

Tiago da Silva Gonçalves

# **Uma Introdução à Geometria Projetiva para o Ensino Fundamental**

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Agosto, 2013

Tiago da Silva Gonçalves

## **Uma Introdução à Geometria Projetiva para o Ensino Fundamental**

Dissertação submetida por Tiago da Silva Gonçalves como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Universidade Federal do Rio Grande - FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF

Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Orientador: Dr. Mario Rocha Retamoso

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

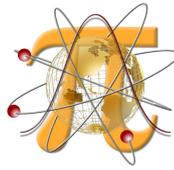
Agosto, 2013

Colaboradores



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE

<http://www.furg.br>



INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E FÍSICA

<http://www.imef.furg.br>



MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

<http://www.profmat-sbm.org.br>



SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

<http://www.sbm.org.br>



COORDENAÇÃO DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR

<http://www.capes.gov.br>

---

G635i      Gonçalves, Tiago da Silva  
              Uma Introdução à Geometria Projetiva para o Ensino  
              Fundamental / Tiago da Silva Gonçalves. – 2013.

              149 f.

              Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio  
              Grande – Mestrado Profissional em Matemática.

              Orientador: Dr. Mario Rocha Retamoso.

              1. Matemática. 2. Geometria Projetiva. 3. Desenho em  
              Perspectiva. 4. Geometria Descritiva. I. Retamoso, Mario  
              Rocha. II. Título.

CDU 51

Catálogo na fonte: Bibliotecário Clériston Ribeiro Ramos CRB10/1889

Tiago da Silva Gonçalves

## **Uma Introdução à Geometria Projetiva para o Ensino Fundamental**

Dissertação submetida por Tiago da Silva Gonçalves como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Trabalho aprovado. Rio Grande, 10 de Agosto de 2013:

---

**Dr. Mario Rocha Retamoso**  
(Orientador - FURG)

---

**Dr. Giovanni da Silva Nunes**  
(Avaliador - UFPel)

---

**Dra. Cinthya Maria Schneider  
Meneghetti**  
(Avaliadora - FURG)

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil  
Agosto, 2013

# Agradecimentos

Ao concluir este trabalho, sinto-me honrado em manifestar os meus agradecimentos:

A Deus, meu pai, pai das luzes, em quem não há mudança nem sombra de variação.

À minha mãe. Não posso ser sem que me olhes. Eu mudo a primavera para que me sigas olhando.

Aos meus queridos alunos da Turma 82 que tanto se esforçaram pelo nosso projeto.

À E.M.E.F. Coriolano Benício que acolheu meu trabalho.

À equipe docente e coordenação do PROFMAT local por tornarem o programa realidade na FURG.

Aos colegas de mestrado, viagens, almoços e angústias.

Ao Prof. André Meneghetti pelas ajudas com o  $\text{\LaTeX}$ .

Aos Professores Cinthya Maria Schneider Meneghetti e Giovanni da Silva Nunes por, gentilmente, aceitarem analisar este trabalho.

Por último, ao meu orientador e amigo, Prof. Mario Retamoso, uma só palavra gasta, porém reluzente como uma velha moeda: obrigado!

*“A Geometria Projetiva é toda a geometria.”*  
*Arthur Cayley (1821 – 1895)*

# Resumo

A Geometria Projetiva é o ramo da matemática que estuda as propriedades geométricas invariantes de uma projeção. Ela surge no século XVII da tentativa de compreender matematicamente as técnicas de desenho em perspectiva empregadas pelos artistas da Renascença. Por outro lado, a Geometria Descritiva também se utiliza de projeções para representar objetos tridimensional em um plano bidimensional. Desta forma, a Geometria Projetiva dialoga com o desenho artístico através das regras de perspectiva, e com o desenho técnico através da Geometria Descritiva. A partir das relações entre estes três campos do conhecimento, elaboramos uma proposta didática para o ensino da Geometria Projetiva a alunos do 9º ano do ensino fundamental. Este trabalho apresenta esta proposta e busca embasá-la matematicamente, relacionando-a aos principais fundamentos da Geometria Projetiva.

**Palavras-chaves:** Geometria Projetiva. Desenho em Perspectiva. Geometria Descritiva.

# Abstract

The Projective Geometry is the branch of Mathematics that studies the geometrical properties that are unchanged by projection. It arises in the 17th century with attempts to mathematically describe the techniques of Perspective Drawing employed by Renaissance artists. On the other hand, Descriptive Geometry also uses projections to represent three-dimensional objects on a two-dimensional plane. Thus, Projective Geometry interacts with the artistic design through the rules of Perspective, and with the technical drawing through Descriptive Geometry. From the relations between those three branches of knowledge, we have developed a didactic proposal for teaching Projective Geometry to last year elementary school students. This working paper presents that proposal and its mathematical foundations from Projective Geometry.

**Key-words:** Projective Geometry. Perspective Drawing. Descriptive Geometry.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Problema - área do paralelepípedo . . . . .	20
Figura 2 – Sugestões de Livros . . . . .	22
Figura 3 – A <i>Vênus de Milo</i> e a <i>Pietá</i> de Michelângelo . . . . .	25
Figura 4 – <i>O Chamado dos Apóstolos</i> e <i>A Anunciação</i> de Leonardo da Vinci. . . . .	26
Figura 5 – <i>A frente da casa de Lucrecio</i> – Mural de Pompéia. . . . .	27
Figura 6 – Duas <i>Última Ceia</i> . . . . .	28
Figura 7 – Esquema projetivo em a <i>Última Ceia</i> de Da Vinci . . . . .	28
Figura 8 – O pintor alemão A. Durer aplicando o <i>Método da Tela de Vidro</i> . . . . .	31
Figura 9 – A representação geométrica do <i>Método da Tela de Vidro</i> . . . . .	31
Figura 10 –A representação geométrica do Proposição 3.1 . . . . .	32
Figura 11 –A representação geométrica do Proposição 3.2 . . . . .	33
Figura 12 –A seção de um hexágono é um hexágono. . . . .	34
Figura 13 –O modelo da <i>Câmara Escura</i> . . . . .	35
Figura 14 –Ilustração de Kepler sobre o princípio da <i>Câmara Escura</i> . . . . .	36
Figura 15 –O olho humano e a <i>Câmara Escura</i> . . . . .	37
Figura 16 –O ângulo de visão . . . . .	37
Figura 17 –A percepção de distância pela visão . . . . .	38
Figura 18 –Imagens impossíveis . . . . .	39
Figura 19 –Retas <i>Paralelas</i> encontrando-se no ponto $O'$ . . . . .	40
Figura 20 –Uma projetividade . . . . .	44
Figura 21 –Perspectividade em relação a um ponto e Perspectividade em relação a uma reta . . . . .	45
Figura 22 –Triângulos perspectivos em relação a um ponto e a uma reta . . . . .	45
Figura 23 –Homotetia de triângulos . . . . .	46
Figura 24 –Figuras perspectivas em relação à reta $o$ . . . . .	47
Figura 25 –Dois polígonos perspectivos em relação a uma reta projetiva . . . . .	47
Figura 26 –O <i>Teorema de Desargues</i> no espaço. . . . .	49
Figura 27 –O <i>Teorema de Desargues</i> e a Perspectiva. . . . .	49
Figura 28 –O Axioma de <i>Pasch</i> . . . . .	50
Figura 29 –Dois triângulos em perspectivos em relação a uma reta . . . . .	51
Figura 30 –O triângulo $P''Q''R''$ , não coplanar aos demais . . . . .	52
Figura 31 –As retas $PP''$ , $QQ''$ e $RR''$ concorrentes em $S'$ . . . . .	52
Figura 32 –As retas $P'P'$ , $Q'Q''$ e $R'R''$ concorrentes em um ponto $S''$ . . . . .	53
Figura 33 –As retas $PP'$ e $S'S''$ são concorrentes . . . . .	53
Figura 34 –As retas $PP'$ , $QQ'$ , $RR'$ são concorrentes no ponto $O$ . . . . .	54

Figura 35	– $PQR$ e $P'Q'R'$ estão em perspectiva em relação a um ponto $O$ . . . . .	54
Figura 36	– $D, E, F$ são colineares . . . . .	55
Figura 37	– O Teorema de Desargues e a Homologia de Triângulos. . . . .	55
Figura 38	– $ABCD$ e $A'B'C'D'$ estão em perspectiva em relação ao ponto $E$ . . . . .	56
Figura 39	– Pelo Teorema de Desargues, $ADC$ e $A'D'C'$ são homólogos . . . . .	56
Figura 40	– Pelo Teorema de Desargues, $ABD$ e $A'B'D'$ são homólogos . . . . .	57
Figura 41	– O Teorema de Desargues por David Hilbert . . . . .	58
Figura 42	– O Teorema da Bi-razão de Desargues. . . . .	59
Figura 43	– Demonstração do Teorema da Bi-razão . . . . .	59
Figura 44	– Pontos e retas em $\pi : Z = 1$ . . . . .	61
Figura 45	– Retas no Plano Projetivo . . . . .	62
Figura 46	– Retas Paralelas no Plano Projetivo . . . . .	63
Figura 47	– Pontos e retas em $\pi : Z = -1$ . . . . .	65
Figura 48	– O Plano Projetivo Real com um par de pontos antipodais . . . . .	65
Figura 49	– As seções cônicas . . . . .	66
Figura 50	– O ponto no infinito da parábola $Y = X^2$ . . . . .	67
Figura 51	– Os pontos no infinito de uma hipérbole . . . . .	68
Figura 52	– Uma circunferência projeta uma elipse . . . . .	68
Figura 53	– A hipérbole $XY = 1$ encontra sua assíntota $X = 0$ . . . . .	69
Figura 54	– O Teorema de Pascal estendido para as cônicas pelo método de projeções e seções . . . . .	71
Figura 55	– Teorema de Menelaus. . . . .	71
Figura 56	– Triângulos semelhantes no Teorema de Menelaus . . . . .	72
Figura 57	– Os pontos $E, D$ e $F$ não são colineares . . . . .	73
Figura 58	– O Teorema de Pascal na Elipse . . . . .	74
Figura 59	– O Teorema de Pascal na Hipérbole . . . . .	74
Figura 60	– $CP$ é uma reta que intersecciona as retas que contém os lados de $XYZ$ . . . . .	75
Figura 61	– $DR$ é uma reta que intersecciona as retas que contém os lados de $XYZ$ . . . . .	75
Figura 62	– $AQ$ é uma reta que intersecciona as retas que contém os lados de $XYZ$ . . . . .	76
Figura 63	– O Teorema de Brianchon . . . . .	78
Figura 64	– Um parábola e sua curva dual . . . . .	79
Figura 65	– Uma elipse se sua curva dual . . . . .	79
Figura 66	– O hexágono $UVWU'V'W'$ inscrito na curva dual . . . . .	80
Figura 67	– Sistemas Projetivos . . . . .	82
Figura 68	– Um cubo em Perspectiva Cônica com um ponto de fuga . . . . .	83
Figura 69	– A Escola de Atenas de Raffaello Sanzio . . . . .	83
Figura 70	– Um cubo em Perspectiva Cônica com dois pontos de fuga . . . . .	84
Figura 71	– O Palácio do Planalto em perspectiva com dois pontos de fuga . . . . .	84
Figura 72	– Um cubo em Perspectiva Cônica com três pontos de fuga . . . . .	85

Figura 73	– <i>Ascending and Descending</i> . M. C. Escher, 1960	86
Figura 74	– Os Eixos Isométricos e um cubo em Perspectiva Cilíndrica Isométrica	87
Figura 75	– Circunferência em Perspectiva Cilíndrica Isométrica	87
Figura 76	– Planta 3D em Perspectiva Isométrica	88
Figura 77	– Perspectiva Cilíndrica Cavaleira	89
Figura 78	– Perspectiva <i>Bird's Eye</i>	91
Figura 79	– Poliedros em perspectiva por Da Vinci	92
Figura 80	– Sistema Projetivo Cilíndrico Ortogonal	93
Figura 81	– Vistas Ortográficas	95
Figura 82	– O <i>Método Mongeano</i> de representação tridimensional	95
Figura 83	– Turma 82	99
Figura 84	– Folder Publicitário do Programa de Gestão Ambiental	103
Figura 85	– Fotos da duplicação BR 116-392	104
Figura 86	– Os trilhos de trem	105
Figura 87	– Trabalhos referentes à atividade 1	107
Figura 88	– Vídeo: Leonardo Da Vinci – Um homem a frente de seu tempo	108
Figura 89	– Vídeo: Aula de perspectiva para o 8º ano	109
Figura 90	– Técnica de desenho em perspectiva	109
Figura 91	– Vídeo: How to Draw with One Point Perspective	110
Figura 92	– Sala de estar em perspectiva cônica	110
Figura 93	– Trabalho de aluno	111
Figura 94	– Trabalho de aluno	112
Figura 95	– Trabalho de aluno	112
Figura 96	– Trabalho de aluno	113
Figura 97	– Leitura Sugerida: A Perspectiva	114
Figura 98	– Leitura Sugerida: Os Artistas Italianos	115
Figura 99	– Vídeo: Cinema na caixa (Câmara Escura)	117
Figura 100	– Vídeo: <i>Checkershadow Illusion</i>	117
Figura 101	– Prova da <i>Checkershadow Illusion</i>	118
Figura 102	– <i>Waterfall</i> de Edgar Mueller	119
Figura 103	– Vídeo: <i>The Crevasse</i>	119
Figura 104	– <i>Waterfall</i> de Edgar Mueller	120
Figura 105	– Foto com ilusão de óptica	120
Figura 106	– Trabalhos de alunos	121
Figura 107	– Trabalhos de alunos	122
Figura 108	– <i>Sleeveface</i>	122
Figura 109	– Trabalho de aluno	123
Figura 110	– Trabalho de alunos	123
Figura 111	– Leitura Sugerida: Câmara Escura	124

Figura 112 –O Palácio do Planalto sob diferentes perspectivas . . . . .	125
Figura 113 –Ilustração dos dois sistemas projetivos . . . . .	126
Figura 114 –Imagens em perspectiva cônica. . . . .	127
Figura 115 –Imagens em perspectiva cilíndrica. . . . .	128
Figura 116 –O Cubo Mágico . . . . .	129
Figura 117 –Trabalhos de alunos . . . . .	129
Figura 118 –Trabalho de aluno . . . . .	130
Figura 119 –Trabalho de aluno . . . . .	132
Figura 120 –Trabalhos de alunos . . . . .	134
Figura 121 –Fotos do trabalho com GeoGebra . . . . .	134
Figura 122 –Leitura Sugerida: O Cubo de Rubik . . . . .	135
Figura 123 –Passos para a representação tridimensional de Monge . . . . .	136
Figura 124 –Passos para a construção dos planos coordenados . . . . .	137
Figura 125 –Trabalhos dos alunos . . . . .	137
Figura 126 –Vídeo: Los Elementos de Euclides . . . . .	138
Figura 127 –Vídeo: Postulados de Euclides . . . . .	139
Figura 128 –Verificação do 4° postulado . . . . .	141
Figura 129 –Esquema do 5° postulado . . . . .	142
Figura 130 –Um triângulo esférico . . . . .	142
Figura 131 –Leitura Sugerida: Os Gregos e a Geometria . . . . .	144

# Sumário

<b>Introdução</b> . . . . .	<b>16</b>
<b>Objetivos</b> . . . . .	<b>18</b>
<b>Justificativa</b> . . . . .	<b>19</b>
<b>1 Apanhado Teórico Geral</b> . . . . .	<b>24</b>
1.1 A Geometria do Renascimento . . . . .	24
1.2 A Perspectiva Matemática . . . . .	29
1.3 O Método da Tela de Vidro . . . . .	30
1.4 Fundamentos da Perspectiva Matemática . . . . .	32
1.4.0.1 A Câmara Escura . . . . .	35
1.5 A Geometria Projetiva de Desargues . . . . .	42
1.5.0.2 Triângulos Perspectivos . . . . .	44
1.5.0.3 O Teorema de Desargues . . . . .	48
1.5.0.4 O Teorema da Bi-razão . . . . .	58
1.6 O Plano Projetivo Real $\mathbb{RP}^2$ . . . . .	61
1.6.0.5 Axiomas de Incidência da Geometria Projetiva. . . . .	63
1.6.0.6 Relação entre $\mathbb{RP}^2$ e a perspectiva. . . . .	64
1.6.0.7 A Vista Projetiva das Cônicas . . . . .	66
1.6.0.8 Coordenadas Homogêneas e Pontos no Infinito. . . . .	68
1.7 O Teorema de Pascal . . . . .	70
1.8 O Princípio da Dualidade e o Teorema de Brianchon . . . . .	77
1.9 Sistemas Projetivos . . . . .	81
1.9.0.9 Perspectivas Cônicas . . . . .	82
1.9.0.10 Perspectivas Cilíndricas . . . . .	85
1.9.0.11 O Método Projetivo de Monge . . . . .	93
<b>2 Proposta Didático - Metodológica</b> . . . . .	<b>98</b>
2.1 A Escola . . . . .	98
2.2 Objetivos da Proposta Didática . . . . .	99
2.2.0.12 Objetivos Gerais . . . . .	99
2.2.0.13 Objetivos Específicos . . . . .	99
2.3 Atividade 1 . . . . .	102
2.4 Atividade 2 . . . . .	107
2.5 Atividade 3 . . . . .	116

2.6	Atividade 4	125
2.7	Atividade 5	135
2.8	Atividade 6	137
<b>3</b>	<b>Considerações Finais e Conclusão</b>	<b>145</b>
	<b>Referências</b>	<b>148</b>

# Introdução

Tudo o que nos é comunicado do mundo que nos cerca, por meio do sentido da visão, é uma imagem projetada. A Geometria Projetiva é o campo da matemática que estuda as relações que se estabelecem entre o objeto real e sua imagem projetada, sendo assim, podemos dizer que é a geometria do que vemos e, como tal, compartilha o caráter não-euclidiano das geometrias que se propõem a descrever o mundo físico.

A Geometria Projetiva surge no século XVII quando matemáticos como Girard Desargues buscam fundamentar matematicamente as técnicas de desenho em perspectiva empregadas pelos artistas do Renascimento, mas é no século XIX que, já sob uma motivação menos pragmática, ela torna-se uma ciência independente, pelas mãos de matemáticos como Poncelet e Brianchon, e assim chega aos nossos dias. Antes, porém, no século XVIII, Gaspard Monge usa seus conhecimentos em Geometria Projetiva para criar a sua Geometria Descritiva, base para todo o campo do desenho técnico.

Tendo em vista este panorama, o trabalho apresentado neste texto, busca explorar as correlações entre Geometria Projetiva, desenho em perspectiva e Geometria Descritiva e, a partir destes vínculos históricos e conceituais, estabelece duas linhas de atuação complementares. A primeira delas, e que foi a motivadora do trabalho, pretende apresentar uma proposta didático-metodológica, que privilegia o uso de recursos midiáticos como agentes de provocação de aprendizagem, para introduzir o estudo da Geometria Projetiva e seus desdobramentos no desenho em perspectiva e Geometria Descritiva, aos estudantes do 9º ano do ensino fundamental da E.M.E.F. Coriolano Benício – Vila da Quinta, Rio Grande.

A segunda etapa do trabalho, essencialmente acadêmica, destinada apenas ao autor do trabalho e seus eventuais leitores, apresenta um apanhado teórico dos principais conceitos da Geometria Projetiva, desenho em perspectiva e Geometria Descritiva e tem como objetivo fornecer a fundamentação teórica necessária à implementação da proposta didática.

Para a melhor compreensão do texto, posicionamos o resumo teórico logo após as seções que caracterizam o trabalho e antes da proposta didática. Começamos explicando porque a arte renascentista demandava um conhecimento matemático mais rebuscado e menos empirista, que levou ao desenvolvimento do Método da Tela de Vidro. Na sequência, apresentamos os principais fundamentos da Perspectiva Matemática, explicando o funcionamento básico da visão humana pela associação com o princípio da Câmara Escura de Kepler. Do trabalho de Desargues, destacamos o teorema sobre dois triângulos em perspectiva, usualmente conhecido por Teorema de Desargues e o Teorema da Bi-razão

para duas retas em perspectiva em relação a um ponto. Em seguida, formalizamos a definição de Plano Projetivo, pontos e retas projetivas e aplicamos estes conceitos à vista projetiva das cônicas. Ainda no tocante a cônicas, enunciamos o Teorema de Pascal e seu resultado dual, o Teorema de Brianchon. Concluimos o apanhado teórico definindo os sistemas projetivos Cônico e Cilíndrico, e os tipos de perspectiva resultantes de cada um. Ao fim da seção, fazemos um pequeno parêntese para tratar do Método Projetivo Mongeano.

Na seção seguinte do trabalho, caracterizamos a proposta didática e apresentamos seis atividades desenvolvidas na escola, cada uma delas contendo ilustrações dos trabalhos realizados e as considerações do autor sobre a atividade.

Concluimos o texto apresentando as considerações finais do autor sobre o presente trabalho.

Acreditamos que, uma vez reunidas, estas etapas pedagógica e acadêmica descritas neste texto, constituem um trabalho em estrita consonância com o propósito do PROFMAT de exercer um impacto substancial no ensino de matemática do país, através de um processo de formação continuada, que enfatiza o domínio aprofundado dos conteúdos matemáticos relevantes para a atuação docente, e que deve se fazer sentir imediatamente nos meios e modos do processo de ensino e aprendizagem.

# Objetivos

Este trabalho busca investigar as correlações entre Geometria Projetiva, desenho em perspectiva e Geometria Descritiva e, a partir destes vínculos históricos e conceituais, apresentar uma proposta didático-metodológica <sup>1</sup> que introduz o estudo da Geometria Projetiva aos estudantes do 9º ano do ensino fundamental, fornecendo também a fundamentação da Geometria Projetiva necessária e suficiente para a implementação da proposta didática.

---

<sup>1</sup> Para obter os objetivos desta proposta, consulte a subseção 5.2 deste trabalho.

# Justificativa

Vamos conceber a justificativa de nosso trabalho segundo três aspectos correlacionados: sua necessidade, relevância e conveniência. Começaremos pela necessidade.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para o 3° e 4° Ciclos enfatizam que o estudo de Geometria, designado naquela publicação pelo termo Espaço e Forma, é um dos componentes mais importantes do Currículo de Matemática para o Ensino Fundamental. Segundo o PCN, é por meio do estudo da geometria que o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar de forma organizada, o mundo em que vive. Esta capacidade de pensar geometricamente é requerida do indivíduo tanto em situações quotidianas, como no exercício de diversas profissões, como a engenharia, a bioquímica, a coreografia, a arquitetura, a mecânica e muitas outras (BRASIL, 1998).

Na contramão desta necessidade, nós, educadores matemáticos, nos deparamos com uma situação alarmante: alunos cada vez menos aptos a pensar geometricamente. Não temos aqui a pretensão de esclarecer o porquê deste fenômeno, mas, em nossa opinião, ele se deve, pelo menos em parte, ao fato de estes alunos serem crianças e adolescentes que não foram treinados para imaginar.

Vivemos em uma época em que a comunicação visual atingiu tal nível de desenvolvimento e excelência, que compreender uma ilustração, animação ou filme dispensa, praticamente, a habilidade de imaginar o que quer que seja. Apesar disso, a geometria, indiferente à nossa incapacidade de imaginação, continua exigindo que, a partir da vista de três faces de um paralelepípedo, possamos imaginar todas as outras.

A figura 1 exemplifica isto. Temos um problema elementar de álgebra, mas que exige a habilidade de pensar geometricamente. Em casos semelhantes a este, sempre nos chamou a atenção que boa parte dos alunos desconsiderava as faces do poliedro que não estavam explícitas na imagem, desta forma, não encontravam os resultados esperados, mesmo quando haviam entendido as propriedades operatórias ou resolutivas envolvidas no problema. Por outro lado, se um determinado problema exige que esbocem a representação de uma situação geométrica, os resultados são ainda mais desanimadores.

Portanto, quando começamos a delinear o projeto que resultou neste trabalho, a primeira intenção foi elaborar uma proposta que contribuísse para o desenvolvimento da capacidade de visualização espacial e representação geométrica dos nossos estudantes.

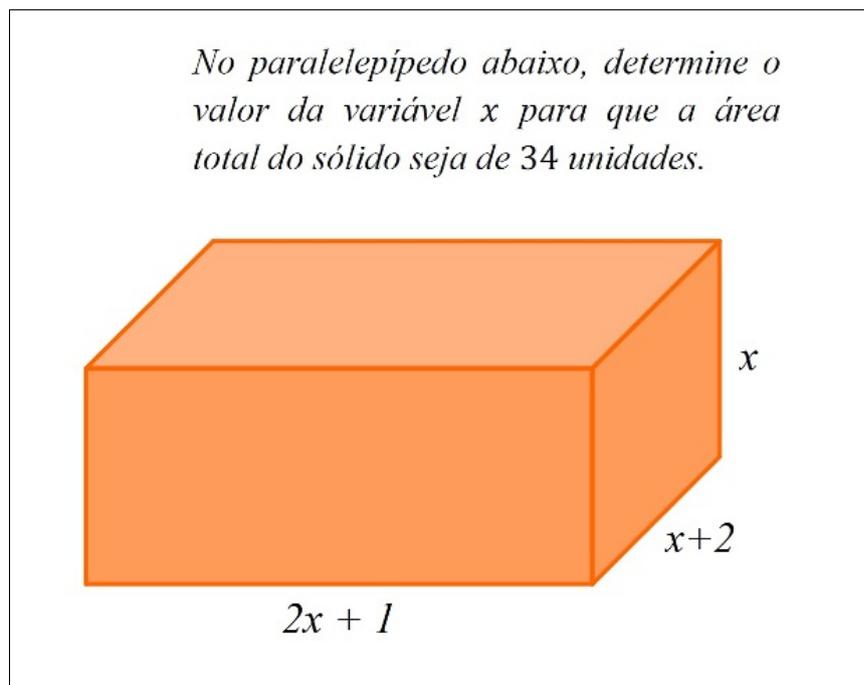


Figura 1 – Problema - área do paralelepípedo.

Por outro lado, ainda de acordo com os PCN:

[...] é fundamental que os estudos do espaço e forma sejam explorados a partir de objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, de modo que permita ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento. (BRASIL, 1998)

Assim, buscando explorar este espaço de complementaridade entre a arte e a Matemática, bem como oportunizar aos nossos estudantes a possibilidade de desenvolverem suas habilidades de percepção e representação geométrica, o tema escolhido para este trabalho foi a Geometria Projetiva e suas relações com o desenho em perspectiva e a Geometria Descritiva.

Ainda sobre o ensino de geometria, os PCN afirmam que questões relacionadas com as formas geométricas e as relações entre elas, incluindo a localização e deslocamento de objetos no espaço, vistos sob diferentes pontos de vista, são tão necessárias hoje quanto foram no passado. O documento prossegue ressaltando a importância de uma abordagem geométrica que não se limite ao estudo das medidas, mas também valorize o(s) sistema(s) de representação plana das figuras espaciais, recomendando o domínio das representações gráficas, que resultariam na habilidade de codificar e decodificar desenhos. Já quando discutem as transformações geométricas, os PCN enfatizam a importância de o aluno desenvolver a percepção do que é modificado e o que é invariante neste tipo de transformação (BRASIL, 1998).

Paradoxalmente, o documento que norteia o ensino de matemática no país, reconhece a importância de um ensino de geometria menos atrelado às questões de medidas, enfatiza a habilidade de manipulação geométrica de objetos espaciais sob diferentes pontos de vista, mas não reserva um espaço no planejamento curricular para o estudo da Geometria Projetiva.

Atentos à necessidade de corrigir este equívoco curricular, muitos educadores têm defendido que sejam incluídas noções elementares de Geometria Projetiva no ensino fundamental. Estas iniciativas já vêm dando resultados e algumas escolas e secretarias de educação, como a do Estado do Paraná, por exemplo, já recomendam a inclusão deste componente em suas diretrizes curriculares.

No entanto, este é um movimento relativamente recente, e o educador que, assim como nós, se propuser a iniciar um trabalho nestes termos, encontrará poucas publicações direcionadas ao ensino básico que contenham fundamentação matemática consistente. Faremos aqui duas ressalvas ilustradas na figura 2. A primeira é o livro *Teoria e Prática de Matemática* (TOLEDO; TOLEDO, 2009) de Maria Toledo e Mauro Toledo. O livro apresenta um conteúdo pequeno, mas muito interessante sobre a Geometria Projetiva, desenho em perspectiva e representação de vistas ortográficas. A segunda ressalva foi uma grata surpresa para nós. Há algumas semanas, recebemos da Editora Ática a coleção *Projeto Teláris* de matemática (DANTE, 2012), cujos livros são de autoria do Prof. Luiz Roberto Dante. O livro do 8º ano contém um capítulo excelente sobre desenho em perspectiva, suas relações com a arte, incluindo exemplos com telas de pintores brasileiros, o que foi uma ideia que simplesmente não nos ocorreu. E, embora tenhamos chegado mais longe com nossa proposta didática, o livro certamente nos auxiliará nas futuras edições do projeto.

De maneira geral, o recorte da Geometria Projetiva que dialoga com o ensino fundamental é justamente a fundamentação matemática das regras de desenho em perspectiva – campo que a Geometria Projetiva compartilha com a Geometria Descritiva. Neste contexto, os livros sobre Geometria Projetiva fornecem pouca ajuda, pois tratam a Geometria Projetiva como uma ciência independente e, na maioria das vezes, não fazem nenhum tipo de relação entre os resultados da Geometria Projetiva e as regras de perspectiva. As publicações sobre perspectiva são um pouco mais acessíveis, no entanto, devido à falta de preparo ou interesse matemático dos autores, podem cometer erros grosseiros. Já nas publicações sobre Geometria Descritiva, via de regra, o leitor encontrará axiomas técnicos sobre como desenhar isto ou aquilo. Infelizmente, publicações como o extraordinário livro *Mathematics for the Nonmathematician* (KLINE, 1967) de Morris Kline, são preciosidades que estão inacessíveis a boa parte dos educadores brasileiros.

Portanto, entendemos que a relevância deste trabalho encontra-se no fato de apresentar, num mesmo texto, uma proposta didático-metodológica refletida e comentada



Figura 2 – Sugestões de Livros.

pelo autor, bem como a fundamentação matemática requerida pela proposta, além de um compêndio de alguns dos principais conceitos e resultados da Geometria Projetiva. Acreditamos que o professor que quiser aventurar-se por estes caminhos e, assim como nós, for um iniciante no estudo da Geometria Projetiva, pode encontrar neste trabalho um bom ponto de partida.

Finalizando, gostaríamos de acrescentar que, apesar do ensino de geometria no nível fundamental ser historicamente composto e direcionado para a Geometria Euclidiana, e dos Parâmetros Curriculares Nacionais não preverem espaço para experimentações com outros tipos de geometria, os PCN reconhecem enfaticamente que

Uma instância importante de mudança de paradigma ocorreu quando se superou a visão de uma única geometria do real, a geometria euclidiana, para aceitação de uma pluralidade de modelos geométricos, logicamente consistentes, que podem modelar a realidade do espaço físico. (BRASIL, 1998)

Do mesmo modo, em seu livro *A escola e o Ensino de Ciências*, o professor Renato José de Oliveira afirma que

A maior contribuição filosófica do não-euclidianismo reside no fato de este quebrar o universalismo da Geometria Euclidiana. A negação que ele opera não tem o caráter de rejeição do sistema euclidiano por considerá-lo errôneo: é tão somente a recusa de um monismo. De gerais e absolutas, as verdades euclidianas passam a ter um domínio de aplicação, restringem-se, são ordenadas e ocupam um lugar específico no quadro de uma geometria ampliada. (OLIVEIRA, 2000)

Desta forma, encontrar possibilidades para, através de nossa prática docente, subverter a hegemonia da Geometria Euclidiana – sem, contudo, negar sua importância e validade dentro de um campo de aplicações – tem sido um de nossos maiores desafios enquanto educadores matemáticos. Portanto, utilizar o espaço aberto por este trabalho para tratar de uma geometria não-euclidiana é, além de pertinente pelas razões já mencionadas, oportuno e conveniente ao propósito ideológico que defendemos.

# 1 Apanhado Teórico Geral

## 1.1 A Geometria do Renascimento

A Europa do final do século XV experimentou mudanças tão profundas quanto dolorosas, provocadas pela falência gradual e irreversível do paradigma social vigente. Durante os 10 séculos anteriores e, em especial, no século XIV; as guerras, a fome, a peste negra, a inquisição, o absolutismo monárquico e o feudalismo assolaram, empobreceram e oprimiram, tanto a população, quanto a ciência e a arte ocidentais.

Não obstante a isso, na segunda metade do século XV, já com os baluartes de seu sistema social abalados pelo declínio do modo feudal, o surgimento da burguesia e a reforma protestante, o velho continente ganhava ares reformistas com a invenção da imprensa móvel por Gutemberg e o início da expansão naval.

Na Itália do fim da Idade Média, as cidades-estados surgiam como nova proposta de organização política. Dentre elas, a mais lembrada talvez seja Florença, que ficou conhecida como berço de uma nova cultura humanista que, a partir dali era difundida para o mundo, inaugurando o período histórico que hoje conhecemos por Renascimento.

Entre os autores consultados para este trabalho, é consenso afirmar que, a Geometria Projetiva que hoje conhecemos, decorre da tentativa de compreender matematicamente as técnicas de representação em perspectiva empregadas para se obter o tipo de arte que então se buscava, ao qual Coxeter, em seu livro *Projective Geometry* (COXETER, 1987), denominou *fine arts*, e que se caracterizava pela “necessidade de representar a natureza tal qual ela se apresentava, e não como achava-se que ela parecia” (ATALAY, 2009).

Esta motivação dos artistas daquela época pode ser compreendida a partir da necessidade de adequar a arte que produziam aos ideais humanistas, que buscavam enfatizar a importância das ações humanas, e não apenas representá-las de maneira factual ou religiosa. A intenção do artista renascentista era, portanto, criar obras nas quais os personagens representados refletissem emoções e estado de espírito, ressaltando a sua natureza, perfeitamente, humana.

Apesar de a arte renascentista ter-se direcionado no sentido de resgatar os valores da arte grega clássica, certamente, no processo desta releitura, foi preciso atualizar os cânones da arte grega, que primava por obras esteticamente perfeitas, mas sem conteúdo dramático.

Na figura 3, comparamos duas obras primas: a *Vênus de Milo*, escultura grega

cuja datação presumida é 100 a.C., e a *Pietà* (1498 – 1499) de Michelangelo. À esquerda, a inexpressiva beleza da deusa grega; à direita, a compungida serenidade de uma curiosamente jovem Maria, ao abraçar o filho morto.



Figura 3 – A *Vênus de Milo* e a *Pietà* de Michelângelo.  
Fonte - Imagens extraídas da internet. <sup>1</sup>

Assim, é possível afirmar que a arte renascentista se caracterizou tecnicamente pela reprodução rigorosa de traços humanos e cenários do cotidiano. Sugere-se, portanto, que a busca por tal fator de excelência, levou os artistas do renascimento a adotarem, na confecção de suas obras, técnicas que privilegiavam o uso de princípios matemáticos tais como a razão áurea, por exemplo. Através dela, é possível estabelecer proporções que tornam mais agradável e verossímil a aparência humana de uma obra.

De maneira análoga, os modos de representação artística do espaço tridimensional foram tecnicamente aprimorados, passando a empregar elaborados estudos de luminosidade e perspectiva. Em particular, o rebuscado conhecimento das técnicas de desenho em perspectiva, levou aqueles artistas a produzirem telas capazes de transmitir apuradas sensações de profundidade.

Na próxima imagem – figura 4 – podemos estabelecer um comparativo entre uma obra do período pré-renascimento e uma obra renascentista. À esquerda, temos *O Chamado dos Apóstolos*, pintura italiana do século XIV, de *Duccio di Buoninsegna* em que fica evidente a total ausência de representações de profundidade. Em contrapartida, à direita, temos *A Anunciação* de *Leonardo da Vinci*, pintura do século XV em que podemos observar a presença clara de elementos de perspectiva que produzem uma perfeita ideia de profundidade.

<sup>1</sup> Endereços eletrônicos das imagens  
<http://3.bp.blogspot.com/-SPCO3H8hUYU/US999yMJPBI/AAAAAAAAQmY/tl0UPDlhukI/s1600/Venus.jpg>  
<http://1.bp.blogspot.com/-1HUSIzTcVOI/T3nreQEL-I/AAAAAAAAAXA/R5W20XKBGA8/s1600/michelangelos-pieta-zblizenie.jpg>

<sup>2</sup> Endereços eletrônicos das imagens



Figura 4 – *O Chamado dos Apóstolos* e *A Anunciação* de Leonardo da Vinci.

Fonte - Imagens extraídas da internet. <sup>2</sup>

Antes de prosseguirmos, é preciso salientar que os renascentistas não foram os primeiros artistas a empregarem noções de perspectiva. Para Atalay nos desenhos murais da cidade romana de Pompeia que datam, no máximo, do primeiro século da era Cristã já “se vê certo grau de perspectiva”, como podemos observar na obra *A frente da casa de Lucrecio* – figura 5. Porém, segundo ele, “o emprego da perspectiva na arte antiga se baseava mais na intuição que na norma matemática” (ATALAY, 2009). Assim, o que podemos afirmar é que os artistas da renascença foram os primeiros que empregaram técnicas de perspectiva de forma sistematizada, abandonando as percepções empíricas que predominavam até então.

De acordo com Hefez, “a primeira sistematização matemática do conceito de perspectiva, foi feita em 1435 pelo italiano Leone Battista Alberti” (HEFEZ, 1985). Segundo ele, a ideia de Alberti foi a de simplificar o complexo mecanismo da visão, pintando o que só um olho vê. Este método que aqui chamaremos de método da tela de vidro é descrito de forma mais detalhada na próxima seção deste texto.

O resultado deste aprimoramento da técnica fica evidente na figura 6 que compara duas obras que representam a última ceia. A primeira traz elementos rudimentares de perspectiva, todavia o método não é bem definido, criando distorções como o fato de a mesa parecer o chão da sala. Já na segunda tela, um clássico de Da Vinci, as retas paralelas contidas no chão, nas paredes, na mesa e no teto concorrem em ponto imaginário localizado na testa de Cristo, que não só cria uma representação perfeitamente realística do cenário como ainda evidencia a figura de Cristo como ícone central da obra, como podemos ver no detalhe – figura 7.

<http://www.op-art.co.uk/wp-content/uploads/2011/11/duccio-calling-of-apostles.jpg>

[http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Leonardo\\_da\\_Vinci\\_-\\_Annunciazione\\_-\\_Google\\_Art\\_Project.jpg](http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Leonardo_da_Vinci_-_Annunciazione_-_Google_Art_Project.jpg)

<sup>3</sup> Endereço eletrônico da imagem

<http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f4/Casa-Lucretius-Fronto-Pompeii.jpg>

<sup>4</sup> Endereços eletrônicos das imagens

[http://bp2.blogger.com/\\_U2GtK2CGYEo/R922sGWLs7I/AAAAAAAAAFA/9xB\\_](http://bp2.blogger.com/_U2GtK2CGYEo/R922sGWLs7I/AAAAAAAAAFA/9xB_)



Figura 5 – A frente da casa de Lucrecio – Mural de Pompéia.

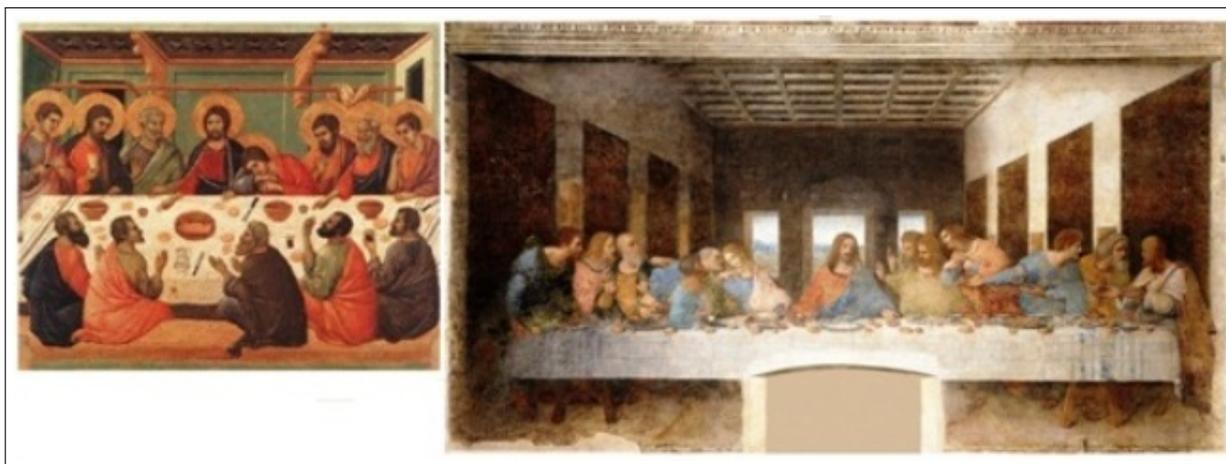
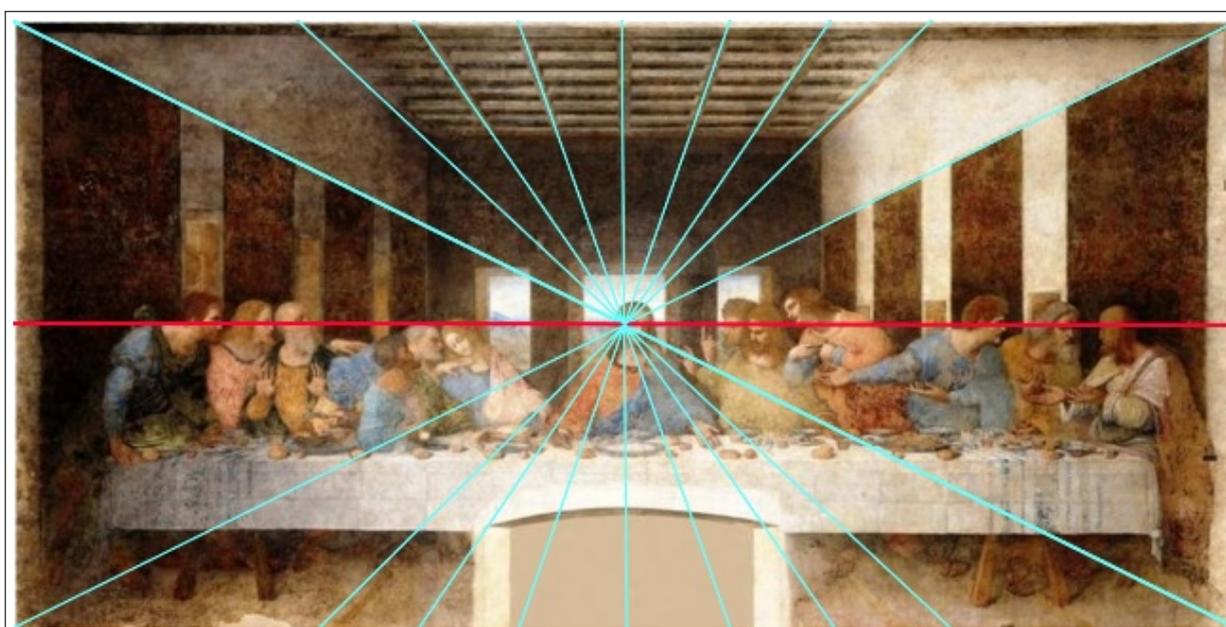
Fonte - Imagem extraída da *Wikipedia*.<sup>3</sup>

Dentre estes artistas que propunham uma arte dialogada com a matemática, podemos apontar como maior expoente o italiano Leonardo Da Vinci (1452 – 1519) autor de obras célebres como *A Última Ceia* e *A MonaLisa*. De acordo com o professor turco-americano Bulent Atalay que dedica seu livro *A Matemática e a MonaLisa* a estudar, nas palavras do autor, a confluência da arte com a ciência, Leonardo teria sido um dos maiores motores do desenvolvimento da teoria da perspectiva, pois não limitava-se a aplicar regras conhecidas, também as descobria e incentivava outros artistas a fazerem o mesmo, chegando a dominar de forma irrepreensível a técnica da perspectiva centralizada (ATALAY, 2009).

TZubkBI/s1600/DuccioLastSupper.jpg

[http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/4b/%C3%9Altima\\_Cena\\_-\\_Da\\_Vinci\\_5.jpg](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/4b/%C3%9Altima_Cena_-_Da_Vinci_5.jpg)

<sup>5</sup> Mesmo endereço eletrônico da nota anterior.

Figura 6 – Duas *Última Ceia*Fonte - Imagens extraídas da internet. <sup>4</sup>Figura 7 – Esquema projetivo em a *Última Ceia* de Da VinciFonte - Imagem original extraída da *Wikipedia*. <sup>5</sup>

Ainda segundo Atalay, “a cronologia do desenvolvimento da Geometria Projetiva coincide de tal modo com a do desenvolvimento das regras da perspectiva na arte que isso faz pensar numa interação completa e constante entre arte e ciência” (ATALAY, 2009), no caso, a matemática. Chegamos, portanto, ao ponto em que podemos conceber a definição dada por muitos autores – sobretudo os não-matemáticos como Bulent Atalay – à Geometria Projetiva que seria o ramo da matemática que fornece o embasamento teórico para as regras de perspectiva, também comumente descrita como “a geometria do que vemos”. No decorrer deste trabalho, apresentaremos definições mais satisfatórias de um ponto de vista matemático, mas, por ora, esta nos é suficiente.

Passaremos, então, a algumas considerações acerca da perspectiva e seus elementos.

## 1.2 A Perspectiva Matemática

Inicialmente, gostaríamos de registrar que, na bibliografia consultada para este estudo e, em maior grau, em publicações menos ortodoxas disponíveis on line, os termos perspectiva e Geometria Projetiva ocorrem tão fortemente associados que, muitas vezes, foi difícil delimitar e diferenciar estes dois conceitos. Mesmo em trabalhos bastante relevantes como o livro do professor português Luis Manoel Leitão Canotilho chamado *Perspectiva Pictórica*, é possível encontrar tal associação de termos. Segundo ele, “a perspectiva, utilizada de início apenas pelos artistas, principalmente os renascentistas, transformar-se-ia em técnica e posteriormente em ciência. Daí que hoje em dia, é de uma forma comum designada de geometria projectiva” (CANOTILHO, 2005). Mais adiante, na mesma página, Canotilho atualiza sua nomenclatura afirmando que é mais correto designar a geometria projetiva como geometria descritiva. Retomaremos esta última questão na seção específica sobre geometria descritiva; por ora, nos deteremos na dualidade Perspectiva/Geometria Projetiva.

É possível que para o público alvo de *Perspectiva Pictórica*, obra que, como o próprio nome sugere, são pessoas interessadas em arte, seja indiferente o emprego dos termos Geometria Projetiva e perspectiva como sinônimos; contudo, acreditamos que existem diferenças que, sutis ou não, precisam ser observadas em prol do rigor matemático. Portanto, antes de prosseguirmos com as definições formais, consideramos pertinente compartilhar com eventuais leitores interessados no tema a nossa percepção sobre o assunto.

Quem nos fornece uma ideia razoável da diferença entre estes conceitos é o próprio Atalay quando afirma que “a cronologia do desenvolvimento da Geometria Projetiva coincide [...] com a do desenvolvimento das regras da perspectiva na arte” (ATALAY, 2009). A partir daí, podemos inferir claramente que o Atalay faz uma diferenciação, e mais do que isso, associa perspectiva à arte. Neste caso o termo perspectiva é usado para referir-se a um modo específico de representação gráfica que procura recriar no espaço bidimensional (tela) as percepções da visão humana sobre o espaço tridimensional (cena) e, para isso, evoca resultados da Geometria Projetiva.

Por outro lado, em seu livro *Mathematics for the Nonmathematician* (KLINE, 1967) o professor Morris Kline, usa o termo perspectiva matemática para referir-se à fundamentação matemática – via Geometria Projetiva – de uma situação problema originada na perspectiva. Neste trabalho empregaremos esta referência conceitual como critério de desambiguação.

Dito isto, passaremos agora ao estudo de algumas ideias que julgamos fundamentais para a compreensão da relação entre perspectiva e Geometria Projetiva, e a primeira delas é o método renascentista de desenho em perspectiva.

### 1.3 O Método da Tela de Vidro

Já falamos muito sobre o quanto os artistas da renascença contribuíram para o desenvolvimento das técnicas de perspectiva e o quanto este desenvolvimento afetou os modos de produção da arte, bem como as associações entre arte e matemática. Mas qual seria exatamente o método empregado por estes artistas? No livro *Mathematics for the Nonmathematician* (KLINE, 1967), Kline nos descreve este método que será resumido a seguir.

Suponhamos que uma pessoa observe uma cena qualquer de uma posição fixa. A cena é única, mas cada olho do observador a capta sob um ponto de vista diferente. Os artistas da renascença decidiram se concentrar naquilo que apenas um olho enxerga e compensar as possíveis deficiências com luz e sombra e uma técnica que utilizava a diminuição gradual da intensidade das cores conforme a distância.

Imaginemos, agora, que sejam traçadas linhas (chamadas linhas de projeção) partindo do olho até alcançar vários pontos nos objetos da cena. Este conjunto de linhas é denominado **projeção**. Se colocarmos uma tela de vidro (vidraça) entre o olho e a cena, então, ao olharmos através do vidro, as linhas de projeção irão intersectar a tela determinando sobre esta outros pontos. A figura formada por todos estes pontos sobre tela de vidro é chamada **seção**. O fato mais importante que os artistas da renascença descobriram é que esta seção causa a mesma impressão ao olho do que a cena original (KLINE, 1967).

O método dos renascentistas consistia, portanto, em se colocarem numa posição fixa, com apenas um olho aberto e observarem, através de uma tela de vidro, os objetos a serem representados, possivelmente fazendo marcações sobre a tela, e transferindo estes dados para o papel. Daí o método ser denominado de perspectiva, palavra derivada do verbo em latim cujo significado é *olhar através*.

Na figura 8, uma das imagens mais recorrentes nas bibliografias que tratam de perspectiva, o pintor alemão Albrecht Dürer (1471–1528) – citado como um dos maiores estudiosos do tema – se autorretrata ao “observar seu tema de um ponto fixo, através de uma vidraça quadriculada; enquanto faz isso, ele delinea laboriosamente a imagem numa prancheta de desenhar que está sobre a mesa e que também é quadriculada” (ATALAY, 2009).

A representação geométrica do modelo aqui discutido é apresentada na figura 9.

Temos, portanto, dois planos perpendiculares entre si. O plano horizontal chama-

<sup>6</sup> Endereço eletrônico da imagem

<http://lucyvivante.net/wp-content/uploads/2009/10/Albrecht-Durer-Draftsman-Drawing-a-Recumbent-Woman-Woodcut-1525-Graphische-Sammlung-Albertina-1024x-352.jpg>

<sup>7</sup> Sempre que omitirmos a fonte de uma imagem, trata-se de uma produção do autor.

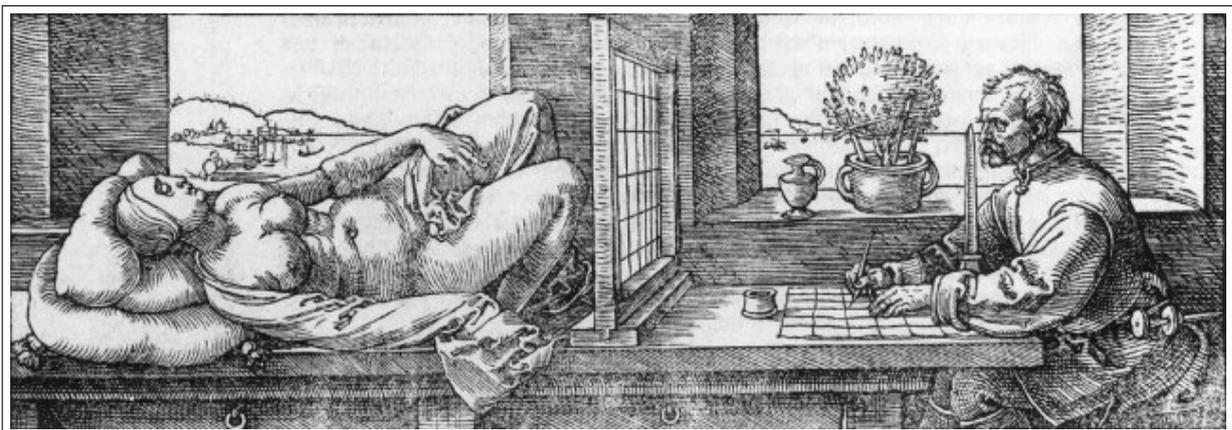


Figura 8 – O pintor alemão A. Durer aplicando o *Método da Tela de Vidro*  
 Fonte - Imagem extraída da internet. <sup>6</sup>

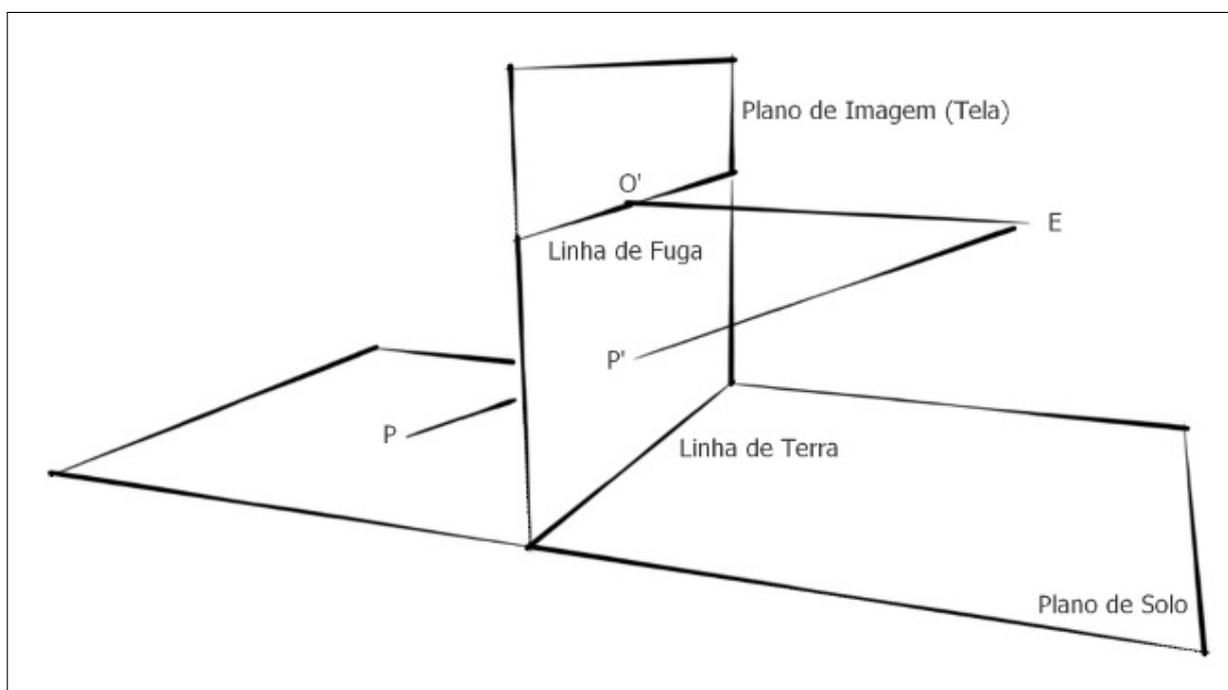


Figura 9 – A representação geométrica do *Método da Tela de Vidro*  
 Fonte - O autor. <sup>7</sup>

remos de **Plano de Solo**. O plano vertical, que corresponde à tela de vidro do método, é chamado **Plano Imagem**<sup>8</sup>. O ponto *E* corresponde ao olho (*eye*) do observador e é chamado **Centro da Perspectiva**. A **Linha de Fuga** (ou Linha do Horizonte) é determinada pela intersecção do plano imagem com um plano paralelo ao Plano de Solo que contenha o ponto *E*. A intersecção entre um plano perpendicular ao Plano de Solo passando por *E* e a linha de fuga, determina o ponto *O'* denominado **Ponto de Fuga**. Mais adiante, voltaremos a tratar deste ponto *O'*, pois ele é essencial para a perspectiva matemática e, conseqüentemente, para este trabalho.

<sup>8</sup> Outras designações possíveis para o Plano Imagem são: Plano de Projeção, Plano Vertical, Plano de Tela ou Tela.

## 1.4 Fundamentos da Perspectiva Matemática

Como já vimos, a perspectiva é uma representação realística de uma cena espacial em um plano. Neste trabalho, chamamos de **perspectiva matemática** a fundamentação teórica oferecida pela Geometria Projetiva à perspectiva. Há, portanto, alguns resultados que já podemos discutir matematicamente. Estes resultados são mencionados sistematicamente na bibliografia, porém com denominações diferentes; tanto podem ser tratados como teoremas, proposições, regras ou princípios. Aqui serão tratados como proposições, pois não nos parecem tão fortes a ponto de serem chamados de teoremas, nem tão óbvios para serem princípios. Sempre que possível, procuraremos exibir também uma prova. No entanto, precisamos salientar que estas proposições são válidas somente se as considerarmos a partir do processo de visão humana e, como veremos, algumas provas empregam este fato em sua argumentação.

**Proposição 1.4.1.** *A imagem de uma reta é sempre uma reta.*

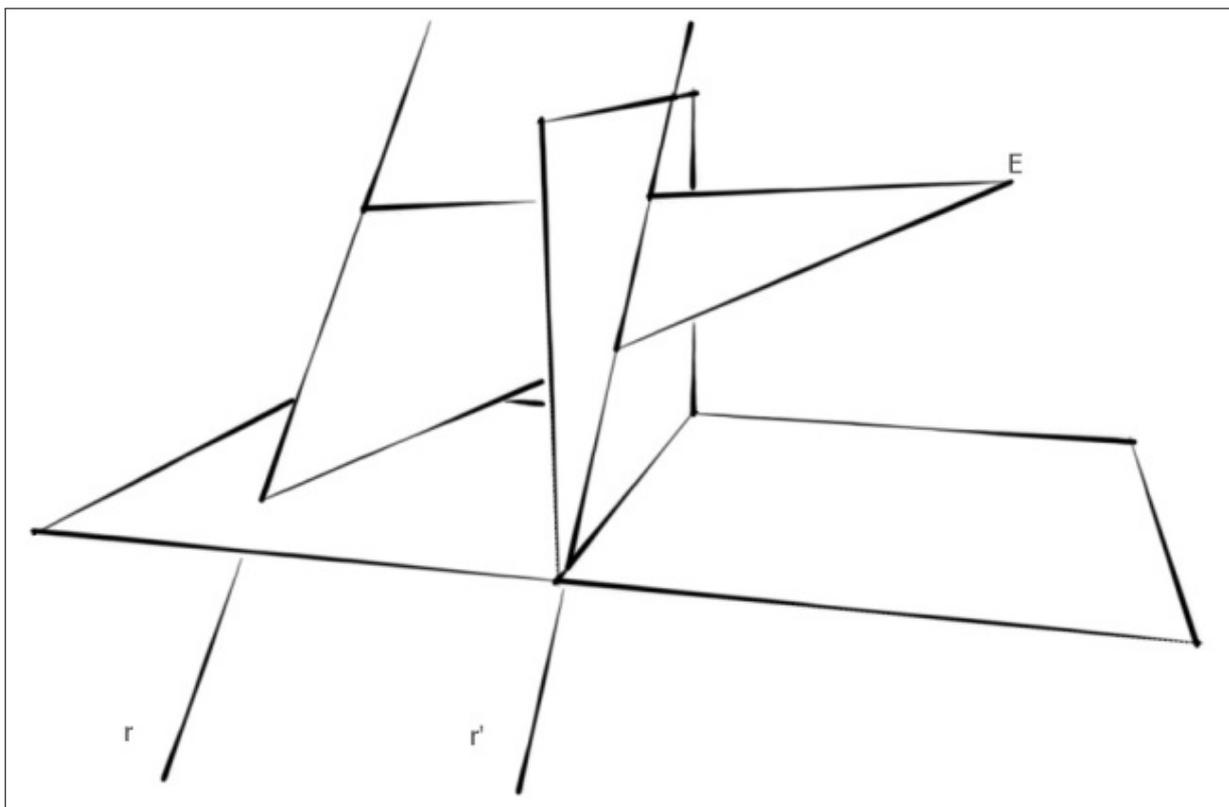


Figura 10 – A representação geométrica do Proposição 3.1

*Demonstração.* Seja  $r$  uma reta qualquer. A reta  $r$  e o ponto  $E$  determinam um plano que intersecta o plano vertical em uma reta  $r'$  que é a imagem de  $r$  por  $E$ .  $\square$

Alguns autores consideram ainda o caso particular em que a reta mencionada contenha o segmento  $O'E$ . Neste caso, a imagem seria o próprio ponto de fuga principal  $O'$ .

Uma decorrência direta desta proposição é que a imagem de um ponto será sempre um ponto. Consideramos aqui um ponto  $P$  como a intersecção de duas retas euclidianas. Como a imagem destas retas sobre a tela ainda serão retas, sua intersecção ocorrerá ponto  $P'$ , imagem de  $P$ .

**Proposição 1.4.2.** *A imagem de uma de reta horizontal paralela ao plano imagem é horizontal.*

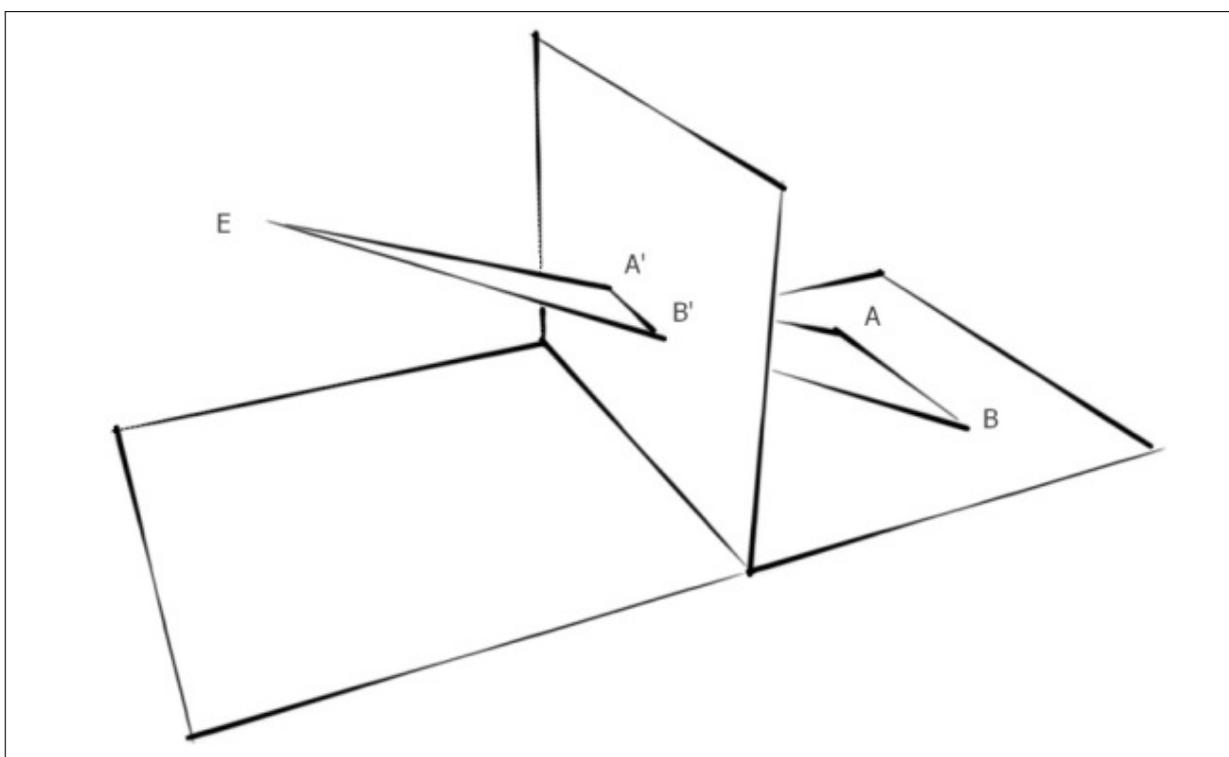


Figura 11 – A representação geométrica do Proposição 3.2

*Demonstração.* Seja  $AB$  um segmento de reta<sup>9</sup> horizontal e paralelo ao plano vertical. Consideremos agora um plano paralelo ao plano vertical que contenha  $AB$ . O plano determinado por  $E$  e  $AB$  intersecta estes planos paralelos, e um plano ao intersectar dois planos paralelos determina sobre cada um deles retas paralelas entre si. Portanto,  $A'B'$  é paralelo a  $AB$ , e como  $AB$  é horizontal, então  $A'B'$  também é.  $\square$

Intencionalmente, não fizemos aqui uma distinção entre reta e segmento de reta. É imediato que o resultado, uma vez demonstrado para um segmento de reta, pode ser

<sup>9</sup> Em geral, as bibliografias não fazem distinção entre reta e segmento de reta, visto que, na Geometria Projetiva, medidas não são preservadas.

estendido para a reta. Contudo, ao representarem retas, os desenhistas sempre usaram segmentos. Acreditamos ser este o motivo de os autores consultados não se preocuparem em fazer essa distinção claramente — o que imitaremos neste trabalho.

A consequência desta proposição para a perspectiva matemática é que, ao representar uma linha horizontal o artista deve mantê-la horizontal.

De maneira análoga, podemos mostrar que a imagem de qualquer reta vertical que seja paralela ao plano vertical, deve ser representada na tela como uma linha vertical. Assim, toda linha vertical deve ser desenhada verticalmente.

De uma forma geral, curvas ou figuras geométricas que possam estar contidas em um plano paralelo ao plano vertical, não sofrem alterações quanto à forma. Nestes casos, as distorções ficam restritas às medidas. A figura 12, traz o exemplo de um hexágono. Podemos observar que a forma geométrica é mantida, alterando-se apenas as medidas dos lados e, conseqüentemente, a área.

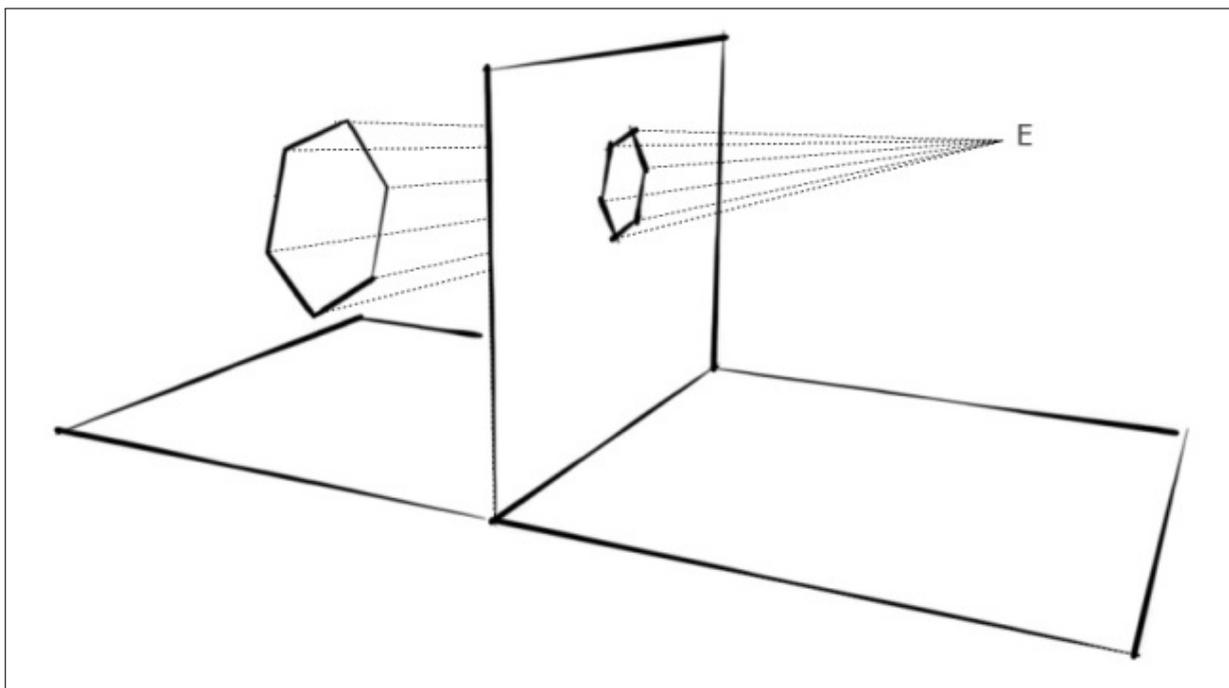


Figura 12 – A seção de um hexágono é um hexágono.

As curvas e figuras geométricas que realmente merecem maior atenção são aquelas contidas em planos perpendiculares ao plano vertical. O próximo resultado trata exatamente destes casos. Contudo, o próximo resultado não é uma decorrência imediata da geometria euclidiana. Ao contrário, sua validade só pode ser compreendida no campo da visão humana. Passaremos, portanto, a uma breve consideração sobre seus mecanismos de funcionamento.

### 1.4.0.1 A Câmara Escura

Não temos a pretensão de detalhar rigorosamente os mecanismos da visão humana – este trabalho deixamos a cargo da física óptica. Interessa-nos neste trabalho compreender minimamente este processo, de maneira que possamos explicá-lo aos nossos alunos, enfatizando como a visão produz o efeito de profundidade retratado pela perspectiva.

De uma maneira simplista, o olho humano pode ser comparado a uma câmera rudimentar. Esta comparação foi proposta pelo matemático, astrônomo e astrólogo alemão Johannes Kepler (1571–1630).

O princípio Câmara Escura, como nomeou Kepler, já era conhecido desde Aristóteles e consistia em um compartimento escuro (daí o nome Câmara Escura), com um orifício em uma das faces, por onde entravam os raios luminosos que eram projetados na face oposta a do furo. O objeto a ser retratado era então posicionado adequadamente entre a fonte luminosa e a câmera. O que se percebia era que a imagem gerada era menor do que o objeto real e invertida em relação a ele. Na figura 13, apresentamos um modelo de Câmara Escura onde um espelho é usado para corrigir a inversão da imagem. Na imagem posterior – figura 14 temos uma gravura do próprio Kepler ilustrando o princípio da Câmara Escura para objetos maiores, no caso o sol. Sugere-se pela imagem que, no caso de objetos de grandes dimensões, o compartimento era intencionalmente substituído por uma sala escura.

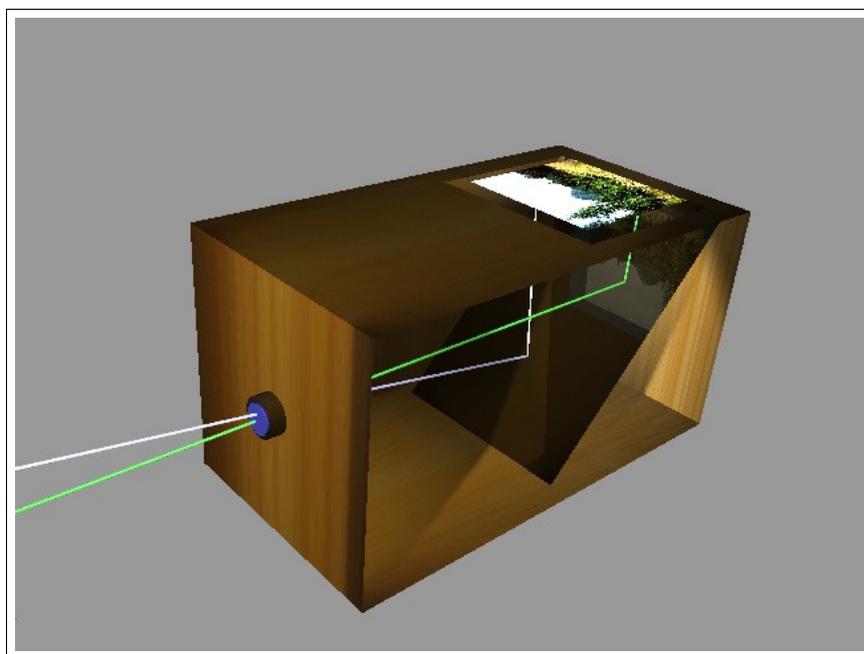


Figura 13 – O modelo da *Câmara Escura*.  
Fonte - Imagem da *wikipedia*.<sup>10</sup>

<sup>10</sup> Endereço eletrônico da imagem

[http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/26/Camera\\_obscura\\_box.jpg](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/26/Camera_obscura_box.jpg)

<sup>11</sup> Endereço eletrônico da imagem

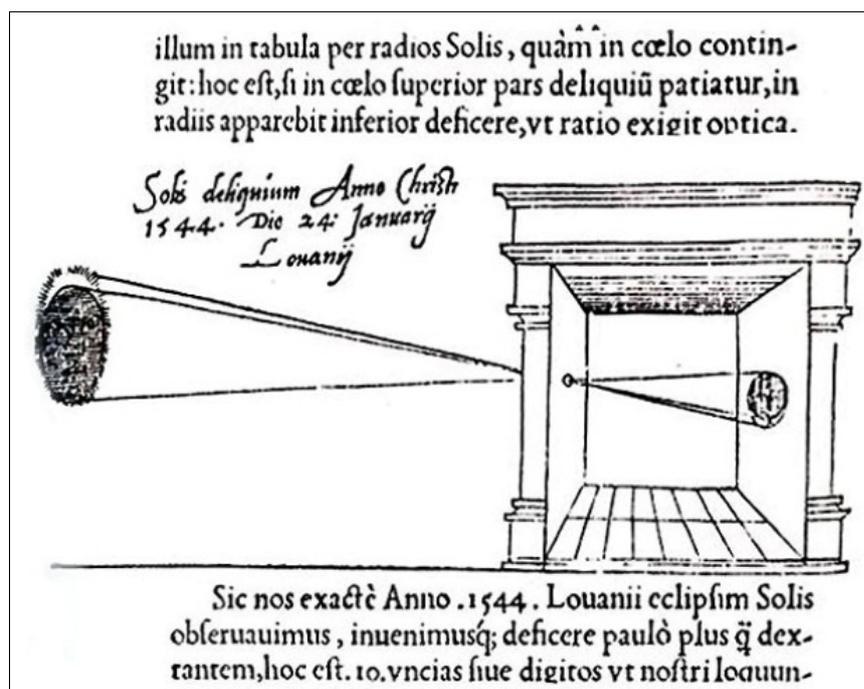


Figura 14 – Ilustração de Kepler sobre o princípio da *Câmara Escura*.  
 Fonte - Imagem da internet. <sup>11</sup>

Baseado nestas experimentações, Kepler formulou a teoria de que o olho humano funcionava como uma dessas câmeras onde o globo ocular era o compartimento escuro, a íris o orifício e a retina o plano de projeção. Assim, os raios luminosos incidiriam sobre a íris projetando na retina uma imagem menor que o objeto real e invertida em relação a ele. A inversão é facilmente compreendida quando pensamos que, como os raios luminosos concorriam na íris, o ponto mais alto do objeto era projetado abaixo, enquanto o ponto mais baixo era projetado acima. Esta distorção no sentido da imagem seria corrigida pelo cérebro como o fez o espelho da figura 13. A seguir, na figura 15, apresentamos um esquema que resume este princípio.

<http://gringablase.files.wordpress.com/2012/04/gemma-frisius.jpg>

<sup>12</sup> Endereço eletrônico da imagem

<http://www.eav.eng.br/tech/fisiologia/NotesImages/Topic16NotesImage1.jpg>

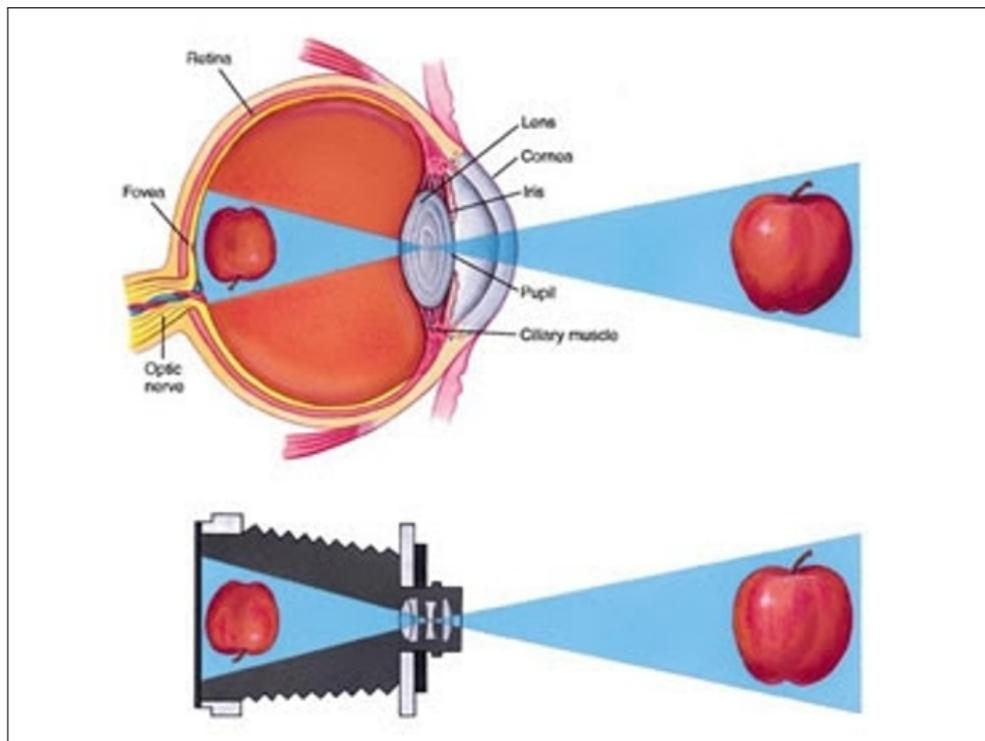


Figura 15 – O olho humano e a *Câmara Escura*

Fonte - Imagem extraída do site EAV Engenharia Audiovisual. <sup>12</sup>

Partindo, então, da ideia de que o olho humano funciona de maneira semelhante a uma *Câmara Escura*, podemos entender o conceito de campo de visão que é o ângulo que os raios luminosos formam ao concorrer na íris. Este esquema é apresentado na figura 16, onde  $\alpha$  representa o ângulo de visão.

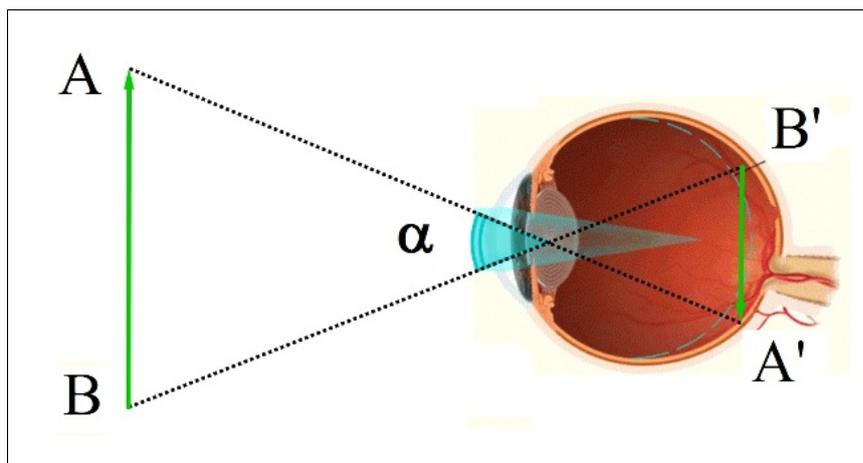


Figura 16 – O ângulo de visão.

Fonte - Imagem original extraída do site EAV Engenharia Audiovisual. <sup>13</sup>

<sup>13</sup> Endereço eletrônico da imagem original

<http://www.eav.eng.br/tech/fisiologia/NotesImages/Topic17NotesImage4.gif>

Finalmente, a ideia principal que precisamos para este trabalho: quanto mais distante está um objeto do olho de seu observador, menor é o ângulo de visão e, conseqüentemente, menor é a imagem projetada. De maneira análoga, quanto mais próximo está um objeto de quem o observa, maior será a imagem projetada. Este esquema está descrito na figura 17.

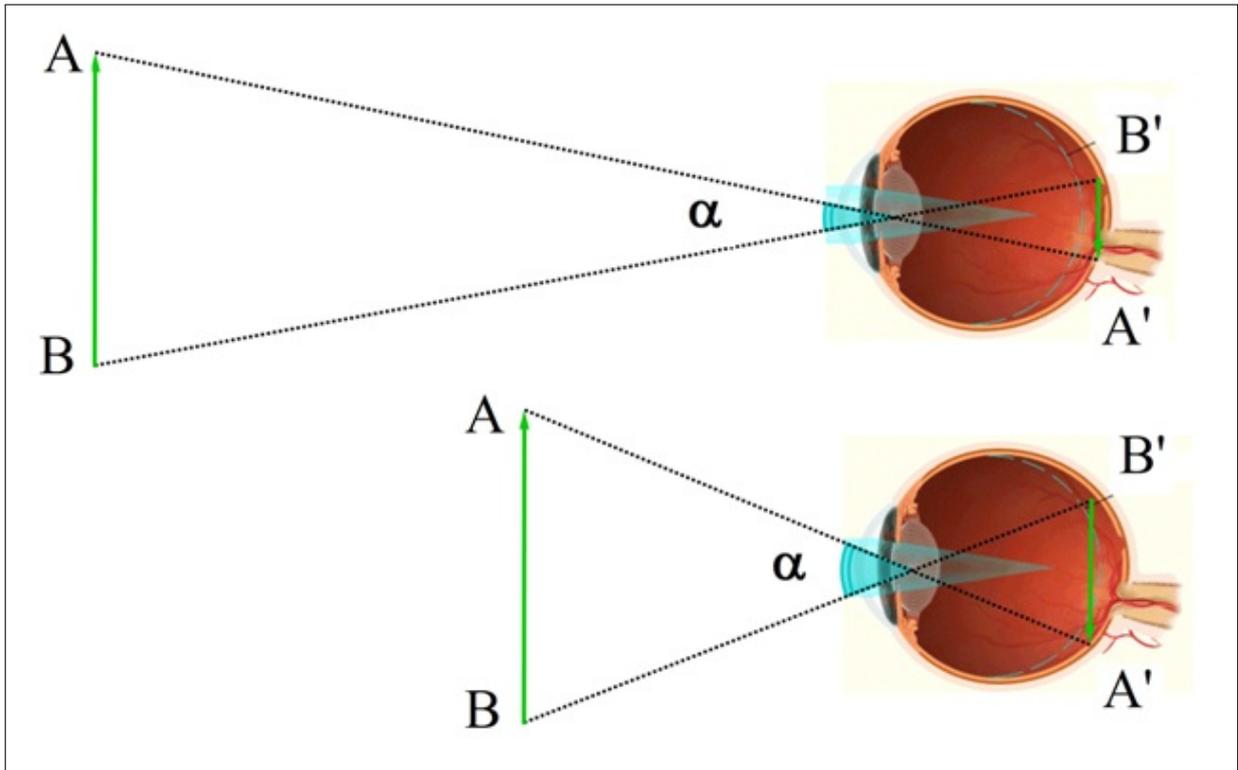


Figura 17 – A percepção de distância pela visão.

Fonte - Imagem original extraída do site EAV Engenharia Audiovisual. <sup>14</sup>

Este fenômeno físico nos ajuda a compreender como nossa visão processa imagens como as da figura 18. Evidentemente, o sol jamais caberia dentro da taça, nem a lua na moldura. O pingo de água não pode ser maior que um homem, nem o balde maior que a moça. Estas ilusões de óptica devem-se ao fato da imagem projetada ser inversamente proporcional à distância entre observador e objeto.

<sup>14</sup> Endereço eletrônico da imagem original  
<http://www.eav.eng.br/tech/fisiologia/NotesImages/Topic17NotesImage4.gif>



Figura 18 – Imagens impossíveis.  
Fonte - Imagens do blog *Creative Greed*.<sup>15</sup>

Voltaremos a tratar mais sobre este tipo de ilusão de óptica na seção que descreve as atividades desenvolvidas com os alunos do projeto.

A seguir, empregaremos o raciocínio aqui esboçado para nos ajudar a justificar o próximo resultado da perspectiva matemática.

**Proposição 1.4.3.** *As imagens de duas retas paralelas que são perpendiculares ao plano*

<sup>15</sup> Endereços eletrônicos das imagens originais

<http://creativegreed.com/wp-content/uploads/2012/12/Most-Interesting-Perspective-Photographs-around-the-World-18.jpg>

<http://creativegreed.com/wp-content/uploads/2012/12/Most-Interesting-Perspective-Photographs-around-the-World-10.jpg>

<http://creativegreed.com/wp-content/uploads/2012/12/Most-Interesting-Perspective-Photographs-around-the-World-30-590x783.jpg>

<http://creativegreed.com/wp-content/uploads/2012/12/Most-Interesting-Perspective-Photographs-around-the-World-33.jpg>

imagem encontram-se em um ponto na tela.

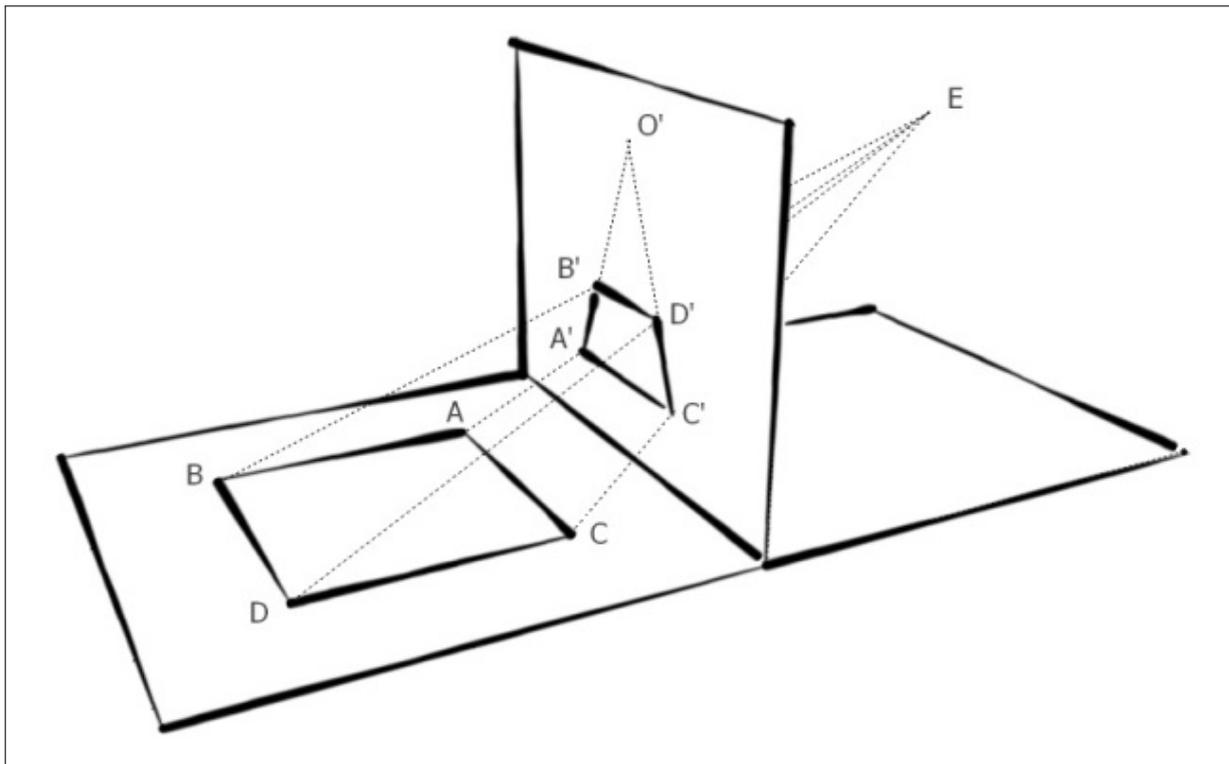


Figura 19 – Retas Paralelas encontrando-se no ponto  $O'$

*Demonstração.* Suponhamos que  $AB$  e  $CD$  são retas paralelas, horizontais e perpendiculares ao plano vertical. Como de costume, consideraremos o ponto  $E$  como o olho de um observador. Sabemos ainda que  $AB$  e  $CD$  determinam com  $E$  planos secantes ao plano vertical. Chamaremos as imagens (seções) destas retas de  $A'B'$  e  $C'D'$ , respectivamente. Interessa-nos aqui discutir que posições estas imagens terão na tela. A figura 19 representa esta situação hipotética.

Conforme o olhar percorre  $AB$  e  $CD$  até o infinito, a impressão do observador é que a distância entre elas diminui gradualmente. Ao mesmo tempo, as linhas de projeção tendem a uma reta que contém o olho e é perpendicular ao plano vertical. Esta reta determina sobre o plano imagem o ponto  $O'$ . Este ponto corresponde ao ponto imaginário  $O$  onde as retas  $AB$  e  $CD$  parecem se encontrar. Obviamente, as retas  $AB$  e  $CD$  estão contidas em um plano Euclidiano e, como são paralelas, não se encontram. Porém, para a perspectiva este encontro de fato ocorre, pois, como já havíamos dito, a perspectiva é produto da percepção da visão humana.

Por sua vez, o ponto  $O'$  representa o ponto de encontro das retas  $A'B'$  e  $C'D'$  no plano de imagem. Como o ponto  $O$  de encontro das duas retas de fato não existe, o ponto  $O'$  recebe o nome de **ponto de fuga**, pois é o único ponto de  $A'B'$  e  $C'D'$  que não possui um correspondente real em  $AB$  e  $CD$ .

Lembrando que  $AB$  e  $CD$  são quaisquer retas horizontais perpendiculares ao plano imagem, concluimos que toda reta horizontal perpendicular ao plano vertical deve ser representada convergindo para  $O'$  (KLINE, 1967).

□

Além do apresentado acima, gostaríamos de acrescentar à argumentação uma ideia bastante simples que baseia-se na percepção da distância pela visão.

Como foi mostrado na seção sobre a *Câmara Escura* de Kepler, o tamanho da imagem que formamos de um objeto é inversamente proporcional à distância da qual o observamos. Se aplicarmos este princípio à situação descrita na propriedade anterior (figura 19), veremos que  $AC$  está mais próximo do ponto  $E$  do que  $BD$ , mas como são segmentos congruentes, a imagem de  $AC$  será maior que a de  $BD$ , ou seja,  $A'C'$  terá maior medida que  $B'D'$ . Ao mesmo tempo, sabemos, pela **Proposição 3.2** que  $AC$  e  $BD$  serão projetadas horizontalmente e, portanto,  $A'C'$  e  $B'D'$  permanecerão paralelas. Logo, o polígono  $A'B'C'D'$  será um quadrilátero com apenas um par de lados paralelos, o que quer dizer que será um trapézio, e não mais um quadrado como  $ABCD$ . Portanto, as retas  $A'B'$  e  $C'D'$  deixam de ser paralelas em um sentido euclidiano e passam a concorrer no ponto  $O'$ , pois são as retas que contém os lados oblíquos do trapézio  $A'B'C'D'$ .

Baseados, portanto, na análise que fizemos da situação problema aqui tratada, podemos inferir alguns resultados muito importantes. O primeiro deles, é claro, é que a Geometria Projetiva ( aqui representada pela Perspectiva Matemática), **não preserva paralelismo**, pois retas paralelas em um sentido euclidianos, são descritas como retas concorrentes um ponto  $O$  no infinito do qual  $O'$  é a imagem na tela. Ressaltamos aqui que as ressalvas descritas na **Proposição 3.2** não são suficientes para que afirmemos que a Geometria Projetiva preserva paralelismo, pois esta não é uma propriedade geral que possa ser estendida a retas de qualquer natureza. Da mesma forma, a **semelhança de figuras também não é preservada**, pois, como vimos, o quadrado  $ABCD$ , transformou-se no trapézio  $A'B'C'D'$  sobre a tela. Também não poderíamos deixar de mencionar que **medidas como distâncias e ângulos não são preservados**. Observemos que  $AC$  e  $BD$  são congruentes, desta forma, sob uma óptica euclidiana,  $A'C'$  e  $B'D'$  também seriam congruentes, mas não é isso o que ocorre. Da mesma forma, os ângulos retos do quadrado euclidiano possuem medidas diferentes no quadrilátero da seção, os superiores são obtusos enquanto os inferiores são agudos<sup>16</sup> (HEFEZ, 1985).

Pelo exposto acima, resta-nos questionar: seria possível desenvolver uma geometria que não possui círculos, não preserva ângulos, medidas ou paralelismo? A resposta é sim;

<sup>16</sup> Naturalmente, estamos nos referindo ao fato de ângulos retos na cena real terem por imagem ângulos agudos e obtusos. Ou seja, se na Geometria Euclidiana todos os ângulos retos são congruentes e representados da mesma forma, a Geometria Projetiva permite que ângulos retos sejam representados por ângulos de medidas diferentes.

esta é a Geometria Projetiva.

## 1.5 A Geometria Projetiva de Desargues

Até agora temos nos ocupado neste trabalho de apresentar as concepções matemáticas elementares que estão por trás das regras do desenho em perspectiva. Permanecemos interessados neste enfoque, pois este é o elo de ligação entre a proposta didático-metodológica que desenvolvemos na escola e a parte teórica da dissertação. Contudo, não podemos ignorar que a Geometria Projetiva é hoje um campo da matemática muito mais amplo e complexo. Aliada à álgebra linear e geometria analítica, a Geometria Projetiva integra o campo das disciplinas que colaboram, por exemplo, com o processamento computacional de imagens e, embora esteja intrinsecamente ligada à perspectiva em sua gênese, não ficou restrita aos problemas sugeridos por ela, sendo que desenvolvimento independente das regras de perspectiva se iniciou no século XIX com Jean Victor Poncelet (1788 – 1867); seu livro *Traité des Projectives des Figures* de 1822 é considerado um marco no desenvolvimento da Geometria Projetiva e inaugurou um período em que muitos matemáticos ilustres interessaram-se pelo assunto (EVES, 2011). Desta forma, sempre que possível, buscaremos enfatizar a relação entre o problema proposto pelo desenho em perspectiva e o seu resultado matemático correspondente na Geometria Projetiva. Contudo, visto que a Geometria Projetiva tornou-se um campo de estudos independente, estabelecer esta relação nem sempre é um trabalho exequível, e a maior parte dos autores simplesmente se furta a este propósito; de maneira que, não fosse pela nota histórica no primeiro capítulo dos livros, nem cogitaríamos desta relação.

O primeiro problema proposto pela perspectiva e que levou a um resultado matemático foi, possivelmente, o descrito pela figura 19, onde temos um quadrilátero  $ABCD$  sendo representado na tela pelo quadrilátero  $A'B'C'D'$ , que não possuiu a mesma forma do quadrilátero original  $ABCD$ . É fácil percebermos que este problema não se restringia aos quadriláteros, mas se estendia a todos polígonos e a algumas cônicas, como veremos mais adiante.

Segundo Kline (KLINE, 1967), as primeiras respostas não triviais para estas questões foram fornecidas pelo arquiteto francês Girard Desargues (1593 – 1662). Desargues reduziu o caso dos polígonos em perspectiva ao caso *menor* de triângulos em perspectiva e encontrou um resultado peculiar que originou célebre teorema que foi batizado com seu nome.

É possível que Desargues – que não era um matemático profissional – jamais tenha pretendido desenvolver a Geometria Projetiva como ciência autônoma. Ao contrário, em suas próprias palavras, Desargues afirma que:

Eu confesso livremente que nunca gostei de estudar ou pesquisar qualquer assunto de física ou geometria, exceto no caso em que ele pudesse me fazer chegar a algum tipo de conhecimento de causas próximas, que fosse pelo bem e conveniência da vida, pela manutenção da saúde ou prática de alguma arte. Tenho observado que boa parte das artes baseia-se na geometria, entre elas o corte de pedras na arquitetura, os relógios de sol e, particularmente, a perspectiva. (DESARGUES, 1639 apud (KLINE, 1967), tradução nossa).

No entanto, o próprio Girard Desargues, a despeito da sua falta de notoriedade à época, foi bastante audacioso e visionário ao introduzir o método projetivo na geometria logo no seu primeiro trabalho de 1639. Em suma, ele tomou concepções já bastante difundidas no campo da perspectiva e procurou conceber uma geometria em que elas fossem válidas. Assim, apesar da indiferença com que os matemáticos da época receberam seu trabalho – o que deve-se, em grande parte, ao fato de estarem todos direcionados para a Geometria Analítica de Descartes, introduzida dois anos antes – Desargues tornou-se pioneiro ao admitir uma geometria que, contrariando a geometria euclidiana, admitisse a existência de pontos no infinito onde as paralelas se encontram (pontos de fuga), bem como de transformações (projeções) que não preservavam medidas de ângulos e comprimentos. Desargues dedicava-se, portanto, ao estudo do que era preservado, as chamadas propriedades projetivas. Esta ideia nos ajuda a entender a definição que Coxeter (COXETER, 1987) nos oferece para Geometria Projetiva. Segundo ele, geometria projetiva plana pode ser descrita como o estudo de propriedades geométricas que são invariantes em uma projeção central. ((COXETER, 1987), (EVES, 2011))

Mais adiante retomaremos a ideia de projeção central, por ora, basta-nos compreender que se trata da representação geométrica do método da tela de vidro.

Desargues não viveu sempre na obscuridade. Alguns anos depois, obteve notoriedade como arquiteto e matemático e relacionava-se com os ilustres Descartes e Pascal. Escreveu muito livros, alguns bastante curiosos como um tratado sobre como ensinar crianças a cantar, mas, em geral, seu assunto recorrente eram as seções cônicas. Apesar de ter seus fundamentos em Desargues, a Geometria Projetiva só se consolida como ciência no século XIX, quando matemáticos como Poncelet, interessam-se pelo assunto, já então sob um enfoque bastante diverso da teoria da perspectiva e muito mais analítico, que é como hoje a Geometria Projetiva se apresenta (EVES, 2011).

Uma das contribuições mais significativas de Desargues à fundamentação da Geometria Projetiva, mencionada por absolutamente todas as bibliografias, é o famoso teorema sobre dois triângulos em perspectiva, que estudaremos em seguida. Antes, porém, faremos algumas considerações sobre triângulos em perspectiva.

## 1.5.0.2 Triângulos Perspectivos

*Estar em perspectiva* é uma expressão comumente usada para indicar que existe uma relação entre duas figuras de formas, possivelmente, diferentes. Para entender melhor como estas relações acontecem, precisamos de duas definições: projetividade e perspectividade.

Dada uma reta  $o$  e um ponto  $O$  fora dela, cada reta  $x_i$  passando por  $O$  e não paralela a  $o$  incide sobre ela determinando um único ponto  $X_i$ . Assim, estabelecemos uma relação biunívoca entre o feixe de retas que passa por  $O$  e o conjunto de pontos que elas terminam sobre  $o$  – figura 20.

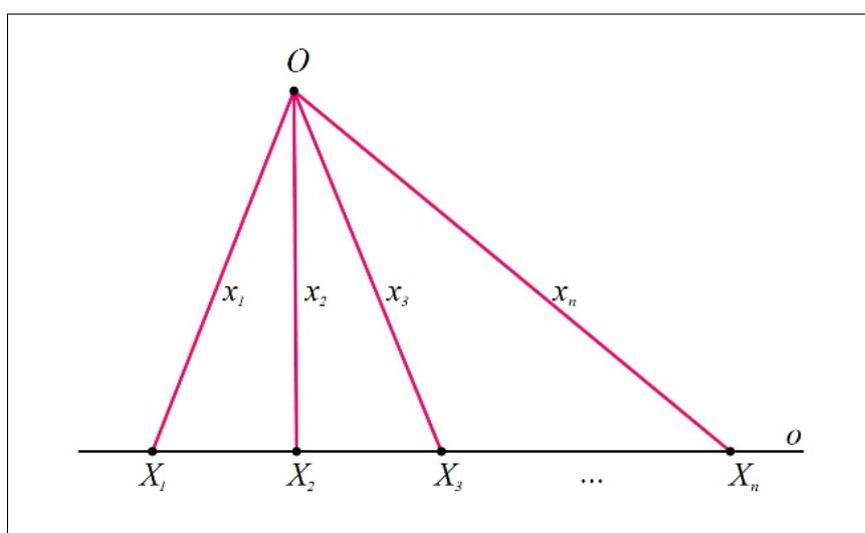


Figura 20 – Uma projetividade.

Na Geometria Projetiva, uma correspondência elementar é aquela que relaciona um feixe de retas a um conjunto de pontos colineares e, quando combinamos um número finito dessas correspondências elementares obtemos uma **Transformação Projetiva** ou **Projetividade**.

O caso particular de projetividade no qual combinamos duas correspondências elementares recebe o nome de **Perspectividade**. Essa combinação pode acontecer de duas formas: o mesmo feixe de retas para dois conjuntos distintos de pontos colineares, ou dois feixes de retas para o mesmo conjunto de pontos colineares. No primeiro caso dizemos que as retas  $o'$  e  $o''$  são perspectivas em relação ao ponto  $O$  que é chamado de centro; já no segundo caso, dizemos que os pontos  $O'$  e  $O''$  são perspectivos em relação à reta  $o$  que é chamada de eixo – figura 21.

De maneira análoga, podemos estender a ideia de perspectividade para triângulos. Dizemos que dois triângulos são perspectivos em relação a um ponto  $O$  se as retas que unem os vértices correspondentes concorrem em  $O$ . Por outro lado, se os pontos de intersecção obtidos ao se prolongarem os lados correspondentes forem colineares, então

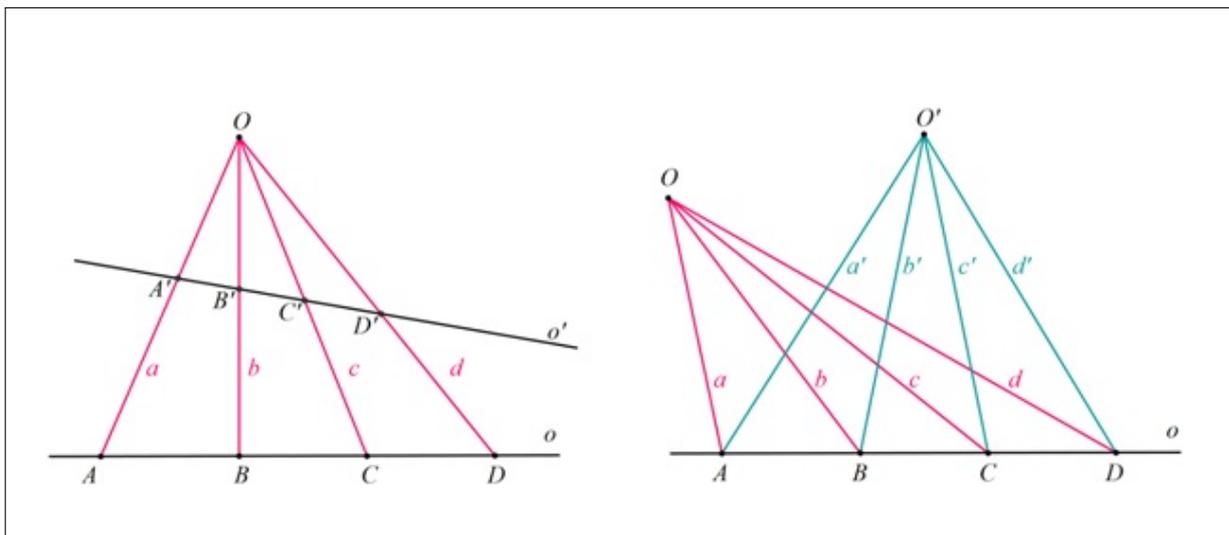


Figura 21 – Perspectividade em relação a um ponto e Perspectividade em relação a uma reta.

dizemos que os triângulos são perspectivos em relação a uma reta ( $o$ ). Esta situação é descrita graficamente na figura 22: à esquerda, temos dois triângulos perspectivos em relação ao ponto  $O$ ; à direita, dois triângulos perspectivos em relação à reta  $o$ .

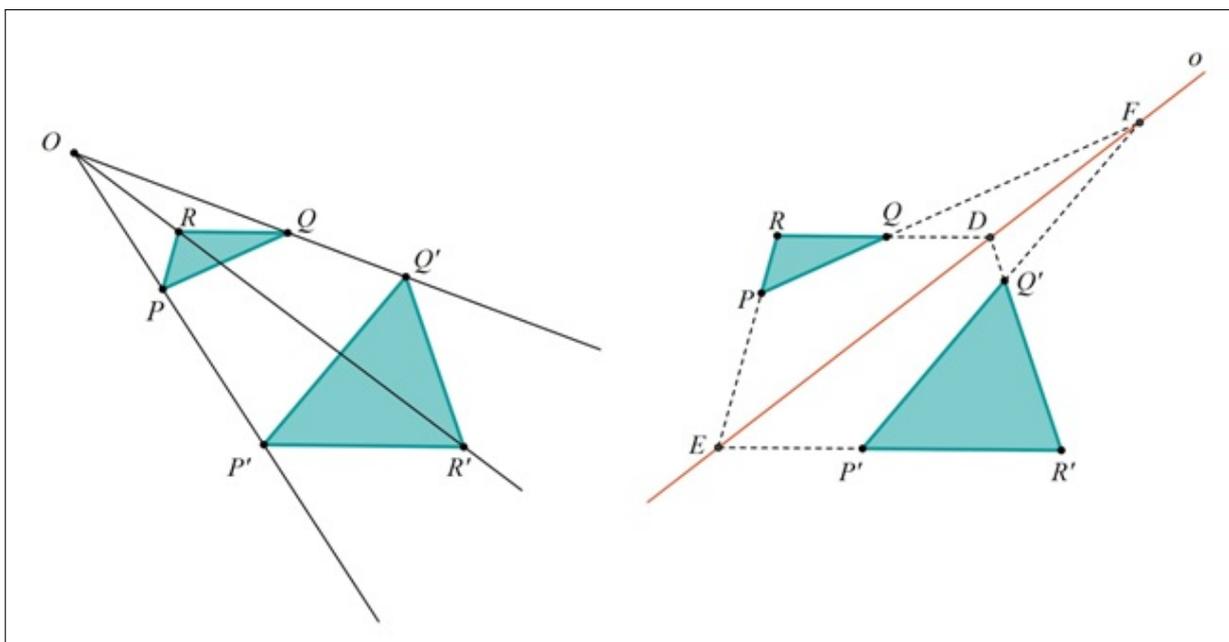


Figura 22 – Triângulos perspectivos em relação a um ponto e a uma reta.

Naturalmente, dizer que figuras, incluindo triângulos, são perspectivas em relação a um ponto, nos remete aos problemas do método da tela de vidro, onde o ponto refere-se ao olho do observador e as figuras correspondem ao objeto e sua respectiva imagem projetada na tela. Ou seja, dizer que duas figuras são perspectivas em relação a um ponto, equivale a dizer que elas estão em perspectiva no contexto do método da tela de vidro.

Um caso importante da perspectividade por um ponto ocorre quando a projetivi-

dade estabelecida entre duas figuras preserva o paralelismo, o que acontece sempre que estas figuras representarem figuras que, numa disposição espacial, estariam contidas em planos paralelos <sup>17</sup>. Nestas condições, temos uma **homotetia** entre as figuras – figura 23, onde  $O$  é o centro da homotetia e o coeficiente da homotetia ( $k$ ) é dado por  $OP' = k \cdot OP$ .

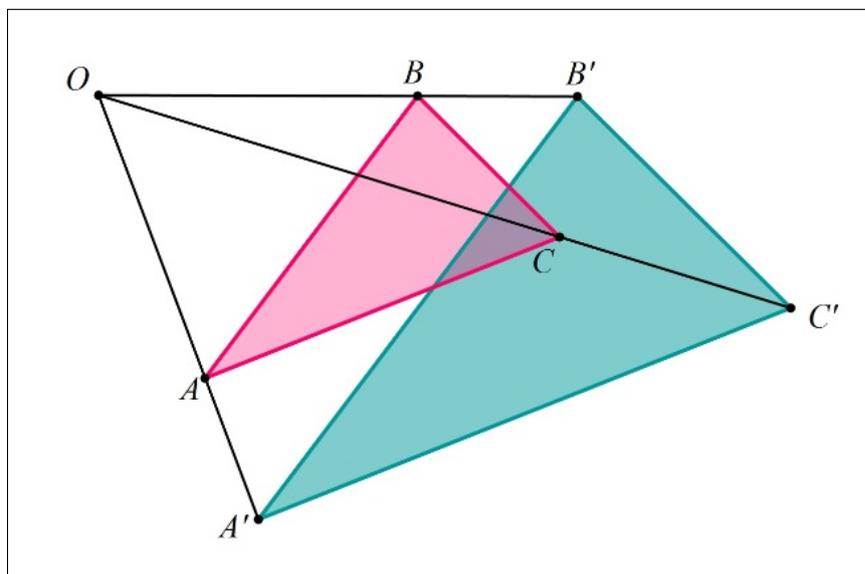


Figura 23 – Homotetia de triângulos.

No tocante à figuras perspectivas em relação a uma reta <sup>18</sup>, não existe uma relação óbvia com o método da tela de vidro, e fato de duas figuras serem perspectivas em relação a uma reta, não implica que sejam perspectivas em relação a um ponto, como podemos observar na figura 24.

No entanto, quando observamos a perspectividade em relação a uma reta, descrita na figura 21, é imediato imaginarmos que o conjunto de pontos sobre a reta  $o$  está sendo observado de dois pontos de vista diferentes:  $O$  e  $O'$  que podem corresponder a dois observadores em posições distintas, ou ao mesmo observador com os dois olhos abertos. Vamos ampliar esta ideia substituindo o conjunto de pontos (reta) por um polígono.

Consideremos, então, a figura 25 a seguir, em que o polígono  $\gamma'$  é a secção do polígono  $\gamma$  projetada pelo ponto  $O'$  sobre o plano  $\alpha'$ . Da mesma forma, o polígono  $\gamma''$  é a secção do polígono  $\gamma$  projetada pelo ponto  $O''$  sobre o plano  $\alpha''$ .

Nestas condições, podemos observar que os pontos  $O'$  e  $O''$  são perspectivos em relação às retas de cada lado do polígono  $\gamma$ . Consequentemente, podemos afirmar que os lados correspondentes  $a'$  e  $a''$  estão em perspectiva em relação à reta do lado  $a$  do polígono  $\gamma$ . Podemos estender essa relação para todos os demais lados correspondentes. Nossa intenção é investigar se os polígonos  $\gamma'$  e  $\gamma''$  são perspectivos em relação a alguma reta. Se estes polígonos fossem coplanares, poderíamos descartar esta hipótese visto

<sup>17</sup> Aqui estamos admitindo que as figuras são coplanares, mas não necessariamente tem que ser assim.

<sup>18</sup> Absolutamente nenhum autor consultado considera além de triângulos perspectivas por uma reta.

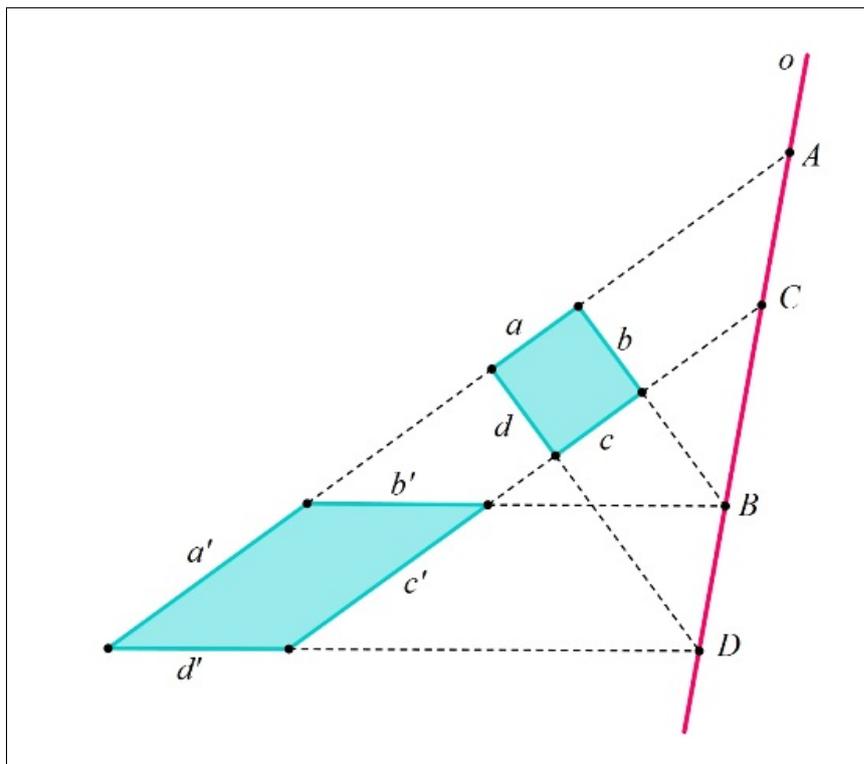


Figura 24 – Figuras perspectivas em relação à reta  $o$ .

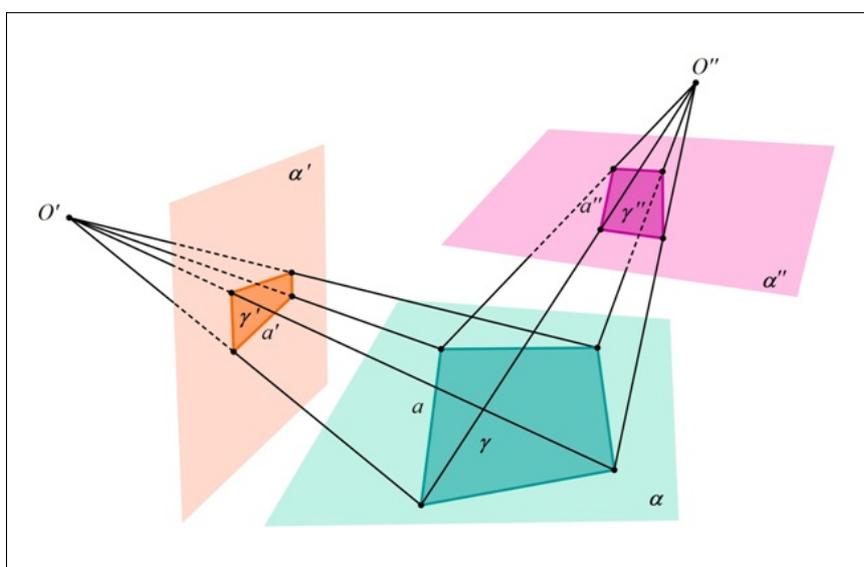


Figura 25 – Dois polígonos perspectivas em relação a uma reta projetiva.

que, se prolongarmos seus lados, os pontos de intersecção dos lados correspondentes não incidem sobre uma mesma reta. Contudo, estamos analisando os dois polígonos em uma configuração espacial e podemos observar que existe uma projetividade que relaciona o polígono  $\gamma'$  ao polígono  $\gamma$ . De maneira análoga, existe uma projetividade que relaciona os polígonos  $\gamma$  e  $\gamma''$ . Portanto, podemos afirmar que os polígonos  $\gamma'$  e  $\gamma''$  são perspectivas em relação ao <sup>19</sup> plano  $\alpha$  que contém  $\gamma$ . Isto não era exatamente o que esperávamos encontrar,

<sup>19</sup> Notemos que a perspectividade dos pontos  $O$  e  $O'$  da figura 21 não é em relação ao conjunto de

já que procurávamos uma reta. Contudo, na seção deste trabalho que trata sobre o Plano Projetivo, iremos perceber que na Geometria Projetiva existe uma estreita relação entre reta e plano, de maneira que uma reta projetiva define-se como um plano euclidiano que passa pela origem do plano projetivo. Desta forma, o que encontramos não foi apenas um plano euclidiano, mas sim, uma reta projetiva, o que significa que os polígonos  $\gamma'$  e  $\gamma''$  são perspectivos em relação à reta projetiva  $\alpha$ . Cabe aqui ressaltar que, se tratando de duas figuras coplanares, só poderemos afirmar que elas estão em perspectiva em relação a uma reta, se for possível exibir esta reta no sentido euclidiano da palavra.

Como já vimos, perspectividade em relação a um ponto não implica em perspectividade em relação a uma reta. Contudo, Girard Desargues descobriu que, tratando-se de triângulos, perspectividade em relação a um ponto implica em perspectividade em relação a uma reta e vice-versa. Este é o famoso Teorema de Desargues, nosso próximo assunto.

### 1.5.0.3 O Teorema de Desargues

Há uma grande variação de enunciados para este teorema, mas todos tratam de dois triângulos em perspectiva ou perspectivos.

Enunciaremos primeiramente a versão de Hefez (HEFEZ, 1985), bastante clara e didática, semelhante à versão de Efímov (EFÍMOV, 1984); mas trabalharemos de fato com a versão de Coxeter (COXETER, 1987), pois representa a forma mais clássica do enunciado.

Enunciado de Hefez: “Dois triângulos  $PQR$  e  $P'Q'R'$  estão em perspectiva central se, e somente, se os prolongamentos de  $RP$  e  $R'P'$ ,  $RQ$  e  $R'Q'$ ,  $PQ$  e  $P'Q'$ , determinam três pontos colineares” (HEFEZ, 1985). A reta que contém os três pontos é chamada de **Reta de Desargues**.

Se os triângulos estiverem no espaço e não forem paralelos, esta conclusão é imediata, pois a reta em questão seria a intersecção dos planos definidos por cada triângulo, como mostra a figura 26. Na figura 27 apresentamos o Teorema de Desargues na configuração do Método da Tela de Vidro. Observemos que os triângulos perspectivos referem-se ao triângulo da cena real,  $ABC$  e sua imagem projetada na tela, o triângulo  $A'B'C'$ . O ponto em relação ao qual estes triângulos são perspectivos é o ponto  $O$ , que representa o olho do observador. A Reta de Desargues, neste caso, é a Linha de Terra.

Resta-nos, portanto, considerar o caso em que os dois triângulos estão no espaço e são paralelos, o que faremos a seguir.

Segundo Kline (KLINE, 1967), Desargues percebeu esta possibilidade em que seu teorema, aparentemente, falha e, para contornar este problema, introduziu dois conceitos

---

pontos  $\{A, B, C, D\}$ , mas em relação à reta que os contém. Da mesma forma, os polígonos  $\gamma'$  e  $\gamma''$  não serão perspectivos a  $\gamma$ , mas ao plano  $\alpha$  que o contém.

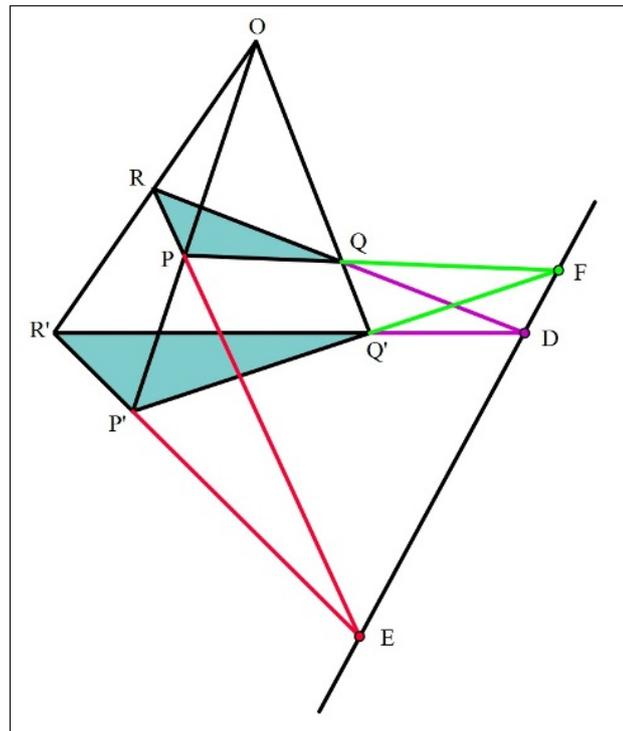


Figura 26 – O Teorema de Desargues no espaço.

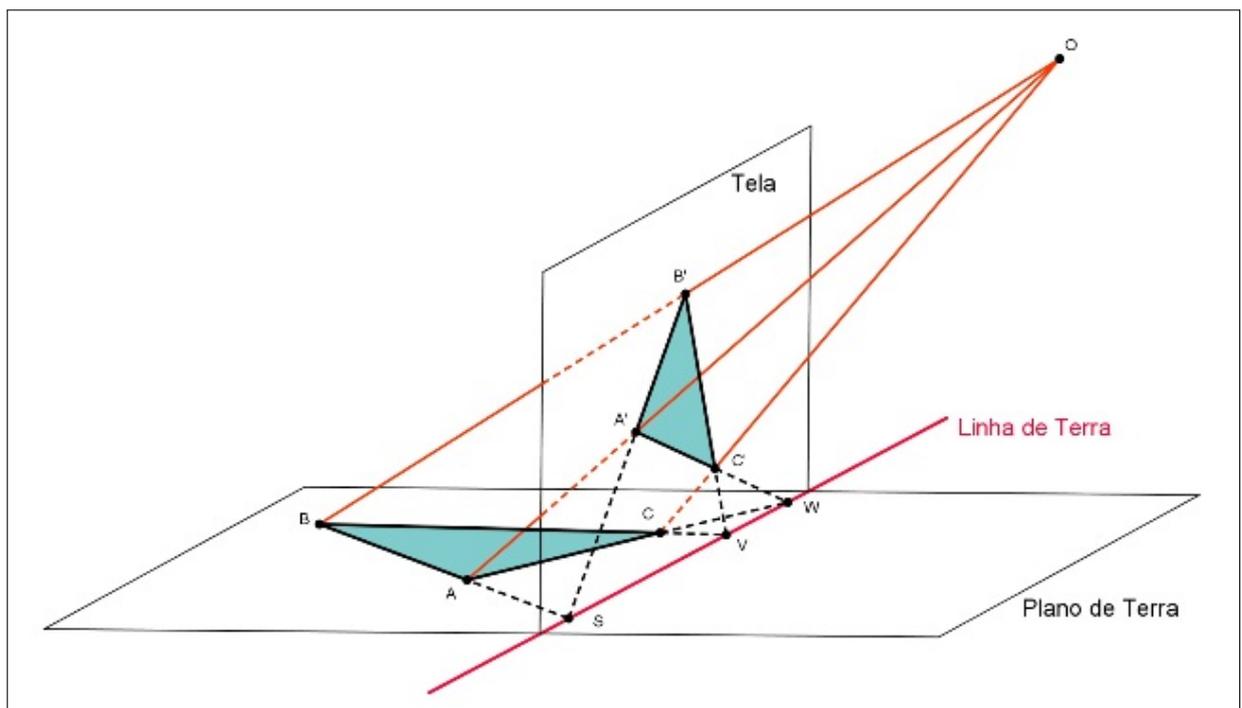


Figura 27 – O Teorema de Desargues e a Perspectiva.

extremamente importantes da Geometria Projetiva: Ponto no Infinito e Reta no Infinito. Trataremos estas duas definições de forma mais rigorosa na seção sobre o Plano Projetivo. Por ora, estamos preocupados em entender como elas nos ajudam a resolver o problema do Teorema de Desargues no caso em que os triângulos perspectivados forem paralelos.

Das suas observações das técnicas empregadas pelos artistas do desenho em perspectiva, Desargues sabia que algumas retas paralelas em uma cena real, são descritas sobre a tela concorrendo em um ponto  $O'$ , que não possui correspondente visível na cena propriamente dita (figura 19). Desargues então imaginou que este ponto de fato existia, mas não era visível, pois era um **ponto no infinito**, ele considerou uma geometria onde todas as retas de um feixe de retas paralelas concorrem em um ponto no infinito. Naturalmente, nesta nova geometria, havia inúmeros feixes de retas paralelas, concorrendo em inúmeros pontos no infinito. Mais uma vez inspirado pelas técnicas de perspectiva, em que os pontos de fuga localizam-se sobre a linha de fuga (ou linha do horizonte), que não se localiza a uma distância finita do observador, Desargues imaginou que todos estes pontos no infinito são colineares, e que esta reta é, por sua vez, uma **reta no infinito** que, da mesma forma que no exemplo dos polígonos perspectivos, não é visualizável.

Desta maneira, o problema do teorema para triângulos paralelos torna-se elementar. Prolongando-se os lados paralelos dos triângulos, cada par de lados correspondentes determina um ponto no infinito e estes pontos no infinito estão contidos em uma reta no infinito.

Resta-nos salientar que, no caso de triângulos coplanares, o teorema só será válido se for possível exibir a Reta de Desargues. Portanto, de agora em diante, nos deteremos na situação em que os triângulos são coplanares. Antes, porém, precisamos enunciar o axioma do geômetra alemão Moritz Pasch (1843 – 1930), que será necessário para a demonstração do teorema.

#### **Axioma 1.5.1.** *Axioma de Pasch*

*Se uma reta  $g$  intersecta um lado de um triângulo internamente, então ele intersecta um outro lado também internamente e o terceiro lado externamente. O axioma está representado na figura 28.*

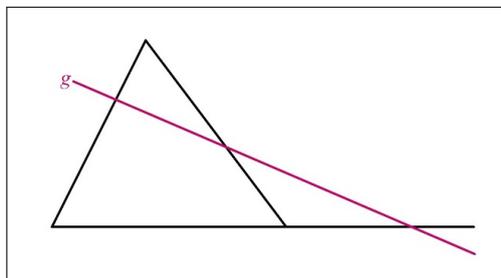


Figura 28 – O Axioma de *Pasch*.

**Teorema 1.5.1.** *Primeiro Teorema de Desargues – teorema direto*

*Se dois triângulos estão em perspectiva em relação a uma reta eles estão em perspectiva em relação a um ponto.*

*Demonstração.* Sejam dois triângulos coplanares,  $PQR$  e  $P'Q'R'$ , perspectivos (que estão em perspectiva) em relação a uma reta  $r$ , ou seja,  $r$  contém três pontos  $D, E, F$ , tais que  $D$  é o ponto de encontro dos prolongamentos dos lados  $QR$  e  $Q'R'$ ,  $E$  é o ponto de encontro dos prolongamentos dos lados  $RP$  e  $R'P'$  e  $F$  é o ponto de encontro dos prolongamentos dos lados  $PQ$  e  $P'Q'$ , como mostra a figura 29. Desejamos mostrar que as três retas  $PP', QQ', RR'$  são concorrentes em um ponto  $O$ .

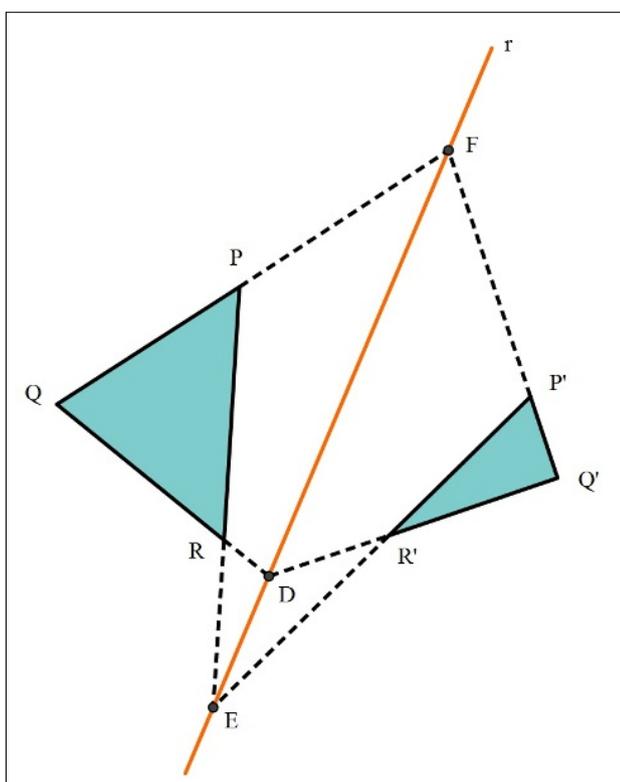


Figura 29 – Dois triângulos em perspectivos em relação a uma reta.

Consideremos agora outro plano passando por  $r$  e não contendo  $PQR$  nem  $P'Q'R'$ . Neste novo plano tomamos três retas que definem o triângulo  $P''Q''R''$ , de forma que  $P''Q''$  passe por  $F$ ,  $P''R''$  passe por  $E$  e  $Q''R''$  passe por  $D$ . O triângulo  $P''Q''R''$  é perspectivo em relação aos triângulos  $PQR$  e  $P'Q'R'$ . Esta situação está descrita na figura 30.

Como  $P''Q''R''$  está em perspectiva em relação a  $PQR$ , as retas  $PP'', QQ'', RR''$  são concorrentes em um ponto, que chamaremos  $S'$  – figura 31.

Da maneira análoga,  $P''Q''R''$  está em perspectiva em relação a  $P'Q'R'$ , portanto, as retas  $P'P'', Q'Q'', R'R''$  são concorrentes em um ponto, que chamaremos  $S''$  – figura 32.

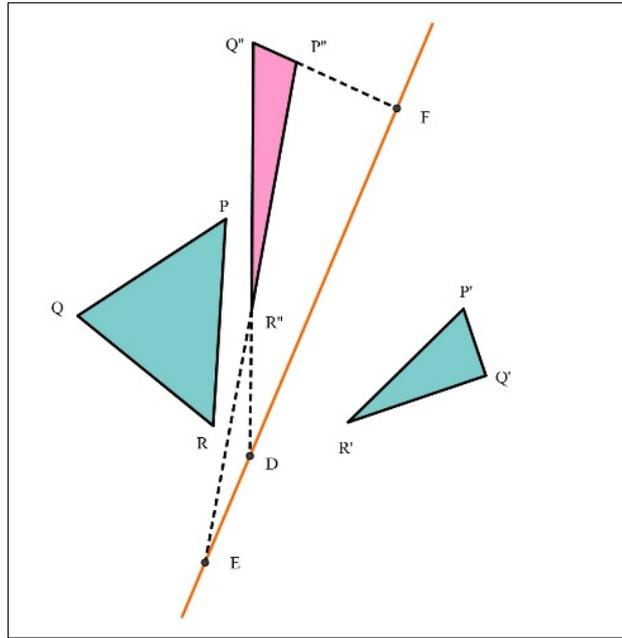


Figura 30 – O triângulo  $P''Q''R''$ , não coplanar aos demais.

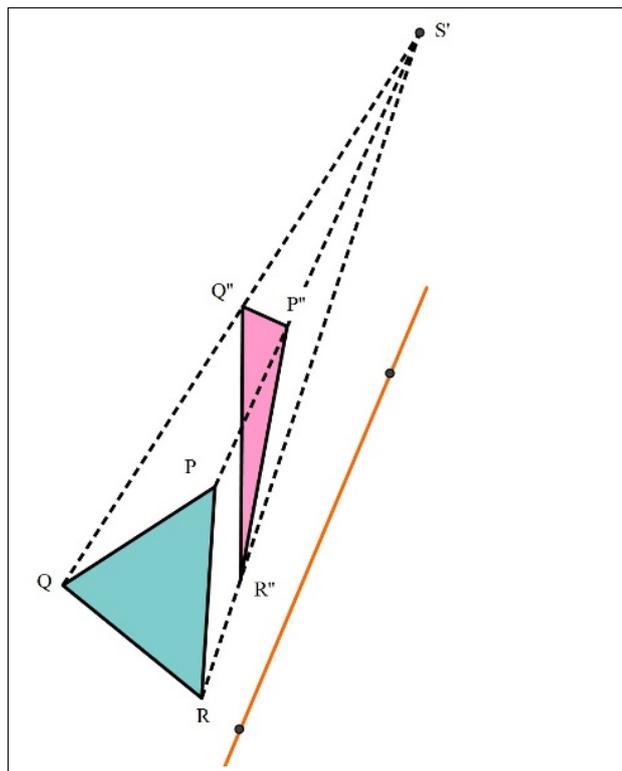


Figura 31 – As retas  $PP''$ ,  $QQ''$  e  $RR''$  concorrentes em  $S'$ .

Como  $P''$  é um ponto comum a  $PS'$  e  $P'S''$ , pelo Axioma de *Pasch*, podemos afirmar que  $PP'$  e  $S'S''$  são concorrentes, como mostra a figura 33.

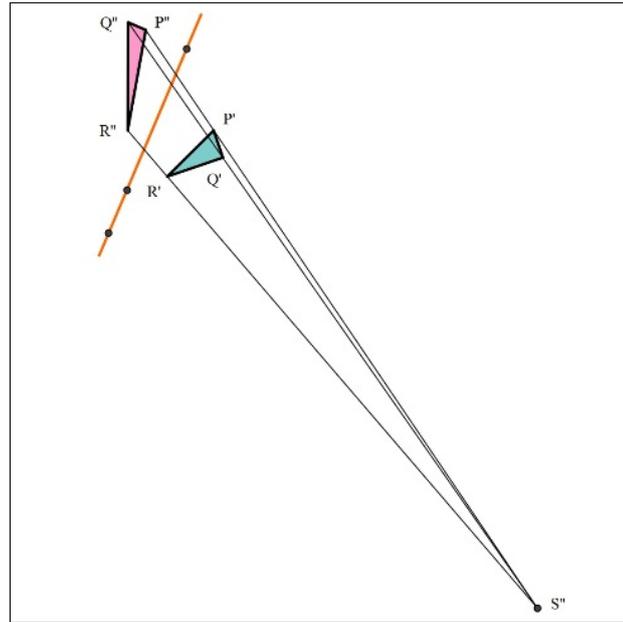


Figura 32 – As retas  $P'P''$ ,  $Q'Q''$  e  $R'R''$  concorrentes em um ponto  $S''$ .

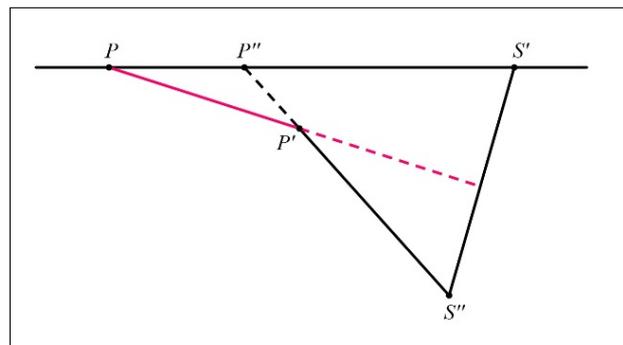


Figura 33 – As retas  $PP'$  e  $S'S''$  são concorrentes.

Da mesma maneira,  $Q''$  é um ponto comum a  $QS'$  e  $Q'S''$  e, portanto, pelo mesmo axioma, podemos afirmar que  $QQ'$  e  $S'S''$  são concorrentes. Aplicando a mesma ideia novamente,  $R''$  é um ponto comum a  $RS'$  e  $R'S''$ , ou seja, podemos concluir que  $RR'$  e  $S'S''$  são concorrentes. Por outro lado, a reta  $S'S''$  deve interceptar o plano que contém os triângulos em apenas um ponto, que chamaremos  $O$ , portanto, todas as retas deste plano que forem concorrentes a  $S'S''$  deverão convergir a este ponto. Logo, as três retas  $PP'$ ,  $QQ'$ ,  $RR'$  são concorrentes no ponto  $O$ , como mostra a figura 34.

□

**Teorema 1.5.2.** *Teorema de Desargues – teorema recíproco*

*Se dois triângulos estão em perspectiva em relação a um ponto eles estão em perspectiva em relação a uma reta.*

*Demonstração.* Consideremos agora a situação oposta em que os triângulos  $PQR$  e  $P'Q'R'$

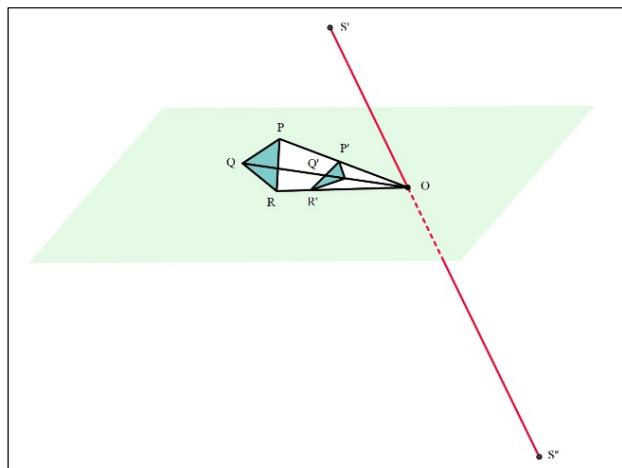


Figura 34 – As retas  $PP'$ ,  $QQ'$ ,  $RR'$  são concorrentes no ponto  $O$ .

são perspectivos em relação a um ponto  $O$  – figura 35. De maneira análoga à demonstração anterior, vamos considerar que os prolongamentos dos pares de lados correspondentes encontram-se nos pontos  $D$ ,  $E$ ,  $F$ . Basta-nos provar que os três pontos são colineares.

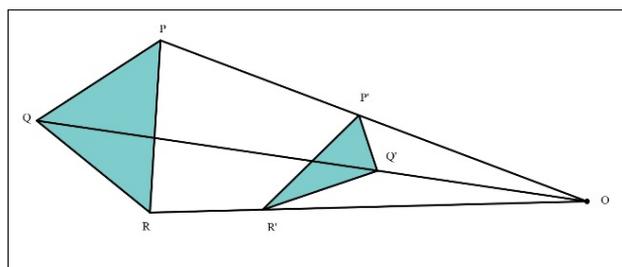


Figura 35 –  $PQR$  e  $P'Q'R'$  estão em perspectiva em relação a um ponto  $O$ .

Consideremos os triângulos  $PP'E$  e  $QQ'D$ . Os pares de lados correspondentes encontram-se nos três pontos colineares  $R$ ,  $R'$  e  $O$ , portanto, estes triângulos estão em perspectiva me relação a uma reta. Assim, pelo Teorema Direto, estão em perspectiva em relação a um ponto, e este ponto pode ser determinado encontrando-se o ponto de intersecção dos prolongamentos de  $PQ$  e  $P'Q'$ , ou seja, o ponto  $F$ . Logo,  $D$ ,  $E$ ,  $F$  são colineares, como mostra a figura 36. ((COXETER, 1987),(EFÍMOV, 1984)).

□

O Teorema de Desargues é uma propriedade dos triângulos que estão em perspectiva. Para este trabalho, nos interessa particularmente a relação entre o teorema e a homologia de figuras no plano. “Poncelet define duas figuras como sendo homólogas, quando uma pode ser obtida da outra, mediante uma sequência de projeções e seções” (HEFEZ, 1985). Na geometria euclidiana, duas figuras homólogas serão semelhantes, portanto, é fácil constatar a homologia. No entanto, como já vimos, a Geometria Projetiva não preserva formas, assim, é mais difícil constatar se duas figuras são ou não homólogas. O teorema de Desargues nos fornece um critério definirmos a homologia entre dois

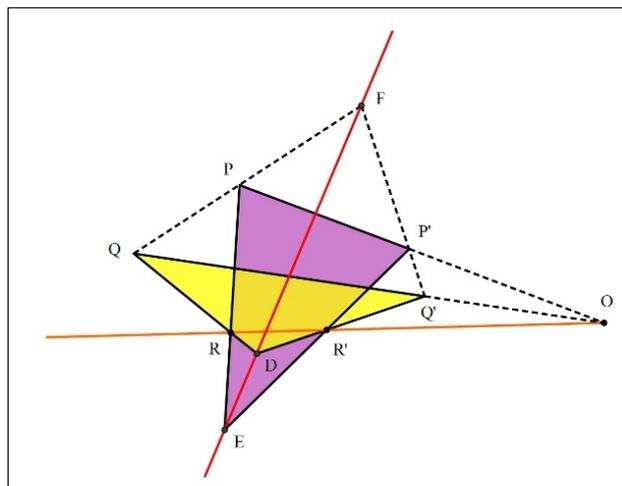


Figura 36 –  $D, E, F$  são colineares.

triângulos: dois triângulos serão homólogos se, e somente se, existir uma transformação geométrica que estabeleça uma relação biunívoca entre pontos e retas, de maneira que dois pontos correspondentes estejam alinhados a um terceiro ponto fixo, denominado Centro da Homologia; e retas correspondentes se encontrem sobre uma mesma reta, denominada Eixo da Homologia. A figura 37 ilustra esta situação.

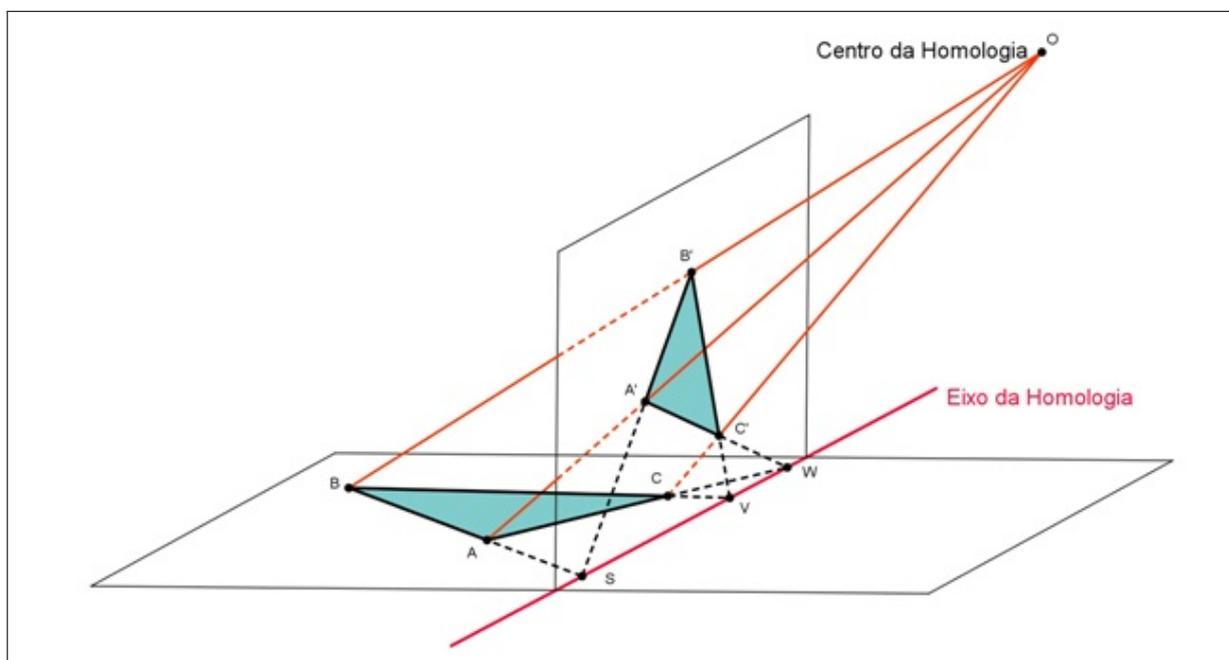


Figura 37 – O Teorema de Desargues e a Homologia de Triângulos.

Vejamos agora como estes resultados podem nos auxiliar. Na figura 38 temos uma situação em que talvez não seja fácil convencer-se da homologia entre as figuras, especialmente se levarmos em consideração nossa formação euclidiana, para a qual não é natural que um trapézio e um quadrado sejam homólogos.

Inicialmente vamos admitir que os quadriláteros  $ABCD$  e  $A'B'C'D'$  estejam em

perspectiva em relação ao ponto  $E$ . Se pudermos verificar as condições do Teorema de Desargues, mostraremos que estas figuras são homólogas. A figura 38 representa esta situação.

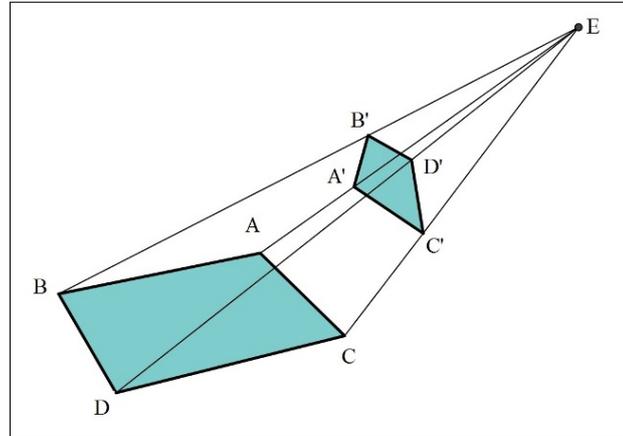


Figura 38 –  $ABCD$  e  $A'B'C'D'$  estão em perspectiva em relação ao ponto  $E$ .

Traçando as diagonais  $AD$  e  $A'D'$  dividimos os quadriláteros em triângulos. Vamos analisar estes triângulos separadamente. Observando os triângulos  $ADC$  e  $A'D'C'$  percebemos que os prolongamentos de seus lados correspondentes determinam três pontos colineares – figura 39. Neste caso, o Teorema de Desargues foi satisfeito, portanto,  $ADC$  e  $A'D'C'$  são homólogos.

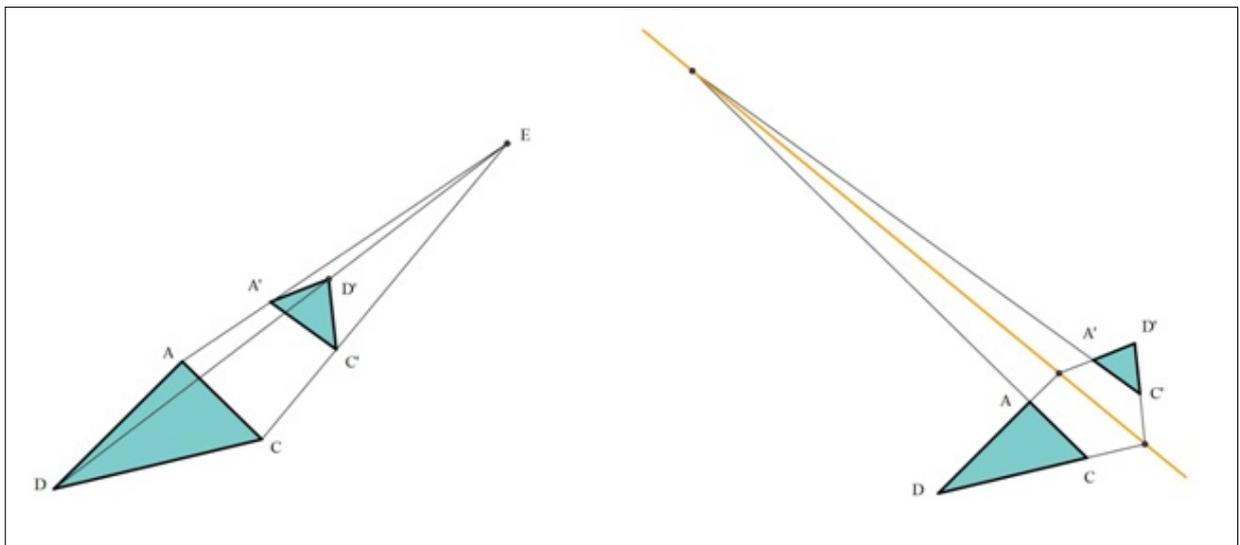


Figura 39 – Pelo Teorema de Desargues,  $ADC$  e  $A'D'C'$  são homólogos.

Da mesma forma, mostra-se que os triângulos  $ABD$  e  $A'B'D'$  são homólogos, pois estão em perspectiva desde um ponto e uma reta, como vemos na figura 40.

Se  $ABD$  é homólogo a  $A'B'D'$  e  $ADC$  é homólogo a  $A'D'C'$ , podemos afirmar que  $ABCD$  e  $A'B'C'D'$  são homólogos, ou seja, na Geometria Projetiva, um quadrado pode ser homólogo a um trapézio, pois as formas não são preservadas. Logo, se  $ABCD$

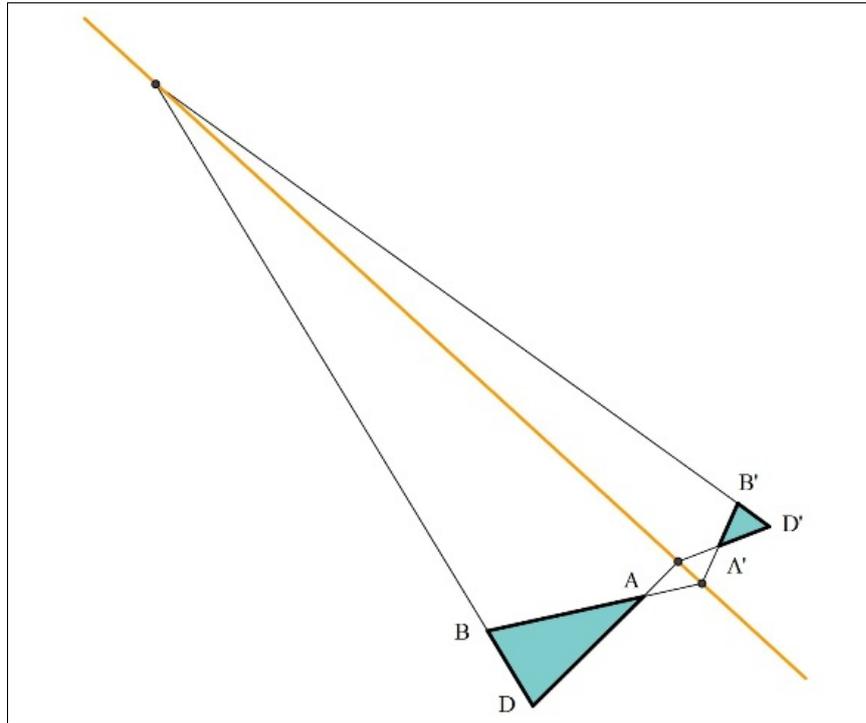


Figura 40 – Pelo Teorema de Desargues,  $ABD$  e  $A'B'D'$  são homólogos.

e  $A'B'C'D'$  são homólogos, então, existe o ponto  $O'$ , imagem de um ponto no infinito  $O$ , onde as retas paralelas  $AB$  e  $CD$  se encontram.

Como já foi dito no início da seção, encontramos na bibliografia várias formas diferentes de enunciar o Teorema de Desargues. Certamente, existe uma relação entre o processo histórico de amadurecimento da Geometria Projetiva e a condensação deste enunciado para formas cada vez mais sucintas e abrangentes.

Uma forma bastante interessante de enunciar o Teorema da Desargues é apresentada por Davi Hilbert ([HILBERT, 2003](#)). Vejamos o enunciado de Hilbert:

Quando dois triângulos estão num plano, de tal modo que cada dois lados correspondentes estão paralelos entre si, então as rectas de ligação dos vértices correspondentes passam por um mesmo ponto ou são paralelas entre si, e reciprocamente:

Quando dois triângulos estão num plano, de tal modo que as rectas que ligam os vértices correspondentes passam por um ponto ou são paralelas entre si, e quando, além disso, dois pares de lados correspondentes dos triângulos são paralelos, então os terceiros lados dos dois triângulos são também paralelos entre si ([HILBERT, 2003](#)).

A figura 41 representa o enunciado do Teorema de Desargues por Hilbert. Ele inicia, portanto, restringindo-se a triângulos coplanares, pelas razões que já mencionamos. Curiosamente, Hilbert entende que os lados correspondentes devem ser paralelos entre si, ou seja, para ele, os triângulos devem ser semelhantes, de um ponto de vista euclidiano. Conforme demonstramos acima, o resultado apresenta-se mais geral, não exigindo que os triângulos sejam semelhantes. No entanto, Hilbert considera uma possibilidade que não foi mencionada nos enunciados aqui apresentados, a possibilidade de as retas permanecerem paralelas.

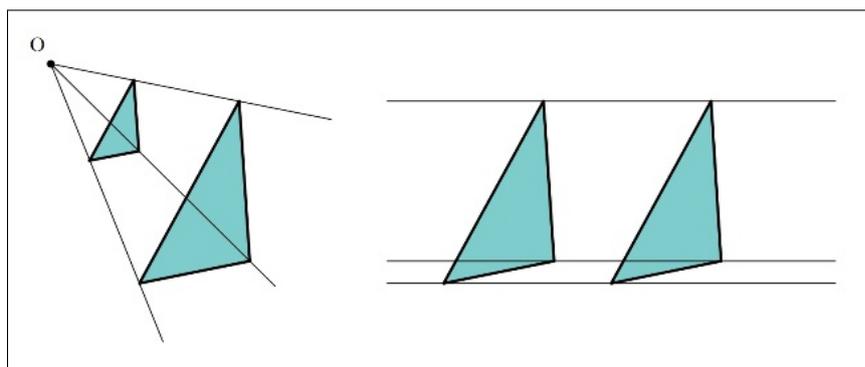


Figura 41 – O Teorema de Desargues por David Hilbert.

Como mostra a figura 41, o caso em que as retas permanecerem paralelas ocorre quando os triângulos forem exatamente congruentes. Haveria, portanto, um motivo para que os enunciados mais recentes do teorema desconsiderassem esta possibilidade? Na verdade, sim. Usando a própria ideia desarguiana de ponto no infinito, podemos admitir que o caso em que as retas permanecem paralelas é, de fato, um caso particular do caso geral em que as retas concorrem em um ponto  $O$ , quando este ponto  $O$  for, ele mesmo, um ponto no infinito. A perspectiva nos traduziria esta situação dizendo que, quanto mais distante (realmente muito distante) o observador estiver do objeto observado, as linhas projetivas tornar-se-ão cada vez mais paralelas. Este caso particular, em geral, não é tratado pela Geometria Projetiva, mas ele é bastante importante para entendermos a Geometria Descritiva pois a partir dele podemos definir os **sistemas projetivos**. Antes, porém, de tratarmos de sistemas projetivos e Geometria Descritiva, precisamos comentar outras contribuições importantes de Desargues à Geometria Projetiva: o teorema da bi-razão e os resultados sobre as seções cônicas.

#### 1.5.0.4 O Teorema da Bi-razão

Desargues descobriu outra propriedade invariante do método projetivo, a **bi-razão** de quatro pontos. Como vimos na seção anterior, Desargues estava interessado nas propriedades das perspectividades em relação a ponto e a reta. O teorema da bi-razão é uma propriedade das retas perspectivas em relação a um ponto, como podemos observar na figura 42.

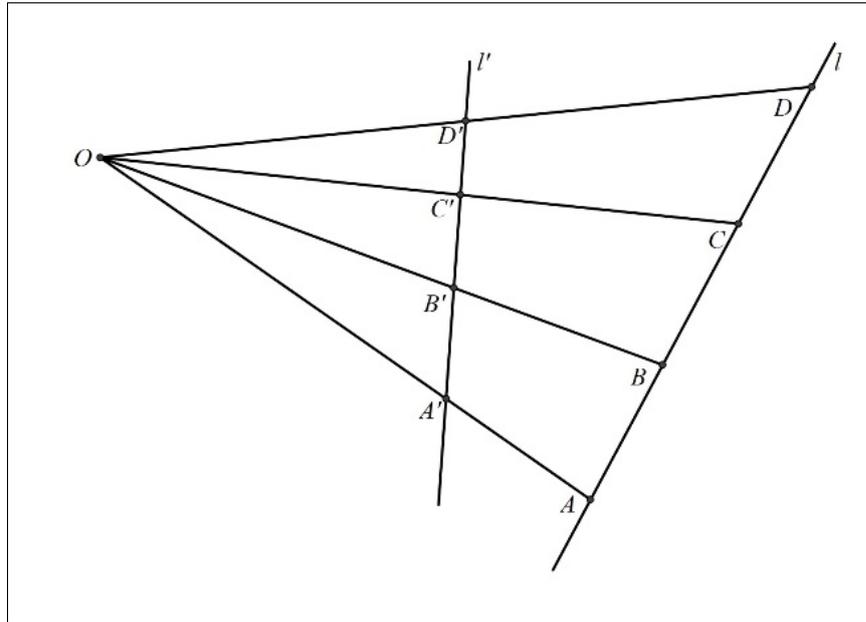


Figura 42 – O Teorema da Bi-razão de Desargues.

**Teorema 1.5.3.** *Teorema da bi-razão de Desargues*

Consideremos quatro pontos  $A, B, C, D$  sobre a reta  $l$ . Suas projeções em relação a um ponto arbitrário  $O$  estão sobre uma reta  $l'$  (na tela de vidro) e são, respectivamente,  $A', B', C', D'$ . Então,

$$\frac{CA/CB}{DA/DB} = \frac{C'A'/C'B'}{D'A'/D'B'}$$

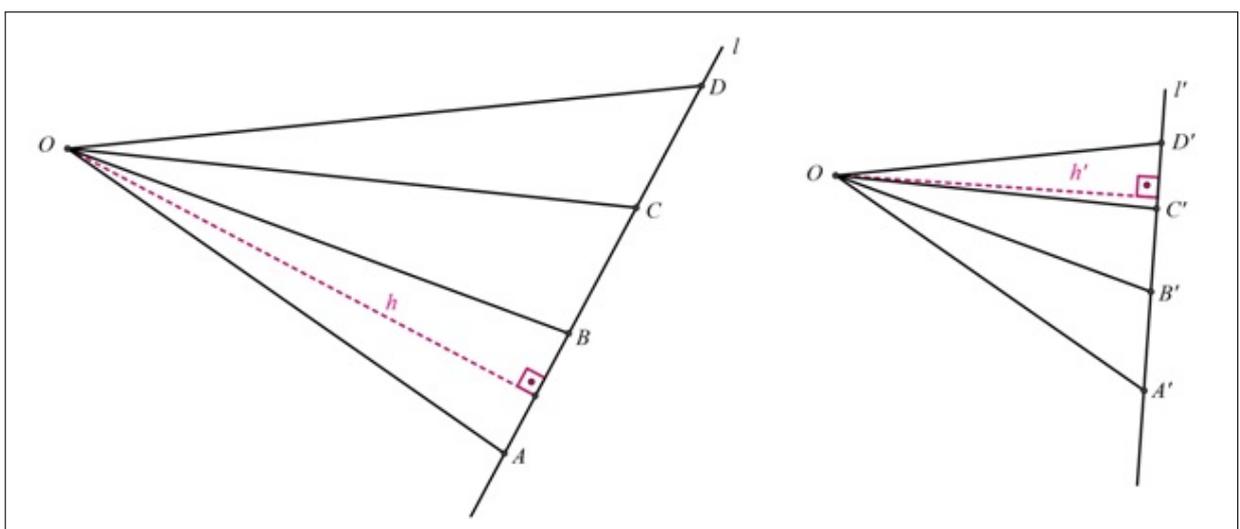


Figura 43 – Demonstração do Teorema da Bi-razão.

*Demonstração.* No triângulo  $AOD$  baixamos a altura  $h$  relativa à base  $AD$ . Do teorema das áreas da Geometria Euclidiana, temos que:

$$\frac{1}{2} \cdot CA \cdot h = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OC \cdot \text{sen}(\widehat{AOC})$$

$$\frac{1}{2} \cdot CB \cdot h = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot OC \cdot \text{sen}(\widehat{BOC}).$$

Portanto,

$$\frac{CA}{CB} = \frac{OA}{OB} \cdot \frac{\text{sen}(\widehat{AOC})}{\text{sen}(\widehat{BOC})}.$$

Da mesma forma,

$$\frac{DA}{DB} = \frac{OA}{OB} \cdot \frac{\text{sen}(\widehat{AOD})}{\text{sen}(\widehat{BOD})}.$$

Logo:

$$\frac{CA/CB}{DA/DB} = \frac{\text{sen}(\widehat{AOC})}{\text{sen}(\widehat{BOC})} \cdot \frac{\text{sen}(\widehat{AOD})}{\text{sen}(\widehat{BOD})}. \quad (1.1)$$

De maneira análoga, no triângulo  $A'OD'$  baixamos a altura  $h'$  relativa à base  $A'D'$ . Do teorema das áreas da Geometria Euclidiana, temos que:

$$\frac{1}{2} \cdot C'A' \cdot h = \frac{1}{2} \cdot OA' \cdot OC' \cdot \text{sen}(\widehat{AOC'})$$

$$\frac{1}{2} \cdot C'B' \cdot h = \frac{1}{2} \cdot OB' \cdot OC' \cdot \text{sen}(\widehat{BOC'}).$$

Portanto,

$$\frac{C'A'}{C'B'} = \frac{OA'}{OB'} \cdot \frac{\text{sen}(\widehat{AOC'})}{\text{sen}(\widehat{BOC'})}.$$

Da mesma forma,

$$\frac{D'A'}{D'B'} = \frac{OA'}{OB'} \cdot \frac{\text{sen}(\widehat{AOD'})}{\text{sen}(\widehat{BOD'})}.$$

Logo:

$$\frac{C'A'/C'B'}{D'A'/D'B'} = \frac{\text{sen}(\widehat{AOC'})}{\text{sen}(\widehat{BOC'})} \cdot \frac{\text{sen}(\widehat{AOD'})}{\text{sen}(\widehat{BOD'})}. \quad (1.2)$$

Comparando as equações 1.1 e 1.2, concluímos que

$$\frac{CA/CB}{DA/DB} = \frac{C'A'/C'B'}{D'A'/D'B'}.$$

□

## 1.6 O Plano Projetivo Real $\mathbb{RP}^2$

Consideremos o plano euclidiano  $\pi$  de equação  $Z = 1$ , no espaço tridimensional. Neste sistema, existem dois tipos de retas que passam pela origem ( $O$ ): as contidas em  $Z = 0$  e, portanto, paralelas a  $\pi$ ; e as que interceptam o plano  $\pi$  em um ponto. Desta forma, cada reta que passa pela origem e não está contida no plano  $Z = 0$ , é associada a um, e somente um, ponto  $P$  sobre o plano  $\pi$ , o que quer dizer que o ponto  $P$  é o representante em  $\pi$  de todos os pontos desta reta.

Por outro lado, uma reta contida em  $\pi$  é a representante de um plano secante a  $\pi$  e que contém a origem. De maneira análoga, se duas retas do plano  $\pi$  são concorrentes, elas determinam um ponto sobre  $\pi$  e voltamos ao primeiro caso considerado. Porém, se duas retas em  $\pi$  forem paralelas, os planos que elas determinam com a origem concorrem em uma reta de  $Z = 0$  que contenha  $(0, 0, 0)$ . Estas situações são descritas graficamente na figura a seguir.

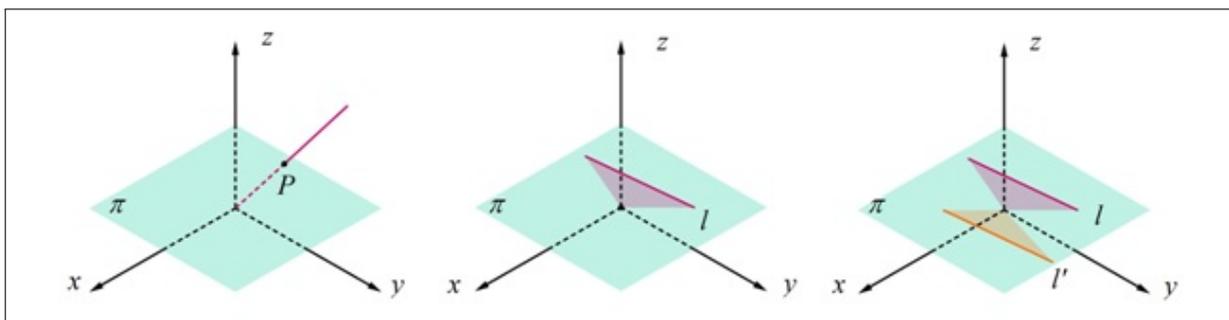


Figura 44 – Pontos e retas em  $\pi : Z = 1$ .

**Definição 1.6.1.** O Plano Projetivo Real <sup>20</sup>  $\mathbb{RP}^2$  é o conjunto das retas do espaço tridimensional passando pela origem.

Baseados nas considerações anteriores e na definição 3.1 podemos identificar os elementos do plano projetivo.

O **ponto projetivo**  $P$  de  $\mathbb{RP}^2$  é uma classe de equivalência. Ele representa a reta ligando a origem  $O$  a um ponto  $(x, y, z) \neq 0$ , ou seja, o ponto projetivo é, na verdade, uma reta passando pela origem. As coordenadas de  $P$  serão denotadas por  $(x : y : z)$ . Esta notação é atribuída a Möbius e Plücker e significa que  $x, y, z$  são **coordenadas homogêneas** do ponto  $P$ . São chamadas de homogêneas porque toda curva algébrica em  $\mathbb{RP}^2$  pode ser representada por uma equação polinomial homogênea

<sup>20</sup> Todas as definições podem ser estendidas para o espaço vetorial complexo. Entretanto, para o intuito deste trabalho, consideramos suficiente e apropriado nos limitarmos ao  $\mathbb{RP}^2$ .

$p(X, Y, Z) = 0$ . Portanto,  $(x : y : z) = (x' : y' : z')$  se, e somente se, existe  $\lambda \neq 0$  tal que  $(x, y, z) = \lambda(x', y', z')$ .

Existem dois tipos de pontos projetivos: aqueles em que  $z = 0$  e aqueles em que  $z \neq 0$ . Todo o ponto projetivo em que  $z \neq 0$ , possui um representante em  $\pi : Z = 1$ , e suas coordenadas podem ser desomogeneizadas para  $P = (\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1)$ . Os pontos  $P = (x, y, 0)$  são os pontos que não possuem representantes em  $\pi : Z = 1$  e, portanto, são chamados de **pontos ideais** ou **pontos no infinito**. Quando dizemos que um ponto  $P$  possui um correspondente em  $Z = 1$ , queremos dizer que a reta que liga a origem  $O$  ao ponto  $P$ , define sobre  $Z = 1$ , um ponto ao qual estamos chamando de correspondente de  $P$ . No entanto, se  $P$  for um ponto do plano  $Z = 0$ , a reta que liga a origem a  $P$  não determina nenhum ponto sobre  $Z = 1$ . Este ponto que deveria ser determinado, mas fica faltando é o ponto no infinito. Outra consideração importante sobre estes dois tipos de pontos projetivos é que eles nos ajudam a entender que o plano projetivo real possui dimensão dois, daí  $\mathbb{RP}^2$ . A terceira coordenada nos indica se o ponto projetivo é um ponto que pode ser representado em  $\pi$ , ou se é um ponto no infinito, particionando o espaço tridimensional em duas classes de equivalência: ter correspondente em  $\pi$  ou ser um ponto no infinito. A denominação *plano* está muito mais associada ao fato de possuir duas dimensões do que propriamente com a ideia de plano euclidiano.

Da mesma forma que definimos pontos projetivos como retas que passam por  $O$ , **retas projetivas** serão planos que passam por  $O$ , como podemos ver na figura 45.

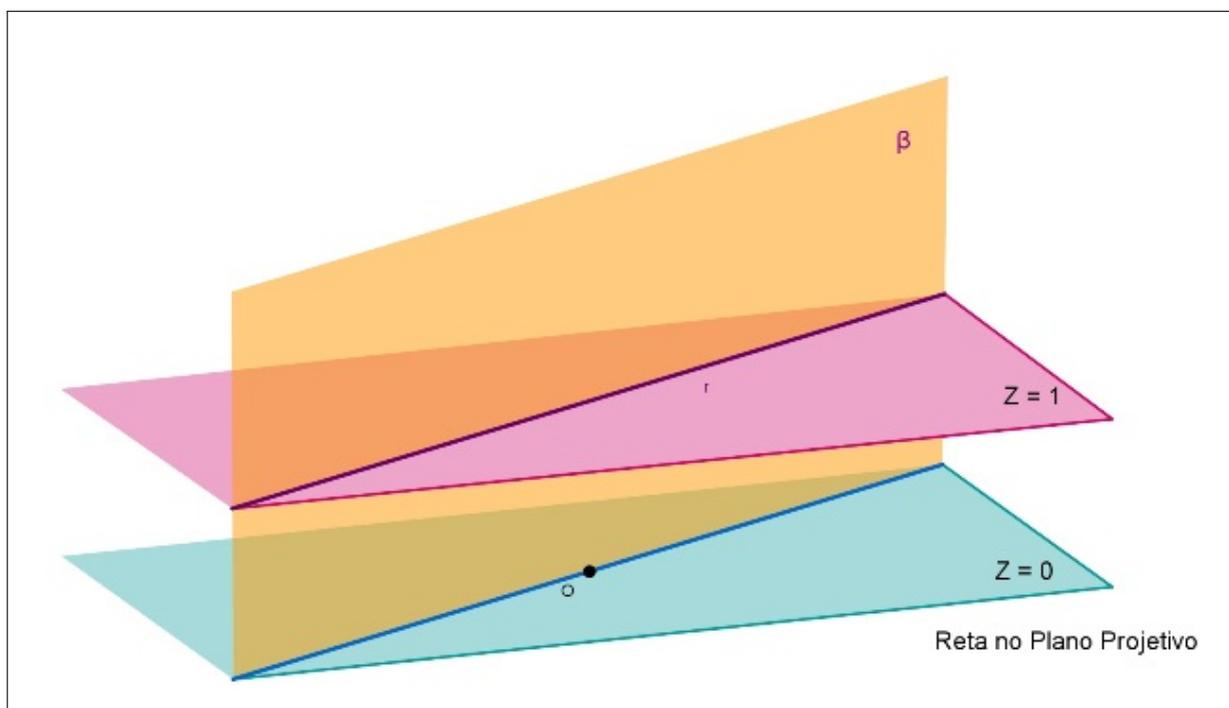


Figura 45 – Retas no Plano Projetivo.

Consideremos, agora, as seguintes situações: primeiramente, duas retas concorren-

tes em  $Z = 1$ . Estas retas concorrem em um ponto, que, como já vimos anteriormente, define uma reta passando por  $O$ . Na segunda situação, figura 46, vamos considerar o caso em que as retas sejam paralelas. Neste caso, cada uma delas define com a origem  $O$  um plano. Estes planos concorrem em uma reta de  $Z = 0$  que contém  $O$ . Esta reta é chamada de **Reta no Infinito** (pois está em  $Z = 0$ ) e representa o ponto projetivo onde duas retas projetivas paralelas se encontram.

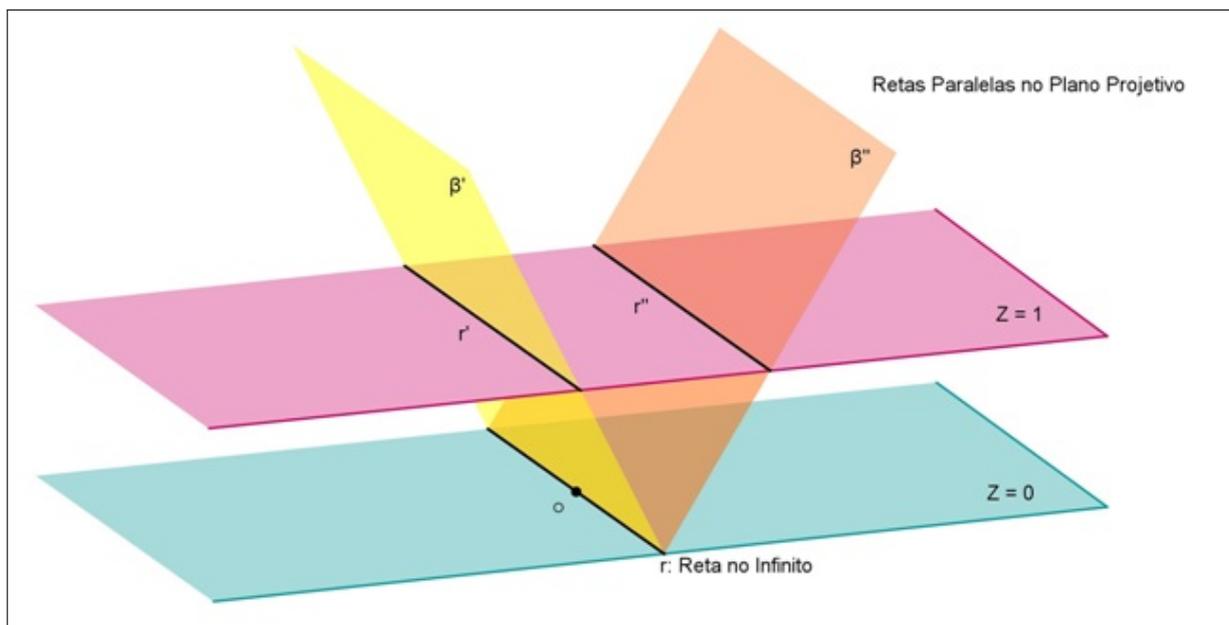


Figura 46 – Retas Paralelas no Plano Projetivo.

Assim, na Geometria Projetiva: duas retas distintas sempre se intersectam em um ponto projetivo. Como vimos acima, ainda que as retas sejam paralelas em  $\pi$ , elas representam planos distintos que contém o ponto  $O$ , ou seja, são planos concorrentes em uma reta que contém  $O$  ((HEFEZ, 1985), (STILLWELL, 2010), (VAINSENER, 2009)).

As situações descritas acima constituem os Axiomas de Incidência da Geometria Projetiva.

#### 1.6.0.5 Axiomas de Incidência da Geometria Projetiva.

**Axioma 1.6.1.** *Dois pontos distintos determinam uma e somente uma reta com a qual são incidentes.*

Este axioma é apenas um pouco mais forte que o seu equivalente na Geometria Euclidiana. O axioma euclidiano diz que dois pontos distintos determinam uma reta com a qual são incidentes. Como já vimos, na Geometria Projetiva, pontos e retas são classes de equivalência. Não existem, portanto, retas coincidentes como na Geometria Euclidiana, cada reta é a representante de uma classe de equivalência.

**Axioma 1.6.2.** *Duas retas distintas determinam um e somente um ponto com a qual são incidentes.*

O axioma relacionado a este na Geometria Euclidiana diz que duas retas distintas têm no máximo um ponto com a qual são incidentes, ou seja, deixa a possibilidade de não haver nenhum ponto em comum entre elas (paralelismo). O axioma da Geometria Projetiva não prevê esta possibilidade, quaisquer duas retas projetivas concorrem em um ponto projetivo.

Segundo Hefez, “os axiomas de incidência da Geometria Projetiva não contradizem nenhum axioma da Geometria Euclidiana. Trata-se tão somente de ajustar as coisas à nível de semântica. Duas retas são paralelas se e somente se elas se encontram no infinito no plano projetivo” (HEFEZ, 1985).

Apesar de entendermos o exercício de semântica utilizado no raciocínio anterior e de a maioria dos autores não se deter no mérito do não-euclidianismo da Geometria Projetiva, não podemos ignorar que o próprio Felix Klein que em 1871 nomeou as geometrias de Lobachevsky, Euclides e Riemann de geometria hiperbólica, parabólica e elíptica, respectivamente; considerou geometria projetiva independente no tocante à teoria das paralelas. Para Klein, suas aplicações eram tão potentes quanto as da geometria hiperbólica ou elíptica ((COXETER, 1987), (EVES, 2011)).

Portanto, neste trabalho, devido aos objetivos que pretendemos alcançar juntos aos estudantes, consideramos que a Geometria Projetiva é uma geometria não-euclidiana, pois não observa o postulado das paralelas.

#### 1.6.0.6 Relação entre $\mathbb{RP}^2$ e a perspectiva.

Para compreendermos a relação entre o Plano Projetivo Real e o que vínhamos estudando sobre perspectiva, basta fazermos algumas alterações na disposição dos elementos apresentados.

O ponto  $O$  corresponde ao olho do observador. Os objetos (pontos, retas e planos) são vistos a partir de  $O$ , daí os autores considerarem  $\mathbb{RP}^2$  perfurado na origem. O plano  $\pi$  corresponde ao rebatimento do plano imagem sobre o Plano de Solo. Aqui consideramos  $\pi : Z = -1$ , apenas por comodidade, para adequar a estrutura ao formato que já vínhamos adotando de o olho estar acima do Plano de Solo.

As retas que ligam  $O$  aos pontos de  $\pi$  não são retas projetivas pois, na perspectiva, ocupam o lugar de linhas de projeção, não são retas a serem desenhadas. Conforme o olho dirige-se a  $P_n$  no infinito, a linha de projeção tende para a horizontal, ou seja, ela tende a uma reta que passa por  $O$  e é paralela à reta que contém os pontos  $P_1, P_2, \dots, P_n$ . Este esquema está representado na figura 47.

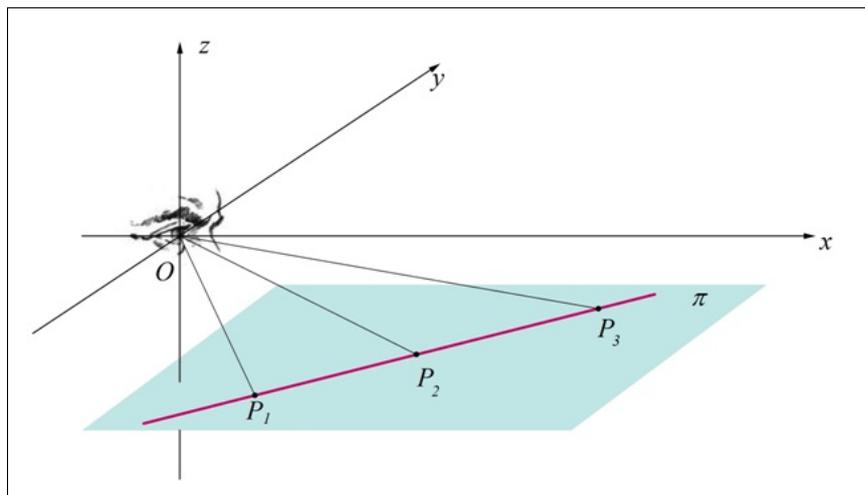


Figura 47 – Pontos e retas em  $\pi : Z = -1$ .

Outra ideia interessante é que uma reta possui apenas um ponto no infinito ( $P_n$ ), pois as linhas de projeção convergem para apenas uma reta horizontal. Mas, como a reta projetiva possui duas extremidades, Kepler e Desargues imaginaram que, em algum momento, estas extremidades se encontrariam em um único ponto no infinito. Ou seja, eles imaginaram que a reta projetiva era, portanto, um círculo.

Desta concepção, Felix Klein em 1874 imaginou o  $\mathbb{RP}^2$  como uma esfera perfurada na origem com um par de pontos antipodais, ou seja, um par de pontos diametralmente opostos, como na figura a seguir.

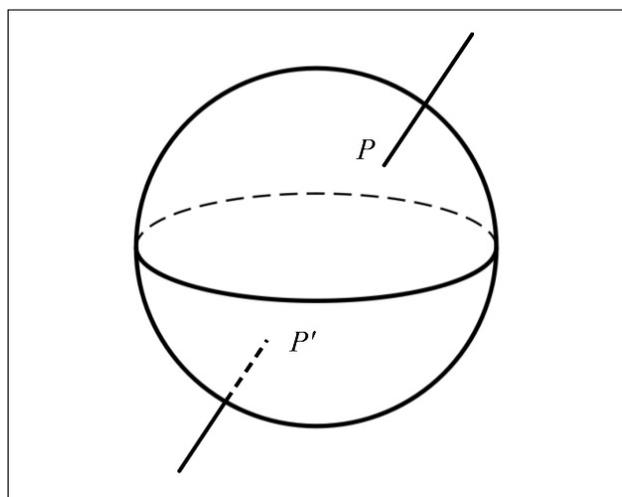


Figura 48 – O Plano Projetivo Real com um par de pontos antipodais.

Identificar os pontos  $P, P'$  significa tratar o par  $(P, P')$  como um único ponto, o que é adequado visto que o par corresponde a uma única reta por  $O$ , ou seja, um único ponto de  $\mathbb{RP}^2$ .

### 1.6.0.7 A Vista Projetiva das Cônicas

Como já vimos anteriormente foi Desargues quem formalizou a ideia de ponto no infinito. Porém, antes deles, Kepler em 1604 já havia introduzido informalmente este conceito. Ao seccionar continuamente um cone por um plano, Kepler percebeu que o círculo transforma-se numa elipse que se transforma numa parábola e a seguir numa hipérbole. Para explicar o que ocorre da passagem da elipse para a parábola, Kepler imaginou que um dos focos da elipse iria para o infinito para mais tarde reaparecer do outro lado (HEFEZ, 1985). A figura 49 ilustra a ideia de Kepler.

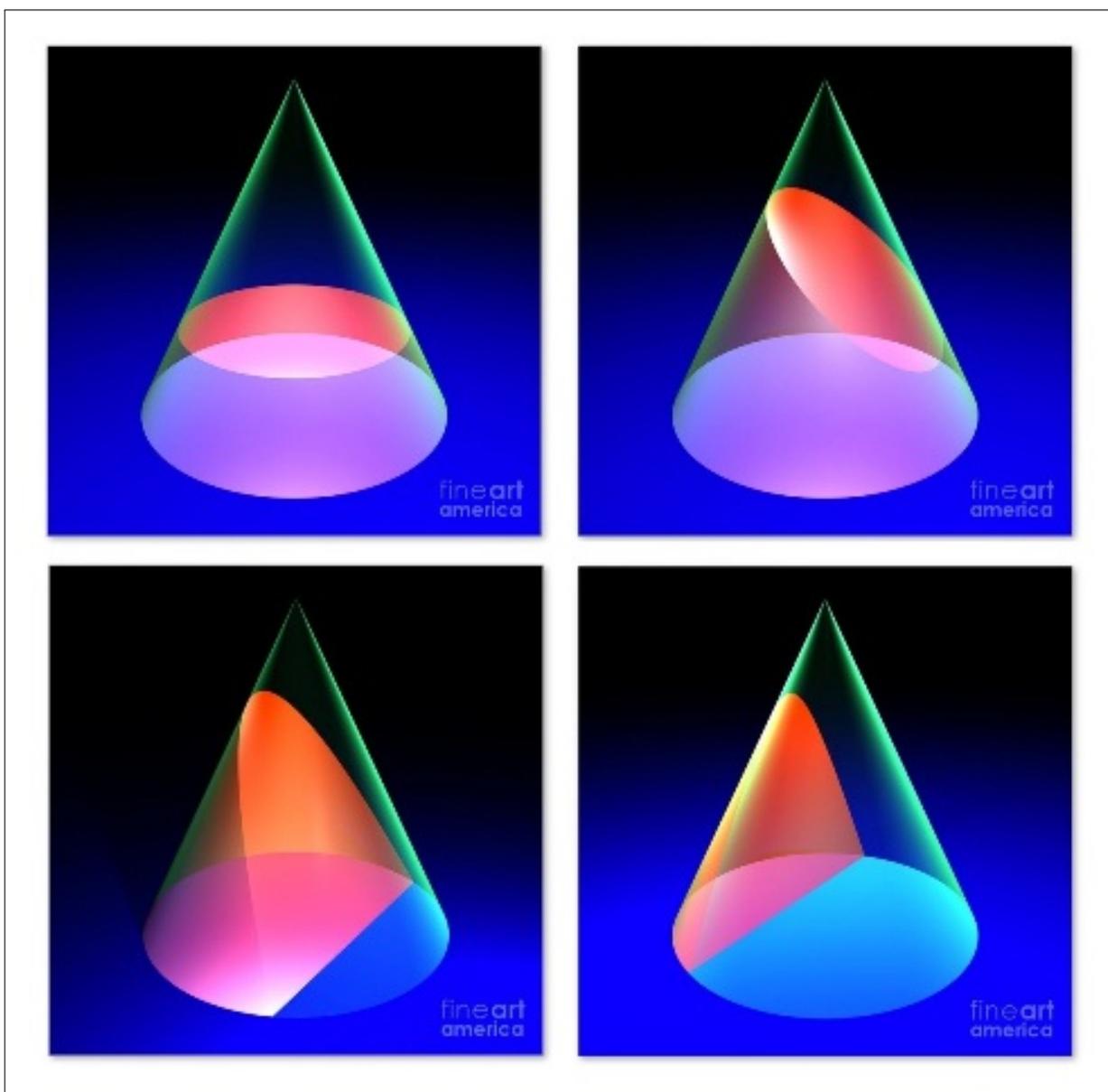


Figura 49 – As seções cônicas.  
Fonte - Imagens do site *fine art america*.<sup>21</sup>

<sup>21</sup> Endereço eletrônico das imagens  
<http://fineartamerica.com/art/all/conic+section/all>

Em seu tratado de 1639, aprimorando o trabalho de Kepler, Desargues distinguia a elipse, parábola e hipérbole pelo número de pontos no infinito: 0, 1, e 2, respectivamente.

Dos resultados referentes aos anéis de polinômios, sabemos que um polinômio de grau  $n$  possui exatamente  $n$  zeros no corpo dos complexos. No entanto, dizemos que a parábola  $Y = X^2$  possui duas raízes reais repetidas, ou uma raiz real com multiplicidade dois. Geometricamente, a multiplicidade dois não pode ser visualizada, pois, ao traçarmos a curva  $Y = X^2$ , observamos apenas um único ponto de intersecção com a reta  $X = 0$ . Portanto, geometricamente, somos levados a considerar que nos falta um ponto de intersecção. A Geometria Projetiva propõe que, na verdade, este ponto que falta, é um ponto no infinito. Quando projetamos uma parábola por projeção central ela tende a aproximar-se de uma elipse, revelando a segunda raiz, como mostra a figura a seguir.

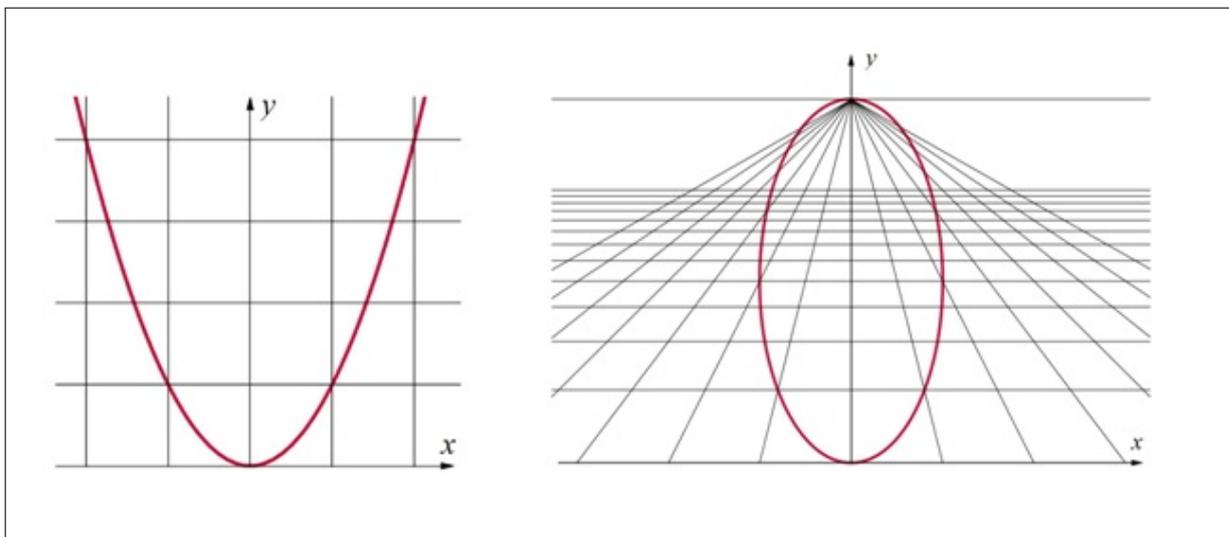


Figura 50 – O *ponto no infinito* da parábola  $Y = X^2$ .

Por semelhante modo, uma hipérbole não encontra suas assíntotas a uma distância finita. Embora expliquemos aos nossos alunos o significado desta aproximação assintótica entre os ramos da hipérbole e as assíntotas, é muito mais natural pensarmos que, em algum momento, eles de fato se encontram.

Na figura 51, tomamos como exemplo o ramo positivo da hipérbole  $-4X^2 + Y^2 - 4 = 0$  e suas assíntotas  $2X - Y = 0$  e  $2X + Y = 0$ . Naturalmente, não há pontos de intersecção entre a cônica e as retas. Porém, quando utilizamos uma disposição em perspectiva, podemos perceber que o ramo positivo da hipérbole comporta-se como uma parábola e intersecciona as assíntotas em dois pontos, um à esquerda e outro à direita. Desta forma, dizemos que a imagem de uma hipérbole por projeção central é uma parábola, e que esta parábola intersecciona as imagens das assíntotas na linha de fuga (linha no infinito) em dois pontos (pontos no infinito). Assim, a Geometria Projetiva propõe que a hipérbole é a cônica que possui dois pontos no infinito.

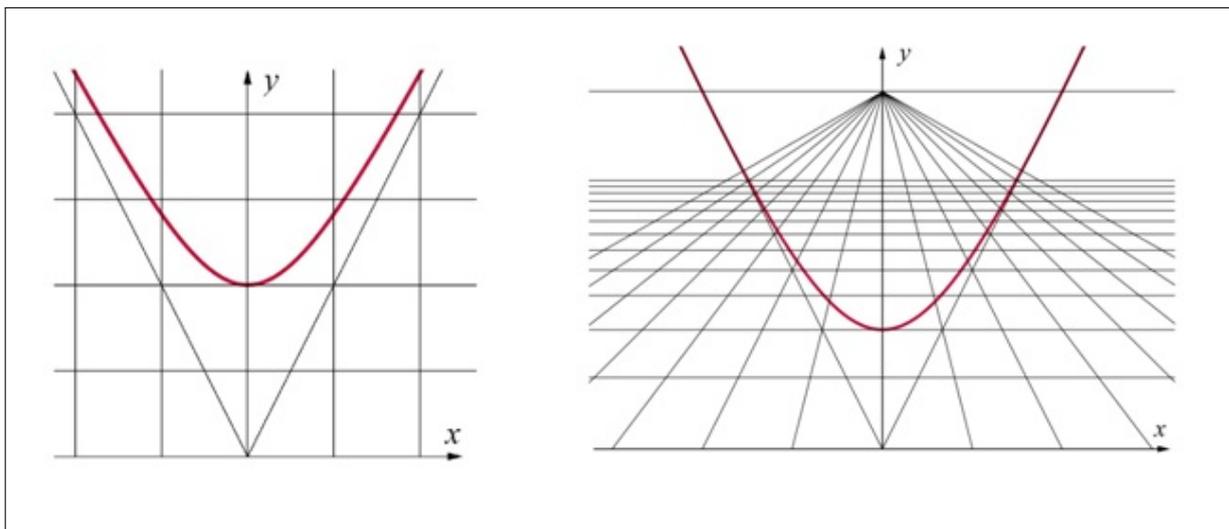


Figura 51 – Os *pontos no infinito* de uma hipérbole.

A elipse não possui pontos no infinito, pois ao projetarmos uma elipse por projeção central, obteremos outra elipse. Da mesma forma, uma circunferência, projeta uma elipse, daí dizermos que a Geometria Projetiva não possui círculos.

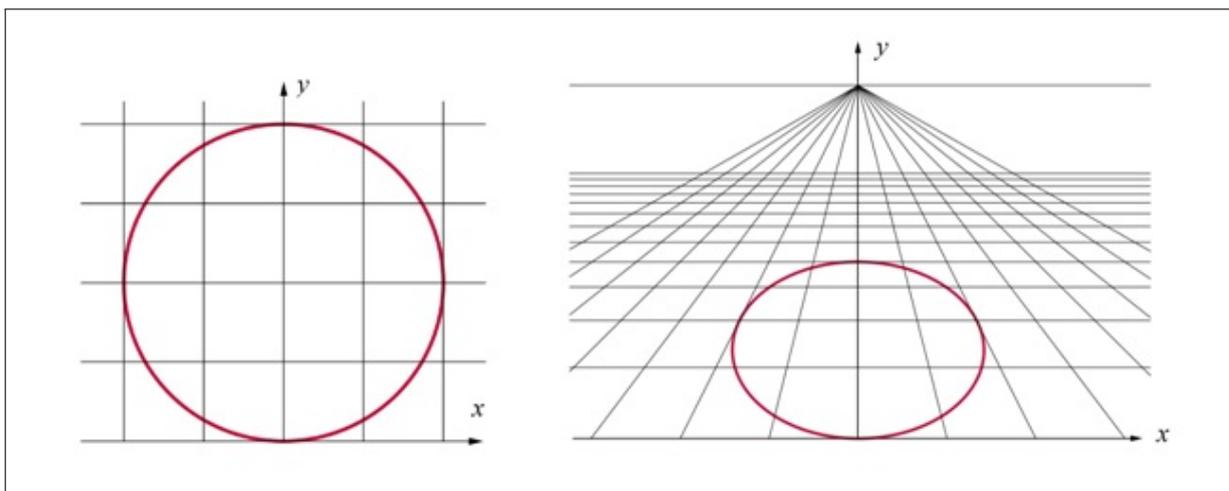


Figura 52 – Uma circunferência projeta uma elipse.

Dos exemplos apresentados acima podemos inferir outra propriedade invariante das seções e muito importante para o desenho em perspectiva. **A imagem de uma seção cônica por projeção central é sempre uma seção cônica.**

#### 1.6.0.8 Coordenadas Homogêneas e Pontos no Infinito.

Vamos agora usar as coordenadas homogêneas para analisar três resultados importantes que já foram mencionados aqui. O primeiro é que retas paralelas possuem um ponto em comum (um ponto ideal), depois exibiremos o ponto no infinito da parábola

$Y = X^2$  e, finalmente, mostraremos que a hipérbole  $XY = 1$  intercepta sua assíntota  $X = 0$ . Começaremos, portanto, pelo caso das retas paralelas.

Sejam as retas paralelas  $r_1 : aX + bY + c' = 0$  e  $r_2 : aX + bY + c'' = 0$ . Homogeneizando ambas as equações, obteremos  $r_1 : ax + by + c'z = 0$  e  $r_2 : ax + by + c''z = 0$ . Como desejamos encontrar o ponto ideal, devemos tomar  $z = 0$ . Logo,  $r_1 : ax + by = 0$  e  $r_2 : ax + by = 0$ . Resolvendo o sistema de equações homogêneas, encontramos  $x = b$  e  $y = -a$ . Portanto, as retas paralelas  $r_1$  e  $r_2$  se cruzam no infinito no ponto ideal  $(b : -a : 0)$ .

Consideremos agora o caso da parábola  $Y = X^2$ . Homogeneizando a equação obteremos  $zy - x^2 = 0$ . Se tomarmos  $z = 1$ , encontraremos o ponto trivial em que a parábola intersecta  $X = 0$ , ou seja,  $(0 : 0 : 1)$ . Mas este não é um ponto ideal, estamos interessados em pontos do tipo  $z = 0$ . Portanto, se  $z = 0$ , então, necessariamente,  $x = 0$  e  $y = 0$  ou  $y = 1$ . O ponto  $(0 : 0 : 0)$  obviamente não nos interessa, portanto, devemos tomar  $y = 1$ . Assim, o ponto no infinito de  $Y = X^2$  é  $(0 : 1 : 0)$ .

Finalmente, a equação homogeneizada da hipérbole  $XY = 1$  é  $xy - z^2 = 0$ . Se considerarmos  $z = 0$ , obteremos  $xy = 0$ . Desconsiderando o caso em que  $x = y = 0$ , encontramos dois pontos ideais para a hipérbole:  $(1 : 0 : 0)$  que será a intersecção com a assíntota  $Y = 0$  e  $(0 : 1 : 0)$  que é a intersecção com a assíntota  $X = 0$ . Esta última situação é representada na figura a seguir.

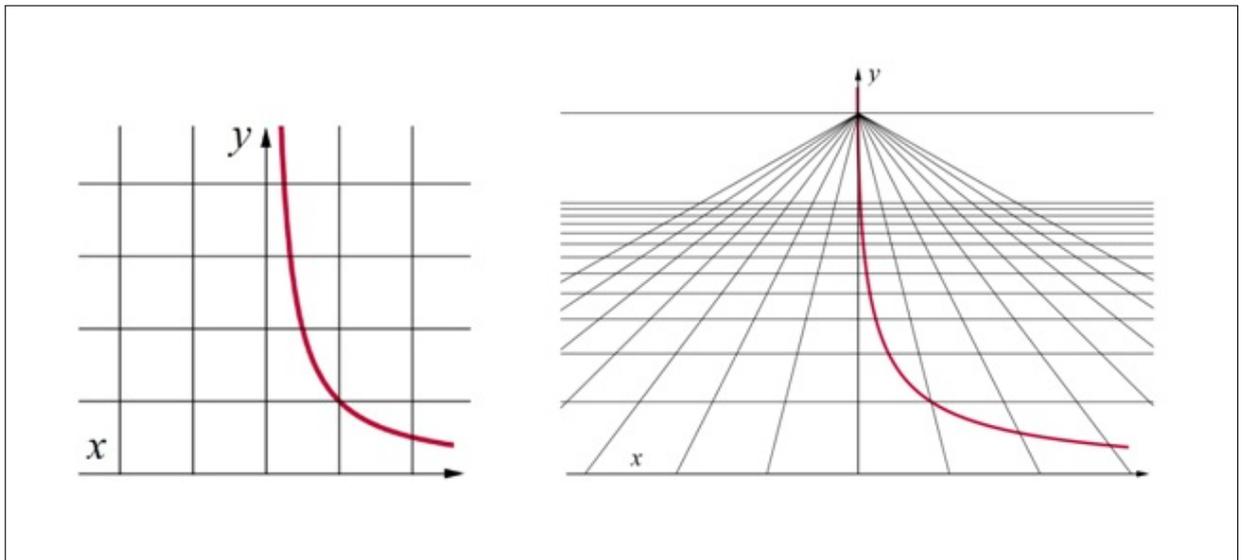


Figura 53 – A hipérbole  $XY = 1$  encontra sua assíntota  $X = 0$ .

Outro resultado importante envolvendo as seções cônicas é o Teorema de Pascal, nosso próximo assunto.

## 1.7 O Teorema de Pascal

Um dos poucos contemporâneos de Desargues que valorizou seu trabalho foi Blaise Pascal. Procurando estender os resultados do famoso teorema de Desargues, em 1640, Pascal, então com 16 anos, encontrou outro invariante da Geometria Projetiva: se um hexágono estiver inscrito em uma cônica, as intersecções de seus pares de lados opostos serão pontos colineares. Este resultado tornou-se tão célebre quanto o dos triângulos em perspectiva (Desargues), e a reta que contém os três pontos passou a ser conhecida como **reta de Pascal**.

Acredita-se que Pascal demonstrou inicialmente o teorema para hexágonos inscritos em círculos usando teoremas da Geometria Euclidiana e o Teorema de Menelaus e ampliando seus resultados para as cônicas. Contudo, esta prova teria se perdido. Alguns autores consideram dois teoremas distintos: o hexágono inscrito em uma cônica e o hexágono inscrito em uma circunferência. Aqui usaremos ideia semelhante a de Pascal. Vamos demonstrar o teorema para um hexágono inscrito em uma circunferência. Este é um método recorrente na Geometria Projetiva, “consiste em encontrar uma figura mais simples do que a original e homóloga a ela, estudar as suas propriedades que são invariantes por projeções e seções e assim obter propriedades da figura mais complexa” (HEFEZ, 1985).

Não pudemos determinar o motivo pelo qual o teorema ficou conhecido como *Hexagrama Místico*. Mas certamente há ligação entre esta denominação e a religiosidade fervorosa de Pascal.

A seguir, enunciaremos o Teorema de Menelaus para utilizarmos seu resultado na demonstração do Teorema de Pascal.

### **Teorema 1.7.1.** *Teorema de Menelaus*

*Dado um triângulo  $ABC$ , e uma reta transversal que corta  $AC$ ,  $BC$  e  $AB$  nos pontos  $E$ ,  $D$  e  $F$ , respectivamente, então,*

$$\frac{BF}{AF} \cdot \frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} = 1$$

*Inversamente, se  $E$ ,  $D$  e  $F$  são pontos sobre os lados  $AC$ ,  $CB$  e  $AB$  do triângulo  $ABC$  tais que*

$$\frac{BF}{AF} \cdot \frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} = 1$$

*Então,  $E$ ,  $D$  e  $F$  são colineares.*

*Demonstração.* Nas condições descritas pelo enunciado, baixamos perpendiculares à reta transversal por  $A$ ,  $C$  e  $B$ , determinando sobre ela os pontos  $P$ ,  $Q$  e  $R$ , respectivamente.

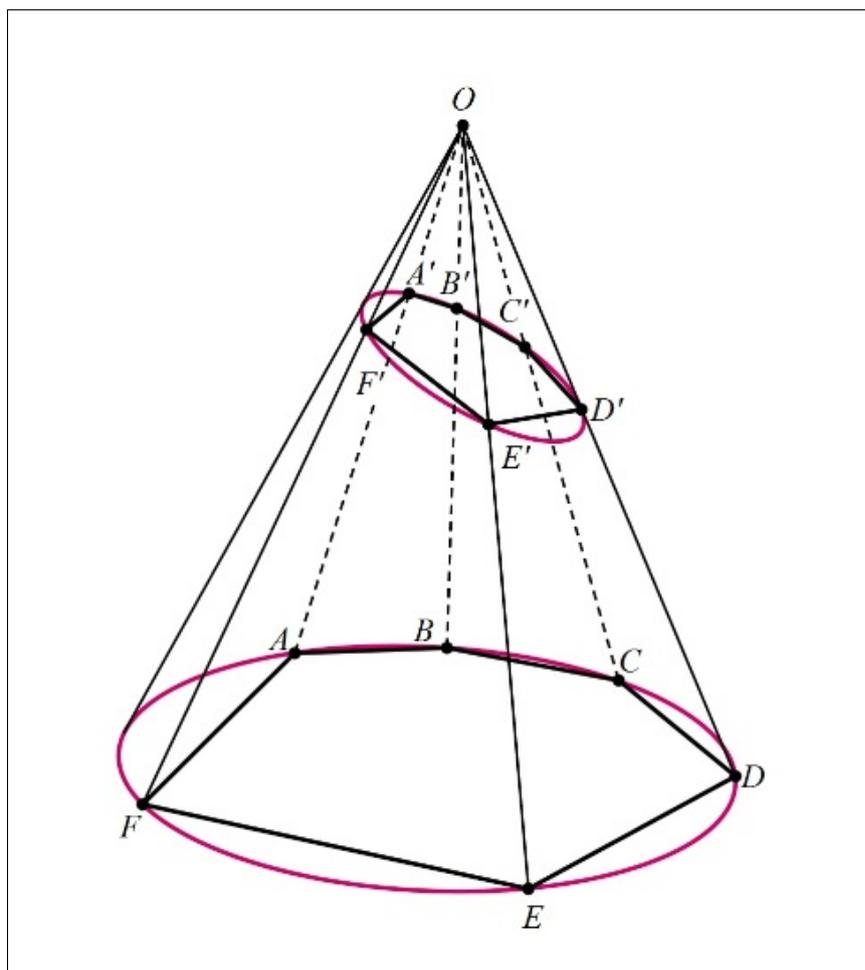


Figura 54 – O Teorema de Pascal estendido para as cônicas pelo método de projeções e seções.

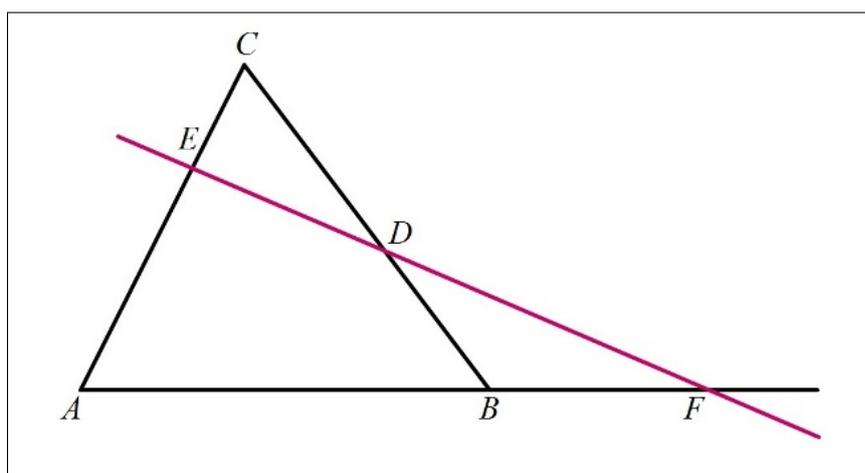


Figura 55 – Teorema de Menelaus.

A figura 56 ilustra esta situação.

Os triângulos  $ECQ$  e  $EAP$  são semelhantes, portanto:

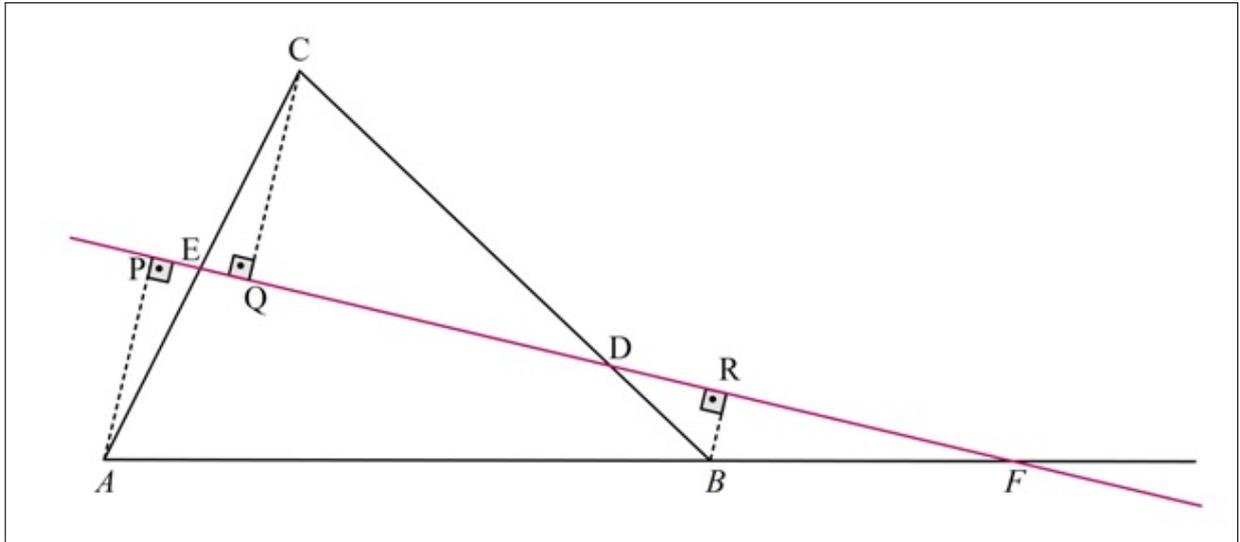


Figura 56 – Triângulos semelhantes no Teorema de Menelaus.

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AP}{CQ}.$$

De maneira análoga,  $\Delta CQD \sim \Delta DRB$  e  $\Delta APF \sim \Delta BRF$ . Logo:

$$\frac{CD}{DB} = \frac{CQ}{BR}$$

$$\frac{BF}{AF} = \frac{RB}{PA}.$$

Assim:

$$\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BF}{AF} = \frac{AP}{CQ} \cdot \frac{CQ}{BR} \cdot \frac{RB}{PA} = 1.$$

Portanto:

$$\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BF}{AF} = 1.$$

Suponhamos agora que

$$\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BF}{AF} = 1$$

mas os pontos  $E$ ,  $D$  e  $F$  não são colineares. Vamos supor um ponto  $E'$  como intersecção da reta  $DF$  com o lado  $AC$  de  $ABC$ .

Pelo item anterior, sabemos que

$$\frac{AE'}{E'C} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BF}{AF} = 1.$$

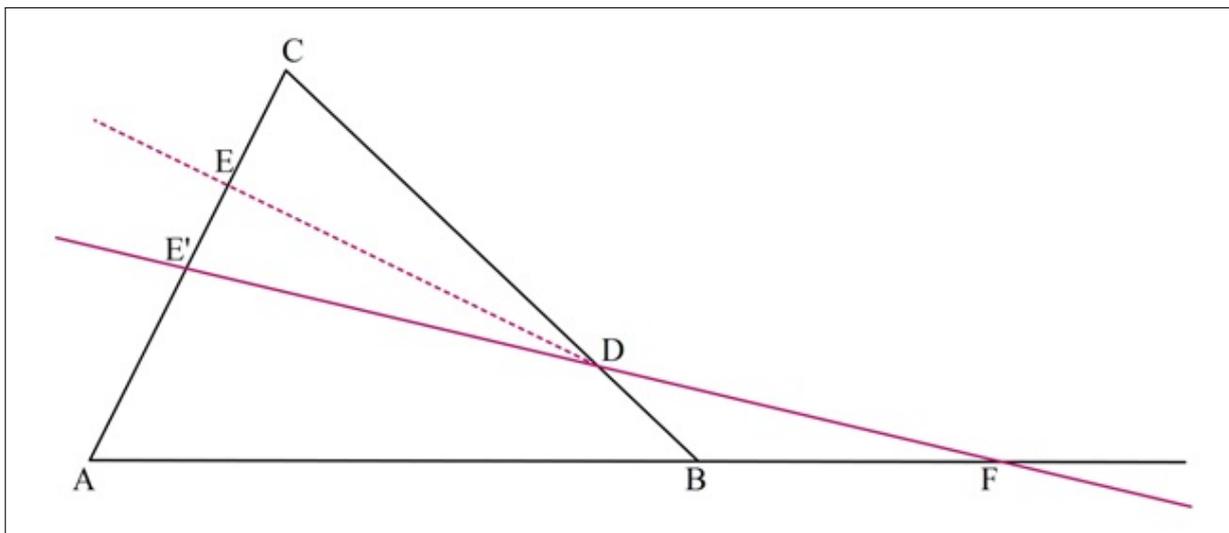


Figura 57 – Os pontos  $E$ ,  $D$  e  $F$  não são colineares.

Portanto,

$$\frac{AE'}{E'C} = \frac{AE}{EC} \iff E' = E.$$

Logo,  $E$ ,  $D$  e  $F$  são colineares.

□

Dito isto, passaremos agora ao Teorema de Pascal.

**Teorema 1.7.2.** *Hexagrama Místico de Pascal*

*Se um hexágono está inscrito numa cônica, então os pontos de intersecção dos três pares de lados opostos são colineares e reciprocamente.*

A figura 58 mostra a configuração do Teorema de Pascal na elipse e a figura 59 mostra o teorema na hipérbole. Neste trabalho, seguindo a ideia de demonstração do próprio Pascal, apresentaremos a demonstração para hexágonos inscritos em uma circunferência, uma vez que, se o teorema for verdadeiro para hexágonos inscritos em círculos, como as cônicas são projeções de círculos, ele será válido para hexágonos inscritos em cônicas (GARBI, 2006).

*Demonstração.* Consideremos o triângulo  $XYZ$  determinado pelas retas  $AB$ ,  $CD$ ,  $EF$ . Os pares de lados opostos  $BC$  e  $EF$ ,  $AB$  e  $ED$ ,  $AF$  e  $CD$ , possuem pontos de intersecção  $P$ ,  $R$  e  $Q$ , respectivamente. devemos mostrar que  $P$ ,  $R$  e  $Q$  são colineares.

Consideremos, agora, a reta  $CP$  que intersecta as retas dos lados do triângulo  $XYZ$ , como na figura a seguir.

Pelo Teorema de Menelaus, podemos escrever:

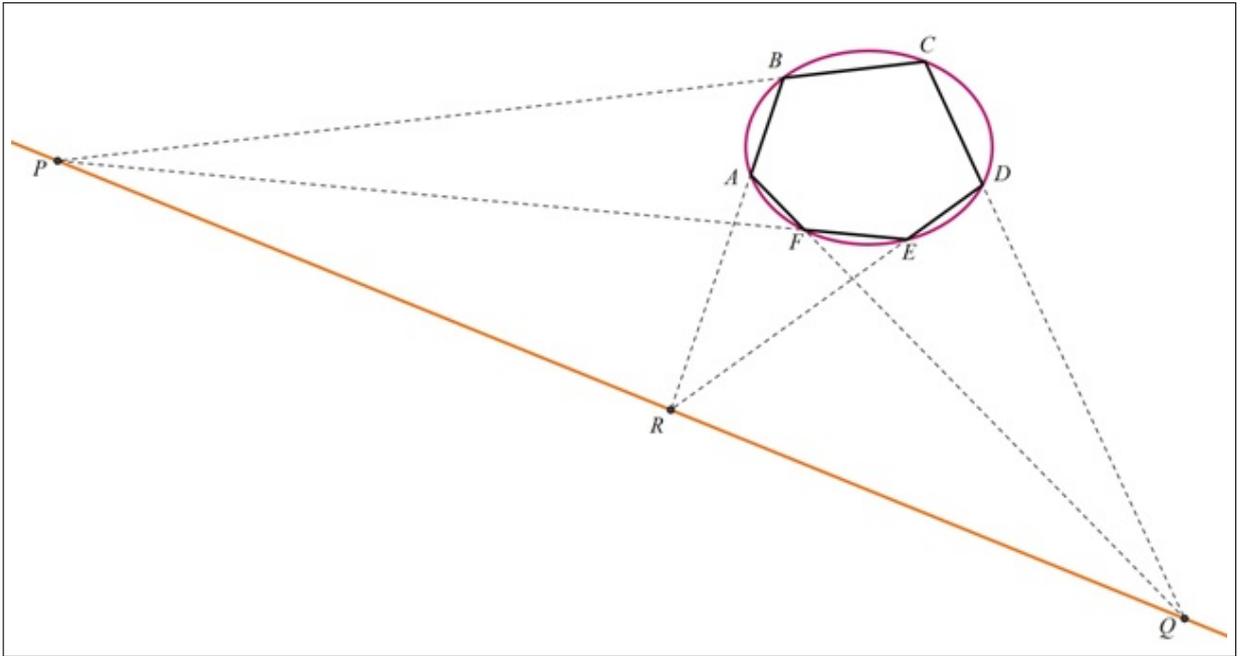


Figura 58 – O Teorema de Pascal na Elipse.

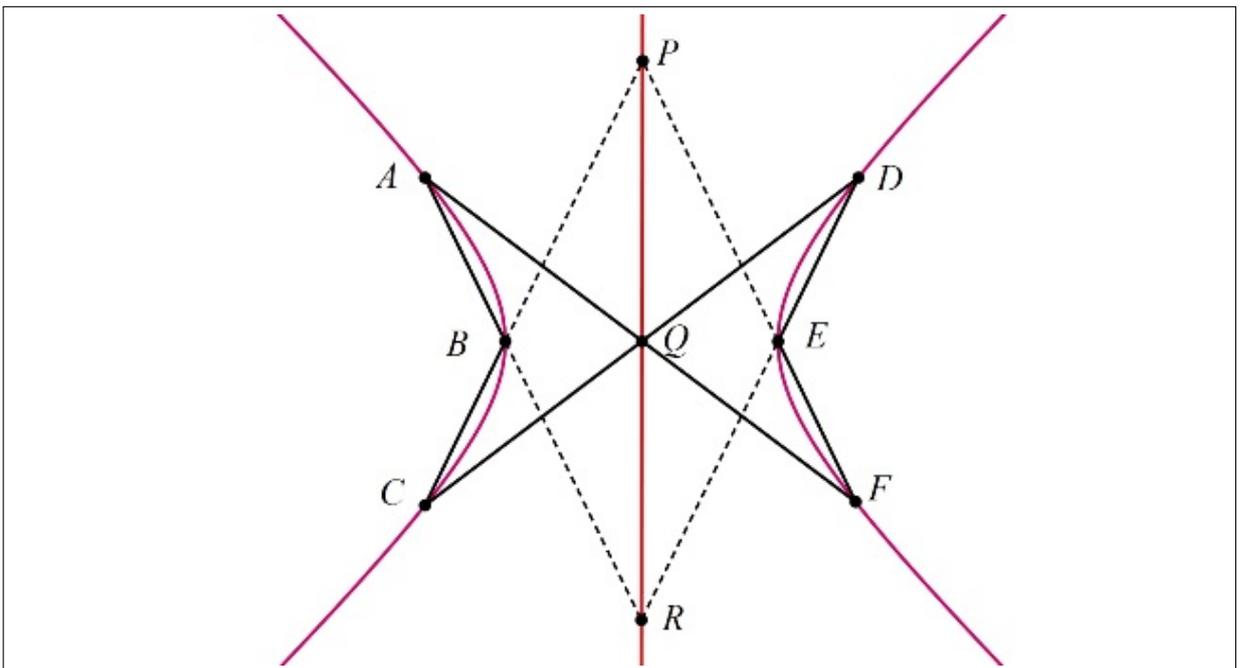


Figura 59 – O Teorema de Pascal na Hipérbole.

$$\frac{XP}{PZ} \cdot \frac{ZC}{CY} \cdot \frac{YB}{BX} = 1.$$

De maneira análoga, consideremos a reta  $DR$  que intersecta as retas dos lados do triângulo  $XYZ$ , como na figura 61.

Aplicando o Teorema de Menelaus, obtemos:

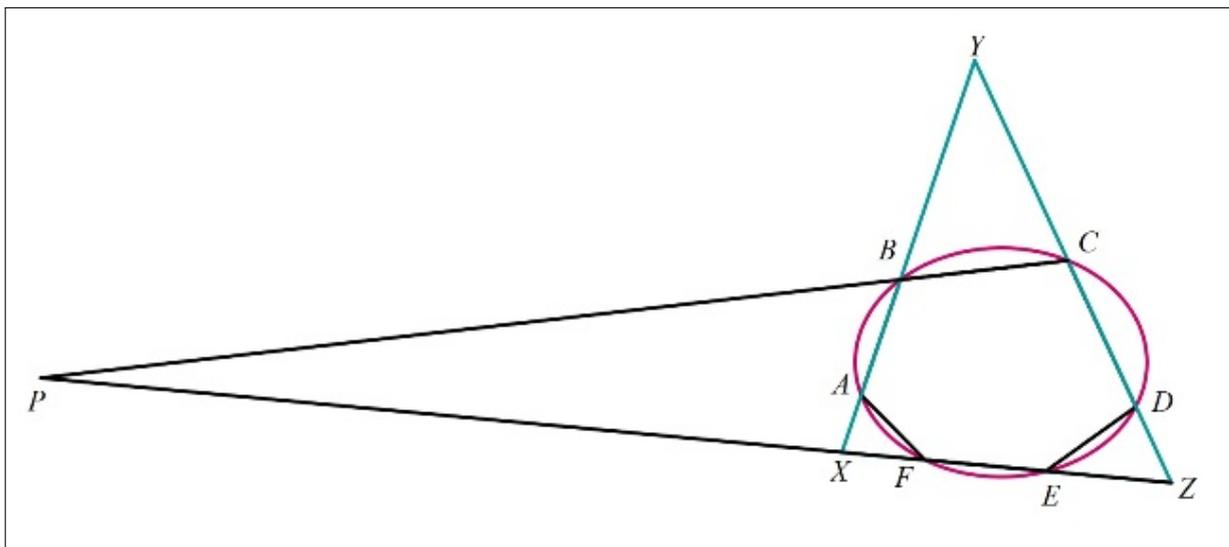


Figura 60 –  $CP$  é uma reta que intersecciona as retas que contém os lados de  $XYZ$ .

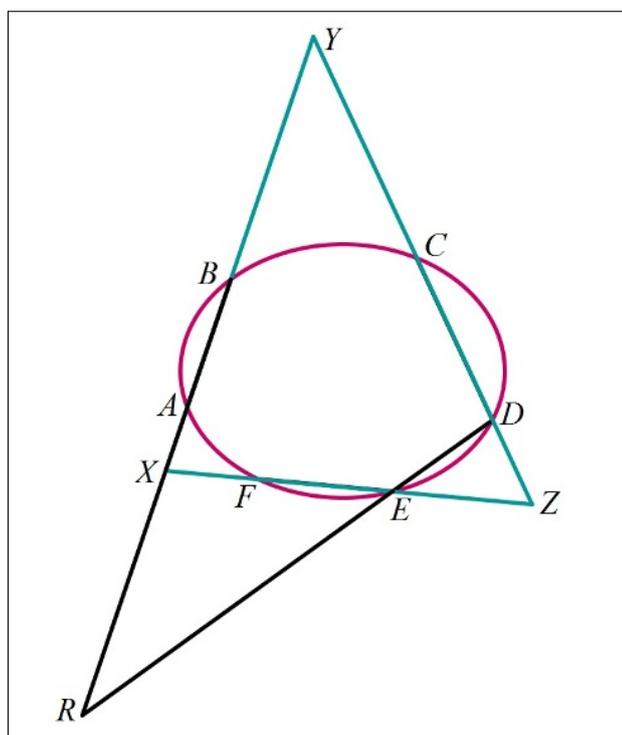


Figura 61 –  $DR$  é uma reta que intersecciona as retas que contém os lados de  $XYZ$ .

$$\frac{ZD}{DY} \cdot \frac{YR}{RX} \cdot \frac{XE}{EZ} = 1.$$

Finalmente, reta  $AQ$  que intersecta as retas dos lados do triângulo  $XYZ$ , como na figura 62.

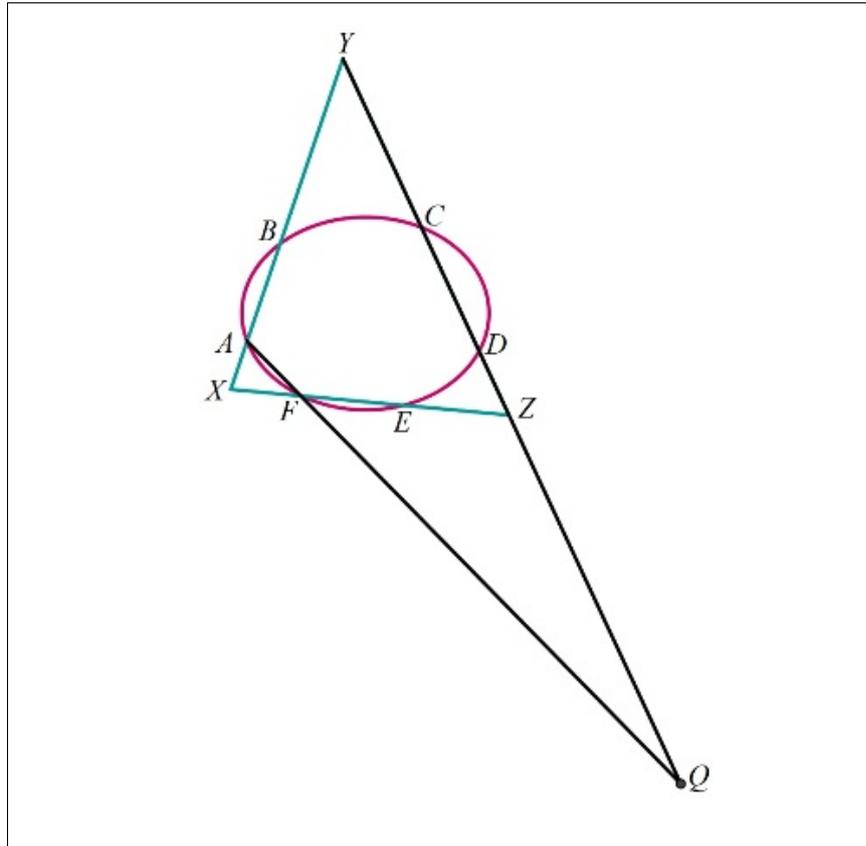


Figura 62 –  $AQ$  é uma reta que intersecciona as retas que contém os lados de  $XYZ$ .

Pelo Teorema de Menelaus, podemos escrever:

$$\frac{ZQ}{QY} \cdot \frac{YA}{AX} \cdot \frac{XF}{FZ} = 1$$

Multiplicando as três igualdades obtidas, encontraremos:

$$\frac{XP}{PZ} \cdot \frac{ZC}{CY} \cdot \frac{YB}{BX} \cdot \frac{ZD}{DY} \cdot \frac{YR}{RX} \cdot \frac{XE}{EZ} \cdot \frac{ZQ}{QY} \cdot \frac{YA}{AX} \cdot \frac{XF}{FZ} = 1 \cdot 1 \cdot 1$$

Lembrando que estamos considerando o caso particular do teorema em que a cônica é uma circunferência, podemos usar aqui as relações métricas em uma circunferência. Logo, são válidas as seguintes igualdades<sup>22</sup>

$$XA \cdot XB = XF \cdot XE$$

$$YB \cdot YA = YC \cdot YD$$

<sup>22</sup> As igualdades referem-se, respectivamente, às potências dos pontos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  em relação à circunferência dada. Para maiores esclarecimentos sobre tais propriedades, recomendamos a leitura de *A Rainha das Ciências* (GARBI, 2006)

$$ZD \cdot ZC = ZE \cdot ZF$$

Portanto, as multiplicações acima se reduzem a:

$$\frac{XP}{ZP} \cdot \frac{YR}{RX} \cdot \frac{ZQ}{QY} = 1$$

E, finalmente, esta última igualdade satisfaz as condições do Teorema de Menelaus para o triângulo  $XYZ$ , o que nos permite concluir que  $P, R, Q$  são colineares.

□

## 1.8 O Princípio da Dualidade e o Teorema de Brianchon

Outro resultado bastante notável relacionado ao Teorema de Pascal, é o Teorema de Brianchon. Charles Julien Brianchon (1785 – 1864), pupilo de Gaspard Monge, enunciou em 1806 o teorema projetivo dual do Teorema de Pascal.

Na Geometria Projetiva, o **princípio da dualidade** é sempre válido. Isto significa que em todo enunciado as palavras **ponto** e **reta** podem ser comutadas – com as devidas adaptações, é claro – dando origem a novos resultados. Por exemplo, na geometria projetiva, assim como na euclidiana, dizemos que dois pontos quaisquer determinam uma reta. Dualizando este resultado podemos dizer que duas retas quaisquer determinam um ponto, o que sabemos ser válido na Geometria Projetiva, mas não na geometria euclidiana.

Outro caso onde podemos constatar o princípio da dualidade é o Teorema de Desargues. Na verdade, o teorema que apresentamos como teorema direto de Desargues é o dual do Teorema de Desargues, que apresentamos como teorema recíproco, seguindo a notação de Efímov ([EFÍMOV, 1984](#)).

Vamos agora dualizar o Teorema de Pascal. Começamos por um hexágono inscrito em uma cônica. Isto quer dizer que tomamos seis pontos sobre a cônica. Dualizando, encontramos seis retas sobre uma cônica, o que refere-se, portanto, a seis retas tangentes à cônica em seis pontos distintos. Estas seis retas, ao interseccionarem-se, dão origem a um hexágono circunscrito à cônica. Assim, a primeira parte do teorema dual trará um hexágono circunscrito a uma cônica.

Na segunda parte do teorema temos os três pontos de intersecção dos pares de lados opostos. Dualizando, encontramos as três retas de intersecção dos pares de vértices (pontos) opostos. Ou seja, falamos aqui das três diagonais que ligam os vértices opostos.

Finalizando, agora temos são colineares (os pontos), ou seja, os pontos estão sobre uma mesma reta. Dualizando, teríamos as retas estão sobre o mesmo ponto, ou seja, as retas concorrem em um mesmo ponto.

Portanto, o teorema dual fica conforme o enunciado por Brianchon:

**Teorema 1.8.1.** *Teorema de Brianchon*

*As diagonais determinadas por pares opostos de vértices de um hexágono circunscrito a uma cônica são concorrentes em um ponto (ponto de Brianchon).*

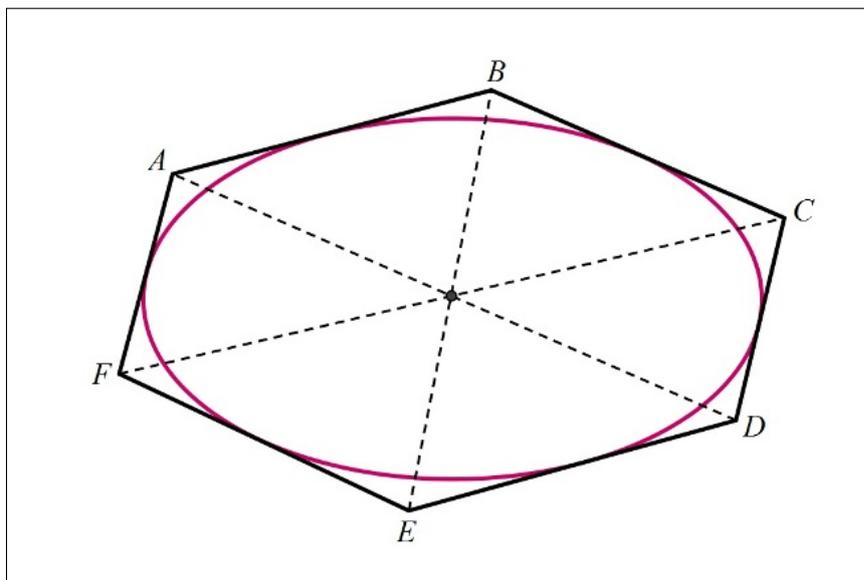


Figura 63 – O Teorema de Brianchon.

O princípio da dualidade da Geometria Projetiva foi sempre criticado ou, no mínimo, visto com certa cautela. Parecia arriscado admitir que todo teorema que não envolvesse propriedades métricas teria um dual igualmente válido. Segundo Hefez ([HEFEZ, 1985](#)), apenas após a introdução das coordenadas na Geometria Projetiva por Plücker, foi possível apresentar argumentos convincentes para a validade do princípio. Como vimos na seção sobre o Plano Projetivo, um ponto projetivo representa uma reta que o liga à origem. Entendemos que aí se origina a reciprocidade da qual o princípio da dualidade se beneficia. É importante ressaltar que o princípio da dualidade também foi estabelecido em vários outros ramos da matemática, como por exemplo, álgebra Booleana, teoria das identidades trigonométricas e cálculo proposicional ([EVES, 2011](#)).

A demonstração do Teorema de Brianchon é apresentada em Barros e Andrade ([BARROS; ANDRADE, 2010](#)) e, de certa forma, é uma dualização da demonstração do Teorema de Pascal. Um resultado bastante interessante advindo do princípio da dualidade e que foi utilizado por Barros e Andrade em sua demonstração é a dualização de curvas.

Como havíamos dito, o princípio da dualidade nos possibilita formular novos enunciados a partir de um enunciado envolvendo pontos e retas. Mas, além de pontos e retas, a geometria projetiva também se ocupa de curvas. Se pensarmos no fato de uma curva ser um conjunto de pontos que satisfazem determinadas condições, podemos, então, aplicar

o princípio da dualidade também às curvas. Ele nos sugere, portanto, que a figura dual a uma curva dada é o conjunto de retas que satisfazem a condição dual à condição que define a curva. Por exemplo, a imagem a seguir mostra um conjunto de pontos sobre uma curva. A figura dual será um conjunto de retas sobre a curva, ou seja, tangentes à curva naqueles pontos (KLINE, 1967).

A figura 64 mostra um conjunto de pontos sobre uma parábola e a curva dual formada pelo conjunto das retas tangentes à parábola nos pontos dados.

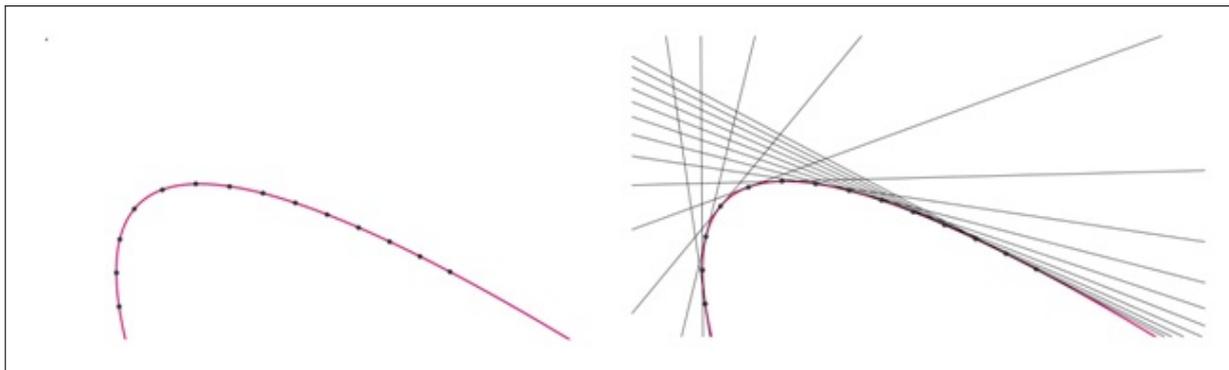


Figura 64 – Um parábola e sua curva dual.

Na demonstração do Teorema de Brianchon, usaremos uma curva dual. Sobre uma cônica, aqui uma elipse, temos os seis pontos de tangência entre a cônica e o hexágono circunscrito. A curva dual será o conjunto de retas tangente à elipse nos pontos dados, ou seja, será o conjunto de retas suporte dos lados do hexágono circunscrito.

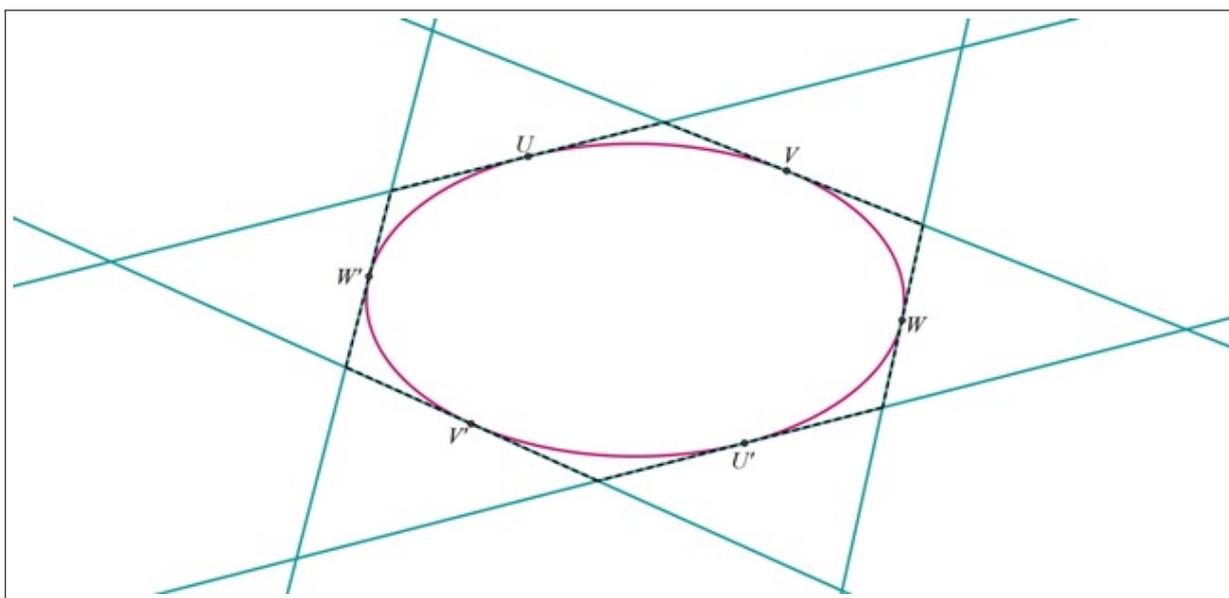


Figura 65 – Uma elipse se sua curva dual.

*Demonstração.* Sejam  $U, V, W, U', V', W'$  os pontos de tangência do hexágono  $ABCDEF$  circunscrito à cônica. Por sua vez, estes pontos determinam um segundo hexágono

$UVWU'V'W'$  agora inscrito na cônica dual (constituída pelas retas de tangência à cônica original), como mostra a figura 66.

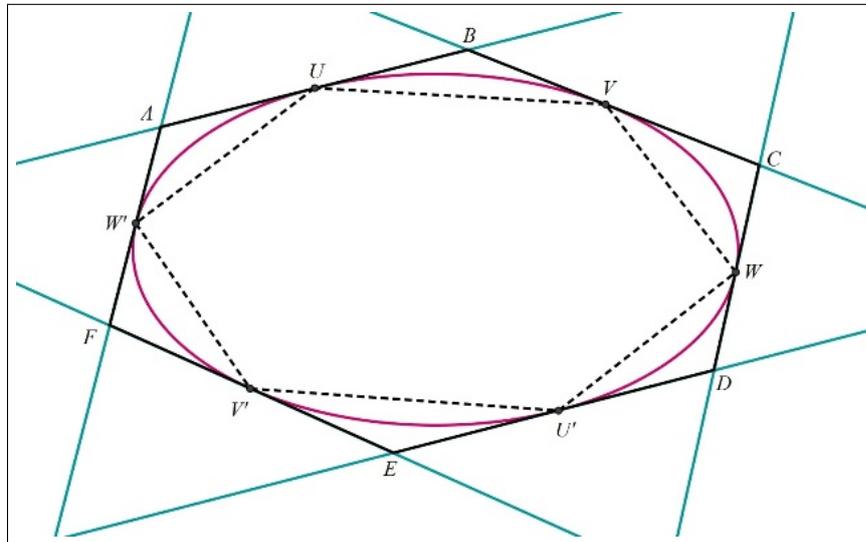


Figura 66 – O hexágono  $UVWU'V'W'$  inscrito na curva dual.

Pelo Teorema de Pascal, podemos afirmar que existe uma única reta (reta de Pascal) que incide sobre os três pontos de intersecção dos pares de lados opostos do hexágono inscrito. No projetivo dual, estes três pontos são as três diagonais que ligam os três pares de *vértices opostos* do *hexágono circunscrito*, e a reta de Pascal é o ponto onde estas três diagonais concorrem.

□

A importância dos teoremas de Pascal e Brianchon está associada ao desenvolvimento da teoria de seções cônicas que, como já vimos, são preservadas pelo método de projeção e seção. Apesar de não terem relação explícita com o trabalho que foi realizado com os estudantes, não poderiam ser omitidos neste texto, visto que são resultados clássicos, intimamente relacionados ao sistema projetivo cônico que, como veremos a seguir, é aquele que produz o tipo de perspectiva que mais se assemelha à visão humana.

## 1.9 Sistemas Projetivos

Até aqui temos nos dedicado ao estudo dos elementos e propriedades de um caso geral de perspectiva, que é exatamente aquele que modela matematicamente o método da tela de vidro, empregado pelos artistas do renascimento.

De fato, a Geometria Projetiva, no tocante às suas inter-relações com o desenho em perspectiva, ocupa-se de um único problema em que uma figura ou curva é projetada em relação a um ponto arbitrário que, na metáfora com o desenho em perspectiva, corresponde ao olho do pintor. Nesta situação, linhas de projeção partem do ponto  $E$  e atingem cada ponto da curva ou figura a ser projetada. O feixe das linhas projetivas que partem de  $E$  assume, portanto, o formato aproximado de um cone. O ponto  $E$  é chamado de Centro da Projeção, e este sistema projetivo recebe o nome de Projeção Central ou Projeção Cônica.

Agora imaginemos que o ponto  $E$  mova-se indefinidamente na direção oposta ao plano de projeção. Nestas circunstâncias, as linhas projetivas tenderão a tornarem-se paralelas. Portanto, quando o ponto  $E$  for um ponto no infinito, as linhas projetivas serão paralelas e o feixe de dessas linhas assumirá o formato aproximado de um cilindro. Este sistema projetivo é, portanto, denominado Sistema de Projeção Paralela, ou ainda, Sistema de Projeção Cilíndrica.

Como já vimos, a Geometria Projetiva encara com naturalidade os pontos no infinito, portanto, entende-se que o Sistema de Projeção Cilíndrico é um caso particular do Sistema de Projeção Central. Ele ocorre quando, ao contrário da projeção cônica, o centro da projeção não está a uma distância finita do objeto a ser projetado.

Segundo Canotilho, a projeção cônica “é quase exclusivamente aplicada ao campo artístico. Embora raramente, também é utilizada nos campos da arquitetura e da engenharia. As suas características impedem uma leitura rigorosa, pelo que é evitada no campo técnico” (CANOTILHO, 2005).

Por outro lado, o sistema de projeção cilíndrico, possui maior simetria com a Geometria Euclidiana, pois são preservados forma e paralelismo. Desta forma ela “é a que permite uma leitura rigorosa da forma que se pretende dar a representar [...] já que as formas não diminuem proporcionalmente, conforme o seu afastamento” (CANOTILHO, 2005). Assim, as projeções cilíndricas são mais apropriadas para o estudo da Geometria Descritiva que, assim como a Geometria Projetiva, é essencial para este trabalho, que tem como um de seus principais objetivos, ampliar a capacidade de abstração geométrica dos estudantes.

A figura 67 traça um comparativo entre os sistemas de projeção em uma situação em que o plano imagem é paralelo ao plano do objeto. Notemos que, enquanto a projeção cônica nos entrega uma figura semelhante à figura original (isto porque o plano do objeto é paralelo à tela, do contrário, nem semelhantes as figuras seriam), a projeção cilíndrica

nos entrega uma figura congruente à original (também no caso em que o plano do objeto é paralelo à tela). Daí a aplicação deste último sistema estar mais presente no campo técnico da Geometria Descritiva.

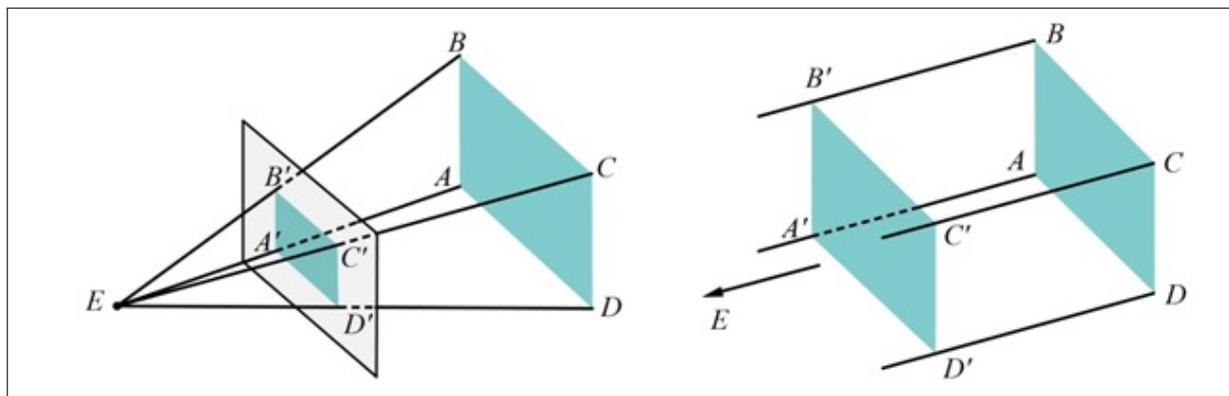


Figura 67 – Sistemas Projetivos.

A seguir, veremos que os sistemas de projeção cônico e cilíndrico geram diferentes tipos de perspectiva.

#### 1.9.0.9 Perspectivas Cônicas

Uma perspectiva é dita cônica se é gerada por um sistema cônico de projeções. As perspectivas cônicas caracterizam-se pela presença de pontos de fuga e são classificadas de acordo com o número deles.

A perspectiva cônica de um ponto de fuga, também chamada de perspectiva centralizada, ou simplesmente perspectiva<sup>23</sup>, é exatamente aquela que motivou uma abordagem matemática da técnica de desenho e levou ao desenvolvimento do trabalho de Desargues, entre outros. É a perspectiva que modela o método da tela de vidro empregado pelos artistas da renascença, e reproduz as imagens tais como as veríamos com apenas um olho aberto. Todas as linhas horizontais e verticais são mantidas e as linhas que estão em planos perpendiculares ao plano imagem convergem para o ponto de fuga, na linha de fuga (horizonte). Esta perspectiva também está associada ao princípio da Câmara Escura de Kepler.

Ao representarmos um cubo em perspectiva centralizada (é de praxe os autores usarem o exemplo do cubo para diferenciar os resultados dos diferentes tipos de perspectiva), ele poderá estar acima ou abaixo da linha do horizonte, dependendo qual vista do cubo queremos representar, porém, as linhas projetivas convergem para a linha do horizonte, como observamos na figura 68. Podemos notar claramente aqui o emprego das proposições 3.1, 3.2 e 3.3.

<sup>23</sup> Em textos de Geometria Projetiva, em geral, os autores usam o termo *perspectiva*, no singular, para denotar a perspectiva centralizada.

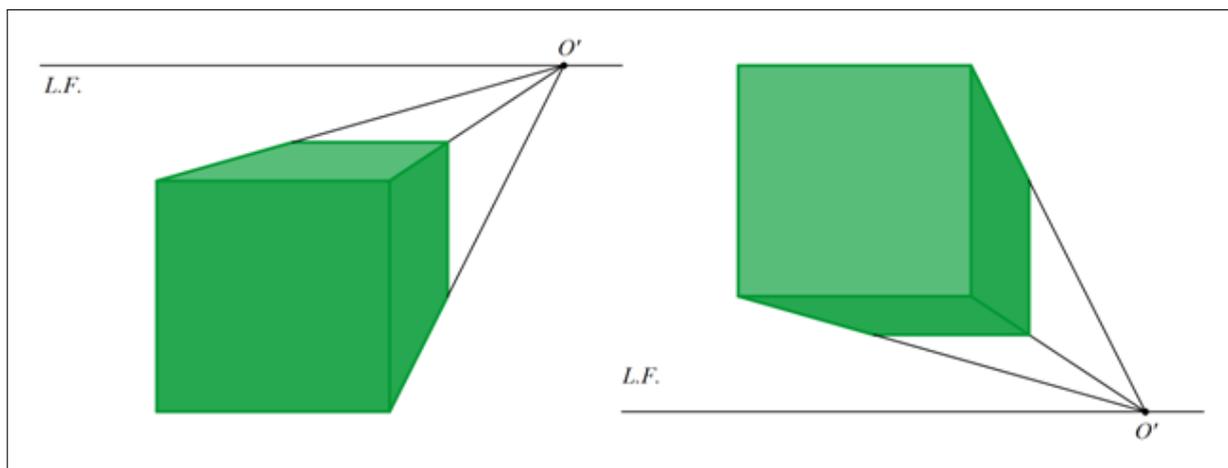


Figura 68 – Um cubo em Perspectiva Cônica com um ponto de fuga.

A perspectiva cônica com um ponto de fuga foi consagrada pelos artistas do renascimento, como Leonardo da Vinci e Rafael. Na figura 69, temos as linhas projetivas, a linha de fuga e o ponto de fuga usado pelo artista para estruturar sua obra *A Escola de Atenas* de 1510. O ponto de fuga está entre os dois personagens que representam, da esquerda para a direita, Platão e Aristóteles.



Figura 69 – *A Escola de Atenas* de Raffaello Sanzio.  
Fonte - Imagem original extraída da *Wikipedia*.<sup>24</sup>

<sup>24</sup> Endereço eletrônico da imagem  
[http://en.wikipedia.org/wiki/File:Sanzio\\_01.jpg](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Sanzio_01.jpg)

A perspectiva cônica de dois pontos de fuga não era conhecida pelos artistas da renascença. Ela representa justamente a junção das projeções captadas simultaneamente por ambos os olhos. Nesta perspectiva, muitas vezes o tema é uma edificação vista de perfil. Na figura 70, representamos um cubo em perspectiva de dois pontos de fuga. As linhas de perspectiva que partem das arestas horizontais superiores e inferiores deste cubo convergem para dois pontos de fuga sobre a linha do horizonte (ATALAY, 2009). Na figura 71 temos uma foto do Palácio do Planalto obtida pela mesma técnica. Por razões estéticas, omitimos o segundo ponto de fuga, mas a convergência é explícita.

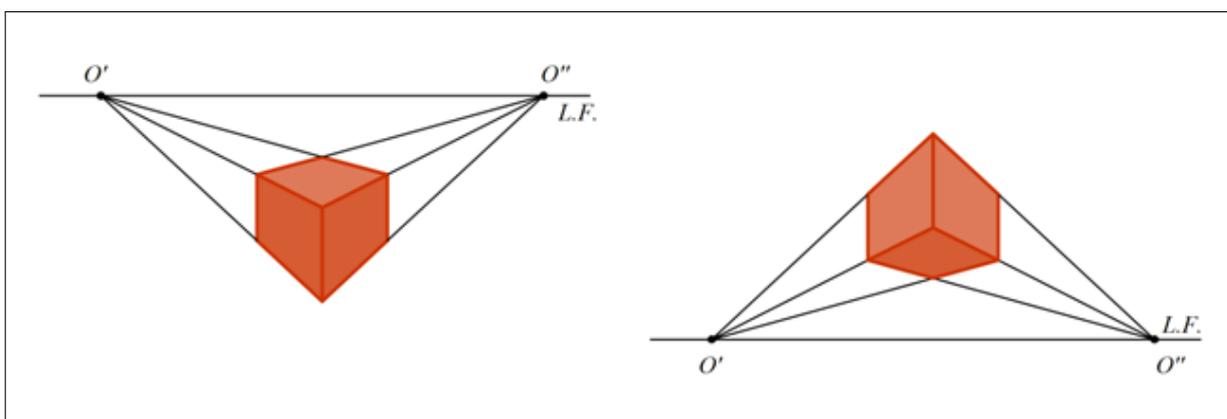


Figura 70 – Um cubo em Perspectiva Cônica com dois pontos de fuga.



Figura 71 – O Palácio do Planalto em perspectiva com dois pontos de fuga.

Fonte - Imagem original extraída do site Portal Planalto. <sup>25</sup>

Na perspectiva cônica com três pontos de fuga (também chamada perspectiva aérea) “estes são utilizados para dar profundidade à cena e, ao mesmo tempo, realçar a

<sup>25</sup> Endereço eletrônico da imagem

<http://www2.planalto.gov.br/presidencia/palacios-e-residencias-oficiais/palacio-do-planalto/galeria-de-fotos/palacio-do-planalto-25.jpg/image>

altura. [...] Um vetor normal é traçado no centro da base do cubo para definir a direção terceiro ponto de fuga” (ATALAY, 2009). Na imagem a seguir – figura 72, temos o cubo representado em perspectiva com três pontos de fuga. Neste caso, o observador estaria no solo e o objeto flutuando acima dele. Notemos que este terceiro ponto aparece fora da linha de fuga, e para ele convergem as retas das arestas verticais do cubo.

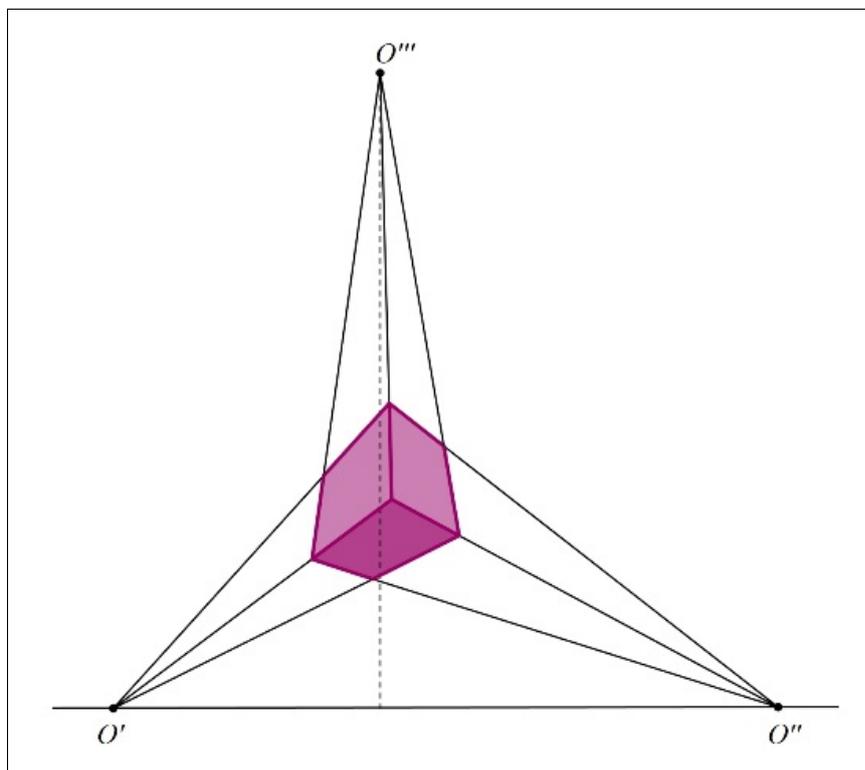


Figura 72 – Um cubo em Perspectiva Cônica com três pontos de fuga.

Segundo Canotilho, este último tipo de perspectiva “têm pouca aplicação, tanto no mundo técnico como no artístico. No entanto a perspectiva curva<sup>26</sup>, é algumas vezes empregue em composições fantásticas por artistas como M. C. Escher” (CANOTILHO, 2005). Desta forma, não nos deteremos neste tipo de perspectiva, pois julgamos que as outras duas perspectivas cônicas são amplamente suficientes para o propósito deste trabalho. Antes, porém, de passarmos às perspectivas cilíndricas, apresentaremos a obra de Escher a qual Luis Canotilho referiu-se na citação acima.

#### 1.9.0.10 Perspectivas Cilíndricas

Como já vimos anteriormente, as perspectivas cilíndricas são consideradas casos particulares da perspectiva cônica. Desta forma, a Geometria Projetiva não se interessa particularmente por elas. No entanto, quando representamos um objeto tridimensional, é natural recorrermos a este tipo de perspectiva, mais do que à perspectiva cônica.

<sup>26</sup> Outra maneira de denominar a perspectiva com três pontos de fuga.

<sup>27</sup> Endereço eletrônico da imagem original

<http://www.mcescher.com/Gallery/recogn-bmp/LW435.jpg>

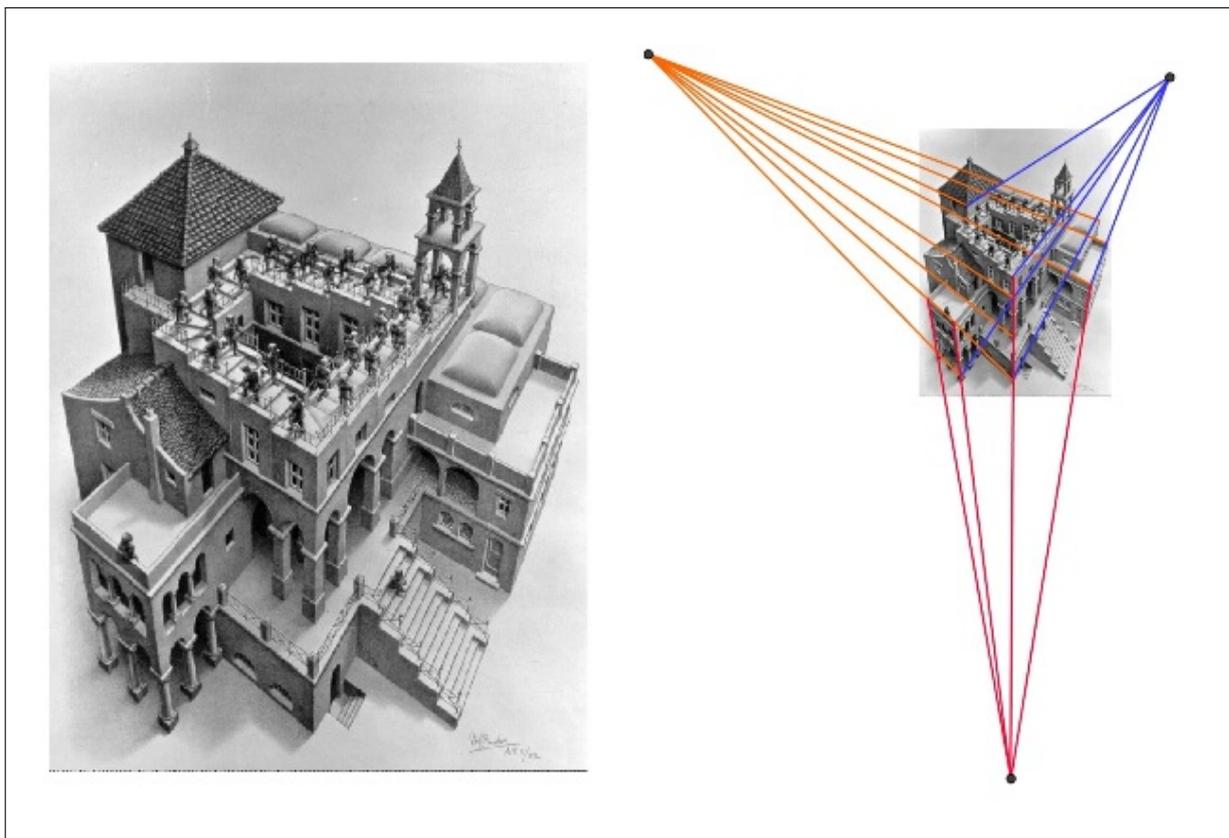


Figura 73 – *Ascending and Descending*. M. C. Escher, 1960.

Fonte - Imagem original extraída do site *The Official M.C.Escher Website*.<sup>27</sup>

No âmbito do estudo da geometria escolar esta familiaridade com as perspectivas cilíndricas se faz sentir de maneira ainda mais contundente, pois, praticamente todas as representações de objetos tridimensionais presentes em livros e materiais didáticos, são feitas observando a perspectiva cilíndrica. Este é o motivo pelo qual enfatizamos este tipo de perspectiva nos trabalhos realizados com os alunos. Entendemos que, apesar das perspectivas cilíndricas requererem um conhecimento matemático apenas periférico e pautarem-se em procedimentos definidos por convenções, elas possibilitam aos estudantes uma maior capacidade de interpretar enunciados geométricos quando estes estão associados a representações de objetos tridimensionais.

Neste trabalho, trataremos de dois tipos de perspectiva cilíndrica: a isométrica e a cavaleira.

A técnica de **Perspectiva Isométrica** utiliza um sistema de eixos que formam  $120^\circ$  entre si. A designação *isométrica* deve-se ao fato de ser empregada a mesma escala (proporção) para os três eixos, ou seja, segmentos de mesmo comprimento serão representados com a mesma medida, independente de qual posição ocupem no desenho. O resultado visual assemelha-se ao da perspectiva cônica com dois pontos de fuga, onde o objeto é observado de perfil, porém, não há convergência das linhas das arestas, pois o observador situa-se a um ponto infinitamente distante do objeto, de maneira que as

linhas de projeção – idealmente – são paralelas entre si.

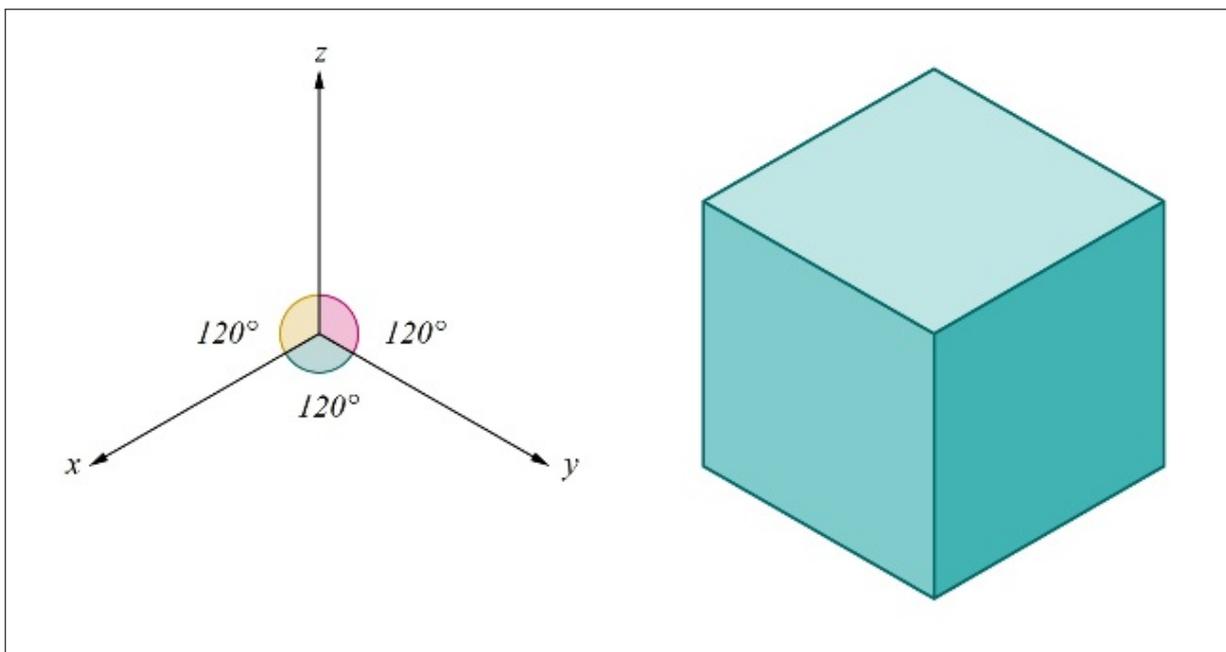


Figura 74 – Os Eixos Isométricos e um cubo em Perspectiva Cilíndrica Isométrica.

De acordo com Canotilho “a perspectiva isométrica, é sem dúvida, a que melhor referencia as características formais das três faces de uma peça qualquer, embora o seu aspecto visual não seja o mais agradável” (CANOTILHO, 2005). Neste sentido, é importante notarmos que, por tratar-se de um sistema projetivo cilíndrico, perspectiva isométrica preserva paralelismo. No entanto, não preserva a medida dos ângulos e, portanto, não preserva formas. Um retângulo, por exemplo, é representado por um paralelogramo e uma circunferência é uma elipse, como vemos na imagem a seguir.

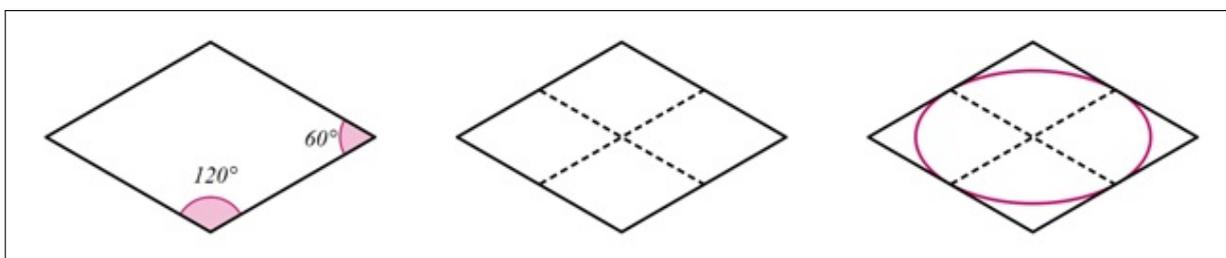


Figura 75 – Circunferência em Perspectiva Cilíndrica Isométrica.

Na próxima imagem temos uma aplicação clássica da perspectiva isométrica: o desenho arquitetônico.

A **Perspectiva Cavaleira** é, provavelmente, a mais célebre das perspectivas cilíndricas e mais utilizada nos textos de geometria. Ela difere da Isométrica, pois o observador

<sup>28</sup> Endereço eletrônico da imagem

<http://us.123rf.com/400wm/400/400/nikonaft/nikonaft0905/nikonaft090500022/4940056-3d-isometric-view-the-cut-residential-house-on-architect-s-drawing-background-image-is-my-own.jpg>



Figura 76 – Planta 3D em Perspectiva Isométrica.

Fonte - Imagem extraída do site 123RF. <sup>28</sup>

posiciona-se frontalmente a uma das faces do objeto. Além disso, há fatores de redução a serem adotados dependendo do ângulo de inclinação do eixo  $x$  que for escolhida. Na figura 77 apresentamos os possíveis ângulos e seus fatores de redução.

Para este trabalho, adotamos a perspectiva com inclinação de  $45^\circ$ , mas não foi exigido que os estudantes observassem o fator de redução, uma vez que estávamos interessados em questões mais amplas do que o formalismo do procedimento técnico.

Não temos aqui a pretensão de esclarecer a quem deve ser atribuído o desenvolvimento deste tipo de perspectiva. Este parece ser uma assunto polêmico e controverso entre os mais bem preparados estudiosos do assunto. No entanto, podemos encontrar algumas ideias consensuais. Como já vimos no início deste texto, os artistas do renascimento preocupavam-se como uma representação rigorosamente realística do espaço ao seu redor. Por outro lado, estes artistas são considerados polivalentes, pois, além de pintores ou escultores eram, na maior parte das vezes, inventores e arquitetos. Naturalmente, eram comissionados para projetar as grandes edificações de sua época: igrejas e fortificações militares. No entanto, para esboçar estes projetos, o método da tela de vidro mostrava-se limitado, pois a estatura do observador não o permitia enxergar todos os detalhes da

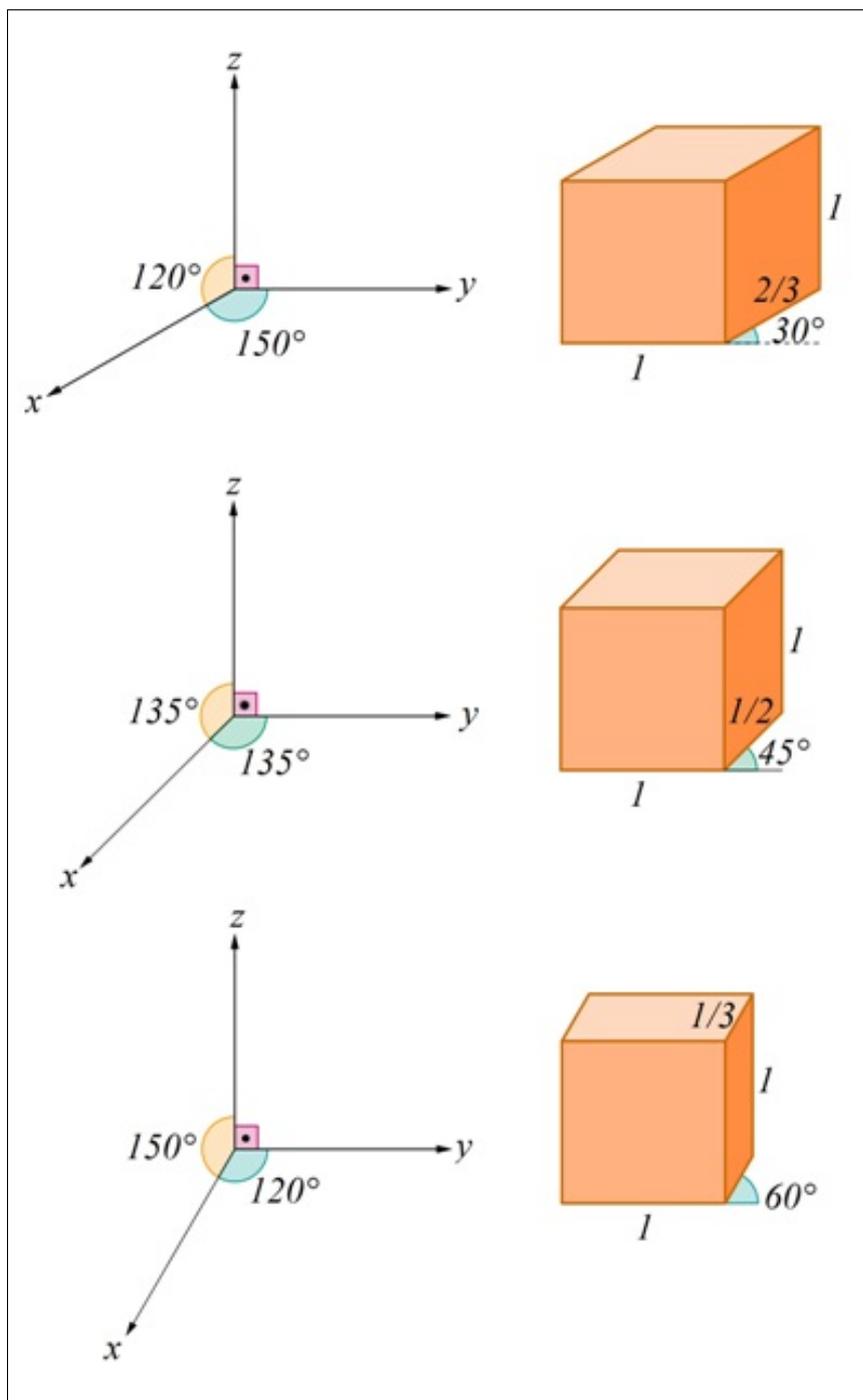


Figura 77 – Perspectiva Cilíndrica Cavaleira.

obra, exceto se ele estivesse flutuando acima dela. Assim, estes artistas desenvolveram uma perspectiva que ficou conhecida como *vôo de pássaro* (consideramos o termo em inglês *bird's eye* mais apropriado) que, como o próprio nome sugere, traduzia uma observação aérea da construção. Esta seria a ideia precursora da perspectiva cilíndrica – o olho do pássaro representaria o centro da projeção afastado do objeto a uma distância indefinidamente grande. A perspectiva cavaleira seria, portanto, uma decorrência ou caso particular da perspectiva *bird's eye*.

O curioso nome *cavaleira* tem duas explicações plausíveis. A primeira seria que esta perspectiva fornece o ponto de vista de um *cavaleiro* em relação a um objeto de pequenas dimensões que esteja no chão. Outra versão, atribui a origem do nome a um posto de observação que se localizava em um ponto elevado de uma fortificação militar e era designado *cavalier* – cavaleiro, em francês.

Como poderíamos imaginar, Leonardo da Vinci que sempre se interessou pelos pássaros e, ainda mais especificamente, por sua habilidade de voar, foi um grande estudioso e desenvolvedor do sistema *bird's eye* de representação, e pode ter chegado, ainda que intuitivamente, aos parâmetros que mais tarde originaram a perspectiva cavaleira. Na figura 78 temos um estudo de 1480 para a construção de uma igreja em que o observador encontra-se em uma posição aérea. Também é possível identificar similaridades com a perspectiva cavaleira. A face frontal da igreja não apresenta distorções, ao passo que a face lateral é representada com uma inclinação de aproximadamente  $48^\circ$  e redução de medidas.



Figura 78 – Perspectiva *Bird's Eye*.

Fonte - Imagem extraída do site *Leonardo da Vinci The Complete Works*.<sup>29</sup>

A figura 79 traz ilustrações de Leonardo para o livro *De Divina Proportione* do frade italiano Luca Pacioli, 1509 (BERTATO, 2010). Nelas – especialmente no hexaedro – podemos perceber o quão próximo Da Vinci estava da perspectiva cavaleira.

<sup>29</sup> Endereço eletrônico da imagem

<http://www.leonardoda-vinci.org/Studies-Of-Central-Plan-Buildings.jpg>

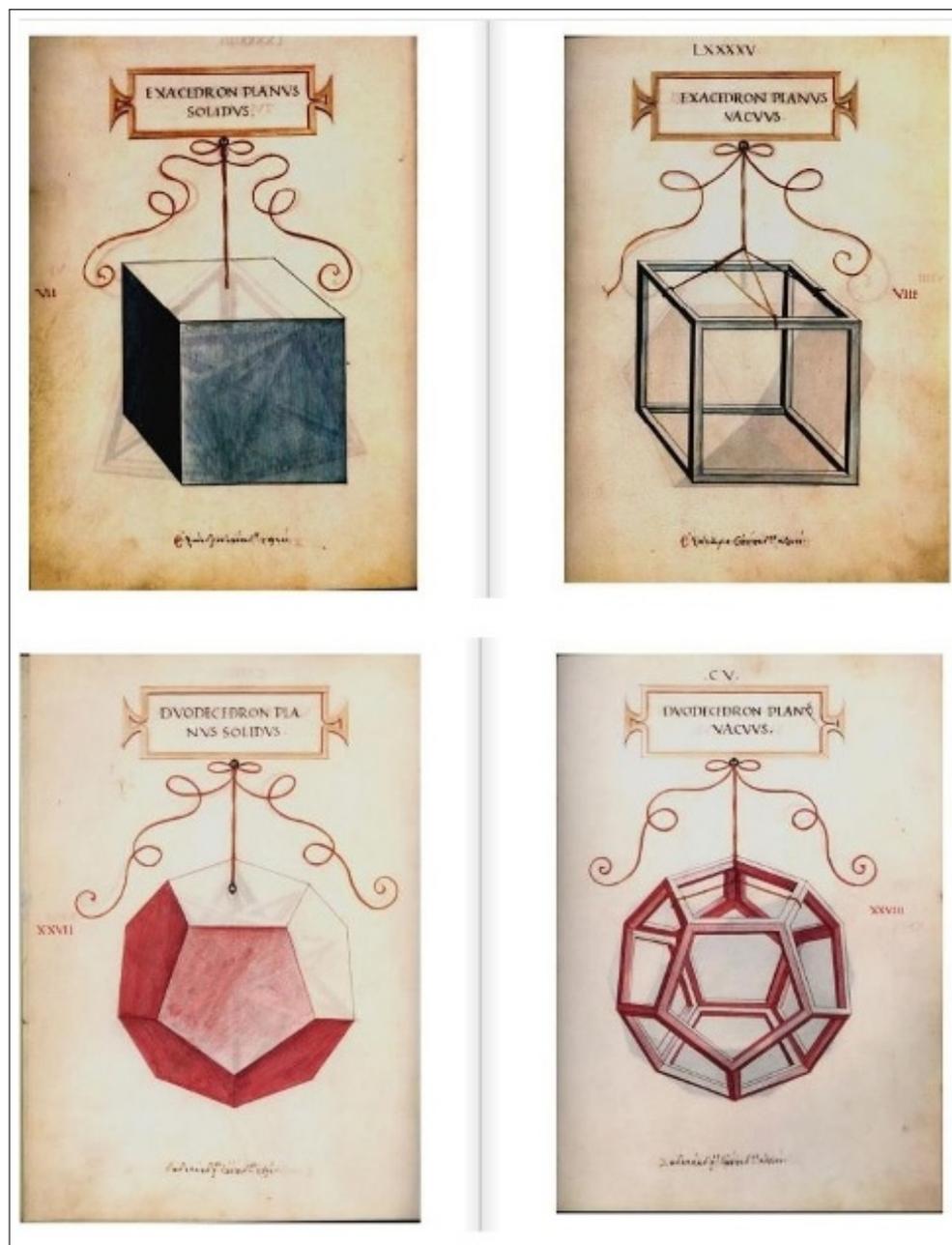


Figura 79 – Poliedros em perspectiva por Da Vinci.

Fonte - Imagem extraída do livro *A De Divina Proportione* (BERTATO, 2010).<sup>30</sup>

---

30

Endereço eletrônico do livro

[http://books.google.com.br/books?id=PqKKdKw-BfQC&hl=pt-BR&source=gbs\\_navlinks\\_s](http://books.google.com.br/books?id=PqKKdKw-BfQC&hl=pt-BR&source=gbs_navlinks_s)

### 1.9.0.11 O Método Projetivo de Monge

Na seção anterior vimos que há dois sistemas projetivos, o cônico e o cilíndrico. Vimos ainda que o sistema projetivo cônico gera a perspectiva centralizada, adotada pelos artistas da renascença e cuja problematização levou ao desenvolvimento da Geometria Projetiva.

Por outro lado, da mesma forma que o sistema cônico encontra sua aplicação no campo da arte, o sistema cilíndrico mostra-se mais eficiente no campo de atividades que exijam detalhamento e precisão técnicos como arquitetura e engenharia, por exemplo. Isto quer dizer que, apesar de ser considerado pela Geometria Projetiva um caso particular do sistema projetivo cônico, o sistema cilíndrico tornou-se tão ou mais importante que o cônico devido à quantidade e relevância de suas aplicações.

No sistema projetivo cilíndrico, os raios projetantes emitidos a partir do olho do observador (centro da perspectiva), que está a uma distância indefinidamente grande do objeto, incidem sobre ele de duas formas: ortogonalmente ao Plano de Solo ou sendo oblíquos a ela. Se os raios projetantes forem oblíquos, então teremos a perspectiva cavaleira; se forem ortogonais, a isométrica. Vamos nos deter um pouco mais neste último caso.

Consideremos, por exemplo, dois prismas retos de base quadrada e alturas diferentes, como mostra a figura 80.

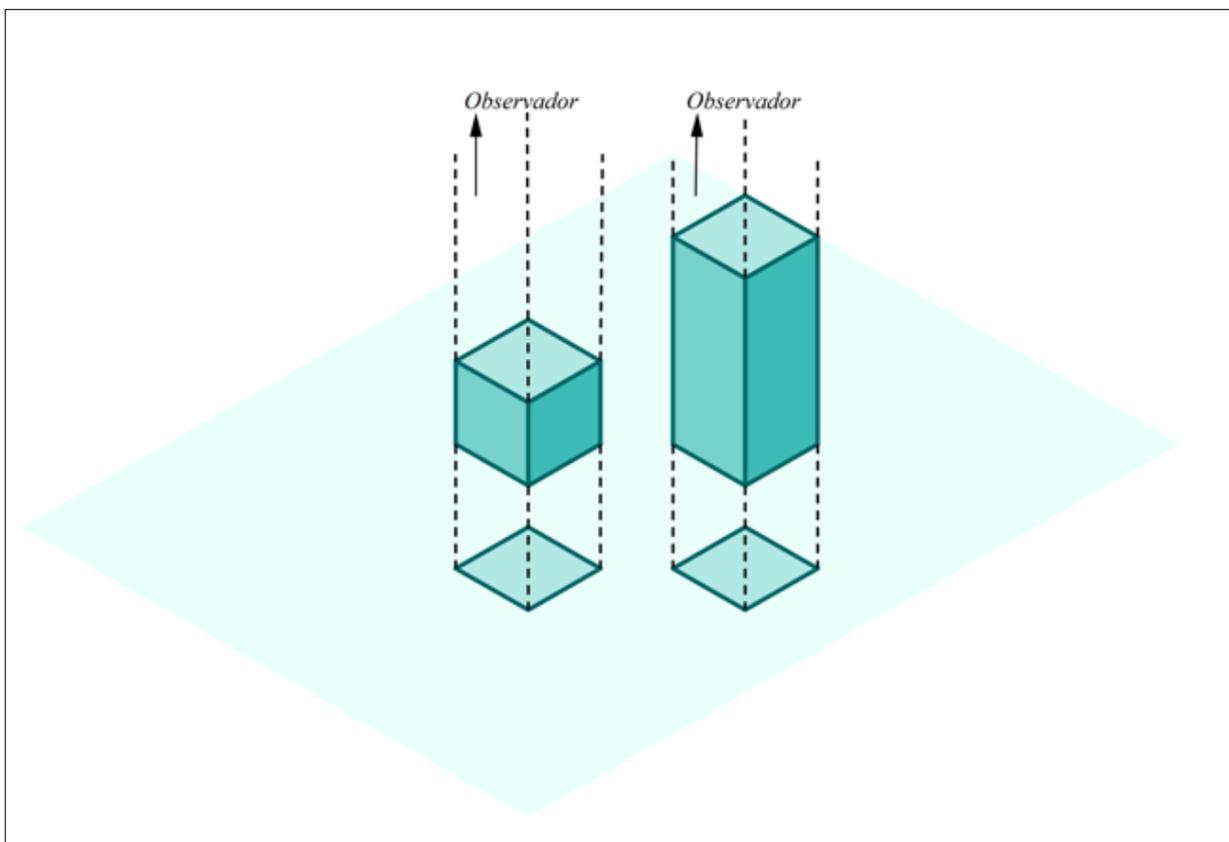


Figura 80 – Sistema Projetivo Cilíndrico Ortogonal.

Podemos observar que ambos os sólidos possuem a mesma projeção, embora sejam diferentes entre si. Esta é uma limitação do sistema projetivo cilíndrico ortogonal. Se quiséssemos comunicar a alguém as características destes dois sólidos apenas através de suas projeções, certamente teríamos dificuldades de explicar as diferenças entre eles.

De uma maneira simplista, este era um dos problemas que os engenheiros e arquitetos do século 18 tinham para comunicar suas ideias aos construtores e artífices.

O problema de desenvolver fortificações militares atraiu vários geômetras para o estudo da Geometria Projetiva, entre eles Gaspard Monge (1746 – 1818). Segundo Garbi, “Monge foi um gênio precoce e já aos 16 anos ensinava Física na cidade de Lyon. Em seguida foi desenhista da escola (militar) de Mézières e ali, para tornar mais prática a confecção de plantas de obras, criou a Geometria Descritiva” (GARBI, 2006). Na verdade, Monge empregou seus conhecimentos da Geometria Projetiva, mais especificamente, o método de projeções e seções para desenvolver um método, que ficou conhecido como **Método de Monge**, para representar objetos tridimensionais sem perder nenhuma informação sobre suas características, como aconteceu no exemplo que demos anteriormente.

O método consistia, portanto, em representar os objetos tridimensionais por meio de projeções convenientes sobre um plano bidimensional.

Simplificadamente, o Método de Monge propunha decompor um objeto em três projeções cilíndricas ortogonais, sobre três planos ortogonais entre si. As três projeções, hoje chamadas vistas ortográficas (frontal, perfil e topo), eram então representadas separadamente. Assim o método, além de informações mais detalhadas sobre a peça a ser construída, funcionava como uma codificação para o projeto. Quem conhecia o método, sabia recriar o objeto a partir destas três projeções, no entanto, se alguém que não conhecesse o método tivesse acesso ao projeto, não saberia decifrá-lo. Na figura 81 apresentamos as vistas ortográficas de um sólido. Posteriormente, segundo o Método de Monge, recriamos este sólido a partir de suas vistas – figura 82.

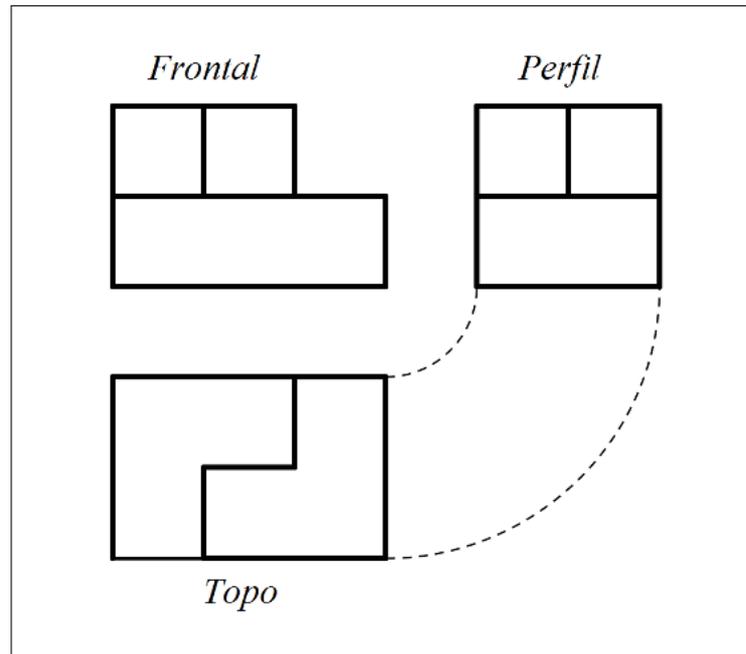


Figura 81 – Vistas Ortográficas.

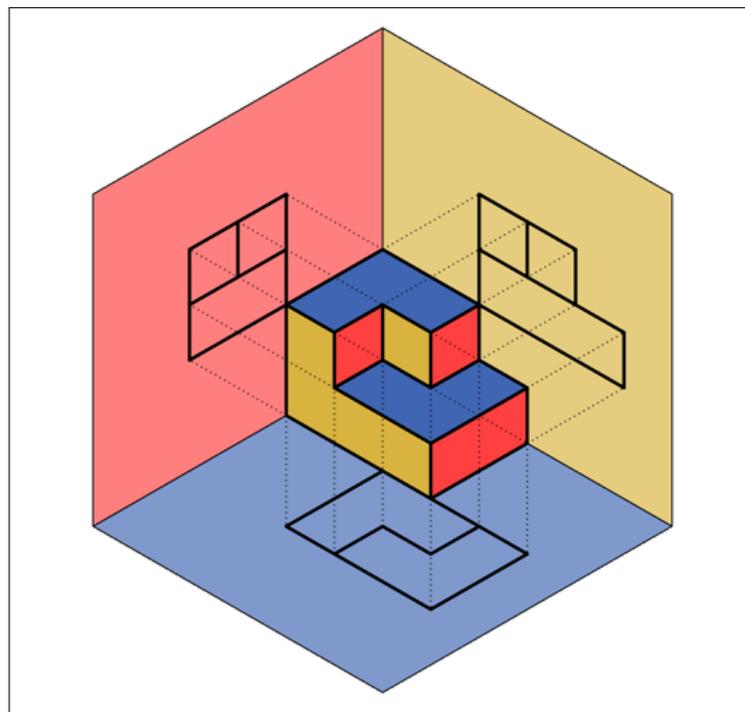


Figura 82 – O Método Mongeano de representação tridimensional.

Devido a sua grande funcionalidade, este método foi imediatamente difundido e adotado dentro do segmento militar, o que conferiu a Monge uma certa notoriedade entre os militares, levando-o a se tornar ministro da marinha durante a Revolução Francesa e, como tal, dedicou-se a desenvolver e produzir armas e munição para a armada. Também foi neste período que Monge conheceu o ainda jovem oficial Napoleão Bonaparte. Anos mais tarde, Monge usou sua influência junto ao imperador para fundar a Escola Politécnica

Francesa, da qual se tornou professor e onde inspirou seus pupilos Charles Brianchon e Jean Victor Poncelet a se interessarem pela Geometria Projetiva.

Apesar de sua notoriedade e influência, os envolvimento políticos de Monge tornaram sua situação insustentável quando a monarquia foi definitivamente restaurada em 1816. Segundo Garbi, Monge “foi destituído de todas as honrarias e terminou a vida no ostracismo” (GARBI, 2006).

O Método de Monge foi considerado segredo de estado durante muitos anos devido à sua aplicação bélica. Foi só em 1799 que Monge lançou seu livro *Géometrie Descriptive* com a formalização do método e suas implicações que passaram a ser amplamente estudados sob a denominação de **Geometria Descritiva** ou **Geometria Mongeana**, que são os termos pelos quais o conhecemos hoje ((EVES, 2011), (KLINE, 1967)).

Finalizando, ainda gostaríamos de tecer uma consideração sobre a Geometria Descritiva.

Como já dissemos na seção inicial deste texto, os termos Geometria Projetiva, Perspectiva e Geometria Descritiva ocorrem em praticamente todas as obras consultadas para este trabalho. Algumas vezes, são tratados como sinônimos o que, ao nosso ver, constitui um grande equívoco. Quando começamos este trabalho também não tínhamos clareza sobre as possíveis distinções, especialmente no tocante às distinções entre Geometria Projetiva e Geometria Descritiva. Estávamos convencidos de que eram a mesma geometria. Entender estas definições era crucial, pois era preciso decidir se este trabalho era sobre perspectiva, geometria projetiva ou geometria descritiva.

Logo na introdução de seu livro *Projective Geometry*, H.S.M Coxeter, citando o matemático inglês Arthur Cayley (1821 – 1895), afirma que a “geometria métrica é parte da geometria descritiva e a geometria descritiva é toda a geometria”. Já no parágrafo seguinte, Coxeter afirma que “Cayley usou a palavra descritiva onde hoje usaríamos a palavra projetiva” (COXETER, 1987).

Mencionando a mesma declaração de Cayley, Howard Eves já opta pela forma “a geometria projetiva contém todas as geometrias” (EVES, 2011). Uma análise mais profunda desta afirmação nos exigiria enveredar pelo estudo da Teoria dos Invariantes da Geometria Projetiva, o que fugiria ao propósito deste trabalho, bem como demandaria mais tempo do que dispomos. Nossa intenção ao apresentar esta citação é, portanto, exemplificar o quanto pode ser complexo estabelecer os limites entre a Geometria Projetiva e a Geometria Descritiva e abandonar a ideia intuitiva de que uma é um campo da outra.

De fato, a história de Gaspard Monge nos mostra que o desenvolvedor da Geometria Descritiva foi intimamente interessado na Geometria Projetiva, sendo considerado

um de seus fundadores junto com Desargues, além de incentivador de grandes nomes da Geometria Projetiva como Brianchon e Poncelet, este último responsável pela ruptura da Geometria Projetiva com sua origem na perspectiva e pelo seu desenvolvimento independente (EVES, 2011). Portanto, é natural pensarmos que a Geometria Descritiva tenha sido concebida como um ramo da Geometria Projetiva.

Não temos aqui a pretensão de sermos definitivos a respeito do assunto, mas nossas pesquisas nos permitiram chegar a algumas conclusões a respeito, e gostaríamos de compartilhá-las, pois talvez sejam úteis caso um eventual leitor esteja começando semelhante empreitada.

A Geometria Projetiva e Descritiva possuem uma mesma origem: a perspectiva. Os primeiros alicerces da Geometria Projetiva surgiram em função da perspectiva. A Geometria Descritiva também se utiliza de projeções, mas surgiu para tratar o que a Geometria Descritiva desconsidera: o sistema projetivo cilíndrico. Hoje a Geometria Projetiva é um campo abstrato de estudo da matemática, a Geometria Descritiva é um campo de estudo técnico e a perspectiva é um campo de estudo artístico.

Neste trabalho, porém, empregamos conceitos oriundos dos três campos. Entretanto, entendemos que o elo de ligação entre todos eles é a Geometria Projetiva. Portanto, este é um trabalho sobre Geometria Projetiva e seus desdobramentos na Perspectiva e Geometria Descritiva.

## 2 Proposta Didático - Metodológica

Nesta seção apresentaremos as atividades que foram desenvolvidas com os alunos do 9° ano da Escola Coriolano Benício, bem como considerações e comentários sobre elas.

Estas atividades foram planejadas inicialmente para ocorrerem durante o mês de abril de 2013 mas, por motivos alheios a nossa vontade, só ocorreram efetivamente a partir da segunda quinzena do mês de abril, e terminaram por demandar dois meses de trabalho. Os fatores que nos levaram a estender o prazo de aplicação da proposta podem ser resumidos em três: organização do calendário escolar, que precisa observar feriados, pontos facultativos, datas temáticas e dias não letivos; a dificuldade dos estudantes de realizarem as tarefas propostas, sendo necessário refazê-las algumas vezes; a inclusão de tópicos que não constavam na proposta original mas que vieram ao encontro das necessidades e curiosidades apresentadas pelos estudantes.

Os trabalhos resultantes das atividades do projeto constituíram metade da nota (15 pontos) da disciplina de matemática no 1° trimestre. O restante da nota foi constituída a partir de atividades relativas aos conteúdos programáticos usuais da matemática do 9° ano do ensino fundamental.

O projeto precisou ser interrompido no final do mês de junho para que tivéssemos tempo hábil para a escrita, e o programa usual da matemática do 9° ano não fosse comprometido. Mas o projeto não se esgotou, ao contrário, nos apontou várias direções que esperamos poder retomar no retorno do recesso de inverno, ou tão logo seja possível.

### 2.1 A Escola

As atividades propostas por este projeto foram aplicadas, em caráter experimental, na turma do 9° ano do ensino fundamental da E.M.E.F. Coriolano Benício – Vila da Quinta, Rio Grande – onde trabalhamos desde 2010 com séries finais do ensino fundamental, em regime estatutário, efetivo, com carga horária semanal de 20 horas.

A escola, classificada pela Secretaria de Educação (SMED) como escola rural, atende cerca de 400 alunos da localidade Abel Cravo e imediações – Quitéria, Quintinha, Santo Antônio, Vila Nova e Ilhas. A turma 82, para a qual foi ofertado o projeto, é composta por 16 alunos com idades entre 13 e 15 anos, moradores da localidade.



Figura 83 – Turma 82.

## 2.2 Objetivos da Proposta Didática

### 2.2.0.12 Objetivos Gerais

Em linhas gerais, a proposta didática apresentada neste trabalho objetiva:

- A partir da exploração multimidiática de elementos da cultura e do cotidiano dos estudantes, introduzir o estudo da Geometria Projetiva aos alunos do 9º ano do ensino fundamental, enfatizando as correlações entre os conceitos da Geometria Projetiva e as técnicas empregadas no desenho em perspectiva;
- Ampliar a compreensão geométrica dos estudantes pelo desenvolvimento das habilidades de percepção espacial, interpretação e comunicação gráfica;
- Promover o confronto dos principais fundamentos da Geometria Euclidiana com os princípios equivalentes da Geometria Projetiva ressaltando o aspecto não-euclidiano desta.

### 2.2.0.13 Objetivos Específicos

As atividades propostas neste trabalho pretendem fazer com que o aluno seja capaz de:

- Reconhecer o desenho em perspectiva como a tentativa técnica ou artística de reproduzir os efeitos do mecanismo da visão humana;

- Dada uma foto ou imagem, identificar, quando possível, a linha de fuga, o(s) ponto(s) de fuga e os pontos de vista;
- Conceituar ponto de fuga e linha de fuga;
- Reconhecer a contribuição da arte renascentista para o desenvolvimento sistematizado das regras de perspectiva;
- Entender que a Geometria Projetiva surgiu da necessidade de fundamentar matematicamente as regras da perspectiva;
- Em uma representação em perspectiva, diferenciar as situações em que o paralelismo é preservado e as situações em que retas paralelas convergem para um ponto de fuga;
- Utilizar as noções elementares de perspectiva para interpretar e representar cenários do seu cotidiano;
- Identificar uma ilusão de óptica e compreender as relações entre este fenômeno físico e a Geometria Projetiva;
- Argumentar matematicamente sobre as ilusões de óptica produzidas em função da relação entre imagem projetada de um objeto e a distância entre este objeto e seu observador;
- Utilizar a relação mencionada no item anterior para criar fotos nas quais se possa identificar ilusões de óptica;
- Conceituar e diferenciar os Sistemas Projetivos;
- Identificar a Perspectiva Cônica como aquela resultante de um Sistema Cônico de projeção;
- Identificar a Perspectiva Cilíndrica como aquela resultante de um Sistema Cilíndrico de projeção;
- Perceber que a Perspectiva Cônica apresenta ponto(s) de fuga e é, por excelência, uma representação artística;
- Perceber que as Perspectivas Cilíndricas são empregadas, fundamentalmente, no campo do desenho técnico, pois não apresentam ponto(s) de fuga e preservam paralelismo;
- Diferenciar as Perspectivas Cônicas em função do número de seus pontos de fuga;
- Representar objetos em Perspectiva Cônica de um e dois pontos de fuga, utilizando, para isto, instrumentos de traçado manual e computacional;

- Diferenciar as Perspectivas Cilíndricas em função de seus respectivos sistemas de eixos;
- Representar objetos em Perspectiva Cilíndrica Cavaleira e Isométrica, utilizando, para isto, instrumentos de traçado manual e computacional;
- Dado um objeto tridimensional, representar suas projeções ortogonais sobre os planos coordenados;
- Compreender que a forma de pensamento geométrico ao qual estão habituados é designada Geometria Euclidiana, nome que faz referência ao matemático grego Euclides de Alexandria;
- Reconhecer e enunciar os cinco postulados sob os quais se construiu a Geometria de Euclides;
- Relacionar os cinco postulados de Euclides a situações práticas no estudo da geometria;
- Entender os resultados clássicos decorrentes do quinto postulado;
- Compreender que existem formas de geometria que não obedecem aos cinco postulados, em especial, ao postulado das paralelas, e saber que estas geometrias recebem a designação de Não – Euclidianas;
- Reconhecer que a Geometria Projetiva é uma Geometria Não – Euclidiana, pois admite que retas paralelas concorrem em um ponto, o que contraria o postulado das paralelas.

## 2.3 Atividade 1

A primeira aula do projeto aconteceu em uma quarta-feira, quando temos três períodos consecutivos. Os alunos sabiam que participariam de uma proposta diferenciada e estavam excitados e curiosos. Fizeram muitas perguntas sobre o que era o projeto; se era difícil; se precisavam copiar; se teria prova; se alguém da FURG iria para avaliá-los; se, caso eles não conseguíssem corresponder ao projeto, o professor seria prejudicado.

Após uma conversa inicial para tranquilizá-los, pudemos perceber que, de certa forma, a turma estava se sentindo importante por terem sido escolhidos para participar do projeto do professor. Depois disso, tudo se encaminhou naturalmente e conseguimos começar a aula.

Para introduzir as atividades do projeto, escolhemos como tema gerador as obras de duplicação da BR-116/392, no trecho que liga Pelotas a Rio Grande.

Durante o processo de duplicação da BR 392, devido à sua proximidade com o local das obras, a comunidade em que está inserida a escola Coriolano Benício foi intimamente afetada pelo projeto. Muitos de nossos estudantes têm familiares ou pessoas próximas empregados na obra ou em empresas terceirizadas que fornecem suporte logístico às empreiteiras. Além disso, toda a comunidade, de alguma forma, foi alcançada pelas mudanças advindas dos processos de desapropriação, bem como pelas inúmeras alterações no tráfego e nos acessos à Vila da Quinta.

Para minimizar os efeitos negativos deste processo, o DNIT e a equipe de Gestão Ambiental do projeto desenvolveram inúmeras ações educativas nas escolas da localidade, inclusive no Coriolano. Estas ações tinham a intenção de conscientizar os estudantes da necessidade e dos benefícios da duplicação e também de divulgar a política de redução do impacto ambiental adotada na obra.

Em uma destas palestras, foi distribuído a todos os estudantes um panfleto publicitário que traz, além de informações sobre a administração da obra, uma representação do trecho a ser duplicado compreendido entre Pelotas e Rio Grande. Naquela ocasião, este material despertou uma curiosidade singular nos alunos que buscavam encontrar a representação de localidades familiares e debatiam as alterações previstas no projeto.

Decidimos, então, usar esta representação aérea da BR, projetada com o auxílio do data show, como ponto de partida para que se introduza as ideias iniciais da perspectiva. A reprodução do folder encontra-se na próxima página.

No segundo momento, após, um breve debate sobre as questões que foram levantadas pelos estudantes acerca da duplicação, foi solicitado aos alunos que representassem,

---

<sup>1</sup> Endereço eletrônico das imagens:

[http://www.br116-392.com.br/upload/folder\\_capa.jpg](http://www.br116-392.com.br/upload/folder_capa.jpg)

[http://www.br116-392.com.br/upload/folder\\_interior.jpg](http://www.br116-392.com.br/upload/folder_interior.jpg)

### Gestão Ambiental da duplicação da BR-116/392

A duplicação da BR-116/392 é um projeto do Departamento Nacional de Infraestrutura de Transportes (DNIT) que tem por objetivo contribuir com o desenvolvimento da região sul do Rio Grande do Sul.

Para aumentar a segurança da população local e usuários da rodovia, a duplicação conta com novos viadutos, pontes, passarelas para pedestres e sinalização ao longo de toda a trilha.

A obra vem sendo desenvolvida segundo o Plano Básico Ambiental, composto por 18 programas para reduzir, prevenir e compensar os impactos ambientais da obra. Entre as ações ambientais para este rodovia, ressaltam-se as passagens de fauna para evitar o atropelamento de animais, o transplante de quase a totalidade das árvores nativas protegidas por lei e o monitoramento da qualidade da água.

Os projetos rodoviários do DNIT visam atender aos anseios da população para o desenvolvimento, a preservação ambiental e a melhoria da qualidade de vida em todo o país.





www.br116-392.com.br  
www.dnit.com.br

Telefone | 0800 011 0000  
51 3027 2710

Projeto 7 de Julho, 10, sala 102  
Caxias | Fátima/RS

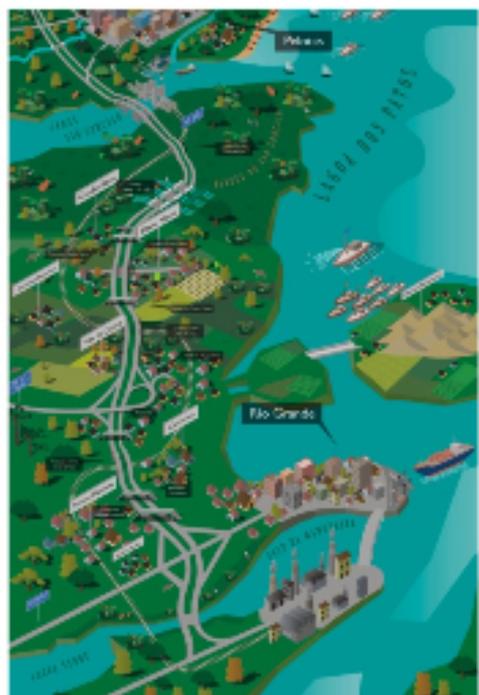



Ministério dos Transportes






BR-116/392  
GESTÃO AMBIENTAL



MAPA TEMÁTICO DA DUPLICAÇÃO DA BR-392



BR-116/392  
GESTÃO AMBIENTAL

#### Programas Ambientais

- Programa Ambiental para Construção
- Programa de Recuperação de Áreas Degradadas
- Programa de Saúde Pública
- Programa de Suprimento de Vegetação
- Programa de Resgate de Germoplasma
- Programa de Licenciamento, Mitigação e Monitoramento dos Atropelamentos de Fauna
- Programa de Monitoramento da Fauna - Espécies Endêmicas
- Programa de Monitoramento da Qualidade da Água
- Programa de Monitoramento de Ruídos
- Programa de Educação Ambiental
- Programa de Comunicação Social
- Programa de Identificação de Terceiros Beneficiários
- Programa de Identificação e Salvamento de Bens Arqueológicos
- Programa de Apoio Técnico aos Municípios
- Programa de Apoio às Unidades de Conservação
- Programa de Gerenciamento de Riscos e Plano de Ação Emergencial
- Programa de Promoção de Calçadas

Figura 84 – Folder Publicitário do Programa de Gestão Ambiental.  
Fonte - Imagem extraída do site BR 116-392 Gestão Ambiental. <sup>1</sup>

através de um desenho, uma autoestrada, tendo como referência o trecho em duplicação da BR 392. A atitude esperada era que os estudantes representassem a autoestrada como segmentos de retas paralelos ou linhas que não possuam pontos em comum.

Após esta etapa, confrontamos as representações fornecidas pelos estudantes com fotos reais do projeto de duplicação. A intenção era que eles percebessem as diferenças entre o tipo de representação usado no folder e semelhante à representação que eles produziram e a representação obtida por um processo fotográfico.



Figura 85 – Fotos da duplicação BR 116-392.

Fonte - Imagens extraídas do site BR 116-392 Gestão Ambiental. <sup>2</sup>

Aqui tivemos alguma dificuldade, pois muitos alunos não lembravam ou não tinham clareza do conceito de retas paralelas e retas concorrentes. Ao serem questionados sobre paralelismo, em geral, descreviam retas perpendiculares ao invés de paralelas. Após algum tempo de debates, um dos estudantes foi ao quadro e desenhou corretamente retas paralelas, mas não soube defini-las. Até que outro aluno definiu de uma forma um tanto inusitada. Segundo ele, retas paralelas são retas que *não afunilam*. Percebemos que o aluno havia compreendido o comportamento pelo qual se caracterizam as retas paralelas e apenas interferimos para elaborar o conceito de forma matematicamente mais apropriada.

Corrigidas as deficiências conceituais sobre retas paralelas e concorrentes, os alunos conseguiram perceber que a foto representava a estrada a partir de retas concorrentes, ao passo que a representação que eles haviam feito usava, fundamentalmente, retas paralelas.

<sup>2</sup> Endereço eletrônico das imagens: [http://www.br116-392.com.br/secao\\_1/galeria.php](http://www.br116-392.com.br/secao_1/galeria.php)

Questionados sobre o porquê de isso ocorrer, o mesmo aluno anterior respondeu que a distância fazia com que as retas *afunilassem*. Outro aluno complementou dizendo que elas se encontravam. Questionamos, se encontram onde? A resposta foi: em um ponto. Onde fica este ponto? Alguém respondeu: longe. Longe, onde? No horizonte, disseram. Reproduzimos aqui a sequência em que as ideias foram sendo encadeadas, mas, naturalmente, houve respostas menos pertinentes do que estas.

Neste momento, o professor questionou a turma sobre se as retas que representavam a estrada nas fotos eram paralelas ou concorrentes. Inicialmente, todos concordaram que eram concorrentes. Então, foi exibida a imagem dos trilhos de um trem. E questionamos se os trilhos era paralelos ou concorrentes.



Figura 86 – Os trilhos de trem.

Fonte - Imagem extraída da internet. <sup>3</sup>

Após alguns minutos de debate, conseguimos concluir que os trilhos eram paralelos mas, na foto, eram representados por retas concorrentes, ou seja, na foto retas paralelas eram representadas por retas concorrentes. Aqui definimos que a fotografia é uma representação em perspectiva, que leva em consideração a ideia de profundidade e que, para traduzir esta profundidade, permite-se que retas paralelas sejam, na representação, concorrentes. Definimos, portanto, **ponto de fuga** como o ponto sobre a linha do horizonte

<sup>3</sup> Endereço eletrônico da imagem: <http://i36.tinypic.com/vo7u6o.jpg>

onde as paralelas se encontram. Convencionamos que a linha do horizonte seria chamada de **linha de fuga**, ao que uma das meninas acrescentou que a linha do horizonte separava o céu e a terra.

Após este diálogo, foi solicitado aos estudantes que refizessem o desenho anterior, agora aplicando os conceitos que haviam aprendido naquela aula. Em tempo, gostaríamos de registrar que esta atividade foi inspirada por atividade semelhante descrita no artigo Geometria Projetiva no Laboratório de Ensino da Matemática de autoria dos professores Ivone Watermann e Valdeni Soliani Franco ([WATERMANN; FRANCO, 2009](#)).

Duas situações nos chamaram a atenção naquela aula. Primeiro foi a facilidade com que aceitaram que retas paralelas concorriam em um ponto. Não imaginávamos que eles fossem assimilar isso com tanta naturalidade. A outra foi que pensávamos que, ao apresentarmos a representação em perspectiva da estrada, eles abandonariam a representação por retas paralelas e, talvez, a considerassem errada, ou menos adequada. No entanto, o mesmo estudante que afirmava que as retas paralelas *não afunilam*, nos surpreendeu ao colocar que a representação por retas concorrentes só era adequada se o observador estivesse sobre a estrada, porque, segundo ele, se o observador estivesse em um avião (ao que outro aluno respondeu: não, em um satélite!) então, a estrada seria vista como no folder. Ou seja, eles perceberam intuitivamente a diferença entre os sistemas projetivos cônico e cilíndrico, o que consideramos excelente.

Os trabalhos seguiram uma certa regularidade e esta foi a única atividade do projeto que não precisou ser refeita. No segundo desenho todos empregaram retas convergentes ao ponto de fuga e explicitaram a linha de fuga. Apenas um aluno localizou indevidamente o ponto de fuga acima da linha do horizonte o que, por definição, está incorreto. Quando comentamos os trabalhos enfatizamos esse detalhe e o aluno percebeu o equívoco. A seguir, inserimos alguns dos desenhos produzidos pelos estudantes, não colocaremos todos pois seria repetitivo e desnecessário.

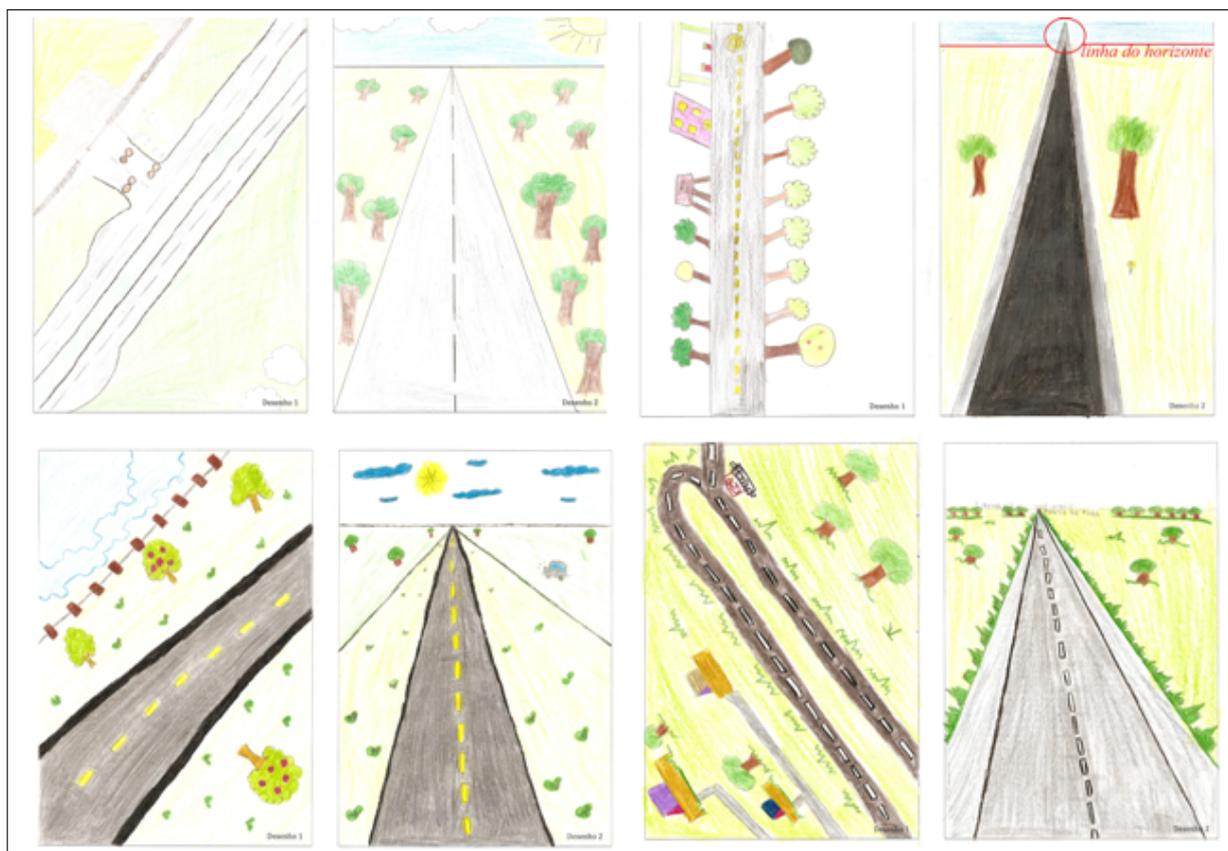


Figura 87 – Trabalhos referentes à atividade 1.

## 2.4 Atividade 2

Para a segunda aula do projeto, inspirados pelo livro *A Matemática e a Mona Lisa* (ATALAY, 2009) de Bulent Atalay, escolhemos como tema gerador a obra de Leonardo da Vinci – o encontro da arte com a matemática.

Para introduzir a discussão sobre a vida e obra de Da Vinci, exibimos o vídeo documentário produzido por Julio Riolando Sidor de Freitas e disponível no canal do autor no You Tube. O vídeo, em linguagem biográfica, resume a importância de Leonardo da Vinci no contexto da arte do Renascimento. Após o vídeo, alguns alunos comentaram que já conheciam um pouco da história de Da Vinci devido ao filme *O Código Da Vinci* (2006), do diretor estadunidense Ron Howard e baseado no livro homônimo de Dan Brown. Percebemos aqui a possibilidade de estudar a *Razão Áurea*, tema recorrente na obra do pintor italiano e abordado no filme. Esta foi uma das atividades sugeridas pelo projeto que ainda não encontramos espaço para retomar, esperamos poder fazê-lo no segundo semestre.

Na segunda etapa da aula observamos os elementos do desenho em perspectiva presentes em obras de Leonardo Da Vinci. Foi proposto aos estudantes comparar a arte

<sup>4</sup> Endereço eletrônico do vídeo:  
<https://www.youtube.com/watch?v=BgYZPTYKJe8>



Figura 88 – Vídeo: Leonardo Da Vinci – Um homem a frente de seu tempo.

4

produzida sem observar o rigor geométrico da perspectiva, e as obras matematicamente embasadas de Leonardo. Para isso, exibimos as pinturas *O Chamado dos Apóstolos* e *A Anunciação* de Da Vinci e o esquema projetivo sobre a obra *A Última Ceia*, como o fizemos na seção 3.1 deste trabalho. Nas obras *A Anunciação* e *A Última Ceia*, identificamos as linhas paralelas convergentes em um ponto de fuga sobre a linha de fuga. A título de registro teórico desta etapa, os alunos receberam o texto de apoio extraído do livro didático *Saber e Fazer História 7º ano* (COTRIM; RODRIGUES, 2012), cuja reprodução encontra-se no final desta atividade.

Na terceira etapa da aula, estudamos a representação de cenários cotidianos com o uso intuitivo da perspectiva. Para isso, foi exibido o vídeo com a apresentação dos trabalhos dos alunos da Prof<sup>a</sup> Lisie de Lucca disponível no canal do You Tube do Colégio Unidade Jardim.

A perspectiva utilizada pelos alunos da Prof<sup>a</sup> Lisie de Lucca foi a cônica centralizada (um ponto de fuga). Uma técnica para obtermos este tipo de perspectiva consiste em desenhar um retângulo e suas diagonais, tomar o ponto de encontro das diagonais como ponto de fuga e estabelecer a linha de fuga paralela à base do retângulo e passando pelo ponto de fuga. Feito isso, desenha-se outro retângulo semelhante ao primeiro que será usado como plano de fundo do desenho. Esta técnica é descrita no esquema a seguir e foi apresentada ao alunos com o auxílio do vídeo *How to Draw with One Point Perspective*, disponível no You Tube.

<sup>5</sup> Endereço eletrônico do vídeo:  
<http://www.youtube.com/watch?v=2zGNVZNSZMk>

<sup>6</sup> Endereço eletrônico do vídeo:



Figura 89 – Vídeo: Aula de perspectiva para o 8º ano.

5

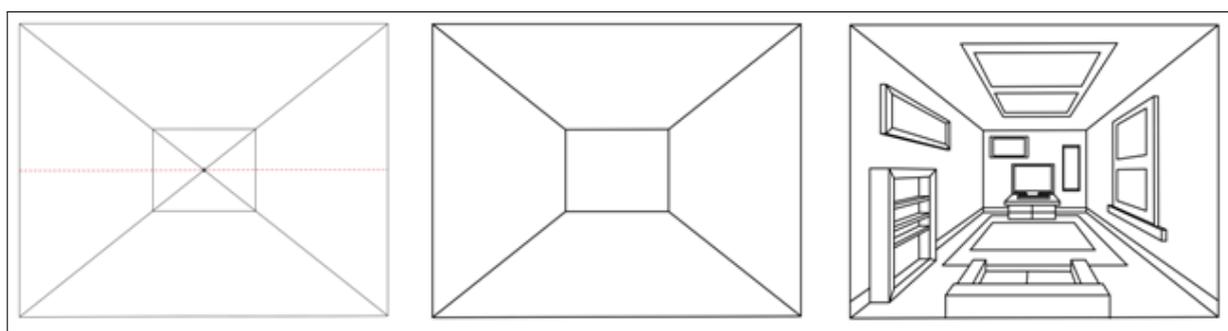


Figura 90 – Técnica de desenho em perspectiva.

Neste ponto do trabalho já é possível percebermos os princípios matemáticos fundamentais do desenho em perspectiva. Observemos que todas as retas foram representadas como retas (Proposição 3.1). Além disso, as retas horizontais ou verticais mantiveram sua direção e paralelismo (Proposição 3.2). Por outro lado, as retas paralelas contidas em planos perpendiculares ao plano de imagem, convergiram em um ponto de fuga (Proposição 3.3). É importante salientarmos que, como estamos trabalhando com a perspectiva centralizada, nem todas as retas paralelas tornam-se convergentes na representação em perspectiva, apenas as que não estão contidas em planos paralelos ao plano de imagem.

Na quarta etapa foi solicitado aos alunos que, utilizando a técnica descrita no vídeo *How to Draw with One Point Perspective*, construísem a representação em perspectiva centralizada de um cenário familiar a eles, como o seu quarto, por exemplo. Essa etapa foi subdividida em dois momentos: no primeiro momento o aluno esboçaria seu projeto no papel e, posteriormente, usaria o GeoGebra para confeccionar o layout do am-

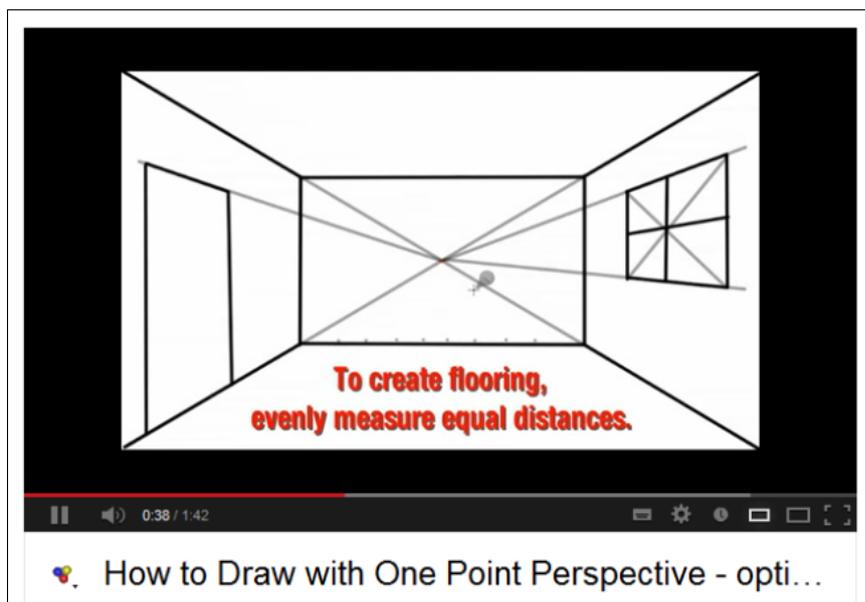


Figura 91 – Vídeo: How to Draw with One Point Perspective.

6



Figura 92 – Sala de estar em perspectiva cônica.

biente, algo semelhante ao que é visto na próxima imagem. Contudo, tivemos muitas dificuldades para executar esta tarefa, foram duas semanas de trabalho apenas no esboço. Todos os alunos precisaram refazer, no mínimo, três vezes o esboço, de forma que quando obtivemos trabalhos minimamente aceitáveis, decidimos abrir mão do uso do GeoGebra. Entendemos que esta concessão foi razoável, pois os alunos já haviam cumprido os propósitos matemáticos da atividade. Além disso, como a tarefa havia atingido um nível de exigência ao qual não estão habituados, já demonstravam sinais de exaustão e desinteresse, dizendo que nem um desenhista profissional seria capaz de contentar o professor e que nem na aula de educação artística eram tão exigidos. Portanto, antes que a desmotivação da turma comprometesse o andamento do trabalho, decidimos ir adiante deixando a proposta com o GeoGebra para outra oportunidade.

De uma maneira geral os estudantes esboçaram quartos. A presença do ponto de fuga – ou a intenção dela – foi constatada em todos os trabalhos, principalmente no tocante à construção das paredes, teto e chão, que obedeceram a técnica já mencionada. Contudo, quando iam representar o restante do cenário, em alguns casos, os estudantes deixavam de observar a convergência em todas as situações que ela seria exigida, optando por traçados intuitivos e que resultassem em algo que lhes parecesse bonito. Também foi possível constatar nesta tarefa a dificuldade de traçarem corretamente linhas paralelas ou perpendiculares. Procuramos auxiliá-los ensinando o manuseio correto dos esquadros, mas não obtivemos sucesso em todos os casos. A seguir, apresentamos alguns trabalhos que resultaram desta atividade.

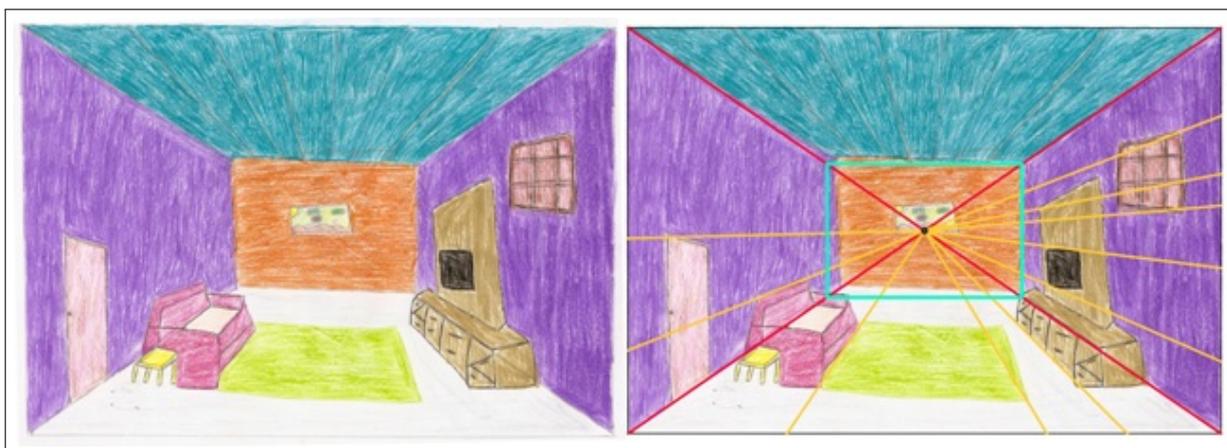


Figura 93 – Trabalho de aluno.

No trabalho acima, podemos perceber a ausência quase total de paralelismo e perpendicularidade, o que contraria a Proposição 3.2. Por outro lado, o ponto de fuga não foi estabelecido na intersecção das diagonais do retângulo maior, como sugeria a técnica apresentada, isto fez com que a parede do fundo ficasse torta. Além disso, o trabalho insinua uma convergência para o ponto de fuga, mas, como mostra o traçado que fizemos sobre ele, nem todas as retas que deveriam convergir o fazem de fato, o que contraria

a Propriedade 3.3. Dentre todos os trabalhos apresentados, este foi o que consideramos menos satisfatório, pois apresenta um traçado excessivamente impreciso e descuidado, especialmente se considerarmos que esta já era a terceira tentativa. A aluna autora deste trabalho apresentou dificuldades similares em todas as atividades que exigiam traçado e apenas conseguiu obter resultados melhores quando empregamos o computador para desenhar.

Os próximos dois trabalhos (figuras 94 e 95) representam a média do que foi feito pela turma. Nestes desenhos, o ponto de fuga foi corretamente estabelecido; a delimitação das paredes também está correta; temos noções razoáveis de paralelismo e perpendicularidade (Proposição 3.2); apenas a convergência das retas não foi totalmente adequada, infringindo Proposição 3.3. Cabe ainda salientar que os alunos usaram corretamente trapézios para representar as projeções de retângulos, conforme discutimos na seção 3.4.1 deste trabalho, o que podemos verificar observando as janelas, quadros e tapetes dos desenhos.

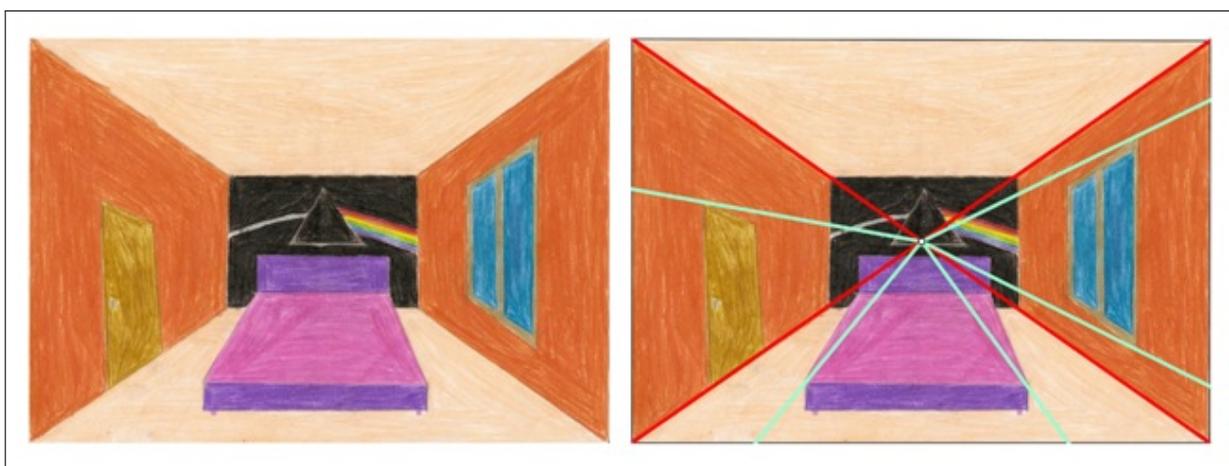


Figura 94 – Trabalho de aluno.

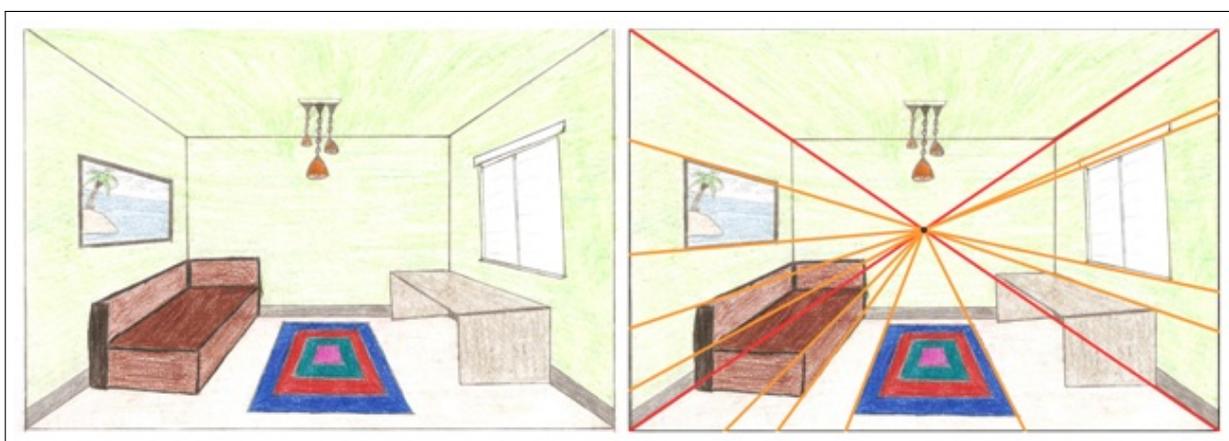


Figura 95 – Trabalho de aluno.

Finalmente, o quarto trabalho (figura 96) foi um dos que apresentou menos equívocos conceituais. A determinação do ponto de fuga foi precisa, temos linhas horizontais e verticais paralelas (Proposição 3.2), as linhas de projeção, exceto uma, convergem corretamente para o ponto de fuga (Proposição 3.3). Por outro lado, há um pequeno problema na lateral esquerda da cômoda que deveria ter sido representada por um quadrilátero e foi representada por uma reta. Ainda assim, entendemos que este pequeno deslize não compromete a técnica que, em termos gerais, foi muito bem usada.

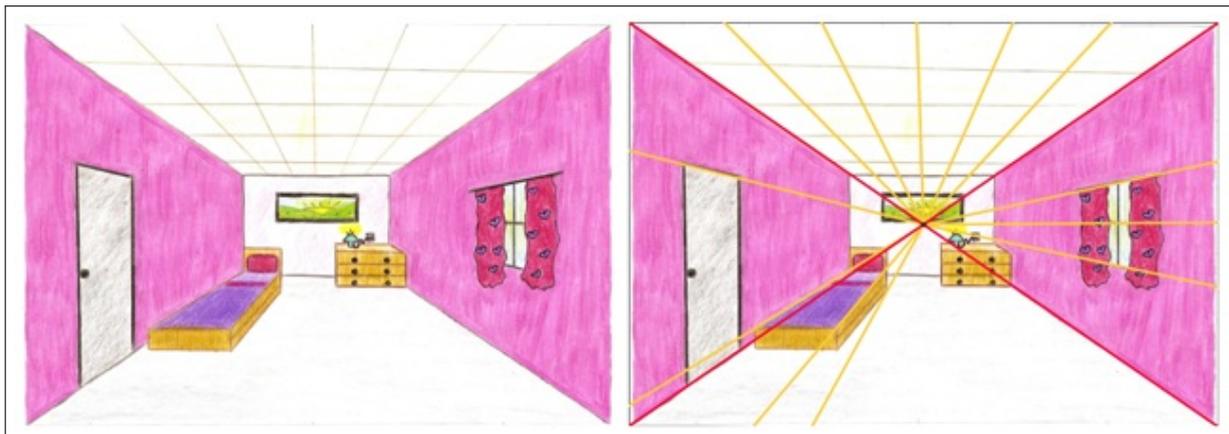


Figura 96 – Trabalho de aluno.

## A perspectiva

### Para entender

**Tridimensional:** tudo aquilo que tem ou é representado pelas três dimensões — altura, largura e profundidade.

3

### Artistas e obras do Renascimento

Para o assunto *Produção cultural do Renascimento*, acesse e explore este recurso digital.

Os pintores renascentistas desenvolveram a técnica da **perspectiva**, por meio da qual procuravam dar uma aparência **tridimensional** às personagens e aos objetos representados.

Ao pintar ou desenhar em perspectiva, o objetivo era proporcionar ao observador a ideia de que as figuras tinham volume e profundidade. Para o pintor Dürer, perspectiva significava observar uma pintura na parede e ter a sensação de ver através dela, como se ali existisse uma janela aberta. Diferentemente das técnicas de pintura bizantina ou gótica — que eram bidimensionais (representavam a altura e a largura) —, a pintura em perspectiva preocupava-se em representar as pessoas, os objetos e as paisagens naturais de forma que se tornassem mais naturais aos olhos humanos. Na visão do historiador Nicolau Sevcenko:

*O novo estilo artístico multiplicava o espaço dos interiores e (...) parecia multiplicar a própria vida. (...) Era uma arte que remetia o homem ao próprio homem e o induzia a uma identificação maior com seu meio urbano e natural (...).*

SEVCENKO, Nicolau. *O Renascimento*. São Paulo: Atual, 2005. p. 32-33.



A *Escola de Atenas*, pintura em perspectiva realizada por Rafael entre 1509 e 1511, que se encontra no Vaticano. Foram representados Platão e Aristóteles, no centro da obra, e outros filósofos de diferentes épocas históricas.

## Os artistas italianos

Dentre os artistas renascentistas, os italianos ocuparam lugar de destaque. Um dos mais conhecidos foi Leonardo da Vinci. Sua obra estende-se por diversos campos do saber. Pintou poucas telas e afrescos, mas suas criações são consideradas obras-primas, como *A última ceia*, afresco pintado num mosteiro de Milão; *Mona Lisa* (ou *Gioconda*), um pequeno retrato de mulher; *A virgem dos rochedos*, entre outros.

Michelangelo Buonarroti (1475-1564), mais conhecido como Michelangelo, foi importante pintor, escultor e arquiteto. Inspirado na arte da Antiguidade, deixou marcas de sua técnica e de sua emotividade nas obras que produziu. Pintou afrescos na Capela Sistina, no Vaticano. Como escultor, realizou obras relevantes, como *Moisés*, *Pietà* e *Davi*. Como arquiteto, projetou a cúpula da Basilica de São Pedro, em Roma.

Rafael Sanzio, como você já viu, foi outro mestre italiano da pintura, influenciado por Leonardo da Vinci e por Michelangelo. Começou a pintar quando vivia em Florença, mas, atendendo a pedidos dos papas Júlio II e Leão X, passou a viver em Roma, onde fez afrescos para decorar o Palácio do Vaticano. Tornou-se célebre por ter pintado várias madonas (representações da Virgem Maria com o Menino Jesus) e por ter projetado a Basilica de São Pedro (a partir de 1514), na qual se realizam muitas cerimônias papais.

Ticiano (1490?-1576) atuou exclusivamente como pintor, produzindo quadros dos mais diferentes gêneros (paisagens, retratos etc.) e temas (religiosos ou mitológicos). Trabalhou para os governantes de Veneza. Suas principais obras foram *Amor sacro e amor profano*, *Vênus de Urbino*, *Ranuccio Farnese* e *Salomé*.



*Pietà* (*Piedade*, em português), uma das obras mais conhecidas de Michelangelo, representa Maria com Jesus morto em seus braços.



Em 1503, Leonardo da Vinci começou a pintar o pequeno retrato da *Mona Lisa* ou *Gioconda*, um dos quadros mais famosos da história da arte mundial e uma das principais atrações do Museu do Louvre, em Paris, onde está exposto. Foi o próprio Da Vinci quem levou o quadro para a França, em 1516, quando foi trabalhar na corte do rei Francisco I, que comprou o retrato.

### Para entender

**Afresco:** nome dado à pintura feita em paredes, em tetos ou em muros, em geral numa base de gesso ou de argamassa. Os afrescos utilizam tintas à base de água e apresentam grande durabilidade.

## 2.5 Atividade 3

Para a terceira atividade do projeto escolhemos como tema gerador as Ilusões de Óptica. Estávamos particularmente interessados naquelas ilusões criadas pela visão humana em função da distância entre observador e objeto observado.

Começamos a aula levantado novamente a questão sobre as retas paralelas que se encontram em algum ponto sobre a linha de fuga. Das aulas anteriores, já tínhamos a ideia de que os trilhos do trem, por exemplo, são efetivamente linhas paralelas que, quando fotografadas ou observadas a uma certa distância, tornam-se, aparentemente, convergentes. Questionamos os alunos acerca do fenômeno em que a visão cria percepções que não refletem necessariamente a realidade sobre uma situação ou objeto. Transcorrido algum tempo de conversa, um aluno respondeu que esse fenômeno chamava-se miragem. Houve um breve debate sobre o emprego deste termo, pois alguns alunos argumentavam que miragens ocorrem em lugares muito quentes e simulam a existência de água, e que isso em nada se relacionava ao fato dos trilhos do trem se encontrarem em um ponto. Desconsideraram, portanto, o termo miragem e sugeriram *ilusionismo*, ao que respondemos que ilusionismo era uma categoria de mágica, e não um fenômeno físico, mas que estavam se aproximando do termo correto. Passados mais alguns minutos, alguém sugeriu *ilusão de óptica*. Concluímos, então, que a convergência de retas paralelas, como os trilhos de um trem, pode ser descrita como uma ilusão de óptica.

Após esta conversa inicial, reproduzimos o vídeo do canal do You Tube *Manual do Mundo*, que explica o princípio da Câmara Escura de Kepler, e estendemos este princípio para a visão humana, tal como fizemos na seção 3.4.1 deste texto. A leitura sugerida aos alunos foi retirada do próprio livro didático deles, e encontra-se reproduzida no final desta atividade – figura 111. A ideia aqui era que os estudantes percebessem matematicamente a relação inversamente proporcional que existe entre o tamanho da imagem de um objeto e sua distância em relação ao observador, e como este fato nos ajuda a entender a convergência das retas paralelas.

A maioria dos alunos já estavam familiarizados com a ideia de ilusão de óptica e passaram algum tempo comentando os exemplos clássicos disponíveis na internet. Na sequência, foi exibido o vídeo *Incredible Shade Illusion!*.

O vídeo é intrigante e reproduz uma ilusão<sup>9</sup> de óptica criada pelo cientista da visão e professor do *Massachusetts Institute of Technology (MIT)*, Edward H. Adelson. Nesta ilusão de óptica, dois quadrados de mesma cor simulam colorações diferentes, dependendo

<sup>7</sup> Endereço eletrônico do vídeo:  
<http://www.youtube.com/watch?v=9JBs4T-sd6E>

<sup>8</sup> Endereço eletrônico do vídeo:  
[http://www.youtube.com/watch?v=z9Sen1HTu5o&feature=player\\_embedded](http://www.youtube.com/watch?v=z9Sen1HTu5o&feature=player_embedded)

<sup>9</sup> Popularmente conhecida como *Checkershadow Illusion*



Figura 99 – Vídeo: Cinema na caixa (Câmara Escura).

7

Figura 100 – Vídeo: *Checkershadow Illusion*.

8

de sua disposição sobre um tabuleiro de damas. O efeito é criado a partir de uma escolha adequada de cores e iluminação. Na figura 101 temos uma das provas oferecidas por Adelson para esta ilusão. Segundo ele, é possível desenhar um retângulo interligando os quadrados  $A$  e  $B$  e que este retângulo terá a mesma cor de ambos, portanto,  $A$  e  $B$  são da mesma cor. Naturalmente, as questões relacionadas à neurociência não estavam em discussão neste momento, apenas esperávamos fugir do convencional ao escolhermos este vídeo. No entanto, no começo da experiência, é salientado um fato que nos interessa particularmente: que quadrados (casas do tabuleiro) de mesmas dimensões assumem tamanhos

diferentes em função da distância em relação ao observador, o que podemos explicar pelo princípio da Câmara Escura.

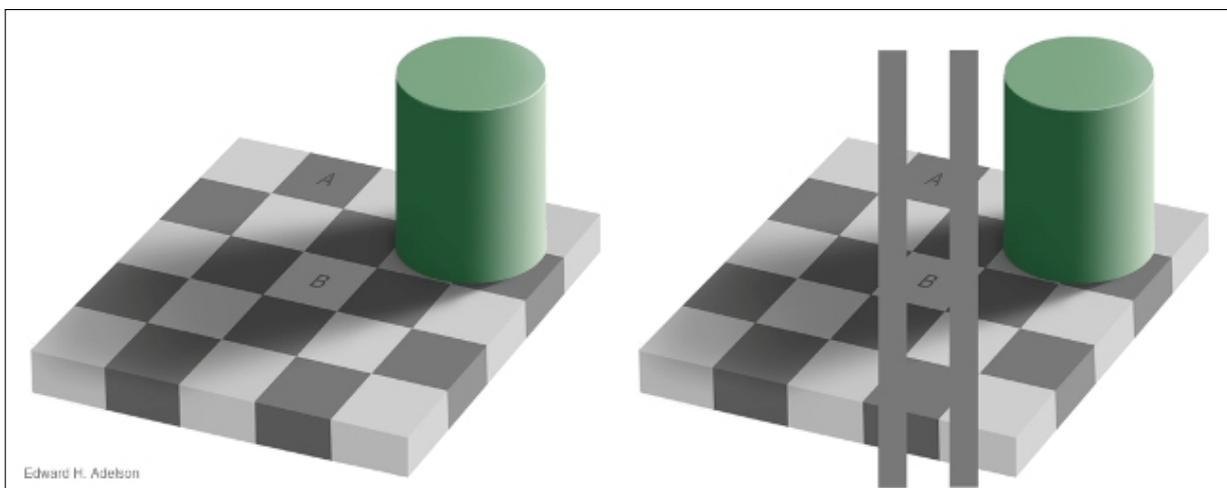


Figura 101 – Prova da *Checkers Shadow Illusion*.

Fonte - Imagem extraída do site *Perceptual Science Group - MIT*.<sup>10</sup>

Outro exemplo relacionado à ilusões de óptica e muito difundido na internet são os trabalhos de artistas contemporâneos, da chamada *street art*, que utilizam o desenho em perspectiva para criar ilusões de óptica em suas obras. Talvez o maior expoente desse gênero de pintura seja o artista alemão Edgar Mueller. Suas pinturas realísticas executadas no chão empregam a perspectiva com maestria para criar ilusões de óptica fantásticas, como a da figura 102.

No site do artista encontramos um vídeo com o making of da obra *The Crevasse* e fotos (figura 104) do projeto passo a passo. O interessante aqui foi mostrar aos alunos que uma obra de arte deste porte começou com o artista traçando algumas linhas convergentes no chão, o que fez alguns alunos pensarem que era um trabalho extremamente simples, que poderia ser reproduzido na quadra da escola. Discutimos um pouco sobre isso, e eles entenderam que, além do conhecimento de perspectiva, o artista precisa de técnica e talento para criar uma obra como esta. Também foi interessante que eles perceberam que a aplicação das noções de perspectiva na arte não ficou restrita aos clássicos do renascimento, mas chegou à arte contemporânea. Acreditamos que este foi um fator de identificação da turma com as atividades propostas nesta etapa do projeto.

<sup>10</sup> Endereço eletrônico da imagem  
[http://persci.mit.edu/\\_media/gallery/checkersshadow\\_double\\_med.jpg?cache=&w=900&h=349](http://persci.mit.edu/_media/gallery/checkersshadow_double_med.jpg?cache=&w=900&h=349)

<sup>11</sup> Endereço eletrônico da imagem  
[http://www.metanamorph.com/images/3D%20Pavement%20Art/Waterfall/max/The%20Waterfall\\_020.jpg](http://www.metanamorph.com/images/3D%20Pavement%20Art/Waterfall/max/The%20Waterfall_020.jpg)

<sup>12</sup> Endereço eletrônico do vídeo:  
[http://www.youtube.com/watch?feature=player\\_embedded&v=3SNYtd0Ayt0](http://www.youtube.com/watch?feature=player_embedded&v=3SNYtd0Ayt0)

<sup>13</sup> Endereço eletrônico das imagens  
[http://www.metanamorph.com/index.php?site=project&cat\\_dir=3D-Pavement-Art&proj=The-](http://www.metanamorph.com/index.php?site=project&cat_dir=3D-Pavement-Art&proj=The-)



Figura 102 – *Waterfall* de Edgar Mueller.

Fonte - Imagem extraída do site *Edgar Mueller – Street Artist*. <sup>11</sup>



Figura 103 – Vídeo: *The Crevasse*.

<sup>12</sup>

Para que os alunos se recuperassem do desgaste da tarefa da atividade 2, foi proposta uma tarefa bem simples como verificação de aprendizagem. Projetamos a figura 105 e pedimos que eles tentassem fazer algo similar. Não era necessário que a foto tivesse dois pontos de fuga como no caso desta imagem, apenas que usassem o princípio que havíamos estudado no começo da aula de que, a medida que nos distanciamos de um

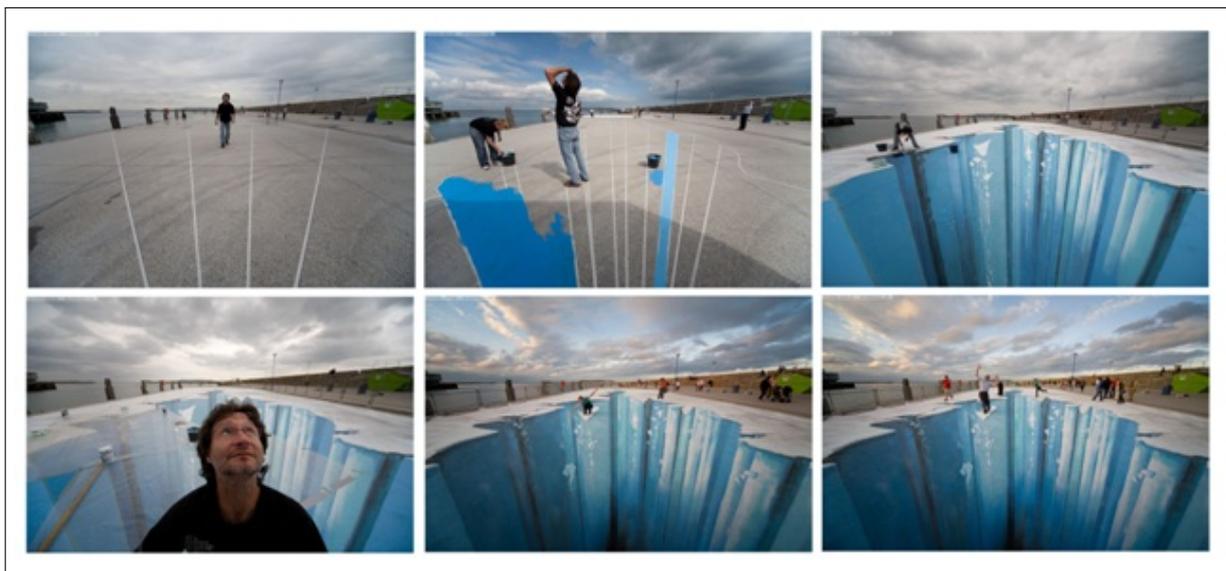


Figura 104 – *Waterfall* de Edgar Mueller.

Fonte - Imagens extraídas do site *Edgar Mueller – Street Artist*.<sup>13</sup>

objeto, sua imagem fica cada vez menor possibilitando ilusão de óptica como a desta foto.



Figura 105 – Foto com ilusão de óptica.

Fonte - Imagem extraída do site *Digital Life Plus*.<sup>14</sup>

A maior dificuldade que eles encontraram para realizar esta tarefa foi a falta de criatividade para imaginar uma situação em que se pudesse produzir uma ilusão de óptica a partir de uma fotografia e a timidez de ir em busca de uma foto inusitada, de maneira que as ideias foram muito repetitivas. A seguir vamos comentar alguns destes trabalhos.

<sup>14</sup> Endereço eletrônico da imagem

<http://www.digitallifeplus.com/wp-content/uploads/2012/08/souvenir-optical-illusions-michael-hughes-01-e1345822111833.jpg>



Figura 106 – Trabalhos de alunos.

Na figura 106, temos três trabalhos sobre a mesma ideia. De fato, embora com algumas falhas na execução, a aplicação do conceito está correta, pois, ao se distanciar do menino, a câmera (olho) diminui amplitude do ângulo de visão, projetando a imagem do menino menor que a imagem da mão que está mais próxima da câmera. Esta situação cria uma ilusão de óptica onde imaginamos que um menino está sobre a mão do outro.

Os próximos dois trabalhos – figura 107 – também trazem temas similares e aplicam corretamente o princípio estudado que, neste caso, é ainda é mais contundente, devido à magnitude da diferença entre o tamanho de uma pessoa e o de um corpo celeste. Aqui a distância entre o objeto observado e centro da projeção (câmera) é tão grande, que a seção (imagem projetada) deste astro cabe na palma da mão.

Alguns alunos tiveram a ideia de fazer um *Sleeveface*<sup>15</sup>. No entanto, como podemos ver na figura 108, nem todos os *Sleeveface* utilizam uma ilusão de óptica. Nas duas imagens superiores, há apenas a sobreposição conveniente da imagem da capa, em tamanho real, sobre o rosto. Já nas imagens inferiores, vemos que a imagem da capa, em tamanho menor que o natural, é posicionada adequadamente, levando em consideração a distância entre a pessoa, a capa e a câmera. Neste último caso, temos uma projeção central análoga ao método da tela de vidro. A capa seria a tela ou plano imagem, o rosto da pessoa seria o objeto observado e a câmera seria o centro da projeção. A ilusão está justamente no fato de supor que a imagem da capa é a seção projetada do rosto da pessoa pelo ponto  $O$  (câmera).

<sup>15</sup> *Sleeveface* é uma prática de fotografia muito difundida na internet, e alguém cria uma cena inusitada usando uma capa de disco ou revista para cobrir o rosto.

<sup>16</sup> Endereços eletrônicos das imagens

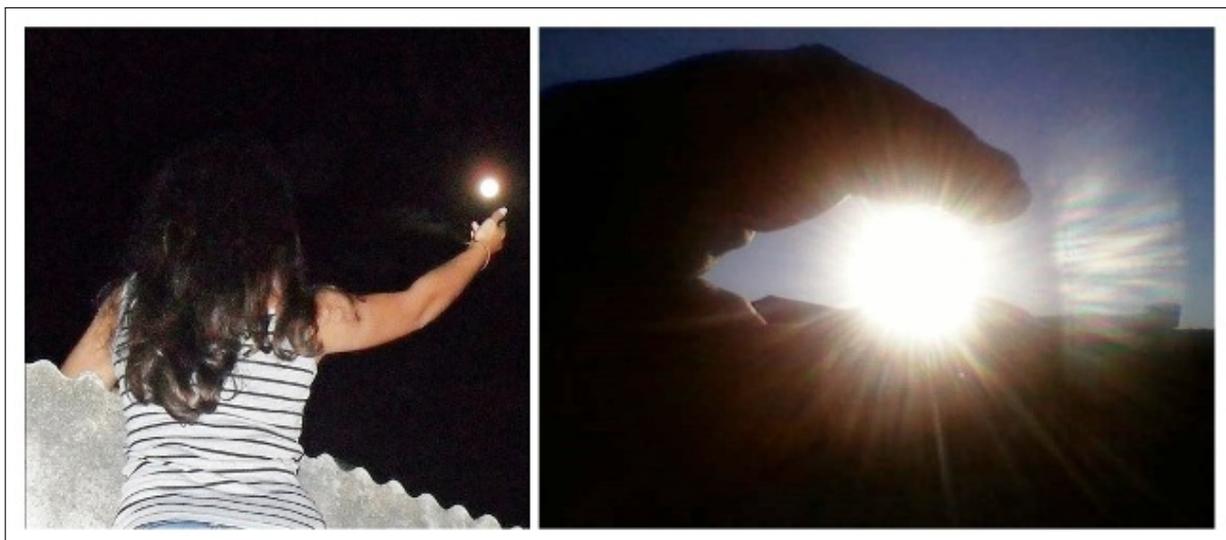


Figura 107 – Trabalhos de alunos.



Figura 108 – Sleeveface.

Fonte - Imagens extraídas do site *Sleeveface*.<sup>16</sup>

<http://www.sleeveface.com/wp-content/uploads/2012/12/Frankie-Vaughan-Christophe-Gowans.jpg>  
<http://www.sleeveface.com/pics/JeanPaulGaultier-DietCoke01.jpg>  
[http://www.sleeveface.com/pics/library-6263081025\\_5cacfa74fd\\_b.jpg](http://www.sleeveface.com/pics/library-6263081025_5cacfa74fd_b.jpg)  
[http://www.sleeveface.com/pics/library-6263080985\\_4f9909a00e\\_b.jpg](http://www.sleeveface.com/pics/library-6263080985_4f9909a00e_b.jpg)

Foram dois trabalhos com esta proposta, mas a foto de um deles não ficou nítida o suficiente para colocarmos aqui. O trabalho que apresentamos na figura 109 é justamente o caso em que não há ilusão de óptica, apenas posicionamento adequado da foto em tamanho natural sobre o rosto. Quando fizemos a avaliação do trabalho, conversamos sobre este equívoco e a aluna entendeu o problema. No entanto, mesmo que não estando integralmente de acordo com o que foi proposto, achamos adequado registrar a ideia extremamente pertinente dos alunos.

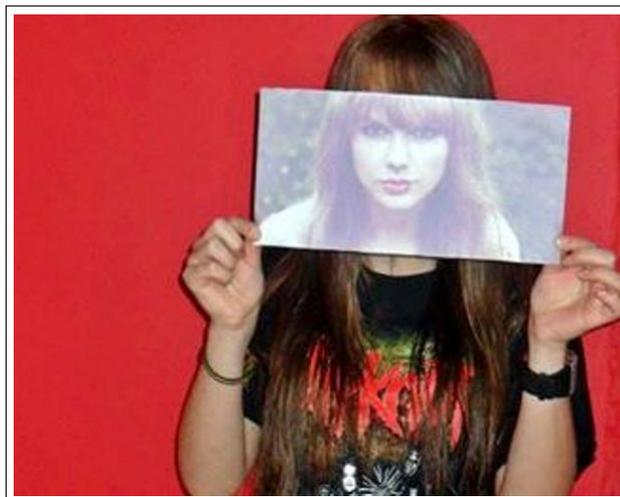


Figura 109 – Trabalho de aluno.

O último trabalho (figura 110) foi diferente em relação aos demais e usa exatamente a mesma ideia de ilusão de óptica da figura 105. Acreditamos que, se as meninas tivessem escolhido melhor o cenário para a foto, teriam obtido um resultado bem mais interessante. No entanto, consideramos que a ideia foi muito bem executada e recebeu a pontuação máxima por isso.



Figura 110 – Trabalho de alunos.

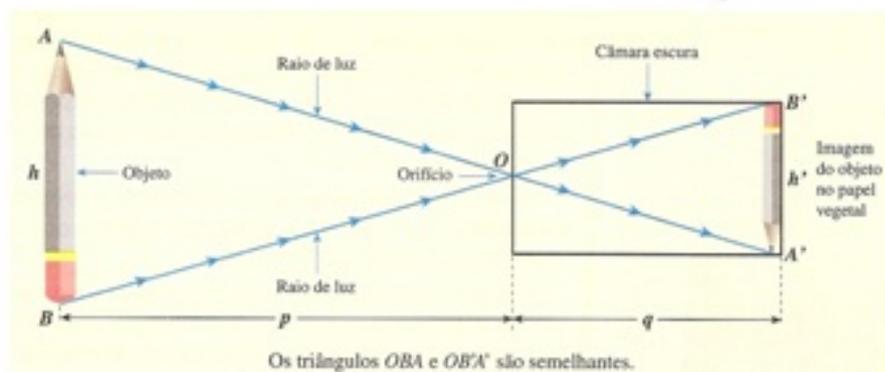
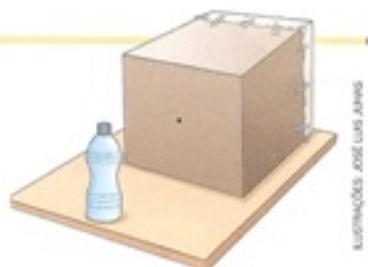


## DIVERSIFICANDO

### Câmara escura de orifício

A câmara escura de orifício é um objeto óptico muito simples, pois forma imagens somente selecionando os raios de luz. Ela pode ser feita com uma caixa ou uma lata qualquer, desde que suas paredes sejam opacas. De um lado, deve ter um pequeno orifício e, na parte oposta ao orifício, um papel vegetal.

Algo interessante acontece quando apontamos o orifício da câmara escura para um objeto iluminado. Podemos observar, no papel vegetal, a projeção da imagem invertida desse objeto. Isso ocorre em virtude de uma importante propriedade da luz que é a de se propagar em linha reta. Veja o esquema.



No esquema da câmara escura acima,  $h$  é a medida da altura do objeto,  $h'$  é a medida da altura da imagem e da caixa também,  $p$  é a distância do objeto até o orifício e  $q$  é a distância da imagem até o orifício. Os triângulos  $OAB$  e  $OA'B'$  são semelhantes, pois os ângulos correspondentes são congruentes:  $\angle AOB \cong \angle A'OB'$ ,  $\angle ABO \cong \angle A'B'O$  e  $\angle BAO \cong \angle B'A'O$ . Portanto, por semelhança, vale  $h \cdot q = p \cdot h'$ .

■ Com o auxílio da ilustração acima, responda às questões em seu caderno.

1. Se um objeto de 10 cm de altura está a 20 cm de distância do orifício, qual será a altura dele no papel-vegetal?
2. Felipe usou uma caixa de formato cúbico, com aresta de 20 cm, para fazer uma câmara escura e retratar um quadro pendurado na parede da sua casa. Qual é a distância mínima que esse quadro, de 50 cm  $\times$  50 cm, deve ficar do orifício da câmara, para aparecer por inteiro no papel-vegetal?

Figura 111 – Leitura sugerida: Câmara Escura.

## 2.6 Atividade 4

Para a quarta atividade do projeto, escolhemos como tema gerador os sistemas projetivos e os diferentes tipos de perspectiva que deles resultam. Começamos a aula projetando duas imagens do palácio do planalto como mostra a figura 112.



Figura 112 – O Palácio do Planalto sob diferentes perspectivas.

Fonte - Imagens extraídas da internet. <sup>17</sup>

As fotos foram concebidas sob diferentes pontos de vista, desta forma, os sistemas projetivos empregados são diferentes. Na imagem que chamamos de foto A, podemos observar que a câmera (centro da projeção) estava no mesmo nível do prédio e a uma distância relativamente pequena dele. Temos a presença de linhas convergentes a um ponto de fuga localizado no horizonte. Portanto, identificamos nesta foto o sistema projetivo cônico, e a perspectiva resultante é a centralizada (cônica com um ponto de fuga). Já na foto B, o observador está numa posição acima do prédio e a uma distância bastante significativa do mesmo. Não se observa convergência de linhas, nem ponto de fuga. O sistema projetivo da foto B é o cilíndrico e a perspectiva resultante é a cilíndrica isométrica não rigorosa <sup>18</sup>.

Questionamos os alunos sobre quais as diferenças entre as representações obtidas pelas fotos A e B. Alguns deles responderam que era pelo número de faces que se observava do prédio. Também comentaram que a foto A foi *tirada do chão*, enquanto a foto B foi *tirada de cima*. Tentamos reformular o questionamento. Perguntamos se eles podiam identificar alguns dos conceitos que vínhamos estudando nas fotos. Responderam, então, que a foto A apresentava ponto de fuga, mas a foto B, não. Perguntamos por que isso acontecia. Responderam que era pela diferença de posição do fotógrafo, o que veio a ser

<sup>17</sup> Endereços eletrônicos das imagens

<http://images02.oe24.at/niemeyer2.jpg/consoleMadonnaNoStretch2/87.287.875>

<http://i0.statig.com.br/fw/b5/er/c0/b5erc0w6ns13pmf6f4l4rnkfl.jpg>

<sup>18</sup> Não rigorosa no sentido de não atender rigorosamente as exigências do sistema de eixos isométrico.

uma boa explicação. Também comentaram que a foto A se parecia com o trabalho que eles haviam feito do desenho do quarto (Atividade 2) e perguntaram, um tanto desanimados, se teriam que repetir o desenho com a técnica da foto B. Respondemos que, desta vez, faríamos algo mais simples e com a ajuda do computador, o que os deixou mais tranquilos.

Retornando à questão das fotos, questionamos como se comportavam as retas paralelas na foto A e na foto B. Naturalmente, esperávamos que percebessem que na foto A as retas paralelas convergem para o ponto de fuga, ao passo que na foto B elas se mantêm paralelas.

Introduzimos, então, o conceito de sistemas projetivos, tal como fizemos na seção 3.10 deste trabalho. Para ilustrar a diferença entre os sistemas projetivos, utilizamos a figura 113 que mostra o comportamento das linhas de projeção nos dois sistemas e enfatiza o fato de que, no sistema de projeção cilíndrico, o centro da projeção tende ao infinito.

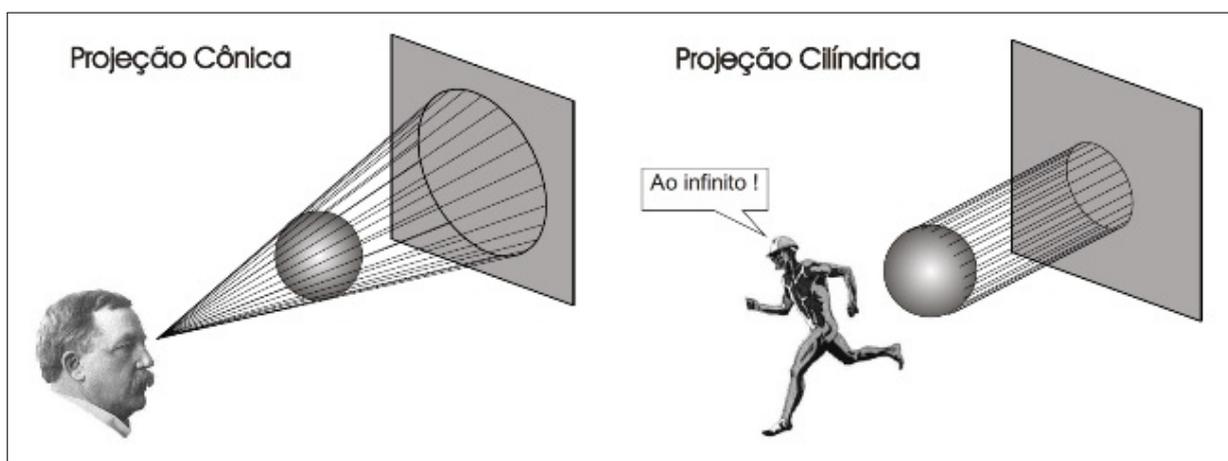


Figura 113 – Ilustração dos dois sistemas projetivos.  
Fonte - Imagens extraídas da internet. <sup>19</sup>

Para que os alunos se familiarizassem com as perspectivas cônicas e cilíndricas, projetamos algumas imagens para que eles identificassem a qual grupo elas pertenciam. A divisão das imagens ficou como mostram as figuras 114 e 115.

<sup>19</sup> Endereço eletrônico das imagens  
<http://pcc201.pcc.usp.br/2005/projecoes.pdf>

<sup>20</sup> Endereços eletrônicos das imagens  
[http://4.bp.blogspot.com/-U2iPYTTVC-c/UP0xUv2cV5I/AAAAAAAAABT0/mEs2xh6f\\_HA/s200/conica+Frontal+1.png](http://4.bp.blogspot.com/-U2iPYTTVC-c/UP0xUv2cV5I/AAAAAAAAABT0/mEs2xh6f_HA/s200/conica+Frontal+1.png)  
<http://zerohora.rbsdirect.com.br/imagesrc/14338948.jpg?w=620>  
<http://i.olhares.com/data/big/474/4746475.jpg>  
[http://3.bp.blogspot.com/-aT89JVepb8/TfsJ1TS8III/AAAAAAAAA\\_c/TiUNm9CUeQQ/s320/img001.jpg](http://3.bp.blogspot.com/-aT89JVepb8/TfsJ1TS8III/AAAAAAAAA_c/TiUNm9CUeQQ/s320/img001.jpg)

<sup>21</sup> Endereços eletrônicos das imagens  
[http://www.cartola.org/cartola/index.php?title=Arquivo:Perspectiva\\_cavaleira\\_45.png](http://www.cartola.org/cartola/index.php?title=Arquivo:Perspectiva_cavaleira_45.png)  
[http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/e1/Escalier\\_cavalier.svg](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/e1/Escalier_cavalier.svg)  
[http://2.bp.blogspot.com/\\_4q5vTkAHhQc/TPpZsUSr39I/AAAAAAAAADM/O0a2jBMiOls/s1600/Afia+axonometria.jpg](http://2.bp.blogspot.com/_4q5vTkAHhQc/TPpZsUSr39I/AAAAAAAAADM/O0a2jBMiOls/s1600/Afia+axonometria.jpg)  
[http://2.bp.blogspot.com/\\_mIeg16ZGLJw/S115T8N\\_mII/AAAAAAAAADs/veOxbYVrXz8/](http://2.bp.blogspot.com/_mIeg16ZGLJw/S115T8N_mII/AAAAAAAAADs/veOxbYVrXz8/)

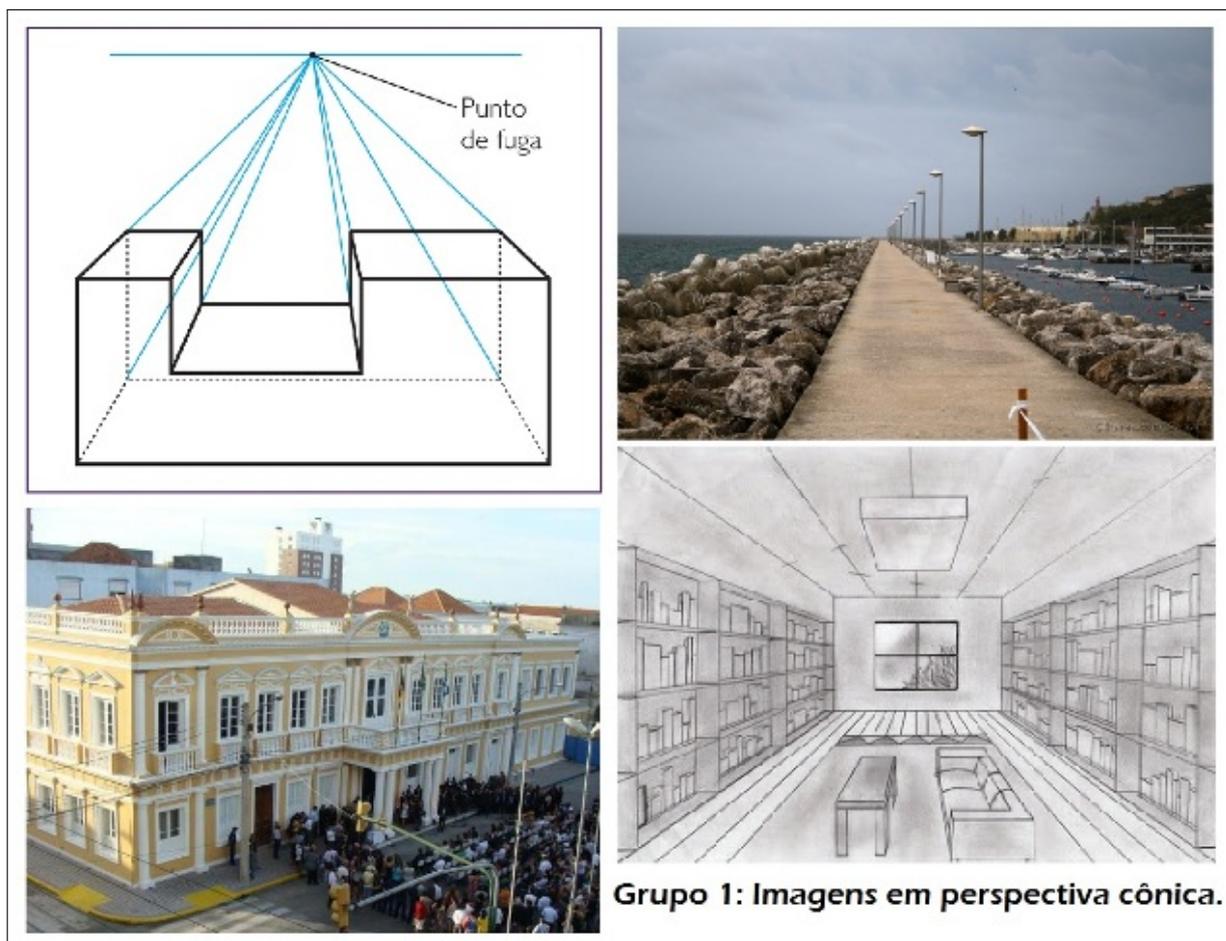


Figura 114 – Imagens em perspectiva cônica.

Fonte - Imagens extraídas da internet. <sup>20</sup>

Na próxima etapa da aula, introduzimos as perspectivas cônicas de um e dois pontos de fuga, tal como fizemos na subseção sobre Perspectiva Cônica deste trabalho.

Como já havíamos falado, mostramos a perspectiva cônica de três pontos de fuga, mas não fizemos nenhuma atividade com ela.

Podemos observar que a perspectiva cônica é bastante intuitiva, não há uma sistematização a ser considerada, portanto, esta etapa demandou bem pouco tempo, o que nos permitiu passar logo em seguida para a verificação de aprendizagem.

Para introduzir a atividade, usamos o texto de apoio sobre o Cubo de Rubik ou Cubo Mágico, como é mais conhecido, que se encontra no final desta seção (figura 122). Perguntamos se conheciam o puzzle. Vários alunos conheciam, mas nenhum tinha tentado resolver, embora, alguns deles relataram já ter assistido competições de resolução do cubo mágico no YouTube.

Depois desta conversa inicial, entregamos uma imagem do cubo mágico (figura 116) para cada aluno e pedimos que o representassem em perspectiva cônica de um e dois

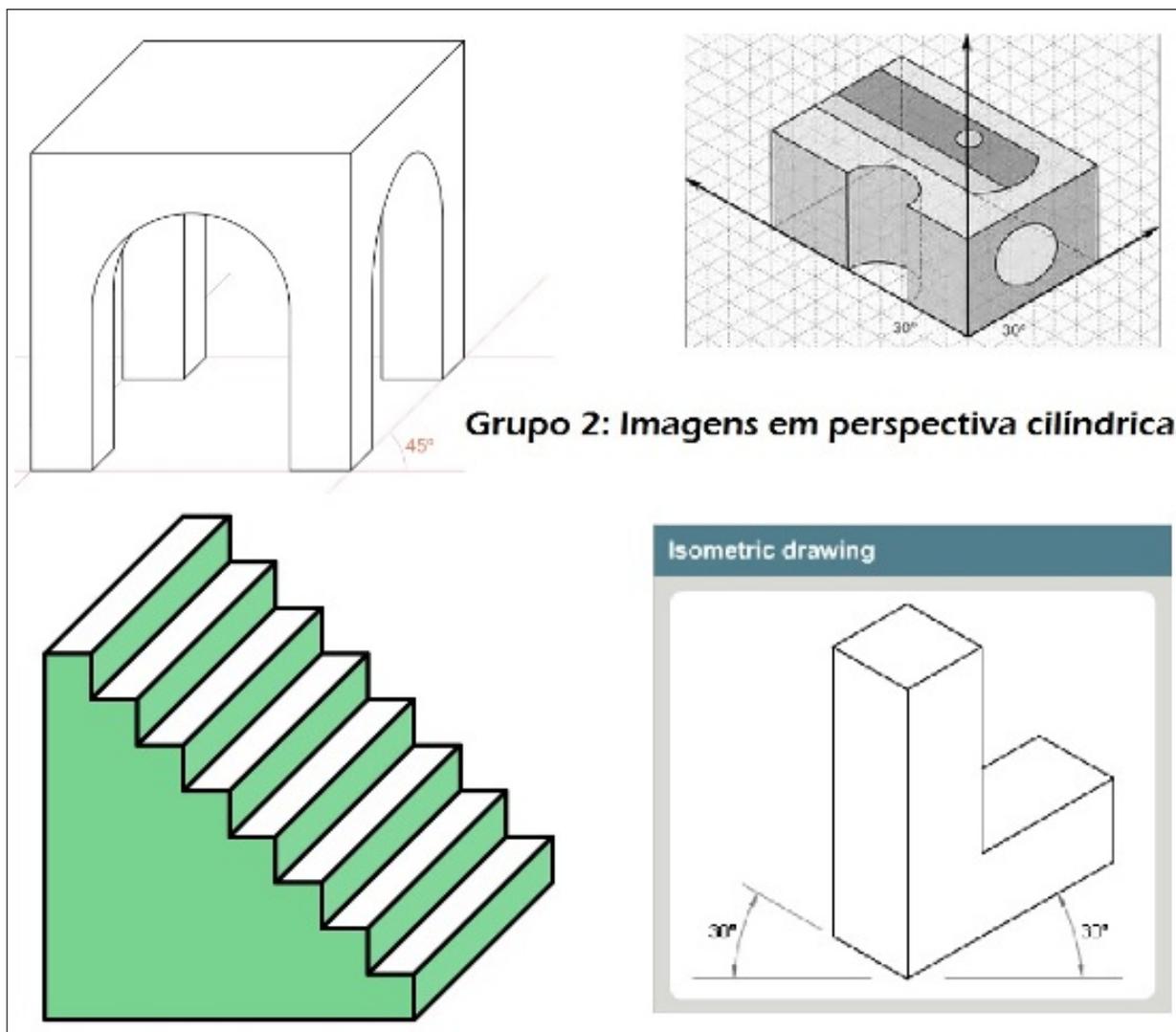


Figura 115 – Imagens em perspectiva cilíndrica.

Fonte - Imagens extraídas da internet. <sup>21</sup>

pontos de fuga. Nossa intenção inicial era que eles fizessem essa construção usando o GeoGebra mas, devido aos problemas que ocorreram na atividade 2, decidimos solicitar primeiro uma representação no papel, e só depois partirmos para a construção usando o software. Essa decisão se mostrou acertada, pois, quando foram desenhar no GeoGebra, os problemas conceituais já haviam sido resolvidos e as dificuldades apresentadas eram apenas operacionais.

Para esta atividade os alunos receberam uma folha A4 contendo o espaço adequado para cada desenho. Nesta folha já estavam marcados um eixo horizontal e os pontos de fuga. A maioria dos alunos precisou apenas corrigir pequenos erros de traçado ou problemas estéticos, mas houve alunos que precisaram desenhar mais de uma vez.

No desenho em perspectiva cônica de um ponto de fuga, a maior dificuldade foi

<sup>22</sup> Endereço eletrônico das imagens

<http://info.abril.com.br/aberto/infonews/fotos/cubo-magico-rubik-20100813132252.jpg>

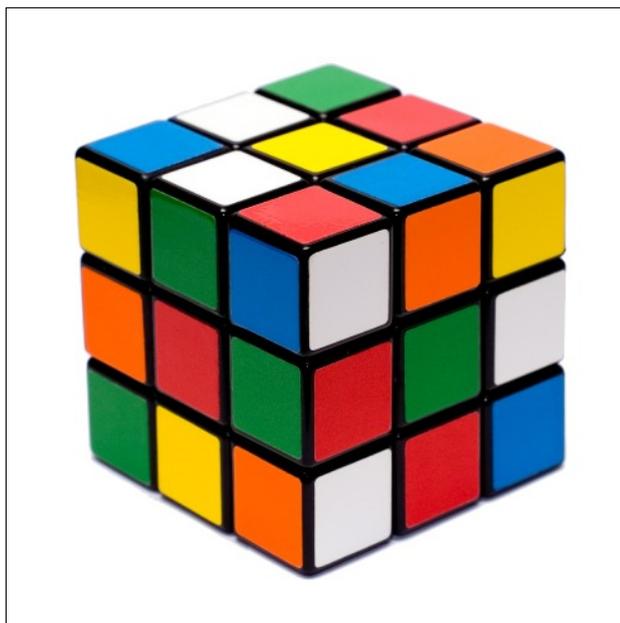


Figura 116 – O Cubo Mágico.  
 Fonte - Imagem extraída do site Info Abril. <sup>22</sup>

traçar as paralelas da face frontal, de forma que as linhas ficassem, de fato, paralelas. Já no desenho em perspectiva de dois pontos de fuga, as maiores dificuldades estavam na representação da face superior do cubo, onde as retas convergentes aos dois pontos de fuga se interceptam. Na figura 117, reproduzimos dois desenhos que expressam essa dificuldade. Naturalmente, os trabalhos precisaram ser refeitos e os erros acabaram sendo corrigidos.

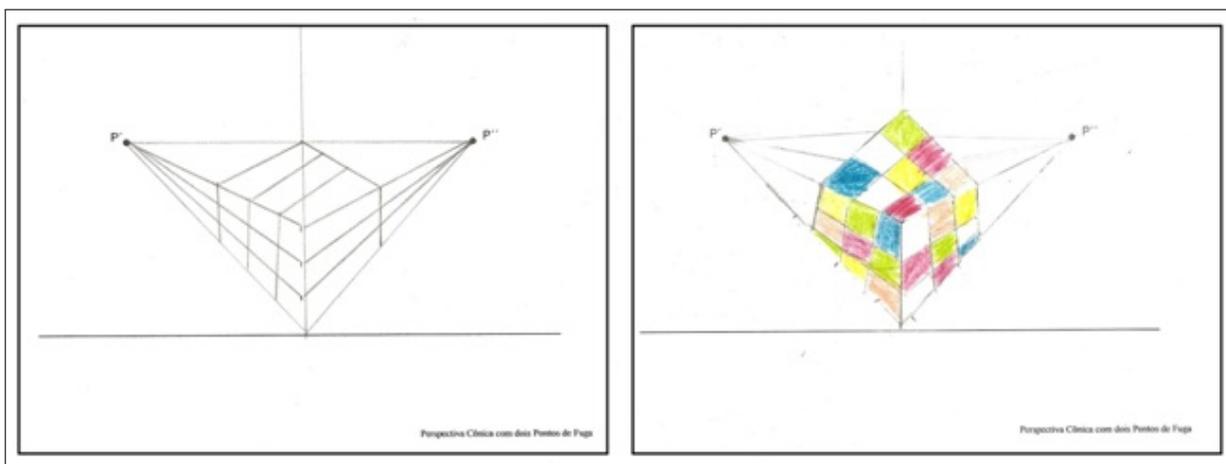


Figura 117 – Trabalhos de alunos.

Como todos os alunos desenharam a mesma figura, e os erros foram corrigidos ao longo do trabalho, todos os trabalhos finais ficaram bons. A diferença é que alguns alunos concluíram a tarefa primeiro que os outros. Portanto, ao contrário do que fizemos nas atividades anteriores, reproduziremos aqui apenas um trabalho (figura 118), pois todos ficaram muito parecidos.

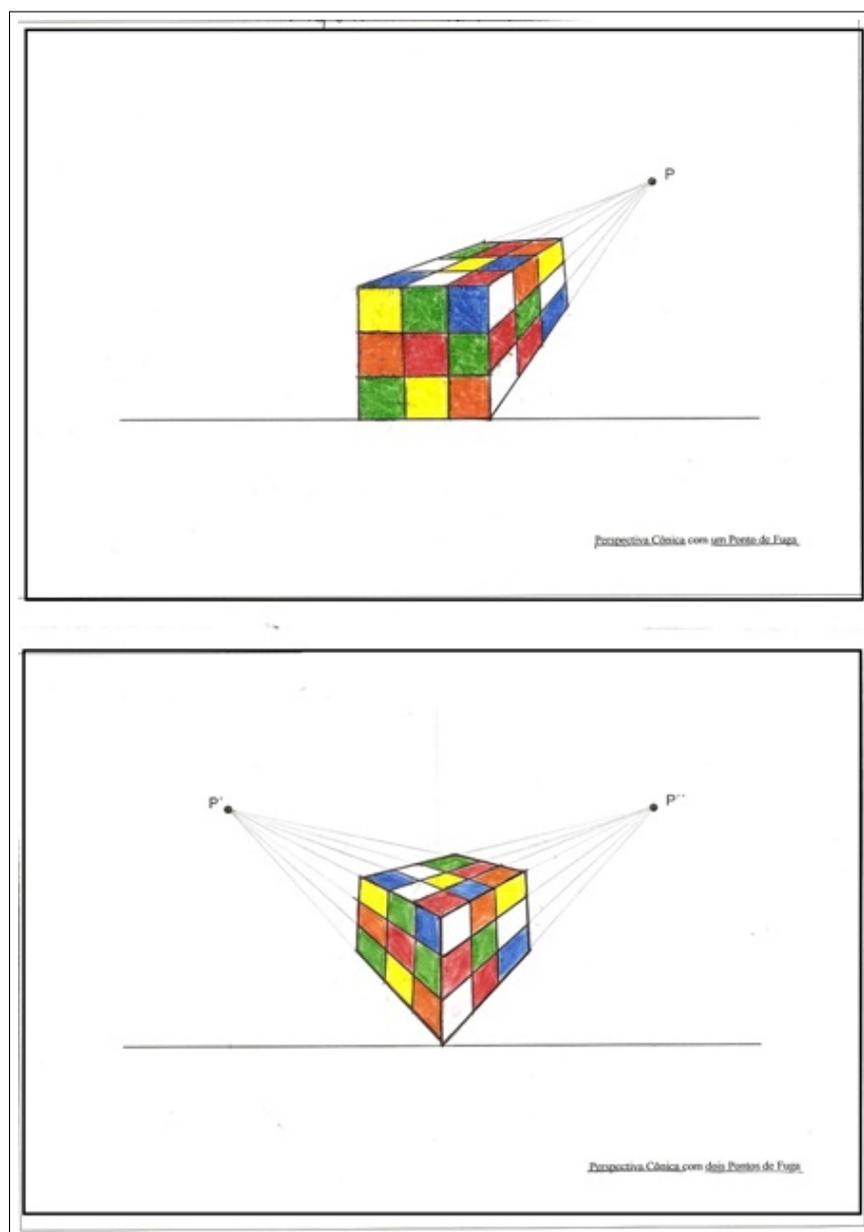


Figura 118 – Trabalho de aluno.

Antes de fazerem o desenho, foi recomendado aos alunos que observassem quais retas paralelas se mantinham paralelas e quais convergiam para o ponto de fuga. Como era esperado, na perspectiva de um ponto de fuga, o aluno representou as linhas da face frontal obedecendo a verticalidade e horizontalidade das mesmas. Este resultado é uma decorrência da proposição 3.2 que nos garante que retas contidas em planos paralelos à tela não sofrem alterações na direção. Da mesma forma, as linhas horizontais da face superior e as linhas verticais das faces laterais foram mantidas paralelas. As linhas que convergiram para o ponto de fuga são aquelas que representam retas não paralelas à tela e contidas em planos perpendiculares ao plano imagem (tela). Este resultado é uma consequência da proposição 3.3.

Já no desenho em perspectiva com dois pontos de fuga, só a proposição 3.3 é válida, ou seja, todas as retas paralelas convergem para os pontos de fuga. Isto ocorre, pois o objeto é observado simultaneamente sob dois pontos de vista diferentes. Estes pontos de vista podem se referir a dois observadores em posições distintas, ou ao mesmo observador com os dois olhos abertos. Assim, as retas que se manteriam paralelas para um observador, convergem quando vistas pelo outro, e vice versa, ou seja, todas as retas paralelas convergem para um dos pontos de fuga.

A conclusão desta tarefa demandou dois encontros. Na semana seguinte, retomamos a proposta começando pela definição teórica das perspectivas cilíndricas, tal como fizemos na subseção sobre perspectivas cilíndricas. Enfatizamos que, como se pode observar na figura 112, nas perspectivas cilíndricas, não há convergência de retas paralelas, pois o centro da projeção está no infinito o que, no caso de uma foto, significa que o observador está a uma grande distância do objeto.

Na sequência, apresentamos uma comparação entre um cubo em perspectiva cilíndrica e um cubo em perspectiva cônica e lançamos o seguinte questionamento: se quiséssemos pedir para alguém construir aquele objeto, qual das representações seria mais apropriada para informar as características do objeto ao construtor? A resposta foi que a melhor representação seria a que não apresentava ponto de fuga, pois, nesta representação, a figura *não estava torta*. Concordamos com a argumentação e esclarecemos que, justamente por esta característica de precisão, as perspectivas cilíndricas eram muito utilizadas em desenho técnico e que, por isso, havia regras específicas que precisavam ser observadas. Aproveitamos este momento para definir os sistemas de eixos da perspectiva isométrica e cavaleira, tal como aparece nas figuras 74 e 77. Lembrando que, no caso da perspectiva cavaleira, optamos por usar apenas o sistema de eixos com inclinação de  $45^\circ$  e sem o fator de redução.

Em seguida, passamos à atividade prática. Solicitamos que os alunos representassem o mesmo cubo da atividade anterior (figura 116), agora em perspectiva cilíndrica isométrica e cavaleira. Pedimos ainda que observassem o comportamento das retas para-

elas e as possíveis semelhanças ou diferenças em relação à perspectiva cônica. Mais uma vez, os alunos receberam uma folha com o espaço apropriado para realizarem o desenho e com os eixos previamente definidos.

Curiosamente, uma aluna comentou que a perspectiva isométrica se assemelhava à perspectiva cônica com dois pontos de fuga, ao passo que a perspectiva cavaleira se assemelhava à perspectiva com um ponto de fuga. Ficamos realmente surpresos com a observação da aluna, pois, até então, não havíamos pensado nisso. De fato, se considerarmos que os centros das projeções de uma perspectiva cônica com dois pontos de fuga afastam-se indefinidamente do objeto, obteremos a perspectiva isométrica. Com pequenas adaptações podemos concluir o mesmo em relação à perspectiva cavaleira. Portanto, a aluna foi brilhante, e é dela o trabalho que escolhemos para reproduzir aqui – figura 119.

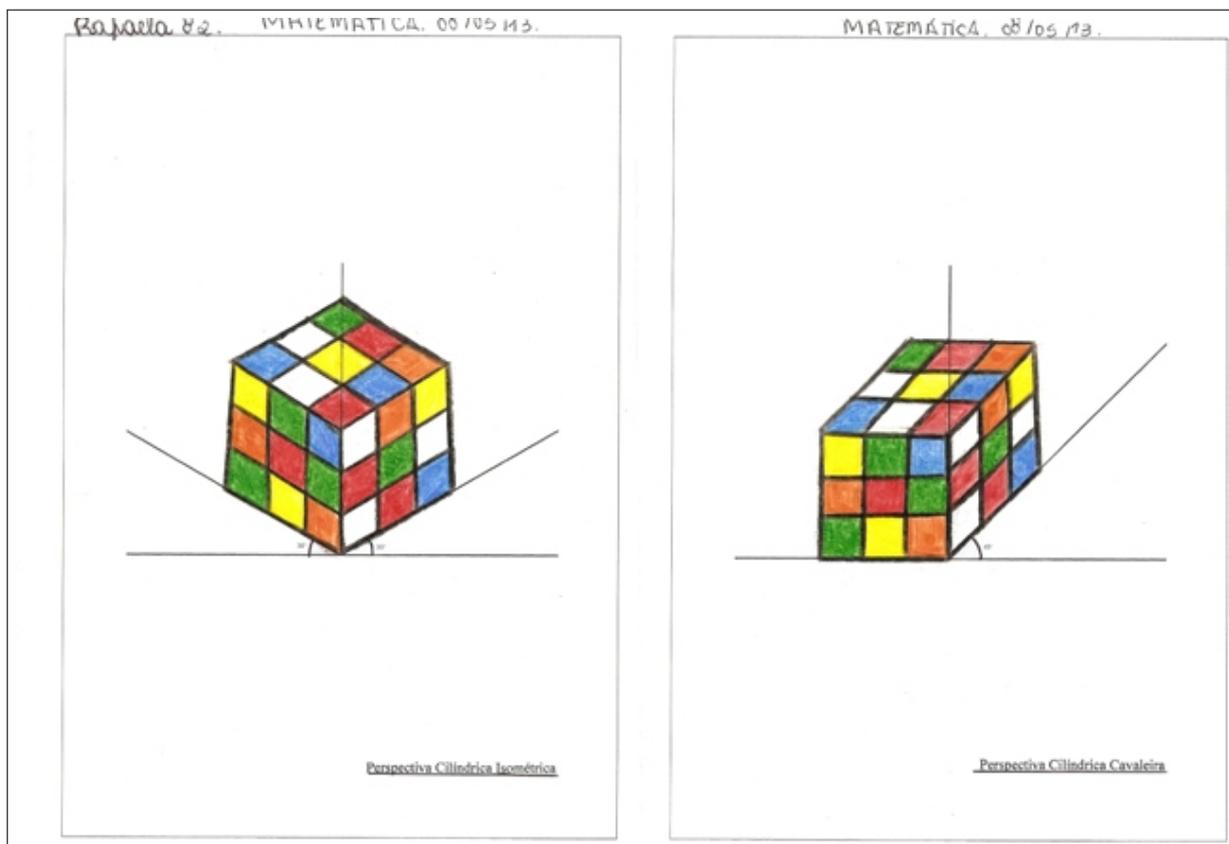


Figura 119 – Trabalho de aluno.

Podemos notar que, nas perspectivas cilíndricas, a ausência do centro a uma distância finita anula o efeito da proposição 3.3, mas as demais proposições são mantidas.

Nesta etapa do trabalho, os alunos já estavam mais desenvolvidos com as questões de traçado e tivemos apenas problemas pontuais. De maneira geral, só precisaram consertar detalhes.

Esta parte da atividade ocorreu numa quarta-feira, pela manhã, quando temos três períodos consecutivos. Extraordinariamente naquele dia, tínhamos mais três períodos extras no turno da tarde. Usamos este tempo extra para realizar as atividades no GeoGebra.

Como sempre usamos o GeoGebra nas aulas de matemática, os alunos estão relativamente familiarizados com o software e já conhecem as ferramentas básicas. Também sabem alterar as propriedades dos objetos, usam a janela de álgebra e a caixa de entrada. Alguns alunos já têm o software instalado em casa e usam quando querem resolver um sistema de equações, por exemplo. No entanto, há que se ressaltar que, em todas as turmas com as quais trabalhamos, existe uma disparidade no tocante à familiaridade com o uso do computador. A maior parte dos alunos tem acesso à internet em casa e domina esta ferramenta. Porém, há casos em que a única oportunidade que o aluno tem de receber alfabetização digital ocorre na escola. São alunos que sequer dominam o uso do mouse, não sabem usar a tecla Shift, nem a Caps lock. Esta situação dificulta muito o trabalho do professor e muitas vezes o inibe de utilizar recursos de informática em suas aulas. É bastante complicado administrar uma aula em que a maioria dos alunos lida naturalmente com a informática, enquanto outros não conseguem plotar o gráfico de uma parábola porque a Caps lock está ativada; ou não conseguem obter o acento circunflexo que eleva uma variável ao expoente dois, porque não sabem usar a tecla Shift. Ainda assim, o maior problema não está em um aluno saber ou não usar o computador, isto é facilmente remediável. O problema é quando os alunos se sentem inferiorizados em relação aos demais colegas e ficam inibidos de pedir ajuda, muitas vezes perdendo uma aula inteira por conta de uma dúvida trivial. Para tentar solucionar esta situação, geralmente trabalhamos em duplas e os alunos que vão concluindo sua tarefa se dividem para ajudar os colegas com mais dificuldade.

Desta forma, as maiores dificuldades que enfrentamos para concluir esta atividade estavam relacionadas à falta de familiaridade com o computador e, em especial, com o uso do mouse, já que era uma tarefa que exigia traçados. Isto nos fez propor uma pequena adaptação: ao invés de colorir a figura no próprio GeoGebra, construímos a figura no software matemático e exportamos para o Kolour Paint.

Como os alunos já haviam feito todos os desenhos previamente, não havia dúvidas conceituais. Só precisamos auxiliá-los para construir o sistema de eixos da perspectiva cavaleira, onde usamos a ferramenta ângulo com amplitude fixa. Já na perspectiva iso-

métrica, explicamos o uso da malha isométrica, que foi novidade para eles. Seguramente, de todas as atividades do projeto, esta foi a atividade mais prazerosa para os alunos e mais gratificante para o professor, sem dúvida será reeditada nos próximos anos.

A seguir, na figura 120, apresentamos alguns trabalhos após terem sido coloridos no editor de imagens e, posteriormente, na figura 121 algumas fotos feitas naquela tarde.

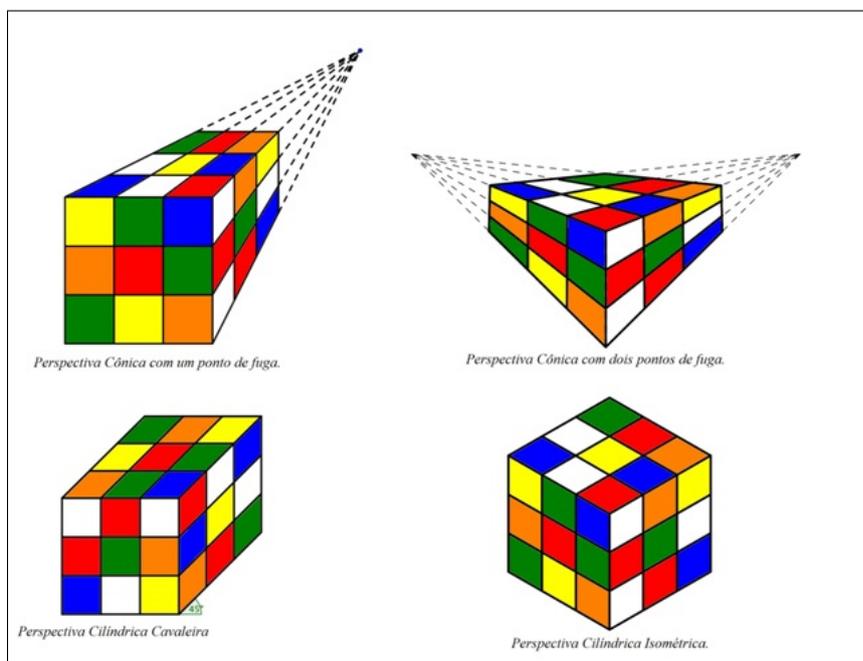


Figura 120 – Trabalhos de alunos.

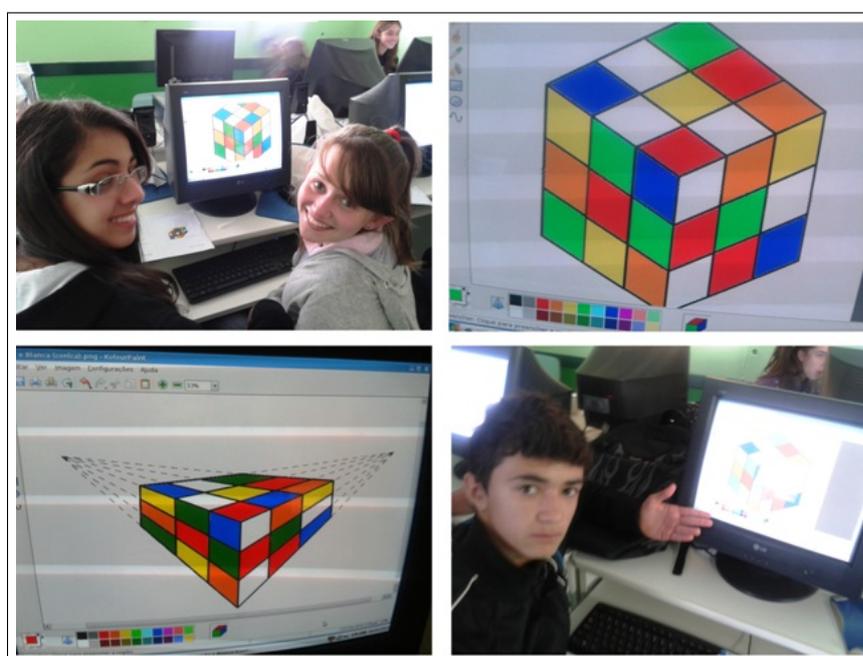


Figura 121 – Fotos do trabalho com GeoGebra.

O Cubo de Rubik, mais conhecido como Cubo Mágico, completa em 2010 sua terceira década nas prateleiras das lojas de brinquedos do mundo todo. Criado em 1974 na Hungria, ele só passou a ser exportado em 1980. Mas logo se tornou um dos quebra-cabeças matemáticos tridimensionais mais populares no mundo, além de um ícone de design simples e eficiente.

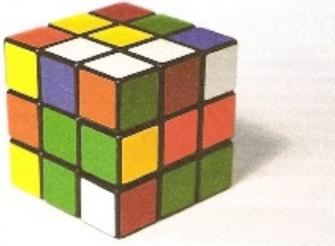
O brinquedo foi criado pelo húngaro Erno Rubik para ilustrar o conceito de simetria. A versão mais comum é a  $3 \times 3 \times 3$ , com 54 faces e seis cores: azul, verde, amarelo, branco, vermelho e laranja. Outras versões menos conhecidas são a  $2 \times 2 \times 2$ , a  $4 \times 4 \times 4$  e a  $7 \times 7 \times 7$ .

A regra do jogo é aparentemente simples: encaixar e montar o cubo inteiro de forma que as suas faces tenham apenas peças da mesma cor. No entanto, segundo os matemáticos, há 43 252 003 274 489 856 000, isto é, mais de 43 quintilhões de combinações possíveis com o cubo mágico (esse número pode ser calculado por meio da aplicação de conceitos de análise combinatória). Muitos aficionados passam horas, e até mesmo dias, tentando reencaixar as cores, e por todo o mundo torneios reúnem os candidatos a solucionar o problema de forma mais rápida.

Diversos livros já foram lançados para ajudar as pessoas a resolver esse divertido brinquedo matemático. Sites na internet também mostram vídeos de matemáticos desvendando o mistério das seis faces coloridas.

Para criar essa mania mundial, com mais de 900 milhões de cubos já vendidos, Rubik teria se inspirado no Tangram, um quebra-cabeça chinês formado por sete peças (cinco triângulos, um quadrado e um paralelogramo). O primeiro cubo mágico era de madeira e tinha seis lados pintados com cores diferentes. A ideia era que, ao girar as faces, o jogador observasse exatamente o resultado do movimento até chegar ao objetivo de igualar os lados.

No começo, o cubo não foi tão popular quanto Rubik gostaria. Mas, de uma hora para outra, o brinquedo experimentou um boom. No início dos anos 1980, já era possível encontrar pessoas brincando com o quebra-cabeça nas ruas. E ele nem tinha nome ainda. O batismo oficial do objeto para Cubo de Rubik ocorreu em 1985, com a compra dos direitos autorais pela empresa britânica Seven Towns, que o relançou no mercado.



No mundo todo, já foram vendidos mais de 900 milhões de cubos como este, criado na Hungria em 1974.

CIVITA, R. *Matemática 2 / Abril Coleções*. São Paulo : Abril, 2010.

Figura 122 – Leitura sugerida: O Cubo de Rubik.

## 2.7 Atividade 5

Neste momento em que já nos encaminhávamos para o encerramento do projeto, escolhemos trabalhar o método de Monge para representação de objetos tridimensionais. A ideia era encerrar as atividades práticas trabalhando com a representação das vistas ortográficas projetadas nos planos coordenados, como fizemos na seção deste trabalho que trata sobre o Método de Monge.

Começamos a aula construindo o sólido que iríamos representar – mesmo da figura 82 – com o auxílio dos cubinhos de madeira da régua dourada. Em seguida, definimos as vistas ortográficas frontal, topo e perfil como na figura 81. Definimos, ainda, os planos coordenados  $XOY$ ,  $XOZ$  e  $YOZ$ . Para exemplificar a disposição dos planos, usamos a associação com as paredes e chão da sala de aula, motivo pelo qual, alguns alunos, passaram a se referir a esta atividade como *o desenho das paredes* ou *o desenho da casinha*.

Dividimos a atividade em quatro etapas: representação do sólido em perspectiva isométrica, coloração, construção dos planos coordenados e representação das vistas ortográficas nos planos correspondentes. A figura 123 representa estas três etapas.

Como já estavam familiarizados com a representação isométrica e o uso do GeoGebra para obtê-la, a primeira etapa foi rapidamente concluída. Decidimos, portanto, que era o momento apropriado para que os alunos aprendessem a colorir no próprio GeoGebra, usando para isso a ferramenta *polígono*. Mostramos a eles o procedimento e conseguiram

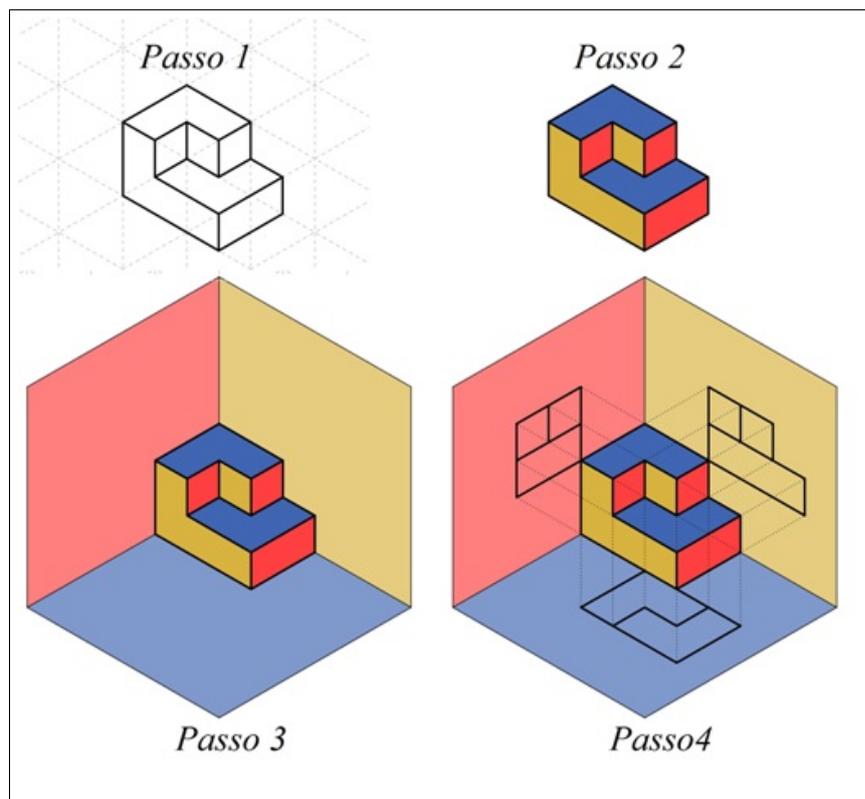


Figura 123 – Passos para a representação tridimensional de Monge.

executá-lo sem maiores dificuldades.

Na etapa seguinte da aula, construímos os planos coordenados. Esta foi a etapa em que os alunos mais precisaram de auxílio, ainda assim tudo transcorreu normalmente. Os passos da construção dos planos estão descritos na figura 124. Começamos utilizando as ferramentas: *reta definida por dois pontos* e *círculo definido por três pontos*. Traçamos os eixos isométricos e uma circunferência com centro na origem e raio desejado. Usamos a ferramenta *ponto de intersecção* para marcar a intersecção dos eixos com o círculo. Posteriormente, usamos a ferramenta *reta paralela* para construir os planos coordenados. Finalizando, colorimos os planos coordenados usando a ferramenta *polígono*. Feito isso, traçamos as vistas ortográficas sobre os planos coordenados.

A figura 125 exibe alguns trabalhos dos alunos. Novamente não colocaremos todos os trabalhos, pois foram bastante similares. Da mesma forma que a atividade anterior, os alunos demonstraram uma grande empatia com esta proposta, acreditamos que foi uma excelente escolha para encerrar a parte prática do trabalho. Sem dúvida, pretendemos retomá-la, em outro momento, com um sólido mais interessante, como um cone, por exemplo.

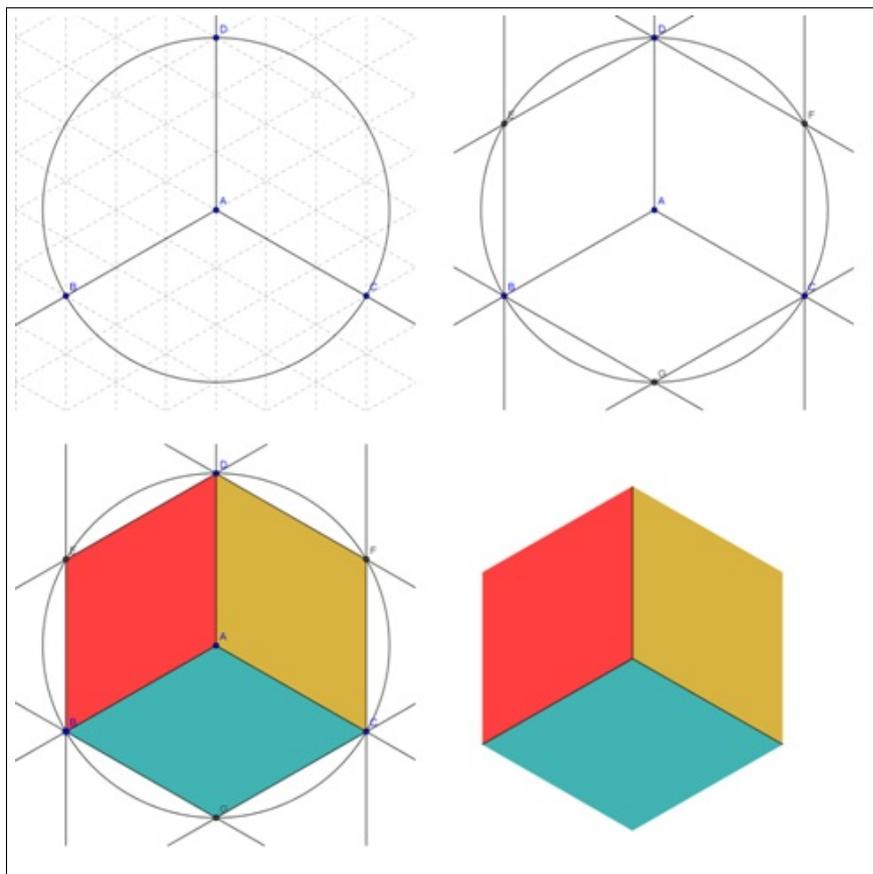


Figura 124 – Passos para a construção dos planos coordenados.

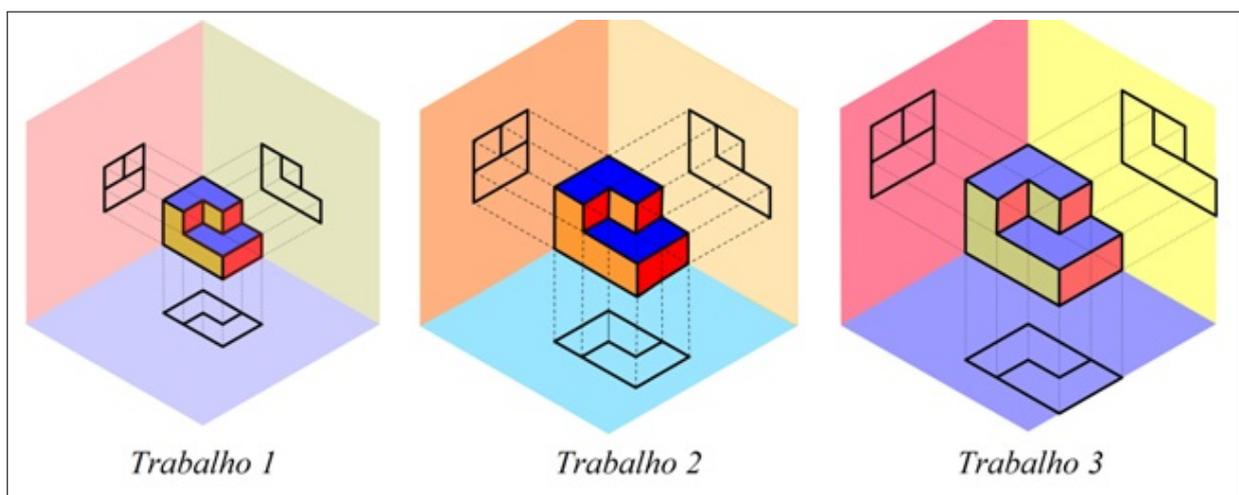


Figura 125 – Trabalhos dos alunos.

## 2.8 Atividade 6

Como falamos anteriormente, um dos motivos que nos levaram a considerar um trabalho com Geometria Projetiva foi, além da possibilidade de desenvolver as competências geométricas dos alunos, a oportunidade que tínhamos de introduzir a ideia de Geometrias Não-Euclidianas. Assim, escolhemos encerrar a o projeto com os alunos usando os últimos

dois encontros para tratar deste tema.

Começamos a aula questionando que tipo de geometria eles estudavam na escola. Como sabiam que o projeto tratava de Geometria Projetiva, responderam que essa era a geometria que estavam estudando. Concordamos, mas argumentamos que eles haviam estudado Geometria Projetiva especificamente no projeto. Refizemos a pergunta e questionamos qual o tipo de geometria que estudavam sempre, em todas as séries. As respostas foram: área, perímetro e retas paralelas (cortadas por transversais). Mais uma vez concordamos, mas explicamos que estes eram conceitos que compunham a geometria e que agora queríamos saber qual o nome desta geometria. Naturalmente, os alunos não estavam preparados para responder que a geometria escolar é a Geometria Euclidiana, pois a utilização deste termo é praticamente nula no ensino fundamental. Explicamos, então, que a geometria à qual eles estavam habituados era designada, de uma forma muito ampla, Geometria Euclidiana, em referência à Euclides de Alexandria (330 a.C – 260 a.C).

Na sequência, reproduzimos dois vídeos retirados do You Tube. O primeiro deles, ilustrado na figura 126, apresenta Euclides de Alexandria, discorre sobre sua obra *Os Elementos* e discute a relevância histórica e matemática daquele trabalho. Já o segundo vídeo, ilustrado na figura 127, é uma produção amadora dos estudantes chilenos Valentina Arellano, Josefa Gazitúa e Catalina Lecaros Sotomayor e explicita os cinco postulados.



Figura 126 – Vídeo: Los Elementos de Euclides.

23

<sup>23</sup> Endereço eletrônico do vídeo:

[http://https://www.youtube.com/watch?v=ugdP\\_VQdmrA](http://https://www.youtube.com/watch?v=ugdP_VQdmrA)

<sup>24</sup> Endereço eletrônico do vídeo:

<http://https://www.youtube.com/watch?v=uUuxXRsoIg>



Figura 127 – Vídeo: Postulados de Euclides.

24

Os vídeos são narrados em espanhol, mas não houve problemas quanto a isso porque os alunos estudam esta disciplina desde o 6º ano. Além disso, o professor foi fazendo intervenções durante a exibição dos vídeos para explicar os detalhes mais importantes. Ao mencionar a cidade de Alexandria, o vídeo faz uma referência a Alexandre, O Grande. Ao final do vídeo, um dos alunos pediu para fazer uma pergunta e questionou se Euclides teria sido homossexual, como Alexandre. A esta pergunta, obviamente, não sabemos responder. De qualquer forma, a biografia de Euclides parece tê-los interessado particularmente. Questionaram se não havia vídeos em português e, como respondemos que não tínhamos encontrado nada adequado, sugeriram que a turma produzisse um vídeo sobre Euclides. Achamos uma ótima ideia e todos concordaram com a proposta, mas ainda não conseguimos implementá-la, o que têm sido motivo de reiteradas cobranças.

Outro questionamento que surgiu em decorrência do primeiro vídeo, foi sobre os poliedros regulares. Achamos extremamente oportuno o questionamento dos alunos e, logo nas primeiras aulas depois do encerramento do projeto, fizemos uma oficina sobre os Poliedros de Platão, onde trabalhamos a construção dos sólidos a partir de suas planificações e a Relação de Descartes – Euler <sup>25</sup>:  $V + F = A + 2$ .

Na próxima etapa da aula, retomamos os postulados de Euclides, enunciando os quatro primeiros. A redação que utilizamos foi a de Coutinho (COUTINHO, 2001):

1. Uma linha reta pode ser traçada de um ponto a outro, escolhidos à vontade.

<sup>25</sup> Em seu livro o Caderno Secreto de Descartes, o autor Amir D. Aczel explica que esta é a nova designação que vem sendo adotada para a Relação de Euler depois que, em 1987, soube-se que este resultado já era conhecido por Descartes, que o registrou em seu caderno de notas ao qual Euler, possivelmente, teve acesso (ACZEL, 2007).

2. Uma linha reta pode ser prolongada indefinidamente.
3. Um círculo pode ser traçado com centro e raio arbitrários.
4. Todos os ângulos retos são iguais.

Em seguida, os alunos usaram o GeoGebra para verificar a validade dos postulados. Utilizando as ferramentas *novo ponto* e *segmento de reta definido por dois pontos*, verificaram o primeiro postulado. Utilizando a ferramenta *reta definida por dois pontos*, verificaram o segundo. Para verificar o terceiro postulado, utilizaram a ferramenta *círculo dados centro e raio*. O quarto postulado foi verificado utilizando as ferramentas *reta perpendicular* e *ângulo*, esta última, foi utilizada para verificar a medida dos ângulos retos. Esta etapa foi bastante tranquila, o professor só precisou auxiliá-los com o uso da ferramenta *círculo dados centro e raio* à qual ainda não estavam habituados. Um dos alunos comentou que o 4° postulado era desnecessário, pois, se um ângulo era reto, sua medida era  $90^\circ$ . Aproveitando a colocação do aluno, projetamos a figura 128. Começamos questionando onde estavam os ângulos retos. Responderam apontando os ângulos inferiores da face frontal. Questionamos se não havia mais ângulos retos. Responderam que havia vários. Reformulamos a pergunta: Se olharmos este sólido de cima, como fizemos na atividade anterior para obtermos a vista de topo, os ângulos das faces superiores são retos? Responderam que, se olhássemos de cima, sim. Questionamos novamente: são ou não retos? Responderam que eram retos, mas que, da maneira como a figura estava posta, não pareciam retos. Perguntamos por que não pareciam retos. Disseram que era porque estavam tortos e também que não mediam  $90^\circ$ . Então existem ângulos nesta imagem que são retos, mas não medem  $90^\circ$ ? Responderam que sim. Questionamos se o 4° postulado era válido na Geometria Projetiva, ao que responderam que não. Concluímos explicando que, por causa do 4° postulado, na Geometria Euclidiana, todos os ângulos retos eram iguais, mas que pode haver geometrias em que o 4° ou outro postulado não sejam válidos, como é o caso da Geometria Projetiva.

Na aula seguinte, quando iríamos estudar o 5° postulado, começamos solicitando aos alunos que desenhassem no GeoGebra uma reta qualquer e marcassem um ponto qualquer fora da reta. Solicitamos que, utilizando a ferramenta *reta paralela*, desenhassem uma reta paralela à primeira, passando pelo ponto externo. Quando concluíram questionamos: se quiséssemos desenhar outra reta nas mesmas condições, seria possível? Responderam que sim. Pedimos que o fizessem. Responderam que não era possível, pois a segunda paralela havia ficado *em cima* da primeira. Concordamos, mas salientamos que o termo correto era que as retas eram coincidentes. Perguntamos novamente: Quantas paralelas a uma reta, podemos conduzir por um ponto fora dela? Uma aluna respondeu: quantas nós quisermos, mas *umas vão ficar em cima das outras*. Novamente corrigimos o termo dizendo que as retas seriam coincidentes, e concluímos dizendo que, desta forma,

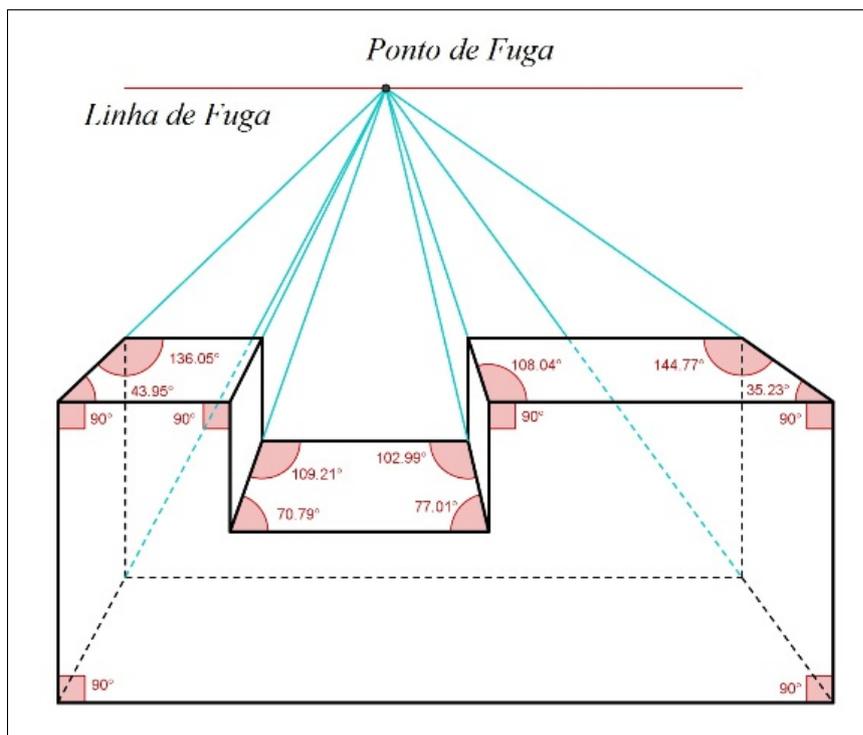


Figura 128 – Verificação do 4º postulado.

por um ponto externo a uma reta, passava uma única paralela a esta reta. Enunciamos, então, o 5º postulado em sua forma reduzida: “ Por um ponto fora de uma reta passa uma e uma só paralela a ela” (GARBI, 2006).

Prosseguimos comentando que o postulado das paralelas admitia outras redações e, em seguida, enunciamos o postulado segundo (COUTINHO, 2001):

- 5 Se uma reta secante a duas outras formam ângulos, de um mesmo lado dessa secante, cuja soma é menor que dois ângulos retos, então essas retas se prolongadas suficientemente encontrar-se-ão em um ponto desse mesmo lado.

Naturalmente, os alunos acharam esta versão do postulado das paralelas bem mais difícil que a anterior e também mais difícil que os demais postulados. Para auxiliá-los, o professor desenhou no quadro o esquema mostrando que, quando a soma dos dois ângulos é  $180^\circ$ , obtemos retas paralelas, do contrário, obtemos retas concorrentes que formam um triângulo. Este esquema é apresentado na figura 129.

Aproveitamos ainda para mostrar aos alunos que, o fato de a soma dos ângulos internos de um triângulo medir  $180^\circ$ , é decorrência direta do postulado das paralelas. Eles já conheciam este resultado, mas não com esta argumentação.

Na sequência, separamos a turma em pequenos grupos para que todos pudessem visualizar a explicação. Usando um globo terrestre, marcamos um triângulo esférico semelhante ao da figura 130. Pedimos aos alunos que olhassem cada um dos três ângulos

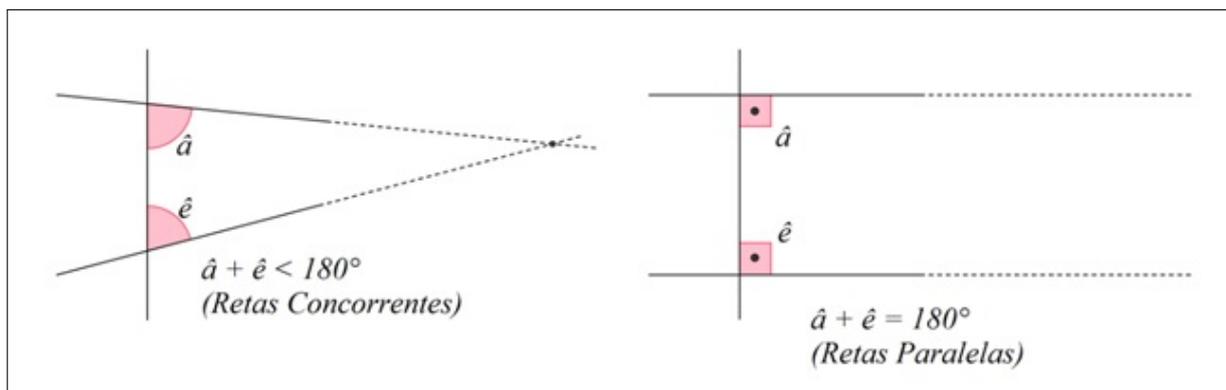


Figura 129 – Esquema do 5º postulado.

separadamente e respondessem as medidas de cada ângulo. O objetivo era que eles percebessem que cada ângulo media  $90^\circ$ . Depois disso, perguntamos quanto media a soma dos ângulos internos, ao que responderam  $270^\circ$ . Perguntamos se era isso que se esperava. Responderam que não, que deveria ser  $180^\circ$ . Explicamos então que a soma dos ângulos internos de um triângulo plano era  $180^\circ$ , mas que essa propriedade não se aplicava a um triângulo sobre uma superfície esférica e que, neste caso, a soma dos ângulos internos poderia ser maior que  $180^\circ$ .

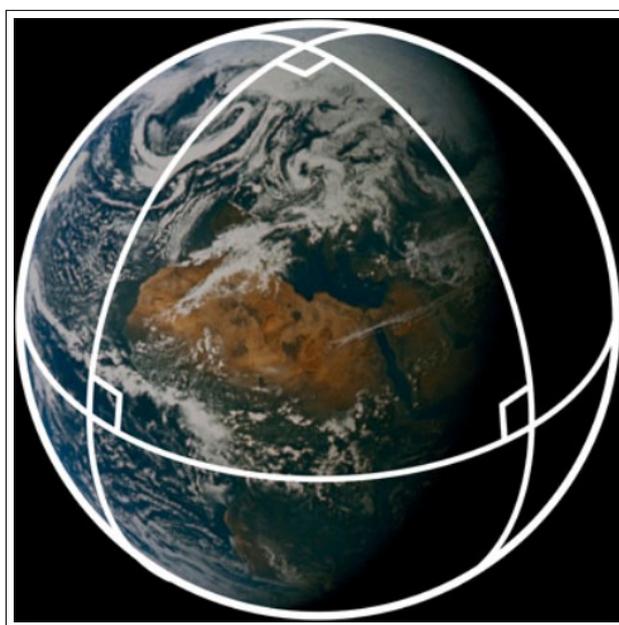


Figura 130 – Um triângulo esférico.

Fonte - Imagem extraída do blog [andrewsteele.co.uk](http://andrewsteele.co.uk).<sup>26</sup>

Feito isso, questionamos se a geometria do triângulo esférico era euclidiana. Responderam que não, pois, se fosse, a soma dos ângulos internos do triângulo seria  $180^\circ$ , como em todos os triângulos que eles haviam estudado. Concordamos com a resposta, e

<sup>26</sup> Endereço eletrônico das imagens

<http://http://andrewsteele.co.uk/physics/variablepi/270triangle.jpg>

acrescentamos que só pode ser considerada Geometria Euclidiana, aquela que respeita os cinco postulados de Euclides, porém, como tínhamos acabado de constatar, havia geometrias que não respeitavam a todos os postulados, como foi o caso da geometria do triângulo esférico, e que estas geometrias eram chamadas de Geometrias Não-Euclidianas.

Concluimos dizendo aos alunos que, neste ano, eles haviam estudado um pouco de uma Geometria Não-Euclidiana. Questionamos se eles saberiam dizer que geometria era esta. Então, o mesmo aluno que na primeira aula do projeto havia dito que as retas paralelas *afunilavam*, respondeu que era a geometria dos trilhos do trem, onde as paralelas se encontram no infinito, ao que uma aluna complementou dizendo que era a Geometria Projetiva.

Na proposta inicial, havíamos planejado nos aprofundar um pouco mais nas questões da Geometria Não-Euclidiana, traçando um comparativo entre as Geometrias Hiperbólica, Elíptica e Euclidiana. No entanto, devido ao fato de o projeto ter se estendido por um tempo maior que o planejado, decidimos por não levar a proposta adiante, visto que, só o fato de os alunos hoje saberem que a Geometria Euclidiana baseia-se em cinco postulados e que há formas de geometria diferentes da geometria de Euclides e, ainda assim, igualmente válidas, já constitui um grande passo dentro do contexto do ensino fundamental, o que nos leva a crer que os propósitos desta atividade foram amplamente alcançados e não havia motivos para prolongarmos o projeto demasiadamente.

Encerrando, gostaríamos de relatar um fato curioso que ocorreu nesta aula. Quando conversávamos sobre o postulado das paralelas e sobre toda a discussão a respeito de sua validade, ou ainda, sobre como a descoberta das Geometrias Não-Euclidianas trouxe uma grande contribuição filosófica à ciência, pois quebrou o universalismo da Geometria Euclidiana (a figura 131 traz uma sugestão de leitura para os alunos) mostrando que a matemática, como toda ciência, era inacabada e podia cometer equívocos, um aluno fez a seguinte pergunta: “Professor, se daqui a 200 anos descobrirem que tudo isso que tu ensinas para a gente estava errado; se descobrirem outra matemática, o teu trabalho não vai ter sido inútil?”

Quando iríamos começar a responder ao aluno, tocou o sinal e todos foram embora.

Ignoramos completamente a resposta.

**Os gregos e a Geometria**

Sabemos que, muitos séculos antes do florescimento da cultura grega, tanto egípcios quanto babilônios já haviam construído canais de irrigação, aquedutos colossais e pirâmides orientadas pelo norte verdadeiro (não pelo magnético) com erro inferior a um grau ( $1^\circ$ ). Cortar imensos blocos de pedra com a finalidade de obter encaixes perfeitos e formar uma pirâmide é trabalho de geômetras de alto nível.

Esses povos, no entanto, nunca tiveram interesse em especular sobre o espaço desocupado. Para eles, não havia forma ou espaço abstrato: as grandezas sempre estavam relacionadas com a quantidade de alguma coisa; as unidades de contagem sempre estavam relacionadas com a quantidade de sementes a plantar; o espaço imaginado era ocupado por plantações... Coube aos gregos esse grande salto qualitativo: pela primeira vez, o intelecto humano voltava-se para a forma divorciada do concreto.

Os pensadores gregos dedicaram-se a procurar — e achar — as relações internas das figuras que eles destacavam da natureza. Encontrando intenso prazer intelectual em suas descobertas, chegaram a acreditar que estariam às voltas com seres místicos, com os segredos da formação do cosmo.

No século III a.C., o matemático Euclides dedicou-se à exploração do espaço abstrato com base em definições e relações entre os elementos supostamente necessários à construção das figuras geométricas. Para ele, o ponto, a reta, o plano e outros seriam suficientes para o estudo das formas existentes. Estava inaugurado um verdadeiro método para se explorar o Universo, que seria reproduzido, de modo semelhante, em vários outros campos da ciência. Basta lembrar que, na Academia de Platão, onde se promoviam debates sobre os mais variados temas, lia-se logo à entrada: "Não entre quem não for geômetra".



Autor anônimo. Caligrafia por Mauro Toledo

*Euclides, em caligrafia.*

As verdades da Geometria de Euclides permaneceram intocadas por cerca de 2 mil anos, até que alguém começou a pensar sobre o que aconteceria em situações diferentes daquelas observadas em nossa realidade e sistematizadas por Euclides e seus seguidores. Após essa "rebelião", começaram a surgir novas geometrias — como as chamadas *geometrias não euclidianas*, dos matemáticos Riemann e Lobachevsky, na primeira metade do século XIX —, e a topologia passou a merecer um estudo teórico.

Podem-se considerar que, com o estudo da Geometria, o ser humano tomou consciência do abstrato e inaugurou seu exercício intelectual.



Vilje Nikolai Lobachevsky, Academia de Ciências de Leningrado

*Nikolai Lobachevsky, por Villet. Academia de Ciências de Leningrado.*

**TOLEDO, Marília; TOLEDO, Mauro. *Teoria e prática de matemática: como dois e dois*. São Paulo: FTD, 2009.**

Figura 131 – Leitura Sugerida: Os Gregos e a Geometria.

### 3 Considerações Finais e Conclusão

Há cerca de seis meses, quando começamos a delinear este trabalho, não imaginávamos os caminhos que teríamos de percorrer para chegar a este momento. Sem dúvida, este foi um tempo de muito trabalho, muitos aprendizados, alguns conflitos e muitas dúvidas. Do trabalho, se descansa; dos conflitos, se esquece; as dúvidas nos trazem horizontes, só os aprendizados são indelévels. Tudo está no lugar que deveria.

Nosso primeiro desafio – e um dos últimos a ser superado – foi entender a qual campo da geometria o trabalho se referia. Projetiva ou Descritiva? Hoje reconhecemos que, apesar de termos trabalhado com ambas, nossas primeiras intuições estavam mais voltadas para a Geometria Descritiva. Começamos a estudar a Geometria Projetiva quase por engano, motivados apenas pela ideia de que retas paralelas encontram-se no infinito. Antes de nos envergonharmos de admitir semelhante fato, responsabilizamos o sistema educacional posto, que nos sonogou a formação superior em qualquer uma delas.

Entendemos que a própria criação do PROFMAT levanta um debate sobre a formação dos professores de matemática do país. Desta forma, nada mais apropriado que usarmos este espaço para fazer um questionamento: como podemos defender que se abra espaço para as Geometrias Projetiva e Descritiva nos níveis básicos de educação, se o professor de matemática não receber formação acadêmica correspondente?

Sem dúvida, a implementação deste projeto só foi possível graças ao apoio que recebemos dentro da Universidade que, além de nos oferecer acesso ao programa de mestrado, nos permitiu contar com a orientação inestimável do Prof. Mario Retamoso. No entanto, não podemos esperar mudanças significativas enquanto projetos como este forem práticas isoladas. É necessário que as Geometrias Projetiva e Descritiva voltem (ou passem) a figurar sistematicamente nos currículos das licenciaturas em matemática de todo o país.

Ainda sobre a questão das nossas dificuldades conceituais, gostaríamos de colocar que, em muitos momentos, os livros de história da matemática – ou aqueles que, mesmo não sendo livros específicos de história da matemática, privilegiavam este enfoque histórico – nos foram de maior auxílio que os livros de Geometria Projetiva. Este fato demonstra, mais uma vez, a importância da história da matemática para a compreensão desta ciência, e nos faz ponderar que, em casos como o deste trabalho que, mais do que ensinar algo de forma diferente, busca resgatar um ensino que deixou de ser praticado, o recurso da história da matemática torna-se imprescindível. Assim, se o fato de termos chegado até aqui nos confere algum prestígio junto à equipe docente e coordenação local

do PROFMAT/FURG, gostaríamos de usá-lo neste momento para sugerir que, para as próximas edições do programa, se considerasse a possibilidade de ofertar a cadeira de história da matemática como disciplina eletiva do curso.

Sobre os resultados obtidos com a proposta didática, não nos arriscamos a mensurar, mas defendemos que ela alcançou seus objetivos, pois mobilizou os alunos para a aprendizagem do que foi proposto. Como sempre nos adverte o Prof Mario, não podemos confundir os fins com os meios. Quando estávamos com os alunos, o fim era a aprendizagem, o meio era o projeto, não ao contrário. Neste sentido, as aprendizagens ocorreram, portanto, os objetivos foram alcançados.

Na seção 5 deste trabalho, descrevemos as atividades que realizamos na escola. Na verdade, realizamos algumas outras, que não figuram neste texto. Na última delas, a que realmente encerrou esta etapa de aplicação do projeto, pedimos aos alunos que escrevessem um texto reflexivo avaliando o projeto e comentando suas impressões sobre ele. Nestes textos, os alunos relatam suas aprendizagens e dificuldades, as alegrias e as irritações decorrentes do projeto. Nossa intenção era utilizar este material para compor o texto final deste trabalho, mas, ao analisá-lo novamente, decidimos não fazê-lo, pois os alunos escreveram coisas para o seu professor, não para serem publicadas. Contudo, um depoimento nos chamou a atenção e vamos reproduzir parte dele, fazendo apenas correções na pontuação:

Tivemos também um trabalho em perspectiva, teríamos que desenhar um quarto, foi um desastre na minha vida. Foi quase um mês, semana atrás de semana tentando acertar aquela porcaria e nada. Quando eu achava que estava tudo ok, chegava no dia da entrega e o Prof Tiago falava “está errado, faz de novo!”. Até que eu fiz o último trabalho depois de muito esforço, mas mesmo assim estava errado, mas eu não iria conseguir fazer algo melhor do que aquilo.

Mas também tem outro lado, o Prof Tiago fez um bom projeto com a gente, valeu a pena, ainda mais para mim que quero me formar em arquitetura. Acho que vai servir para algo no futuro, porque nem tudo o que a gente aprende é em vão.

O interessante neste relato, além da franqueza da aluna, é que ela projeta uma perspectiva de futuro, faz planos de chegar ao ensino superior, o que, infelizmente, não é a realidade para a maioria dos alunos egressos de nossa escola. Além disso, quando estávamos trabalhando na representação do cenário em perspectiva, para incentivar os alunos, dissemos a eles que, quem gostasse daquele tipo de trabalho, poderia pensar numa carreira como arquiteto. Curiosamente foi justamente esta a profissão que a menina mencionou em seu relato.

Como podemos mensurar o impacto que este trabalho pode ter tido na vida daquela aluna e de seus colegas? Não podemos. Só o tempo nos dirá.

Sobre o impacto deste trabalho em nossa formação, basta-nos dizer que, há seis meses, não sabíamos o que era Geometria Projetiva, agora somos capazes de usar coordenadas homogêneas para exibir os pontos no infinito de uma cônica.

Sobre possíveis desdobramentos e continuidades das propostas deste trabalho, temos algumas ideias ainda embrionárias. No contexto escolar, a partir do que já foi feito até aqui, poderíamos retomar as discussões sobre Geometrias Não-Euclidianas, estabelecendo o comparativo do postulado das paralelas nas geometrias Euclidiana, Hiperbólica e Elíptica; da parte de traçados, poderíamos explorar as projeções ortogonais de poliedros mais complexos, corpos redondos e objetos cotidianos; na parte de transformações geométricas, poderíamos explorar o caráter projetivo das isometrias e homotetias.

Já no contexto acadêmico, sentimos a necessidade de publicações que traduzam os resultados clássicos da Geometria Projetiva, como o Teorema de Desargues, a um nível que possa dialogar com as características e especificidades do ensino básico. Do mesmo modo, resultados importantes para o entendimento da Geometria Projetiva, como é o caso da perspectividade de duas figuras não coplanares em relação a uma reta, que apresentamos na subseção 4.5.1, são sistematicamente omitidos nas bibliografias consagradas. Desta forma, uma continuidade natural para este trabalho, seria direcionar nosso estudo para estes vínculos e lacunas desconsiderados pelas publicações disponíveis.

Enfim, este trabalho não se esgota na produção e defesa deste texto, ao contrário, ele deixa de ser um trabalho de conclusão de curso e passa integrar um projeto de prática docente. Nem mesmo este texto se esgota, apenas abrimos mão dele.

Concluindo, buscamos a mesma frase com a qual abrimos o trabalho: “A Geometria Projetiva é toda a Geometria”. Portanto, vamos descobri-la.

## Referências

- ACZEL, A. D. *O caderno secreto de Descartes: um mistério que envolve filosofia, matemática, história e ciências ocultas*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2007. Citado na página 139.
- ATALAY, B. *A Matemática e a MonaLisa: a confluência da arte com a ciência*. São Paulo: Publicações Mercury Novo Tempo, 2009. Citado 9 vezes nas páginas 24, 26, 27, 28, 29, 30, 84, 85 e 107.
- BARROS, A.; ANDRADE, P. *Introdução à geometria projetiva*. Rio de Janeiro: SBM, 2010. Citado na página 78.
- BERTATO, F. M. *A De Divina Proportione : de Luca Pacioli*. Campinas: Editora da Unicamp, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 91 e 92.
- BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais (5ª a 8ª séries): Matemática*. Brasília, 1998. 147 p. Citado 3 vezes nas páginas 19, 20 e 22.
- CANOTILHO, L. M. L. *Perspectiva pictórica*. Bragança: Instituto Politécnico de Bragança, 2005. Citado 4 vezes nas páginas 29, 81, 85 e 87.
- COTRIM, G.; RODRIGUES, J. *Saber e fazer história, 7º ano*. São Paulo: Saraiva, 2012. Citado na página 108.
- COUTINHO, L. *Convite às geometrias não-euclidianas*. Rio de Janeiro: Saraiva, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 139 e 141.
- COXETER, H. S. M. *Projective geometry*. New York: Springer-Verlag, 1987. Citado 6 vezes nas páginas 24, 43, 48, 54, 64 e 96.
- DANTE, L. R. *Projeto Teláris: matemática, 8º ano*. São Paulo: Ática, 2012. Citado na página 21.
- EFÍMOV, N. V. *Geometria superior*. Moscou: Editorial Mir, 1984. Citado 3 vezes nas páginas 48, 54 e 77.
- EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Campinas: Editora da Unicamp, 2011. Citado 6 vezes nas páginas 42, 43, 64, 78, 96 e 97.
- GARBI, G. G. *A rainha das ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006. Citado 5 vezes nas páginas 73, 76, 94, 96 e 141.
- HEFEZ, A. Introdução a história da geometria projetiva. SBM, 1985. Disponível em: <<http://pt.scribd.com/doc/47075149/03-03-Uma-Introducao-a-Historia-da-Geometria-Projetiva-Abramo-Hefez>>. Acesso em: 24.7.2013. Citado 9 vezes nas páginas 26, 41, 48, 54, 63, 64, 66, 70 e 78.
- HILBERT, D. *Fundamentos da geometria*. Lisboa: Gradiva, 2003. Citado na página 57.

- KLINE, M. *Mathematics for the nonmathematician*. New York: Dover Publications, 1967. Citado 9 vezes nas páginas 21, 29, 30, 41, 42, 43, 48, 79 e 96.
- OLIVEIRA, R. J. de. *A escola e o ensino de ciências*. São Leopoldo: Editora da Unisinos, 2000. Citado na página 23.
- STILLWELL, J. *Mathematics and its history*. New York: Springer, 2010. Citado na página 63.
- TOLEDO, M.; TOLEDO, M. *Teoria e prática de matemática: como dois e dois*. São Paulo: FTD, 2009. Citado na página 21.
- VAINSENER, I. *Introdução às curvas algébricas planas*. Rio de Janeiro: IMPA, 2009. Citado na página 63.
- WATERMANN, I.; FRANCO, V. S. Geometria projetiva no laboratório de ensino da matemática. Secretaria da Educação do Estado do Paraná, 2009. Disponível em: <<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/2192-8.pdf>>. Acesso em: 24.7.2013. Citado na página 106.