foram normalizadas. Os dados experimentais são da colaboração PHENIX [50].

Os resultados deixam claro que nenhuma das distribuições teóricas se aproximaram dos dados experimentais. Isto ocorreu porque não foi levado em consideração a expansão transversal (ver seção 2.2). Embora as curvas das três distribuições teóricas estejam coincidindo, existe, na verdade, uma diferença de altura entre elas. A razão para essa coincidência está no fato de que as três distribuições possuem a mesma normalização, pois estamos interessados apenas

[1] O raio do ouro pode ser estimado fazendo $R_A = r_0 A^{\frac{1}{3}}$, onde $r_0 = 1,2$ fm. Como o núcleo de ouro contêm $N = 118$ nêutrons, temos $A = 79 + 118 = 197$ núcleons e portanto $R_A \approx 7$ fm.

na inclinação das distribuições teóricas. Como não estamos considerando decaimentos, não somos capazes de reproduzir a multiplicidade de píons.

5.1.2 Modelo de Bjorken com Expansão Transversal

Incluímos uma expansão transversal no modelo de Bjorken e calculamos as distribuições de píons em função de p_{T} usando a equação (2.53) com simetria cilíndrica e as EoS GPI, 1ST e QCD para as mesmas condições de tempertura de freeze-out, energia e centralidade do caso anterior. Na figura 5.2, mostramos a comparação dos nossos resultados com os dados PHENIX [50].

Houve uma significativa melhoria na comparação dos resultados das distribuições teóricas com os dados experimentais. A melhora ocorreu, principalmente, nas distribuições com EoS 1ST e QCD. Isto mostra que para reproduzirmos os dados experimentais é preciso levarmos em consideração a expansão transversal. Por outro lado, a distribuição com EoS GPI, a exemplo do caso anterior, não conseguiu se aproximar dos dados experimentais, indicando que a modelagem do fluido usando somente um gás hadrônico não produz bons resultados, sendo portanto necessário considerar também uma fase de plasma.

Os trabalhos [77, 78] mostram que velocidades coletivas transversais podem se desenvolver na fase de pré-termalização. Introduzimos um fluxo transversal inicial em nossas simulações e, com isto, obtivemos um novo ingrediente para as condições iniciais, *a velocidade transversal inicial*, $u_{_{T_0}}$. Essa velocidade será parametrizada como nos artigos [79, 80]

$$u_{_{T_0}} = \tanh\left(\alpha \frac{\rho}{R_{_A}}\right), \qquad \rho \leq R_{_A}, \tag{5.1}$$

onde ρ é a coordenada radial, $R_{_A}$ é o raio inicial do fluido (que no nosso caso coincide com o raio do núcleo) e α é um parâmetro usado para ajustar os dados.

Introduzimos uma velocidade transversal inicial, $u_{_{T_0}}$, em nossos cálculos hidrodinâmicos, e calculamos novamente as distribuições de píons em função de p_{T} usando o modelo de Bjorken com expansão transversal e as EoS 1ST e QCD, para as quatro temperaturas freeze-out usadas anteriormente. Nas figuras 5.3 e 5.4, mostramos os resultados dessas distribuições obtidos com os parâmetros $\alpha = 0.10$ e $\alpha = 0.12$ respectivamente, comparados com os dados PHENIX [50]. Os resultados mostram que com a introdução dessa nova CI a inclinação da distribuição de píons melhorou. Comparando as distribuições com $u_{_{T_0}} = 0$, obtidas anteriormente figura 5.2, com as distribuições com $u_{_{T_0}} \neq 0$, figuras 5.3 e 5.4, temos que estas últimas apresentam melhor concordância com os dados experimentais PHENIX [50] em todas as temperaturas de freeze-out consideradas, tanto para EoS 1ST quanto para EoS QCD.

Na figura 5.5, à direita (esquerda), mostramos as hipersuperfícies de freeze-out para as EoS 1ST e QCD com (sem) fluxo transversal inicial com velocidade transversal inicial de $u_{_{T_0}} \neq 0$ com $\alpha = 0.1$ ($u_{_{T_0}} = 0$). A densidade de energia inicial é de $10.5\,\mathrm{GeV/fm^3}$ e a temperatura de freeze-out é de $T_{\mathrm{fo}} = 120$ MeV. Na figura 5.6 temos um caso análogo, onde a $T_{\mathrm{fo}} = 130$

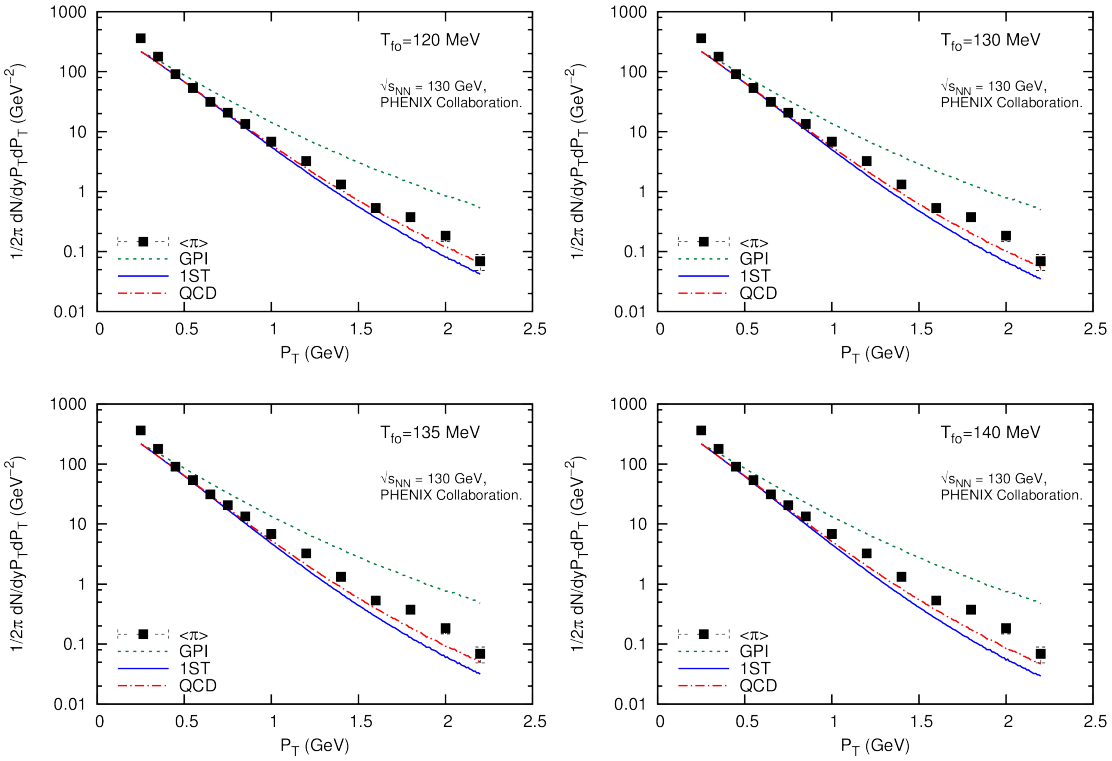

Figura 5.2: Distribuição de píons em função de p_{T} usando o modelo de Bjorken com expansão transversal, para colisões Au+Au a 130A GeV com centralidade (0–5%). As linhas contínua, hachurada e tracejada são distribuições teóricas usando as EoS 1ST, QCD e GPI respectivamente. As alturas das curvas foram normalizadas.Os dados experimentais são da colaboração PHENIX [50].

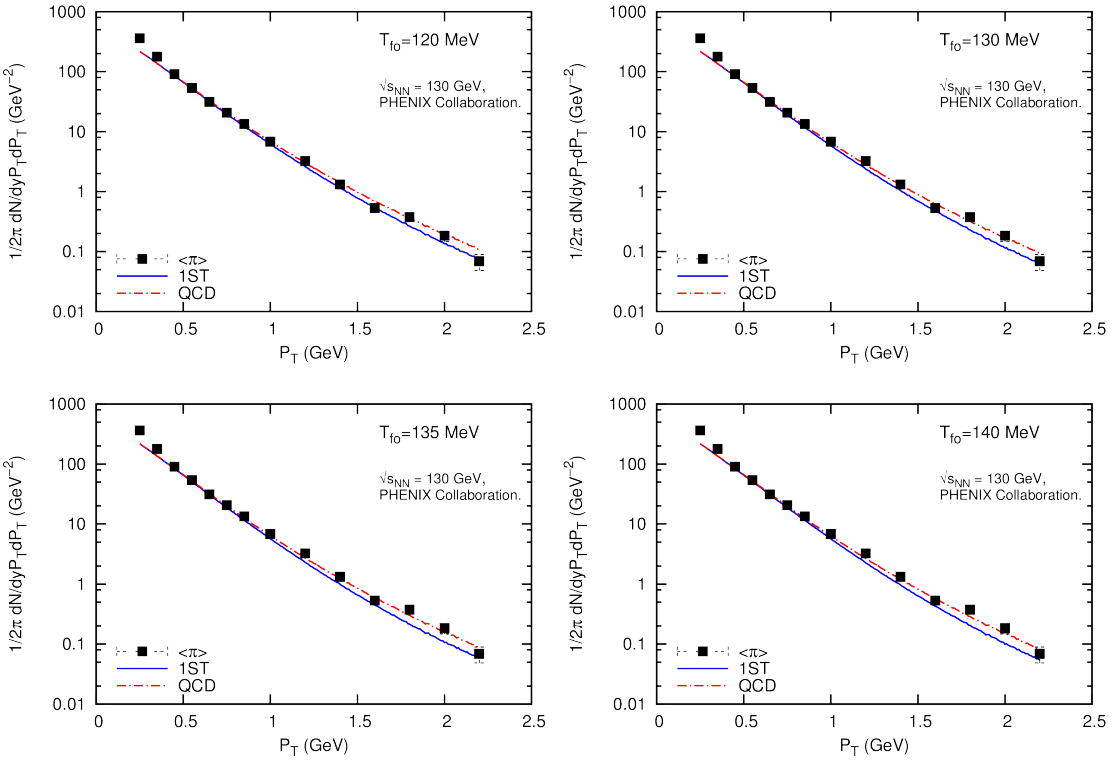

Figura 5.3: Distribuição de píons em função de p_{T} usando o modelo de Bjorken com expansão transversal e u_{T_0} com $\alpha = 0.10$, para colisões Au+Au a 130A GeV com centralidade (0–5%). As linhas contínua e hachurada são distribuições teóricas usando as EoS 1ST e QCD respectivamente. As alturas das curvas foram normalizadas. Os dados experimentais são da colaboração PHENIX [50].

MeV e $u_{T_0} \neq 0$ com $\alpha = 0.12$ ($u_{T_0} = 0$). As diferenças entres as hipersuperfícies indicam que a evolução espaçotemperal do fluido ocorre de maneira distinta para diferentes condições iniciais.

Com a introdução do fluxo transversal inicial nos cálculos hidrodinâmicos, os resultados obtidos com as distribuições de píons em função de p_{T} foram significativamente melhores. Na próxima seção, vamos analisar qual será o efeito dessa nova CI no comportamento dos raios HBT.

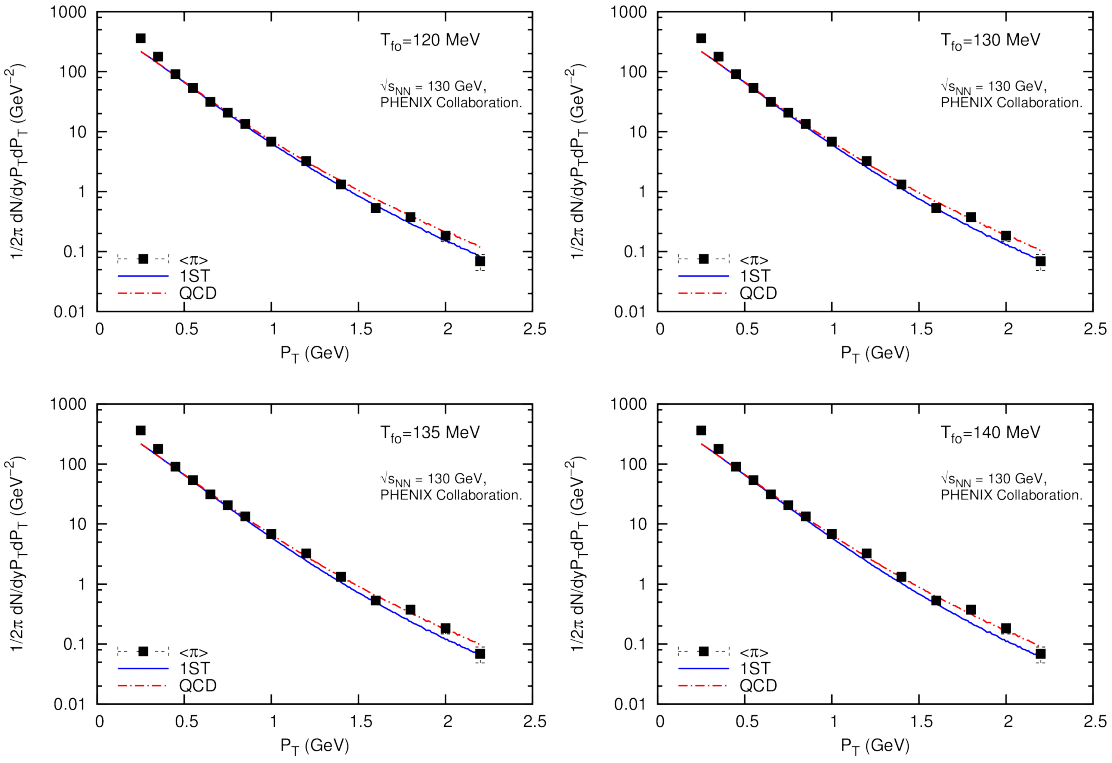

Figura 5.4: Distribuição de píons em função de p_{T} usando o modelo de Bjorken com expansão transversal e u_{T_0} com $\alpha = 0.12$, para colisões Au+Au a 130A GeV com centralidade (0–5%). As linhas contínua e hachurada são distribuições teóricas usando as EoS 1ST e QCD respectivamente. As alturas das curvas foram normalizadas. Os dados experimentais são da colaboração PHENIX [50].

5.2 Raio HBT em Função de K_{T}

No capítulo 4, discutimos as medidas dos parâmetros dos raios HBT e sua relação com o tamanho da fonte de emissão. Através da função de correlação, as diferentes partes da fonte

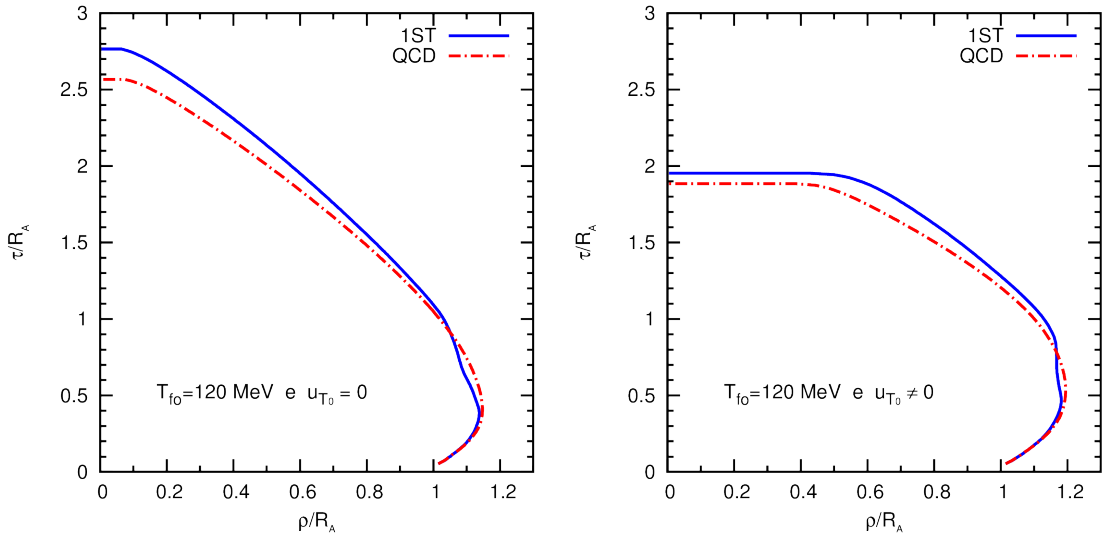

Figura 5.5: A direita (esquerda), mostramos as hipersuperfícies de freeze-out para as EoS 1ST e QCD com (sem) fluxo transversal inicial com velocidade transversal inicial de $u_{T_0} \neq 0$ com $\alpha = 0.1$ ($u_{T_0} = 0$). A densidade de energia inicial é de $10.5\,\mathrm{GeV/fm^3}$ e a temperatura de freeze-out é de $T_{\rm fo} = 120$ MeV.

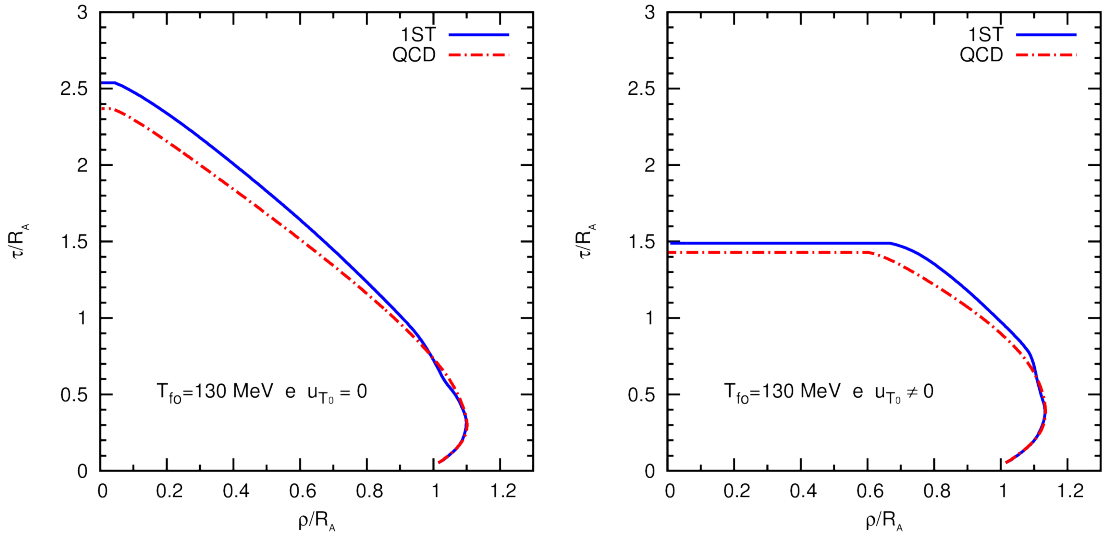

Figura 5.6: A direita (esquerda), mostramos as hipersuperfícies de freeze-out para as EoS 1ST e QCD com (sem) fluxo transversal inicial com velocidade transversal inicial de $u_{T_0} \neq 0$ com $\alpha = 0.12$ ($u_{T_0} = 0$). A densidade de energia inicial é de $10.5\,\mathrm{GeV/fm^3}$ e a temperatura de freeze-out é de $T_{\rm fo} = 130$ MeV.

são medidas com os *momenta* dos pares de píons, e com isto, obtemos a informação sobre a sua geometria. Na seção anterior mostramos as distribuições de píons em função de $p_{\rm T}$ para energia do RHIC com centralidades (0–5%). Os melhores resultados foram obtidos utilizando-se as distribuições com fluxo transversal inicial, figuras 5.3–5.4. Em nossas simulações utilizamos: temperaturas $T_{\rm fo} = 120$ MeV e $T_{\rm fo} = 130$ MeV; velocidades transversais iniciais, $u_{_{T_0}}$, com $\alpha = 0.10$ e $\alpha = 0.12$. Calcularmos os raios HBT $R_{\rm out}$, $R_{\rm side}$ e $R_{\rm long}$ em função do *momentum* médio transversal do par de píons, $K_{\rm T}$, usando a função de correlação de píons, equação (4.66). Os cálculos hidrodinâmicos foram realizados com as EoS 1ST e QCD, descritas nas seções 3.4 e 3.5, a densidade de energia inicial, descrita na seção 2.5, e fluxo transversal inicial, descrito na seção 5.1. Nas figuras 5.7–5.12, apresentamos a comparação dos nossos resultados com os dados experimentais HBT [81, 82]. Os círculos claros (círculos escuros), nas figuras, são os resultados das simulações calculadas com a EoS 1ST (QCD) sem fluxo transversal inicial, $u_{_{T_0}} = 0$, e as cruzes claras (cruzes escuras) com fluxo transversal inicial,$u_{_{T_0}} \neq 0$. Os pontos quadrados abertos (quadrados fechados) são dados experimentais da colaboração STAR [81] (PHENIX [82]).

Nas figuras 5.7 e 5.8, apresentamos os resultados das simulações dos raios HBT, obtidos com a $T_{\rm fo} = 120\,{\rm MeV}$ e as $u_{_{T_0}} = 0$ (sem expansão transversal inicial) e $u_{_{T_0}} \neq 0$ com $\alpha = 0.10$ e $\alpha = 0.12$ (com expansão transversal inicial). Na comparação com os dados experimentais HBT [81, 82] os resultados com $u_{_{T_0}} \neq 0$ mostraram-se significativamente melhores que aqueles com $u_{_{T_0}} = 0$. Notamos ainda, que os resultados com velocidade transversal inicial tendem a se aproximarem dos dados experimentais. Isto fica mais evidente quando olhamos a razão $R_{\rm out}/R_{\rm side}$ na qual os resultados com $u_{_{T_0}} = 0$ se afastam dos dados experimentais enquanto aqueles com $u_{_{T_0}} \neq 0$ se aproximam destes. Para o raio HBT longitudinal, $R_{\rm long}$, estes resultados mostram que nosso modelo hidrodinâmico – aproximação de Bjorken com expansão transversal e simetria cilíndrica – oferece boa concordância com os dados HBT na energia do RHIC.

Nas figuras 5.9 e 5.10, mostramos também, resultados das simulações dos raios HBT obtidos com a $T_{\rm fo} = 130\,{\rm MeV}$ e as $u_{_{T_0}} = 0$ e $u_{_{T_0}} \neq 0$ com os mesmos valores de α do caso anterior. Novamente, na comparação com os dados experimentais HBT [81, 82], os resultados com $u_{_{T_0}} \neq 0$ mostraram-se melhores que aqueles com $u_{_{T_0}} = 0$. No entanto, podemos observar que a medida que incrementamos o valor de α os raios $R_{\rm side}$ e $R_{\rm out}$ aproximam-se dos dados HBT. Como $R_{\rm out}$ sofre maior influência do fluxo transversal este aproxima-se de maneira mais significativa que $R_{\rm side}$. Por outro lado, o raio $R_{\rm long}$ se afasta dos dados HBT. Isto é justificado pelo fato de usarmos a aproximação de Bjorken. Cabe aqui ressaltar que não estamos interessados em encontrar o melhor valor de ajuste do parâmetro α para velocidade transversal inicial e sim na influência desta CI nos raios HBT.

Como já mencionado, todas as nossas simulações foram realizadas com a densidade de energia inicial de $10.5\,{\rm GeV/fm^3}$. A fim de verificar a influência dessa CI nos raios HBT, realizamos também simulações com $\varepsilon_0 = 15.8\,{\rm GeV/fm^3}$ e $\varepsilon_0 = 8.0\,{\rm GeV/fm^3}$. Esses valores de densidade de energia inicial são coerentes com valores obtidos com o gerador de eventos NeXuS (ver figura 2.5 e 2.6). Na figura 5.11, mostramos os resultados dessas simulações. Os círculos claros representam os resultados obtidos com $\varepsilon_0 = 15.8\,{\rm GeV/fm^3}$, os círculos escuros com $\varepsilon_0 = 10.5\,{\rm GeV/fm^3}$ e cruzes claras com $\varepsilon_0 = 8.0\,{\rm GeV/fm^3}$. Os cálculos hidrodinâmicos foram

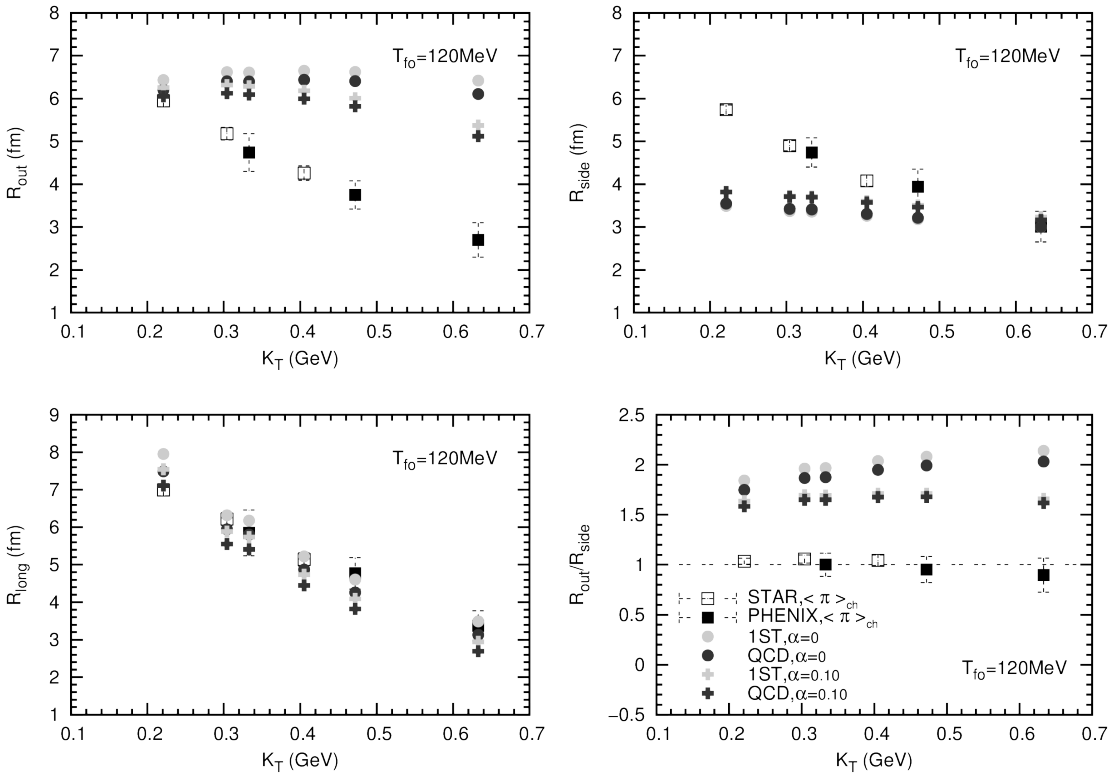

Figura 5.7: Raios HBT para colisão central (0–5%) com $\varepsilon_0 = 10.5\,\mathrm{GeV/fm^3}$ e $T_{\rm fo} = 120\,\mathrm{MeV}$. Hidrodinâmica calculada usando a EoS 1ST (QCD) círculo claro (círculo escuro) sem fluxo transversal inicial, $u_{\rm T} = 0$, e cruz clara (cruz escura) com fluxo transversal inicial, $u_{\rm T}$ com $\alpha = 0.10$, os pontos quadrados abertos (quadrados fechados) são dados experimentais da colaboração STAR [81] (PHENIX [82]).

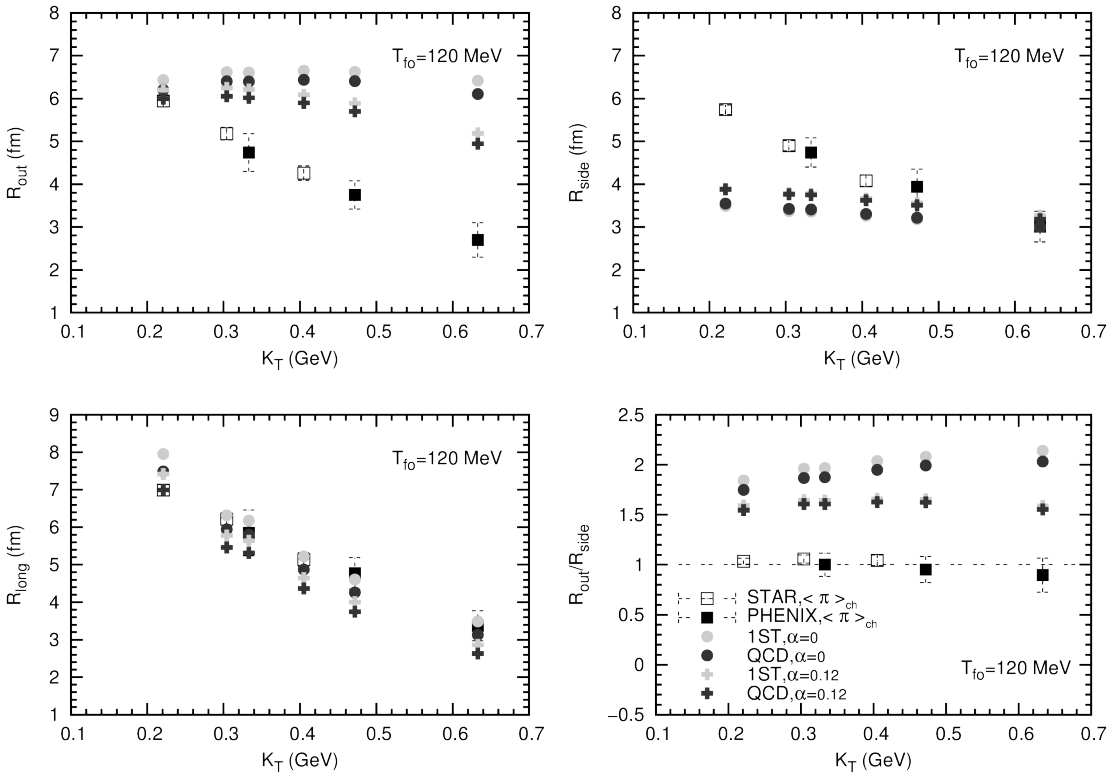

Figura 5.8: Raios HBT para colisão central (0–5%) com $\varepsilon_0 = 10.5\,\mathrm{GeV/fm^3}$ e $T_{\mathrm{fo}} = 120\,\mathrm{MeV}$. Hidrodinâmica calculada usando a EoS 1ST (QCD) círculo claro (círculo escuro) sem fluxo transversal inicial, $u_{\mathrm{T}} = 0$, e cruz clara (cruz escura) com fluxo transversal inicial, u_{T} com $\alpha = 0.12$, os pontos quadrados abertos (quadrados fechados) são dados experimentais da colaboração STAR [81] (PHENIX [82])).

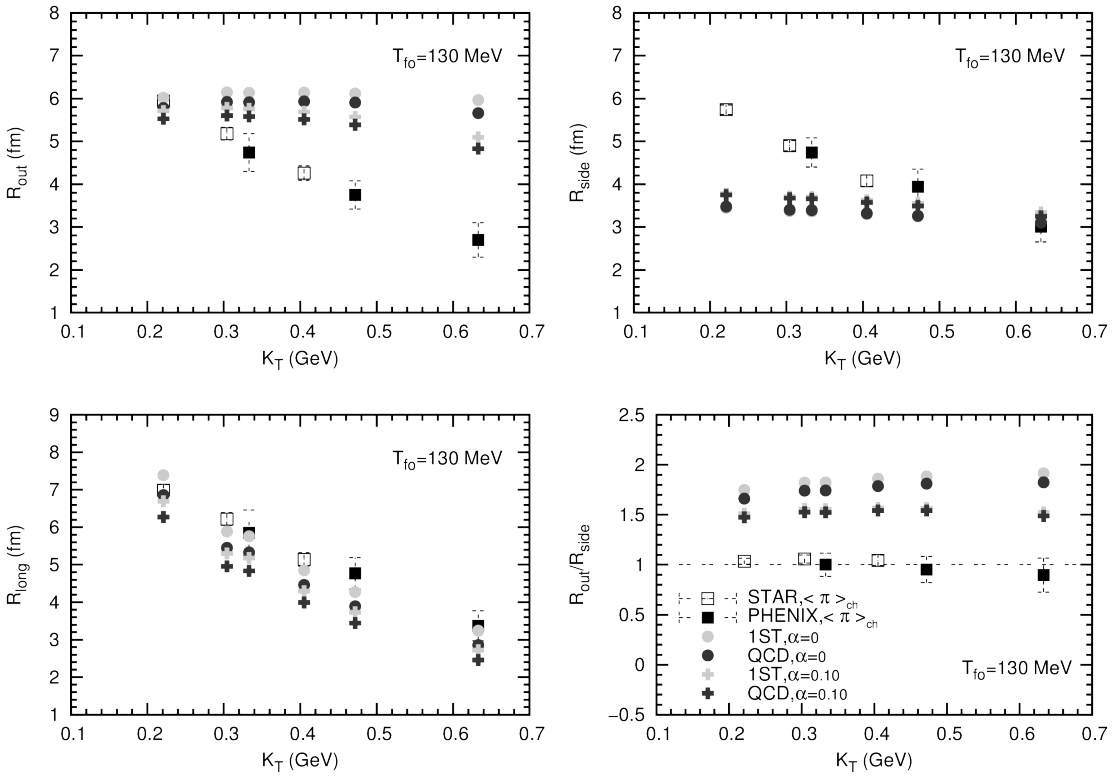

Figura 5.9: Raios HBT para colisão central (0–5%) com $\varepsilon_0 = 10.5\,\mathrm{GeV/fm^3}$ e $T_{\rm fo} = 130\,\mathrm{MeV}$. Hidrodinâmica calculada usando a EoS 1ST (QCD) círculo claro (círculo escuro) sem fluxo transversal inicial, $u_{\rm T} = 0$, e cruz clara (cruz escura) com fluxo transversal inicial, $u_{\rm T}$ com $\alpha = 0.10$, os pontos quadrados abertos (quadrados fechados) são dados experimentais da colaboração STAR [81] (PHENIX [82]).

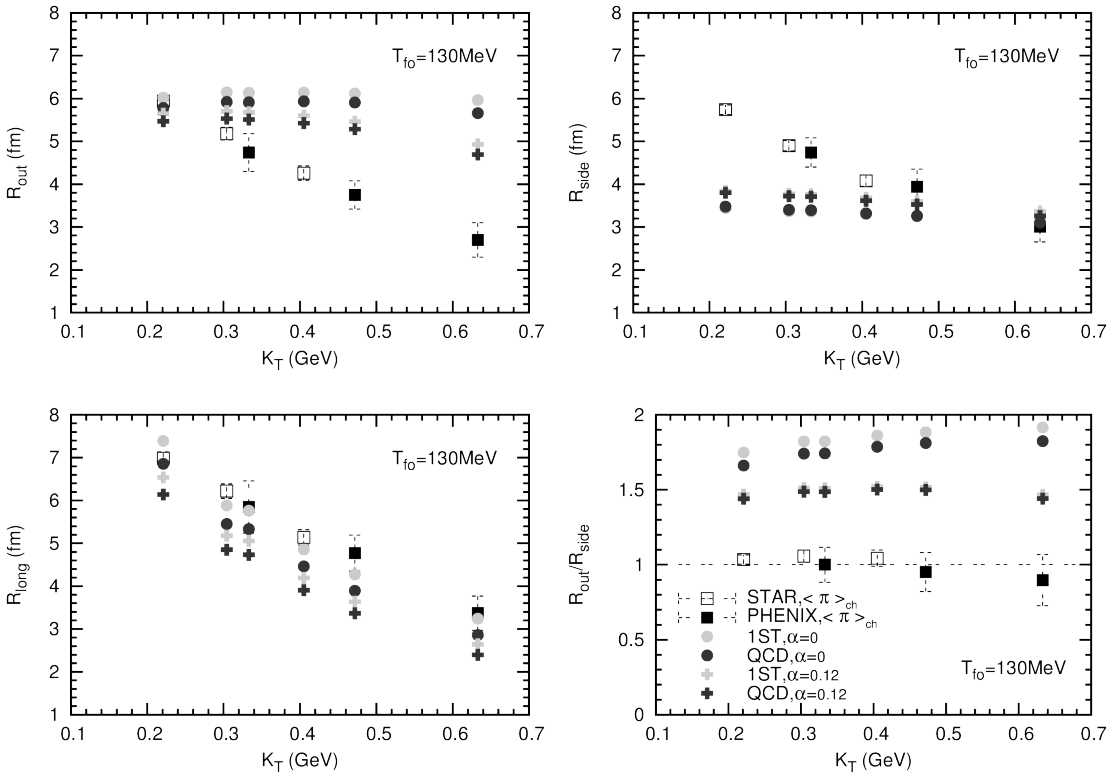

Figura 5.10: Raios HBT para colisão central (0–5%) com $\varepsilon_0 = 10.5\,\mathrm{GeV/fm^3}$ e $T_{\mathrm{fo}} = 130\,\mathrm{MeV}$. Hidrodinâmica calculada usando a EoS 1ST (QCD) círculo claro (círculo escuro) sem fluxo transversal inicial, $u_{\mathrm{T}} = 0$, e cruz clara (cruz escura) com fluxo transversal inicial, u_{T} com $\alpha = 0.12$, os pontos quadrados abertos (quadrados fechados) são dados experimentais da colaboração STAR [81] (PHENIX [82]).

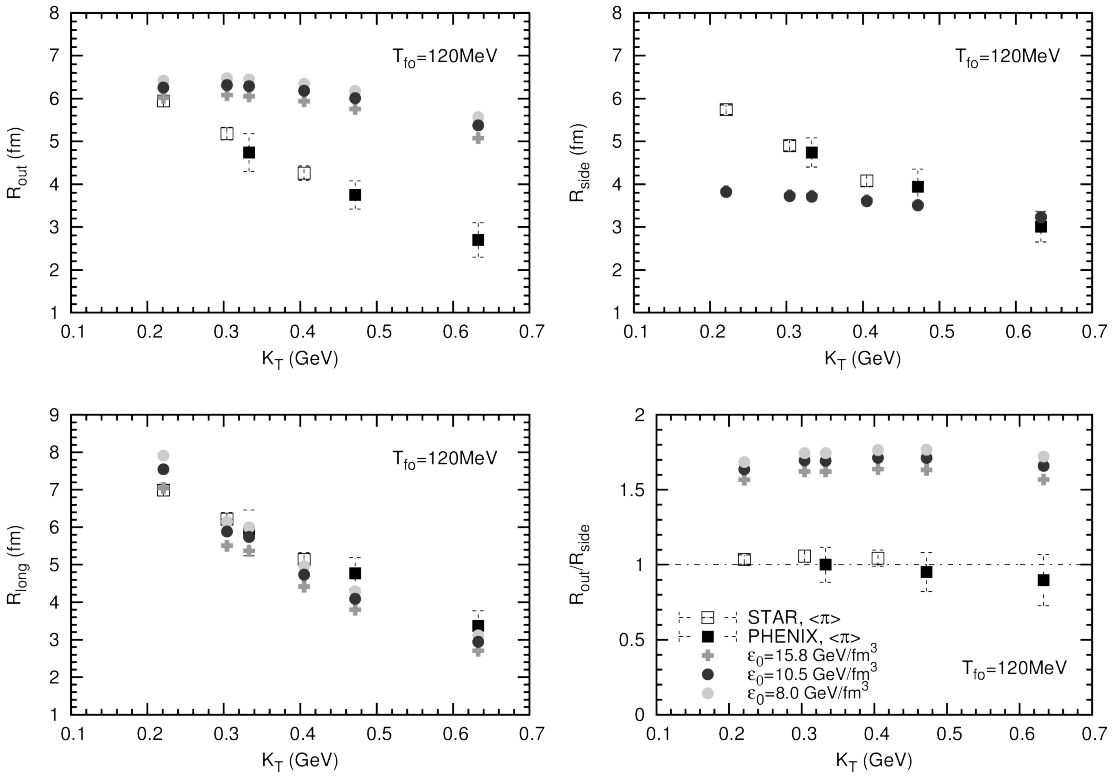

Figura 5.11: Raios HBT para colisão central (0–5%). Hidrodinâmica calculada usando a EoS 1ST, $T_{\rm fo} = 130\,{\rm MeV}$ com as $\varepsilon_0 = 15.8\,{\rm GeV/fm^3}$ (cruz), $\varepsilon_0 = 10.5\,{\rm GeV/fm^3}$ (círculo escuro) e $\varepsilon_0 = 8.0\,{\rm GeV/fm^3}$ (círculo claro). Os pontos quadrados abertos (quadrados fechados) são dados experimentais da colaboração STAR [81] (PHENIX [82]).

realizados usamos a EoS 1ST com $T_{\rm fo} = 120$ MeV e u_{T_0} com $\alpha = 0.10$. De modo geral, não houve diferença significativa nos resultados. É possível ver uma pequena indicação de melhoria no raio $R_{\rm out}$ e na razão $R_{\rm out}/R_{\rm side}$. Notamos também que incrementando a densidade de energia e mantendo os demais parâmetros, há um decréscimo dos raios HBT. Uma possível explicação para isso é que estamos considerando colisões centrais onde a sobreposição entre os dois núcleos é maximizada, maior volume de reação, aumentando assim a quantidade de energia depositada na região da colisão e consequentemente levando o fluido a ter uma expansão mais violenta, fazendo com que o mesmo acelere mais e tenha um tempo de vida menor. Na figura 5.12 temos os gráficos das hipersuperfícies de freeze-out para as densidades de energia inicial de $8.0\,\mathrm{GeV/fm^3}$ (na parte superior), de $10.5\,\mathrm{GeV/fm^3}$ (no centro) e de $15.8\,\mathrm{GeV/fm^3}$ (na parte inferior). A partir deste é possível notar que para densidade de energia inicial maior o fluido apresenta um tempo de vida menor.

Comparando os resultados obtidos com as EoS 1ST e QCD, figuras 5.7–5.10, observarmos que não há diferença significativa entre os mesmos – a EoS QCD até apresenta uma tímida melhora, que pode ser vista no raio $R_{\rm out}$ e na razão $R_{\rm out}/R_{\rm side}$, mas nada de maneira muito pronunciada – indicando que, para esse modelo hidrodinâmico, a EoS exerce pouca influência nos raios HBT.

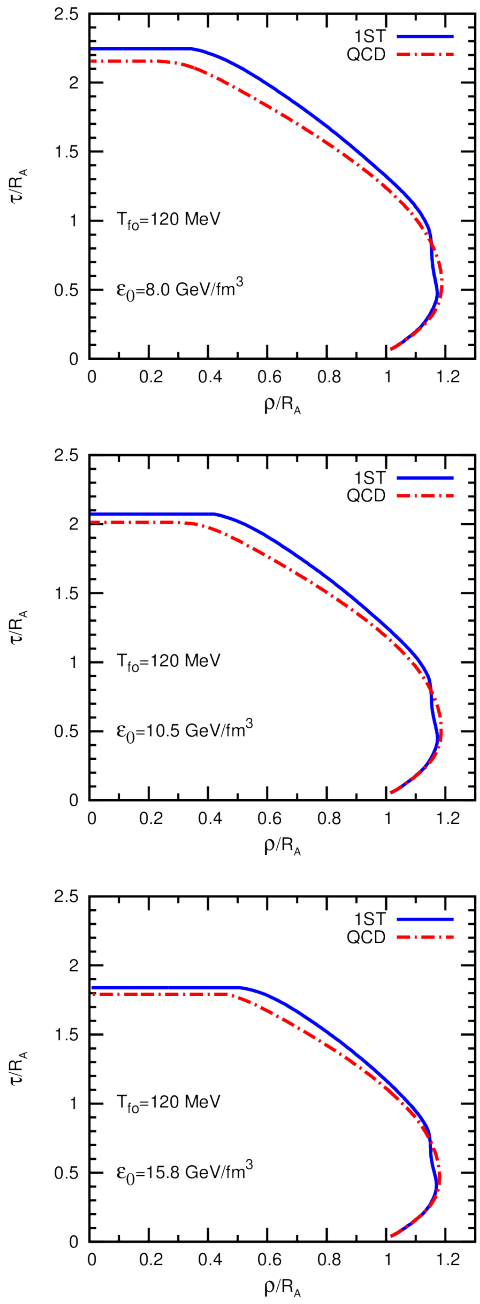

Figura 5.12: Hipersuperfícies de freeze-out para as EoS 1ST e QCD com fluxo transversal inicial. A temperatura de freeze-out é de $T_{\mathrm{fo}} = 120$ MeV e o parâmetro $\alpha = 0.10$ para a velocidade transversal inicial. A densidade de energia inicial é de $8.0\,\mathrm{GeV/fm^3}$ (na parte superior), de $10.5\,\mathrm{GeV/fm^3}$ (no centro) e de $15.8\,\mathrm{GeV/fm^3}$ (na parte inferior).

Capítulo 6

Conclusão

A morte é dormir sem o direito de sonhar e jamais acordar.

Os resultados das distribuições de *momenta* de píons e da interferometria HBT apresentados neste trabalho foram obtidos usando um modelo hidrodinâmico com a prescrição de Bjorken – que é uma aproximação para as colisões de íons pesados em altas energias – com expansão transversal e simetria cilíndrica e três equações de estado. O objetivo deste trabalho era verificar a influência das condições iniciais (CI) e das equações de estado (EoS) nos raios HBT. As condições iniciais usadas foram simétricas e suaves, com densidade de energia constante. Analisamos os casos com e sem velocidade transversal pré-termalização. As EoS usadas foram GPI, 1ST e QCD, descritas no capítulo 3. O primeiro passo foi estimarmos a densidade de energia inicial, o que foi feito conforme descrito na seção 2.5. O segundo passo foi encontrar valores de temperatura de freeze-out e velocidade transversal inicial para os quais os resultados das distribuições de píons em função de p_{T} se aproximassem dos dados experimentais. Inicialmente, usamos o modelo de Bjorken sem expansão transversal, (2.55), e como esperado, os resultados do modelo não conseguiram reproduzir a inclinação dos dados experimentais, como mostra a figura 5.1. Incluímos uma expansão transversal no modelo de Bjorken, (2.53), e os resultados das distribuições de píons em função de p_{T} obtidos a partir deste tiveram significativa melhoria, principalmente, nas distribuições com EoS 1ST e QCD, como mostra a figura 5.2. Já a modelagem do fluido usando somente um gás hadrônico, distribuição com EoS GPI, não produziu bons resultados, indicando que para reproduzirmos os dados experimentais precisamos considerar também uma fase de plasma. Por fim, incluímos uma velocidade transversal inicial nos cálculos hidrodinâmicos. Os resultados obtidos, mostraram que a introdução dessa nova CI melhorou a inclinação da distribuição de píons. Em seguida, usamos em nossas simulações HBT, os valores de densidade de energia, temperatura freeze-out, velocidade transversal inicial e as EoS para os quais as distribuições de píons tiveram melhor concordância com os dados experimentais PHENIX [50].

Os resultados dos raios HBT obtidos a partir de cálculos hidrodinâmicos usando as equações de estado 1ST e QCD foram muito semelhantes e praticamente não houve diferenças entre os mesmos, como mostram as figuras 5.7–5.10. Isto indica que a EoS exerce pouca influência nos raios HBT.

As simulações dos raios HBT com diferentes valores de densidade de energia inicial, figura 5.11, indicaram uma pequena melhoria no raio $R_{\rm out}$ e na razão $R_{\rm out}/R_{\rm side}$ com o aumento da densidade energia inicial. Por outro lado, a introdução do fluxo transversal inicial nos cálculos hidrodinâmicos revelou diferenças significativas entre os resultados HBT obtidos com e sem esse fluxo. Na comparação com os dados HBT [81, 82], os resultados com $u_{_{T_0}} \neq 0$ mostraram-se significativamente melhores que aqueles com $u_{_{T_0}} = 0$, como mostram as figuras 5.7–5.10. Estes, mostram ainda a existência de uma tendência dos resultados com $u_{_{T_0}} \neq 0$ se aproximarem dos dados HBT, como mostra a razão $R_{\rm out}/R_{\rm side}$ nas figuras 5.7–5.10. A inclusão dessa CI modifica de maneira significativa o resultado das simulações HBT, demonstando assim, que a velocidade transversal pré-termalização parece ser um ingrediente importante na reprodução dos dados HBT.

Dessa forma, pensamos que os resultados aqui apresentados venham a colaborar com modelos hidrodinâmicos mais sofisticados na previsão das condições iniciais que reproduzirão corretamente a interferometria HBT. Com isto, será possível obtermos informações mais detalhadas sobre a geometria da matéria criada nas colisões de íons pesados ultrarrelativísticos.

Apêndice A

Definições, Equações e Conceitos Básicos

Neste apêndice, mostraremos algumas definições, equações e conceitos básicos, utilizados no corpo desta dissertação.

A.1 Rapidez da Partícula e Rapidez do Fluido

4-momentum

O *4-momentum* de uma partícula é definido como

$$\begin{aligned} p^{\mu} &= (p^0, p^1, p^2, p^3) \\ &= (E, p_x, p_y, p_z) = (E, \boldsymbol{p}) \end{aligned} \tag{A.1}$$

onde E é a energia e $\boldsymbol{p}$ o 3-*momentum* da partícula.

Considerando o eixo-z na direção longitudinal, podemos escrever o 3-*momentum* em termos dos *momenta* longitudinal e transversal, como

$$\boldsymbol{p} = (\boldsymbol{p}_{_T}, p_z), \qquad \boldsymbol{p}_{_T} = (p_x, p_y), \tag{A.2}$$

onde $\boldsymbol{p}_{_T}$ é o *momentum* transversal da partícula. Essa quantidade não é alterada por *boost* de Lorentz longitudinal. Outra quantidade invariante sob transformação por *boost* de Lorentz longitudinal é a massa transversal, $m_{_T}$, definida como

$$m_{_T}^2 = \boldsymbol{p}_{_T}^2 + m^2. \tag{A.3}$$

Rapidez e pseudo-rapidez de uma partícula

A rapidez y é uma quantidade adimensional definida em termos da energia e do *momentum* longitudinal, como

$$y = \frac{1}{2}\ln\frac{E+p_z}{E-p_z}. \tag{A.4}$$

Tomando a exponencial na igualdade (A.4), e usando as funções seno e cosseno hiperbólicos, podemos escrever

$$\begin{aligned} e^y + e^{-y} &= \frac{\sqrt{E+p_z}}{\sqrt{E-p_z}} + \frac{\sqrt{E-p_z}}{\sqrt{E+p_z}} = \frac{E+p_z}{\sqrt{E^2-p_z^2}} + \frac{E-p_z}{\sqrt{E^2-p_z^2}} \\ &= \frac{2E}{\sqrt{E^2-p_z^2}} = \frac{2E}{m_{_T}} \\ E &= m_{_T}\frac{e^y+e^{-y}}{2} = m_{_T}\cosh y \end{aligned} \tag{A.5a}$$

e

$$\begin{aligned} e^y - e^{-y} &= \frac{\sqrt{E+p_z}}{\sqrt{E-p_z}} - \frac{\sqrt{E-p_z}}{\sqrt{E+p_z}} = \frac{E+p_z}{\sqrt{E^2-p_z^2}} - \frac{E-p_z}{\sqrt{E^2-p_z^2}} \\ &= \frac{2p_z}{\sqrt{E^2-p_z^2}} = \frac{2p_z}{m_{_T}} \\ p_z &= m_{_T}\frac{e^y-e^{-y}}{2} = m_{_T}\sinh y. \end{aligned} \tag{A.5b}$$

Obtemos, assim, as relações entre as quantidades $E, p_z, m_{_T}$ e y, dadas por

$$E = m_{_T}\cosh y \tag{A.5c}$$

$$p_z = m_{_T}\sinh y. \tag{A.5d}$$

Para obtermos informação a partir da rapidez é preciso medirmos a energia e o *momentum* longitudinal. De maneira geral, mede-se apenas o ângulo entre a partícula detectada e o eixo longitudinal do feixe, $\cos\theta = p_z \,/\, |\boldsymbol{p}|$. Então, é conveniente definirmos uma nova variável, a pseudo-rapidez η, dada por

$$\eta = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{|\boldsymbol{p}|+p_z}{|\boldsymbol{p}|-p_z}\right) = \ln\left(\cot\frac{\theta}{2}\right) = -\ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right), \tag{A.6}$$

onde θ é o ângulo de espalhamento em relação ao eixo-z. De modo semelhante à (A.5) podemos obter as seguintes relações

$$|\boldsymbol{p}| = p_{_T}\cosh\eta \tag{A.7}$$

$$p_z = p_{_T}\sinh\eta. \tag{A.8}$$

No limite ultrarrelativístico em que $E \approx |\boldsymbol{p}|$, a rapidez coincide com a pseudo-rapidez. Note que podemos escrever $E + p_z = \sqrt{m^2 + \boldsymbol{p}^2} + p_z$ e, em seguida, expandir o termo

$$\sqrt{m^2 + \boldsymbol{p}^2} = |\boldsymbol{p}| \sqrt{1 + (m/|\boldsymbol{p}|)^2} \approx |\boldsymbol{p}| \left(1 + m^2/2\boldsymbol{p}^2 + \cdots\right) \tag{A.9}$$

para $|\boldsymbol{p}| \gg m$. Com isto, obtemos

$$\begin{aligned} E + p_z &\approx |\boldsymbol{p}| \left[(1 + p_z/|\boldsymbol{p}|) + m^2/2\boldsymbol{p}^2\right] = |\boldsymbol{p}| \left[(1 + \cos\theta) + m^2/2\boldsymbol{p}^2\right] \\ &= 2\,|\boldsymbol{p}| \left[\cos^2(\theta/2) + m^2/4\boldsymbol{p}^2\right] \end{aligned} \tag{A.10a}$$

onde usamos a relação $2\cos^2(\theta/2) = 1 + \cos\theta$. De modo análogo, podemos obter

$$E - p_z = 2\,|\boldsymbol{p}| \left[\sin^2(\theta/2) + m^2/4\boldsymbol{p}^2\right] \tag{A.10b}$$

onde $2\sin^2(\theta/2) = 1 - \cos\theta$.

Assim, para $|\boldsymbol{p}| \gg m$, podemos desprezar os termos de segunda ordem e potências mais altas em (A.10) e a partir de (A.4) obtermos

$$y \approx \eta = -\ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right). \tag{A.11}$$

Uma relação entre a rapidez y e a pseudo-rapidez η pode ser encontrada na página 28 da referência [35].

4-velocidade

Vamos denotar a 4-velocidade como, $u^\mu = (u^0, \boldsymbol{u}) = (u^0, u^1, u^2, u^3)$, com suas componentes dadas por

$$u^0 = \frac{dt}{d\tau} \tag{A.12a}$$

$$u^1 = \frac{dx}{d\tau} \tag{A.12b}$$

$$u^2 = \frac{dy}{d\tau} \tag{A.12c}$$

$$u^3 = \frac{dz}{d\tau}. \tag{A.12d}$$

A relação entre o tempo próprio, τ, invariante de Lorentz, e o tempo, t, é dada por

$$dt = \gamma\, d\tau. \tag{A.13}$$

Substituíndo (A.13) em (A.12) temos,

$$u^0 = \gamma \frac{dt}{dt} = \gamma \tag{A.14a}$$

$$u^1 = \gamma \frac{dx}{dt} = \gamma\, v_x \tag{A.14b}$$

$$u^2 = \gamma \frac{dy}{dt} = \gamma\, v_y \tag{A.14c}$$

$$u^3 = \gamma \frac{dz}{dt} = \gamma\, v_z \tag{A.14d}$$

Com isto,

$$u^\mu = (u^0, \boldsymbol{u}) = \gamma(1, \boldsymbol{v}), \tag{A.15}$$

$$\text{onde} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2}}. \tag{A.16}$$

A condição de normalização é dada por

$$u^\mu u_\mu = \gamma^2 - \gamma^2 \boldsymbol{v}^2 = 1 \tag{A.17}$$

Rapidez transversal e longitudinal do fluido

A rapidez transversal $Y_{_T}$ e a rapidez longitudinal $Y_{_L}$ do fluido, nas coordenadas $txyz$, são dadas, respectivamente, por

$$Y_{_T} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+v_{_T}}{1-v_{_T}} \tag{A.18a}$$

$$Y_{_L} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+v_z}{1-v_z}, \tag{A.18b}$$

onde $v_{_T}$ é a velocidade transversal dada por $v_{_T} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

Tomando a exponencial na igualdade (A.18a), temos

$$e^{Y_{_T}} = \frac{\sqrt{1+v_{_T}}}{\sqrt{1-v_{_T}}} = \frac{\sqrt{1+v_{_T}}}{\sqrt{1-v_{_T}}} \frac{\sqrt{1+v_{_T}}}{\sqrt{1+v_{_T}}} = \frac{1+v_{_T}}{\sqrt{1-v_{_T}^2}}. \tag{A.19}$$

Fazendo $e^{-Y_{_T}}$ temos

$$e^{-Y_{_T}} = \frac{\sqrt{1-v_{_T}}}{\sqrt{1+v_{_T}}} = \frac{\sqrt{1-v_{_T}}}{\sqrt{1+v_{_T}}} \frac{\sqrt{1-v_{_T}}}{\sqrt{1-v_{_T}}} = \frac{1-v_{_T}}{\sqrt{1-v_{_T}^2}}. \tag{A.20}$$

Somando (A.19) e (A.20), obtemos

$$e^{Y_{_T}} + e^{-Y_{_T}} = \frac{2}{\sqrt{1-v_{_T}^2}}$$

$$\frac{e^{Y_{_T}} + e^{-Y_{_T}}}{2} = \gamma_{_T} = \cosh Y_{_T}. \tag{A.21a}$$

Subtraindo (A.20) de (A.19), obtemos

$$e^{Y_{_T}} - e^{-Y_{_T}} = \frac{2v_{_T}}{\sqrt{1-v_{_T}^2}}$$

$$\frac{e^{Y_{_T}} - e^{-Y_{_T}}}{2} = \gamma_{_T} v_{_T} = \sinh Y_{_T}. \tag{A.21b}$$

Procedendo de modo análogo à (A.21b) obtemos,

$$\frac{e^{Y_L} + e^{-Y_L}}{2} = \gamma_L = \cosh Y_L \tag{A.21c}$$

$$\frac{e^{Y_L} - e^{-Y_L}}{2} = \gamma_L \, v_L = \sinh Y_L . \tag{A.21d}$$

A.2 Centralidade da Colisão

As classes de centralidade são definidas a partir da relação entre o parâmetro de impacto e o número de partículas que participam da colisão [83]. Na figura A.1, temos uma representação simplificada de uma colisão A+A. O parâmetro de impacto b é a medida da distância entre os eixos horizontais que passam pelos centros dos núcleos (figura A.1a), ele define uma região de sobrerposição dos núcleos. Os nucleons que se encontram dentro da região de sobreposição são ditos participantes da reação, enquanto que aqueles fora dessa região são ditos espectadores. Assim, o número de nucleons participantes N_{part} e de nucleons espectadores N_{esp} são funções do parâmetro de impacto b. Para um dado conjunto de eventos define-se as classes de centralidade a partir de frações da seção de choque total $\sigma_{tot} \approx \pi(2R_A)^2$. Os cálculos destas seções de choque são dependentes de modelos, como por exemplo, o modelo de Glauber [85]. Nesse modelo, calcula-se uma distribuição (dN/db ou dN/dN_{part}) de forma que para cada classe de centralidade pode-se obter os valores médios das respectivas quantidades calculadas: parâmetro de impacto $\langle b \rangle$ ou número de participantes $\langle N_{part} \rangle$, ver figura A.2. Em altas energias, as classes de centralidade são dadas em termos percentuais (% da centralidade) por $C = b^2/(2R_A)^2$. Então, quanto menor o percentual, mais central e a colisão e maior é a área de sobreposição dos núcleos. Com isto, as colisões nucleares são classificadas como periféricas, semi-periféricas, semi-centrais e centrais.

A.3 Transformação de Coordenadas e Derivada Covariante

Transformação de coordenadas

As leis de transformação de componentes de vetores contravariantes e covariantes são dadas, respectivamente, por

$$V^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}} \, V'^{\lambda} \quad \text{(contravariante)} \tag{A.22}$$

$$V_{\mu} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} \, V'_{\lambda} \quad \text{(covariante)} \tag{A.23}$$

As leis de transformação de componentes de tensores são dadas por

$$T^{\mu\nu\ldots}{}_{\ldots\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\gamma}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} \cdots \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\upsilon}}{\partial x^{\beta}} \cdots T'^{\gamma\sigma\ldots}{}_{\ldots\lambda\upsilon}. \tag{A.24}$$

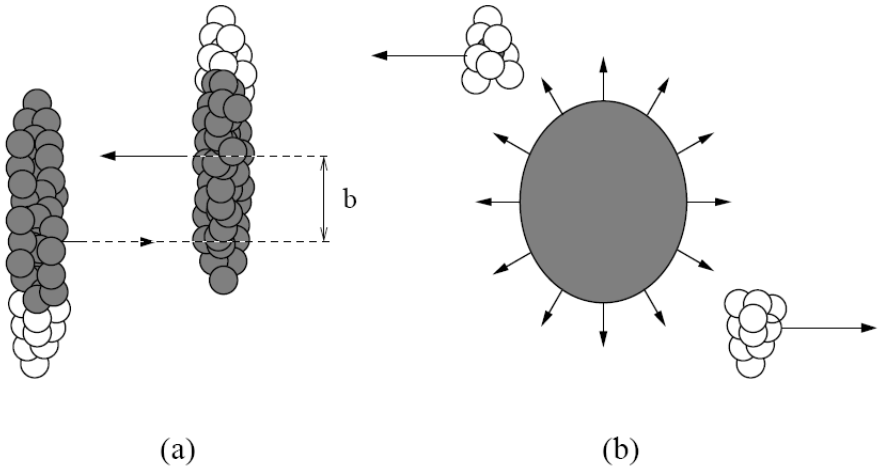

Figura A.1: (a) O parâmetro de impacto b é a distância entre os eixos horizontais que passam pelos centros dos núcleos; (b) Número de nucleons participantes N_{part} (região cinza) e de nucleons espectadores N_{esp} (região branca). Retirada da referência [84].

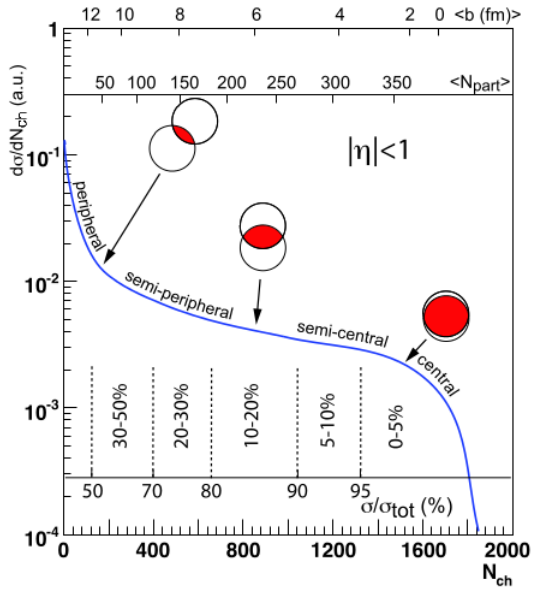

Figura A.2: Representação esquemática das classes de centralidade (estes valores são ilustrativos não são reais). Retirada da referência [85].

Derivada covariante

A derivada covariante para as componentes do 4-vetor genérico A^α, é definida da seguinte forma

$$A^\alpha{}_{;\beta} = \partial_\beta A^\alpha + \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} A^\gamma \tag{A.25}$$

e para as componentes do tensor genérico de segunda ordem $B^{\alpha\beta}$ é dada por

$$B^{\alpha\beta}{}_{;\gamma} = \partial_\gamma B^{\alpha\beta} + \Gamma^\alpha{}_{\sigma\gamma} B^{\alpha\sigma} + \Gamma^\beta{}_{\sigma\gamma} B^{\sigma\beta}, \tag{A.26}$$

onde $\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta}$ é o símbolo de Christoffel, definido por

$$\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\gamma\sigma} \left(\partial_\alpha g_{\sigma\beta} + \partial_\beta g_{\sigma\alpha} - \partial_\sigma g_{\alpha\beta} \right). \tag{A.27}$$

A.4 Coordenadas $txyz$ e Coordenadas $\tau\rho\varphi\kappa$

Neste trabalho, estamos considerando apenas colisões centrais tipo Au+Au. Podemos, então, supor que a matéria formada nessas colisões tenha simetria cilíndrica. Para tratar esse tipo de problema, utilizamos o modelo de Bjorken. Esse modelo obedece a uma lei de escala em que a velocidade longitudinal tem a forma $v_z = z/t$. É conveniente introduzirmos novas coordenadas: cilíndricas, ρ e φ, e hiperbólicas, τ e κ, definidas como

$$\tau = \sqrt{t^2 - z^2} \tag{A.28a}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{A.28b}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \tag{A.28c}$$

$$\kappa = \frac{1}{2} \ln \frac{t+z}{t-z} = \tanh^{-1}\left(\frac{z}{t}\right). \tag{A.28d}$$

As relações inversas são dadas por

$$t = \tau \cosh\kappa \tag{A.29a}$$

$$x = \rho \cos\varphi \tag{A.29b}$$

$$y = \rho \sin\varphi \tag{A.29c}$$

$$z = \tau \sinh\kappa. \tag{A.29d}$$

Estas relações (A.29) podem ser facilmente obtidas, procedendo de maneira análoga a (A.5).

Vamos denotar por $x'^\mu = \left(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3\right)$ o 4-vetor posição nas coordenadas $txyz$, e por $x^\mu = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)$ o 4-vetor posição nas coordenadas $\tau\rho\varphi\kappa$. O tensor métrico nas coordenadas $txyz$ é dado por

$$g'_{\mu\nu} = g'^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{A.30}$$

e nas coordenadas $\tau\rho\varphi\kappa$ é dado por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\tau^2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/\rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/\tau^2 \end{pmatrix}. \tag{A.31}$$

4-velocidade nas coordenadas $\tau\rho\varphi\kappa$

Podemos parametrizar a 4-velocidade de um elemento do fluido em termos da rapidez longitudinal (A.18a) da rapidez transversal (A.18b) e do ângulo azimutal da velocidade, ϕ, definido como

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) \tag{A.32a}$$

Assim, a 4-velocidade nas coordenadas $txyz$ é escrita como

$$\begin{aligned} u'^{\mu} &= (u'^0, u'^1, u'^2, u'^3) = (u'^t, u'^x, u'^y, u'^z) \\ &= (\cosh Y_T \cosh Y_L, \sinh Y_T \cos\phi, \sinh Y_T \sin\phi, \cosh Y_T \sinh Y_L)\,. \end{aligned} \tag{A.33}$$

Usando a transformação (A.22), podemos escrever (A.33) nas coordenadas $\tau\rho\varphi\kappa$ como

$$u^{\mu} = (u^0, u^1, u^2, u^3) = (u^{\tau}, u^{\rho}, u^{\varphi}, u^{\kappa})$$

onde

$$u^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}}\, u'^{\lambda}. \tag{A.34}$$

Vamos calcular explicitamente as componentes: u^{τ}e u^{κ}

$$u^{\tau} = \frac{\partial \tau}{\partial t}\, u^t + \frac{\partial \tau}{\partial z}\, u^z, \tag{A.35a}$$

$$u^{\kappa} = \frac{\partial \kappa}{\partial t}\, u^t + \frac{\partial \kappa}{\partial z}\, u^z. \tag{A.35b}$$

Como $\tau^2 = t^2 - z^2$, $t = \tau\cosh\kappa$ e $z = \tau\sinh\kappa$, temos

$$\begin{aligned} 2\tau\frac{\partial \tau}{\partial t} &= 2t \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} &= \cosh\kappa \end{aligned} \tag{A.36a}$$

$$\begin{aligned} 2\tau\frac{\partial \tau}{\partial z} &= -2z \\ \frac{\partial \tau}{\partial z} &= -\sinh\kappa \end{aligned} \tag{A.36b}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial t}{\partial t} &= \cosh\kappa\frac{\partial \tau}{\partial t} + \tau\frac{\partial \cosh\kappa}{\partial t} \\
1 &= \cosh^2\kappa - \tau\sinh\kappa\frac{\partial \kappa}{\partial t} \\
1-\cosh^2\kappa &= -\tau\sinh\kappa\frac{\partial \kappa}{\partial t} \\
-\sinh^2\kappa &= \\
\frac{\partial \kappa}{\partial t} &= \frac{1}{\tau}\sinh\kappa
\end{aligned} \tag{A.36c}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial z} &= \sinh\kappa\frac{\partial \tau}{\partial z} + \tau\frac{\partial \sinh\kappa}{\partial z} \\
1 &= -\sinh^2\kappa + \tau\cosh\kappa\frac{\partial \kappa}{\partial z} \\
1+\sinh^2\kappa &= \tau\cosh\kappa\frac{\partial \kappa}{\partial z} \\
\cosh^2\kappa &= \\
\frac{\partial \kappa}{\partial z} &= \frac{1}{\tau}\cosh\kappa.
\end{aligned} \tag{A.36d}$$

Substituindo (A.36) em (A.35), obtemos

$$\begin{aligned}
u^\tau &= \cosh\kappa\, u^t - \sinh\kappa\, u^z \\
&= \cosh\kappa\,\cosh Y_{_L} - \sinh\kappa\,\sinh Y_{_L} \\
&= \cosh\kappa\cosh Y_{_L} - \sinh\kappa\sinh Y_{_L} \\
&= \cosh(Y_{_L}-\kappa)
\end{aligned} \tag{A.37a}$$

e

$$\begin{aligned}
u^\kappa &= \frac{1}{\tau}\sinh\kappa\, u^t + \frac{1}{\tau}\cosh\kappa\, u^z \\
&= \frac{1}{\tau}\left[\sinh\kappa\,\cosh Y_{_L} + \cosh\kappa\,\sinh Y_{_L}\right] \\
&= \frac{1}{\tau}\sinh(Y_{_L}-\kappa).
\end{aligned} \tag{A.37b}$$

As componentes u^ρ e u^φ, ficam

$$u^\rho = \frac{\partial \rho}{\partial x}\,u^x + \frac{\partial \rho}{\partial y}\,u^y, \tag{A.38a}$$

$$u^\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,u^x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,u^y. \tag{A.38b}$$

como $\rho^2 = x^2 + y^2$, $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ e $\varphi = \arctan\dfrac{y}{x}$, temos

$$\frac{\partial\rho}{\partial x} = \cos\varphi \tag{A.39a}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial y} = \sin\varphi \tag{A.39b}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{-\sin\varphi}{\rho} \tag{A.39c}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\frac{x}{x^2} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\cos\varphi}{\rho}. \tag{A.39d}$$

Substituindo (A.39) em (A.38), temos

$$\begin{aligned} u^\rho &= u^x\cos\varphi + u^y\sin\varphi \\ &= \gamma_{_T}\, v_{_T}\cos\phi\,\cos\varphi + \gamma_{_T}\, v_{_T}\sin\phi\,\sin\varphi \\ &= \sinh Y_{_T}\cos\phi\cos\varphi + \sinh Y_{_T}\sin\phi\sin\varphi \\ &= \sinh Y_{_T}\cos(\phi-\varphi) \end{aligned} \tag{A.40a}$$

e

$$\begin{aligned} u^\varphi &= -u^x\frac{\sin\varphi}{\rho} + u^y\frac{\cos\varphi}{\rho} \\ &= -\gamma_{_T}\, v_{_T}\cos\phi\,\frac{\sin\varphi}{\rho} + \gamma_{_T}\, v_{_T}\sin\phi\frac{\cos\varphi}{\rho} \\ &= \frac{1}{\rho}\sinh Y_{_T}\sin\phi\cos\varphi - \frac{1}{\rho}\sinh Y_{_T}\cos\phi\sin\varphi \\ &= \frac{1}{\rho}\sinh Y_{_T}\sin(\phi-\varphi). \end{aligned} \tag{A.40b}$$

Juntando as componentes (A.37) e (A.40), obtemos

$$\begin{aligned} u^\mu &= (u^0,u^1,u^2,u^3) = (u^\tau,u^\rho,u^\varphi,u^\kappa) \\ &= \left(\cosh(Y_{_L}-\kappa)\cosh Y_{_T}, \sinh Y_{_T}\cos(\phi-\varphi), \frac{1}{\rho}\sinh Y_{_T}\sin(\phi-\varphi), \frac{1}{\tau}\sinh(Y_{_L}-\kappa)\cosh Y_{_T}\right) \\ &= \cosh Y_{_T}\left(\cosh(Y_{_L}-\kappa), \tan Y_{_T}\cos(\phi-\varphi), \frac{1}{\rho}\tan Y_{_T}\sin(\phi-\varphi), \frac{1}{\tau}\sinh(Y_{_L}-\kappa)\right). \end{aligned} \tag{A.41}$$

4-momentum nas coordenadas $\tau\rho\varphi\kappa$

O *4-momentum* p'^μ de um elemento de fluido nas coordenadas $txyz$ é dado por

$$\begin{aligned} p'^\mu &= \left(p'^0,p'^1,p'^2,p'^3\right) = \left(p'^t,p'^x,p'^y,p'^z\right) \\ &= \left(m_{_T}\cosh y, p_{_T}\cos\theta, p_{_T}\sin\theta, m_{_T}\sinh y\right), \end{aligned} \tag{A.42}$$

onde $m_{_T}$ e y são, respectivamente, a massa transversal (A.3), e a rapidez da partícula (A.4), e θ seu o ângulo de espalhamento em relação ao eixo-z.

Usando a transformação (A.22), podemos escrever (A.42) nas coordenadas $\tau\rho\varphi\kappa$ como

$$p^{\mu}=(p^0,p^1,p^2,p^3)=(p^{\tau},p^{\rho},p^{\varphi},p^{\kappa}) \tag{A.43}$$

onde

$$p^{\mu}=\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}}\,p'^{\lambda}. \tag{A.44}$$

Procedendo de modo análogo à (A.41), obtemos

$$\begin{aligned} p^{\mu} &= \left(p^0,p^1,p^2,p^3\right)=(p^{\tau},p^{\rho},p^{\varphi},p^{\kappa}) \\ &= \left(m_{_T}\cosh\left(y-\kappa\right),p_{_T}\cos\left(\theta-\varphi\right),\frac{1}{\rho}p_{_T}\sin\left(\theta-\varphi\right),\frac{1}{\tau}m_{_T}\sinh\left(y-\kappa\right)\right). \end{aligned} \tag{A.45}$$

A.5 Símbolo de Levi-Civita

$$\epsilon'_{\mu\alpha\beta\gamma}=\begin{cases}+1 & \text{se } (\mu\alpha\beta\gamma)\text{permutação par de (0123);}\\ -1 & \text{se } (\mu\alpha\beta\gamma)\text{ permutação ímpar (0123); e}\\ 0 & \text{se dois, ou mais, índices iguais.}\end{cases}$$

Podemos escrever esse tensor nas coordenadas $\tau\rho\varphi\kappa$ usando a transformada (A.22)

$$\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}=\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\upsilon}}{\partial x^{\beta}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\gamma}}\epsilon'_{\lambda\sigma\upsilon\nu}.$$

De forma geral, nas coordenadas $\tau\rho\varphi\kappa$, temos

$$\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}=\begin{cases}+\tau\rho & \text{se } (\mu\alpha\beta\gamma)\text{permutação par de (0123);}\\ -\tau\rho & \text{se } (\mu\alpha\beta\gamma)\text{ permutação ímpar (0123); e}\\ 0 & \text{se dois, ou mais, índices iguais.}\end{cases}$$

Apêndice B

Modelo de Bjorken

O modelo (ou aproximação) de Bjorken propõe que numa colisão ultrarrelativística, a espessura longitudinal dos núcleos que colidem se aproxima de zero, quando $v \approx c$. Neste limite, o tamanho longitudinal da região de colisão também tende a zero e, assim, o sistema não tem uma escala longitudinal. Esta simetria, requer que a velocidade do fluido na direção longitudinal tenha a forma $v_z = z/t$, ou seja, que a rapidez do fluido na direção longitudinal coincida com a rapidez do espaçotempo. Isto é chamado de *fluxo de Bjorken* [5, 27, 35].

B.1 Modelo de Bjorken sem Expansão Transversal

Uma solução particular para as equações hidrodinâmicas, é obtida supondo uma velocidade longitudinal do tipo *scaling*, $v_z = z/t$. Então, podemos escrever a 4-velocidade para o fluxo de Bjorken, como

$$u^\mu = (u^t, 0, 0, u^z) = \gamma(1, 0, 0, v_z) \quad \longrightarrow \quad u^\mu = (u^\tau, 0, 0, u^\kappa) = (\cosh\kappa, 0, 0, \sinh\kappa). \tag{B.1}$$

As equações da hidrodinâmica podem ser determinadas, usando as equações de conservação de energia-*momentum* e as correntes de cargas generalizadas

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{B.2a}$$

$$\partial_\mu j_i^\mu = 0, \tag{B.2b}$$

onde j_i^μ são correntes de cargas generalizadas, definidas como

$$j_i^\mu = n_i u^\mu, \tag{B.3}$$

e, n_i é a i-ésima densidade de carga conservada, e u^μ é a 4-velocidade do fluido.

Para um fluido ideal, o tensor energia-*momentum* é dado por

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + P)u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu}P, \tag{B.4}$$

onde ε é a densidade de energia, P é a pressão, $g^{\mu\nu}$ o tensor métrico.

Para obtermos uma quantidade escalar da conservação da energia-*momentum,* vamos contrair (B.2a) com a 4-velocidade u_ν

$$u_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \tag{B.5}$$

com isto, temos

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= (\varepsilon + P)u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu}P \\ u_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} &= u_\nu \partial_\mu \Big[(\varepsilon + P)u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu}P\Big] \\ &= (\varepsilon + P)u^\mu u_\nu \partial_\mu u^\nu + (\varepsilon + P)u^\nu u_\nu \partial_\mu u^\mu + u^\mu u^\nu u_\nu \partial_\mu(\varepsilon + P) - g^{\mu\nu}u_\nu \partial_\mu P \\ &= (\varepsilon + P)\partial_\mu u^\mu + u^\mu \partial_\mu \varepsilon + u^\mu \partial_\mu P - u^\mu \partial_\mu P \\ &= (\varepsilon + P)\partial_\mu u^\mu + u^\mu \partial_\mu \varepsilon \end{aligned} \tag{B.6}$$

e, a partir de (B.5) e (B.6), obtemos

$$(\varepsilon + P)\partial_\mu u^\mu + u^\mu \partial_\mu \varepsilon = 0. \tag{B.7}$$

Usando as relações termodinâmicas

$$\varepsilon + P = Ts + \mu n \tag{B.8a}$$

$$d\varepsilon = Tds + \mu dn \tag{B.8b}$$

na equação (B.7), obtemos

$$\begin{aligned} (\varepsilon + P)\partial_\mu u^\mu + u^\mu \partial_\mu \varepsilon &= (Ts + \mu n)\partial_\mu u^\mu + u^\mu (T\partial_\mu s + \mu \partial_\mu n) \\ &= (Ts + \mu n)\partial_\mu u^\mu + u^\mu \partial_\mu (Ts + \mu n) \\ &= \partial_\mu \Big[(Ts + \mu n)u^\mu\Big] \\ 0 &= T\partial_\mu (su^\mu) + \mu \partial_\mu (nu^\mu). \end{aligned} \tag{B.9}$$

Com as equações (B.2b) e (B.3), podemos obter a partir de (B.9) uma equação para a densidade de entropia

$$\partial_\mu (su^\mu) = 0. \tag{B.10}$$

A equação (B.10) indica que a corrente de densidade de entropia é conservada.

A partir da 4-velocidade (B.1) podemos obter as seguintes relações,

$$u_\mu \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial \tau} \tag{B.11a}$$

$$\partial^\mu u_\mu = \frac{1}{\tau}, \tag{B.11b}$$

válidas para o fluxo de Bjorken, da seguinte forma

$$u_\mu \partial^\mu = \frac{\partial x_\mu}{\partial \tau}\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \frac{\partial}{\partial \tau} \tag{B.11c}$$

$$\begin{aligned}
\partial^\mu u_\mu &= \partial^0 u_0 + \partial^3 u_3 \\
&= \frac{\partial}{\partial \tau}(\cosh\kappa) + \frac{\partial}{\partial \kappa}(\sinh\kappa) \\
&= \left[\cosh\kappa\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{1}{\tau}\sinh\kappa\frac{\partial}{\partial\kappa}\right](\cosh\kappa) + \left[-\sinh\kappa\frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{1}{\tau}\cosh\kappa\frac{\partial}{\partial\kappa}\right](\sinh\kappa) \\
&= -\frac{1}{\tau}\sinh\kappa\frac{\partial}{\partial\kappa}(\cosh\kappa) + \frac{1}{\tau}\cosh\kappa\frac{\partial}{\partial\kappa}(\sinh\kappa) \\
&= -\frac{1}{\tau}\sinh^2\kappa + \frac{1}{\tau}\cosh^2\kappa \\
&= \frac{1}{\tau}\left[\cosh^2\kappa - \sinh^2\kappa\right] \\
&= \frac{1}{\tau}
\end{aligned} \tag{B.11d}$$

Com as equações (B.11), podemos obter a partir de (B.9), a solução para a entropia de um fluido ideal

$$\begin{aligned}
s\partial_\mu u^\mu + u^\mu\partial_\mu s = s\frac{1}{\tau} + \frac{\partial s}{\partial\tau} &= 0 \\
\frac{\partial s}{s} &= \frac{\partial\tau}{\tau} \quad \therefore \quad s(\tau) = s_0\frac{\tau_0}{\tau}
\end{aligned} \tag{B.12}$$

onde τ_0 é o tempo próprio inicial. Procedendo de maneira análoga com a equação (B.7) teremos

$$\begin{aligned}
(\varepsilon + P)\partial_\mu u^\mu + u^\mu\partial_\mu\varepsilon = (\varepsilon+P)\frac{1}{\tau} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau} &= 0 \\
\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau} &= -\frac{\varepsilon+P}{\tau}
\end{aligned} \tag{B.13}$$

Para um gás ideal ultrarelativistico (ver apêndice C) temos que $P = \varepsilon/3$, com isto, podemos resolver analiticamente a equação (B.13)

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau} = -\frac{\varepsilon + \varepsilon/3}{\tau} \quad \therefore \quad \varepsilon(\tau) = \varepsilon_0\left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^{\frac{4}{3}} \tag{B.14}$$

B.2 Modelo de Bjorken com Expansão Transvesal e Simetria Cilíndrica

O tensor energia-*momentum*

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + P)\,u^\mu u^\nu - P g^{\mu\nu}, \tag{B.15}$$

obedece a uma lei de conservação, definida, no espaço de Minkowski, por

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \tag{B.16}$$

Essa igualdade pode ser generalizada, substituído a derivada parcial em (B.16), pela derivada covariante (A.26), fornecendo

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0 \quad \longrightarrow \quad \partial_\mu T^{\mu\nu} + \Gamma^\mu{}_{\sigma\mu} T^{\sigma\nu} + \Gamma^\nu{}_{\sigma\mu} T^{\mu\sigma} = 0. \tag{B.17}$$

As equações (B.17), podem ser reescritas para $\nu = 0$ e $\nu = i$, onde $i = 1, 2, 3$ como

$$\begin{aligned} T^{\mu 0}{}_{;\mu} &= \partial_\mu T^{\mu 0} + \Gamma^\mu{}_{\sigma\mu} T^{\sigma 0} + \Gamma^0{}_{\sigma\mu} T^{\mu\sigma} \\ &= \partial_0 T^{00} + \partial_1 T^{10} + \partial_2 T^{20} + \partial_3 T^{30} + \left(\Gamma^0{}_{\sigma 0} + \Gamma^1{}_{\sigma 1} + \Gamma^2{}_{\sigma 2} + \Gamma^3{}_{\sigma 3}\right) T^{\sigma 0} \\ &\qquad + \Gamma^0{}_{\sigma 0} T^{0\sigma} + \Gamma^0{}_{\sigma 1} T^{1\sigma} + \Gamma^0{}_{\sigma 2} T^{2\sigma} + \Gamma^0{}_{\sigma 3} T^{3\sigma} \end{aligned} \tag{B.18a}$$

$$\begin{aligned} T^{\mu i}{}_{;\mu} &= \partial_\mu T^{\mu i} + \Gamma^\mu{}_{\sigma\mu} T^{\sigma i} + \Gamma^i{}_{\sigma\mu} T^{\mu\sigma} \\ &= \partial_0 T^{0i} + \partial_1 T^{1i} + \partial_2 T^{2i} + \partial_3 T^{3i} + \left(\Gamma^0{}_{\sigma 0} + \Gamma^1{}_{\sigma 1} + \Gamma^2{}_{\sigma 2} + \Gamma^3{}_{\sigma 3}\right) T^{\sigma i} \\ &\qquad + \Gamma^i{}_{\sigma 0} T^{0\sigma} + \Gamma^i{}_{\sigma 1} T^{1\sigma} + \Gamma^i{}_{\sigma 2} T^{2\sigma} + \Gamma^i{}_{\sigma 3} T^{3\sigma}. \end{aligned} \tag{B.18b}$$

Nas coordenadas $\tau\rho\varphi\kappa$ os únicos símbolos de Christoffel não nulos são:

$$\Gamma^0{}_{33} = \tau \tag{B.19a}$$

$$\Gamma^1{}_{22} = -\rho \tag{B.19b}$$

$$\Gamma^2{}_{12} = \Gamma^2{}_{21} = \frac{1}{\rho} \tag{B.19c}$$

$$\Gamma^3{}_{03} = \Gamma^3{}_{30} = \frac{1}{\tau} \tag{B.19d}$$

Com estas (B.19), as equações (B.18) tornam-se

$$\begin{aligned} T^{\mu 0}{}_{;\mu} &= \partial_0 T^{00} + \partial_1 T^{10} + \partial_2 T^{20} + \partial_3 T^{30} + \left(\Gamma^2{}_{\sigma 2} + \Gamma^3{}_{\sigma 3}\right) T^{\sigma 0} + \Gamma^0{}_{\sigma 3} T^{3\sigma} \\ &= \partial_0 T^{00} + \partial_1 T^{10} + \frac{1}{\rho} T^{10} + \frac{1}{\tau} T^{00} + \tau\, T^{33} \end{aligned} \tag{B.20a}$$

$$\begin{aligned} T^{\mu 1}{}_{;\mu} &= \partial_0 T^{01} + \partial_1 T^{11} + \partial_2 T^{21} + \partial_3 T^{31} + \left(\Gamma^0{}_{\sigma 0} + \Gamma^1{}_{\sigma 1} + \Gamma^2{}_{\sigma 2} + \Gamma^3{}_{\sigma 3}\right) T^{\sigma 1} \\ &\qquad + \Gamma^1{}_{\sigma 0} T^{0\sigma} + \Gamma^1{}_{\sigma 1} T^{1\sigma} + \Gamma^1{}_{\sigma 2} T^{2\sigma} + \Gamma^1{}_{\sigma 3} T^{3\sigma} \\ &= \partial_0 T^{01} + \partial_1 T^{11} + \partial_2 T^{21} + \partial_3 T^{31} + \left(\Gamma^2{}_{\sigma 2} + \Gamma^3{}_{\sigma 3}\right) T^{\sigma 1} + \Gamma^1{}_{\sigma 2} T^{2\sigma} \\ &= \partial_0 T^{01} + \partial_1 T^{11} + \partial_2 T^{21} + \partial_3 T^{31} + \frac{1}{\rho} T^{11} + \frac{1}{\tau} T^{01} - \rho\, T^{22} \end{aligned} \tag{B.20b}$$

$$\begin{aligned} T^{\mu 2}{}_{;\mu} &= \partial_0 T^{02} + \partial_1 T^{12} + \partial_2 T^{22} + \partial_3 T^{32} + \left(\Gamma^0{}_{\sigma 0} + \Gamma^1{}_{\sigma 1} + \Gamma^2{}_{\sigma 2} + \Gamma^3{}_{\sigma 3}\right) T^{\sigma 2} \\ &\quad + \Gamma^2{}_{\sigma 0} T^{0\sigma} + \Gamma^2{}_{\sigma 1} T^{1\sigma} + \Gamma^2{}_{\sigma 2} T^{2\sigma} + \Gamma^2{}_{\sigma 3} T^{3\sigma} \\ &= \partial_0 T^{02} + \partial_1 T^{12} + \partial_2 T^{22} + \partial_3 T^{32} + \left(\Gamma^2{}_{\sigma 2} + \Gamma^3{}_{\sigma 3}\right) T^{\sigma 2} + \Gamma^2{}_{\sigma 1} T^{1\sigma} + \Gamma^2{}_{\sigma 2} T^{2\sigma} \\ &= \partial_0 T^{02} + \partial_1 T^{12} + \partial_2 T^{22} + \partial_3 T^{32} + \frac{1}{\rho} T^{12} + \frac{1}{\tau} T^{02} + \frac{1}{\rho} T^{12} + \frac{1}{\rho} T^{21} \end{aligned} \tag{B.20c}$$

$$\begin{aligned} T^{\mu 3}{}_{;\mu} &= \partial_0 T^{03} + \partial_1 T^{13} + \partial_2 T^{23} + \partial_3 T^{33} + \left(\Gamma^0{}_{\sigma 0} + \Gamma^1{}_{\sigma 1} + \Gamma^2{}_{\sigma 2} + \Gamma^3{}_{\sigma 3}\right) T^{\sigma 3} \\ &\quad + \Gamma^3{}_{\sigma 0} T^{0\sigma} + \Gamma^3{}_{\sigma 1} T^{3\sigma} + \Gamma^3{}_{\sigma 2} T^{2\sigma} + \Gamma^3{}_{\sigma 3} T^{3\sigma} \\ &= \partial_0 T^{03} + \partial_1 T^{13} + \partial_2 T^{23} + \partial_3 T^{33} + \left(\Gamma^2{}_{\sigma 2} + \Gamma^3{}_{\sigma 3}\right) T^{\sigma 3} + \Gamma^3{}_{\sigma 0} T^{0\sigma} + \Gamma^3{}_{\sigma 3} T^{3\sigma} \\ &= \partial_0 T^{03} + \partial_1 T^{13} + \partial_2 T^{23} + \partial_3 T^{33} + \frac{1}{\rho} T^{13} + \frac{1}{\tau} T^{03} + \frac{1}{\tau} T^{03} + \frac{1}{\tau} T^{30}. \end{aligned} \tag{B.20d}$$

Usando aproximação de Bjorken, $Y_{_L} = \kappa$, e simetria cilíndrica, $\phi = \varphi$, a 4-velocidade pode ser escrita, (ver apêndice A.3), como

$$u^\mu = (\cosh Y_{_T}, \sinh Y_{_T}, 0, 0)\,. \tag{B.21}$$

Com as equações (A.31) e (B.21), podemos obter a partir de (B.15) as componentes do tensor energia-*momentum*

$$T^{00} = (\varepsilon + P)\, u^0 u^0 - P g^{00} = (\varepsilon + P) \cosh^2 Y_{_T} - P \tag{B.22a}$$

$$T^{11} = (\varepsilon + P)\, u^1 u^1 - P g^{11} = (\varepsilon + P) \sinh^2 Y_{_T} + P \tag{B.22b}$$

$$T^{22} = (\varepsilon + P)\, u^2 u^2 - P g^{22} = \frac{P}{\rho^2} \tag{B.22c}$$

$$T^{33} = (\varepsilon + P)\, u^3 u^3 - P g^{33} = \frac{P}{\tau^2} \tag{B.22d}$$

$$T^{01} = T^{10} = (\varepsilon + P)\, u^0 u^1 - P g^{01} = -\,(\varepsilon + P) \cosh Y_{_T} \sinh Y_{_T} \tag{B.22e}$$

As demais componentes são todas nulas. Substituindo (B.22) nas equações (B.20) temos

$$\begin{aligned} T^{\mu 0}{}_{;\mu} &= \partial_0 T^{00} + \partial_1 T^{10} + \frac{1}{\rho} T^{10} + \frac{1}{\tau} T^{00} + \tau\, T^{33} \\ &= \partial_\tau \left((\varepsilon + P) \cosh^2 Y_{_T} - P\right) - \partial_\rho \left((\varepsilon + P) \cosh Y_{_T} \sinh Y_{_T}\right) \\ &\quad - \frac{1}{\rho} \left((\varepsilon + P) \cosh Y_{_T} \sinh Y_{_T}\right) + \frac{1}{\tau} \left((\varepsilon + P) \cosh^2 Y_{_T} - P\right) + \tau\, \frac{P}{\tau^2} \end{aligned} \tag{B.23a}$$

$$\begin{aligned} T^{\mu 1}{}_{;\mu} &= \partial_0 T^{01} + \partial_1 T^{11} + \partial_2 T^{21} + \partial_3 T^{31} + \frac{1}{\rho} T^{11} + \frac{1}{\tau} T^{01} - \rho\, T^{22} \\ &= -\partial_\tau \left((\varepsilon + P) \cosh Y_{_T} \sinh Y_{_T} \right) + \partial_\rho \left((\varepsilon + P) \sinh^2 Y_{_T} + P \right) \\ &\quad + \frac{1}{\rho} \left((\varepsilon + P) \sinh^2 Y_{_T} + P \right) - \frac{1}{\tau} \left((\varepsilon + P) \cosh Y_{_T} \sinh Y_{_T} \right) - \rho \frac{P}{\rho^2} \end{aligned} \tag{B.23b}$$

$$\begin{aligned} T^{\mu 2}{}_{;\mu} &= \partial_0 T^{02} + \partial_1 T^{12} + \partial_2 T^{22} + \partial_3 T^{32} + \frac{1}{\rho} T^{12} + \frac{1}{\tau} T^{02} + \frac{1}{\rho} T^{12} + \frac{1}{\rho} T^{21} \\ &= \partial_2 T^{22} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{B.23c}$$

$$\begin{aligned} T^{\mu 3}{}_{;\mu} &= \partial_0 T^{03} + \partial_1 T^{13} + \partial_2 T^{23} + \partial_3 T^{33} + \frac{1}{\rho} T^{13} + \frac{1}{\tau} T^{03} + \frac{1}{\tau} T^{03} + \frac{1}{\tau} T^{30} \\ &= \partial_3 T^{33} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{B.23d}$$

Estas equações (B.23) podem ser escritas de uma forma mais compacta, fazendo as seguintes definições (ver apêndice A.1)

$$E \equiv T^{00} = (\varepsilon + P)\, \gamma_{_T}^2 - P \tag{B.24a}$$

$$M \equiv T^{01} = T^{10} = (\varepsilon + P)\, \gamma_{_T}^2 v_{_T} = (E + P)\, v_{_T} \tag{B.24b}$$

$$T^{11} = (\varepsilon + P)\, \gamma_{_T}^2 v_{_T}^2 + P = M v_{_T} + P. \tag{B.24c}$$

Então, com (B.24), podemos reescrever (B.23) da seguinte forma

$$\partial_\tau E + \partial_\rho \left((E + P)\, v_{_T} \right) + (E + P) \left(\frac{1}{\tau} + \frac{v_{_T}}{\rho} \right) = 0 \tag{B.25a}$$

$$\partial_\tau M + \partial_\rho \left(M v_{_T} + P \right) + M \left(\frac{1}{\tau} + \frac{v_{_T}}{\rho} \right) = 0. \tag{B.25b}$$

Estas são as equações de conservação de energia e *momentum*, obtidas a partir do modelo de Bjorken com a inclusão da expansão transversal, para o caso de simetria cilíndrica.

Note que fazendo $v_{_T} = 0$ em (B.25) ou $Y_{_T} = 0$ em (B.23) recuperamos a equação (B.13)

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} = -\frac{\varepsilon + P}{\tau}. \tag{B.26}$$

B.3 Ondas de Som no Fluido

A propagação de pequenas perturbações num fluido uniforme são chamadas de ondas de som. A densidade de energia e a pressão são dadas, respectivamente, por

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_0 + \delta\varepsilon(x) \tag{B.27a}$$

e

$$P(x) = \varepsilon_0 + \delta P(x), \tag{B.27b}$$

onde ε_0 e P_0 correspondem ao fluido uniforme e $\delta\varepsilon$ e δP correspondem às pequenas pertubação nesse meio. Segundo [36] o estudo da evolução dessas pequenas perturbações pode ser feito por meio de uma linearização nas equações de conservação de energia-*momentum* onde apenas os termos de primeira ordem em $\delta\varepsilon$, δP e $\boldsymbol{v}$ são mantidos nos cálculos.

Das equações de conservação (B.2a) e do tensor energia-*momentum* (B.4) temos

$$\begin{aligned}
\partial_\mu T^{\mu\nu} &= \partial_\mu \left[(\varepsilon + P)u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu}P\right] \\
&= \partial_\mu \left[(\varepsilon + P)u^\mu u^\nu\right] - g^{\mu\nu}\partial_\mu P \\
0 &= \partial_0 \left[(\varepsilon + P)u^0 u^\nu\right] - g^{0\nu}\partial_0 P + \partial_i \left[(\varepsilon + P)u^i u^\nu\right] - g^{i\nu}\partial_i P.
\end{aligned} \tag{B.28}$$

Como apenas os elementos da diagonal principal do tensor métrico (A.30) são diferentes de zero, as equações (B.28) para $\nu = 0$ e $\nu = j$ podem ser reescritas da seguinte forma

$$\partial_0 \left[(\varepsilon + P)u^0 u^0\right] - \partial_0 P + \partial_i \left[(\varepsilon + P)u^i u^0\right] = 0 \tag{B.29a}$$

e

$$\partial_0 \left[(\varepsilon + P)\, u^0 u^j\right] + \partial_i \left[(\varepsilon + P)u^i u^j\right] - \partial^j P = 0. \tag{B.29b}$$

Da 4-velocidade (A.15) temos que $(u^0, \boldsymbol{u}) = \gamma(1, \boldsymbol{v})$, onde $\gamma = \left(1 - \boldsymbol{v}^2\right)^{-1}$. A linearização proposta em [36] consiste em desprezar termos proporcionais à v^2, $v\delta\varepsilon$ e $v\delta P$, potências maiores destes ou produto de combinações dos mesmos. Assim, temos que $u^0 \approx 1$, e $u^k \approx v^k$. Com isto, podemos reescrever (B.29) como

$$\begin{aligned}
\partial_0 (\varepsilon + P) - \partial_0 P + \partial_i \left[(\varepsilon + P)v^i\right] &= 0 \\
\partial_0 \varepsilon + \partial_i \left[(\varepsilon + P)\, v^i\right] &= 0
\end{aligned} \tag{B.30a}$$

e

$$\begin{aligned}
\partial_0 \left[(\varepsilon + P)v^j\right] + \partial_i \left[(\varepsilon + P)v^i v^j\right] - \partial^j P &= 0 \\
\partial_0 \left[(\varepsilon + P)v^j\right] - \partial^j P &= 0
\end{aligned} \tag{B.30b}$$

Substituindo (B.27) em (B.30) obtemos

$$\partial_0 (\varepsilon_0 + \delta\varepsilon) + \partial_i \left[(\varepsilon_0 + \delta\varepsilon + P_0 + \delta P)\, v^i\right] = 0 \tag{B.31a}$$

e

$$\partial_0 \left[(\varepsilon_0 + \delta\varepsilon + P_0 + \delta P) v^j \right] - \partial^j (P_0 + \delta P) = 0. \tag{B.31b}$$

Usando a linearização nas expressões (B.31) estas se reduzem à

$$\begin{aligned} \partial_0 (\delta\varepsilon) + \partial_i \left[(\varepsilon_0 + P_0) v^i + (\delta\varepsilon + \delta P) v^i \right] &= 0 \\ \partial_0 (\delta\varepsilon) + \partial_i \left[(\varepsilon_0 + P_0) v^i \right] &= 0 \\ \partial_0 (\delta\varepsilon) + v^i \partial_i \left[(\varepsilon_0 + P_0) \right] + (\varepsilon_0 + P_0) \partial_i v^i &= 0 \\ \partial_0 (\delta\varepsilon) + (\varepsilon_0 + P_0) \partial_i v^i &= 0 \end{aligned} \tag{B.32a}$$

e

$$\begin{aligned} \partial_0 \left[(\varepsilon_0 + P_0) v^i + (\delta\varepsilon + \delta P) v^i \right] - \partial^i (P_0 + \delta P) &= 0 \\ \partial_0 \left[(\varepsilon_0 + P_0) v^i \right] - \partial^i (\delta P) &= 0 \\ (\varepsilon_0 + P_0) \partial_0 v^i + v^i \partial_0 (\varepsilon_0 + P_0) - \partial^i (\delta P) &= 0 \\ (\varepsilon_0 + P_0) \partial_0 v^i - \partial^i (\delta P) &= 0 \end{aligned} \tag{B.32b}$$

As equações, (B.32), podem ser reescritas como

$$\frac{\partial (\delta\varepsilon)}{\partial t} + (\varepsilon_0 + P_0) \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{B.33a}$$

e

$$(\varepsilon_0 + P_0) \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \nabla (\delta P) = 0. \tag{B.33b}$$

A equação (B.33a) representa a conservação de energia na linearização. A equação (B.33b) equivale à 2ª Lei de Newton [36].

A velocidade do som c_s é definida [27, 36] como

$$c_s = \left(\frac{\partial P}{\partial \varepsilon} \right)^{1/2}. \tag{B.34}$$

Assim, temos que

$$\delta P = c_s^2 \, \delta\varepsilon. \tag{B.35}$$

Usando (B.35), podemos reescrever (B.33b) da seguinte forma

$$(\varepsilon_0 + P_0) \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + c_s^2 \nabla(\delta\varepsilon) = 0. \tag{B.36}$$

Isolando a velocidade $\boldsymbol{v}$ em (B.36)

$$\boldsymbol{v} = -c_s^2 \int \frac{\nabla(\delta\varepsilon)}{(\varepsilon_0 + P_0)} dt \tag{B.37}$$

e substituindo em (B.33a), obtemos

$$\frac{\partial\,(\delta\varepsilon)}{\partial t} - c_s^2\,\nabla\cdot\int\nabla(\delta\varepsilon)\,dt = 0. \tag{B.38}$$

Por fim, derivando a igualdade (B.38) em relação ao tempo, obtemos a expressão

$$\frac{\partial^2(\delta\varepsilon)}{\partial t^2} - c_s^2\,\nabla^2(\delta\varepsilon) = 0, \tag{B.39}$$

que é a equação de uma onda para uma perturbação $\delta\varepsilon$ que se propaga no fluido com uma velocidade c_s.

Apêndice C

Gás Ideal de Bósons Ultrarrelativístico

A relação entre a energia e *momentum* de uma partícula é dada por

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}, \tag{C.1}$$

quando $pc \gg mc^2$, a partícula é considerada ultrarrelativistica e obtemos a relação

$$E \approx c\,|\boldsymbol{p}|\,. \tag{C.2}$$

A função de partição macrocanônica (distribuição Bose-Einstein) é dada por

$$\ln \mathcal{Z} = -\sum_i \ln\left[1 - e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)}\right], \tag{C.3}$$

onde

$$N = \sum_i n_i = \sum_i \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} - 1} \tag{C.4}$$

e

$$E = \sum_i n_i \varepsilon_i = \sum_i \frac{\varepsilon_i}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} - 1}. \tag{C.5}$$

Para criar uma partícula com massa m é preciso um energia mc^2. Mas como o gás é ultrarrelativístico, $pc \gg mc^2$, partículas estão sendo criadas e destruídas a todo instante, logo vamos tomar $\mu = 0$. Com isto, temos

$$\ln \mathcal{Z} = -\sum_i \ln(1 - e^{-\beta\varepsilon_i}). \tag{C.6}$$

Podemos substituir a soma sobre todos os estados i por uma integral[1] em $\vec{k}$, lembrando que para um gás ideal uma partícula no estado i é tomada como uma onda plana no estado de *momentum* $\vec{k}$. Com isto, obtemos

$$\begin{aligned}\ln \mathcal{Z} &= -g\frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3k \ln\left[1-e^{-\beta\varepsilon_k}\right] \\ &= -g\frac{V}{(2\pi)^3}\int k^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, dk \ln\left[1-e^{-\beta\varepsilon_k}\right] \\ &= -g\frac{4\pi V}{(2\pi)^3}\int k^2\, dk \ln\left[1-e^{-\beta\varepsilon_k}\right]. \end{aligned} \tag{C.7}$$

Fazendo uma mudança de variável, $\varepsilon = |\boldsymbol{p}|\, c = \hbar k c \longrightarrow d\varepsilon = \hbar c\, dk$, em (C.7) obtemos

$$\begin{aligned}\ln \mathcal{Z} &= -g\frac{4\pi V}{(2\pi)^3}\int \frac{\varepsilon^3}{(\hbar c)^2}\frac{d\varepsilon}{(\hbar c)} \ln\left[1-e^{-\beta\varepsilon_k}\right] \\ &= -g\frac{4\pi V}{(2\pi)^3}\frac{1}{(\hbar c)^3}\int \varepsilon^3 d\varepsilon \ln\left[1-e^{-\beta\varepsilon_k}\right]. \end{aligned} \tag{C.8}$$

Fazendo a seguinte manipulação no integrando (C.8)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left[\varepsilon^3 \ln\left(1-e^{-\beta\varepsilon_k}\right)\right] &= 3\varepsilon^3 \ln\left(1-e^{-\beta\varepsilon_k}\right) + \frac{\varepsilon^3\beta e^{-\beta\varepsilon}}{1-e^{-\beta\varepsilon}} \\ \varepsilon^3 \ln\left(1-e^{-\beta\varepsilon_k}\right) &= \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left[\varepsilon^3 \ln\left(1-e^{-\beta\varepsilon_k}\right)\right] - \frac{1}{3}\frac{\varepsilon^3\beta e^{-\beta\varepsilon}}{1-e^{-\beta\varepsilon}}, \end{aligned} \tag{C.9}$$

obtemos

$$\begin{aligned}\ln \mathcal{Z} &= -g\frac{4\pi V}{(2\pi)^3}\frac{1}{(\hbar c)^3}\int_0^\infty \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left[\varepsilon^3 \ln\left(1-e^{-\beta\varepsilon_k}\right)\right] d\varepsilon + g\frac{4\pi V}{(2\pi)^3}\frac{1}{(\hbar c)^3}\int_0^\infty \frac{1}{3}\frac{\varepsilon^3\beta e^{-\beta\varepsilon}}{1-e^{-\beta\varepsilon}} d\varepsilon \\ &= g\frac{4\pi V}{(2\pi)^3}\frac{1}{(\hbar c)^3}\frac{\beta}{3}\int_0^\infty \frac{\varepsilon^3 e^{-\beta\varepsilon}}{1-e^{-\beta\varepsilon}} d\varepsilon. \end{aligned} \tag{C.10}$$

Usando a série geometrica,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x},\ (x<1), \tag{C.11}$$

[1] No limite termodinâmico, $\sum_i \longrightarrow g\frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3k$, podemos trocar o somatório (discreto) por uma integral (contínuo) pois no espectro, os níveis de energia estão suficientemente próximos.

para reescrever o integrando (C.10), obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^\infty d\varepsilon\, \varepsilon^3\, e^{-\beta\varepsilon}\, \frac{1}{1-e^{-\beta\varepsilon}} &= \int_0^\infty \varepsilon^3 e^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-\beta\varepsilon}\right)^n \\ &= \int_0^\infty \varepsilon^3 d\varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1)\beta\varepsilon} \\ &= \int_0^\infty \varepsilon^3 d\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\beta\varepsilon} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty \varepsilon^3 e^{-n\beta\varepsilon} d\varepsilon. \end{aligned} \tag{C.12}$$

Fazendo uma manipulação no integrando (C.12)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3}{\partial\beta^3} e^{-n\beta\varepsilon} &= -n^3\varepsilon^3 e^{-n\beta\varepsilon} \\ -\frac{1}{n^3}\frac{\partial^3}{\partial\beta^3} e^{-n\beta\varepsilon} &= \varepsilon^3 e^{-n\beta\varepsilon}, \end{aligned} \tag{C.13}$$

obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^\infty d\varepsilon\, \varepsilon^3\, e^{-\beta\varepsilon}\, \frac{1}{1-e^{-\beta\varepsilon}} &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\frac{\partial^3}{\partial\beta^3} \int_0^\infty d\varepsilon\, e^{-n\beta\varepsilon} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\frac{\partial^3}{\partial\beta^3}\, \frac{e^{-n\beta\varepsilon}}{-n\beta}\bigg|_0^\infty \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}\frac{\partial^3}{\partial\beta^3}\frac{1}{\beta} \\ &= \frac{6}{\beta^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}. \end{aligned} \tag{C.14}$$

Substituindo (C.14) em (C.10), e usando o valor $\zeta(4) = \dfrac{\pi^4}{90}$, para função zeta de Riemann, $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^x}$, obtemos

$$\begin{aligned}\ln \mathcal{Z} &= g\frac{4\pi V}{(2\pi)^3}\frac{1}{(\hbar c)^3}\frac{\beta}{3}\frac{6}{\beta^4}\frac{\pi^4}{90} \\ &= \Omega_0\, \frac{V}{\beta^3}, \end{aligned} \tag{C.15}$$

onde Ω_0 é uma constante definida como

$$\Omega_0 \equiv \frac{g}{(\hbar c)^3}\frac{\pi^2}{90}. \tag{C.16}$$

Podemos obter agora a energia E e a pressão P a partir da função de partição, como

$$E = -\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \beta} = -\Omega_0 \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{V}{\beta^3}\right) = 3\Omega_0 \frac{V}{\beta^4} \tag{C.17}$$

e

$$P = \frac{1}{\beta}\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial V} = \Omega_0 \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{V}{\beta^3}\right) = \Omega_0 \frac{1}{\beta^4}. \tag{C.18}$$

Usando (C.17) e (C.18) obtemos a relação entre a pressão P e energia E, como

$$P = \frac{1}{3}\frac{E}{V}. \tag{C.19}$$

Apêndice D

Simulação Numérica

Nas últimas décadas, a simulação numérica tem ganhado papel importante na maior parte das ciências. Cada vez mais tem se utilizado simulações para a solução dos mais diversos problemas sejam eles de natureza microscópica ou macroscópica. Isto se deve, principalmente, em razão do aumento da capacidade de processamento dos computadores aliado a evolução dos diversos métodos de simulação, dentre os quais, destacamos o Método Monte Carlo.

D.1 Método Monte Carlo

Atualmente, a denominação "Método Monte Carlo" (MMC) tornou-se uma expressão geral, associada ao uso de números aleatórios e estatística de probabilidade. Seu nome deve-se à capital do Principado de Mônaco, Monte Carlo, célebre pelo seu cassino, onde se pode encontrar um dos dispositivos mecânicos mais simples para se gerar números aleatório, a roleta. O estabelecimento de um desenvolvimento sistemático do método ocorreu durante a Segunda Guerra Mundial, época em que foi utilizado como ferramenta de pesquisa para o desenvolvimento da bomba atômica. A génese do método é marcada pela publicação, em 1949, de um trabalho de Metropolis e Ulam [87][1]. A simplicidade de seus algoritmos e eficiência na obtenção de resultados em condições extremamente difíceis justifica sua utilização em diversas áreas do conhecimento, como a física, a química, a biologia, entre outras.

Para ilustrar o método, mostramos na figura D.1, um exemplo simples, onde temos um quadrado de aresta a e um círculo inscrito no mesmo. A área do quadrado pode ser facilmente determinada como a^2. Embora a expressão para a área do círculo seja trivial, podemos determiná-la utilizando o método Monte Carlo, como um experimento numérico. Para isso, distribuímos aleatória e homogeneamente um conjunto arbitrário de N pontos dentro da área do quadrado. Em seguida, contamos quantos pontos estão dentro da círculo N_{in} e quantos estão fora N_{out}, consequentemente, temos $N{=}N_{in}{+}N_{out}$. A probabilidade de que um determinado ponto tenha caído dentro da área do círculo é, portanto, $\frac{N_{in}}{N}$. A área do círculo será

[1] Um coletânea de artigos originais, que incluem os trabalho de Metropolis e Ulam, podem ser encontrados em [87].

determinada como sendo: a probabilidade de encontrarmos pontos dentro do círculo multiplicada pela área do quadrado, ou seja, $\frac{N_{in}}{N}a^2$. Neste exemplo, em particular, temos N_{in}=75 e N_{out}=25. Com isto, a área aproximada do círculo é $\frac{3}{4}a^2$, enquanto que seu valor exato seria $\frac{\pi}{4}a^2$. A estimativa da área do círculo possui um erro em sua determinação que pode ser minimizado com o aumento do número de pontos distribuídos dentro do quadrado. Quando o número de pontos tende a infinito, a área determinada tenderá ao valor exato. Este exemplo, permite caracterizar o MMC como uma técnica simples, desde que tenhamos um mecanismo confiável para gerar números aleatórios e possamos repetir o experimento um número considerável de vezes e, assim, minimizar o erro na estimativa.

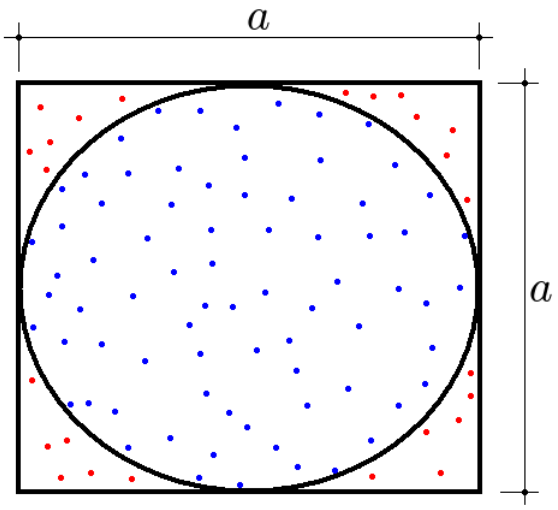

Figura D.1: Aproximação MMC. A área do círculo será determinada como sendo: a probabilidade de encontrarmos pontos dentro do círculo multiplicada pela área do quadrado.

D.1.1 Geradores de Números Pseudo-Aleatórios

Os números gerados por um computador são obtidos com recurso de geradores determinísticos com caráter recursivo – daí a perda da aleatoriedade e a designação de números pseudo-aleatórios. Estes números constituem uma sequência com a particularidade de os últimos k números gerados serem responsáveis pela geração do seguinte. Esta sequência é finita, e o seu tamanho é usualmente denominado de período ou tamanho do ciclo. Os geradores determinísticos mais comuns são os geradores congruenciais lineares. Estes geradores foram propostos por Lehmer em 1948 [88]. De acordo com este gerador cada número gerado x_{i-1} determina recursivamente o seguinte x_i por intermédio da equação

$$x_i = (ax_{i-1} + c) \bmod m, \longrightarrow i = 1, 2, 3, \ldots, 0 \leq x_i \leq m, \tag{D.1}$$

onde a, c e m são inteiros e x_0 é outro inteiro frequentemente denominado de *semente*, uma vez que, em conjunto com a, c e m definem univocamente uma sequência de números pseudo-

aleatórios. Na expressão (D.1) x_i corresponde ao resto da divisão inteira de $(ax_{i-1}+c)$ por m. Ou seja, dividindo x_i por m tem-se, para cada i (com valores de a e m fixos e convenientemente escolhidos), um número $k_i = \frac{x_i}{m}$ aproximadamente uniforme no intervalo (0,1). A semente x_0 é determinada pelo relógio interno do computador mas pode também ser pré-especificada de forma a permitir que se repita a mesma sequência de números pseudo-aleatórios, repetição absolutamente crucial em estudos comparativos. Para uma descrição mais detalhada sobre as propriedades dos geradores congruenciais lineares, bem como a implementação dos mesmos, veja as referências [89, 90].

D.2 Integração por Método Monte Carlo

O método Monte Carlo está frequentemente associado à solução de integrais. Integrais definidas de baixa dimensão, podem ser resolvidas usando métodos numéricos tradicionais: regra de Simpson, quadratura Gaussiana e outros. Porém, com integrais multdimensionais o esforço computacional cresce rapidamente com o tamanho do sistema. Isto porque, as integrais de funções de várias variáveis, mais as regiões com dimensão maior que um, não são fáceis de serem resolvidas com métodos numéricos tradicionais [88]. Salvo alguns casos, que podem ser resolvidos com simplificações, quando a integral é somente em uma variável ou o integrando contém certas simetrias, as integrais são, em geral, resolvidas por MMC. Esse método de integração, mostra verdadeiramente suas vantagens para os casos muldimensionais, com a possibilidade de reduzir a dimensão desses sistemas, através da determinação de uma média.

O cálculo de uma integral definida para uma dimensão é dado por

$$I = \int_{x_a}^{x_b} f(x)\, dx = (x_b - x_a)\, \langle f \rangle . \tag{D.2}$$

Se tivermos um conjunto de números pseudo-aleatórios, uniformemente distribuídos entre x_a e x_b, podemos obter a média como

$$\langle f \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_i) , \tag{D.3}$$

então, (D.2) pode ser aproximada por

$$I = \int_{x_a}^{x_b} f(x)\, dx \approx (x_b - x_a)\, \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_i) . \tag{D.4}$$

Se o número de pontos tende a infinito, a estimativa de Monte Carlo converge para o verdadeiro valor da integral.

$$\lim_{N\to\infty} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_i) = I. \tag{D.5}$$

D.2.1 Integrais Multidimensionais

Para o caso de sistemas multidimensionais a mesma técnica é aplicada. A única diferença está no fato de que cada coordenada deve ser amostrada dentro dos respectivos limites de integração. Assim, podemos generalizar (D.4) e escrever a integral multidimensional como

$$I = \int_{x_a}^{x_b}\int_{y_a}^{y_b}\cdots\int_{z_a}^{z_b} f(x, y, \ldots, z)\, dxdy\ldots dz \approx (x_b - x_a)(y_b - y_a)\cdots(z_b - z_a)\,\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i, y_i, \ldots, z_i), \tag{D.6}$$

Como no MMC o erro associado ao cálculo é independe da dimensão do sistema [90], este se torna muito atrativo para sistemas multidimensionais (D.6).

D.2.2 *Importance Sampling*

Em muitas aplicações físicas é comum integrarmos funções com dependência aproximadamente gaussiana. Neste caso, a rápida queda do integrando da função, exigiria da técnica de integração por MMC um número incrivelmente grande de pontos para se obter uma precisão mesmo que modesta. Isto porque as amostragens são feitas com coordenadas distribuídas uniformemente (ver exemplo da figura D.1), ou seja, apresentam a mesma probabilidade. Por sorte, existem técnicas que permitem acelerar a convergência do MMC para valores precisos com um esforço computacional significativamente menor. Uma delas é conhecida como *importance sampling,* (amostragem preferencial) [90, 91]. Essa técnica, consiste em escolher pontos que contribuam mais significativamente para o valor esperado da integral. Para isto, os pontos selecionados apresentam uma certa densidade de probabilidade $g(x)$ tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dx = 1. \tag{D.7}$$

Multiplicando e dividindo o integrando de (D.4) por $g(x)$, obtemos

$$I = \int_{x_a}^{x_b} \frac{f(x)}{g(x)} g(x) dx. \tag{D.8}$$

Fazendo uma mudança de variável, de x para y, podemos reescrever (D.8) como

$$I = \int_{x_a}^{x_b} \frac{f(x)}{g(x)} dy, \tag{D.9}$$

$$\text{onde} \quad g(x)dx = dy \rightarrow y(x) = \int g(x)dx.$$

Se usarmos $g(x)$ como a função peso ou distribuição de probabilidade para os nossos números pseudo-aleatórios, a integral pode ser aproximada como

$$I = \left\langle \frac{f}{g} \right\rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{f(x_i)}{g(x_i)}. \tag{D.10}$$

Temos ainda que, se $g(x)$ for covenientemente escolhida como uma função que se comporta como $f(x)$, o integrado (D.9) vai ser aproximadamente constante. Com isto, $g(x) \approx f(x)$, vamos gerar mais pontos onde o valor de $f(x)$ é grande, economizando, assim, recurso computacional onde o valor de $f(x)$ é pequeno.

Os parâmetros necessários para a obtenção de uma variável com distribuição uniforme, são apenas os valores extremos do intervalo considerado. Uma vez definidos, $[x_a, x_b]$, podemos usar uma técnica conhecida como transformação inversa, para obtermos as variável aleatória uniformemente distribuída, com

$$x = x_a + (x_b - x_a) R, \tag{D.11}$$

onde R é número pseudo-aleatório que precisa ser gerado.

Referências Bibliográficas

[1] E.V. Shuryak, Phys. Lett. B 78 150 (1978).

[2] R.B. Clare, D.D. Strottmann, Phys. Rep. 141, 177 (1986).

[3] H. Stöcker, W. Greiner, Phys. Rep. 137, 277 (1986).

[4] L.P. Csernai, *Introduction to relativistic heavy ion collisions*, Wiley, New York, (1994).

[5] J.P. Blaizot, J. Y. Ollitrault, Adv. Ser. Direct. High Energy Phys. 6, 393-470 (1990).

[6] L.D. Landau and S.Z. Belenkii, Uspekhi Fiz. Nauk 56, 309 (1955).

[7] R. Hanbury Brown and R. Q. Twiss, Nature, 177, 27 (1956).

[8] G. Bertsch and G. E. Brown, Phys. Rev. C40, 1830 (1989).

[9] G. Baym, Acta Phys. Polon. B29:1839-1884 (1998).

[10] R. Eisberg, R. Resnick, *Física Quântica*, Ed Campus, 28ª tiragem (1979); J. C. C. Anjos, C. L. Vieira, *Um olhar para o futuro – Desafios da física para o século 21*, Rio de Janeiro, APERJ, (2008).

[11] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, Nova York: John Wiley & Sons, (1987); W. B. Rolnick, *The Fundamental Particles and Their Interactions*, Addison-Wesley, (1994).

[12] W.C. Röntgen, Nature 53, 274–276 (1896).

[13] J.J. Thomson, Phil. Mag., 44:293 (1897).

[14] M. Planck. Annalen der Physik 4, 553–563 (1901).

[15] A.H. Compton, Phys. Rev. 21, 483 (1923); A.H. Compton, Phys. Rev. 22, 409 (1923).

[16] J. Chadwick, Nature 129, 312 (1932).

[17] J. Beringer et al, (Particle Data Group), PR D86, 010001 (2012) *and 2013 partial update for the 2014 edition.*

[18] C.D. Anderson, Phys. Rev. 43, 491 (1933).

[19] N. Borh, H.A. Kramers, J.C. Slater, Phil. Mag. s6, v47. 281 (1924).

[20] H. Yukawa, Proc. Phys. Math. Soc. Jap. 17, 48 (1935).

[21] S.H. Neddermeyer, C.D. Anderson, Phys. Rev. 51, 884 (1937).

[22] C.M.G. Lattes, H. Muirhead, G.P.S Occhialini, C.F. Powell, Nature 159, 694–697 (1947); C.M.G. Lattes, G.P.S Occhialini, C. F. Powell, Nature 160, 453–456, 486–492 (1947); C.M.G. Lattes, G.P.S. Occhialini, C.F. Powell, Proc. Phys. Soc. 61, 173–183 (1948).

[23] J. Burfering, E. Gardner, C.M.G. Lattes, Phys. Rev. 75, 382–387 (1949).

[24] M. Gell-Mann, Phys. Lett. 8, 214–215 (1964).

[25] G. Zweig, CERN preprint 8182/TH.401, (1964); G. Zweig, CERN-8419/TH.412 (1964).

[26] F. Halzen, A.D. Martin, *Quarks & Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*, John Wiley & Sons, New York, (1984).

[27] K. Yagi, T. Hatsuda, Y. Miake, *Quark-Gluon Plasma,* Cambridge Univ. Press (2005).

[28] O. W. Greenberg, Phys. Rev. Lett. 13, 598 (1964).

[29] D. J. Gross, F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 30, 1343 (1973).

[30] H. D. Politzer, Phys. Rev. Lett. 30, 1346 (1973).

[31] A. Chodos, R.L. Jaffe, K. Johnson, C.B. Thorn, V. Weisskopf, Phys. Rev. D9, 3471–3494 (1974).

[32] E. Fermi, Prog. Theor. Phys. 5, 570 (1950).

[33] E. Fermi, Phys. Rev. 81, 683 (1951).

[34] Y.Hama, T. Kodama, O.Socolowski, Braz.J. Phys. 35, 24 (2005).

[35] W. Florkowski, *Phenomenology of Ultra-Relativistic Heavy–Ion Collisions*, World Scientific (2010).

[36] J.Y. Ollitrault, nucl-th 0708.2433v2 (2008).

[37] L.D. Landau e E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon, New York, (1959).

[38] D. H. Rischke, nucl-th 9809044v1 (1998).

[39] J.D. Bjorken, Phys. Rev. D 27, 140-151 (1983).

[40] B. Alver et al, Phys. Rev. C 83, 024913 (2011).

[41] D.H. Rischke, S. Bernard and J.A. Maruhn, Nucl. Phys. A595, 346 (1995).

[42] A. Dumitru and D.H. Rischke, Phys. Rev. C59, 354 (1999); A. Dumitru *et al.*, Phys. Lett. B460, 411 (1999); S.A. Bass *et al.*, Phys. Rev. C60, 021902 (1999); B. Waldhauser, D.H. Rischke, *et al*, Z. Phys. C54, 459 (1992); D.H. Rischke, Nucl. Phys. A610, 88c (1996).

[43] P.V. Ruuskanen, Acta Phys. Polon., B18:551-589 (1987).

[44] R. Andrade, F. Grassi, Y. Hama, T. Kodama, O. Socolowski, Jr, Phys. Rev. Lett. 97 202302 (2006).

[45] O. Socolowski, Jr., F. Grassi, Y. Hama, T. Kodama, Phys. Rev. Lett. 93 182301 (2004).

[46] F. G. Gardim, F. Grassi, M. Luzum, J. Ollitrault, Phys. Rev. Lett. 109 202302 (2012).

[47] R. Andrade, F. Grassi, Y. Hama, T. Kodama, O. Socolowski, Jr., Int. J. Mod. Phys. E16, 1806 (2007); R. Andrade, F. Grassi, Y. Hama, T. Kodama e O. Socolowski, Braz. J. Phys. 37, 717 (2007).

[48] Wong, C. Y., *Introduction to High-Energy Heavy-Ion Collisions*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. (1994).

[49] S. Pratt, Phys. Rev. Lett. 102, 232301 (2009).

[50] K. Adcox *et al*, Phy Rev Letters 88, 242301 (2002); K. Adcox *et al*, Phys Rev C. 69, 024904 (2004).

[51] I.G. Bearden *et al,* Physics Letters B 523 (2001).

[52] T. Kodama, *New states of matter in hadronic interactions*, AIP Conf. Proc. 631, pp. 3-26 (2002).

[53] G.D. Yen, M.I. Gorenstein, W. Greiner, S.N. Yang, Phys. Rev. C 56, 2210-2218 (1997).

[54] M.I. Gorenstein, H. Stocker, G.D. Yen, S.N. Yang, W. Greiner, nucl-th 9711055v2 (1997).

[55] R.V. Gavai, hep-ph 0607050v1 (2006).

[56] E. Laermann and O. Philipsen, hep-ph 0303042v1 (2003).

[57] A. Brazavov et al, Phys. Rev. D 80, 014504 (2009).

[58] P. Huovinen and P. Petreczky, hep-ph 0912.2541v2 (2010).

[59] J.O. Andersen, L.E. Leganger, M. Strickland, hep-ph 1106.0514v1 (2011).

[60] P. Petreczky, hep-lat 1203.5320v1 (2012).

[61] V.V. Begun, M. Gaździcki, and M.I. Gorenstein, Phys. Rev. C 88, 024902 (2013).

[62] R. Hanbury Brown, Boffin, Adam Hilger, Bristol, pp.104-105 (1991).

[63] R. Hanbury Brown, R. C. Jenson, and M. K. Das Gupta. Nature 170 1061 (1952).

[64] R. Hanbury Brown and R. Q. Twiss, Nature 178 1046 (1956).

[65] G.I. Kopylov and M.I. Podgoretsky, Sov. J. Nucl. Phys. 15 219-223 (1972).

[66] G. I. Kopylov, Phys. Lett. B50 472-474 (1974).

[67] G. Goldhaber, S. Goldhaber, W.-Y. Lee, and A. Pais, Phys. Rev. 120 300 (1960).

[68] L.D. Landau e E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Pergamon, New York, (1975).

[69] U. A. Wiedemann e U. Heinz, nucl-th 9901094v1 (1999).

[70] U. W. Heinz, nucl-th 9609029 (1996).

[71] M. A. Marchiolli, Rev. Bras. Ensino Fís. v. 24, n. 4 (2002).

[72] Chapman, S. and Heinz, U., hep-ph 9407405 (1994).

[73] S. Pratt, Phys. Rev. D33 1314 (1986).

[74] G. F. Bertsch, Nucl. Phys. A498 173c (1989).

[75] D. Boal, C.G. Gelbke, and B. Jennings, Rev. Mod. Phys. v. 62, n. 3, 553 (1990).

[76] C. Adler et al., Phys. Rev. Lett. 87, 082301 (2001).

[77] Yu.M. Sinyukov, Act.Phys.Polon. B 37, 3343 (2006).

[78] M. Gyulassy, Iu.A. Karpenko, A.V. Nazarenko, Yu.M. Sinyukov, Braz. J. Phys, 37, 1031 (2007).

[79] Yu. M. Sinyukov, S. V. Akkelin , Iu. A. Karpenko, 71, 9, 1650–1655 (2008); Yu.M. Sinyukov, A.V. Nazarenko, Iu.A. Karpenko, Acta Phys.Polon.B 40, 1109-1118 (2009).

[80] Iu.A. Karpenko, Yu.M. Sinyukov, Phys. Rev. C 81 054903 (2010); Iu.A. Karpenko, Yu.M. Sinyukov, nucl-th 1004.1565v2 (2011).

[81] C. Adler, Z. Ahammed, C. Allgower *et al*, Phys Rev Lett 87 082301 (2001).

[82] K. Adcox, S.S. Adler, N.N. Ajitanand *et al*, Phys Rev Lett 88 192302 (2002).

[83] C.E. Aguiar, R. Andrade, F. Grassi , Y. Hama, T. Kodama, T. Osada , O. Socolowski, Braz. J. Phys. 34, 319 (2004).

[84] C. H. Christensen, *Fluctuations in Au+Au collisions at 200 GeV*, Master's thesis, Niels Bohr Institute, University of Copenhagen, (2003).

[85] M. L. Miller, K. Reygers, S. J. Sanders, P. Steinberg, nucl-ex 0701025 (2007).

[86] M. Lisa, S. Pratt, R. Soltz, U. Wiedemann, nucl-ex 0505014 (2005).

[87] W.L. Dunn, J.K. Shultis, *Exploring Monte Carlo Methods,* Elsevier, (2011). J.B. Anderson, *Quantum Monte Carlo: Origins, Development, Applications: Origins, Development, Applications,* Departments of Physics and Chemistry Pennsylvania State University, Oxford University Press, (2007).

[88] Lehmer, D. H., *Mathematical methods in large-scale computing units. Proceedings of the 2nd Symposium on Large-Scale Digital Calculating Machinery,* Cambridge, MA, 1949, 141–146. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1951. From Knuth (1998).

[89] J.E. Gentle, *Random Number Generation and Monte Carlo Methods.* Springer-Verlag, New York, Inc. (1998).

[90] R. H. Landau, M. J. Páez, C.C. Bordeianu., *A Survey of Computational Physics*, Wiley-VCH (2007).

[91] M. H. Kalos, P. A. Whitlock., *Monte Carlo Methods*, VOL I, Basics, John Wiley & Sons, (1986).