Dener de Souza Lemos

Efeitos da Hidrodinâmica Dissipativa e da Equação de Estado sobre o Fluxo Elíptico e a Interferometria HBT

Rio Grande
2017

Dener de Souza Lemos

Efeitos da Hidrodinâmica Dissipativa e da Equação de Estado sobre o Fluxo Elíptico e a Interferometria HBT

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande, como parte dos requisitos necessários para a obtenção de Título de Mestre em Física.

Orientador: Otavio Socolowski Jr.

Rio Grande
2017

Lemos, Dener de Souza
Efeitos da Hidrodinâmica Dissipativa e da Equação de Estado sobre o Fluxo Elíptico e a Interferometria HBT - 2017.
132 páginas

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande, Instituto de Matemática, Estatística e Física, Programa de Pós-Graduação em Física.

Orientador: Dr. Otavio Socolowski Jr.

1. Plasma de quarks e glúons
2. Modelo Hidrodinâmico
3. Fluxo Elíptico
4. Interferometria HBT

I. Socolowski Jr. Otavio II. FURG III. IMEF IV. PPGFIS

Comissão Julgadora:

Profa. Dra.
Sandra dos Santos Padula

Prof. Dr.
João Thiago de Santana Amaral

Orientador: Prof. Dr.
Otavio Socolowski Jr.

À minha avó,
Deni Moraes de Lemos.

Epígrafe

Eu sou movido por duas filosofias:
Aprender mais sobre o mundo hoje do que eu sabia ontem
e tentar diminuir os sofrimento dos outros.
Você se surpreenderia quão longe esses pensamentos te levam.

Neil deGrasse Tyson

Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Dr. Otavio Socolowski Jr. pela grande honra de ter me aceitado como seu aluno desde a graduação. Por estar sempre disposto a ajudar, por todas as oportunidades, pelos ensinamentos compartilhados, pelo carisma, pela amizade e pelo exemplo de ética e profissionalismo a seguir. Serei eternamente grato.

Aos meus pais, Rudimar e Maria Terezinha, por estarem sempre ao meu lado (mesmo que distantes). Por todo apoio e amor a mim dedicados durante toda a minha vida.

À minha avó Deni, por todo carinho e amor que me deu ao longo da minha vida.

À Syndell pelo amor, companheirismo, apoio e compreensão ao longo destes anos.

Aos meus Padrinhos, Claudeci e Janete, por terem me acolhido como um filho.

À Dra. Sandra Padula, por todas as oportunidades, pelo carisma, pela amizade e por me adicionar ao GridUNESP, tornando possível a realização deste trabalho.

Aos amigos do mestrado: Daner, Diego, Juílson, Leonardo, Rafael Palota, Rafael Reimbrecht e Vinicius, por tornarem o período do mestrado mais leve e divertido.

À familia Fernandes: Daniele, Felipe, Iná, Nicoly e Pierre, por terem me acolhido como um membro da família durante estes anos.

Ao amigo José Hugo Elsas, por todas as conversas proveitosas sobre hidrodinâmica.

Aos amigos do curso de inglês: Gil, Jeniffer, Jessika, Leonir, Rodrigo e o professor André Barros, por tornarem meu último ano de mestrado um pouco mais divertido.

Ao Dr. Piotr Bożek pela contribuição na inclusão das funções de distribuições viscosas no THERMINATOR2.

Ao pessoal GridUNESP, por estarem sempre dispostos a tirar dúvidas na utilização do grid e também por atender rapidamente meus pedidos.

Aos amigos LOCOSTE, por poder contar sempre com vocês.

Ao Corsários Rugby, por ter me acolhido desde o primeiro ano da graduação.

Aos Professores e amigos do IMEF, a coordenação da PPGFIS e a FURG.

À Capes pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, estudamos colisões relativísticas de íons pesados utilizando um modelo hidrodinâmico em 2+1 dimensões (invariância por boost) para fluidos ideais e viscosos. Usamos condições iniciais suaves e dois tipos de equações de estado: a primeira é uma equação de estado com transição de fase de primeira ordem entre o plasma de quarks e glúons e o gás de hádrons com correção do volume-excluído; a segunda é uma equação de estado baseada na QCD na rede, com transição de fase do tipo crossover entre o plasma de quarks e glúons e o gás de hádrons. O objetivo deste trabalho é investigar a influência das equações de estado e dos efeitos dissipativos no fluxo elíptico e nos raios HBT. Os cálculos são realizados para colisões centrais $(0-5\%)$ Au+Au com $\sqrt{s_{\mathrm{NN}}} = 200$ GeV e comparados com dados experimentais das colaborações PHOBOS e STAR do RHIC. Os resultados obtidos mostram que a equação de estado baseada na QCD na rede descreve melhor o fluxo elíptico e os raios HBT. Além disso, verificamos a importância da inclusão de efeitos dissipativos para uma melhor concordância dos resultados com os dados experimentais. Concluimos que os efeitos dissipativos são importantes nos cálculos hidrodinâmicos.

Palavras-chave: Modelo Hidrodinâmico, Plasma de Quarks e Glúons, Colisões Relativísticas de Íons Pesados, Efeitos Dissipativos, Interferometria HBT, Fluxo Elíptico.
Áreas de conhecimento: Física de Partículas, Física Nuclear.

Abstract

In this work, we study relativistic heavy ion collisions by using a hydrodynamical model in 2+1 dimensions (boost invariance) for ideal and viscous fluids. We use smooth initial conditions and two types of equations of state: the first one is an equation of state with first-order phase transition between the quark-gluon plasma and the hadron gas with excluded-volume correction; the second one is an equation of state based on lattice QCD with a crossover transition between the quark-gluon plasma and the hadron gas. The aim of this work is to investigate the influence of both equations of state and dissipative effects on the elliptic flow and HBT radii. The calculations are performed for central Au+Au collisions (0-5%) with $\sqrt{s_{\mathrm{NN}}} = 200$ GeV and compared with experimental data from STAR and PHOBOS collaborations at RHIC. The results show that the equation of state based on lattice QCD gives a better description of the experimental data for both elliptic flow and HBT radii. Also, the inclusion of dissipative effects is important for describing the experimental data. We conclude that dissipative effects are important in hydrodynamic calculations.

Keywords: Hydrodynamical Model, Quark-Gluon Plasma, Relativistic Heavy Ion Collisions, Dissipative Effects, HBT Interferometry, Elliptic Flow.

Research Area: Particle physics, Nuclear physics.

Lista de Figuras

1.1 Ilustração da composição dos hádrons através do esquema cores (anticores) dos quarks (q) (antiquarks ($\bar{q}$)). 4

1.2 Ilustração do diagrama de fases da QCD. Extraído e adaptado do site do Brookhaven National Laboratory (https://www.bnl.gov/rhic/news2/news.asp?a=1446&t=pr). 9

2.1 Ilustração da evolução de uma colisão utilizando o modelo hidrodinâmico. Extraído e adaptado da referência [19]. 12

2.2 Razão entre o coeficiente da viscosidade de cisalhamento e densidade de entropia em função de $(T - T_t)/T_t$ para diversos fluidos, em que T_t é a temperatura de transição de fase do fluido. Extraído e adaptado da referência [46]. 26

3.1 Representação da densidade de entropia no plano transversal (xy) utilizando condições iniciais suaves. Neste caso, temos uma média de 1000 eventos gerados pelo T$_{\mathrm{R}}$ENTo para colisões Au+Au com $\sqrt{s_{\mathrm{NN}}} = 200$ GeV com centralidade de $0 - 5\%$. 29

3.2 Representação da densidade de entropia no plano transversal (xy) utilizando condições iniciais evento a evento. Neste caso, temos um único evento gerado pelo T$_{\mathrm{R}}$ENTo para colisões Au+Au com $\sqrt{s_{\mathrm{NN}}} = 200$ GeV com centralidade de $0-5\%$. 30

3.3 Densidade média de partículas carregadas por par de participantes $(dN_{ch}/d\eta)/(N_{part}/2)$ com rapidez média em função da número de participantes N_{part} para colisões Au+Au com $\sqrt{s_{\mathrm{NN}}}$ de 130 e 200 GeV, Pb+Pb com $\sqrt{s_{\mathrm{NN}}}$ de 2.76 e 5.02TeV e p+Pb com $\sqrt{s_{\mathrm{NN}}}$ de 5.02 TeV. As linhas são os respectivos cálculos hidrodinâmicos utilizando T$_{\mathrm{R}}$ENTo. Extraído da referência [58]. 36

3.4 Harmônico excêntrico ε_2 em função da multiplicidade de partículas normalizada $N_{ch}/\langle N_{ch}\rangle$ para colisões Au+Au e U+U em duas centralidades diferentes. Comparação dos modelos T$_{\mathrm{R}}$ENTo e Glauber com os dados experimentais da colaboração STAR do RHIC. Extraído da referência [53]. 37

3.5 Ilustração do sistema de coordenadas utilizado pelo THERMINATOR2. Na figura 3.5a fixamos o ângulo $\varphi = \pi$. Na figura 3.5b fixamos o ângulo $\theta = \pi/2$. 41

4.1 Densidade de energia e pressão para a FO - EoS. O zoom nas figuras mostram a região de transição de fase e o ponto onde encontra-se a temperatura crítica. 53

4.2 Densidade de energia e pressão para a lQCD - EoS. O zoom nas figuras mostra que não há uma temperatura crítica na região de transição e esta ocorre de forma suave, portanto, esta transição é do tipo crossover. . . . 56

4.3 Comparação entre a FO-EoS e a lQCD-EoS, utilizando a densidade de energia e pressão. O zoom nas figuras mostra a região de transição de fase, em que, a FO-EoS possui uma transição abrupta na temperatura crítica ($T_c \approx 160$MeV), enquanto a lQCD-EoS possui uma transição suave. 57

4.4 Comparação entre a FO-EoS e a lQCD-EoS, utilizando $\epsilon(T)/T^4$ e $P(T)/T^4$ adimensionais. O zoom nas figuras mostram a região de transição de fase, em que, a FO-EoS possui uma transição abrupta na temperatura crítica ($T_c \approx 160$MeV), enquanto a lQCD-EoS possui uma transição suave. . . . 58

5.1 Ajuste de κ_{T} de acordo com os dados experimentais de distribuições em pseudorrapidez da colaboração PHOBOS [94] no RHIC para colisões mais centrais (0-6%) com $\sqrt{s_{\mathrm{NN}}} = 200$ GeV. O ajuste (ponto vermelho) foi realizado para cada simulação presente na tabela 5.1. 62

5.2 Ajuste da temperatura de freeze-out, T_{fo} de acordo com os dados experimentais de distribuições em momento transversal da colaboração PHOBOS [95] no RHIC para colisões mais centrais (0-6%) com $\sqrt{s_{\mathrm{NN}}} = 200$ GeV. O ajuste (linha vermelha) foi feito para cada simulação realizada, presente na tabela 5.2. 64

5.3 Ilustração esquemática do volume de interação entre dois núcleos. A anisotropia no plano (xy) gera o fluxo anisotrópico. A figura 5.3a mostra uma representação 3-dimensional e a figura 5.3b mostra a representação no plano (xy). Extraído e adaptado da referência [98]. 65

5.4 Ilustração simplificada de uma fonte emissora de píons. Um píon é emitido da fonte em **I** (com posição x_1^μ) e outro píon, idêntico ao primeiro, é emitido da fonte em **II** (com posição x_2^μ). Dois detectores **A** (localizado em x_{A}^μ) e **B** (localizado em x_{B}^μ) detectam (simultaneamente) píons com momentos p_1^μ e p_2^μ, respectivamente. Por serem indistinguíveis, existem duas formas de detecção destes píons, representadas pela linha contínua e pela linha tracejada. 68

5.5 Sistema de coordenadas $out - side - long$. Extraído e adaptado da referência [110]. 74

5.6 Função de correlação de píons idênticos no sistema $out - side - long$. Os dados experimentais (triângulos pretos) pertencem a colaboração STAR do RHIC para colisões Au+Au com $\sqrt{s_{\rm NN}} = 200$. As funções de correlação são integradas com respeito aos outros dois componentes na região de $q_i < 30$ MeV/c, em que $i = o, s, \ell$. Extraído e adaptado da referência [111]. 77

6.1 Distribuição em momento transversal em função de $p_{\rm T}$ para colisões Au+Au centrais (0-6%) com $\sqrt{s_{\rm NN}} = 200$ GeV. Comparação das simulações utilizando o modelo hidrodinâmico para as equações de estado: FO-EoS (linha azul) e lQCD-EoS (linha vermelha). Os dados experimentais são da colaboração PHOBOS [95]. 81

6.2 Fluxo elíptico em função de $p_{\rm T}$ para colisões Au+Au centrais (0-5%) com $\sqrt{s_{\rm NN}} = 200$ GeV. Comparação das simulações utilizando o modelo hidrodinâmico para as equações de estado: FO-EoS (linha azul) e lQCD-EoS (linha vermelha). Os dados experimentais são da colaboração STAR [112]. 82

6.3 Raios HBT em função do momento médio $K_{\rm T}$ para colisões centrais (0-5%). Comparação das simulações utilizando o modelo hidrodinâmico para as equações de estado: FO-EoS (pontos azuis) e lQCD-EoS (pontos vermelhos). Os dados experimentais (quadrados pretos) são da colaboração STAR [111]. 83

6.4 Distribuição em momento transversal em função de p_{T} para colisões Au+Au centrais (0-6%) com $\sqrt{s_{\mathrm{NN}}} = 200$ GeV. Comparação das simulações utilizando o modelo hidrodinâmico para diferentes casos: ideal (linha vermelha), $\eta_{\mathrm{v}}/s = 0.08$ sem a correção viscosa (linha magenta), $\eta_{\mathrm{v}}/s = 0.08$ com a correção viscosa (linha azul) e $\eta_{\mathrm{v}}/s = 0.16$ com a correção viscosa (linha verde). Os dados experimentais são da colaboração PHOBOS [95]. 85

6.5 Fluxo elíptico em função de p_{T} para colisões Au+Au centrais (0-5%) com $\sqrt{s_{\mathrm{NN}}} = 200$ GeV. Comparação das simulações utilizando o modelo hidrodinâmico para diferentes casos: ideal (linha vermelha) e os casos dissipativos. No gráfico 6.5a é feita uma comparação dos efeitos da correção na função de distribuição para $\eta_{\mathrm{v}}/s = 0.08$. A linha azul representa o calculo sem a correção ($\delta f_{\pi} = 0$) enquanto a verde representa o cálculo com a correção ($\delta f_{\pi} \neq 0$). No gráfico 6.5b é feita uma comparação para diferentes valores de η_{v}/s (com $\delta f_{\pi} \neq 0$). A linha azul representa $\eta_{\mathrm{v}}/s = 0.08$ enquanto a verde representa $\eta_{\mathrm{v}}/s = 0.16$. Os dados experimentais são da colaboração STAR [112]. 87

6.6 Raios HBT em função do momento médio K_{T} para colisões centrais (0-5%). Comparação das simulações utilizando o modelo hidrodinâmico para os seguintes casos: ideal (pontos vermelhos), $\eta_{\mathrm{v}}/s = 0.08$ com $\delta f_{\pi} \neq 0$ (pontos azuis), $\eta_{\mathrm{v}}/s = 0.08$ com $\delta f_{\pi} = 0$ (pontos magenta), $\eta_{\mathrm{v}}/s = 0.16$ com $\delta f_{\pi} \neq 0$ (pontos verdes). Os dados experimentais (quadrados pretos) são da colaboração STAR [111]. 88

6.7 Distribuição em momento transversal em função de p_{T} para colisões Au+Au centrais (0-6%) com $\sqrt{s_{\mathrm{NN}}} = 200$ GeV. Comparação das simulações utilizando o modelo hidrodinâmico para diferentes casos: ideal (linha vermelha), $\zeta_{\mathrm{v}}/s = 0.08$ sem a correção viscosa (linha magenta), $\zeta_{\mathrm{v}}/s = 0.08$ com a correção viscosa (linha azul) e $\zeta_{\mathrm{v}}/s = 0.04$ com a correção viscosa (linha verde). Os dados experimentais são da colaboração PHOBOS [95]. 89

6.8 Fluxo elíptico em função de p_{T} para colisões Au+Au centrais (0-5%) com $\sqrt{s_{\mathrm{NN}}} = 200$ GeV. Comparação das simulações utilizando o modelo hidrodinâmico para diferentes casos: ideal (linha vermelha) e os casos com viscosidade volumétrica. No gráfico 6.8a é feita uma comparação dos efeitos da correção na função de distribuição para $\zeta_{\mathrm{v}}/s = 0.08$. A linha azul representa o calculo sem a correção ($\delta f_{\Pi} = 0$) enquanto a verde representa o cálculo com a correção ($\delta f_{\Pi} \neq 0$). No gráfico 6.8b é feita uma comparação para diferentes valores de ζ_{v}/s (com $\delta f_{\Pi} \neq 0$). A linha azul representa $\zeta_{\mathrm{v}}/s = 0.04$ enquanto a verde representa $\eta_{\mathrm{v}}/s = 0.08$. Os dados experimentais são da colaboração STAR [112]. 91

6.9 Raios HBT em função do momento médio K_{T} para colisões centrais (0-5%). Comparação das simulações utilizando o modelo hidrodinâmico para os seguintes casos: ideal (pontos vermelhos), $\zeta_{\mathrm{v}}/s = 0.08$ com $\delta f_{\pi} \neq 0$ (pontos azuis), $\zeta_{\mathrm{v}}/s = 0.08$ com $\delta f_{\pi} = 0$ (pontos magenta), $\zeta_{\mathrm{v}}/s = 0.04$ com $\delta f_{\pi} \neq 0$ (pontos verdes). Os dados experimentais (quadrados pretos) são da colaboração STAR [111]. 92

6.10 Distribuição em momento transversal em função de p_{T} para colisões Au+Au centrais (0-6%) com $\sqrt{s_{\mathrm{NN}}} = 200$ GeV. Comparação das simulações utilizando o modelo hidrodinâmico para diferentes casos: ideal (linha vermelha), $\eta_{\mathrm{v}}/s = \zeta_{\mathrm{v}}/s = 0.08$ (linha magenta), $\eta_{\mathrm{v}}/s = 0.08$ e $\zeta_{\mathrm{v}}/s = 0.04$ (linha azul), e $\eta_{\mathrm{v}}/s = 0.16$ e $\zeta_{\mathrm{v}}/s = 0.04$ (linha verde). Os dados experimentais são da colaboração PHOBOS [95]. 93

6.11 Fluxo elíptico em função de p_{T} para colisões Au+Au centrais (0-5%) com $\sqrt{s_{\mathrm{NN}}} = 200$ GeV. Comparação das simulações utilizando o modelo hidrodinâmico para diferentes casos: ideal (linha vermelha), $\eta_{\mathrm{v}}/s = \zeta_{\mathrm{v}}/s = 0.08$ (linha magenta), $\eta_{\mathrm{v}}/s = 0.08$ e $\zeta_{\mathrm{v}}/s = 0.04$ (linha azul), e $\eta_{\mathrm{v}}/s = 0.16$ e $\zeta_{\mathrm{v}}/s = 0.04$ (linha verde). Os dados experimentais são da colaboração STAR [112]. 94

6.12 Raios HBT em função do momento médio K_{T} para colisões centrais (0-5%). Comparação das simulações utilizando o modelo hidrodinâmico para os seguintes casos: ideal (pontos vermelhos), $\eta_{\mathrm{v}}/s = \zeta_{\mathrm{v}}/s = 0.08$ (pontos magenta), $\eta_{\mathrm{v}}/s = 0.08$ e $\zeta_{\mathrm{v}}/s = 0.04$ (pontos azuis), e $\eta_{\mathrm{v}}/s = 0.16$ e $\zeta_{\mathrm{v}}/s = 0.04$ (pontos verdes). Os dados experimentais (quadrados pretos) são da colaboração STAR [111]. 96

B.1 Ilustração de uma colisão de íons pesados. Figura B.1a núcleos acelerados momentos antes da colisão com parâmetro de impacto $\vec{b}$. Figura B.1b os participantes da colisão (região colorida) formam o QGP enquanto os espectadores seguem inalterados. Extraído e adaptado da referência[113]. 104

Lista de Tabelas

1.1 Tipos de quarks conhecidos atualmente 5

3.1 Resultados experimentais das seções de choque nucleon-nucleon 33

5.1 Ajuste de κ_{T} para diferentes simulações 61

5.2 Ajuste da temperatura de freeze-out para diferentes simulações 63

B.1 Informações de núcleos simétricos implementados no T$_{\mathrm{R}}$ENTo. 107

B.2 Informações de núcleos deformados implementados no T$_{\mathrm{R}}$ENTo. 107

Convenções Adotadas

No presente trabalho utilizamos o sistema de unidades naturais, $c = \hbar = k_B = 1$, em que c é a velocidade da luz, $\hbar$ é a constante de Planck normalizada e k_B a constante de Boltzmann.

Sumário

1 Introdução **1**

1.1 Quarks, Glúons e Hádrons 2

1.2 Cromodinâmica Quântica 5

1.3 Plasma de Quarks e Glúons 6

2 O Modelo Hidrodinâmico **11**

2.1 Equações de Movimento 13

2.2 Coordenadas de Milne 14

2.3 Hidrodinâmica Ideal 17

2.4 Hidrodinâmica Dissipativa 19

2.4.1 Teoria de Primeira Ordem 20

2.4.2 Teoria de Segunda Ordem 23

2.4.3 Coeficientes Viscosos e Tempos de Relaxamento 25

3 Condições Iniciais e Mecanismo de Desacoplamento **27**

3.1 Condições Iniciais 27

3.1.1 Condições Iniciais Suaves 28

3.1.2 Condições Iniciais Evento a Evento 29

3.1.3 Modelo de Glauber 30

3.1.4 T$_{\mathrm{R}}$ENTo 32

3.1.5 Inicialização da Viscosidade 36
3.2 Mecanismo de Desacoplamento 38
3.2.1 Cooper-Frye 38
3.2.2 THERMINATOR2 40
3.2.3 Funções de Distribuição 43

4 Equação de Estado **45**
4.1 Equação de Estado com Transição de Fase de Primeira Ordem 46
4.1.1 Fase de QGP 46
4.1.2 Fase Hadrônica 50
4.1.3 Transição de Fase de Primeira Ordem 53
4.2 Equação de Estado da QCD na rede 54
4.3 Comparação entre as EoS 56

5 Observáveis Físicos **59**
5.1 Distribuição em Pseudorrapidez 59
5.2 Distribuição em Momento Transversal 62
5.3 Fluxo Elíptico 63
5.3.1 Método do Plano de Eventos 66
5.4 Interferometria HBT 67
5.4.1 Correlação de Partículas Idênticas 68
5.4.2 Parametrização de Bertsch-Pratt e Raios HBT 73

6 Resultados Numéricos **79**
6.1 Influência das EoS 80
6.2 Influência da Viscosidade 83
6.2.1 Viscosidade de Cisalhamento 84
6.2.2 Viscosidade Volumétrica 88

6.2.3 Viscosidade de Cisalhamento e Volumétrica 92

7 Considerações Finais e Perspectivas 97

A Tensor Energia-Momento 99

A.1 Hidrodinâmica Ideal 99

A.2 Hidrodinâmica Dissipativa 101

A.3 4-Velocidade nas Coordenadas de Milne 101

B Definições, Conceitos e Equações 103

B.1 Geometria da Colisão 103

B.2 Harmônicos Excêntricos 104

B.3 Ferramentas Matemáticas 105

B.3.1 Símbolo de Levi-Civita 105

B.3.2 Derivada Covariante 105

B.3.3 Função de Bessel Modificada 106

B.4 Perfil de Woods-Saxon [114] 106

C Inicialização da Viscosidade 108

D Relações Termodinâmicas Importantes 112

D.1 Ensemble Grande Canônico 112

D.1.1 Estatística de Fermi-Dirac e Bose-Einstein 113

D.2 Gases Ultrarrelativísticos 116

D.2.1 Gás de Bósons Ultrarrelativístico 117

D.2.2 Gás de Férmions Ultrarrelativístico 119

D.3 Correção do Volume-Excluído 121

Referências Bibliográficas 125

Capítulo 1

Introdução

As colisões de íons pesados possibilitam o estudo da matéria em condições extremas de temperatura e densidade de energia. Nessas condições, acredita-se que seja formado um novo estado da matéria, em que quarks e glúons encontram-se desconfinados. Este estado recebe o nome de plasma de quarks e glúons. Acredita-se que este plasma tenha existido nos instantes iniciais do universo primordial, até aproximadamente 10^{-5} segundos após o Big Bang. Uma das possíveis ferramentas para estudar o sistema complexo criado nestas colisões é o modelo hidrodinâmico. Este modelo possui longa tradição na descrição teórica das colisões de altas energias e sua aplicação está fundamentada na hipótese de que este sistema atingirá, rapidamente, um estado de equilíbrio termodinâmico local e também no fato de que em uma colisão relativística um grande número de partículas é gerado, demonstrando o aspecto coletivo da matéria. Nesta dissertação iremos investigar, através do uso do modelo hidrodinâmico, a influência das equações de estado e da viscosidade no fluxo elíptico e na interferometria HBT (Hanbury Brown-Twiss) para as colisões centrais no RHIC.

Vamos apresentar agora a forma como esta dissertação está estruturada. Neste capítulo introdutório faremos uma breve contextualização histórica sobre quarks, glúons e hádrons. Em seguida vamos discutir sobre a teoria que descreve as interações fortes:

a Cromodinâmica Quântica. Por fim, falaremos brevemente sobre o plasma de quarks e glúons, os aceleradores de partículas e sobre o diagrama de fases da Cromodinâmica Quântica. No capítulo 2, discutiremos o modelo hidrodinâmico. Iniciaremos nas equações de movimento e posteriormente descreveremos o sistema de coordenadas de Milne. Por fim, derivaremos as equações da hidrodinâmica para fluidos ideais e para fluidos viscosos. No capítulo 3, apresentaremos alguns ingredientes importantes para a aplicação do modelo hidrodinâmico. Iniciaremos descrevendo as condições iniciais e o mecanismo utilizado para gerar a densidade de entropia inicial. Finalizaremos o capítulo descrevendo o processo de desacoplamento das partículas, chamado mecanismo de *freeze-out*. No capítulo 4 apresentaremos, em detalhes, dois tipos de equações de estado utilizadas neste trabalho: i) equação de estado com transição de fase de primeira ordem; e ii) equação de estado baseada nos resultados da Cromodinâmica Quântica na rede. No capítulo 5, descreveremos alguns dos observáveis usualmente calculados utilizando o modelo hidrodinâmico. No capítulo 6, compararemos os resultados numéricos obtidos para fluxos e para os raios HBT com os dados experimentais. No capítulo 7, apresentamos a conclusão e algumas perspectivas futuras. Nos apêndices A, B, C e D serão mostrados detalhes dos cálculos citados no corpo da dissertação.

1.1 Quarks, Glúons e Hádrons

A natureza possui quatro interações fundamentais conhecidas, sendo elas as interações forte, fraca, eletromagnética e gravitacional. As interações forte e fraca são interações de curto alcance, da ordem do núcleo atômico ($10^{-15}m$), enquanto as interações eletromagnética e gravitacional são interações de longo alcance e se manifestam em escalas macroscópicas. Estas interações, com excessão da gravitacional, são bem descritas pelo modelo padrão da física de partículas.

As partículas que interagem fortemente, tanto bósons quanto férmions[1], são chamadas de hádrons. Os primeiros hádrons conhecidos foram o próton, descoberto por E. Rutherford em 1919, e o nêutron, descoberto por J. Chadwick em 1931. Posteriormente, em 1947, C. M. G. Lattes, H. Muirhead, G. P. S. Occhialini e C. F. Powell [1] descobriram o píon[2] e a partir desta descoberta os hádrons foram classificados de duas formas: bárions, como os prótons e nêutrons, e mésons, como os píons. Com o avanço nos estudos de raios cósmicos e o advento dos aceleradores de partículas novos hádrons foram descobertos, como por exemplo Λ, K, Δ, Σ, entre outros. Inicialmente, acreditava-se que todos estes hádrons fossem partículas elementares e a comunidade científica buscava um modelo unificado capaz de descrever a grande variedade de partículas que interagem fortemente. A primeira formulação da classificação das partículas elementares foi descrita por S. Sakata [2] em 1956 e ampliada pelo modelo de Nagoya [3, 4]. Este modelo incentivou a busca por um modelo mais fundamental que o modelo de hádrons.

Em 1964, M. Gell-Mann e G. Zweig propuseram o modelo de quarks [5, 6]. Este modelo diz que os hádrons possuem uma estrutura interna e são compostos por partículas elementares, chamadas de quarks. Inicialmente, acreditava-se que existiam três espécies de quarks, denominados de *up (u), down (d)* e *strange (s)*. Estes quarks possuem as seguintes características: são férmions com spin 1/2; possuem carga elétrica fracionária; deveriam possuir isospin e estranheza, de modo a compor todas as partículas conhecidas na época. Neste modelo, bárions (antibárions) são compostos por três quarks (antiquarks), como por exemplo o próton, que possui carga elétrica igual a 1 e carga bariônica igual a 1, sendo composto por uud. Já os mésons são compostos por um quark e um antiquark, como por exemplo, o π^+ que é composto de $u\bar{d}$. Porém, a existência de partículas como Δ^{++}, que possui spin 3/2, violaria o princípio da exclusão

[1] Férmions são partículas de spin semi-inteiro e bósons são partículas de spin inteiro.
[2] Os píons foram previstos por H. Yukawa em 1935 como as partículas mediadoras da interação forte.

de Pauli[3] uma vez que sua composição deve ser *uuu*. Para contornar o problema, O. W. Greenberg [7], M. Y. Han e Y. Nambu [8] criaram um número quântico adicional chamado de ”carga de cor” e desta forma o princípio da exclusão de Pauli é reestabelecido. Portanto, cada quark pode assumir um estado de ”cor” baseada nas cores primárias: verde, vermelho e azul. Nos hádrons, a combinação de quarks deve formar um objeto incolor, ou seja, a quantidade total de carga de cor deve ser zero ou todas as cargas de cores devem estar presentes em igual quantidade. Isto implica que cada um dos três quarks (antiquarks) que compõe os bárions (antibárions) possuem uma cor (anticor) diferente dos demais. De forma análoga o par quark-antiquark que compõe os mésons deve possuir um quark contendo uma certa carga de cor e um antiquark com carga de cor oposta. Na figura 1.1, temos uma ilustração do esquema de cores e suas possíveis combinações para a formação dos hádrons.

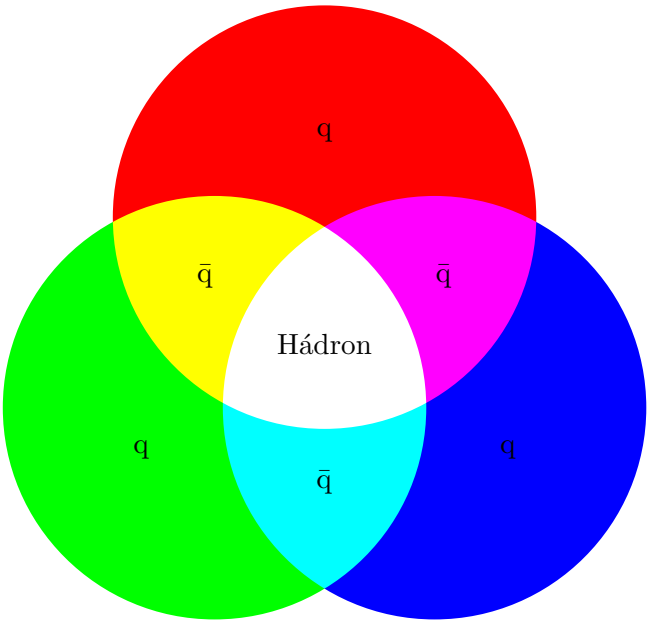


Figura 1.1: Ilustração da composição dos hádrons através do esquema cores (anticores) dos quarks (q) (antiquarks ($\bar{q}$)).

[3] O princípio da exclusão de Pauli diz que dois férmions não podem ocupar simultaneamente o mesmo estado quântico.

No entanto, não é possível observar quarks livres na natureza. A aceitação do modelo de quarks só se deu na década de 70, onde experimentos envolvendo o espalhamento profundamente inelástico (DIS)[4] resultaram na aceitação dos quarks como objetos reais [9]. Atualmente sabe-se da existência de seis quarks, conforme mostrado na tabela 1.1, que compõem o Modelo Padrão.

Tabela 1.1: Tipos de quarks conhecidos atualmente

Quarks	Símbolo	Carga Elétrica	Carga Bariônica	Massa[a] [GeV]
Up	u	+2/3	1/3	0.0023
Down	d	-1/3	1/3	0.0048
Strange	s	-1/3	1/3	0.095
Charm	c	+2/3	1/3	1.275
Bottom	b	-1/3	1/3	4.18
Top	t	+2/3	1/3	173.07

[a]Referência [10]

Paralelamente à aceitação do modelo de quarks, experimentos de medição de jatos[5], como o PETRA [9], por meio das detecções de 3 jatos, estabeleceram a existência do glúon. Os glúons são as partículas que intermediam a força forte entre quarks (antiquarks) e os mantêm juntos no interior dos hádrons. Vale ressaltar que, da mesma forma que os quarks, glúons também não podem ser observados livres na natureza, e eles também possuem carga da cor.

1.2 Cromodinâmica Quântica

A Cromodinâmica Quântica (QCD) é a teoria, baseada em primeiros princípios, que descreve a interação forte, ou seja, a interação entre os quarks via um campo de glúons. De acordo com a QCD, para densidades de energia inferiores a 1 GeV/fm^3 os quarks e glúons encontram-se sempre confinados no interior dos hádrons. O fato de quarks

[4]No DIS utiliza-se léptons, como o elétron por exemplo, para sondar a estrutura dos hádrons.
[5]Jatos é o nome dados aos cones estreitos de partículas produzidas em colisões a altas energias.

não poderem ser observados isoladamente na natureza é conhecido como *confinamento de cor*. O confinamento de cor diz que para grandes distâncias de separação entre os quarks, a intensidade da interação entre eles é grande. Assim, quando dois quarks (ou um par quark-antiquark) são separados no espaço, a intensidade desta interação aumenta até que sua energia seja suficientemente grande para, instantaneamente, formar um novo par quark-antiquark. Outra propriedade importante da QCD é a *liberdade assintótica*, descoberta em 1973, por D. Gross, F. Wilczek e D. Politzer[6] [11, 12]. A liberdade assintótica diz que em altas energias, a distância de separação entre os quarks é pequena e, consequentemente, a interação entre eles é mais fraca. Ou seja, quanto maior a energia do sistema mais os quarks e glúons se comportam como partículas livres.

Nas colisões de íons pesados a altas energias, espera-se que a matéria formada atinja condições de temperatura e densidade de energia suficientemente altas para superar a força que mantém os quarks e glúons confinados e promover a transição de fase da matéria hadrônica para um novo estado da matéria onde quarks e glúons encontram-se desconfinados. Este estado é conhecido como *plasma de quarks e glúons*.

1.3 Plasma de Quarks e Glúons

O plasma de quarks e glúons (QGP), denominação dada por E. V. Shuryak [13] em 1980, é um novo estado da matéria previsto a partir das propriedades da liberdade assintótica e do estudo das propriedades termodinâmicas de sistemas de hádrons. Em 1975, J. C. Collins e M. J. Perry [14] sugeriram que o QGP deveria se comportar como um gás ideal de quarks e glúons desconfinados. No ano de 2005, os pesquisadores do RHIC anunciaram oficialmente a descoberta do QGP [15]. Porém, diferente do previsto, este plasma é fortemente acoplado, comportando-se mais como um líquido do que como

[6] A descoberta da liberdade assintótica rendeu o prêmio nobel de 2004.

um gás. E também é o líquido com menor viscosidade existente.

A observação direta do QGP não é possível experimentalmente, pois este sistema é criado por um intervalo de tempo muito curto. Entretanto, existem diversas evidências da criação do QGP vindas dos observáveis, dentre elas:

- Aparição dos fluxos. Estes resultados mostram o aspecto coletivo da matéria gerada nas colisões. Os fluxos indicam que QGP se comporta como um líquido.

- Absorção de jatos. Os jatos de quarks e glúons produzidos nas colisões, ao atravessarem um meio denso (como o QGP), perdem energia, diferente do que ocorre nos casos em que não há a formação do plasma (algumas colisões p+p, por exemplo).

- Produção de diléptons e fótons diretos na região de momento transversal entre 2 e 5 GeV. Estas partículas são produzidas no estágio inicial da colisão e não são modificadas pelos processos de hadronização do sistema.

- Supressão de quarkonium[7]. No cenário de formação do QGP, a produção de quarkonium, como o J/ψ (formado por um par $c\bar{c}$), é suprimida por causa da alta densidade de energia do plasma e da fraca energia de ligação entre estas partículas.

- Produção de partículas estranhas. Nas colisões entre núcleos uma grande quantidade de partículas estranhas é formada. Isto só é explicado através da existência do QGP.

A única forma de criar o QGP em laboratório, até o momento, é através de colisões relativísticas entre íons pesados. Os experimentos com íons pesados começaram nos anos de 1980 no acelerador AGS (*Alternate Gradient Synchroton*), localizado nos Estados Unidos, com colisões de ouro (Au) e silício (Si), entre outros, e energias no centro

[7] O quarkonium é um estado formado por um par quark-antiquark criado através da fusão de dois glúons.

de massa de 5 GeV por nucleon. Na mesma época, estas colisões foram estudadas no acelerador SPS (*Super Proton Synchroton*) do CERN (*Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire*)[8], localizado na Suíça, com energia de centro de massa de 17 GeV por nucleon. A partir dos anos 2000, entrou em funcionamento o RHIC (*Relativistic Heavy Ion Collider*), que foi o substituto do AGS. Ele possui quatro detectores: STAR, que consegue uma imagem tridimensional das colisões, obtendo assim as trajetórias das partículas; PHENIX, que busca por partículas formadas no início da colisão e que praticamente não interagem com a matéria produzida na colisão; PHOBOS, que detecta partículas em praticamente todos os ângulos e observa correlação entre elas; BRAHMS, que pode observar as partículas finais identificadas. O RHIC acelerava núcleos de ouro (Au), cobre (Cu) e urânio (U) até velocidades de 99.995% da velocidade da luz no vácuo, e chegou a energias de 200 GeV por nucleon no centro de massa. Por fim, o acelerador LHC (*Large Hadron Collider*) substituiu o SPS em 2008. O LHC possui quatro detectores: ALICE, que é voltado para as colisões de íons pesados e também para o estudo do QGP; CMS e ATLAS, que têm por finalidades a descoberta do bóson de Higgs, evidências de física além do modelo padrão e também estudo com colisões de íons pesados; LHCb que busca compreender a assimetria matéria-antimatéria. Atualmente o LHC é o único acelerador de íons pesados em funcionamento; nele são realizadas colisões de núcleos de chumbo (Pb) com velocidades de 99.99999991% da velocidade da luz no vácuo, e energias de 2.76, 5.02 e 8.16 TeV por nucleon no centro de massa.

Estudos das propriedades do plasma de quarks e glúons e resultados da QCD na rede[9] têm fornecido elementos para a construção de um diagrama de fases da QCD, como o representado na figura 1.2. Essa figura mostra o diagrama de temperatura por densidade bariônica. Em altas temperaturas temos a fase de QGP e em temperaturas menores temos um gás de hádrons. Vemos que há uma linha de transição entre as fases.

[8] Em português CERN significado Conselho Europeu de Pesquisa Nuclear.

[9] A QCD na rede é uma técnica computacional desenvolvida para estudo de diversos regimes físicos em que o uso da QCD perturbativa não se aplica.

Sobre essa linha, acredita-se que exista um ponto crítico que separa a transição de fase suave (*crossover*, linha tracejada vermelha) de uma transição de fase de primeira ordem (fase mista, linha contínua branca). Discutiremos estas transições em detalhes no capítulo 4. A área de atuação dos aceleradores de partículas, RHIC (área sombreada azul) e LHC (área sombreada verde), está situada na região de pequena densidade bariônica. Nesta região, a transição de fase ocorre a uma temperatura de aproximadamente 170 MeV.

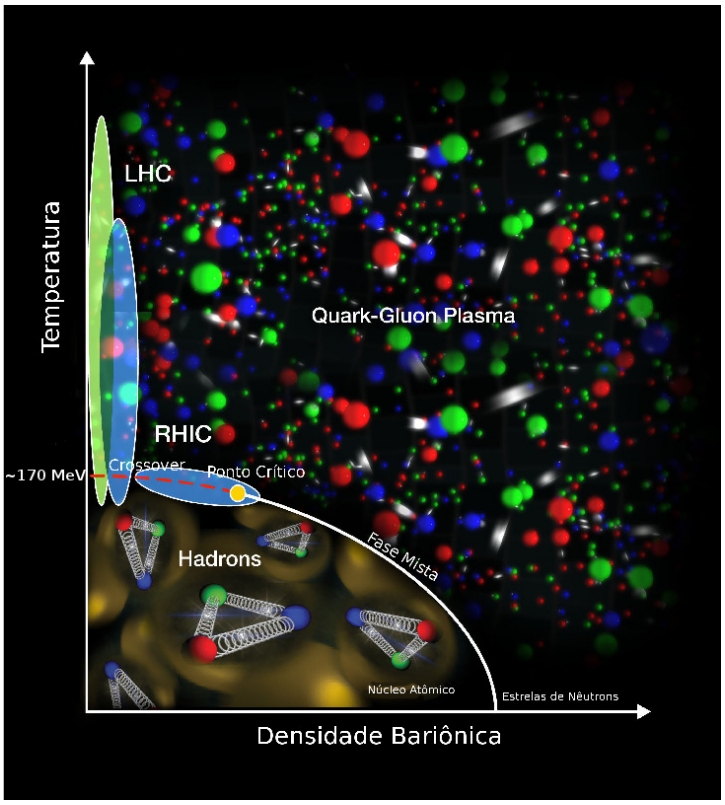


Figura 1.2: Ilustração do diagrama de fases da QCD. Extraído e adaptado do site do Brookhaven National Laboratory (https://www.bnl.gov/rhic/news2/news.asp?a=1446&t=pr).

Capítulo 2

O Modelo Hidrodinâmico

As primeiras colisões a altas energias foram observadas em raios cósmicos na metade do século XIX. O primeiro a tentar explicar este fenômeno foi E. Fermi [16], em 1950, que propôs que a matéria criada nestas colisões, muito rapidamente, entraria em equilíbrio térmico local[1]. A partir desta hipótese, Fermi utilizou métodos estatísticos para estudar a produção de partículas em colisões hadrônicas. Seu modelo previa corretamente a relação entre a multiplicidade de partículas e a energia incidente. No entanto, falhava na previsão da razão entre káons e píons. Isto ocorria porque Fermi considerava que as partículas eram emitidas de uma matéria em repouso. Seu modelo previa $K/\pi = 4/3$. Entretanto os dados experimentais mostravam que a quantidade de píons gerados nas colisões é muito superior à quantidade de káons. Outro equívoco do modelo de Fermi era a previsão de uma distribuição angular de partículas isotrópica; experimentalmente é observada uma distribuição de partículas alongada na direção longitudinal.

Baseado na idéia de Fermi sobre o equilíbrio térmico local, L. Landau [18], em 1953, propôs que o problema na razão entre píons e káons e o problema na distribuição

[1] O conceito de equilíbrio térmico local diz que a pressão e temperatura variam tão lentamente, para qualquer ponto, que pode-se assumir o equilíbrio termodinâmico em algum vizinho próximo a este ponto. A condição geral para que o equilíbrio térmico local seja válido é que o livre caminho médio é muito menor que as dimensões caracteristicas do sistema [17].

angular de partículas podiam ser resolvidos se a matéria gerada nas colisões sofresse uma expansão hidrodinâmica antes da emissão das partículas. Desta forma, a matéria se resfria ao se expandir, e em temperaturas mais baixas temos uma maior produção de partículas leves, os píons, e, ao mesmo tempo, esta expansão aumenta a distribuição de partículas na direção longitudinal. Com o advento dos aceleradores de partículas, observou-se que o modelo hidrodinâmico conseguia explicar muitos aspectos das colisões e, desta forma, este modelo se tornou uma ferramenta muito utilizada.

O modelo hidrodinâmico descreve a evolução no espaço-tempo da matéria criada nas colisões de íons pesados, conforme a ilustração mostrada na figura 2.1.

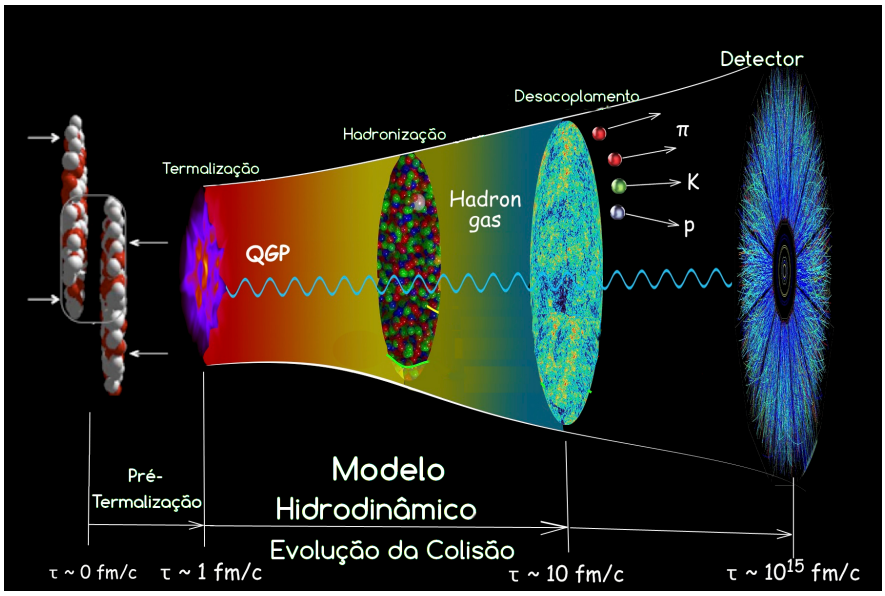


Figura 2.1: Ilustração da evolução de uma colisão utilizando o modelo hidrodinâmico. Extraído e adaptado da referência [19].

De acordo com este modelo, dois núcleos acelerados à velocidades próximas à da luz, são contraídos pelo fator de Lorentz na direção longitudinal. No momento da colisão ocorre uma grande deposição de energia, formando um sistema inicial. Após um processo complexo[2] envolvendo colisões microscópicas entre os constituíntes desse

[2]Este processo complexo recebe o nome de pré-termalização e não é nosso objetivo, neste trabalho, descrever esta fase da colisão.

sistema, forma-se uma matéria quente e densa em equilibrio térmico local. A partir deste momento o modelo hidrodinâmico pode ser aplicado. Conforme ocorre a evolução espaço-temporal do sistema, a matéria gerada na colisão vai se expandindo e resfriando. Durante este processo, os quarks começam a se reagrupar em hádrons. Após um certo tempo, toda a matéria formada na colisão estará na fase hadrônica. Quando o livre caminho médio dos hádrons no sistema é da ordem da dimensão característica do sistema, a hipótese de equilíbrio térmico deixa de valer e o modelo hidrodinâmico não pode mais ser usado. Por fim, o sistema se desacopla e os hádrons formados na colisão e seus decaimentos seguem livremente para o detector.

Este modelo consegue, com poucos parâmetros, descrever de forma razoável os dados experimentais e também é uma boa ferramenta para investigar, através de comparações com os dados, as propriedades da matéria formada na colisão, tais como: as equações de estado, condições iniciais e o desacoplamento. Neste capítulo descreveremos o modelo hidrodinâmico aplicado às colisões de íons pesados.

2.1 Equações de Movimento

No momento em que a matéria formada nas colisões a altas energias entra em equilíbrio térmico local, podemos tratá-la como um fluido. Cada elemento deste fluido pode ser caracterizado por um tensor energia-momento e por correntes de cargas conservadas. Desta forma, as equações de movimento da hidrodinâmica representam leis de conservações de energia, momento e cargas, sendo dadas por

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0 \tag{2.1}$$

$$\partial_\nu j_i^\nu = 0, \tag{2.2}$$

em que $T^{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento e j_i^ν é a i-ésima corrente de carga conservada (carga elétrica, bariônica, estranheza, entre outras), para $i = 1, ...,N$. A 4-velocidade

do fluido é definida como $u^\mu = \gamma(1,\vec{v})$, em que $\gamma = 1/\sqrt{1-\vec{v}^2}$ é o fator de Lorentz e $\vec{v}$ é a 3-velocidade do fluido em relação ao referencial de laboratório. A 4-velocidade é normalizada, de tal forma que $u^\mu u_\mu = 1$.

A partir das equações (2.1) e (2.2), temos $4 + N$ equações de conservação: uma equação de conservação de energia, três para o 3-momento e N para as correntes generalizadas. Porém, existem $10 + 4N$ variáveis independentes, sendo as dez componentes independentes do tensor energia-momento (simétrico e de 2ª ordem) e quatro componentes de cada uma das N 4-correntes j_i^ν. Vemos que o sistema de equações da hidrodinâmica não é fechado e não pode ser resolvido por completo. Logo são necessárias hipóteses adicionais para resolvê-lo. Uma das formas de fornecer as $6+3N$ equações ao sistema é usar a abordagem da hidrodinâmica dissipativa. Outra possibilidade é utilizar hipóteses simplificadoras que reduzem o número de variáveis desconhecidas, como, por exemplo, a hidrodinâmica ideal.

2.2 Coordenadas de Milne

Em colisões de altas energias é conveniente utilizar o sistema de coordenadas de Milne (ou coordenadas hiperbólicas) para descrever a evolução espaço-temporal da colisão. Isso porque a termalização da matéria formada nas colisões ocorre em uma hipersuperfície no tempo próprio do fluido. Neste sistema, as novas coordenadas são definidas como

$$\tau = \sqrt{t^2 - z^2} \tag{2.3}$$

$$\eta_s = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{t+z}{t-z}\right), \tag{2.4}$$

enquanto as coordenadas x e y não se alteram. As relações inversas são: $t = \tau\cosh(\eta_s)$ e $z = \tau\sinh(\eta_s)$. Neste caso, o intervalo invariante é $ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - \tau^2 d\eta_s^2$ e o tensor métrico é dado por

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/\tau^2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\tau^2 \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

A 4-velocidade do fluido pode ser parametrizada em termos da rapidez transversal, y_{T}, rapidez longitudinal, y_{L}, e o ângulo azimutal da velocidade, ϕ, definidos como

$$y_{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+v_{\mathrm{T}}}{1-v_{\mathrm{T}}}\right) \tag{2.6}$$

$$y_{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+v_z}{1-v_z}\right) \tag{2.7}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right), \tag{2.8}$$

em que $v_{\mathrm{T}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ é a velocidade transversal.

Assim, no espaço de Minkowski, a 4-velocidade, denotada por u^{μ}_{MS}, pode ser escrita da seguinte forma

$$u^{\mu}_{\mathrm{MS}} = \gamma_{\mathrm{T}}\left(\cosh y_{\mathrm{L}}, \tanh y_{\mathrm{T}}\cos\phi, \tanh y_{\mathrm{T}}\sin\phi, \sinh y_{\mathrm{L}}\right) \tag{2.9}$$

em que $\gamma_{\mathrm{T}} = \cosh y_{\mathrm{T}} = 1/\sqrt{1-v_{\mathrm{T}}^2}$ é o fator gama de Lorentz transversal.

Utilizando a transformação $u^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu}_{\mathrm{MS}}} u^{\nu}_{\mathrm{MS}}$ (ver seção A.3 do apêndice A), obtemos a 4-velocidade nas coordenadas de Milne

$$u^{\mu} = \gamma_{\mathrm{T}}\left(\cosh(y_{\mathrm{L}} - \eta_{\mathrm{s}}), \tanh y_{\mathrm{T}}\cos\phi, \tanh y_{\mathrm{T}}\sin\phi, \frac{1}{\tau}\sinh(y_{\mathrm{L}} - \eta_{\mathrm{s}})\right). \tag{2.10}$$

Considerando a invariância por boost, em que $y_{\rm L} = \eta_{\rm s}$, a equação (2.10) é reduzida a

$$u^{\mu} = \gamma_{\rm T}\,(1,v_{\rm T}\cos\phi,v_{\rm T}\sin\phi,0)\,. \tag{2.11}$$

Ao utilizar as coordenadas de Milne, as equações de movimento, (2.1) e (2.2), devem ser reescritas da seguinte forma:

$$\partial_{;\nu}T^{\mu\nu} = \partial_{\nu}T^{\mu\nu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}T^{\nu\lambda} + \Gamma^{\nu}_{\nu\lambda}T^{\mu\lambda} = 0 \tag{2.12}$$

$$\partial_{;\nu}j^{\nu}_{i} = \partial_{\nu}j^{\nu}_{i} + \Gamma^{\nu}_{\nu\lambda}j^{\lambda}_{i} = 0, \tag{2.13}$$

em que $\partial_{;\nu}$ são as derivadas covariantes e $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$ são os símbolos de Christoffel (ver seção B.3 do apêndice B). Neste caso, as únicas contribuições dos símbolos de Christoffel são: $\Gamma^{\eta_{\rm s}}_{\tau\eta_{\rm s}} = \Gamma^{\eta_{\rm s}}_{\eta_{\rm s}\tau} = 1/\tau$ e $\Gamma^{\tau}_{\eta_{\rm s}\eta_{\rm s}} = \tau$. Utilizando as equações (2.12) e (2.13), obtemos explicitamente as equações da hidrodinâmica nas coordenadas de Milne

$$\begin{aligned}
\partial_{\nu}T^{\tau\nu} &+ \tau T^{\eta_{\rm s}\eta_{\rm s}} + \frac{1}{\tau}T^{\tau\tau} = 0,\\
\partial_{\nu}T^{x\nu} &+ \frac{1}{\tau}T^{x\tau} = 0,\\
\partial_{\nu}T^{y\nu} &+ \frac{1}{\tau}T^{y\tau} = 0,\\
\partial_{\nu}T^{\eta_{\rm s}\nu} &+ \frac{3}{\tau}T^{\eta_{\rm s}\tau} = 0,\\
\partial_{\nu}j^{\nu}_{i} &+ \frac{1}{\tau}j^{\tau}_{i} = 0.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Para um dado tensor energia-momento, ideal ou viscoso, e corrente de cargas generalizadas, as equações (2.14), serão resolvidas numericamente nas nossas simulações por meio do código vHLLE (*viscous Harten-Lax-van Leer-Einfeldt*)[3] [20].

[3]Disponível para download em https://github.com/yukarpenko/vhlle.

2.3 Hidrodinâmica Ideal

Fluidos ideais são aqueles em que a viscosidade e condutividade térmica são nulas e, portanto, podem ser caracterizados completamente pela sua densidade de energia, ϵ, e pressão isotrópica, P. Neste caso, não há fluxo de energia, nem densidade de momento no referencial de repouso do fluido. Sendo assim, o tensor energia-momento neste referencial, denotado por $T_R^{\mu\nu}$, é descrito somente pela diagonal principal, da seguinte forma

$$T_R^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}. \tag{2.15}$$

Neste referencial também não há fluxo de partículas, de modo que $j_{i,R}^{\nu}$ é da forma

$$j_{i,R}^{\nu} = \begin{pmatrix} n_i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.16}$$

em que n_i é a i-ésima densidade de carga generalizada.

Utilizando a transformação de Lorentz, podemos reescrever o tensor energia-momento e a 4-corrente de partículas em um referencial qualquer como

$$T_{ideal}^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}T_R^{\alpha\beta} \tag{2.17}$$

$$j_{i,(ideal)}^{\nu} = \Lambda^{\nu}{}_{\alpha}j_{i,R}^{\alpha}, \tag{2.18}$$

em que $\Lambda^{\nu}{}_{\beta}$ é a matriz de transformação de Lorentz. Realizando esta transformação,

obtemos o tensor energia-momento e a 4-corrente para fluidos ideais (ver seção A.1 do apêndice A)

$$T^{\mu\nu}_{ideal} = \epsilon u^{\mu}u^{\nu} - P\Delta^{\mu\nu} \tag{2.19}$$

$$j^{\nu}_{i,(ideal)} = n_i u^{\nu}, \tag{2.20}$$

em que $\Delta^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - u^{\mu}u^{\nu}$ é o projetor ortogonal à 4-velocidade do fluido e possui as seguintes propriedades: $\Delta^{\mu\nu}u_{\mu} = \Delta^{\mu\nu}u_{\nu} = 0$ e $\Delta^{\mu\nu}\Delta^{\alpha}_{\nu} = \Delta^{\mu\alpha}$. Substituindo as equações (2.19) e (2.20) juntamente com a 4-velocidade (2.9) e a métrica $g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ nas equações (2.1) e (2.2), obtemos a equação de Euler relativística no espaço de Minkowski[4]. Com as equações (2.19) e (2.20), temos $5+N$ variáveis independentes para $4+N$ equações. A equação que falta para fecharmos o sistema dado pelas equações (2.1) e (2.2) é a equação de estado que relaciona as quantidades termodinâmicas em cada posição do espaço-tempo. Discutiremos sobre as equações de estado no capítulo 4.

Uma outra propriedade importante do fluido ideal é a conservação de entropia. Fazendo $u_{\mu}\partial_{\nu}T^{\mu\nu} = 0$, temos

$$(\epsilon + P)\partial_{\nu}u^{\nu} + u^{\nu}\partial_{\nu}\epsilon = 0 \tag{2.21}$$

Utilizando a relação termodinâmica

$$\epsilon + P = Ts \longrightarrow d\epsilon = Tds, \tag{2.22}$$

em que s é a densidade de entropia e T a temperatura, temos a equação de conservação de entropia

$$\partial_{\nu}S^{\nu} = \partial_{\nu}(su^{\nu}) = 0, \tag{2.23}$$

em que $S^{\nu} = su^{\nu}$ é a 4-corrente de entropia.

[4] A equação de Euler nas coordenadas de Milne é obtida utilizando a métrica (2.5), as equações (2.14), (2.19), (2.20) e a 4-velocidade do fluido dada por (2.11).

2.4 Hidrodinâmica Dissipativa

Ao longo dos anos, a hidrodinâmica ideal mostrou-se uma boa ferramenta para reproduzir alguns dos observáveis obtidos experimentalmente em colisões relativísticas de íons pesados [21, 22]. Entretanto, para outros observáveis, como os fluxos anisotrópicos[5] por exemplo, a hidrodinâmica ideal não consegue reproduzir os dados na região de grandes momentos transversais. Neste caso, a aplicação da hidrodinâmica viscosa é recomendável [23, 24, 25, 26, 27]. A viscosidade reduz a pressão total do sistema e isso torna os valores dos fluxos menores na região de grande momento transversal. Verificou-se [28] que a introdução dos efeitos dissipativos acarreta em um aumento na multiplicidade de partículas devido à produção de entropia.

Para a dinâmica de um fluido viscoso, devemos considerar os estados termodinâmicos fora do equilíbrio e os mecanismos de dissipação, ou seja, os processos irreversíveis. Na presença destes efeitos dissipativos o tensor energia-momento e as 4-correntes continuam conservados localmente. Estas quantidades são dadas agora pela soma da parte ideal com a parte viscosa (ver seção A.2 do apêndice A). Portanto, temos

$$T^{\mu\nu} = \epsilon u^{\mu} u^{\nu} - (P + \Pi)\Delta^{\mu\nu} + \pi^{\mu\nu} \tag{2.24}$$

$$j_i^{\nu} = n_i u^{\nu} + V_i^{\nu}, \tag{2.25}$$

em que $\Pi, \pi^{\mu\nu}$ e V_i^{ν} são, respectivamente, a viscosidade volumétrica, o tensor de viscosidade de cisalhamento e as correntes de difusão de cargas. Nesta definição, estamos desconsiderando os efeitos de vorticidade e, por simplicidade, vamos utilizar $V_i^{\nu} = 0$[6]. Se $\Pi = \pi^{\mu\nu} = 0$ recaimos no caso do fluido ideal.

Com a equação (2.24), violamos a hipótese dada em (2.15). Isto porque, na presença de efeitos dissipativos, o tensor energia-momento não fica na forma diagonal e isotrópico no referencial de repouso. Além disso as componentes viscosas aparecem neste referencial.

[5] Descreveremos os observáveis e, consequentemente, os fluxos anisotrópicos, no capítulo 5.
[6] Esta aproximação pode ser feita no caso de densidade bariônica nula [20].

Portanto, o problema agora se resume em encontrar as equações de movimento para as componentes Π e $\pi^{\mu\nu}$.

2.4.1 Teoria de Primeira Ordem

Os primeiros a introduzir os efeitos dissipativos na hidrodinâmica relativística em um formalismo covariante foram C. Eckart [29], em 1940, e posteriomente Landau-Lifshitz [30], em 1959. Estas abordagens são chamadas de teoria de primeira ordem e nada mais são que uma versão covariante da formulação de Navier-Stokes da hidrodinâmica clássica [30, 31, 32]. A teoria de primeira ordem é importante para ilustrar algumas características da hidrodinâmica dissipativa. Um aspecto importante é a escolha do referencial de repouso do fluido, que é feito de modo a manter válidas as relações termodinâmicas mesmo que o sistema encontre-se fora do equilíbrio termodinâmico. No formalismo de Eckart, o referencial de repouso do fluido é escolhido como o referencial em que não há fluxo de partículas. No formalismo de Landau, o referencial de repouso do fluido é escolhido como o referencial em que não há fluxo de energia. Para o fluido ideal ambos os referenciais são satisfeitos. Nesta dissertação usaremos a escolha de Landau, onde temos a seguinte condição

$$u_\nu T^{\mu\nu} = \epsilon u^\mu, \tag{2.26}$$

que implica em

$$u_\nu[-\Delta^{\mu\nu}(\Pi + P) + \pi^{\mu\nu}] = 0 \quad . \tag{2.27}$$

Como $u_\nu \Delta^{\mu\nu} = 0$, temos que $u_\nu \pi^{\mu\nu} = 0$. Outra característica do tensor $\pi^{\mu\nu}$ é que seu traço é nulo no referencial de repouso do fluido, ou seja, $\pi^\nu{}_\nu = 0$.

Na presença de efeitos dissipativos não temos mais a conservação de entropia como na equação (2.23). Porém, a segunda lei da termodinâmica deve ser respeitada. Fazendo

$u_\mu \partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$, temos

$$(\epsilon + P)\partial_\nu u^\nu + u^\nu \partial_\nu \epsilon + u_\mu \partial_\nu (-\Delta^{\mu\nu}\Pi + \pi^{\mu\nu}) = 0, \tag{2.28}$$

podemos reescrever

$$u_\mu \partial_\nu (-\Delta^{\mu\nu}\Pi + \pi^{\mu\nu}) = \partial_\nu (u_\mu (-\Delta^{\mu\nu}\Pi + \pi^{\mu\nu})) - (-\Delta^{\mu\nu}\Pi + \pi^{\mu\nu})\frac{1}{2}(\partial_\nu u_\mu + \partial_\mu u_\nu). \tag{2.29}$$

Utilizando a propriedade (2.27) e reescrevendo a derivada parcial como $\partial_\mu = u_\mu u^\lambda \partial_\lambda + \Delta_{\mu\lambda}\partial^\lambda$, temos

$$(\epsilon + P)\partial_\nu u^\nu + u^\nu \partial_\nu \epsilon + (-\Delta^{\mu\nu}\Pi + \pi^{\mu\nu})\frac{1}{2}\left[\Delta_{\mu\lambda}\partial^\lambda u_\nu + \Delta_{\nu\lambda}\partial^\lambda u_\mu\right] = 0. \tag{2.30}$$

Partindo da equação (2.30), juntamente com a equação (2.28), as relações termodinâmicas dadas pela equação (2.22) e utilizando a segunda lei da termodinâmica na forma covariante[7]

$$\partial_\nu S^\nu = \partial_\nu (s u^\nu) \geq 0, \tag{2.31}$$

temos

$$\begin{aligned} \partial_\nu S^\nu &= \frac{1}{2T}(-\Delta^{\mu\nu}\Pi + \pi^{\mu\nu})\left[\Delta_{\mu\lambda}\partial^\lambda u_\nu + \Delta_{\nu\lambda}\partial^\lambda u_\mu\right] \geq 0 \\ &= -\frac{1}{T}\Pi \partial_\lambda u^\lambda + \frac{1}{2T}\pi^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} \geq 0, \end{aligned} \tag{2.32}$$

em que

$$\sigma_{\mu\nu} = \left[\Delta_{\mu\lambda}\partial^\lambda u_\nu + \Delta_{\nu\lambda}\partial^\lambda u_\mu\right] - \frac{2}{3}\Delta_{\mu\nu}\partial_\lambda u^\lambda. \tag{2.33}$$

[7] Landau-Lifshitz identificam a 4-corrente de entropia como $S^\nu = s u^\nu - \frac{\mu}{T}V^\nu$, porém, no caso em que $V^\nu = 0$ temos $S^\nu = s u^\nu$.

Para assegurar que a segunda lei da termodinâmica é satisfeita, escolhemos

$$\pi^{\mu\nu} = \eta_{\rm v}\sigma^{\mu\nu} \qquad \text{e} \qquad \Pi = -\zeta_{\rm v}\partial_\lambda u^\lambda, \tag{2.34}$$

em que $\eta_{\rm v}$ e $\zeta_{\rm v}$ são, respectivamente, os coeficientes de viscosidade de cisalhamento e volumétrica e possuem valores sempre maiores ou iguais a zero. Discutiremos sobre estes coeficientes no final deste capítulo.

Substituindo a equação (2.34) na equação (2.32), obtemos

$$\partial_\nu S^\nu = \frac{\pi^{\mu\nu}\pi_{\mu\nu}}{2\eta_{\rm v}T} + \frac{\Pi^2}{\zeta_{\rm v}T} \geq 0. \tag{2.35}$$

Portanto as equações para a viscosidade de cisalhamento e viscosidade volumétrica, denotadas por $\pi^{\mu\nu}_{\rm NS}$ e $\Pi_{\rm NS}$ respectivamente, no formalismo de Navier-Stokes são dadas, explicitamente, da seguinte forma:

$$\pi^{\mu\nu}_{\rm NS} = \eta_{\rm v}\left(\Delta^{\mu\lambda}\partial_{;\lambda}u^\nu + \Delta^{\nu\lambda}\partial_{;\lambda}u^\mu\right) - \frac{2}{3}\eta_{\rm v}\Delta^{\mu\nu}\partial_{;\lambda}u^\lambda \tag{2.36}$$

e

$$\Pi_{\rm NS} = -\zeta_{\rm v}\partial_{;\lambda}u^\lambda. \tag{2.37}$$

Escrevemos em termos das derivadas covariantes para que esta seja aplicável ao sistema de coordenadas de Milne. Substituindo as equações (2.36) e (2.37) no tensor energia-momento (2.24) e posteriormente nas equações de movimento (2.14), obtemos a equação de Navier-Stokes relativística. No entanto, os cálculos neste formalismo implicam em propagações não causais, velocidades maiores que a da luz, e, consequentemente, levam a instabilidades na teoria e desta forma ela não pode ser aplicada [33, 34, 35]. Assim, torna-se necessário uma teoria de segunda ordem estável para podermos utilizar a hidrodinâmica dissipativa.

2.4.2 Teoria de Segunda Ordem

Uma proposta para a solucionar os problemas nas equações de Navier-Stokes foi proposta primeiramente por I. Müller [36], em 1967, e posteriormente por W. Israel e J. M. Stewart [37, 38], nos anos de 1970's, e é conhecida como teoria de segunda ordem. Nesta proposta, eles sugeriram que para um sistema fora do equilíbrio, a 4-corrente de entropia teria contribuições da viscosidade de cisalhamento e da viscosidade volumétrica. Isto é chamado de termodinâmica irreversível extendida [39]. Portando, segundo Müller, Israel e Stewart, a 4-corrente de entropia é definida como[8]

$$S^\nu = su^\nu - \frac{1}{2T}u^\nu\left(\frac{\tau_\Pi}{\zeta_\mathrm{v}}\Pi^2 + \frac{\tau_\pi}{2\eta_\mathrm{v}}\pi_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta}\right), \tag{2.38}$$

em que τ_π e τ_Π são, respectivamente, os tempos de relaxamento relacionados à viscosidade de cisalhamento e à viscosidade volumétrica. Discutiremos sobre esses tempos no final deste capítulo.

Substituindo a equação (2.38) na segunda lei da termodinâmica, dada pela equação (2.31), utilizando a equação (2.32) e identificando as viscosidades no formalismo de Navier-Stokes, equações (2.36) e (2.37), temos

$$\begin{aligned}
\partial_\nu S^\nu &= \partial_\nu(su^\nu) - \frac{1}{2}\partial_\nu\left[\frac{u^\nu}{T}\left(\frac{\tau_\Pi}{\zeta_\mathrm{v}}\Pi^2 + \frac{\tau_\pi}{2\eta_\mathrm{v}}\pi_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta}\right)\right] \geq 0 \\
T\partial_\nu S^\nu &= -\Pi\partial_\lambda u^\lambda + \frac{1}{2}\pi^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} - \frac{T}{2}\partial_\nu\left[\frac{u^\nu}{T}\left(\frac{\tau_\Pi}{\zeta_\mathrm{v}}\Pi^2 + \frac{\tau_\pi}{2\eta_\mathrm{v}}\pi_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta}\right)\right] \geq 0 \\
\partial_\nu S^\nu &= \frac{\Pi}{\zeta_\mathrm{v}T}\left[\Pi_\mathrm{NS} - \tau_\Pi u^\nu\partial_\nu\Pi - \frac{T}{2}\Pi\partial_\nu\left(\frac{u^\nu}{T}\tau_\Pi\right)\right] + \\
&+ \frac{\pi^{\alpha\beta}}{2\eta_\mathrm{v}T}\left[\pi_{(\mathrm{NS})\alpha\beta} - \tau_\pi u^\nu\partial_\nu\pi_{\alpha\beta} - \frac{T}{2}\pi_{\alpha\beta}\partial_\nu\left(\frac{u^\nu}{T}\tau_\pi\right)\right] \geq 0,
\end{aligned} \tag{2.39}$$

[8] No caso original, em que temos difusividade de carga V^ν, a corrente de entropia é definida como $S^\nu = su^\nu - \frac{\mu}{T}V^\nu - \frac{1}{2}u^\nu\left(\frac{\tau_\Pi}{\zeta_\mathrm{v}}\Pi^2 + \frac{\tau_\pi}{2\eta_\mathrm{v}}\pi_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta} + \frac{\tau_\xi}{\xi T}V^\alpha V_\alpha\right)$, em que ξ é o coeficiente de difusividade de carga e τ_ξ o tempo de relaxamento relacionado a difusividade de carga. Mais informações em [40].

Considerando que a equação (2.35) deve ser satisfeita, temos

$$\pi^{\alpha\beta} = \pi^{\alpha\beta}_{\rm NS} - \tau_\pi u^\nu \partial_\nu \pi^{\alpha\beta} - \frac{T}{2}\pi^{\alpha\beta}\partial_\nu\left(\frac{u^\nu}{T}\tau_\pi\right) \tag{2.40}$$

e

$$\Pi = \Pi_{\rm NS} - \tau_\Pi u^\nu \partial_\nu \Pi - \frac{T}{2}\Pi\partial_\nu\left(\frac{u^\nu}{T}\tau_\Pi\right). \tag{2.41}$$

Estas equações são conhecidas como as equações de Israel-Stewart. É possível escrevê-las de uma forma mais simples utilizando a simetria conforme[9]. Comparando as equações nos dois formalismos, temos

$$\frac{T}{2}\pi^{\alpha\beta}\partial_\nu\left(\frac{u^\nu}{T}\tau_\pi\right) = \frac{4}{3}\tau_\pi\pi^{\alpha\beta}\partial_\gamma u^\gamma, \tag{2.42}$$

$$\frac{T}{2}\Pi\partial_\nu\left(\frac{u^\nu}{T}\tau_\Pi\right) = \frac{4}{3}\tau_\Pi\Pi\partial_\gamma u^\gamma. \tag{2.43}$$

Utilizando as equações (2.42), podemos reescrever as equações de Israel-Stewart da seguinte forma:

$$u^\gamma\partial_{;\gamma}\pi^{\alpha\beta} = -\frac{1}{\tau_\pi}\left[\pi^{\alpha\beta} - \pi^{\alpha\beta}_{\rm NS}\right] - \frac{4}{3}\pi^{\alpha\beta}\partial_{;\gamma}u^\gamma \tag{2.44}$$

e

$$u^\gamma\partial_{;\gamma}\Pi = -\frac{1}{\tau_\Pi}\left[\Pi - \Pi_{\rm NS}\right] - \frac{4}{3}\Pi\partial_{;\gamma}u^\gamma. \tag{2.45}$$

De forma análoga ao que foi feito em Navier-Stokes, escrevemos em termos das derivadas covariantes para que as equações de Israel-Stewart possam ser aplicadas nas coordenadas de Milne. Com as equações (2.44) e (2.45), a causalidade é reestabelecida e o modelo hidrodinâmico volta a ser estável, podendo ser aplicado [34].

[9] A simetria conforme é uma simetria que possui invariância de escala. Não é o foco deste trabalho obter as equações de Israel-Stewart no formalismo da simetria conforme. Para mais informações sobre estes cálculos neste formalismo ver [24, 25, 41].

2.4.3 Coeficientes Viscosos e Tempos de Relaxamento

Os valores dos coeficientes de viscosidade, η_v e ζ_v, presentes nas equações de Israel-Stewart são alvos de intensa pesquisa na área da física teórica. Estes coeficientes entram como parâmetros no modelo hidrodinâmico[10]. Cálculos realizados utilizando a correspondência AdS/CFT[11] [42] demonstraram que o valor mínimo para a fração entre η_v e a densidade de entropia é

$$\frac{\eta_v}{s} = \frac{1}{4\pi} \approx 0.08. \tag{2.46}$$

Com este resultado o QGP é considerado um fluido de baixa viscosidade. São considerados fluidos ideais aqueles em que η_v/s e ζ_v/s são menores que 10^{-4}. Na figura 2.2, apresentamos a comparação da fração η_v/s para diversos fluidos: água, hélio, gás de Fermi ultrafrio (*ultra-cold Fermi gas*) e o QGP. O limite inferior (linha tracejada preta) é a quantidade calculada pela correpondência AdS/CFT, equação (2.46). O quadrado cheio representa o valor usado em modelo hidrodinâmico que melhor reproduz os dados experimentais e os quadrados vazios são cálculos realizados na QCD na rede. As linhas tracejadas em azul e verde são curvas teóricas para tentar descrever a evolução da viscosidade com a temperatura. Na figura é possível ver um comportamento similiar entre o QGP e o gás de Fermi ultrafrio, mesmo diferindo nas ordens de grandeza. De acordo com a figura, o QGP é o fluido com menor viscosidade que existe. Neste trabalho vamos considerar, por simplicidade, que η_v/s é constante em toda a evolução hidrodinâmica e utilizaremos os valores: 0.08 e 0.16.

Para a fração entre coeficiente de viscosidade volumétrica e densidade de entropia, ζ_v/s, trabalhos mostram, seja com cálculos realizados utilizando o modelo hidrodinâmico

[10] Na realidade, informamos ao modelo as frações η_v/s e ζ_v/s devido a inicialização das componentes viscosas. Discutiremos isto na seção 3.1.5 do capítulo 3.

[11] A correspondência AdS/CFT estabelece uma relação entre a teoria de gauge supersimétrica em quatro dimensões (CFT - Teoria de Campo Conforme) e a teoria gravitacional em um espaço anti-de Sitter (AdS) de cinco dimensões. Mais informações em [42].

comparado com os dados experimentais [26, 43], quanto pelos resultados da QCD na rede [44], que este coeficiente é desprezível para uma temperatura maior que a temperatura de transição de fase. Assim, podemos dizer que a viscosidade volumétrica é nula na fase de QGP. Como para a viscosidade de cisalhamento, neste trabalho iremos considerar ζ_v/s constante e não nulo somente na fase hadrônica da matéria; utilizaremos os valores: 0.04 e 0.08.

Outras quantidades necessárias nas equações de Israel-Stewart são os tempos de relaxamento, que também podem ser obtidos através da correpondência AdS/CFT [45]. No presente trabalho, utilizaremos a escolha dada por[12] [26]:

$$\tau_\pi = \tau_\Pi = \frac{3\eta_v}{Ts}. \tag{2.47}$$

Se $\tau_\pi, \tau_\Pi \longrightarrow 0$, temos novamente o formalismo de Navier-Stokes. Desta forma, temos a descrição completa da hidrodinâmica relativística. Uma vez descrito o modelo hidrodinâmico, ainda nos resta discutir alguns ingredientes necessários para a descrição completa das colisões de íons pesados. Estes ingredientes serão apresentados nos capítulos 3 e 4.

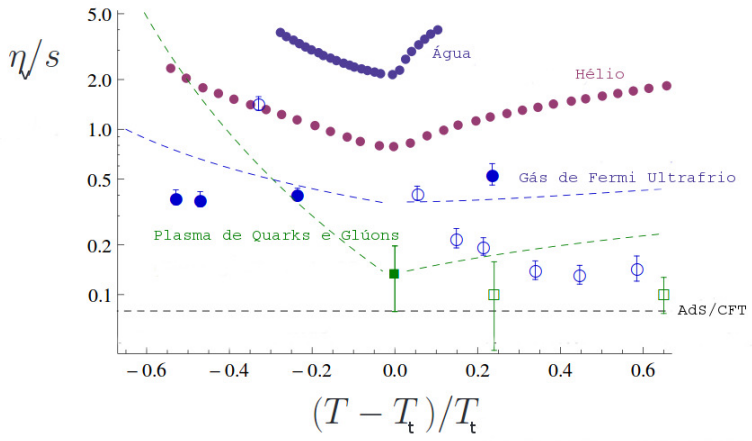


Figura 2.2: Razão entre o coeficiente da viscosidade de cisalhamento e densidade de entropia em função de $(T - T_t)/T_t$ para diversos fluidos, em que T_t é a temperatura de transição de fase do fluido. Extraído e adaptado da referência [46].

[12] Para os cálculos em que consideramos somente a viscosidade volumétrica, utilizamos $\tau_\Pi = \frac{6\zeta_v}{Ts}$.

Capítulo 3

Condições Iniciais e Mecanismo de Desacoplamento

O modelo hidrodinâmico sozinho não é capaz de descrever completamente as colisões de íons pesados. Necessitamos de certos ingredientes como, por exemplo, as condições iniciais, que dão informações sobre o estado da matéria formada nas colisões no instante em que ela entra em equilíbrio térmico. Devemos ser capazes também de descrever o estágio final da colisão, ou seja, o que acontece com os hádrons depois do término da evolução hidrodinâmica. Além disso, devemos fornecer uma equação de estado que relacione as quantidades termodinâmicas e descreva a transição de fase entre o QGP e a matéria hadrônica.

Neste capítulo, discutiremos as condições iniciais e o mecanismo de desacoplamento. As equações de estado utilizadas neste trabalho serão discutidas no capítulo 4.

3.1 Condições Iniciais

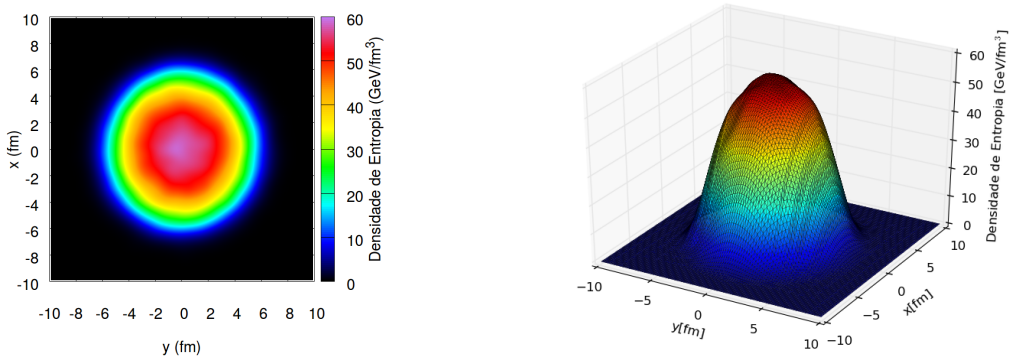
A matéria formada nas colisões não termaliza imediatamente. Ela leva um certo tempo inicial τ_0 para entrar em equilíbrio térmico local. Este tempo inicial (que entra

no modelo como um parâmetro) foi estimado primeiramente por J. D. Bjorken [47] como sendo $\tau_0 \approx 1fm$, e este valor é muitas vezes encontrado na literatura. Alguns autores, no entanto, utilizam valores diferentes para τ_0: P. Bozek [48] e T. Hirano [49] utilizam $\tau_0 = 0.6fm$; Iu. Karpenko [50] utiliza $\tau_0 = 0.4fm$; W. Florkowski [51] utiliza $\tau_0 = 0.25fm$; S. Pratt [52] utiliza $\tau_0 = 0.1fm$ e $\tau_0 = 1fm$. No presente trabalho escolhemos $\tau_0 = 0.6fm$, pois, em testes realizados, este apresenta melhores resultados nos observáveis.

As condições iniciais descrevem o estado inicial do sistema termalizado. Elas podem ser dadas pelo tensor energia-momento no referencial de laboratório ou pela 4-velocidade do fluido e suas distribuições de densidades: densidade de energia, densidade de entropia, entre outras. As condições iniciais utilizadas na abordagem hidrodinâmica podem ser agrupadas em dois tipos: condições suaves e as condições evento a evento.

3.1.1 Condições Iniciais Suaves

As condições iniciais suaves são uma média estatística das quantidades hidrodinâmicas iniciais sobre vários eventos flutuantes. Esse processo elimina eventuais não homogeneidades nas configurações iniciais, que deixam de ser refletidas nos observáveis. Neste caso, é realizada uma média sobre diversos eventos, calcula-se a hidrodinâmica uma única vez e obtem-se os observáveis. Na figura 3.1 temos a representação da densidade de entropia para uma condição suave, em que é feita uma média estatística sobre 1000 eventos gerados pelo T$_{\mathrm{R}}$ENTo [53] para colisões Au+Au com $\sqrt{s_{\mathrm{NN}}} = 200$ GeV e centralidade de $0 - 5\%$.



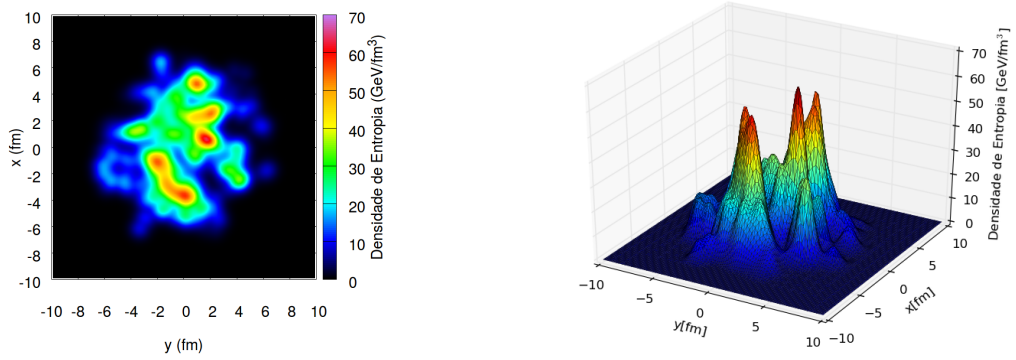
(a) Representação 2D (b) Representação 3D

Figura 3.1: Representação da densidade de entropia no plano transversal (xy) utilizando condições iniciais suaves. Neste caso, temos uma média de 1000 eventos gerados pelo T$_\mathrm{R}$ENTo para colisões Au+Au com $\sqrt{s_{\mathrm{NN}}} = 200$ GeV com centralidade de $0 - 5\%$.

Durante muito tempo, este tipo de condição inicial foi utilizado nos modelos hidrodinâmicos. No entanto, como mostrado em [21, 54], efeitos de flutuações nas condições iniciais são importantes na interpretação dos dados experimentais.

3.1.2 Condições Iniciais Evento a Evento

As condições iniciais evento a evento representam, de uma forma mais realista, o que ocorre experimentalmente nas colisões. Dado que as dimensões do sistema criado nas colisões são muito pequenas, espera-se que ocorram flutuações consideráveis a cada colisão. Neste caso, calcula-se a hidrodinâmica e os observáveis para cada evento e posteriomente é realizada a média estatística sobre estes observáveis. Na figura 3.2 temos a densidade de entropia para um único evento gerado pelo T$_\mathrm{R}$ENTo para uma colisão Au+Au com $\sqrt{s_{\mathrm{NN}}} = 200$ GeV e centralidade de $0 - 5\%$.



(a) Representação 2D (b) Representação 3D

Figura 3.2: Representação da densidade de entropia no plano transversal (xy) utilizando condições iniciais evento a evento. Neste caso, temos um único evento gerado pelo T$_\mathrm{R}$ENTo para colisões Au+Au com $\sqrt{s_{\mathrm{NN}}} = 200$ GeV com centralidade de $0 - 5\%$.

3.1.3 Modelo de Glauber

O modelo de Glauber [55, 56] é um modelo semiclássico desenvolvido para descrever as colisões nucleares de altas energias. Ele se baseia nas interações entre os nucleons participantes que compõem cada núcleo (alvo e projétil), a partir das seguintes hipóteses: (i) a colisão núcleo-núcleo pode ser vista como uma série de colisões binárias entre nucleons; (ii) as colisões entre os nucleons obedecem trajetórias lineares; (iii) os núcleos são tridimensionais, esfericamente simétricos e a densidade de nucleons que os compõem é dada de acordo com o perfil de Woods-Saxon (ver seção B.4 do apêndice B); (iv) os núcleos podem sofrer deformações; (v) as colisões nucleon-nucleon ocorrem somente se a distância entre eles for menor que $\sqrt{\frac{\sigma_{\mathrm{NN}}}{\pi}}$, em que σ_{NN} é a seção de choque nucleon-nucleon. Dadas estas hipóteses, este modelo é capaz de calcular o número de participantes na colisão (N_{part}) e o número de colisões binárias (N_{bin}).

Usualmente, em modelos hidrodinâmicos, é utilizada a abordagem de Glauber Monte-Carlo. Nesta descrição, cada nucleon em cada núcleo é distribuído aleatoriamente,

seguindo a densidade nuclear de participantes dada pelo perfil de Woods-Saxon.

A partir da densidade nuclear de participantes, ρ^{part}, define-se a *função de espessura nuclear*, como [53, 56, 24]

$$T(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} dz \rho^{\text{part}}(x,y,z), \tag{3.1}$$

em que z é o eixo em que ocorre a colisão. A partir da equação (3.1), podemos calcular a densidade numérica de participantes (n_{part}) e a densidade numérica de colisões binárias (n_{bin}) utilizando o *ansatz* de Glauber [57]. Por simplicidade, vamos considerar dois núcleos idênticos de massa atômica $\mathcal{A}$ e parâmetro de impacto[1] b ao longo do eixo x. Temos

$$\begin{aligned} n_{\text{part}}(x,y,b) &= T\left(x+\frac{b}{2},y\right)\left[1-\left(1-\frac{\sigma_{\text{NN}}T\left(x-\frac{b}{2},y\right)}{\mathcal{A}}\right)^{\mathcal{A}}\right] \\ &+ T\left(x-\frac{b}{2},y\right)\left[1-\left(1-\frac{\sigma_{\text{NN}}T\left(x+\frac{b}{2},y\right)}{\mathcal{A}}\right)^{\mathcal{A}}\right] \end{aligned} \tag{3.2}$$

e

$$n_{\text{bin}}(x,y,b) = \sigma_{\text{NN}} T\left(x+\frac{b}{2},y\right) T\left(x-\frac{b}{2},y\right). \tag{3.3}$$

A quantidade σ_{NN} é medida experimentalmente e varia com a energia da colisão, ver tabela 3.1. O número total de participantes pode ser calculado como

$$N_{\text{part}}(b) = \int dx dy n_{\text{part}}(x,y,b). \tag{3.4}$$

A partir desta quantidade é possível caracterizar a centralidade da colisão.

[1] O parâmetro de impacto é a distância de separação entre o centro dos núcleos, ver seção B.1 do apêndice B.

A densidade de entropia inicial pode ser calculada utilizando [24]

$$s(\tau = \tau_0,x,y,b) = \kappa_{\mathrm{G}} n_{\mathrm{bin}}(x,y,b), \tag{3.5}$$

em que κ_{G} é uma constante utilizada para ajustar a multiplicidade de partículas com os dados experimentais. Desta forma, descrevemos o modelo de Glauber. Este modelo é importante na descrição inicial do T$_{\mathrm{R}}$ENTo que será apresentado na próxima subseção e que foi usado para gerar as condições iniciais neste trabalho.

3.1.4 T$_{\mathrm{R}}$ENTo

T$_{\mathrm{R}}$ENTo[2] (*Reduced Thickness Event-by-event Nuclear Topology*) [53] é um gerador de condições iniciais para colisões de altas energias p+p, p+A e A+A. Ele foi construído para reproduzir, com um número mínimo de parâmetros, uma ampla variedade de modelos de condições iniciais existentes.

Este modelo inicia de modo análogo ao modelo Glauber Monte-Carlo, descrito na subseção anterior. Primeiramente, vamos supor um par de projéteis A e B, idênticos ou não, que colidem no eixo z. Cada projétil pode ser representado pela sua função de espessura nuclear definida por (3.1). Denotaremos por T_A e T_B as funções de espessura nuclear dos projéteis A e B, respectivamente. A partir deste pressuposto, defini-se a *função de espessura reduzida* (f), como uma combinação de T_A e T_B, de modo que [53]

$$f(T_A,T_B) = \left(\frac{T_A^p + T_B^p}{2}\right)^{1/p}, \tag{3.6}$$

no qual p é um parâmetro de interpolação entre os diferentes esquemas de deposição de entropia, ou seja, para diferentes valores de p reproduzimos diferentes modelos de condições iniciais.

Para determinar a densidade de entropia, começaremos pelo caso mais simples,

[2]Disponível para download em https://github.com/Duke-QCD/trento.

considerando a colisão de dois prótons A e B com parâmetro de impacto b ao longo da direção x. A densidade nuclear pode ser dada por $\rho_{A,B} = \rho_{proton}(x \pm b/2,y,z)$.

Os participantes são determinados por meio da probabilidade de colisão inelástica entre os nucleons [58, 59]:

$$P_{\mathrm{col}}(b) = 1 - \exp\left[-\sigma_{\mathrm{gg}} T_{\mathrm{pp}}(b)\right], \tag{3.7}$$

em que

$$T_{\mathrm{pp}}(b) = \int dxdy T_{\mathrm{p}}(x + b/2,y) T_{\mathrm{p}}(x - b/2,y). \tag{3.8}$$

T_{p} é a *função de espessura nucleônica* e σ_{gg} é a seção de choque partônica efetiva, fixada de modo a reproduzir a seção de choque inelástica nucleon-nucleon

$$\sigma_{\mathrm{NN}} = \int 2\pi b db P_{\mathrm{col}}(b). \tag{3.9}$$

Esta varia de acordo com a energia da colisão, como mostrado na tabela 3.1.

Tabela 3.1: Resultados experimentais das seções de choque nucleon-nucleon [58, 60, 61]

$\sqrt{s_{\mathrm{NN}}}[GeV]$	$\sigma_{NN}[fm^2]$
19.6	3.25
62.4	3.6
130	4.0
200	4.2
2760	6.4
5020	7.0
7000	7.32

Para a função de espessura nucleônica, T_{p}, utiliza-se a função gaussiana

$$T_p(x,y) = \frac{1}{2\pi\lambda^2} \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{2\lambda^2}\right], \tag{3.10}$$

em que λ é a um fator ajustável de acordo com a largura do nucleon.

Como os núcleos são compostos de nucleons, e nas colisões estamos interessados somente nos nucleons participantes, é possível definir, para colisões p+A ou A+A, a *função de espessura de participantes*, $\tilde{T}$, como a soma das funções de espessura nucleônicas

$$\tilde{T}(x,y) = \sum_{i=1}^{N_{part}} w_i T_p(x - x_i, y - y_i), \tag{3.11}$$

que difere da função de espessura nuclear (equação 3.1), pois inclui somente os participantes e pesos w_i, escolhidos aleatoriamente de uma distribuição gama, dada por [53, 62, 63]

$$P_k(w_i) = \frac{k^k}{\Gamma(k)} w_i^{k-1} e^{-k w_i}. \tag{3.12}$$

Esses pesos introduzem flutuações adicionais no cálculo da multiplicidade de partículas e são necessários para reproduzir as grandes flutuações observadas em colisões p+p. O parâmetro k, em (3.12), é ajustado para reproduzir os dados experimentais. Para valores pequenos de k ($0 < k < 1$) temos flutuações consideráveis na multiplicidade, enquanto para valores grandes de k ($k \gg 1$) temos uma supressão das flutuações e para $k = 1$, temos uma distribuição exponencial.

A densidade de entropia no T$_\mathrm{R}$ENTo é proporcional à função de espessura reduzida, f, que agora depende da função de espessura de participantes, $\tilde{T}_{A,B}(x,y)$, calculada no tempo inicial $\tau = \tau_0$ e em rapidez espacial igual a zero ($\eta_s = 0$). Portanto,

$$s(\tau_0,x,y)|_{\eta_s=0} \propto f(\tilde{T}_A,\tilde{T}_B). \tag{3.13}$$

Considerando um fator constante de normalização, κ_T, e a equação (3.6), escrevemos

a equação (3.13) como

$$s(\tau_0,x,y)|_{\eta_s=0} = \kappa_{\mathrm{T}} \left(\frac{\tilde{T}_A^p + \tilde{T}_B^p}{2} \right)^{1/p} . \tag{3.14}$$

Para diferentes valores de p, temos diferentes tipos de densidade de entropia:

$$s(\tau_0,x,y)|_{\eta_s=0} = \kappa_{\mathrm{T}} \times \begin{cases} \max(\tilde{T}_A,\tilde{T}_B) & p \to +\infty \\ (\tilde{T}_A + \tilde{T}_B)/2 & p = +1 \quad \text{(aritmética)} \\ \sqrt{\tilde{T}_A \tilde{T}_B} & p = 0 \quad \text{(geométrica)} \\ 2\tilde{T}_A\tilde{T}_B/(\tilde{T}_A + \tilde{T}_B) & p = -1 \quad \text{(harmônica)} \\ \min(\tilde{T}_A,\tilde{T}_B) & p \to -\infty \end{cases} . \tag{3.15}$$

Desta forma, obtemos a densidade de entropia que pode ser utilizada em modelos hidrodinâmicos. Quando comparado aos dados experimentais, o T$_{\mathrm{R}}$ENTo, como gerador de condições iniciais para o modelo hidrodinâmico, tem obtido bons resultados. Na figura 3.3, temos resultados de simulações hidrodinâmicas realizadas em [58], utilizando o T$_{\mathrm{R}}$ENTo, comparado aos dados experimentais para colisões Au+Au, Pb+Pb e p+Pb, em várias energias. Vemos uma boa concordância entre as simulações numéricas e os dados experimentais.

O modelo T$_{\mathrm{R}}$ENTo também é adequado para tratar colisões ultracentrais de núcleos deformados como, por exemplo, colisões Urânio-Urânio (U+U) realizadas no RHIC. O modelo de Glauber não consegue reproduzir muito bem este tipo de colisão, enquanto T$_{\mathrm{R}}$ENTo tem obtido bons resultados. Na figura 3.4, temos o harmônico excêntrico ε_2 (ver seção B.2 do apêndice B) em função da multiplicidade de partículas normalizada $N_{ch}/\langle N_{ch} \rangle$ para colisões Au+Au e U+U em duas janelas de centralidade. Percebemos que para colisões Au+Au ambos os modelos, T$_{\mathrm{R}}$ENTo e Glauber, geram bons resultados quando comparados aos dados experimentais (círculos azuis). Porém, nas colisões U+U,

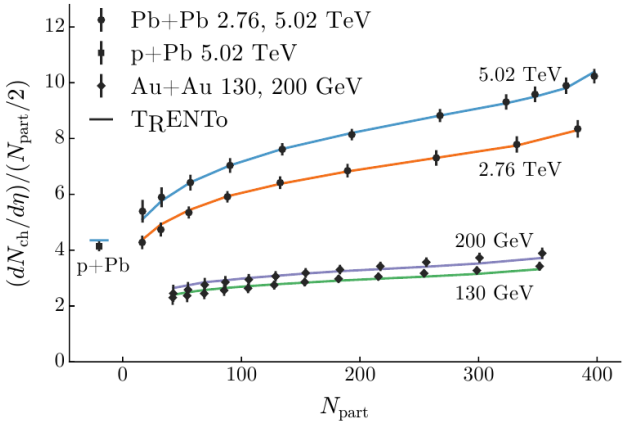


Figura 3.3: Densidade média de partículas carregadas por par de participantes $(dN_{ch}/d\eta)/(N_{part}/2)$ com rapidez média em função da número de participantes N_{part} para colisões Au+Au com $\sqrt{s_{\rm NN}}$ de 130 e 200 GeV, Pb+Pb com $\sqrt{s_{\rm NN}}$ de 2.76 e 5.02TeV e p+Pb com $\sqrt{s_{\rm NN}}$ de 5.02 TeV. As linhas são os respectivos cálculos hidrodinâmicos utilizando T$_{\rm R}$ENTo. Extraído da referência [58].

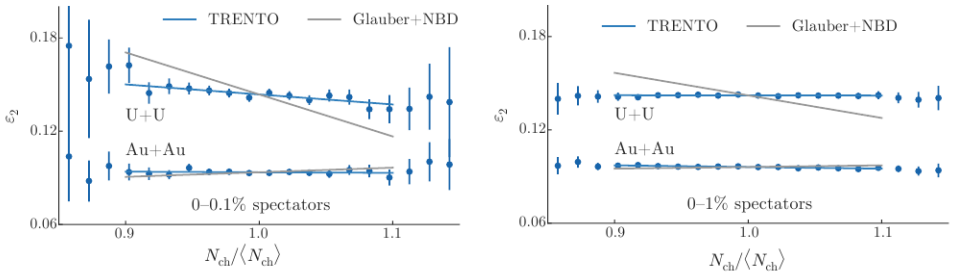
vemos uma discrepância grande entre o modelo de Glauber e os dados experimentais, enquanto o T$_{\rm R}$ENTo reproduz bem os dados.

Os parâmetros de entrada do T$_{\rm R}$ENTo são: k, λ, p, $\kappa_{\rm T}$, os parâmetros de impacto máximo ($b_{\rm max}$) e mínimo ($b_{\rm min}$)[3] e $\sigma_{\rm NN}$ (que é dado de acordo com a tabela 3.1). Em [58] foram realizadas inúmeras simulações numéricas para diferentes energias de colisão e os melhores resultados foram obtidos com $k = 1.6, \lambda = 0.4$ e $p = 0$. Este são os valores utilizados nesta dissertação. O parâmetro $\kappa_{\rm T}$ é escolhido para reproduzir a multiplicidade de partículas, usando para isto a distribuição em pseudorrapidez[4].

3.1.5 Inicialização da Viscosidade

Na hidrodinâmica dissipativa é necessário descrever a forma como as componentes viscosas são inicializadas no instante da termalização do sistema. Exitem duas maneiras de fazer isso: i) considerando que no instante inicial a viscosidade seja nula, ou seja, $\pi_{\rm NS}(\tau_0) = \Pi_{\rm NS}(\tau_0) = 0$; ii) considerando que as componentes viscosas são calculadas

[3] $b_{\rm max}$ e $b_{\rm min}$ são dados de acordo com a centralidade da colisão, ver seção B.1 do apêndice B.
[4] Este tópico será discutido com mais detalhes no capítulo 5.



(a) $0-0.1\%$ de espectadores (b) $0-1\%$ de espectadores

Figura 3.4: Harmônico excêntrico ε_2 em função da multiplicidade de partículas normalizada $N_{ch}/\langle N_{ch}\rangle$ para colisões Au+Au e U+U em duas centralidades diferentes. Comparação dos modelos T$_{\mathrm{R}}$ENTo e Glauber com os dados experimentais da colaboração STAR do RHIC. Extraído da referência [53].

no formalismo de Navier-Stokes através do uso das condições iniciais. Em [25, 64], simulações mostraram que ambas as inicializações obtiveram resultados semelhantes na descrição dos observáveis.

No presente trabalho, utilizaremos as equações derivadas do formalismo de Navier-Stokes nas coordenadas de Milne. Para isto, partimos das equações (2.36) e (2.37), assumindo que inicialmente o sistema possua invariância por boost ($y_{\mathrm{L}} = \eta_{\mathrm{s}}$) e que a velocidade transversal é nula ($v_{\mathrm{T}} = 0$). Isto implica em uma rapidez transversal nula ($y_{\mathrm{T}} = 0$) e como $y_{\mathrm{L}} = \eta_{\mathrm{s}}$, temos que $u_{\eta_s} = 0$. Portanto a 4-velocidade do fluido neste sistema é dada por $u^{\mu} = (1,0,0,0)$. Partindo destas hipóteses, obtemos

$$\pi^{xx}_{\mathrm{NS}}(\tau_0,x,y) = \pi^{yy}_{\mathrm{NS}}(\tau_0,x,y) = -\frac{\tau_0^2}{2}\pi^{\eta_s\eta_s}_{\mathrm{NS}}(\tau_0,x,y) = \frac{2\left(\frac{\eta_{\mathrm{v}}}{s}\right)}{3\tau_0}s(\tau_0,x,y) \tag{3.16}$$

e

$$\Pi_{\mathrm{NS}}(\tau_0,x,y) = -\frac{\left(\frac{\zeta_{\mathrm{v}}}{s}\right)}{\tau_0}s(\tau_0,x,y). \tag{3.17}$$

Todas as outras componentes da viscosidade de cisalhamento são nulas. Os cálculos

explícitos para obter as equações (3.16) e (3.17) estão presentes no apêndice C.

As equações (3.16) e (3.17) representam a inicialização da viscosidade que geralmente é implementada em códigos hidrodinâmicos, incluindo o vHLLE. Estas equações são válidas somente no instante τ_0; logo após, a evolução do fluido é regida pelas equações de Israel-Stewart.

3.2 Mecanismo de Desacoplamento

Outro ingrediente necessário para o uso da hidrodinâmica nas colisões é a descrição do estágio final da colisão. Adotaremos o mecanismo de *freeze-out*, que é bastante utilizado por sua simplicidade. O freeze-out, aqui estamos nos referindo ao freeze-out térmico, é o estágio da evolução hidrodinâmica em que o sistema deixa de ter comportamento coletivo (ou seja, os hádrons que compõe o sistema deixam de interagir) e se desacopla em hádrons livres.

Geralmente define-se uma hipersuperfície de freeze-out, denotada por Σ, como a interface entre a região descrita pelo modelo hidrodinâmico e a região onde as partículas encontram-se livres. Podemos dizer que no momento em que as partículas ultrapassam a hipersuperfície Σ, elas se desacoplam.

3.2.1 Cooper-Frye

Nos anos de 1970, F. Cooper e G. Frye [65, 66] propuseram uma aproximação para descrever o desacoplamento das partículas baseado nas seguintes hipóteses:

- A espessura da hipersuperfície Σ é infinitesimal.
- O desacoplamento das partículas ao passarem pela superfície é instantâneo.
- Não ocorrem interações entre as partículas após o desacoplamento.

Também é necessário um critério para que seja definida a hipersuperfície de desacoplamento. Como o fluido criado nas colisões está se expandindo e se esfriando, normalmente utiliza-se uma temperatura crítica constante, chamada de temperatura de freeze-out[5], denotada por T_{fo}. Assim, dizemos que o sistema se desacopla quando atinge a temperatura T_{fo}. A partir destas hipóteses, podemos calcular o espectro de partículas. O número total de partículas atravessando um pequeno elemento de superfície $d\Sigma$ é dado por

$$N = \int_{\Sigma} d\Sigma_{\mu} j^{\mu}, \tag{3.18}$$

em que a integral é feita sobre toda a hipersuperfície Σ. A 4-corrente de partículas, j^{μ}, na teoria cinética é definida como [22]

$$j^{\mu} = \int \frac{d^3\vec{p}}{E} p^{\mu} f(x,p), \tag{3.19}$$

em que p^{μ}, E e $f(x,p)$ são, respectivamente, o 4-momento, a energia da partícula e a função de distribuição. Substituindo, a equação (3.19) em (3.18), obtemos

$$N = \int \int_{\Sigma} \frac{d^3\vec{p}}{E} d\Sigma_{\mu} p^{\mu} f(x,p). \tag{3.20}$$

Reescrevendo a equação (3.20) de modo a obter a distribuição invariante de momento em toda a hipersuperfície Σ, temos

$$E\frac{d^3N}{d^3\vec{p}} = \int_{\Sigma} d\Sigma_{\mu} p^{\mu} f(x,p). \tag{3.21}$$

Esta equação é conhecida como a fórmula de Cooper-Frye. Podemos ainda reescrever o termo $d^3\vec{p}$ como $E dy d\phi_{\mathrm{p}} p_{\mathrm{T}} dp_{\mathrm{T}}$, em que y é a rapidez da partícula, $p_{\mathrm{T}} = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$ é o

[5] Esta temperatura foi estimada primeiramente por Landau [67], como sendo da ordem da massa do píon.

momento transversal e $\phi_{\rm p} = \arctan(p_y/p_x)$ é o ângulo azimutal do momento.

Esta fórmula só é válida quando $d\Sigma_\mu p^\mu > 0$, ou seja, somente quando as partículas estão sendo emitidas da superfície Σ. O caso $d\Sigma_\mu p^\mu < 0$ representa partículas que estão entrando no fluido. Como após o desacoplamento as partículas deixam de interagir, essas contribuições não são levadas em conta.

3.2.2 THERMINATOR2

O THERMINATOR2[6] (*THERMal heavy IoN generATOR 2*) [68] é um código numérico baseado no método Monte-Carlo para cálculo dos observáveis físicos a partir da superfície de freeze-out, incluindo o cálculo de decaimentos. Ele calcula o número total de partículas emitidas utilizando a equação (3.20), em termos das variáveis $\mathrm{y}, p_{\rm T}$ e $\phi_{\rm p}$, da seguinte forma

$$N = \int d\mathrm{y} p_{\rm T} dp_{\rm T} d\phi_{\rm p} \int_\Sigma d\Sigma_\mu p^\mu f(x,p). \tag{3.22}$$

Para usar o THERMINATOR2 precisamos parametrizar a superfície de freeze-out da seguinte forma:

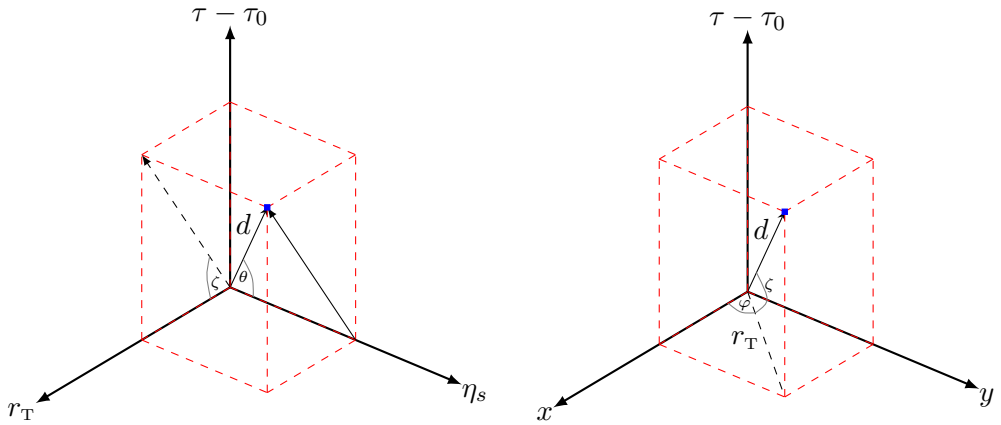
$$\begin{aligned} \tau &= \tau_0 + d(\zeta,\varphi,\theta)\sin\theta\sin\zeta \qquad \eta_s = d(\zeta,\varphi,\theta)\cos\theta \\ x &= d(\zeta,\varphi,\theta)\sin\theta\cos\zeta\cos\varphi \qquad y = d(\zeta,\varphi,\theta)\sin\theta\cos\zeta\sin\varphi, \end{aligned} \tag{3.23}$$

em que τ, x, y, η_s são as coordenadas da hipersuperfície de freeze-out, Σ, calculada no modelo hidrodinâmico, τ_0 é o tempo inicial, $d(\zeta,\varphi,\theta)$ é a distância da origem até um certo ponto de hipersuperfície Σ. Se $d(\zeta,\varphi,\theta)$ independe do ângulo φ, a superfície de freeze-out possui simetria cilíndrica; se $d(\zeta,\varphi,\theta)$ independe do ângulo θ, Σ possui invariância por boost.

Na figura 3.5, temos uma ilustração do sistema de coordenadas utilizado pelo THER-

[6] Disponível para download em http://therminator2.ifj.edu.pl/index.html.

MINATOR2 para parametrização da hipersuperfície de freeze-out. O ponto azul no gráfico, é um ponto sobre Σ. Na figura 3.5a, escolhemos um ângulo $\varphi = \pi$ fixo e representamos o sistema de coordenadas no plano $(r_{\mathrm{T}}\eta_{\mathrm{s}})$, sendo r_{T} o raio transversal, $r_{\mathrm{T}} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Na figura 3.5b, fixamos o ângulo $\theta = \pi/2$ e representamos o sistema de coordenadas no plano transversal (xy).



(a) ϕ fixo (b) θ fixo

Figura 3.5: Ilustração do sistema de coordenadas utilizado pelo THERMINATOR2. Na figura 3.5a fixamos o ângulo $\varphi = \pi$. Na figura 3.5b fixamos o ângulo $\theta = \pi/2$.

Nessas novas coordenadas, podemos calcular $d\Sigma_\mu$ da seguinte forma [69]

$$d\Sigma_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{\partial x^\mu}{\partial\theta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial\zeta} \frac{\partial x^\beta}{\partial\varphi} d\theta d\zeta d\varphi, \tag{3.24}$$

em que $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ é o tensor de Levi-Civita (ver seção B.3 do apêndice B) em quatro dimensões para $\mu,\nu,\alpha,\beta = 0,...,3$. Calculando as componentes de $d\Sigma_\mu = (d\Sigma_0,d\Sigma_1,d\Sigma_2,d\Sigma_3)$, temos

$$\begin{aligned} d\Sigma^0 &= d\Sigma_0 = \varepsilon_{0ijk} \frac{\partial x^i}{\partial\theta} \frac{\partial x^j}{\partial\zeta} \frac{\partial x^k}{\partial\varphi} d\theta d\zeta d\varphi \\ &= d^2\tau \sin\theta \cos\zeta \left\{ \left[d\sin\theta - \frac{\partial d}{\partial\theta}\cos\theta \right] \sin\theta \sin\zeta - \frac{\partial d}{\partial\zeta}\cos\zeta \right\} d\theta d\zeta d\varphi \end{aligned} \tag{3.25}$$

$$
\begin{aligned}
d\Sigma^1 &= -d\Sigma_1 = -\varepsilon_{1\nu\alpha\beta}\frac{\partial x^\nu}{\partial\theta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial\zeta}\frac{\partial x^\beta}{\partial\varphi}d\theta d\zeta d\varphi \\
&= d^2\tau\sin\theta\left[d\cos^2\zeta\sin^2\theta\cos\varphi + \frac{\partial d}{\partial\varphi}\sin\varphi + \cos\zeta\cos\varphi\right. \\
&\times \left.\left(\frac{\partial d}{\partial\zeta}\sin\zeta - \frac{\partial d}{\partial\theta}\cos\theta\sin\theta\cos\zeta\right)\right]d\theta d\zeta d\varphi \qquad (3.26) \\
d\Sigma^2 &= -d\Sigma_2 = -\varepsilon_{2\nu\alpha\beta}\frac{\partial x^\nu}{\partial\theta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial\zeta}\frac{\partial x^\beta}{\partial\varphi}d\theta d\zeta d\varphi \\
&= d^2\tau\sin\theta\left[d\cos^2\zeta\sin^2\theta\sin\varphi - \frac{\partial d}{\partial\varphi}\cos\varphi + \cos\zeta\sin\varphi\right. \\
&\times \left.\left(\frac{\partial d}{\partial\zeta}\sin\zeta - \frac{\partial d}{\partial\theta}\cos\theta\sin\theta\cos\zeta\right)\right]d\theta d\zeta d\varphi \qquad (3.27) \\
d\Sigma^3 &= -d\Sigma_3 = -\varepsilon_{3\nu\alpha\beta}\frac{\partial x^\nu}{\partial\theta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial\zeta}\frac{\partial x^\beta}{\partial\varphi}d\theta d\zeta d\varphi \\
&= d^2\tau\sin^2\theta\cos\zeta\left(d\cos\theta + \sin\theta\frac{\partial d}{\partial\theta}\right)d\theta d\zeta d\varphi. \qquad (3.28)
\end{aligned}
$$

Utilizando a relação $p^\mu = mu^\mu$ e a 4-velocidade dada pela equação (2.10), obtemos o 4-momento nas coordenadas de Milne

$$
p^\mu = \left(m_{\mathrm{T}}\cosh(\mathsf{y}-\eta_s), p_{\mathrm{T}}\cos\phi_{\mathrm{p}}, p_{\mathrm{T}}\sin\phi_{\mathrm{p}}, \frac{m_{\mathrm{T}}}{\tau}\sinh(\mathsf{y}-\eta_s)\right). \qquad (3.29)
$$

Utilizando as equações (3.25), (3.26), (3.27), (3.28), (3.29) e considerando invariância por boost, temos

$$
\begin{aligned}
d\Sigma_\mu p^\mu = d^2\tau\left\{\frac{\partial d}{\partial\zeta}\cos\zeta\left[-m_{\mathrm{T}}\cos\zeta\cosh(\mathsf{y}-\eta_s) + p_{\mathrm{T}}\sin\zeta\cos(\varphi-\phi_{\mathrm{p}})\right]\right. \\
\left. + d\cos\zeta[m_{\mathrm{T}}\sin\zeta\cosh(\mathsf{y}-\eta_s) + p_{\mathrm{T}}\cos\zeta\cos(\varphi-\phi_{\mathrm{p}})] + \frac{\partial d}{\partial\phi}p_{\mathrm{T}}\sin(\varphi-\phi_{\mathrm{p}})\right\}. \qquad (3.30)
\end{aligned}
$$

Substituindo a equação (3.30) na equação (3.22) e dada a função de distribuição, que discutiremos na próxima seção, o THERMINATOR2 calcula numericamente o número de partículas e, a partir disto, obtém-se os observáveis.

3.2.3 Funções de Distribuição

A emissão de partículas é calculada por meio da prescrição de Cooper-Frye (equação 3.21). Porém, no caso em que consideramos os efeitos dissipativos também necessitamos de correções viscosas no modelo de freeze-out. Estas correções são incluídas na função de distribuição. No caso geral, podemos escrever a função de distribuição como uma soma da função de distribuição no equilíbrio (fluido ideal) e as funções de distribuição fora do equilíbrio (fluido viscoso), da seguinte forma:

$$f(x,p) = f_0(x,p) + \delta f_\pi(x,p) + \delta f_\Pi(x,p), \tag{3.31}$$

em que $f_0(x,p)$ é a função de distribuição de equilíbrio, $\delta f_\pi(x,p)$ é a função de distribuição relacionada à viscosidade de cisalhamento e $\delta f_\Pi(x,p)$ é a função de distribuição relacionada à viscosidade volumétrica. No caso de fluidos ideais, temos que $\delta f_\pi(x,p) = \delta f_\Pi(x,p) = 0$.

A função de distribuição de equilíbrio, é dada por

$$f_0(x,p) = \frac{g}{(2\pi)^3} \frac{1}{\exp\left[\frac{p_\mu u^\mu - \mu}{T_{fo}}\right] \pm 1}, \tag{3.32}$$

em que $+(-)$ se refere a férmions (bósons), g é a degenerescência, T_{fo} é a temperatura de freeze-out, p^μ é o 4-momento da partícula, u^μ é o 4-velocidade do fluido e μ é o potencial químico. Como, neste trabalho, estamos considerando somente equações de estado com densidade bariônica nula, discutiremos isto no capítulo 4, temos que $\mu = 0$. A quantidade $p_\mu u^\mu$ pode ser calculada, na condição de invariância por boost, utilizando as equações (2.11) e (3.29), da seguinte forma

$$p_\mu u^\mu = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{\mathrm{T}}^2}} (m_{\mathrm{T}} \cosh(\mathsf{y} - \eta_{\mathrm{s}}) - v_{\mathrm{T}} p_{\mathrm{T}} \cos(\varphi - \phi_{\mathrm{p}})). \tag{3.33}$$

A função de distribuição da viscosidade de cisalhamento, $\delta f_\pi(x,p)$, usualmente é

definida como sendo quadrática no momento [70, 71, 72], de modo que

$$\delta f_{\pi}(x,p) = f_0(x,p)\left[1 \pm f_0(x,p)\right] \frac{1}{2T_{fo}^2(\epsilon + P)} p^{\mu} p^{\nu} \pi_{\mu\nu}, \tag{3.34}$$

em que ϵ é a densidade de energia, P a pressão e $\pi_{\mu\nu}$ o tensor viscosidade de cisalhamento.

Para a função de distribuição da viscosidade volumétrica não há um consenso comum, como acontece para a viscosidade de cisalhamento. No presente trabalho, utilizaremos a correção baseada no tempo de relaxamento [73, 74, 75, 76]. Neste caso, assume-se que $\delta f_{\Pi}(x,p)$ é assintoticamente linear com base na aproximação do tempo de relaxamento. Assim, a função de distribuição da viscosidade volumétrica é definida da seguinte forma [76, 77]:

$$\delta f_{\Pi}(x,p) = \frac{1}{C} f_0(x,p)\left[1 \pm f_0(x,p)\right] \left(\frac{(u^{\mu} p_{\mu})^2}{3 u^{\mu} p_{\mu}} - c_s^2 u^{\mu} p_{\mu} \right) \Pi, \tag{3.35}$$

em que, c_s é a velocidade do som, Π a viscosidade volumétrica e C é dada por:

$$C = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{h} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{E} f_0(x,p)\left[1 \pm f_0(x,p)\right] \left(\frac{p^2}{3E} - c_s^2 E \right), \tag{3.36}$$

onde a soma é feita sobre todos os hádrons, E e m são, respectivamente, a energia e massa de cada partícula. As funções (3.34) e (3.35) foram implementadas no THERMINATOR2[7].

Definidos a condição inicial e o mecanismo de desacoplamento, resta somente um ingrediente para que possamos descrever completamente as colisões. Este ingrediente é a equação de estado, que será discutida no próximo capítulo.

[7] Agradecemos ao Dr. Piotr Bozek, pela ajuda na implementação das correções viscosas no THERMINATOR2.

Capítulo 4

Equação de Estado

Nos capítulos anteriores, descrevemos o modelo hidrodinâmico e alguns dos ingredientes necessários para sua utilização na evolução espaço-temporal de uma colisão. Neste capítulo, descreveremos a equação de estado (EoS), que relaciona as quantidades termodinâmicas e traz informações sobre a transição de fase da matéria criada nas colisões.

Diversos tipos de equações de estado vêm sendo estudadas e utilizadas no modelo hidrodinâmico, visando obter uma melhor concordância entre as simulações numéricas e os dados experimentais [78]. Inicialmente, acreditava-se que a transição de fase entre o plasma de quarks e glúons (QGP) e o gás de hádrons (HG) seria de primeira ordem, ou seja, existiria uma fase em que teríamos simultaneamente QGP e HG [79]. Posteriormente, resultados baseados na QCD na rede mostraram que esta transição de fase seria do tipo *crossover*[1] [80]. Partindo destes resultados da QCD na rede, surgiu a hipótese de que poderia haver um ponto crítico sobre a curva de transição: em altas temperaturas e pequena densidade bariônica, ocorreria uma transição de fase do tipo crossover; em alta densidade bariônica e menores temperaturas uma transição de primeira ordem [21, 78, 81].

[1] *Crossover* é uma transição suave com características de transição de segunda ordem.

No presente trabalho, estamos interessados em colisões nas energias do RHIC e LHC. Como representado na figura 1.2, a matéria formada nessas colisões possui pequena densidade bariônica. Assim, por simplicidade, iremos considerar equações de estado para um sistema com densidade bariônica nula, neutralidade de carga e neutralidade de estranheza [82]. Neste capítulo, descreveremos em detalhe os dois tipos de equações de estado que serão usadas neste trabalho, a saber:

- transição de fase de primeira ordem entre o QGP e o HG (que denotaremos por FO-EoS).
- baseada na QCD na rede, com uma transição do tipo *crossover* (que denotaremos por lQCD-EoS).

4.1 Equação de Estado com Transição de Fase de Primeira Ordem

A primeira equação de estado que iremos apresentar é a que contém uma transição de fase de primeira ordem. Nesta EoS são consideradas três regiões diferentes na evolução da matéria: a fase inicial em que toda a matéria é formada somente pelo QGP, a fase final em que a matéria é formada somente por um gás de hádrons e a fase intermediária em que encontram-se simultaneamente QGP e HG, chamada de fase mista.

4.1.1 Fase de QGP

Em altas temperaturas as interações entre quarks e glúons são desprezíveis, por causa das propriedades da liberdade assintótica. Assim, podemos tratar a fase de QGP como um gás ideal, em equilíbrio térmico, composto de quarks (u, d, s), antiquarks $(\bar{u}, \bar{d}, \bar{s})$ e glúons livres [83].

Inicialmente calcularemos a contribuição do gás de quarks para a equação de estado. Utilizando a estatística de Fermi-Dirac (ver seção D.1 do apêndice D) podemos escrever a densidade de energia dos quarks da seguinte forma [83]

$$\epsilon_q(T) = \frac{g_q}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{p^3 dp}{1+e^{p/T}}. \tag{4.1}$$

em que g_q é a degenerescência dos quarks, p é o momento e T a temperatura. Podemos resolver a integral em (4.1) utilizando o resultado [22]

$$\int_0^\infty \frac{z^{a-1}dz}{e^z+1} = (1-2^{1-a})\zeta(a)\Gamma(a) \qquad (a>0), \tag{4.2}$$

em que Γ é a função gama de Euler e ζ a função zeta de Riemann. Substituindo (4.2) em (4.1) e usando os valores $\Gamma(4)=6$ e $\zeta(4)=\pi^4/90$ [84], obtemos a densidade de energia dos quarks

$$\epsilon_q(T) \;=\; \frac{7}{8}g_q\frac{\pi^2}{30}T^4. \tag{4.3}$$

A densidade de energia dos antiquarks é calculada de modo análogo a dos quarks, resultando em

$$\epsilon_{\bar{q}}(T) \;=\; \frac{7}{8}g_{\bar{q}}\frac{\pi^2}{30}T^4, \tag{4.4}$$

em que $g_{\bar{q}}$ é a degenerescência dos antiquarks. Somando (4.3) e (4.4) temos a densidade de energia total de um gás composto de quarks e antiquarks, dada por

$$\epsilon_{q\bar{q}}(T) = \frac{7}{8}(g_q+g_{\bar{q}})\frac{\pi^2}{30}T^4. \tag{4.5}$$

Para férmions, a pressão está relacionada com a densidade de energia, no limite ultrarrelativístico, da seguinte forma: $P=\epsilon/3$ (ver seção D.2 do apêndice D). Utilizando

esta relação e a equação (4.5), temos

$$P_{q\bar{q}}(T) = \frac{7}{8}(g_q + g_{\bar{q}})\frac{\pi^2}{90}T^4. \tag{4.6}$$

Uma vez obtida a contribuição do gás de quarks e antiquarks, ainda nos resta calcular a contribuição do gás de glúons. Utilizando a estatística de Bose-Einstein (ver seção D.1 do apêndice D) podemos escrever a densidade de energia dos glúons da seguinte forma [83]

$$\epsilon_g(T) = \frac{g_g}{(2\pi^2)}\int_0^\infty \frac{p^3 dp}{e^{p/T}-1}, \tag{4.7}$$

em que g_g é a degenerescência dos glúons. Podemos resolver a integral em (4.7) de maneira análoga a (4.1), porém, utilizando o resultado [22]

$$\int_0^\infty \frac{z^{a-1}dz}{e^z-1} = \zeta(a)\Gamma(a) \qquad (a>1). \tag{4.8}$$

Substituindo (4.8) em (4.7) e os valores de $\zeta(4)$ e $\Gamma(4)$, obtemos a densidade de energia dos glúons

$$\epsilon_g(T) \;=\; g_g\frac{\pi^2}{30}T^4. \tag{4.9}$$

Utilizando a relação entre pressão e densidade de energia, no limite ultrarrelativístico, para bósons: $P = \epsilon/3$ (ver seção D.2 do apêndice D), temos a pressão do gás de glúons

$$P_g(T) \;=\; g_g\frac{\pi^2}{90}T^4. \tag{4.10}$$

Somando (4.6) e (4.10), temos a pressão para um gás composto de quarks, antiquarks

e glúons

$$P(T) = \left[g_g + \frac{7}{8}(g_q + g_{\bar{q}})\right] \frac{\pi^2}{90} T^4. \tag{4.11}$$

A expressão (4.11) é válida somente no regime de altas temperaturas. Porém, as interações entre quarks e glúons em baixas temperaturas devem ser consideradas. Uma maneira comum de levar isto em conta é usar o modelo de sacola do MIT [85]. Nele é postulada uma densidade de energia constante $\mathcal{B}$, chamada de constante de sacola, que é ajustada de forma a fazer com que a pressão na fase de QGP coincida com a pressão do gás de hádrons em um certo valor de temperatura crítica (T_c). Todas as incertezas nos cálculos estão associadas à $\mathcal{B}$.

Utilizando o modelo de sacola, podemos determinar a densidade de energia do QGP somando as densidades dadas por (4.5), (4.9) e a constante de sacola, temos

$$\epsilon_{\mathrm{QGP}}(T) = g_{\mathrm{QGP}} \frac{\pi^2}{30} T^4 + \mathcal{B}, \tag{4.12}$$

em que a degenerescência do plasma é dada por $g_{\mathrm{QGP}} = \left[g_g + \frac{7}{8}(g_q + g_{\bar{q}})\right]$, que depende do número de spin (N_{spin}), número de sabor (N_{sabor}) e número de cor (N_{cor})[2].

Utilizando o balanço entre a pressão do vácuo e a pressão termodinâmica do gás de quarks e glúons (4.11), obtemos a pressão do QGP

$$P_{\mathrm{QGP}}(T) = g_{\mathrm{QGP}} \frac{\pi^2}{90} T^4 - \mathcal{B}. \tag{4.13}$$

Usando as equações (4.12) e (4.13), juntamente com a relação termodinâmica $s = (\epsilon + P)/T$, obtemos a densidade de entropia do QGP

$$s_{\mathrm{QGP}}(T) = 4 g_{\mathrm{QGP}} \frac{\pi^2}{90} T^3. \tag{4.14}$$

[2] As degenerescências dos quarks e antiquarks são dadas por $g_q = g_{\bar{q}} = N_{spin} \times N_{sabor} \times N_{cor}$ e a degenerescência dos glúons é dada por $g_g = N_{spin} \times (N_{cor}^2 - 1)$. N_{spin}, N_{sabor} e N_{cor} estão relacionados com a natureza da partícula. Para mais informações sobre estes números ver [86].

4.1.2 Fase Hadrônica

A obtenção de uma equação de estado para a fase de hadrônica é mais complicada do que a da fase de QGP. Isso ocorre, pois as interações fortes entre os hádrons são difíceis de serem incorporadas em uma EoS de uso prático [21]. Porém, no regime de altas energias, como no RHIC e no LHC, podemos aproximar a fase hadrônica por um gás ideal formado por diferentes hádrons. Esta aproximação é válida porque, neste limite, a energia térmica é suficientemente alta em comparação à energia de interação entre os hádrons. Desta forma, a pressão total de um gás ideal de hádrons, P_{H}, é dada pela soma das pressões de cada espécie de hádrons, ou seja,

$$P_{\mathrm{H}}(T,\mu) = \sum_i P_i(T,\mu_i), \tag{4.15}$$

em que μ é o potencial químico total do gás de hádrons, P_i e μ_i são a pressão e o potencial químico do i-ésimo hádron, respectivamente. Aqui são incluidos todos os hádrons com massa até 2 GeV.

Os constituintes do gás de hádrons podem ser tanto férmions (os bárions) como bósons (os mésons). Deste modo, podemos escrever a pressão de cada tipo de hádron da seguinte forma [cite]:

$$P_i(T,\mu_i) = \pm\frac{g_i}{2\pi^2}T\int dk k^2 \ln\left[1 \pm e^{-\left(\sqrt{k^2+m_i^2}-\mu_i\right)/T}\right], \tag{4.16}$$

onde foi utilizado $\varepsilon_k = \sqrt{k^2+m_i^2}$, o sinal +(-) se refere à férmions (bósons), k é o número de onda, g_i e m_i, são, respectivamente, a degenerescência e a massa do i-ésimo hádron. Fazendo uma expansão em série, podemos reescrever a equação (4.16) da seguinte forma:

$$P_i(T,\mu_i) \;=\; \pm\frac{g_i}{2\pi^2}T\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\mp 1)^{n-1}}{n}e^{\frac{n\mu_i}{T}}\int_0^{\infty} dk k^2 e^{\frac{-n\sqrt{k^2+m_i^2}}{T}}. \tag{4.17}$$

Fazendo uma troca de variável, $x = k/m_i$, e utilizando a função de Bessel modificada (ver seção B.3 do apêndice B), obtemos

$$P_i(T,\mu_i) = \pm\frac{g_i}{2\pi^2}T^2m_i^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\mp1)^{n-1}}{n^2}e^{\frac{n\mu_i}{T}}K_2\left(\frac{nm_i}{T}\right). \tag{4.18}$$

A série em (4.18) só converge rapidamente no limite de Boltzmann, $e^{-\left(\sqrt{k^2+m_i^2}-\mu_i\right)/T} \ll 1$. Neste limite, não há diferença entre bósons e férmions e basta somente o primeiro termo da série para conseguirmos uma boa aproximação. Assim, podemos reescrever a pressão dada pela equação (4.18) da seguinte forma

$$P_i(T,\mu_i) \approx \frac{g_i}{2\pi^2}m_i^2T^2e^{\frac{\mu_i}{T}}K_2\left(\frac{m_i}{T}\right). \tag{4.19}$$

A partir da pressão, podemos calcular a densidade de energia, $\epsilon(T,\mu_i)$, a densidade de partículas, $n(T,\mu_i)$, e a densidade de entropia, $s(T,\mu_i)$. Obtemos

$$\epsilon_i(T,\mu_i) \approx \frac{g_i}{2\pi^2}m_i^3Te^{\frac{\mu_i}{T}}\left[K_1\left(\frac{m_i}{T}\right)+\frac{3T}{m_i}K_2\left(\frac{m_i}{T}\right)\right] \tag{4.20}$$

$$n_i(T,\mu_i) \approx \frac{g_i}{2\pi^2}m_i^2Te^{\frac{\mu_i}{T}}K_2\left(\frac{m_i}{T}\right) \tag{4.21}$$

$$s_i(T,\mu_i) \approx \frac{g_i}{2\pi^2}m_i^3Te^{\frac{\mu_i}{T}}\left[K_1\left(\frac{m_i}{T}\right)+\frac{(4T-\mu_i)}{m_i}K_2\left(\frac{m_i}{T}\right)\right], \tag{4.22}$$

sendo estas as quantidades termodinâmicas para o i-ésimo hádron.

Utilizando as equações (4.15) e (4.19), obtemos a pressão total para a fase hadrônica

$$P_{\mathrm{H}}(T,\mu) \approx \sum_i\frac{g_i}{2\pi^2}m_i^2T^2e^{\frac{\mu_i}{T}}K_2\left(\frac{m_i}{T}\right). \tag{4.23}$$

De forma análoga, podemos obter a densidade de energia, densidade de número de partículas e densidade de entropia, utilizando as equações (4.20), (4.21), (4.22) e somando sobre todos os tipos de hádrons que compõem este gás. Desta forma, obtemos as quantidade termodinâmicas que descrevem a fase hadrônica como um gás ideal. Porém,

G. D. Yen, W. Greiner, e S. Yang [87] mostraram que o modelo de gás ideal resulta em valores extremamente grandes para a densidade total do número de partículas, que excedem os valores experimentais obtidos por medições diretas da multiplicidade de partículas e da estimativa do volume do sistema no freeze-out usando a interferometria de píons [87]. Para obter os valores desejados da densidade de número de partículas é necessário introduzir a interação repulsiva entre os hádrons a pequenas distâncias. Isto é feito de forma análoga à correção da esfera dura de Van der Waals e é conhecido como correção do volume-excluído [87, 88] (ver seção D.3 do apêndice D). A repulsão de Van der Waals não altera essencialmente as proporções de número de partículas, mas causa um forte efeito de supressão sobre os valores das densidades de número de partículas.

Utilizando essa correção, podemos reescrever a pressão, $P^{(ex)}$, da seguinte forma

$$P^{(ex)}(T,\mu) = \sum_{i=1}^{h} P_{\text{H}}(T,\widehat{\mu}), \qquad \widehat{\mu}_i = \mu_i - v_i P^{(ex)}(T,\mu_1,...,\mu_h), \tag{4.24}$$

em que μ_i e v_i são respectivamente, o potencial químico e o volume excluído do i-ésimo hádron. A partir da pressão do sistema, equação (4.24), podemos obter as outras quantidades termodinâmicas:

$$s^{(ex)}(T,\mu_1,...,\mu_h) \equiv \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{\mu_1,...,\mu_h} = \frac{\sum_{i=1}^{h} s_i(T,\widehat{\mu}_i)}{1+\sum_{j=1}^{h} v_j n_j(T,\widehat{\mu}_j)}, \tag{4.25}$$

$$n_i^{(ex)}(T,\mu_1,...,\mu_h) \equiv \left(\frac{\partial P}{\partial \mu_i}\right)_{T,\mu_1,...,\mu_h} = \frac{n_i(T,\widehat{\mu}_i)}{1+\sum_{j=1}^{h} v_j n_j(T,\widehat{\mu}_j)}, \tag{4.26}$$

$$\epsilon^{(ex)}(T,\mu_1,...,\mu_h) \equiv Ts - P + \sum_{i=1}^{h} \mu_i n_i = \frac{\sum_{i=1}^{h} \epsilon_i(T,\widehat{\mu}_i)}{1+\sum_{j=1}^{h} v_j n_j(T,\widehat{\mu}_j)}. \tag{4.27}$$

em que $\epsilon^{(ex)}, s^{(ex)}$ e $n_i^{(ex)}$ são, respectivamente, a densidade de energia, a densidade de entropia e a densidade de número de partículas, calculadas com a correção do volume-excluído. Desta forma, obtemos a EoS completa para a fase hadrônica.

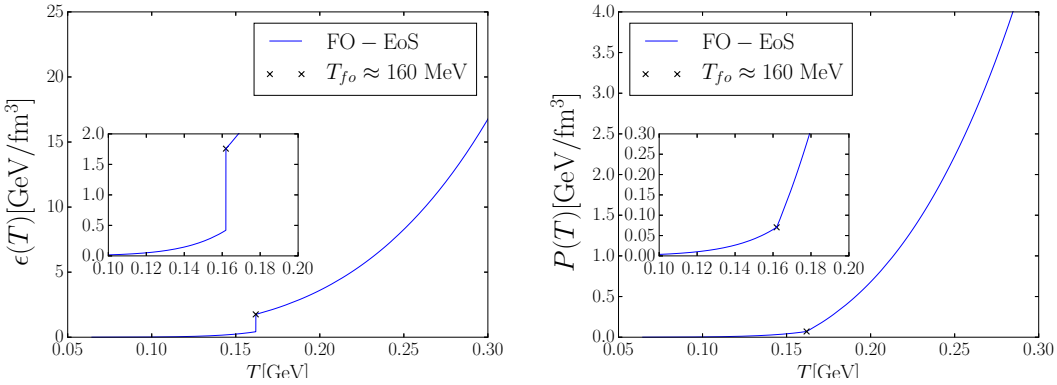
4.1.3 Transição de Fase de Primeira Ordem

A região de transição de fase de primeira ordem é aquela em que as pressões do QGP e do gás de hádrons se igualam,

$$P^{(ex)}(T_c,\mu_c) = P_{\rm QGP}(T_c,\mu_c), \tag{4.28}$$

em que T_c e μ_c são, respectivamente, a temperatura crítica e o potencial químico crítico. Quando $T < T_c$, $P^{(ex)}(T,\mu) > P_{\rm QGP}(T,\mu)$, e a matéria se encontra na fase hadrônica; quando $T > T_c$, $P^{(ex)}(T,\mu) < P_{\rm QGP}(T,\mu)$, e a matéria se encontra na fase de QGP. Para $\mathcal{B} = 380$ MeV e $\mu_c = 0$, temos uma temperatura crítica de transição de fase $T_c \approx 160$MeV [cite].

Na figura 4.1, temos densidade de energia e pressão para a FO-EoS, ambas em função da temperatura. No interior de cada figura, há uma ampliação da região de transição de fase. A descontinuidade que aparece na densidade de energia e na primeira derivada da pressão, quando $T = T_c$, é uma característica da transição de fase de primeira ordem. Esta EoS apresenta uma fase mista onde o QGP e o gás de hádrons coexistem.



(a) Densidade de Energia (b) Pressão

Figura 4.1: Densidade de energia e Pressão para a FO - EoS. O zoom nas figuras mostram a região de transição de fase e o ponto onde encontra-se a temperatura crítica.

4.2 Equação de Estado da QCD na rede

A equação de estado baseada na QCD na rede[3], utilizada neste trabalho, foi proposta por Huovinen e Petreczky [80] e é calculada apenas na região de densidade bariônica nula. Esta equação é a parametrização de duas equações de estado: em altas temperaturas é utilizada uma parametrização dos resultados da QCD na rede e em baixas temperaturas usa-se a parametrização da equação de estado de um gás de hádrons[4].

Na QCD na rede, as quantidades termodinâmicas (densidade de energia, densidade de entropia e pressão) são obtidas por meio do traço do tensor energia-momento, $\mathcal{T}^{\mu}_{\ \mu}(T)$, definido como

$$\mathcal{T}^{\mu}_{\ \mu}(T) \equiv \epsilon(T) - 3P(T). \tag{4.29}$$

Esta quantidade é chamada de traço anômalo.

A partir da equação (4.29), calcula-se a EoS da QCD na rede [80, 92, 93]. A diferença da pressão entre os regimes de altas (T) e baixas (T_0) temperaturas pode ser expressa pela integral do traço anômalo

$$\frac{P(T)}{T^4} - \frac{P(T_0)}{T_0^4} = \int_{T_0}^{T} \frac{dT'}{T'^5} \mathcal{T}^{\mu}_{\ \mu}(T'), \tag{4.30}$$

em que T_0 é um valor de temperatura escolhido no regime de baixas temperaturas. Se escolhermos T_0 suficientemente pequeno, a pressão e as demais quantidades termodinâmicas são suprimidas exponencialmente por fatores de Boltzmann [80, 92]. A densidade de energia e a densidade de entropia podem ser obtidas por meio das relações

$$\epsilon(T) = \mathcal{T}^{\mu}_{\ \mu}(T) + 3P(T), \qquad s(T) = \frac{\epsilon(T) + P(T)}{T}. \tag{4.31}$$

[3] Neste trabalho, não descreveremos a QCD na rede, pois este não é o escopo do mesmo. Iremos somente estudar a EoS que é obtida através da QCD na rede, para que possamos utiliza-la em nosso modelo hidrodinâmico. Para maiores informações sobre a QCD na rede, ver [89, 90, 91].

[4] A QCD na rede não consegue descrever a EoS em baixas temperaturas, pois nesta região ocorrem efeitos de discretização (não físicos), devido à limitação na precisão do cálculo numérico

Em altas temperaturas, $T > 250$ MeV, a equação (4.29) pode ser parametrizada utilizando a seguinte forma polinomial inversa [80, 92]:

$$\frac{\mathcal{T}^{\mu}_{\ \mu}(T)}{T^4} = \frac{d_2}{T^2} + \frac{d_4}{T^4} + \frac{c_1}{T^{n_1}} + \frac{c_2}{T^{n_2}}, \tag{4.32}$$

em que os valores dos parâmetros, para a parametrização QCD-s95p[5], são: $d_2 = 0.2660\text{GeV}^2, d_4 = 2.4303\times10^{-3}\text{GeV}^4, c_1 = -2.809\times10^{-7}\text{GeV}^{n_1}, c_2 = 6.073\times10^{-23}\text{GeV}^{n_2}$, $n_1 = 10, n_2 = 30$ e $T_0 = 70$ MeV. Esta parametrização funciona bem no intervalo de temperatura de interesse e faz uma boa correspondência com o modelo de gás de hádrons [80].

Para baixas temperaturas, $T < T_{\text{H}}$, em que $T_{\text{H}} = 184$ MeV é a temperatura máxima atingida na fase hadrônica, a equação (4.29) é parametrizada utilizando o modelo de gás de hádrons com ressonâncias de partículas com massas até 2 GeV. Esta parametrização é dada da seguinte forma [80, 92]:

$$\frac{\mathcal{T}^{\mu}_{\ \mu}(T)}{T^4} = a_1 T + a_2 T^3 + a_3 T^4 + a_4 T^{10}. \tag{4.33}$$

Considerando o intervalo de temperatura de interesse, $T_0 < T < T_{\text{H}}$, os parâmetros na equação (4.33) são dados por $a_1 = 4.654\text{GeV}^{-1}, a_2 = -879\text{GeV}^{-3}, a_3 = 8081\text{GeV}^{-4}$ e $a_4 = -7039000\text{GeV}^{-10}$.

Utilizando as parametrizações (4.33), (4.32) juntamente com a equação (4.30), obtemos a pressão na fase hadrônica, $T_0 < T < T_{\text{H}}$ MeV,

$$P_{\text{H}}(T) = T^4 \left[\frac{P(T_0)}{T_0^4} + \int_{T_0}^{T} dT' (a_1 + a_2 T'^2 + a_3 T'^3 + a_4 T'^9) \right], \tag{4.34}$$

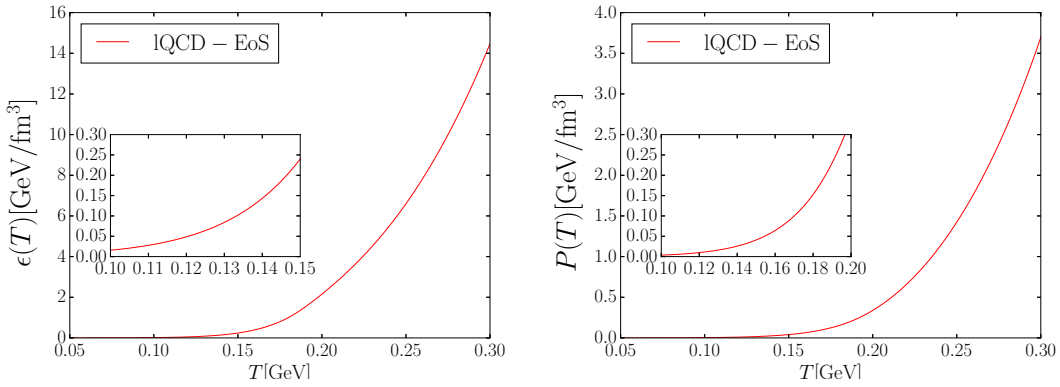
em que $P(T_0)/T_0^4 = 0.1661$. Da mesma forma, na região de altas temperaturas, $T_{\text{H}} <$

[5] O rótulo "s95" se referê a fração de 95% da densidade de entropia de uma gás ideal a temperatura de 800 MeV e a letra "p" se refere ao tratamento do pico do $\mathcal{T}^{\mu}_{\ \mu}(T)$ e o seu correspondente no gás de hádrons.

$T < 800$ MeV, obtemos a pressão para a fase de QGP

$$P_{\mathrm{QGP}}(T) = P_{\mathrm{H}}(T_{\mathrm{H}}) + T^4 \left[\int_{T_{\mathrm{H}}}^{T} dT' \left(\frac{d_2}{T'^3} + \frac{d_4}{T'^5} + \frac{c_1}{T'^{n_1+1}} + \frac{c_2}{T'^{n_2+1}} \right) \right], \tag{4.35}$$

As equações de estado da QCD na rede são dadas por (4.34), (4.35) e (4.31). Na figura 4.2, temos a representação gráfica da densidade de energia e pressão para a lQCD-EoS. Nas imagens ampliadas percebemos que não há uma temperatura crítica de transição entre as fases. A transição entre o QGP e o gás de hádrons é suave, caracterizando uma transição de fase do tipo crossover.



(a) Densidade de Energia (b) Pressão

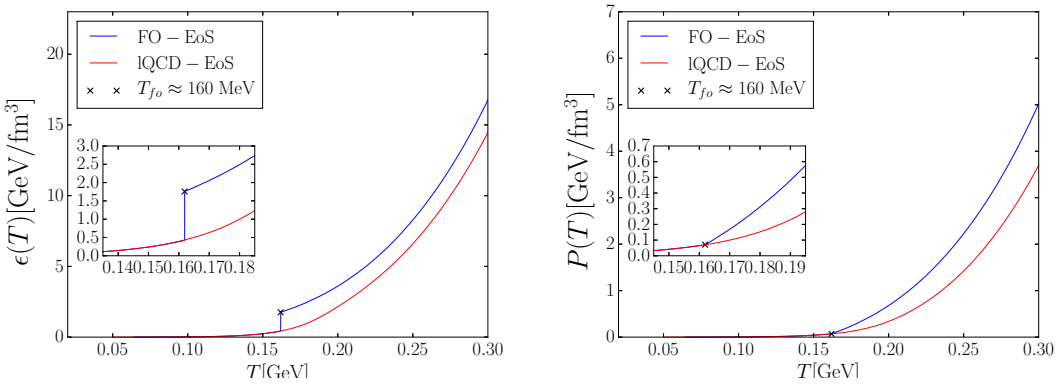
Figura 4.2: Densidade de energia e pressão para a lQCD - EoS. O zoom nas figuras mostra que não há uma temperatura crítica na região de transição e esta ocorre de forma suave, portanto, esta transição é do tipo crossover.

4.3 Comparação entre as EoS

Uma vez obtidas as equações de estado, é interessante realizarmos uma comparação entre elas utilizando as quantidades termodinâmicas.

A figura 4.3a mostra a comparação da densidade de energia em função da temperatura para as duas equações de estado. A figura 4.3b mostra a comparação da pressão

em função da temperatura. O zoom presente em ambos os gráficos mostra a região de transição de fase. Podemos ver que, a partir da temperatura crítica, a FO-EoS possui valores maiores de densidade de energia e pressão quando comparado a lQCD-EoS.

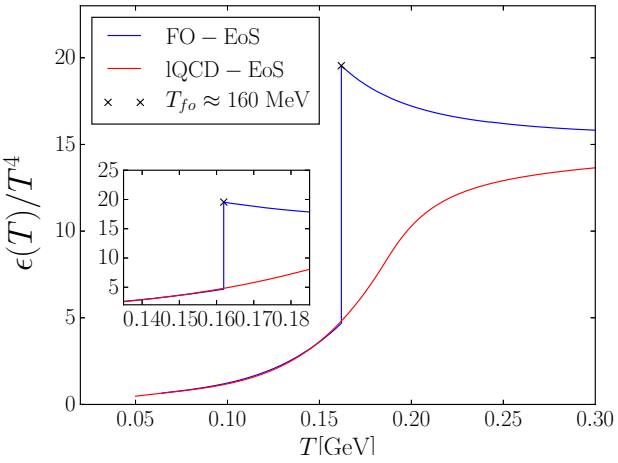


(a) Densidade de Energia (b) Pressão

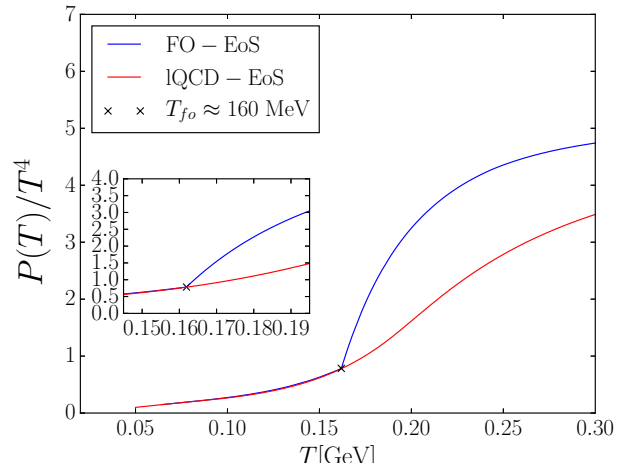
Figura 4.3: Comparação entre a FO-EoS e a lQCD-EoS, utilizando a densidade de energia e pressão. O zoom nas figuras mostra a região de transição de fase, em que, a FO-EoS possui uma transição abrupta na temperatura crítica ($T_c \approx 160$MeV), enquanto a lQCD-EoS possui uma transição suave.

Na figura 4.4, mostramos $\epsilon(T)/T^4$ e $P(T)/T^4$, em função da temperatura, para uma melhor visualização das diferenças entre FO-EoS e lQCD-EoS. Vemos que as duas equações são idênticas na fase hadrônica. Na FO-EoS, vemos claramente em T_c uma mudança abrupta correspondente à transição de fase de primeira ordem entre QGP e o gás de hádrons. Na lQCD-EoS não temos uma temperatura crítica e vemos uma transição suave do tipo crossover, em que as propridades do fluido variam continuamente.

Com as equações de estado, temos todas as ferramentas necessárias para a descrição completa das colisões de íons pesados utilizando o modelo hidrodinâmico. No próximo capítulo iremos falar sobre alguns dos observáveis físicos que podem ser calculados utilizando a hidrodinâmica.



(a)



(b)

Figura 4.4: Comparação entre a FO-EoS e a lQCD-EoS, utilizando $\epsilon(T)/T^4$ e $P(T)/T^4$ adimensionais. O zoom nas figuras mostram a região de transição de fase, em que, a FO-EoS possui uma transição abrupta na temperatura crítica ($T_c \approx 160$MeV), enquanto a lQCD-EoS possui uma transição suave.

Capítulo 5

Observáveis Físicos

Os observáveis físicos, no contexto das colisões de íons pesados, são as quantidades medidas experimentalmente nos aceleradores de partículas. Estes observáveis refletem informações sobre o estado final de partículas produzidas durante a colisão. Neste capítulo, vamos estudar alguns observáveis que usualmente são calculadas utilizando o modelo hidrodinâmico para comparações com dados experimentais. Inicialmente, iremos descrever a distribuição em pseudorrapidez que, no nosso caso, é utilizada para ajustar a densidade de entropia inicial gerada pelo T$_{\mathrm{R}}$ENTo e consequentemente a multiplicidade de partículas. A seguir, descreveremos a distribuição em momento transversal que é usada para ajustar a temperatura de freeze-out. Finalmente, descreveremos o fluxo elíptico e a interferometria HBT.

5.1 Distribuição em Pseudorrapidez

A rapidez (y) de uma partícula é definida como:

$$\mathsf{y} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E + p_z}{E - p_z} \right), \tag{5.1}$$

em que p_z e E são, respectivamente, momento longitudinal e energia da partícula. Como em muitos experimentos, só é possível medir o ângulo de emissão da partícula detectada relativo à direção do feixe, é mais conveniente utilizar a pseudorrapidez (η), que é definida da seguinte forma:

$$\eta = -\ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right), \tag{5.2}$$

em que θ é o ângulo de espalhamento com relação ao eixo-z (direção do feixe), sendo $\cos(\theta) = p_z/|\vec{p}|$. No limite ultrarrelativístico ($|\vec{p}| \gg m$), a rapidez coincide com a pseudorrapidez, ou seja, $\mathsf{y} \approx \eta$. A partir da pseudorrapidez, os físicos experimentais medem a distribuição em pseudorrapidez $\left(\frac{dN}{d\eta}\right)$. Esta distribuição fornece informações sobre a quantidade de energia depositada pelos nucleons participantes da colisão na região de interação. Vale notar que as distribuições em rapidez e pseudorrapidez estão relacionadas da seguinte forma:

$$\frac{dN}{d\eta dp_{\mathrm{T}}} = \sqrt{1 - \frac{m^2}{m_{\mathrm{T}}^2\cosh^2\mathsf{y}}}\,\frac{dN}{d\mathsf{y}dp_{\mathrm{T}}}. \tag{5.3}$$

No caso em que $\mathsf{y} \approx \eta \approx 0$ temos a região denominada de rapidez central ou região de rapidez média. Neste caso a equação (5.3) se resume a seguinte forma

$$\left.\frac{dN}{d\eta dp_{\mathrm{T}}}\right|_{\eta=0} = \frac{p_T}{m_T}\left.\frac{dN}{d\mathsf{y}dp_{\mathrm{T}}}\right|_{\mathsf{y}=0}. \tag{5.4}$$

Para regiões de grande y, as distribuições $dN/d\mathsf{y}$ e $dN/d\eta$ são aproximadamente iguais.

No nosso caso, os dados experimentais da distribuição em pseudorrapidez são utilizados para ajustar a densidade de entropia (ou densidade de energia) inicial gerada pelas condições iniciais e, consequentemente, ajustar a multiplicidade de partículas geradas na colisão. O T$_{\mathrm{R}}$ENTo fornece ao modelo hidrodinâmico a distribuição de densidade de entropia inicial no plano transversal ao eixo da colisão na região de ra-

pidez média. Entretanto, a constante de normalização κ_{T}, presente na equação (3.14), deve ser ajustada de acordo com os dados. Na figura 5.1 mostramos a distribuição em pseudorrapidez em função da pseudorrapidez para todas as partículas carregadas ($h^{\pm}$). Os dados experimentais (quadrados pretos) pertencem à colaboração PHOBOS [94] do RHIC e são de colisões centrais Au+Au com $\sqrt{s_{\mathrm{NN}}} = 200$ GeV. O parâmetro κ_{T} é ajustado de modo que o resultado da simulação hidrodinâmica (ponto vermelho) fique o mais próximo possível dos dados na região de rapidez média[1]. Este ajuste deve ser realizado para cada simulação diferente, ou seja, para diferentes centralidades, diferentes condições iniciais, diferentes equações de estado e também para a diferença entre os casos ideal e viscoso. Na tabela 5.1, temos os ajustes realizados para colisões centrais (0-6%) utilizando a equação de estado lQCD-EoS[2] e condições iniciais suaves para obter os resultados numéricos presentes no próximo capítulo.

Na tabela vemos que κ_{T} é menor a medida que aumentamos o valor da viscosidade. Isto ocorre, porque quanto maior for o valor associado a viscosidade, maior será a produção de entropia. Sendo assim, podemos dizer que as simulações contendo viscosidade desacoplam em um menor intervalo de tempo.

Tabela 5.1: Ajuste de κ_{T} para diferentes simulações

Simulação	κ_{T}
Ideal	54.6
$\frac{\eta_{\mathrm{v}}}{s} = 0.08$	47.5
$\frac{\eta_{\mathrm{v}}}{s} = 0.16$	44.4
$\frac{\zeta_{\mathrm{v}}}{s} = 0.04$	54.43
$\frac{\zeta_{\mathrm{v}}}{s} = 0.08$	54.26
$\frac{\eta_{\mathrm{v}}}{s} = 0.08$ e $\frac{\zeta_{\mathrm{v}}}{s} = 0.04$	48.45
$\frac{\eta_{\mathrm{v}}}{s} = 0.08$ e $\frac{\zeta_{\mathrm{v}}}{s} = 0.08$	48.95
$\frac{\eta_{\mathrm{v}}}{s} = 0.16$ e $\frac{\zeta_{\mathrm{v}}}{s} = 0.04$	44.9

[1] Como estamos utilizando um modelo hidrodinâmico em (2+1)D (invariância por boost), só é possivel ajustar os dados na região de rapidez média.

[2] Para a FO-EoS, foram realizadas somente simulações considerando fluidos ideais para critério de comparação. Para esta EoS foi obtido o valor $\kappa_{\mathrm{T}} = 55.5$.

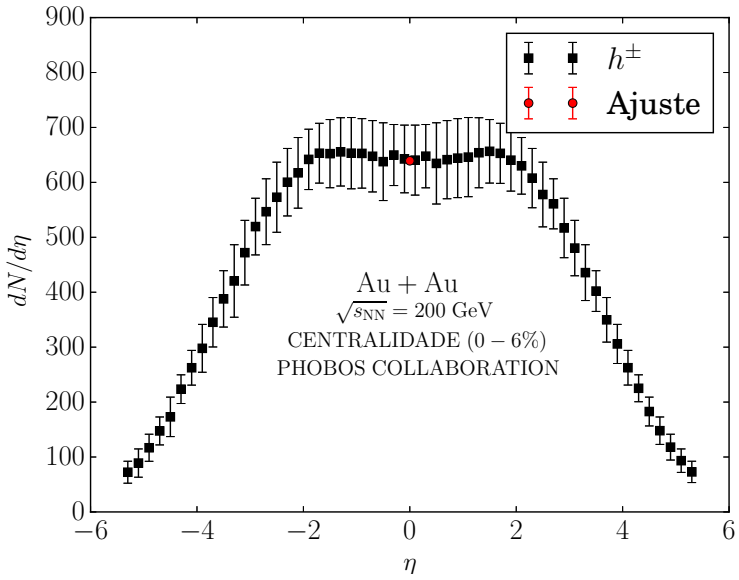


Figura 5.1: Ajuste de $\kappa_{\rm T}$ de acordo com os dados experimentais de distribuições em pseudorrapidez da colaboração PHOBOS [94] no RHIC para colisões mais centrais (0-6%) com $\sqrt{s_{\rm NN}} = 200$ GeV. O ajuste (ponto vermelho) foi realizado para cada simulação presente na tabela 5.1.

5.2 Distribuição em Momento Transversal

A distribuição em momento transversal $\left(\frac{1}{2\pi}\frac{d^2N}{p_T dp_T dy}\right)$ fornece informações sobre o desacoplamento térmico do sistema. Portanto, é interessante utilizá-la para ajustar a temperatura de freeze-out, T_{fo}, de modo que obtenhamos o melhor resultado quando comparado aos dados experimentais. Assim como o ajuste realizado para $\kappa_{\rm T}$, a temperatura de freeze-out difere a cada centralidade, para cada tipo de EoS e também para os casos ideal e viscoso. O ajuste da temperatura de freeze-out deve ser feito paralelamente ao ajuste de $\kappa_{\rm T}$ pois um influencia no resultado do outro. Na figura 5.2 mostramos a distribuição em momento transversal em função do momento transversal para todas as partículas carregadas ($h^{\pm}$). Os dados experimentais (quadrados pretos) pertencem à colaboração PHOBOS [95] do RHIC e são de colisões centrais Au+Au com $\sqrt{s_{\rm NN}} = 200$ GeV. A temperatura de freeze-out é ajustada de modo que o resultado da simulação

hidrodinâmica (linha vermelha) fique o mais próximo possível aos dados experimentais. Quanto maior o valor de T_{fo}, maior é a inclinação da curva. As temperaturas na tabela 5.1 foram escolhidas para reproduzir a região de baixo momento transversal ($p_{\mathrm{T}} \lesssim 2$ GeV), região em que a hidrodinâmica é válida. Os ajustes foram realizados para colisões centrais (0-6%) utilizando a equação de estado lQCD-EoS[3] e condições iniciais suaves. É possível ver que a viscosidade volumétrica não influencia na temperatura de freeze-out. Por outro lado, quanto maior a viscosidade de cisalhamento, maior deve ser T_{fo}.

Tabela 5.2: Ajuste da temperatura de freeze-out para diferentes simulações

Simulação	T_{fo} [MeV]
Ideal	150
$\frac{\eta_{\mathrm{v}}}{s} = 0.08$	160
$\frac{\eta_{\mathrm{v}}}{s} = 0.16$	165
$\frac{\zeta_{\mathrm{v}}}{s} = 0.04$	150
$\frac{\zeta_{\mathrm{v}}}{s} = 0.08$	150
$\frac{\eta_{\mathrm{v}}}{s} = 0.08$ e $\frac{\zeta_{\mathrm{v}}}{s} = 0.04$	160
$\frac{\eta_{\mathrm{v}}}{s} = 0.08$ e $\frac{\zeta_{\mathrm{v}}}{s} = 0.08$	160
$\frac{\eta_{\mathrm{v}}}{s} = 0.16$ e $\frac{\zeta_{\mathrm{v}}}{s} = 0.04$	165

5.3 Fluxo Elíptico

Uma das fortes evidências da formação do plasma de quarks e glúons é o aspecto coletivo da matéria formada nas colisões. Este aspecto foi observado primeiramente em 1984 no Bevalac[4] [96]. A evolução coletiva do sistema é descrita pelo fluxo (ou escoamento) anisotrópico. Podemos entender a aparição deste fluxo utilizando a figura 5.3. No caso em que o parâmetro de impacto é não nulo, $b \neq 0$, os nucleons participantes, após a colisão, formam uma região (volume de interação entre os núcleos, representada pela elipsóide na figura 5.3a) que é espacialmente anisotrópica. Com a evolução do

[3] Para a FO-EoS, considerando a hidrodinâmica ideal, foi obtido o valor $T_{fo} = 132$ MeV.

[4] O Bevalac é a combinação entre os aceleradores Bevatron (síncrotron que acelerava prótons) e o SuperHILAC (acelerador linear que injetava íons pesados no Bevatron).

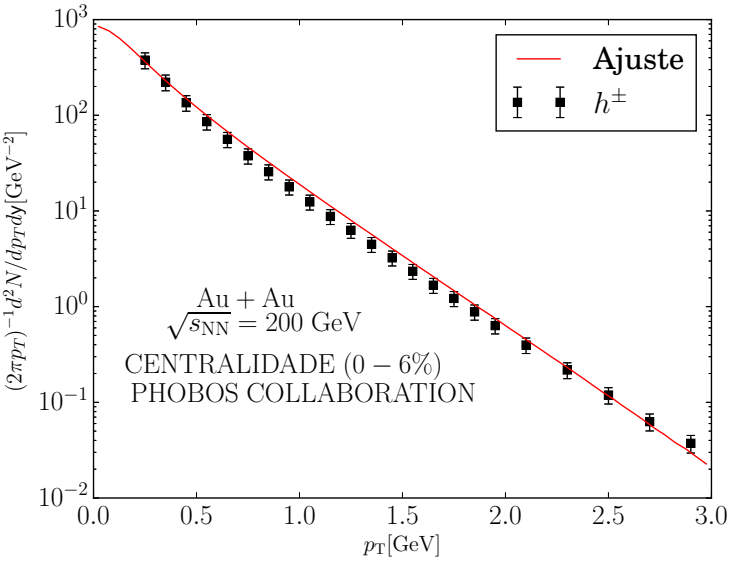
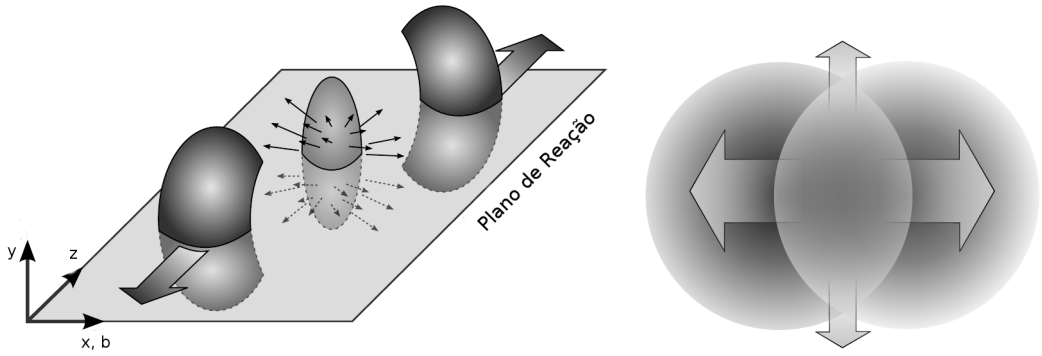


Figura 5.2: Ajuste da temperatura de freeze-out, T_{fo} de acordo com os dados experimentais de distribuições em momento transversal da colaboração PHOBOS [95] no RHIC para colisões mais centrais (0-6%) com $\sqrt{s_{\rm NN}} = 200$ GeV. O ajuste (linha vermelha) foi feito para cada simulação realizada, presente na tabela 5.2.

sistema, esta anisotropia espacial é transferida para o espaço de momento em razão da diferença entre o gradiente de pressão nos eixos maior e menor do elipsóide, como mostrado na figura 5.3b. Este comportamento indica que a evolução do sistema também é anisotrópica. Podemos dizer que o sistema possui altíssima densidade de energia na região da reação, reduzindo-se gradualmente em direção às bordas do sistema, mais rapidamente na direção x do que na y. Esta anisotropia é refletida no estado final das partículas [97].

Para realizar a análise do fluxo, define-se o plano de reação utilizando o parâmetro de impacto e a direção longitudinal no feixe. O ângulo formado entre o plano de reação e o plano (xz), $\psi_{\rm R}$, não pode ser observado diretamente e deve ser reconstruído de alguma forma [99]. Nesta dissertação utilizaremos o método do plano de eventos para construção deste ângulo. Discutiremos este método no final desta seção.

Um procedimento comum na análise dos fluxos nas colisões de íons pesados é utilizar



(a) (b)

Figura 5.3: Ilustração esquemática do volume de interação entre dois núcleos. A anisotropia no plano (xy) gera o fluxo anisotrópico. A figura 5.3a mostra uma representação 3-dimensional e a figura 5.3b mostra a representação no plano (xy). Extraído e adaptado da referência [98].

a fórmula de Cooper-Frye, equação (3.21), realizando uma expanção em série de Fourier da distribuição azimutal $(dN/d\phi_{\mathrm{p}})$, da seguinte forma

$$E\frac{d^3N}{d^3\vec{p}} = \frac{1}{2\pi}\frac{d^3N}{p_{\mathrm{T}}dp_{\mathrm{T}}dyd\phi_{\mathrm{p}}} = \frac{1}{2\pi}\frac{d^2N}{p_{\mathrm{T}}dp_{\mathrm{T}}dy}\left[1+2\sum_{n=0}^{\infty}v_n\cos\left[(\phi_{\mathrm{p}}-\psi_{\mathrm{R}})\right]\right], \tag{5.5}$$

em que v_n são os coeficientes de Fourier e recebem o nome de harmônicos, que podem ser calculados no modelo hidrodinâmico. O fato destes coeficientes serem não nulos é um indicativo da anisotropia do sistema. Na região de rapidez média o harmônico v_2, conhecido como fluxo elíptico, é dominante. Neste caso, v_2 dependendo somente do momento transversal [98]. Este harmônico pode ser calculado da seguinte forma:

$$v_2(p_{\mathrm{T}}) = \frac{\int_0^{2\pi}d\phi_{\mathrm{p}}\cos[2(\phi_{\mathrm{p}}-\psi_{\mathrm{R}})]\left.\frac{d^3N}{p_{\mathrm{T}}dp_{\mathrm{T}}d\phi_{\mathrm{p}}dy}\right|_{\mathrm{y}=0}}{\int_0^{2\pi}d\phi_{\mathrm{p}}\left.\frac{d^3N}{p_{\mathrm{T}}dp_{\mathrm{T}}d\phi_{\mathrm{p}}dy}\right|_{\mathrm{y}=0}}, \tag{5.6}$$

em que ψ_{R} é o ângulo azimutal do plano de reação. Com a aparição do fluxos anisotrópicos, os pesquisadores do RHIC observaram que o QGP era fortemente interagente e se comportava mais como um líquido do que como um gás [15].

5.3.1 Método do Plano de Eventos

Em razão do ângulo do plano de reação ser desconhecido experimentalmente, A. M. Poskanzer e S. A. Voloshin [100], nos anos 1990's, propuseram o método do plano de eventos. Este método estima uma aproximação, chamada de plano de eventos, ao plano de reação. O plano de eventos contém tanto a direção do feixe como a dos fluxos determinados a partir das distribuições de partículas. O vetor do fluxo de eventos para o n-ésimo fluxo é definido da seguinte forma:

$$Q_{nx} = Q_n \cos\left(n\psi_n\right) = \sum_i W_i \cos\left(n\phi_{(\mathrm{p}),i}\right) \tag{5.7}$$

$$Q_{ny} = Q_n \sin\left(n\psi_n\right) = \sum_i W_i \sin\left(n\phi_{(\mathrm{p}),i}\right), \tag{5.8}$$

em que $\phi_{(\mathrm{p}),i}$ é o ângulo azimutal do momento no sistema de laboratório e W_i o peso relacionado à i-ésima partícula. Nesta dissertação utilizamos sempre $W_i = 1$. A partir das equações (5.7) e (5.8), calculamos o ângulo do plano de eventos para o n-ésimo fluxo

$$\psi_n = \frac{1}{n} \arctan\left[\frac{Q_{ny}}{Q_{nx}}\right]. \tag{5.9}$$

Desta forma o fluxo elíptico, dado pela equação (5.6), pode ser reescrito em termos do ângulo do plano de eventos

$$v_2(p_{\mathrm{T}}) = \frac{\int_0^{2\pi} d\phi_{\mathrm{p}} \cos[2(\phi_{\mathrm{p}} - \psi_2)] \left.\frac{d^3N}{p_{\mathrm{T}} dp_{\mathrm{T}} d\phi_{\mathrm{p}} dy}\right|_{\mathrm{y}=0}}{\int_0^{2\pi} d\phi_{\mathrm{p}} \left.\frac{d^3N}{p_{\mathrm{T}} dp_{\mathrm{T}} d\phi_{\mathrm{p}} dy}\right|_{\mathrm{y}=0}}, \tag{5.10}$$

em que o ângulo ψ_2 é aquele em que o fluxo elíptico é máximo. Com a equação (5.10), fica completa a descrição do fluxo elíptico que utilizamos para realizar os cálculos numéricos desta dissertação.

5.4 Interferometria HBT

Na inicio da década de 1950, o astrônomo Robert Hanbury-Brown e o matemático Richard Q. Twiss desenvolveram o método e o aparato experimental que permitia determinar as dimensões angulares de estrelas a partir da medida em coincidência de fótons emitidos por elas [101, 102, 103]. A idéia básica da técnica é: "*se a radiação recebida em dois lugares é mutuamente coerente, então a flutuação na intensidade dos sinais recebidos naqueles dois locais está também correlacionada*" [104]. Esta técnica recebeu o nome de interferometria de intensidade, mas ficou conhecida como interferometria (ou efeito) HBT (Hanbury-Brown Twiss). O aparato experimental construído por Hanbury-Brown e Twiss era formado por dois espelhos parabólicos, ligados entre si a um correlator[5]. Estes espelhos eram os coletores de fótons emitidos pela estrela. Se os fótons fossem detectados simultaneamente o sinal era armazenado em um circuito contador. Em 1956, com a ajuda de E. M. Purcell [105], eles demonstraram experimentalmente que o fenômeno da detecção simultanea de fótons tinha origem no fato de que os fótons tendem a chegar juntos nos detectores em razão da estatística de Bose-Einstein [106].

Em 1959, G. Goldhaber, S. Goldhaber, W. Y. Lee e A. Pais[6] [107], em busca da resonância ρ^0 mediante seu decaimento em $\pi^+\pi^-$, observaram que pares de píons idênticos emitidos de colisões próton-antipróton ($p\bar{p}$) apresentavam uma correlação em seus momentos. Esta correlação tinha a mesma natureza da correlação observada por Hanbury-Brown e Twiss: ambas respeitavam a estatística de Bose-Einstein. Desta forma, tornou-se possível estimar dimensões subatômicas em colisões a altas energias.

Por causa da alta quantidade de píons produzidos nas colisões de íons pesados, é possível utilizar o efeito HBT, considerando píons idênticos, para estudar a geometria da fonte no freeze-out e assim obter as características espaço-temporais da fonte emissora. Neste trabalho, iremos calcular o efeito HBT para correlação de píons idênticos no caso

[5] O correlator era um circuito eletrônico que recebia sinais de ambos os espelhos e os multiplicava.
[6] Na época, o grupo desconhecia o experimento realizado por Hanbury-Brown e Twiss.

de colisões centrais (0-5%) com o código THERMINATOR2.

5.4.1 Correlação de Partículas Idênticas

A função que relaciona a correlação estatística entre bósons idênticos, emitidos caoticamente, às dimensões da fonte emissora, é chamada de *função de correlação*. Para construir a função de correlação, vamos considerar a situação simplificada apresentada na figura 5.4. Considere que os píons[7] são emitidos dos pontos **I** e **II** e detectados nos pontos **A** e **B** com momentos p_1^μ e p_2^μ, respectivamente.

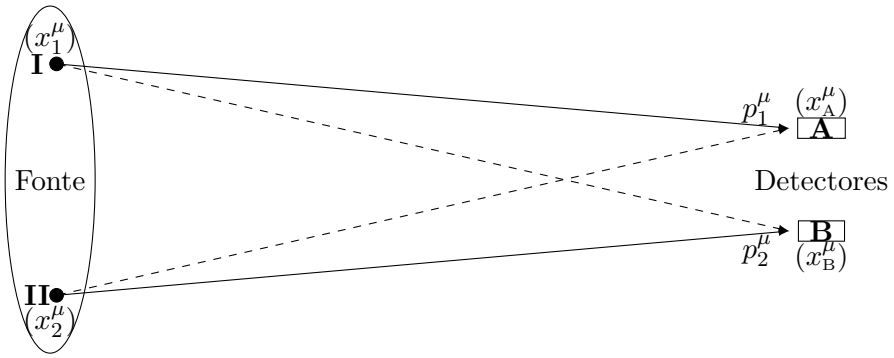


Figura 5.4: Ilustração simplificada de uma fonte emissora de píons. Um píon é emitido da fonte em **I** (com posição x_1^μ) e outro píon, idêntico ao primeiro, é emitido da fonte em **II** (com posição x_2^μ). Dois detectores **A** (localizado em x_A^μ) e **B** (localizado em x_B^μ) detectam (simultaneamente) píons com momentos p_1^μ e p_2^μ, respectivamente. Por serem indistinguíveis, existem duas formas de detecção destes píons, representadas pela linha contínua e pela linha tracejada.

A amplitude de probabilidade de detectar um píon, emitido do ponto **I**, com momento p_1^μ em **A** e simultaneamente detectar um píon idêntico, emitido do ponto **II**, com momento p_2^μ em **B** (linhas contínuas na figura 5.4) é dada por [83]:

$$\Psi_1(p_1^\mu, p_2^\mu) = A(x_1^\mu,p_1^\mu)e^{i\alpha(x_1^\mu)}e^{ip_{(1),\mu}(x_1^\mu - x_A^\mu)}A(x_2^\mu,p_2^\mu)e^{i\alpha(x_2^\mu)}e^{ip_{(2),\mu}(x_2^\mu - x_B^\mu)}, \qquad (5.11)$$

em que $A(x^\mu,p^\mu)$ e $\alpha(x^\mu)$ são, respectivamente, magnitude e a fase da amplitude de probabilidade. Porém, como estamos considerando píons indistinguíveis, devemos consi-

[7] Estamos supondo que não há interação entre este píons após a emissão.

derar o caso em que um píon é emitido do ponto **I**, com momento p_2^μ e detectado em **B** e simultaneamente um píon idêntico, emitido do ponto **II**, com momento p_1^μ é detectado em **A** (linhas tracejadas na figura 5.4). Neste caso a amplitude de probabilidade é dada por

$$\Psi_2(p_1^\mu, p_2^\mu) = A(x_2^\mu, p_1^\mu) e^{i\alpha(x_2^\mu)} e^{ip_{(1),\mu}(x_2^\mu - x_{\rm A}^\mu)} A(x_1^\mu, p_{(2)}^\mu) e^{i\alpha(x_1^\mu)} e^{ip_{(2),\mu}(x_1^\mu - x_{\rm B}^\mu)}. \quad (5.12)$$

Como os píons obedecem a estatística de Bose-Einstein, isto implica em uma amplitude de probabilidade simétrica com respeito a troca de índices. Desta forma a amplitude de probabilidade total, Ψ, que satisfaz esta simetria é dada por:

$$\Psi(p_1^\mu, p_2^\mu) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\Psi_1(p_1^\mu, p_2^\mu) + \Psi_2(p_1^\mu, p_2^\mu)\right]. \quad (5.13)$$

A equação (5.13), foi obtida considerando o caso simplificado em que os píons são emitidos de dois pontos específicos na fonte. Entretanto, em um caso mais realista, os píons podem ser emitidos de quaisquer outros dois pontos na fonte. Para que possamos considerar o caso mais geral, devemos somar todas as possíveis combinações de produção de pares de píons a partir de dois pontos quaisquer na fonte. Desta forma, a amplitude de probabilidade total para dois píons idênticos é dado por

$$\begin{aligned}
\Psi_\Sigma(p_1^\mu, p_2^\mu) &= \sum_{x_1^\mu, x_2^\mu} \Psi(p_1^\mu, p_2^\mu) = \sum_{x_1^\mu, x_2^\mu} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\Psi_1(p_1^\mu, p_2^\mu) + \Psi_2(p_1^\mu, p_2^\mu)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{x_1^\mu, x_2^\mu} e^{i\alpha(x_1^\mu)} e^{i\alpha(x_2^\mu)} \Big\{ A(p_1^\mu, x_1^\mu) A(p_2^\mu, x_2^\mu) e^{ip_{(1),\mu}(x_1^\mu - x_{\rm A}^\mu)} e^{ip_{(2),\mu}(x_2^\mu - x_{\rm B}^\mu)} \\
&+ A(p_1^\mu, x_2^\mu) A(p_2^\mu, x_1^\mu) e^{ip_{(1),\mu}(x_2^\mu - x_{\rm A}^\mu)} e^{ip_{(2),\mu}(x_1^\mu - x_{\rm B}^\mu)} \Big\}. \quad (5.14)
\end{aligned}$$

A distribuição de probabilidade de obter dois píons idênticos com 4-momentos p_1^μ e p_2^μ, $\mathcal{P}_2(p_1^\mu, p_2^\mu)$, é definida como o módulo quadrado da amplitude de probabilidade total

$$\mathcal{P}_2(p_1^\mu, p_2^\mu) = \frac{1}{2} |\Psi_\Sigma(p_1^\mu, p_2^\mu)|^2. \quad (5.15)$$

Este resultado pode ser aplicado tanto para fontes coerentes quanto para fontes caóticas. No caso das fontes caóticas, de nosso interesse, a fase é uma função aleatória de x^μ. Utilizando esta propriedade e substituindo a equação (5.14) em (5.15), obtemos[8]

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_2(p_1^\mu,p_2^\mu) &= \frac{1}{2}\sum_{x_1^\mu,x_2^\mu}\Big|A(p_1^\mu,x_1^\mu)A(p_2^\mu,x_2^\mu)e^{ip_{(1),\mu}(x_1^\mu-x_{\rm A}^\mu)}e^{ip_{(2),\mu}(x_2^\mu-x_{\rm B}^\mu)} \\ &+ A(p_1^\mu,x_2^\mu)A(p_2^\mu,x_1^\mu)e^{ip_{(1),\mu}(x_2^\mu-x_{\rm A}^\mu)}e^{ip_{(2),\mu}(x_1^\mu-x_{\rm B}^\mu)}\Big|^2. \qquad (5.16)\end{aligned}$$

Podemos reescrever o somatório na equação (5.16) como uma integral, introduzindo uma densidade por unidade de volume, $\rho(x^\mu)$, no ponto x^μ da fonte [83]. Fazendo a substituição $\sum_{x_1^\mu,x_2^\mu}\to\int d^4x_1d^4x_2\rho(x_1^\mu)\rho(x_2^\mu)$, temos

$$\mathcal{P}_2(p_1^\mu,p_2^\mu) = \int d^4x_1\int d^4x_2\,|\Psi(p_1^\mu,p_2^\mu)|^2\,\rho(x_1^\mu)\rho(x_2^\mu), \qquad (5.17)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_2(p_1^\mu,p_2^\mu) &= \int d^4x_1\rho(x_1^\mu)A^2(p_1^\mu,x_1^\mu)\int d^4x_2\rho(x_2^\mu)A^2(p_2^\mu,x_2^\mu) \\ &+ \int d^4x_1\rho(x_1^\mu)A(p_1^\mu,x_1^\mu)A(p_2^\mu,x_1^\mu)e^{i(p_1^\mu-p_2^\mu)x_{(1),\mu}} \\ &\times \int d^4x_2\rho(x_2^\mu)A(p_2^\mu,x_2^\mu)A(p_1^\mu,x_2^\mu)e^{i(p_2^\mu-p_1^\mu)x_{(2),\mu}}. \qquad (5.18)\end{aligned}$$

Se considerarmos um único píon, emitido em um ponto x^μ qualquer e detectado em $x_{\rm D}^\mu$, a sua distribuição de probabilidade é dada por [83]

$$\mathcal{P}_1(p^\mu) = \int d^4x\rho(x^\mu)A^2(p^\mu,x^\mu). \qquad (5.19)$$

Utilizando a equação (5.19), podemos identificar as distribuições de probabilidade individuais na equação (5.18). Desta forma, temos

$$\mathcal{P}_2(p_1^\mu,p_2^\mu) = \mathcal{P}_1(p_1^\mu)\mathcal{P}_1(p_2^\mu)+\left|\int d^4x e^{i(p_1^\mu-p_2^\mu)x_\mu}\rho(x^\mu)A(p_1^\mu,x^\mu)A(p_2^\mu,x^\mu)\right|^2 \qquad (5.20)$$

Podemos definir uma densidade efetiva, como

[8] As fases aleatórias acabam cancelando umas as outras na soma. Maiores informações em [83].

$$\rho_{\text{eff}}(x^\mu, p_1^\mu, p_2^\mu) = \frac{\rho(x^\mu)A(p_1^\mu,x^\mu)A(p_2^\mu,x^\mu)}{\sqrt{\mathcal{P}_1(p_1^\mu)\mathcal{P}_1(p_2^\mu)}}. \tag{5.21}$$

Utilizando (5.21) e a transformada de Fourier

$$\tilde{\rho}_{\text{eff}}(x^\mu, p_1^\mu, p_2^\mu) = \int d^4x e^{iq^\mu x_\mu}\rho_{\text{eff}}(x^\mu, p_1^\mu, p_2^\mu), \tag{5.22}$$

em que $q^\mu = p_1^\mu - p_2^\mu$ é o 4-momento relativo, podemos reescrever a equação (5.20) da seguinte forma

$$\mathcal{P}_2(p_1^\mu, p_2^\mu) = \mathcal{P}_1(p_1^\mu)\mathcal{P}_1(p_2^\mu)\left(1 + |\tilde{\rho}_{\text{eff}}(x^\mu, p_1^\mu, p_2^\mu)|^2\right). \tag{5.23}$$

A função de correlação, $\mathcal{C}(p_1^\mu,p_2^\mu)$, para duas partículas idênticas é definida como a razão entre a probabilidade de detecção simultânea de ambas, $\mathcal{P}_2(p_1^\mu,p_2^\mu)$, pela probabilidade de detecção de cada partícula separadamente, $\mathcal{P}_1(p_i^\mu)$,

$$\mathcal{C}(p_1^\mu,p_2^\mu) = \frac{\mathcal{P}_2(p_1^\mu,p_2^\mu)}{\mathcal{P}_1(p_1^\mu)\mathcal{P}_1(p_2^\mu)}. \tag{5.24}$$

Substituindo a equação (5.23), em (5.24), temos

$$\mathcal{C}(p_1^\mu,p_2^\mu) = 1 + |\tilde{\rho}_{\text{eff}}(x^\mu, p_1^\mu, p_2^\mu)|^2. \tag{5.25}$$

Com a equação (5.25), obtemos a função de correlação dependendo somente da transformada de Fourier da densidade efetiva. Podemos escrever a densidade efetiva em termos de uma função de emissão S, definida por

$$S(x^\mu,p^\mu) = A^2(x^\mu,p^\mu)\rho(x^\mu). \tag{5.26}$$

Em termos dessa função de emissão, a densidade efetiva pode ser escrita como

$$\rho_{\text{eff}} = \frac{\sqrt{S(x^\mu,p_1^\mu)S(x^\mu,p_2^\mu)}}{\sqrt{\int d^4xS(x^\mu,p_1^\mu)\int d^4xS(x^\mu,p_1^\mu)}}. \tag{5.27}$$

Substituindo (5.27) em (5.25), temos

$$\mathcal{C}(p_1^\mu,p_2^\mu) = 1 + \frac{\left|\int d^4xe^{iq^\mu x_\mu}\sqrt{S(x^\mu,p_1^\mu)S(x^\mu,p_2^\mu)}\right|^2}{\int d^4xS(x^\mu,p_1^\mu)\int d^4xS(x^\mu,p_2^\mu)}. \tag{5.28}$$

A equação (5.28) depende unicamente da função de emissão, $S(x^\mu,p^\mu)$. Esta função pode ser interpretada como o número de partículas emitidas no elemento de espaço de fase d^3xd^3p por unidade de tempo. No contexto hidrodinâmico, esta distribuição é tomada em um local de equilíbrio térmico, localizada na superfície de freeze-out [22]. Desta forma obtemos a formulação geral para a interferometria HBT tanto para a densidade efetiva, ρ_{eff}, quanto para a função de emissão, S.

Função de correlação via método Monte-Carlo

O THERMINATOR2 calcula, numericamente, a função de correlação para píons idênticos utilizando o método Monte-Carlo de duas partículas [108]. Nesta abordagem a função de correlação é definida da seguinte forma [68, 108]:

$$\mathcal{C}(\vec{q},\vec{K}) = \frac{\sum_i\sum_{j\neq i}\delta_\Delta(\vec{q}-\vec{p}_i+\vec{p}_j)\delta_\Delta(\vec{K}-\frac{1}{2}[\vec{p}_i+\vec{p}_j])|\Psi(\vec{K}^*,\vec{x}^*)|^2}{\sum_i\sum_{j\neq i}\delta_\Delta(\vec{q}-\vec{p}_i+\vec{p}_j)\delta_\Delta(\vec{K}-\frac{1}{2}[\vec{p}_i+\vec{p}_j])}, \tag{5.29}$$

em que $\vec{q} = \vec{p_1} - \vec{p_2}$ é o 3-momento relativo, $\vec{K} = \frac{1}{2}(\vec{p_1} + \vec{p_2})$ é o 3-momento médio, $\vec{p}$ é o 3-momento da respectiva partícula e $\vec{x} = \vec{x_1} - \vec{x_2}$ é a separação entre os píons. As quantidades contendo o asterisco são calculadas no referencial de centro de massa do par. O cálculo desta função de correlação (5.29) é realizado com a ajuda de uma função

caixa, δ_Δ, definida da seguinte maneira

$$\delta_\Delta(\vec{p}) = \begin{cases} 1, & \text{se } |p_x| \leq \frac{\Delta}{2}, |p_y| \leq \frac{\Delta}{2}, |p_z| \leq \frac{\Delta}{2} \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \tag{5.30}$$

onde a resolução do bin é $\Delta = 3.33$ MeV [68].

Para cada par, a função de onda é dada por

$$\Psi(\vec{K}^*, \vec{x}^*) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\vec{K}^*\cdot\vec{x}^*} + e^{-i\vec{K}^*\cdot\vec{x}^*}), \tag{5.31}$$

que implica em

$$|\Psi(\vec{K}^*, \vec{x}^*)|^2 = 1 + \cos(2\vec{K}^*\vec{x}^*). \tag{5.32}$$

Portanto se substituirmos a equação (5.32) em (5.29) e realizarmos as somas, calculamos, utilizando o métodos Monte-Carlo, a função de correlação. Porém, para obtermos as informações da função de correlação, dada por (5.29), utilizamos a parametrização de Bertsch-Pratt e obtemos os raios HBT. Descreveremos a esta parametrização e estes raios na próxima subseção.

5.4.2 Parametrização de Bertsch-Pratt e Raios HBT

Nos anos de 1980, G. Bertsch e S. Pratt [109] propuseram um sistema de cordenadas para a parametrização tridimensional da função de correlação. Este sistema permite obter informações diretas da fonte na direção transversal e na direção do feixe simultaneamente. Este sistema ficou conhecido como "$out - side - long$" e esta representado na figura 5.5. A coordenada *long* é paralela a direção do feixe, a coordenada *out* é paralela à componente transversal do momento médio $\vec{K}$ e a coordenada *side* é perpendicular às duas. Nesta dissertação, utilizaremos essas coordenadas para obter os resultados e

compará-los com os dados experimentais.

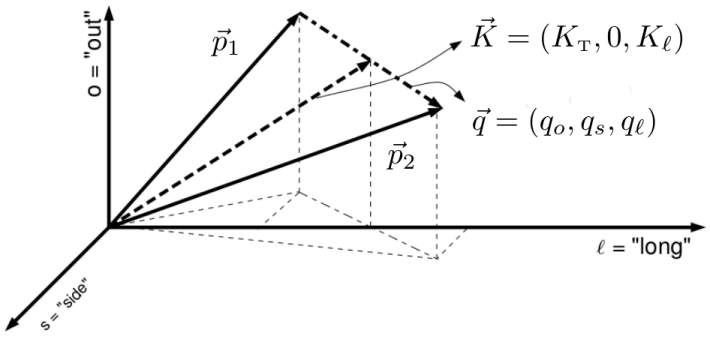


Figura 5.5: Sistema de coordenadas $out-side-long$. Extraído e adaptado da referência [110].

Para definir o novo sistema de coordenadas vamos considerar duas partículas com momento $\vec{p}_1$ e $\vec{p}_2$. O momento médio, $\vec{K}$, e o momento relativo, $\vec{q}$, são definidos da seguinte forma:

$$\vec{K} = \frac{1}{2}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \tag{5.33}$$

$$\vec{q} = \vec{p}_1 - \vec{p}_2. \tag{5.34}$$

Podemos definir os vetores unitários da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \hat{x}_o &= \frac{\vec{K}_T}{K_T} \\ \hat{x}_\ell &= \hat{x}_z \\ \hat{x}_s &= \hat{x}_\ell \times \hat{x}_o \end{aligned} \tag{5.35}$$

em que $\vec{K}_T = K_x\hat{x} + K_y\hat{y}$ é o momento médio transversal. Utilizando o momento médio transversal e as equações (5.35), escrevemos os vetores unitários nas coordendas $x-y-z$

em termos dos vetores unitários das coordenadas $out - side - long$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \frac{K_x}{K_{\mathrm{T}}}\hat{x}_o - \frac{K_y}{K_{\mathrm{T}}}\hat{x}_s \\ \hat{y} &= \frac{K_y}{K_{\mathrm{T}}}\hat{x}_o + \frac{K_x}{K_{\mathrm{T}}}\hat{x}_s \\ \hat{z} &= \hat{x}_\ell. \end{aligned} \tag{5.36}$$

Utilizando as equações (5.36), o momento médio, $\vec{K}$, pode ser escrito como

$$\vec{K} = K_x\hat{x} + K_y\hat{y} + K_z\hat{z} = K_o\hat{x}_o + K_\ell\hat{x}_\ell, \tag{5.37}$$

em que $K_o = K_{\mathrm{T}}$ e $K_\ell = K_z$. De modo análogo, podemos escrever o momento relativo, $\vec{q}$, da seguinte forma

$$\vec{q} = q_x\hat{x} + q_y\hat{y} + q_z\hat{z} = q_o\hat{x}_o + q_s\hat{x}_s + q_\ell\hat{x}_\ell, \tag{5.38}$$

em que

$$\begin{aligned} q_o &= \frac{q_xK_x + q_yK_y}{K_{\mathrm{T}}}, \\ q_s &= \frac{q_yK_x - q_xK_y}{K_{\mathrm{T}}}, \\ q_\ell &= q_z. \end{aligned} \tag{5.39}$$

Para píons idênticos, temos a seguinte condição $q^\mu K_\mu = 0$. Logo, $q^0 = \vec{q}\cdot\vec{\beta}$, em que definimos a velocidade do centro de massa do par $\vec{\beta} = \vec{K}/K^0$. Assim, temos que apenas três das quadro componentes do momento relativo são independentes. Isto implica na redução de uma dimensão da função de correlação, quando comparada com as do espaço-tempo.

Utilizando as funções de correlação, descritas na seção anterior, podemos fazer uso da interferometria HBT para investigar a estrutura da fonte emissora. Na figura 5.6, temos a função de correlação de píons idênticos para colisões centrais (0-5%) Au+Au,

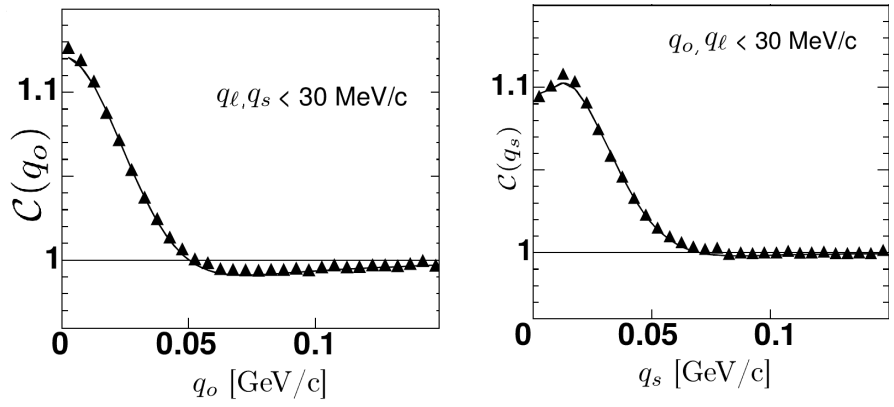
com $\sqrt{s_{\rm NN}} = 200$ GeV da colaboração STAR do RHIC no sistema $out - side - long$. Nos gráficos, as funções de correlação são integradas com respeito aos outros dois componentes na região de $q_i < 30$ MeV/c, em que $i = o, s, \ell$ [111].

A característica mais importante da função de correlação é a sua largura, que está associada ao tamanho da região emissora de partículas. No sistema $out-side-long$ esta largura está associada aos chamados raios HBT, denotados por $R_{\rm out} = R_{\rm o}, R_{\rm side} = R_{\rm s}$ e $R_{\rm long} = R_\ell$, que são obtidos realizando-se um ajuste na função de correlação. Para realizar este ajuste usualmante é utilizada uma função gaussiana [22, 83], definida como

$$\mathcal{C}(\vec{q},\vec{K}) = 1 + \lambda(\vec{K}) \exp\left[-R_o^2(\vec{K})q_o^2 - R_s^2(\vec{K})q_s^2 - R_\ell^2(\vec{K})q_\ell^2\right], \tag{5.40}$$

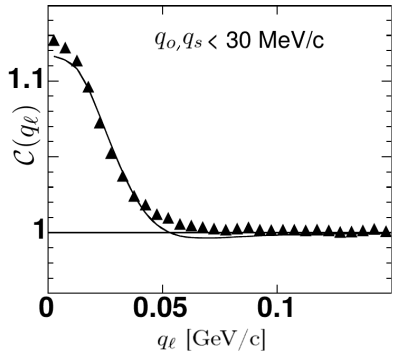
em que $\lambda(\vec{K})$ é o fator associado a caoticidade do sistema. Portanto, devemos calcular a função de correlação, descrita na seção anterior, e posteriormente obter os raios HBT utilizando o ajuste dado pela equação (5.40). O THERMINATOR2 calcula a função de correlação (5.29) utilizando a parametrição de Bertsch-Pratt no referencial LCMS (sistema comóvel longitudinal), que é definido como o referencial em que o momento médio do par na direção longitudinal é zero, ou seja, $K_\ell^{\rm LCMS} = 0$. Pode-se obter este sistema realizando um *boost* no referencial de centro de massa do par. Usualmente os dados experimentais são dados neste sistema.

Com a interferometria HBT finalizamos a descrição dos observáveis que estamos interessados em calcular. No próximo capítulo vamos apresentar e discutir os resultados numéricos obtidos, quando comparados com dados experimentais.



(a) $\mathcal{C}(q_o)$

(b) $\mathcal{C}(q_s)$



(c) $\mathcal{C}(q_{\ell})$

Figura 5.6: Função de correlação de píons idênticos no sistema $out - side - long$. Os dados experimentais (triângulos pretos) pertencem a colaboração STAR do RHIC para colisões Au+Au com $\sqrt{s_{\rm NN}} = 200$. As funções de correlação são integradas com respeito aos outros dois componentes na região de $q_i < 30$ MeV/c, em que $i = o, s, \ell$. Extraído e adaptado da referência [111].

Capítulo 6

Resultados Numéricos

Neste capítulo vamos apresentar e discutir os resultados obtidos, para a distribuição em momento transversal, fluxo elíptico e efeito HBT, com a união dos códigos numéricos T$_{\mathrm{R}}$ENTo, vHLLE e THERMINATOR2. Vamos comparar os nossos resultados numéricos com os dados experimentais produzidos em colisões centrais (0-6% para a distribuição em momento transversal e 0-5% para fluxo elíptico e efeito HBT) Au+Au com $\sqrt{s_{\mathrm{NN}}} = 200$ GeV, das colaborações PHOBOS e STAR no RHIC. Para realizar estes cálculos utilizamos condições iniciais suaves (média feita sobre 1000 eventos) geradas pelo T$_{\mathrm{R}}$ENTo para um tempo inicial $\tau_0 = 0.6 fm$. Os ajustes realizados na densidade de entropia inicial para reproduzir a distribuição em pseudorrapidez de hádrons carregados na região de rapidez média foram mostrados no capítulo 5. Dadas as condições iniciais, utilizamos o vHLLE para resolver as equações da hidrodinâmica em 2+1 dimensões (invariância por boost) no caso ideal para duas equações de estado: FO-EoS (EoS com transição de fase de primeira ordem) e lQCD-EoS (EoS com transição de fase crossover), com o propósito de investigar a influência das equações de estado nos observáveis. Consideramos também o caso viscoso, somente para a lQCD-EoS, para investigar a influência dos efeitos dissipativos nos observáveis. Calculamos os observáveis por meio do mecanismo de freeze-out utilizando o THERMINATOR2, incluindo as correções

viscosas na função de distribuição. As temperaturas de freeze-out, T_{fo}, foram ajustadas, utilizando a distribuição em momento transversal, conforme discutido no capítulo 5.

6.1 Influência das EoS

Nesta seção, apresentaremos os resultados numéricos obtidos para as duas equações de estado utilizadas neste trabalho: FO-EoS e lQCD-EoS, descritas no capítulo 4. Por simplicidade, iremos considerar somente o caso da hidrodinâmica ideal. O ajuste da constante de normalização, κ_{T}, foi feito conforme mencionado no capítulo 5 e os valores obtidos para as equações de estado foram de $\kappa_{\mathrm{T}} = 55.5$ para a FO-EoS e $\kappa_{\mathrm{T}} = 54.6$ para a lQCD-EoS.

Distribuição em Momento Transversal

O ajuste da temperatura de freeze-out foi feito de modo a reproduzir a inclinação da distribuição experimental de momento transversal. O resultado é mostrado na figura 6.1. Neste caso, obtivemos uma temperatura de freeze-out de 132 MeV para a FO-EoS (linha azul) e de 150 MeV para a lQCD-EoS (linha vermelha). Isso indica, que a lQCD-EoS faz com que o sistema desacople antes do que a FO-EoS. Isto ocorre porque a fase mista, presente na FO-EoS, possui um gradiente de pressão nulo. Isto faz com que a evolução do sistema pare de acelerar, levando a um desacoplamento mais tardio. Neste gráfico, vemos que ambas as EoS descrevem bem o observável.

Fluxo Elíptico

Com os ajustes da densidade de entropia inicial e da temperatura de freeze-out, calculamos o fluxo elíptico de acordo com a descrição feita no capítulo 5. Nesta dissertação, calculamos o v_2 em função do momento transversal para todos os hádrons carregados ($h^{\pm}$) em colisões centrais (0-5%) e comparamos os resultados com os dados

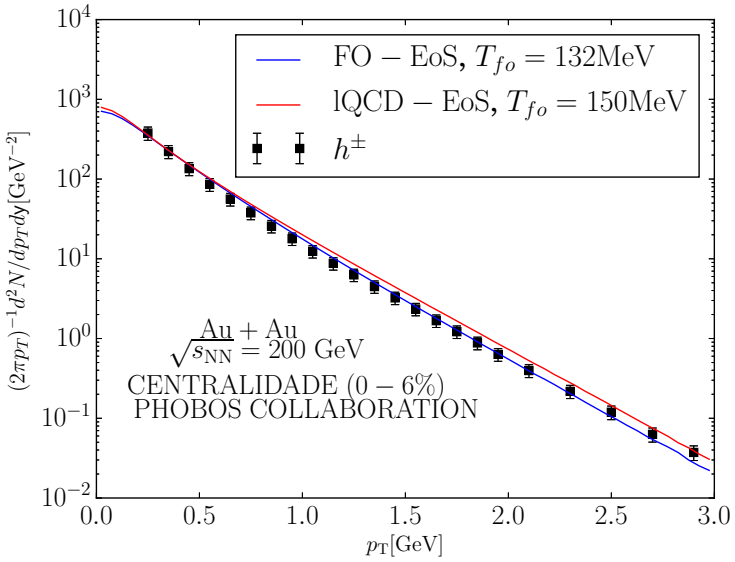


Figura 6.1: Distribuição em momento transversal em função de $p_{\rm T}$ para colisões Au+Au centrais (0-6%) com $\sqrt{s_{\rm NN}} = 200$ GeV. Comparação das simulações utilizando o modelo hidrodinâmico para as equações de estado: FO-EoS (linha azul) e lQCD-EoS (linha vermelha). Os dados experimentais são da colaboração PHOBOS [95].

experimentais da colaboração STAR [112]. Na figura 6.2, mostramos o resultado de $v_2(p_{\rm T})$ obtidos para as duas equações de estado. O resultado da simulação obtido para a FO-EoS apresenta um comportamento distante dos dados experimentais. O resultado da simulação obtido para a lQCD-EoS é próximo aos dados na região $p_{\rm T} < 1$ GeV. Como era esperado, na região de grande $p_{\rm T}$ a hidrodinâmica ideal não consegue descrever muito bem os dados experimentais para v_2. Uma possível solução é utilizar a hidrodinâmica dissipativa ou adicionar a contribuição de jatos, presentes na região de maior $p_{\rm T}$.

Raios HBT

Outro cálculo que realizamos utilizando o modelo hidrodinâmico é o efeito HBT, discutido no capítulo 5. Uma vez calculada a função de correlação entre os píons idênticos calculamos os raios HBT, em função do momento médio transversal $K_{\rm T}$. Comparamos

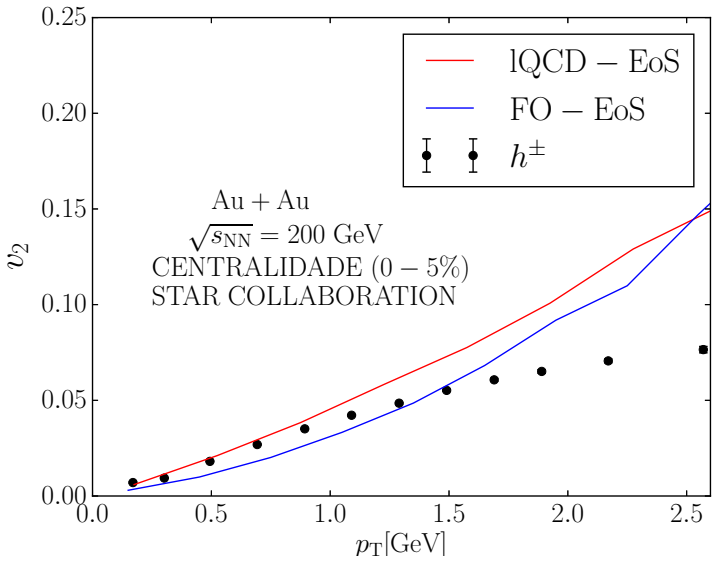
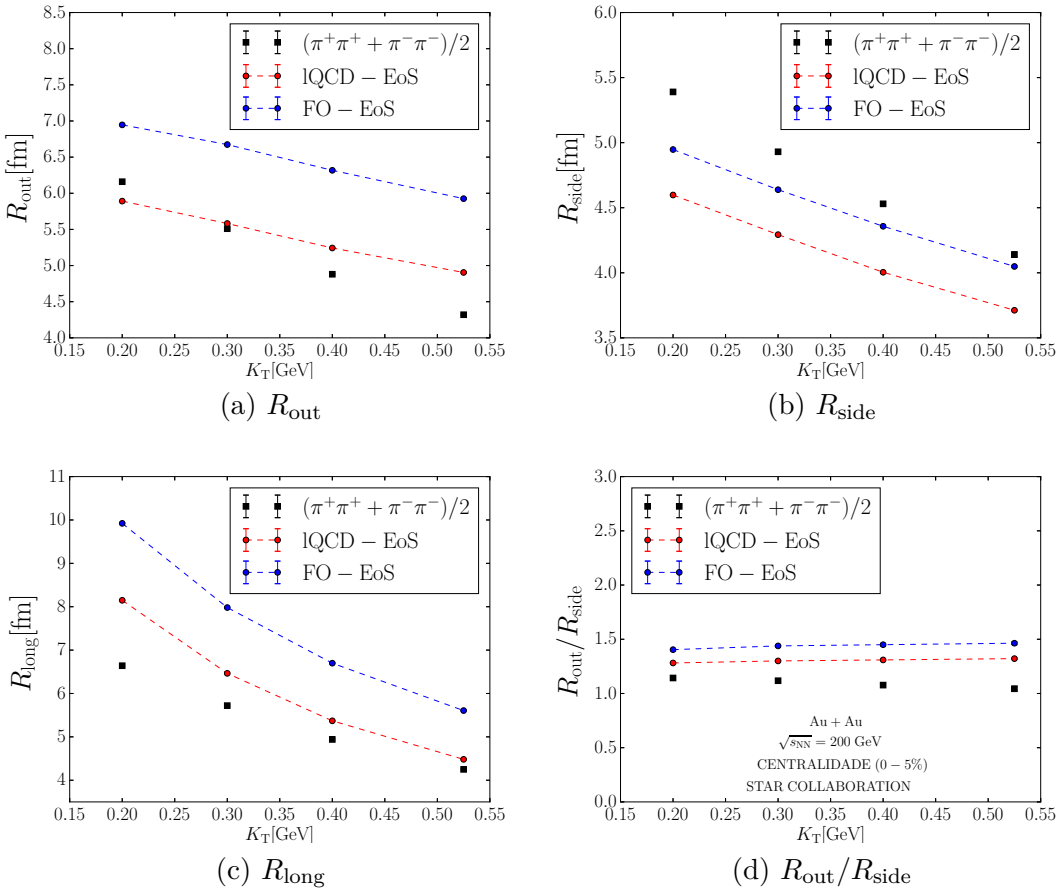


Figura 6.2: Fluxo elíptico em função de p_T para colisões Au+Au centrais (0-5%) com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV. Comparação das simulações utilizando o modelo hidrodinâmico para as equações de estado: FO-EoS (linha azul) e lQCD-EoS (linha vermelha). Os dados experimentais são da colaboração STAR [112].

nossos resultados com os dados experimentais da colaboração STAR [111] para pares de píons positivos e negativos ($\pi^{\pm}\pi^{\pm}$) provenientes de colisões centrais (0-5%) Au+Au com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV. Na figura 6.3, mostramos os resultados obtidos utilizando as equações de estado FO-EoS (pontos azuis) e lQCD-EoS (pontos vermelhos). Para os raios R_{out}, R_{long} e a razão R_{out}/R_{side} vemos que a lQCD-EoS dá resultados mais próximos aos dados experimentais. No caso do raio R_{side}, o resultado obtido usando a FO-EoS está mais próximo aos dados. É possível ver que todos os raios calculados na lQCD-EoS possuem valores menores que os calculados na FO-EoS. Isso acontece porque a lQCD-EoS leva um menor tempo para desacoplar, resultando em um tamanho aparente do sistema menor.

Com os resultados apresentados nesta seção, podemos concluir que a equação de estado baseada na QCD na rede nos fornece uma melhor descrição dos observáveis. Portanto, a partir deste ponto, todos os outros resultados serão calculados utilizando-se

a lQCD-EoS.



(a) $R_{\rm out}$ (b) $R_{\rm side}$

(c) $R_{\rm long}$ (d) $R_{\rm out}/R_{\rm side}$

Figura 6.3: Raios HBT em função do momento médio $K_{\rm T}$ para colisões centrais (0-5%). Comparação das simulações utilizando o modelo hidrodinâmico para as equações de estado: FO-EoS (pontos azuis) e lQCD-EoS (pontos vermelhos). Os dados experimentais (quadrados pretos) são da colaboração STAR [111].

6.2 Influência da Viscosidade

Nesta seção, apresentaremos os resultados numéricos obtidos incluindo os efeitos dissipativos no modelo hidrodinâmico, descrito no capítulo 2, a partir das equações de Israel-Stewart. Analisaremos os seguintes casos: somente viscosidade de cisalhamento,

somente viscosidade volumétrica e ambas. Também discutiremos a contribuição das correções viscosas na função de distribuição que foram apresentadas no capítulo 3. Nestes cálculos, iremos considerar somente a lQCD-EoS. O ajuste da constante de normalização, κ_{T}, foi feito conforme a tabela 5.1, apresentada capítulo 5. O ajuste da temperatura de freeze-out foi feito conforme a tabela 5.2, apresentada também no capítulo 5.

6.2.1 Viscosidade de Cisalhamento

Para realizar os cálculos hidrodinâmicos incluindo somente a viscosidade de cisalhamento, consideramos a discusão realizada no final do capítulo 2 sobre os tempos de relaxamento e a fração entre coeficientes de viscosidade e densidade de entropia, η_{v}/s. Neste caso, desconsideramos a viscosidade volumétrica, ou seja, $\zeta_{\mathrm{v}}/s = 0$. O tempo de relaxamanto utilizado foi $\tau_\pi = 3\eta_{\mathrm{v}}/sT$. Neste trabalho, consideramos que η_{v}/s é constante em toda a evolução hidrodinâmica e pode assumir os valores 0.08 e 0.16.

Distribuição em Momento Transversal

A figura 6.4, mostra o resultado dos ajustes da temperatura de freeze-out para os valores de $\eta_{\mathrm{v}}/s = 0.08$ com e sem a correção na função de distribuição (δf_π) e $\eta_{\mathrm{v}}/s = 0.16$ com correção. Nas simulações com $\eta_{\mathrm{v}}/s = 0.08$ com e sem δf_π, vemos um resultado similar para a distribuição em momento transversal, o mesmo acontece para a distribuição em pseudorrapidez, ou seja, temos o mesmo valor da normalização e uma temperatura de freeze-out comum para ambos. Isto implica que os observáveis utilizados para ajuste não são sensíveis a δf_π. Também vemos que quanto maior o valor da razão η_{v}/s maior será T_{fo}. Este resultado indica que quanto maior a viscosidade de cisalhamento mais rapidamente o sistema irá desacoplar.

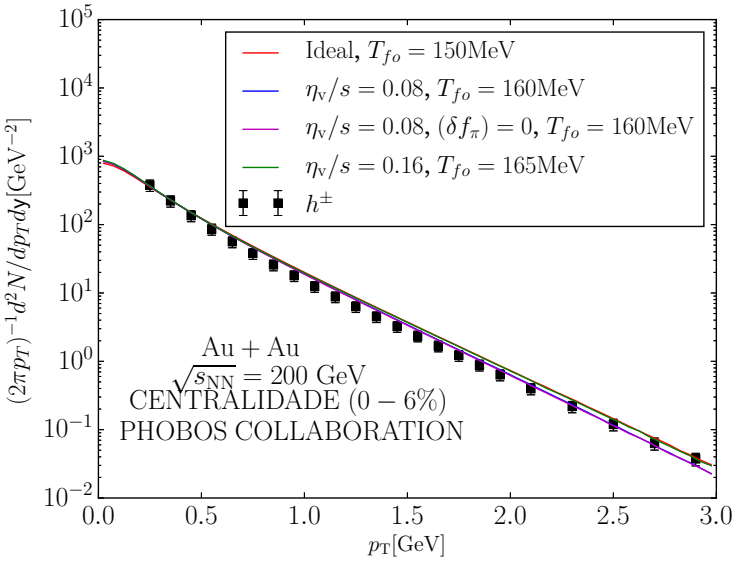


Figura 6.4: Distribuição em momento transversal em função de p_T para colisões Au+Au centrais (0-6%) com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV. Comparação das simulações utilizando o modelo hidrodinâmico para diferentes casos: ideal (linha vermelha), $\eta_v/s = 0.08$ sem a correção viscosa (linha magenta), $\eta_v/s = 0.08$ com a correção viscosa (linha azul) e $\eta_v/s = 0.16$ com a correção viscosa (linha verde). Os dados experimentais são da colaboração PHOBOS [95].

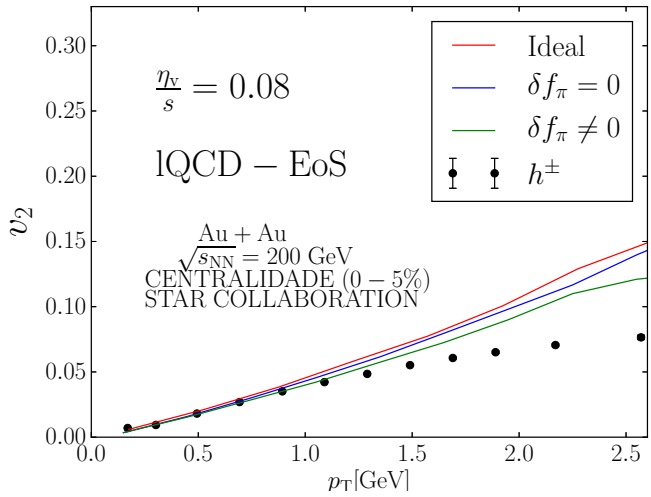
Fluxo Elíptico

Após realizar os ajustes, dados pelas tabelas 5.1 e 5.2, é interessante analisar o efeito da viscosidade de cisalhamento no fluxo elíptico. Primeiramente vamos analisar o efeito da correção δf_π. Na figura 6.5a, temos os resultados de simulações para $\eta_v/s = 0.08$ com e sem a correção na função de distribuição. Quando $\delta f_\pi = 0$ (linha azul) é possível ver uma melhora, quando comparado com o caso ideal, na comparação com os dados experimentais. Entretanto, se incluirmos a correção na função de distribuição, $\delta f_\pi \neq 0$, (linha verde) obtemos um resultado mais próximo aos dados experimentais, do que os outros dois casos. Neste caso, é possível descrever os dados na região $p_T \lesssim 1.1$ GeV. Na figura 6.5b, mostramos os resultados da análise de v_2 para $\eta_v/s = 0.08$ e $\eta_v/s = 0.16$ (ambos com $\delta f_\pi \neq 0$). Como dito anteriormente, para $\eta_v/s = 0.08$ é possivel descrever

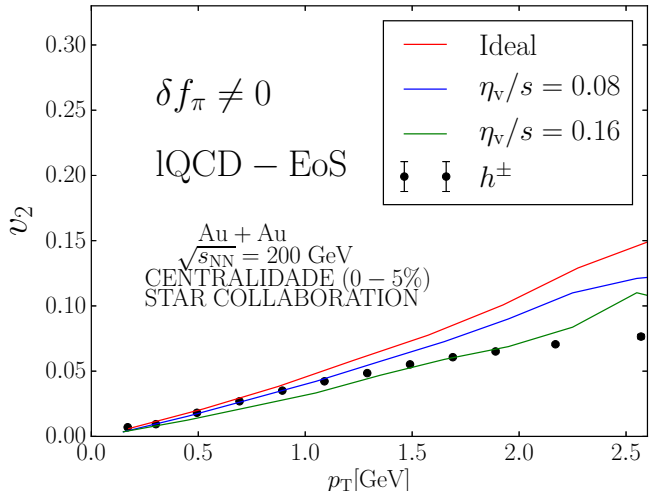
v_2 na região $p_{\mathrm{T}} \lesssim 1.1$ GeV. Para $\eta_{\mathrm{v}}/s = 0.16$ é possível descrever os dados na região de $0 \lesssim p_{\mathrm{T}} \lesssim 0.5$ GeV e $1.2 \lesssim p_{\mathrm{T}} \lesssim 2$ GeV. Entretanto na região $0.5 \lesssim p_{\mathrm{T}} \lesssim 1.2$ GeV, o modelo não consegue reproduzir os dados.

Raios HBT

O resultado obtido para investigar a influência da viscosidade de cisalhamento nos raios HBT é apresentado na figura 6.6. Nos gráficos, temos a comparação dos casos: ideal, $\eta_{\mathrm{v}}/s = 0.08$ (com $\delta f_\pi = 0$ e $\delta f_\pi \neq 0$) e $\eta_{\mathrm{v}}/s = 0.16$. Inicialmente é possível observar, utilizando a comparação entre $\eta_{\mathrm{v}}/s = 0.08$ (com $\delta f_\pi = 0$ e $\delta f_\pi \neq 0$), que a correção viscosa δf_π não exerce influência nos raios HBT: $R_{\mathrm{out}}, R_{\mathrm{side}}$ e R_{long}. No entanto ao compararmos os casos ideal, $\eta_{\mathrm{v}}/s = 0.08$ e $\eta_{\mathrm{v}}/s = 0.16$ vemos que há uma forte influência nos raios HBT. Para o raio R_{out} a hidrodinâmica ideal descreve melhor os dados para $K_{\mathrm{T}} = 0.2$ e 0.3 GeV. Para $K_{\mathrm{T}} = 0.4$ GeV, o melhor resultado é obtido com $\eta_{\mathrm{v}}/s = 0.08$. Por fim, para $K_{\mathrm{T}} = 0.525$ GeV, o melhor resultado é obtido com $\eta_{\mathrm{v}}/s = 0.16$. Para o raio R_{side} a hidrodinâmica ideal esta mais próxima aos dados em todos os valores de K_{T}. Para o raio R_{long}, $\eta_{\mathrm{v}}/s = 0.16$ esta mais próximo dos dados em $K_{\mathrm{T}} = 0.2$ GeV. Para $K_{\mathrm{T}} = 0.3$ e 0.4 GeV, $\eta_{\mathrm{v}}/s = 0.08$ está mais próximo dos dados experimentais. Para $K_{\mathrm{T}} = 0.525$, temos resultados próximos para os casos ideal e $\eta_{\mathrm{v}}/s = 0.08$. Para a fração $R_{\mathrm{out}}/R_{\mathrm{side}}$ o melhor resultado foi obtido com $\eta_{\mathrm{v}}/s = 0.16$. Esperava-se que a viscosidade de cisalhamento fosse modificar a inclinação dos raios HBT para melhor descrever os dados, porém o que vemos nos gráficos é apenas uma diferença na altura, não mudando a inclinação. Isto pode estar relacionado ao fato de usarmos o coeficiente η_{v}/s constante em toda a evolução hidrodinâmica. Na realidade ele deveria depender da temperatura, como mostrado na figura 2.2. É possível que se levarmos em consideração a dependência de η_{v}/s com a temperatura, teremos uma maior inclinação dos raios. Deixaremos esse estudo para um trabalho futuro.

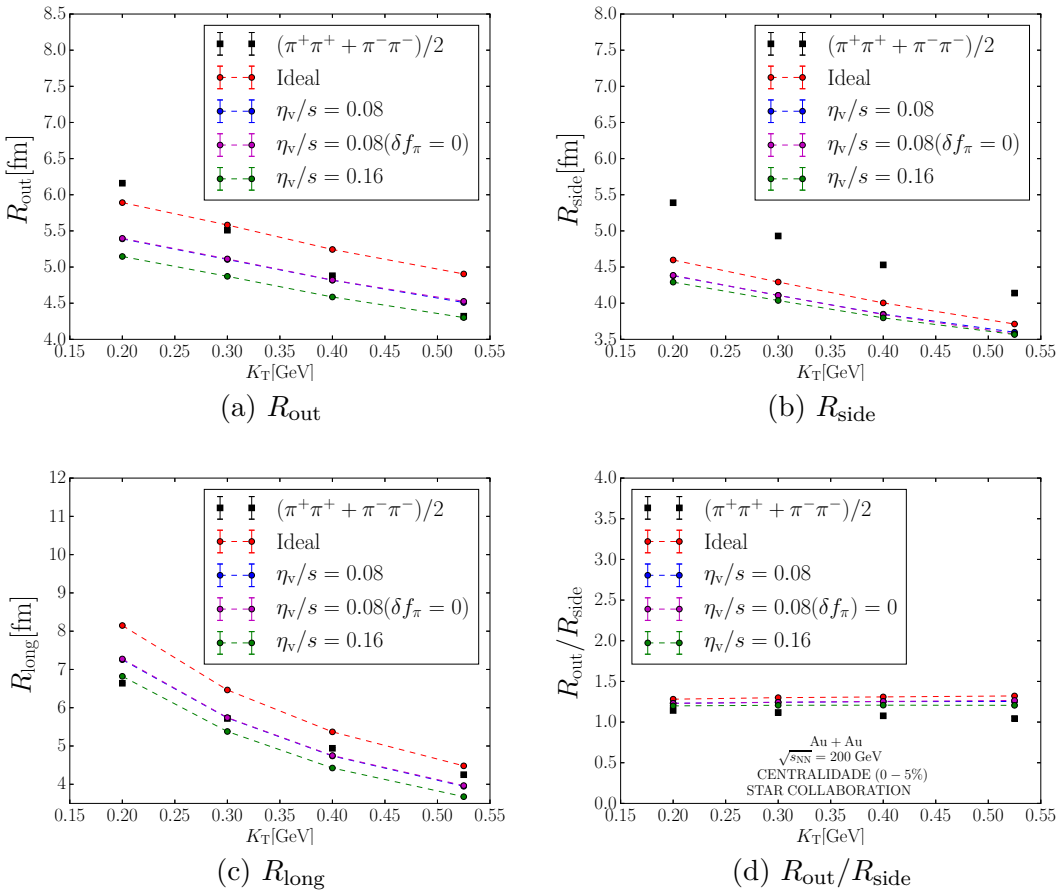


(a)



(b)

Figura 6.5: Fluxo elíptico em função de p_T para colisões Au+Au centrais (0-5%) com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV. Comparação das simulações utilizando o modelo hidrodinâmico para diferentes casos: ideal (linha vermelha) e os casos dissipativos. No gráfico 6.5a é feita uma comparação dos efeitos da correção na função de distribuição para $\eta_v/s = 0.08$. A linha azul representa o calculo sem a correção ($\delta f_\pi = 0$) enquanto a verde representa o cálculo com a correção ($\delta f_\pi \neq 0$). No gráfico 6.5b é feita uma comparação para diferentes valores de η_v/s (com $\delta f_\pi \neq 0$). A linha azul representa $\eta_v/s = 0.08$ enquanto a verde representa $\eta_v/s = 0.16$. Os dados experimentais são da colaboração STAR [112].



(a) R_{out} (b) R_{side}

(c) R_{long} (d) $R_{\text{out}}/R_{\text{side}}$

Figura 6.6: Raios HBT em função do momento médio K_T para colisões centrais (0-5%). Comparação das simulações utilizando o modelo hidrodinâmico para os seguintes casos: ideal (pontos vermelhos), $\eta_v/s = 0.08$ com $\delta f_\pi \neq 0$ (pontos azuis), $\eta_v/s = 0.08$ com $\delta f_\pi = 0$ (pontos magenta), $\eta_v/s = 0.16$ com $\delta f_\pi \neq 0$ (pontos verdes). Os dados experimentais (quadrados pretos) são da colaboração STAR [111].

6.2.2 Viscosidade Volumétrica

Os cálculos hidrodinâmicos incluindo somente a viscosidade volumétrica foram realizados utilizando o tempo de relaxamanto dado por $\tau_\Pi = 6\zeta_v/sT$. Nesta dissertação, consideramos que ζ_v/s é constante e aplicável somente na fase hadrônica da matéria. Assumimos os valores 0.04 e 0.08.

Distribuição em Momento Transversal

A figura 6.7, mostra o resultado dos ajustes da temperatura de freeze-out para os valores de $\zeta_v/s = 0.08$ com e sem a correção na função de distribuição (δf_Π) e $\zeta_v/s = 0.04$ com correção. Em todas as simulações o valor de temperatuta de freeze-out foi o mesmo, alterando somente a constante normalização[1], κ_T, conforme a tabela 5.1. Vemos que a viscosidade volumétrica não influencia na temperatura de freeze-out, como era esperado.

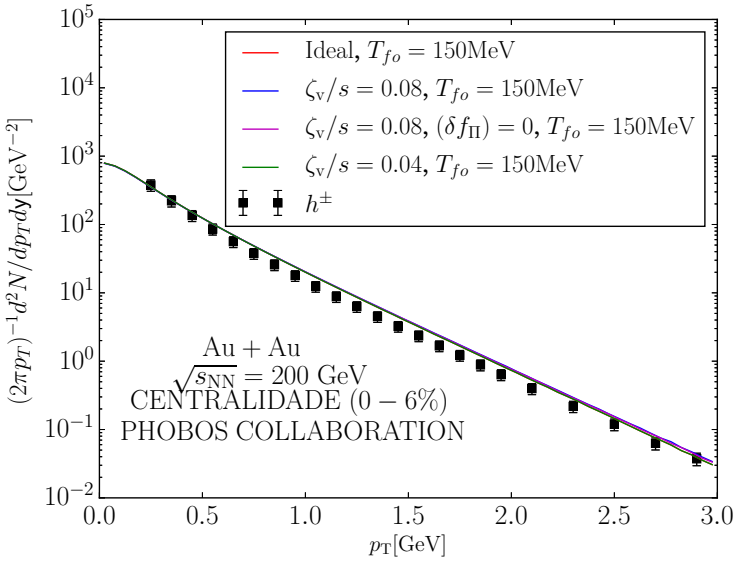


Figura 6.7: Distribuição em momento transversal em função de p_T para colisões Au+Au centrais (0-6%) com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV. Comparação das simulações utilizando o modelo hidrodinâmico para diferentes casos: ideal (linha vermelha), $\zeta_v/s = 0.08$ sem a correção viscosa (linha magenta), $\zeta_v/s = 0.08$ com a correção viscosa (linha azul) e $\zeta_v/s = 0.04$ com a correção viscosa (linha verde). Os dados experimentais são da colaboração PHOBOS [95].

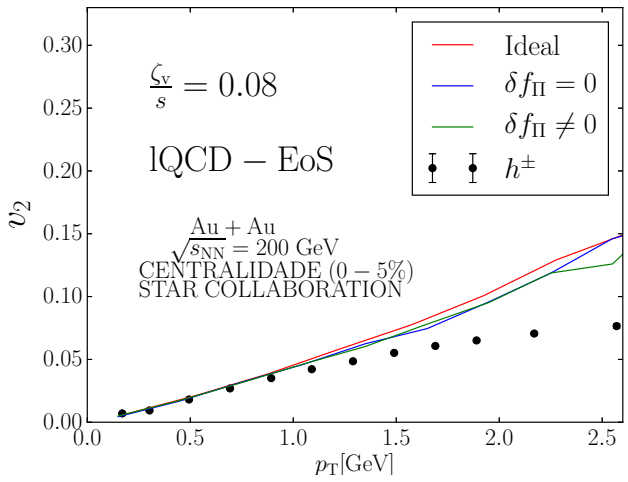
[1] Note que a mudança em κ_T é pequena.

Fluxo Elíptico

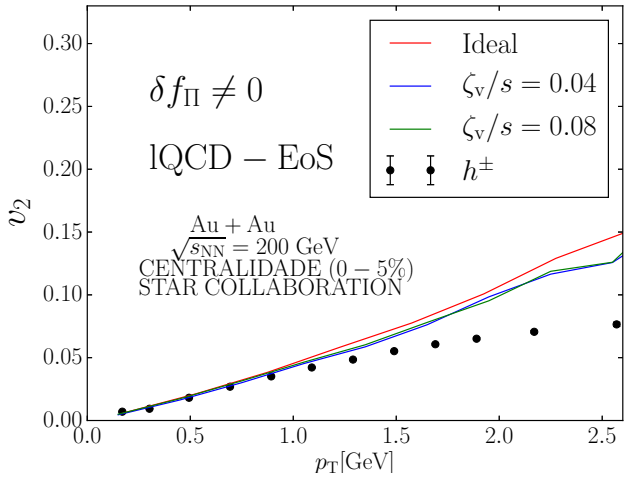
Para entender o efeito da viscosidade volumétrica no fluxo elíptico, analisaremos primeiramente o efeito da correção δf_{Π}. Na figura 6.8a, temos os resultados de simulações para $\zeta_{\rm v}/s = 0.08$ com e sem a correção na função de distribuição. Quando $\delta f_{\Pi} = 0$ (linha azul) e $\delta f_{\Pi} \neq 0$, (linha verde) é possível ver uma similaridade entre as curvas e uma pequena melhora, quando comparado com o caso ideal. Isto indica que a correção na função de distribuição, da viscosidade volumétrica, tem pouca influência na distribuição anisotrópica do sistema. Na figura 6.8b, mostramos os resultados da análise de v_2 para $\zeta_{\rm v}/s = 0.08$ e $\zeta_{\rm v}/s = 0.04$ (com $\delta f_{\Pi} \neq 0$). Vemos uma similaridade entre as curvas e uma pequena melhora quando comparado ao caso ideal. Isto indica que a viscosidade volumétrica contribui pouco para v_2. Isso era esperado, pois como foi mostrado em [27], os efeitos da viscosidade volumétrica no fluxo elíptico são mais fortes em colisões mais periféricas.

Raios HBT

O resultado obtido para investigar a influência da viscosidade volumétrica nos raios HBT é apresentado na figura 6.9. Nos gráficos, temos a comparação dos casos: ideal, $\zeta_{\rm v}/s = 0.08$ (com $\delta f_{\pi} = 0$ e $\delta f_{\pi} \neq 0$) e $\zeta_{\rm v}/s = 0.04$. Como era esperado, os raios HBT não são sensíveis a viscosidade volumétrica.

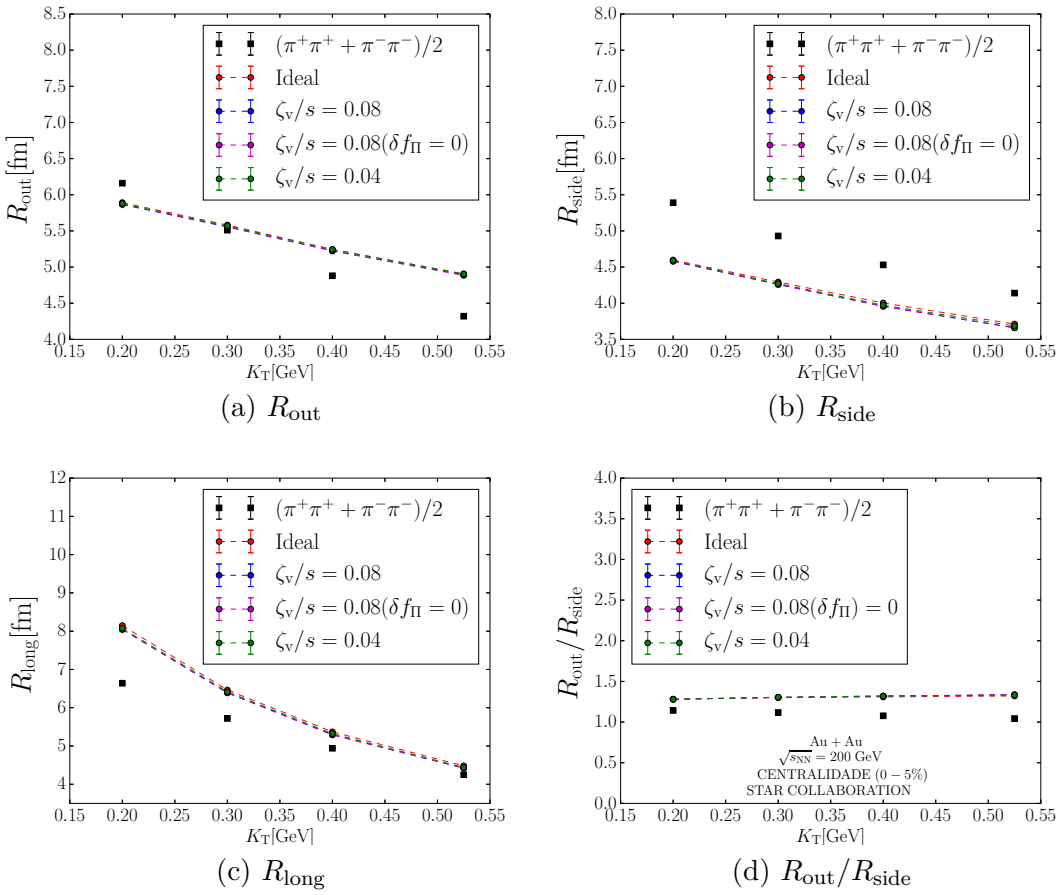


(a)



(b)

Figura 6.8: Fluxo elíptico em função de p_T para colisões Au+Au centrais (0-5%) com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV. Comparação das simulações utilizando o modelo hidrodinâmico para diferentes casos: ideal (linha vermelha) e os casos com viscosidade volumétrica. No gráfico 6.8a é feita uma comparação dos efeitos da correção na função de distribuição para $\zeta_v/s = 0.08$. A linha azul representa o calculo sem a correção ($\delta f_\Pi = 0$) enquanto a verde representa o cálculo com a correção ($\delta f_\Pi \neq 0$). No gráfico 6.8b é feita uma comparação para diferentes valores de ζ_v/s (com $\delta f_\Pi \neq 0$). A linha azul representa $\zeta_v/s = 0.04$ enquanto a verde representa $\zeta_v/s = 0.08$. Os dados experimentais são da colaboração STAR [112].



(a) R_{out} (b) R_{side}

(c) R_{long} (d) $R_{\text{out}}/R_{\text{side}}$

Figura 6.9: Raios HBT em função do momento médio K_T para colisões centrais (0-5%). Comparação das simulações utilizando o modelo hidrodinâmico para os seguintes casos: ideal (pontos vermelhos), $\zeta_v/s = 0.08$ com $\delta f_\pi \neq 0$ (pontos azuis), $\zeta_v/s = 0.08$ com $\delta f_\pi = 0$ (pontos magenta), $\zeta_v/s = 0.04$ com $\delta f_\pi \neq 0$ (pontos verdes). Os dados experimentais (quadrados pretos) são da colaboração STAR [111].

6.2.3 Viscosidade de Cisalhamento e Volumétrica

Para realizar os cálculos hidrodinâmicos incluindo tanto a viscosidade de cisalhamento quanto a viscosidade volumétrica, consideramos que os tempos de relaxamento são dados por $\tau_\pi = \tau_\Pi = 3\eta_v/sT$. Vamos considerar as seguintes combinações para os coeficientes: $\eta_v/s = \zeta_v/s = 0.08$, $\eta_v/s = 0.08$ e $\zeta_v/s = 0.04$, $\eta_v/s = 0.16$ e $\zeta_v/s = 0.04$.

Nesta seção, todas as simulações são realizadas com $\delta f_\pi \neq 0$ e $\delta f_\Pi \neq 0$

Distribuição em Momento Transversal

A figura 6.10, mostra o resultado dos ajustes da temperatura de freeze-out para os valores: $\eta_v/s = \zeta_v/s = 0.08$ (linha magenta), $\eta_v/s = 0.08$ e $\zeta_v/s = 0.04$ (linha azul), $\eta_v/s = 0.16$ e $\zeta_v/s = 0.04$ (linha verde). Como discutido na seção anterior, a viscosidade volumétrica não altera a temperatura de freeze-out. E com ambas as viscosidades há um pequeno aumento na constante de normalização da densidade de entropia, quando comparado ao caso só com viscosidade de cisalhamento, ver tabela 5.1.

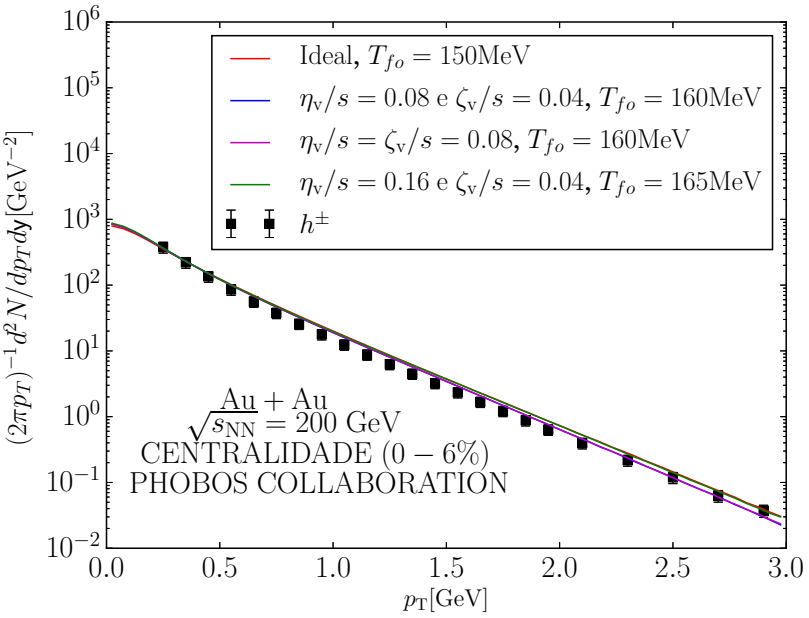


Figura 6.10: Distribuição em momento transversal em função de p_T para colisões Au+Au centrais (0-6%) com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV. Comparação das simulações utilizando o modelo hidrodinâmico para diferentes casos: ideal (linha vermelha), $\eta_v/s = \zeta_v/s = 0.08$ (linha magenta), $\eta_v/s = 0.08$ e $\zeta_v/s = 0.04$ (linha azul), e $\eta_v/s = 0.16$ e $\zeta_v/s = 0.04$ (linha verde). Os dados experimentais são da colaboração PHOBOS [95].

Fluxo Elíptico

Na figura 6.11, mostramos o resultado de $v_2(p_T)$ obtidos para os casos: ideal (linha vermelha), $\eta_v/s = \zeta_v/s = 0.08$ (linha magenta), $\eta_v/s = 0.08$ e $\zeta_v/s = 0.04$ (linha azul), e $\eta_v/s = 0.16$ e $\zeta_v/s = 0.04$ (linha verde). Para $\eta_v/s = \zeta_v/s = 0.08$ (linha magenta) e $\eta_v/s = 0.08$, $\zeta_v/s = 0.04$ (linha azul), temos resultados muito similares pois os efeitos da viscosidade de cisalhamento são maiores que os da viscosidade volumétrica. Para $\eta_v/s = 0.16$ e $\zeta_v/s = 0.04$, nós vemos um resultado similar ao apresentado para $\eta_v/s = 0.16$ e $\zeta_v/s = 0$ (figura 6.5b). Portanto, mesmo no caso em que temos ambas as viscosidades, a viscosidade de cisalhamento é a responsável por obter um resultado mais próximo aos dados experimentais, e a viscosidade volumétrica não altera o resultado das simulações.

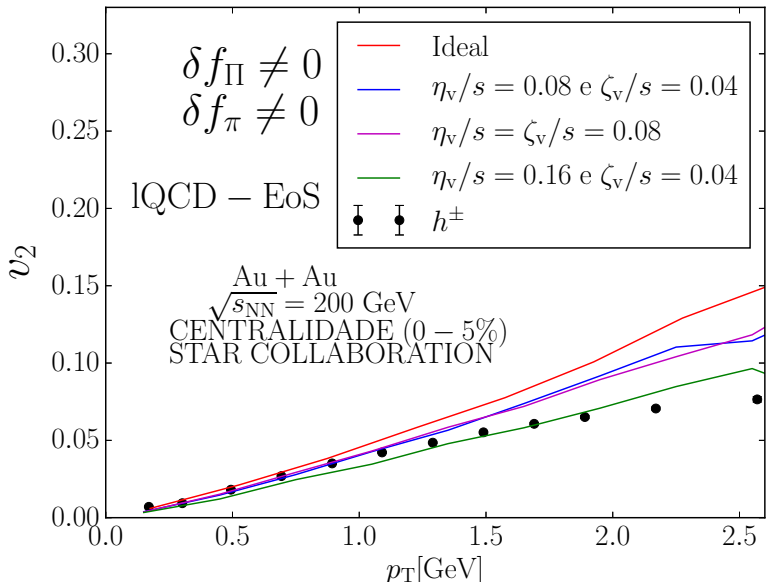
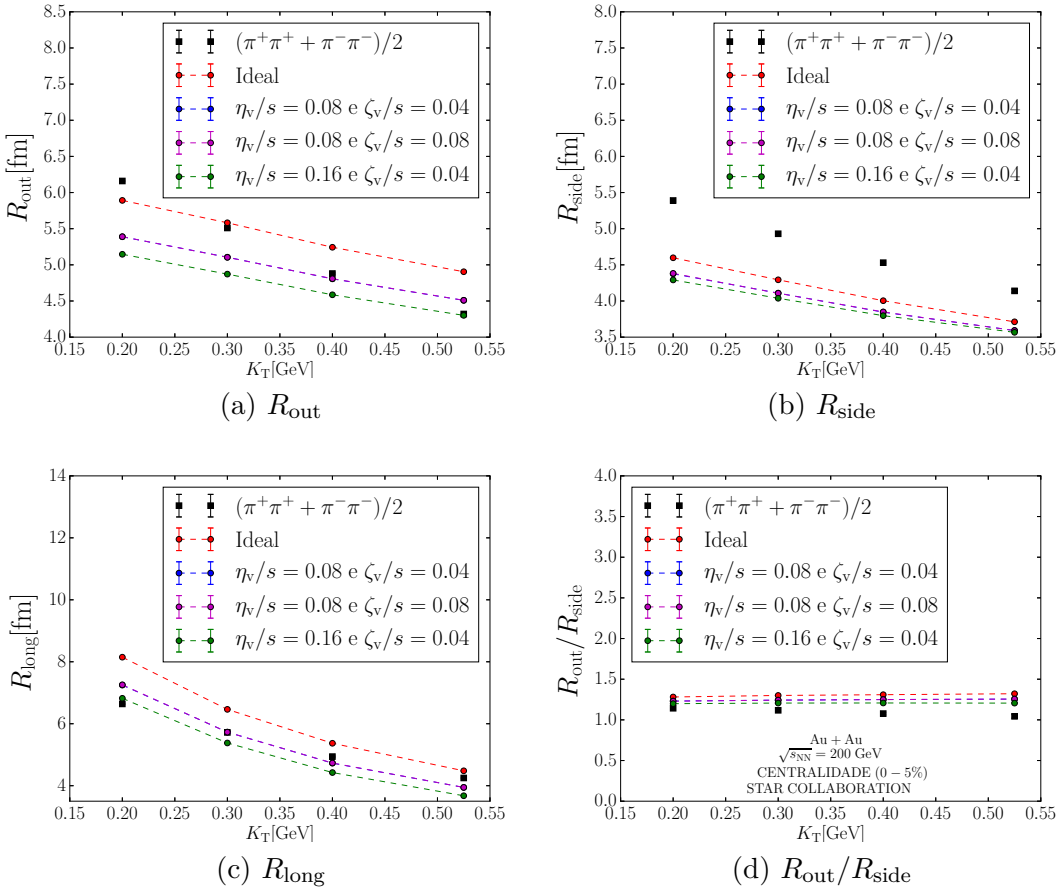


Figura 6.11: Fluxo elíptico em função de p_T para colisões Au+Au centrais (0-5%) com $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV. Comparação das simulações utilizando o modelo hidrodinâmico para diferentes casos: ideal (linha vermelha), $\eta_v/s = \zeta_v/s = 0.08$ (linha magenta), $\eta_v/s = 0.08$ e $\zeta_v/s = 0.04$ (linha azul), e $\eta_v/s = 0.16$ e $\zeta_v/s = 0.04$ (linha verde). Os dados experimentais são da colaboração STAR [112].

Raios HBT

Os resultados para os raios HBT incluindo as duas viscosidades são apresentados na figura 6.12. Nos gráficos, temos a comparação dos casos: ideal (pontos vermelhos), $\eta_v/s = \zeta_v/s = 0.08$ (pontos magenta), $\eta_v/s = 0.08$ e $\zeta_v/s = 0.04$ (pontos azuis), $\eta_v/s = 0.16$ e $\zeta_v/s = 0.04$ (pontos verdes). Como os raios HBT não são sensíveis à viscosidade volumétrica, podemos ver que os resultados obtidos são similares ao caso em que temos somente a viscosidade de cisalhamento, discutido na subseção 6.2.1.

Feito toda esta discussão neste capítulo, podemos concluir que a equação de estado lQCD-EoS descreve melhor os dados experimentais tanto o fluxo elíptico quanto para os raios HBT. Isto aponta na direção de uma transição de fase do tipo crossover. Nos resultados apresentados na seção 6.2, vemos que a inclusão dos efeitos dissipativos leva a uma melhora nos resultados obtidos de v_2, na região de $p_T > 1$ GeV, quando comparado com caso ideal. Vemos também que a inclusão da correção viscosa na função de distribuição, para os casos contendo a viscosidade volumétrica, é importante para obter um resultado mais próximo aos dados experimentais. A inclusão da viscosidade volumétrica (com e sem a correção na função de distribuição), não altera, essencialmente, v_2 e nem os raios HBT. As simulações com resultados mais próximos aos dados experimentais, foram obtidos incluindo os efeitos da viscosidade de cisalhamento tanto para o fluxo elíptico quanto para os raios HBT. Porém, os resultados obtidos para os raios HBT indicam a necessidade de incluir a viscosidade dependente da temperatura.



(a) R_{out} (b) R_{side}

(c) R_{long} (d) $R_{\text{out}}/R_{\text{side}}$

Figura 6.12: Raios HBT em função do momento médio K_T para colisões centrais (0-5%). Comparação das simulações utilizando o modelo hidrodinâmico para os seguintes casos: ideal (pontos vermelhos), $\eta_v/s = \zeta_v/s = 0.08$ (pontos magenta), $\eta_v/s = 0.08$ e $\zeta_v/s = 0.04$ (pontos azuis), e $\eta_v/s = 0.16$ e $\zeta_v/s = 0.04$ (pontos verdes). Os dados experimentais (quadrados pretos) são da colaboração STAR [111].

Capítulo 7

Considerações Finais e Perspectivas

Neste trabalho foi realizado um estudo sobre colisões relativísticas centrais Au+Au com $\sqrt{s_{\mathrm{NN}}} = 200$ GeV no RHIC, utilizando o modelo hidrodinâmico. As maiores vantagens deste modelo são a sua simplicidade conceitual e o emprego de poucos ingredientes para resolvê-lo. O objetivo deste trabalho foi investigar a influência das equações de estado e dos efeitos dissipativos no fluxo elíptico (v_2) e nos raios HBT. Para isto, foram utilizadas: condições iniciais suaves, geradas no T$_{\mathrm{R}}$ENTo, para descrever o instante em que a matéria entra em equilíbrio térmico local; o modelo hidrodinâmico, ideal e viscoso, em 2+1 dimensões calculado com o vHLLE; o mecanismo de freeze-out utilizado para calcular os observáveis, calculado no THERMINATOR2; e duas equações de estado, uma com transição de fase de primeira ordem (FO-EoS) e uma baseada na QCD na rede (lQCD-EoS), descritas no capítulo 4. Os resultados das simulações, apresentados na seção 6.1 do capítulo 6, mostraram que a equação de estado lQCD-EoS fornece resultados mais próximos aos dados experimentais tanto para o v_2 quanto para os raios HBT. Os resultados das simulações, apresentados na seção 6.2 do capítulo 6, mostraram que os efeitos da viscosidade de cisalhamento são importantes para uma

melhor compreensão dos dados experimentais, enquanto a viscosidade volumétrica não altera essencialmente o resultado obtido usando a hidrodinâmica ideal. Também foi mostrado que a correção na função de distribuição, para a viscosidade de cisalhamento, na fórmula de Cooper-Frye (seção 3.2.3 do capítulo 3), é importante na descrição de v_2. A melhor descrição de v_2 foi obtida em simulações com $\eta_v/s = 0.16$ e $\zeta_v/s = 0.04$ e $\eta_v/s = 0.16$ e $\zeta_v/s = 0$ incluindo a correção viscosa na função de distribuição. Para os raios HBT, a melhor descrição dos dados experimentais foi obtidas com $\eta_v/s = 0.08$ e $\zeta_v/s = 0.04$ ou $\eta_v/s = 0.08$ e $\zeta_v/s = 0.08$ ou $\eta_v/s = 0.08$ e $\zeta_v/s = 0$.

Existem diversas extensões a esse trabalho que podem ser feitas futuramente usando os mesmos códigos numéricos T$_\mathrm{R}$ENTo, vHLLE e THERMINATOR2: realização de simulações hidrodinâmicas em 3+1 dimensões, que permitiria calcular, por exemplo, a dependência dos fluxos com a pseudorrapidez; utilizar condições iniciais evento a evento, que sabemos ser essenciais na descrição dos dados experimentais, pois descrevem de forma mais realista o que acontece em uma colisão; inclusão de uma viscosidade dependente da temperatura, que podem trazer melhorias aos resultados dos raios HBT. Além disso é essencial realizar um estudo mais completo das várias janelas de centralidade. Há ainda a possibilidade de se estudar fluxos em colisões ultracentrais U+U no RHIC e colisões (p+p, p+A, A+A), nas energias do LHC.

Apêndice A

Tensor Energia-Momento

Neste apêndice, faremos explicitamente alguns dos cálculos presentes no capítulo 2.

A.1 Hidrodinâmica Ideal

No referencial de repouso do fluido ideal, o tensor energia-momento e a 4-corrente de cargas conservadas são definidas da seguinte forma

$$T_R^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}, \qquad j_{i,R}^{\nu} = \begin{pmatrix} n_i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{A.1}$$

em que ϵ é a densidade de energia, P a pressão e n_i é a i-ésima densidade de carga generalizada. Utilizando a transformação de Lorentz, podemos reescrever

$$T_{ideal}^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}T_R^{\alpha\beta} = \Lambda^{\mu}{}_{0}\Lambda^{\nu}{}_{0}T_R^{00} + \Lambda^{\mu}{}_{i}\Lambda^{\nu}{}_{j}T_R^{ij}, \tag{A.2}$$

$$j_{i,(ideal)}^{\nu} = \Lambda^{\nu}{}_{\alpha}j_{i,R}^{\alpha} = \Lambda^{\nu}{}_{0}j_{i,R}^{0} + \Lambda^{\nu}{}_{k}j_{i,R}^{k}. \tag{A.3}$$

A 4-velocidade do fluido também pode ser escrita em termos das transformações de Lorentz da seguinte forma

$$u^{\nu} = \Lambda^{\nu}{}_{\mu} u^{\mu}_{R} = \Lambda^{\nu}{}_{0} u^{0}_{R} + \Lambda^{\nu}{}_{i} u^{i}_{R} = \Lambda^{\nu}{}_{0}, \tag{A.4}$$

em que $u^{\mu}_{R} = (1,0,0,0)$ é a 4-velocidade no referencial de repouso do fluido. Substituindo as componentes dadas por (A.1) e a 4-velocidade dada por (A.4), temos

$$T^{\mu\nu}_{ideal} = \epsilon u^{\mu} u^{\nu} + \Lambda^{\mu}{}_{i} \Lambda^{\nu}{}_{j} \delta^{ij} P, \tag{A.5}$$

$$j^{\nu}_{i,(ideal)} = n_i u^{\nu}, \tag{A.6}$$

em que δ^{ij} é a delta de Kronecker.

Também podemos reescrever a métrica[1] por meio das transformações de Lorentz

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} &= \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} g^{\alpha\beta}_{R} = \Lambda^{\mu}{}_{0} \Lambda^{\nu}{}_{0} g^{00}_{R} - \Lambda^{\mu}{}_{i} \Lambda^{\nu}{}_{j} \delta^{ij}, \\ \Lambda^{\mu}{}_{i} \Lambda^{\nu}{}_{j} \delta^{ij} &= -(g^{\mu\nu} - u^{\mu} u^{\nu}) = -\Delta^{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{A.7}$$

em que $\Delta^{\mu\nu}$ é o projetor ortogonal a 4-velocidade do fluido.

Substituindo (A.7) na equação (A.5), obtemos as equações para o fluido ideal relativístico:

$$T^{\mu\nu}_{ideal} = \epsilon u^{\mu} u^{\nu} - \Delta^{\mu\nu} P, \tag{A.8}$$

$$j^{\nu}_{i,(ideal)} = n_i u^{\nu}. \tag{A.9}$$

[1] Aqui estamos considerando a métrica no espaço de Minkowski, ou seja, $g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$.

A.2 Hidrodinâmica Dissipativa

No caso do fluido viscoso devemos levar em consideração os efeitos dissipativos. Na presença destes efeitos o tensor energia-momento e as 4-correntes continuam conservadas localmente. Estas quantidades são dadas pela soma da parte ideal ($T^{\mu\nu}_{ideal}$ e $j^{\nu}_{i,(ideal)}$ dadas pelas equações (A.8) e (A.9) respectivamente) com a parte viscosa (que denotaremos por $\delta T^{\mu\nu}_{visc}$ e $\delta j^{\nu}_{i,(visc)}$). Portanto, temos

$$T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_{ideal} + \delta T^{\mu\nu}_{visc} \tag{A.10}$$

$$j^{\nu}_{i} = j^{\nu}_{i,(ideal)} + \delta j^{\nu}_{i,(visc)}. \tag{A.11}$$

A corrente $\delta j^{\nu}_{i,(visc)} = V^{\nu}$ é identificada como a difusividade de carga, e o tensor $\delta T^{\mu\nu}_{visc} = \pi^{\mu\nu} - \Delta^{\mu\nu}\Pi$ é dado pela combinação das viscosidades de cisalhamento ($\pi^{\mu\nu}$) e volumétrica (Π). Assim, o tensor energia-momento e a 4-corrente de cargas conservadas são dados por

$$T^{\mu\nu} = \epsilon u^{\mu}u^{\nu} - (P + \Pi)\Delta^{\mu\nu} + \pi^{\mu\nu} \tag{A.12}$$

$$j^{\nu}_{i} = n_i u^{\nu} + V^{\nu}_{i}. \tag{A.13}$$

Nesta definição, estamos desconsiderando os efeitos de vorticidade e, por simplicidade, vamos utilizar, em nossos cálculos numéricos, $V^{\nu}_{i} = 0$.

A.3 4-Velocidade nas Coordenadas de Milne

A 4-velocidade no espaço de Minkowski é dada por

$$u^{\mu}_{\mathrm{MS}} = \gamma_{\mathrm{T}} \left(\cosh y_{\mathrm{L}}, \tanh y_{\mathrm{T}} \cos\phi, \tanh y_{\mathrm{T}} \sin\phi, \sinh y_{\mathrm{L}}\right). \tag{A.14}$$

Assim como as coordenadas x e y, as 4-velocidades u^{x} e u^{y} não se alteram. Neste

caso, realizamos a transformação nas coordenadas τ e η_s, utilizando $u^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu_{\rm MS}} u^\nu_{\rm MS}$. Logo, temos

$$u^\tau = \frac{\partial \tau}{\partial t} u^t + \frac{\partial \tau}{\partial z} u^z, \tag{A.15}$$

$$u^{\eta_s} = \frac{\partial \eta_s}{\partial t} u^t + \frac{\partial \eta_s}{\partial z} u^z. \tag{A.16}$$

Como $\tau^2 = t^2 - z^2, \eta_s = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{t+z}{t-z}\right), t = \tau\cosh\eta_s$ e $z = \tau\sinh\eta_s$, temos

$$u^\tau = \cosh\eta_s u^t - \sinh\eta_s u^z, \tag{A.17}$$

$$u^{\eta_s} = \frac{1}{\tau}\sinh\eta_s u^t + \frac{1}{\tau}\cosh\eta_s u^z. \tag{A.18}$$

Substituindo as componentes 4-velocidade u^t e u^z, dadas pela equação (A.14), nas equações (A.19) e (A.18), temos

$$u^\tau = \gamma_{\rm T}\cosh\eta_s\cosh y_{\rm L} - \gamma_{\rm T}\sinh\eta_s\sinh y_{\rm L} = \gamma_{\rm T}\cosh(y_{\rm L} - \eta_s), \tag{A.19}$$

$$u^{\eta_s} = \gamma_{\rm T}\frac{1}{\tau}\sinh\eta_s\cosh y_{\rm L} + \gamma_{\rm T}\frac{1}{\tau}\cosh\eta_s\sinh y_{\rm L} = \frac{\gamma_{\rm T}}{\tau}\sinh(y_{\rm L} - \eta_s). \tag{A.20}$$

Desta forma, obtemos a 4-velocidade nas coordenadas de Milne:

$$u^\mu = \gamma_{\rm T}\left(\cosh(y_{\rm L} - \eta_s), \tanh y_{\rm T}\cos\phi, \tanh y_{\rm T}\sin\phi, \frac{1}{\tau}\sinh(y_{\rm L} - \eta_s)\right). \tag{A.21}$$

Apêndice B

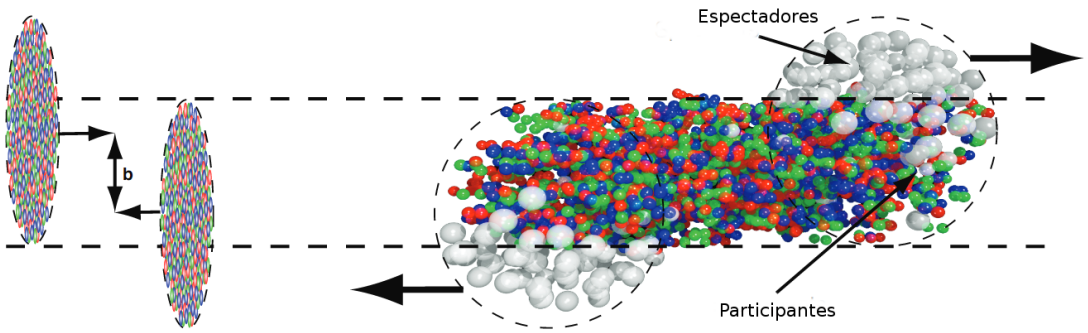
Definições, Conceitos e Equações

Neste apêndice discutiremos algumas das definições, conceitos e equações utilizadas no corpo da dissertação.

B.1 Geometria da Colisão

Um aspecto importante para descrever as colisões de íons pesados é a geometria da colisão. Podemos descrever estas colisões como sendo diversas colisões indíviduais entre os nucleons que compõe o núcleo. Na figura B.1, temos uma ilustração de uma colisão núcleo-núcleo. A figura B.1a, momento anterior a colisão, mostra dois núcleos acelerados com velocidades próximas a da luz. Este núcleos são contraídos por fatores de Lorentz. O parâmetro de impacto (b) é a distância entre os eixos horizontais que passam pelo centro dos núcleos, ele define a região dos nucleons que participam da colisão. A figura B.1b, no momento em que ocorre a colisão, mostra os nucleons participantes e os nucleons espectadores. Participantes são os nucleons que interagem na colisão enquanto espectadores são os nucleons que seguem inalterados. Desta forma, podemos definir o número de participantes, denotado por (N_{part}), e o número de espectadores (N_{esp}) que dependem de b. Desta forma, quanto menor é o b, maior será o número de

participantes da colisão e esta será mais central. A centralidade da colisão é definida a partir da relação entre o número de partículas que participam da colisão e o parâmetro de impacto. Em altas energias, as classes de centralidades são dadas em termos de percentuais, ou seja, quanto maior o percentual, mais periférica será a colisão e quanto menor o percentual, mais central será a colisão. Esta centralidade pode ser calculada, para núcleos idênticos, utilizando[1] $C = b^2/(2R)^2$, em que R é o raio do núcleo. Logo, as colisões são classificadas como centrais (maior número de participantes), semi-centrais, semi-periféricas e periféricas (menor número de participantes).



(a) Antes da Colisão (b) Depois da Colisão

Figura B.1: Ilustração de uma colisão de íons pesados. Figura B.1a núcleos acelerados momentos antes da colisão com parâmetro de impacto $\vec{b}$. Figura B.1b os participantes da colisão (região colorida) formam o QGP enquanto os espectadores seguem inalterados. Extraído e adaptado da referência[113].

B.2 Harmônicos Excêntricos

Os harmônicos excêntricos são a anisotropia da densidade de energia no plano transversal e estão relacionados com o estágio inicial da colisão. Eles são definidos da seguinte forma [58]:

$$\varepsilon_n e^{in\phi} = -\frac{\int dxdy r^n e^{in\phi}\epsilon(x,y)}{\int dxdy\epsilon(x,y)}, \tag{B.1}$$

[1] Os parâmetros de impacto máximo e mínimo são obtidos utilizando esta equação. Por exemplo, para um colisão Au+Au central (0-5%) temos $b_{\min} = 0$ e $b_{\max} \approx 2.99$.

em que $\epsilon(x,y)$ é a densidade de energia.

B.3 Ferramentas Matemáticas

Nesta seção descrevermos algumas das ferramentas matemáticas utilizadas no texto.

B.3.1 Símbolo de Levi-Civita

O símbolo de Levi-Civita 4-dimensional no espaço de Minkowski é definido da seguinte forma:

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}_{\rm MS} = \begin{cases} +1 & \text{se } (\mu\nu\alpha\beta) \text{ for permutação par de (0123);} \\ -1 & \text{se } (\mu\nu\alpha\beta) \text{ for permutação ímpar de (0123); e} \\ 0 & \text{se tivermos índices repetidos.} \end{cases} \tag{B.2}$$

Utilizando a transformação,

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\lambda_{\rm MS}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\sigma_{\rm MS}} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\gamma_{\rm MS}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\xi_{\rm MS}} \varepsilon^{\lambda\sigma\gamma\xi}_{\rm MS}, \tag{B.3}$$

obtemos o tensor de Levi-Civita nas coordenadas de Milne

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = \begin{cases} (1/\tau) & \text{se } (\mu\nu\alpha\beta) \text{ for permutação par de (0123);} \\ -(1/\tau) & \text{se } (\mu\nu\alpha\beta) \text{ for permutação ímpar de (0123); e} \\ 0 & \text{se tivermos índices repetidos.} \end{cases} \tag{B.4}$$

B.3.2 Derivada Covariante

A derivada covariante para um 4-vetor qualquer, A^μ, é definida da seguinte forma

$$\partial_{;\nu} A^\mu = \partial_\nu A^\mu + \Gamma^\mu{}_{\nu\alpha} A^\alpha, \tag{B.5}$$

para um tensor de 2ª ordem qualquer, $B^{\mu\nu}$, temos

$$\partial_{;\alpha} B^{\mu\nu} = \partial_\alpha B^{\mu\nu} + \Gamma^{\mu}_{\ \alpha\beta} B^{\nu\beta} + \Gamma^{\nu}_{\ \alpha\beta} B^{\mu\beta}, \tag{B.6}$$

em que $\Gamma^{\alpha}_{\ \mu\nu}$ são os símbolos de Christoffel, definidos da seguinte forma:

$$\Gamma^{\alpha}_{\ \mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}). \tag{B.7}$$

B.3.3 Função de Bessel Modificada

A função de Bessel modificada é definida, na sua forma integral, como:

$$K_\nu(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^\infty dx \frac{x^{2\nu}}{1+x^2} e^{-z\sqrt{1+x^2}}, \tag{B.8}$$

que possui a seguinte propriedade

$$\frac{d}{dz}[z^{-n} K_\nu(z)] = -z^{-n} K_{\nu+1}(z). \tag{B.9}$$

B.4 Perfil de Woods-Saxon [114]

O perfil de Woods-Saxon é utilizado para descrever a densidade nuclear de participantes, ρ^{part}. Para núcleos simétricos ρ^{part} é definida da seguinte forma [60]:

$$\rho^{part}_{A,B}(x,y,z) = \frac{\rho_0}{1 + \exp\left[\frac{(r - R_{A,B})}{a}\right]}, \tag{B.10}$$

em que ρ_0 é a densidade de saturação e usualmente é atribuido o valor de $0.17 fm^{-3}$ [41, 49], $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, a é parâmetro de difusão e $R_{A,B}$ é o raio do núcleo A ou B. Para calcular o raio de um núcleo qualquer, utilizamos a parametrização dada por [22, 49, 115]:

$$R = 1.12\mathcal{A}^{\frac{1}{3}} - 0.86\mathcal{A}^{-\frac{1}{3}}, \tag{B.11}$$

em que $\mathcal{A}$ é a massa atômica da respectiva partícula. Na tabela B.1, temos valores de $\mathcal{A}$, R e a para núcleos geralmente utilizados em colisões relativísticas de íons pesados.

Tabela B.1: Informações de núcleos simétricos implementados no T$_{\mathrm{R}}$ENTo.

Nome	Símbolo	$\mathcal{A}$	$R[fm]$	$a[fm]$
Cobre	Cu	62	4.36	0.596
Ouro	Au	192	6.37	0.535
Chumbo	Pb	208	6.49	0.546

A equação (B.10) é válida somente no caso de núcleos simétricos. Porém, uma proposta interessante é a de colisões com núcleos deformados, como por exemplo o Urânio (U). No caso de núcleos deformados, a densidade nuclear definida da seguinte forma [60]:

$$\rho^{part}_{A,B}(x,y,z) = \frac{\rho_0}{1 + \exp\left[\frac{(r - R_{A,B}(1+\beta_2 Y_{20}+\beta_4 Y_{40}))}{a}\right]}, \tag{B.12}$$

em que β_2 e β_4 são os fatores de deformação, $Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(\cos^2(\theta) - 1)$ e $Y_{40} = \frac{3}{16\sqrt{\pi}}(35\cos^4(\theta) - 30\cos^2(\theta) + 3)$ são os harmônicos esféricos. Na tabela B.2, temos valores de $\mathcal{A}$, R, a, β_2 e β_4 para núcleos deformadas utilizadas em colisões relativísticas de íons pesados.

Tabela B.2: Informações de núcleos deformados implementados no T$_{\mathrm{R}}$ENTo.

Nome	Símbolo	$\mathcal{A}$	$R[fm]$	$a[fm]$	β_2	β_4
Cobre	Cu2	62	4.36	0.596	0.162	-0.006
Ouro	Au2	192	6.37	0.535	-0.131	-0.031
Urânio	U	238	6.8	0.6	0.280	0.093

Estes são os perfis de Woods-Saxon, e estão implementados no T$_{\mathrm{R}}$ENTo.

Apêndice C

Inicialização da Viscosidade

Neste apêndice, faremos explicitamente os cálculos referêntes a subseção 3.1.5. Para calcularmos as viscosidades de cisalhamento e volumétrica iniciais, utilizamos o formalismo de Navier-Stokes nas coordenadas de Milne. Uma hipótese importante, para a realização deste cálculo, é assumir que inicialmente o sistema possua invariância por boost ($y_{\rm L} = \eta_{\rm s}$) e que a velocidade transversal é nula ($v_{\rm T} = 0$). Isto implica em uma rapidez transversal nula ($y_{\rm T} = 0$) e como $y_{\rm L} = \eta_{\rm s}$, temos que $u_{\eta_s} = 0$. Portanto a 4-velocidade do fluido neste sistema é dada por $u^{\mu} = (1,0,0,0)$ (ver seção 2.2).

Calcularemos primeiramente a viscosidade volumétrica e posteriormente cada componente do tensor viscosidade de cisalhamento. Segundo a equação (2.37) a viscosidade volumétrica é definida como

$$\Pi_{\rm NS} \;=\; -\zeta_{\rm v}\partial_{;\lambda}u^{\lambda}, \tag{C.1}$$

em que, a derivada covariante é dada por $\partial_{;\lambda}u^{\lambda} = \partial_{\lambda}u^{\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\lambda\beta}u^{\beta}$ e $\Gamma^{\lambda}_{\lambda\beta}$ são os símbolos de Christoffel. Portanto a equação (C.1), é reescrita da seguinte forma

$$\Pi_{\rm NS} \;=\; -\zeta_{\rm v}\left[\partial_{\lambda}u^{\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\lambda\beta}u^{\beta}\right]. \tag{C.2}$$

Como $u^{\mu} = (1,0,0,0)$, temos $\partial_{\lambda} u^{\lambda} = 0$ para qualquer valor de λ. Logo, a equação (C.2) se resume a seguinte forma

$$\Pi_{\rm NS} \;=\; -\zeta_{\rm v}\Gamma^{\lambda}_{\lambda\beta}u^{\beta}. \tag{C.3}$$

Nas coordenadas de Milne os únicos símbolos de Christoffel não nulos são: $\Gamma^{\eta_{\rm s}}_{\tau\eta_{\rm s}} = \Gamma^{\eta_{\rm s}}_{\eta_{\rm s}\tau} = 1/\tau$ e $\Gamma^{\tau}_{\eta_{\rm s}\eta_{\rm s}} = \tau$, sendo assim, esta equação só será diferente de zero se $\lambda = \eta_{\rm s}$ e $\beta = \tau$. Desta forma, obtemos

$$\Pi_{\rm NS} = -\frac{\zeta_{\rm v}}{2}\Gamma^{\eta_{\rm s}}_{\eta_{\rm s}\tau}\underbrace{u^{\tau}}_{=1} = \Pi_{\rm NS}(\tau) = -\frac{\zeta_{\rm v}}{\tau}. \tag{C.4}$$

Multiplicando e dividindo pela densidade de entropia, e assumindo que esta quantidade é calculada no tempo inicial τ_0, temos

$$\Pi_{\rm NS}(\tau_0,x,y) \;=\; -\frac{\left(\frac{\zeta_{\rm v}}{s}\right)}{\tau_0}s(\tau_0,x,y). \tag{C.5}$$

em que $s(\tau_0,x,y)$ é a condição inicial gerada no T$_{\rm R}$ENTo e os parâmetro τ_0 e $\zeta_{\rm v}/s$ são informados para o modelo hidrodinâmico.

Calculada a inicialização da viscosidade volumétrica, vamos obter a inicialização do tensor viscosidade de cisalhamento. Segundo a equação (2.36) a viscosidade de cisalhamento pode ser escrita da seguinte forma

$$\pi^{\mu\nu}_{\rm NS} \;=\; \eta_{\rm v}\left(\Delta^{\mu\lambda}\partial_{;\lambda}u^{\nu} + \Delta^{\nu\lambda}\partial_{;\lambda}u^{\mu}\right) - \frac{2}{3}\eta_{\rm v}\Delta^{\mu\nu}\partial_{;\lambda}u^{\lambda}. \tag{C.6}$$

Por simplicidade começaremos calculando as componentes nulas do tensor. Para $\pi^{\tau x}_{\rm NS}$, temos:

$$\pi^{\tau x}_{\rm NS} \;=\; \eta_{\rm v}\left(\Delta^{\tau\lambda}\partial_{;\lambda}u^{x} + \Delta^{x\lambda}\partial_{;\lambda}u^{\tau}\right) - \frac{2}{3}\eta_{\rm v}\Delta^{\tau x}\partial_{;\lambda}u^{\lambda}.$$

Lembrando que $\Delta^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - u^{\mu}u^{\nu}$ e utilizando os símbolos de Christoffel, temos

$$\pi^{\tau x}_{\rm NS} = \eta_{\rm v}\left[\left(g^{\tau\lambda}-u^{\tau}u^{\lambda}\right)\left(\partial_{\lambda}\underbrace{u^{x}}_{=0}+\Gamma^{\tau}_{x\beta}u^{\beta}\right)+\left(g^{x\lambda}-\underbrace{u^{x}}_{=0}u^{\lambda}\right)\left(\partial_{\lambda}u^{\tau}+\Gamma^{x}_{\tau\beta}u^{\beta}\right)\right]$$
$$-\frac{2}{3}\eta_{\rm v}\left(\underbrace{g^{\tau x}}_{=0}-\underbrace{u^{\tau}}_{=1}\underbrace{u^{x}}_{=0}\right)\partial_{;\lambda}u^{\lambda}$$
$$\pi^{\tau x}_{\rm NS} = \eta_{\rm v}\left[\left(g^{\tau\lambda}-u^{\tau}u^{\lambda}\right)\Gamma^{\tau}_{x\beta}u^{\beta}+g^{x\lambda}\left(\partial_{\lambda}u^{\tau}+\Gamma^{x}_{\tau\beta}u^{\beta}\right)\right], \tag{C.7}$$

para qualquer β teremos $\Gamma^{\tau}_{x\beta} = \Gamma^{x}_{\tau\beta} = 0$, portanto, $\pi^{\tau x}_{\rm NS} = 0$ para qualquer λ. Por simetria, temos que $\pi^{x\tau}_{\rm NS} = 0$. De forma análoga, obtemos $\pi^{\tau y}_{\rm NS} = \pi^{y\tau}_{\rm NS} = \pi^{xy}_{\rm NS} = \pi^{x\eta_{\rm s}}_{\rm NS} = \pi^{\eta_{\rm s}x}_{\rm NS} = \pi^{y\eta_{\rm s}}_{\rm NS} = \pi^{\eta_{\rm s}y}_{\rm NS} = \pi^{\tau\eta_{\rm s}}_{\rm NS} = \pi^{\eta_{\rm s}\tau}_{\rm NS} = \pi^{\tau\tau}_{\rm NS} = 0$.

Calcularemos agora os componentes não nulos do tensor viscosidade de cisalhamento. Para $\pi^{xx}_{\rm NS}$, temos:

$$\pi^{xx}_{\rm NS} = \eta_{\rm v}\left(\Delta^{x\lambda}\partial_{;\lambda}u^{x}+\Delta^{x\lambda}\partial_{;\lambda}u^{x}\right)-\frac{2}{3}\eta_{\rm v}\Delta^{xx}\partial_{;\lambda}u^{\lambda}$$
$$\pi^{xx}_{\rm NS} = \eta_{\rm v}\left[\left(g^{x\lambda}-\underbrace{u^{x}}_{=0}u^{\lambda}\right)\left(\partial_{\lambda}\underbrace{u^{x}}_{=0}+\Gamma^{x}_{x\beta}u^{\beta}\right)+\left(g^{x\lambda}-\underbrace{u^{x}}_{=0}u^{\lambda}\right)\left(\partial_{\lambda}\underbrace{u^{x}}_{=0}+\Gamma^{x}_{x\beta}u^{\beta}\right)\right]$$
$$-\frac{2}{3}\eta_{\rm v}\left(\underbrace{g^{xx}}_{=-1}-\underbrace{u^{x}}_{=0}\underbrace{u^{x}}_{=0}\right)\partial_{;\lambda}u^{\lambda}$$
$$\pi^{xx}_{\rm NS} = 2\eta_{\rm v}g^{x\lambda}\Gamma^{x}_{x\beta}u^{\beta}+\frac{2}{3}\eta_{\rm v}\partial_{;\lambda}u^{\lambda},$$

para qualquer β teremos $\Gamma^{x}_{x\beta} = 0$. A quantidade $\partial_{;\lambda}u^{\lambda}$ foi calculada para a viscosidade volumétrica e é dada por $\partial_{;\lambda}u^{\lambda} = \partial_{\lambda}u^{\lambda}+\Gamma^{\lambda}_{\lambda\beta}u^{\beta} = 1/\tau$. Portanto

$$\pi^{xx}_{\rm NS} = \frac{2\eta_{\rm v}}{3\tau}. \tag{C.8}$$

Para $\pi^{yy}_{\rm NS}$, de forma análoga à $\pi^{xx}_{\rm NS}$, obtemos:

$$\pi^{yy}_{\rm NS} = \frac{2\eta_{\rm v}}{3\tau}. \tag{C.9}$$

Por fim, para $\pi^{\eta_s\eta_s}_{\rm NS}$ temos:

$$\pi^{\eta_s\eta_s}_{\rm NS} = \eta_v\left(\Delta^{\eta_s\lambda}\partial_{;\lambda}u^{\eta_s} + \Delta^{\eta_s\lambda}\partial_{;\lambda}u^{\eta_s}\right) - \frac{2}{3}\eta_v\Delta^{\eta_s\eta_s}\partial_{;\lambda}u^{\lambda}$$

$$\pi^{\eta_s\eta_s}_{\rm NS} = \eta_v\left[\left(g^{\eta_s\lambda} - \underbrace{u^{\eta_s}}_{=0}u^{\lambda}\right)\left(\partial_\lambda\underbrace{u^{\eta_s}}_{=0} + \Gamma^{\eta_s}_{\eta_s\beta}u^{\beta}\right) + \left(g^{\eta_s\lambda} - \underbrace{u^{\eta_s}}_{=0}u^{\lambda}\right)\left(\partial_\lambda\underbrace{u^{\eta_s}}_{=0} + \Gamma^{\eta_s}_{\eta_s\beta}u^{\beta}\right)\right] - \frac{2}{3}\eta_v\left(\underbrace{g^{\eta_s\eta_s}}_{=-1/\tau^2} - \underbrace{u^{\eta_s}}_{=0}\underbrace{u^{\eta_s}}_{=0}\right)\partial_{;\lambda}u^{\lambda}$$

$$\pi^{\eta_s\eta_s}_{\rm NS} = 2\eta_v g^{\eta_s\lambda}\Gamma^{\eta_s}_{\eta_s\beta}u^{\beta} + \frac{2\eta_v}{3\tau^2}\partial_{;\lambda}u^{\lambda}.$$

Temos que $\partial_{;\lambda}u^{\lambda} = 1/\tau$. Escolhendo $\lambda = \eta_s$ e $\beta = \tau$, temos $\Gamma^{\lambda}_{\lambda\beta} = 1/\tau$, sendo assim

$$\pi^{\eta_s\eta_s}_{\rm NS} = -\frac{2\eta_v}{\tau^3} - \frac{2\eta_v}{3\tau^3} = -\frac{4\eta_v}{3\tau^3}. \tag{C.10}$$

Desta forma, as únicas componentes iniciais do tensor viscosidade cisalhamento são dadas por

$$\pi^{xx}_{\rm NS} = \pi^{yy}_{\rm NS} = -\frac{\tau_0^2\pi^{\eta_s\eta_s}_{\rm NS}}{2} = \frac{2\eta_v}{3\tau_0}. \tag{C.11}$$

Reescrevendo (C.11) em termos da densidade de entropia, temos

$$\pi^{xx}_{\rm NS}(\tau_0,x,y) = \pi^{yy}_{\rm NS}(\tau_0,x,y) = -\frac{\tau_0^2}{2}\pi^{\eta_s\eta_s}_{\rm NS}(\tau_0,x,y) = \frac{2\left(\frac{\eta_v}{s}\right)}{3\tau_0}s(\tau_0,x,y). \tag{C.12}$$

Assim, demonstramos os cálculos referentes à seção 3.1.5. Lembrando que estes cálculos são válidos somente no instante inicial (τ_0), posteriormente as componentes viscosas são regidas pelas equações de Israel-Stewart (ver subseção 2.4.2).

Apêndice D

Relações Termodinâmicas Importantes

Neste apêndice descreveremos algumas relações e conceitos da termodinâmica e mecânica estatística que são utilizados para descrição das equações de estado.

D.1 Ensemble Grande Canônico

Nesta seção, iremos relembrar, o formalismo do *ensemble*[1] *grande canônico* e as estatísticas de Bose-Einstein e Fermi-Dirac. O ensemble grande canônico é utilizado para o tratamento estatístico de sistemas abertos, caracterizados pela temperatura (T), volume (V) e potencial químico (μ). Neste ensemble a energia total (E) e o número de partículas do sistema (N) podem variar e é necessária uma função de distribuição estatística apropriada para a descrição da teoria de probabilidade [116, 117].

A função de partição do ensemble grande canônico é dada por:

[1] O ensemble estatístico especifica os estados microscópicos, ou microestados, de um sistema físico no equilíbrio.

$$\mathcal{Z}(V,T,\mu) = \sum_{\alpha} e^{(E_\alpha - \mu N_\alpha)/T}, \tag{D.1}$$

a partir dela, podemos obter todas as quantidades termodinâmicas, sabendo que

$$E = -\left.\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial(1/T)}\right|_{\mu}, \tag{D.2}$$

$$N = T\left.\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \mu}\right|_{(1/T)}, \tag{D.3}$$

$$S = \frac{1}{T}(E - \mu N) + \ln \mathcal{Z}. \tag{D.4}$$

Quando um sistema é suficientemente grande, a seguinte relação termodinâmica é válida:

$$S = \frac{1}{T}(E - \mu N + PV). \tag{D.5}$$

Comparando, as equações (D.4) e (D.5), obtemos:

$$\ln \mathcal{Z} = \frac{PV}{T}, \tag{D.6}$$

esta equação é chamada de potencial termodinâmico para o ensemble grande canônico.

D.1.1 Estatística de Fermi-Dirac e Bose-Einstein

Podemos considerar o caso partícular em que temos um gás de partículas indênticas, em equilíbrio termodinâmico, contido em volume V a temperatura T. Em que interação entre as partículas, é suficientemente fraca, de modo que o movimento de uma destas partículas independa das demais. Desta forma, podemos escrever a energia total do gás em um estado α como: $E_\alpha = n_1\varepsilon_1 + n_2\varepsilon_2 + n_3\varepsilon_3 + ... = \sum_i n_i\varepsilon_i$, em que esta soma se extende em todos os possíveis estados de uma partícula. O número total de partículas é dado por $N = \sum_i n_i$ e os números de ocupação são limitados pelo princípio da exclusão

de Pauli[2]. Para dois casos particulares temos:

$$\begin{cases} n = 0,1,2,... & \text{Bose-Einstein} \\ n = 0 \text{ ou } 1 & \text{Fermi-Dirac.} \end{cases} \tag{D.7}$$

A diferença entre os casos é dada pela na natureza da partícula, os férmions seguem a estatística de Fermi-Dirac e os bósons a estatística de Bose-Einstein.

Distribuição de Bose-Einstein

Iniciaremos calculando a distribuição estatística de Bose-Einstein. Para isto, consideraremos um gás ideal composto por bósons, onde não há limitação no número de ocupação n_i. Podemos somar as contribuições de todas os inteiros positivos, portanto, podemos calcular a função de partição, equação (D.1), da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(V,T,\mu) &= \sum_{\alpha} e^{-(E_\alpha - \mu N_\alpha)/T} \\ &= \sum_{n_1,n_2,n_3,...} e^{-[(n_1\varepsilon_1+n_2\varepsilon_2+n_3\varepsilon_3+...)-(\mu n_1+\mu n_2+\mu n_3+...)]/T} \\ &= \sum_{n_1}\sum_{n_2}\sum_{n_3}\cdots\sum_{n_i} e^{-\left[\sum_i n_i(\varepsilon_i-\mu)\right]/T} = \prod_i \sum_{n_i=0}^{\infty} e^{-[n_i(\varepsilon_i-\mu)]/T} \\ &= \prod_i \frac{1}{1-e^{-[\varepsilon_i-\mu]/T}} = \exp\left\{-\sum_i \ln\left[1-e^{-(\varepsilon_i-\mu)/T}\right]\right\}, \end{aligned} \tag{D.8}$$

para assegurar a convergência, consideramos $\varepsilon_i - \mu > 0$. Tomando o logaritmo natural

$$\ln \mathcal{Z}(V,T,\mu) = -\sum_i \ln\left[1-e^{-(\varepsilon_i-\mu)/T}\right]. \tag{D.9}$$

[2]Este princípio nos informa que dois férmions idênticos não podem ocupar o mesmo estado quântico, pois a função de onda total deve ser assimétrica. Para bósons a função de onda total deve ser simétrica.

Partindo da equação (D.9), podemos calcular as quantidades termodinâmicas utilizando (D.2), (D.3), (D.4) e (D.6), da seguinte forma

$$E = -\left.\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial(1/T)}\right|_{\mu} = \sum_i \frac{\varepsilon_i}{e^{(\varepsilon_i-\mu)/T}-1}; \tag{D.10}$$

$$N = T\left.\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \mu}\right|_{(1/T)} = \sum_i \frac{1}{e^{(\varepsilon_i-\mu)/T}-1}; \tag{D.11}$$

$$P = \frac{T}{V}\ln \mathcal{Z} = \frac{T}{V}\sum_i \ln\left[1-e^{-(\varepsilon_i-\mu)/T}\right]; \tag{D.12}$$

$$S = \frac{1}{T}\left\{\sum_i \frac{\varepsilon_i-\mu}{e^{(\varepsilon_i-\mu)/T}-1} + T\ln\left[\frac{1}{1-e^{-(\varepsilon_i-\mu)/T}}\right]\right\}. \tag{D.13}$$

Lembrando que $E=\sum_i \varepsilon_i n_i$ e $N=\sum_i n_i$, de (D.10) e (D.11) podemos concluir que a probabilidade de ocupação do nível de energia ε_i é dada por

$$n_{\mathrm{BE}}(\varepsilon_i,T) = \frac{1}{e^{(\varepsilon_i-\mu)/T}-1}, \tag{D.14}$$

esta equação é conhecida como *distribuição de Bose-Einstein.*

Distribuição de Fermi-Dirac

De modo análogo ao que foi feito para obter a distribuição de Bose-Einstein, podemos obter a distribuição de Fermi-Dirac. Neste caso, o número de partículas para cada estado é limitado por 0 ou 1. Portanto, partindo da função de partição, equação (D.1), obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}(V,T,\mu) &= \sum_{\alpha} e^{-(E_\alpha-\mu N_\alpha)/T} \\
&= \sum_{n_1,n_2,n_3,\ldots} e^{-[(n_1\varepsilon_1+n_2\varepsilon_2+n_3\varepsilon_3+\ldots)-(\mu n_1+\mu n_2+\mu n_3+\ldots)]/T} \\
&= \sum_{n_1}\sum_{n_2}\sum_{n_3}\cdots\sum_{n_i} e^{-\left[\sum_i n_i(\varepsilon_i-\mu)\right]/T} = \prod_i \sum_{n_i=0}^{1} e^{-[n_i(\varepsilon_i-\mu)]/T} \\
&= \prod_i \left[1+e^{-[\varepsilon_i-\mu]/T}\right] = \exp\left\{\sum_i \ln\left[1+e^{-(\varepsilon_i-\mu)/T}\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{D.15}$$

Tomando o logaritmo natural

$$\ln \mathcal{Z}(V,T,\mu) = \sum_i \ln\left[1 + e^{-(\varepsilon_i-\mu)/T}\right]. \tag{D.16}$$

Partindo da equação (D.16), podemos calcular as quantidades termodinâmicas utilizando (D.2), (D.3), (D.4) e (D.6), da seguinte forma

$$E = -\left.\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial(1/T)}\right|_\mu = \sum_i \frac{\varepsilon_i}{e^{(\varepsilon_i-\mu)/T}+1}; \tag{D.17}$$

$$N = T\left.\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \mu}\right|_{(1/T)} = \sum_i \frac{1}{e^{(\varepsilon_i-\mu)/T}+1}; \tag{D.18}$$

$$P = \frac{T}{V}\ln \mathcal{Z} = \frac{T}{V}\sum_i \ln\left[1 + e^{-(\varepsilon_i-\mu)/T}\right]; \tag{D.19}$$

$$S = \frac{1}{T}\left\{\sum_i \frac{\varepsilon_i-\mu}{e^{(\varepsilon_i-\mu)/T}+1} + T\ln\left[1 + e^{-(\varepsilon_i-\mu)/T}\right]\right\}. \tag{D.20}$$

Lembrando que $E = \sum_i \varepsilon_i n_i$ e $N = \sum_i n_i$, de (D.17) e (D.18) podemos concluir que a probabilidade de ocupação do nível de energia ε_i é dada por

$$n_{\mathrm{FD}}(\varepsilon_i,T) = \frac{1}{e^{(\varepsilon_i-\mu)/T}+1}, \tag{D.21}$$

esta equação é conhecida como *distribuição de Fermi-Dirac*.

D.2 Gases Ultrarrelativísticos

Nesta seção iremos descrever uma das possiveis aplicações do ensemble grande canônico. Abordaremos o caso dos gases ultrarrelativísticos. As relações entre pressão e densidade de energia obtidas foram utilizadas no capítulo 4, subseção 4.1.1, para auxiliar a descrever a fase de plasma de quarks e glúons da FO-EoS.

D.2.1 Gás de Bósons Ultrarrelativístico

A relação de energia e o momento de uma partícula é definida pela teoria da relatividade e é dada por

$$E = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}. \tag{D.22}$$

No limite ultrarrelativístico, $|\vec{p}| \gg m$, a equação (D.22) pode ser reescrita como

$$E \approx |\vec{p}| \approx k. \tag{D.23}$$

onde k é o número de onda, no sistema de unidades naturais este é igual o momento $p = k$. Utilizando a estatística de Bose-Einstein, temos que a função de partição grande canônica, $\mathcal{Z}$, e a energia, E, podem ser escritas da seguinte forma

$$\mathcal{Z} = \exp\left\{-\sum_i \ln\left[e^{-(\varepsilon_i-\mu)/T}\right]\right\}, \qquad E = \sum_i \varepsilon_i n_i = \sum \frac{\varepsilon_i}{e^{(\varepsilon_i-\mu)/T}-1}, \tag{D.24}$$

tomando o logaritmo natural da função de partição dada por (D.24), obtemos

$$\ln \mathcal{Z} = -\sum_i \ln\left[1 - e^{-\varepsilon_i/T}\right]. \tag{D.25}$$

Tomamos $\mu = 0$, pois em um gás ultrarrelativístico partículas estão sendo criadas e destruídas a todo instante. No limite termodinâmico os níveis de energia são suficientemente próximos, portanto, podemos utilizar a aproximação de onda plana [116, 117]: $\sum_i \to \frac{gV}{(2\pi)^3}\int d^3k$. Utilizando a aproximação de ondas planas, as equações (D.23), (D.25) e coordenadas esféricas, obtemos

$$\begin{aligned}
\ln \mathcal{Z} &= -\frac{gV}{(2\pi)^3}\int d^3k \ln\left[1 - e^{-\frac{\varepsilon}{T}}\right] \\
&= -\frac{gV}{(2\pi)^3}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{\infty} dk k^2 \ln\left[1 - e^{-\frac{\varepsilon}{T}}\right] \\
&= -g\frac{V}{2\pi^2}\int_0^{\infty} d\varepsilon \varepsilon^2 \ln\left[1 - e^{-\frac{\varepsilon}{T}}\right].
\end{aligned} \tag{D.26}$$

Utilizando o método de integral por partes, fazemos $u = \ln[1 - e^{-\varepsilon/T}]$ e $dv = \varepsilon^2 d\varepsilon$, logo temos $du = \frac{1}{T}\frac{e^{-\varepsilon/T}}{1-e^{-\varepsilon/T}}$ e $v = \varepsilon^3/3$, desta forma obtemos

$$\ln \mathcal{Z} = -g\frac{V}{2\pi^2}\left\{ \frac{\varepsilon^3}{3} \ln\left[1 - e^{-\frac{\varepsilon}{T}}\right]\Big|_0^\infty - \frac{1}{3T}\int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon^3 \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{T}}}{1 - e^{-\frac{\varepsilon}{T}}} \right\} \tag{D.27}$$

$$= g\frac{V}{2\pi^2}\frac{1}{3T}\int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^3}{e^{\frac{\varepsilon}{T}} - 1} \tag{D.28}$$

em que o primeiro termo em (D.27) é igual zero em ambos os limites.

O cálculo análogo, pode ser realizado para a energia utilizando a equação (D.24):

$$\begin{aligned} E &= \sum_i \varepsilon_i n_i = \sum \frac{\varepsilon_i}{e^{(\varepsilon_i - \mu)/T} - 1} \\ &= \frac{gV}{(2\pi)^3}\int d^3k \frac{\varepsilon}{e^{\varepsilon/T} - 1} \\ &= \frac{gV}{(2\pi)^3}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty dk k^2 \frac{\varepsilon}{e^{\varepsilon/T} - 1} \\ &= \frac{gV}{2\pi^2}\int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^3}{e^{\varepsilon/T} - 1} \end{aligned} \tag{D.29}$$

Comparando as equações (D.28) e (D.29), temos

$$\ln \mathcal{Z} = \frac{E}{3T}. \tag{D.30}$$

Utilizando o potencial termodinâmico, equação (D.6), temos

$$P = \frac{E}{3V} = \frac{\epsilon}{3} \tag{D.31}$$

A equação (D.31) representa a relação entre pressão e densidade de energia para um gás de bósons ultrarrelativístico.

D.2.2 Gás de Férmions Ultrarrelativístico

De modo análogo ao gás de bósons, no limite ultrarrelativístico, temos

$$E \approx |\vec{p}| \approx k. \tag{D.32}$$

Utilizando a estatística de Fermi-Dirac, temos que a função de partição grão-canônica, $\mathcal{Z}$, e a energia, E, podem ser escritas da seguinte forma

$$\mathcal{Z} = \exp\left\{\sum_i \ln\left[e^{-(\varepsilon_i-\mu)/T}\right]\right\}, \qquad E = \sum_i \varepsilon_i n_i = \sum \frac{\varepsilon_i}{e^{(\varepsilon_i-\mu)/T}+1}, \tag{D.33}$$

tomando o logaritmo natural da função de partição dada por (D.33), obtemos

$$\ln \mathcal{Z} = \sum_i \ln\left[e^{-\varepsilon_i/T}+1\right]. \tag{D.34}$$

Tomamos $\mu = 0$, pois em um gás ultrarrelativístico partículas estão sendo criadas e destruídas a todo instante. No limite termodinâmico os níveis de energia são suficientemente próximos, portanto, podemos utilizar a aproximação de onda plana [116, 117]: $\sum_i \to \frac{gV}{(2\pi)^3}\int d^3k$. Utilizando a aproximação de ondas planas, as equações (D.32), (D.34) e coordenadas esféricas, obtemos

$$\begin{aligned}
\ln \mathcal{Z} &= \frac{gV}{(2\pi)^3}\int d^3k \ln\left[e^{-\frac{\varepsilon}{T}}+1\right] \\
&= \frac{gV}{(2\pi)^3}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{\infty} dk k^2 \ln\left[e^{-\frac{\varepsilon}{T}}+1\right] \\
&= \frac{gV}{2\pi^2}\int_0^{\infty} d\varepsilon \varepsilon^2 \ln\left[e^{-\frac{\varepsilon}{T}}+1\right].
\end{aligned} \tag{D.35}$$

Utilizando o método de integral por partes, fazemos $u = \ln[e^{-\varepsilon/T}+1]$ e $dv = \varepsilon^2 d\varepsilon$, logo

temos $du = -\frac{1}{T}\frac{e^{-\varepsilon/T}}{e^{-\varepsilon/T}+1}$ e $v = \varepsilon^3/3$, portanto, obtemos

$$\ln \mathcal{Z} = \frac{gV}{2\pi^2}\left\{\frac{\varepsilon^3}{3}\ln\left[e^{-\frac{\varepsilon}{T}}+1\right]\Big|_0^\infty + \frac{1}{3T}\int_0^\infty d\varepsilon\varepsilon^3\frac{e^{-\frac{\varepsilon}{T}}}{e^{-\frac{\varepsilon}{T}}+1}\right\} \tag{D.36}$$

$$= \frac{gV}{2\pi^2}\frac{1}{3T}\int_0^\infty d\varepsilon\frac{\varepsilon^3}{e^{\frac{\varepsilon}{T}}+1} \tag{D.37}$$

em que o primeiro termo em (D.36) é igual zero em ambos os limites.

O cálculo análogo, pode ser realizado para a energia utilizando a equação (D.33):

$$\begin{aligned} E &= \sum_i \varepsilon_i n_i = \sum \frac{\varepsilon_i}{e^{(\varepsilon_i-\mu)/T}+1} \\ &= \frac{gV}{(2\pi)^3}\int d^3k\frac{\varepsilon}{e^{\varepsilon/T}-1} \\ &= \frac{gV}{(2\pi)^3}\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^\infty dkk^2\frac{\varepsilon}{e^{\varepsilon/T}+1} \\ &= \frac{gV}{2\pi^2}\int_0^\infty d\varepsilon\frac{\varepsilon^3}{e^{\varepsilon/T}+1} \end{aligned} \tag{D.38}$$

Comparando as equações (D.38) e (D.37), obtemos

$$\ln \mathcal{Z} = \frac{E}{3T}. \tag{D.39}$$

Utilizando o potencial termodinâmico, equação (D.6), temos

$$P = \frac{E}{3V} = \frac{\epsilon}{3} \tag{D.40}$$

A equação (D.40) representa a relação entre pressão e densidade de energia para um gás de férmions ultrarrelativístico.

D.3 Correção do Volume-Excluído

Nesta seção, iremos descrever a correção do volume-excluído, utilizada no capítulo 4. Uma vez obtida a equação de estado da fase hadrônica para a FO-EoS, estamos interessados em considerar, no modelo de gás ideal, a inclusão de todos os hádrons conhecidos. Segundo Yen, Greiner, e Yang [87] o modelo de gás ideal dá valores extremamente grandes para a densidade total do número de partículas, que excedem os valores experimentais obtidos por medições diretas da multiplicidade de partículas e da estimativa do volume do sistema no freeze-out usando a interferometria de píons [87].

Para obter os valores desejados da densidade de número de partículas é necessário introduzir a interação repulsiva entre os hádrons a pequenas distâncias. Isto é feito de forma análoga à correção da esfera dura de Van der Waals e é conhecido como correção do volume-excluído [87, 88] (ver seção D.3 do apêndice D). A repulsão de Van der Waals não altera essencialmente as proporções de número de partículas, mas causa um forte efeito de supressão sobre os valores das densidades de número de partículas.

Introduzimos a correção do volume-excluído substituindo o volume total do sistema V, por $V - vN$ na função de partição canônica $Z(T,N,V)$. Pela definição a função de partição grande canônica, $\mathcal{Z}(T,\mu,V)$, pode ser escrita em termos da canônica. Para o sistema de gás ideal temos

$$\mathcal{Z}(T,\mu,V) = \sum_{N=0}^{\infty} e^{\frac{\mu N}{T}} Z(T,N,V). \tag{D.41}$$

Realizando a substituição, obtemos

$$\mathcal{Z}^{(ex)}(T,\mu,V) = \sum_{N=0}^{\infty} e^{\frac{\mu N}{T}} Z(T,N,V - vN)\Theta(V - vN), \tag{D.42}$$

em que μ o potencial químico, $\Theta(V - vN)$ é a função de Heaviside e v é o parâmetro correspondente ao volume-excluído da partícula, dado por $v = 4v_0$, onde $v_0 = \frac{4}{3}\pi r_0^3$ em que v_0 e r_0 são respectivamente o volume e o raio da "esfera dura". O índice (ex) será

utilizado para denotar que a quantidade sofreu a correção do volume-excluído.

O cálculo da soma em N na equação (D.42) se torna bastante complicado devido a N-dependências do "volume efetivo", $V - vN$ [118]. Então, para realizarmos este cálculo, utilizamos uma transformada de Laplace

$$\widehat{\mathcal{Z}}^{(ex)}(T,\mu,x) = \int_0^\infty dV e^{-xV} \mathcal{Z}^{(ex)}(T,\mu,V). \tag{D.43}$$

Substituindo, (D.42) em (D.43), obtemos

$$\widehat{\mathcal{Z}}^{(ex)}(T,\mu,x) = \sum_{N=0}^{\infty} \int_0^\infty dV e^{-xV} e^{\frac{\mu N}{T}} Z(T,N,V - vN)\Theta(V - vN). \tag{D.44}$$

Fazendo uma mudança de variável em (D.44), $V \to \widehat{V} + vN$, obtemos

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{Z}}^{(ex)}(T,\mu,x) &= \int_0^\infty d\widehat{V} \sum_{N=0}^{\infty} e^{-x(\widehat{V}+vN)} e^{\frac{\mu N}{T}} Z(T,N,\widehat{V}) \\ &= \int_0^\infty d\widehat{V} e^{-x\widehat{V}} \sum_{N=0}^{\infty} e^{(\mu - vxT)\frac{N}{T}} Z(T,N,\widehat{V}). \end{aligned} \tag{D.45}$$

Podemos escrever, um potencial químico da forma $\widehat{\mu} \equiv \mu - vxT$, de modo que utilizando a equação (D.41), reescrevemos a equação (D.45) da seguinte forma

$$\widehat{\mathcal{Z}}^{(ex)}(T,\mu,x) = \int_0^\infty d\widehat{V} e^{-x\widehat{V}} \mathcal{Z}(T,\widehat{\mu},\widehat{V}). \tag{D.46}$$

A pressão pode ser escrita em termos da função de partição, utilizando o potencial termodinâmico do ensemble grande canônico (ver apêndice D.1, equação D.6),

$$P^{(ex)}(T,\mu) \equiv T \lim_{V\to\infty} \frac{\ln \mathcal{Z}^{(ex)}(T,\mu,V)}{V}, \tag{D.47}$$

no limite termodinâmico, $V \to \infty$, reescrevemos função de partição em termos da pressão, utilizando a equação (D.47), desta forma obtemos

$$\mathcal{Z}^{(ex)}(T,\mu,V)\Big|_{V\to\infty} \sim \exp\left(\frac{P^{(ex)}(T,\mu)V}{T}\right) \tag{D.48}$$

Neste limite, a equação (D.43) nos mostra que existe uma singularidade em um ponto x^* na equação (D.46). Esta singularidade nos fornece a pressão do sistema[3]

$$x^*(T,\mu) = \frac{P^{(ex)}(T,\mu)}{T} \to P^{(ex)}(T,\mu) = Tx^*(T,\mu). \tag{D.49}$$

Utilizando as equações (D.47) e (D.49), obtemos

$$x^*(T,\mu) = \lim_{V\to\infty} \frac{\ln \widehat{\mathcal{Z}}^{(ex)}(T,\widehat{\mu},\widehat{V})}{\widehat{V}}, \qquad \widehat{\mu} = \mu - vx^*T \tag{D.50}$$

A partir das equações (D.49), (D.50) e (4.23), obtemos a pressão para um gás de hádrons com a correção do volume-excluído

$$P^{(ex)}(T,\mu) = P_{\text{H}}(T,\widehat{\mu}), \qquad \widehat{\mu} = \mu - vP^{(ex)}(T,\mu). \tag{D.51}$$

Por fim, devemos considerar todos os diferentes tipos de partículas. Neste caso, utiliza-se uma extensão na correção do volume-excluído, está correção é dada através de um *ansatz*, realizando a seguinte substituição

$$V \to V - \sum_{i=1}^{h} v_i N_i, \tag{D.52}$$

em que esta soma é feita sobre todos os diferentes tipos de hádrons. Sendo assim, a pressão, dada pela equação (D.52) é reescrita como [87]

$$P^{(ex)}(T,\mu_1,...,\mu_h) = \sum_{i=1}^{h} P_{\text{H}}\left(T,\widehat{\mu}_i\right), \tag{D.53}$$

lembrando que $\widehat{\mu}_i = \mu_i - v_i P^{(ex)}(T,\mu_1,...,\mu_h)$. A partir da pressão do sistema, equação

[3] No limite de $V \to \infty$, a conexão entre a singularidade de x, equação (D.46), e o seu comportamento assintótico é uma propriedade da transformada de Laplace [118]

(D.53), podemos obter as outras quantidades termodinâmicas:

$$s^{(ex)}(T,\mu_1,...,\mu_h) \equiv \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{\mu_1,...,\mu_h} = \frac{\sum_{i=1}^{h} s_i(T,\widehat{\mu}_i)}{1+\sum_{j=1}^{h} v_j n_j(T,\widehat{\mu}_j)}. \tag{D.54}$$

$$n_i^{(ex)}(T,\mu_1,...,\mu_h) \equiv \left(\frac{\partial P}{\partial \mu_i}\right)_{T,\mu_1,...,\mu_h} = \frac{n_i(T,\widehat{\mu}_i)}{1+\sum_{j=1}^{h} v_j n_j(T,\widehat{\mu}_j)}, \tag{D.55}$$

$$\epsilon^{(ex)}(T,\mu_1,...,\mu_h) \equiv Ts - P + \sum_{i=1}^{h} \mu_i n_i = \frac{\sum_{i=1}^{h} \epsilon_i(T,\widehat{\mu}_i)}{1+\sum_{j=1}^{h} v_j n_j(T,\widehat{\mu}_j)}. \tag{D.56}$$

em que $\epsilon^{(ex)}$, $s^{(ex)}$ e $n_i^{(ex)}$ são respectivamente, densidades de energia, entropia e número de partículas calculadas com a correção do volume-excluído.

Referências Bibliográficas

[1] C. M. G. Lattes, H. Muirhead, G. P. S. Occhialini, and C. F. Powell. *Nature*, **159**:694, (1947).

[2] S. Sakata. *Prog. Theor. Phys.*, **16**:686, (1956).

[3] Z. Maki, M. Nakagawa, Y. Ohnuki, and S. Sakata. *Prog. Theor. Phys.*, **23**:1174, (1960).

[4] Z. Maki, M. Nakagawa, and S. Sakata. *Prog. Theor. Phys.*, **28**:870, (1962).

[5] M. Gell-Mann. *Phys. Lett.*, **8**:214, (1964).

[6] G. Zweig. *Developments in the Quark Theory of Hadrons*, **1**:22, (1964).

[7] O. W. Greenberg. *Phys. Rev. Lett.*, **13**:598, (1964).

[8] M. Y. Han and Y. Nambu. *Phys. Rev.*, **139**:B1006, (1965).

[9] A. Ali and G. Kramer. *Eur. Phys. J.*, **H36**:245, (2011).

[10] C. Patrignani et al. *Chin. Phys.*, **C40**:100001, (2016).

[11] D. J. Gross and F. Wilczek. *Phys. Rev. Lett.*, **30**:1343, (1973).

[12] H. D. Politzer. *Phys. Rev. Lett.*, **30**:1346, (1973).

[13] E. V. Shuryak. *The QCD Vacuum, Hadrons and Superdense Matter*. World Scientific Pub. Co. Inc., 2 edition, (2004).

[14] J. C. Collins and M. J. Perry. *Phys. Rev. Lett.*, **34**:1353, (1975).

[15] T. Ludlam and S. Aronson. Hunting the quark gluon plasma. *BNL-73847-2005*, (2005).

[16] E. Fermi. *Prog. Theor. Phys.*, **5**:570, (1950).

[17] J.-Y. Ollitrault. *Eur. J. Phys.*, **29**:275, (2008).

[18] L. D. Landau. *Izv. Akad. Nauk Ser. Fiz.*, **17**:51, (1953).

[19] C. Shen, Z. Qiu, H. Song, J. Bernhard, S. Bass, and U. Heinz. *Comput. Phys. Commun.*, **199**:61, (2016).

[20] Iu. Karpenko, P. Huovinen, and M. Bleicher. *Comput. Phys. Commun.*, **185**:3016, (2014).

[21] Y. Hama, T. Kodama, and O. Socolowski, Jr. *Braz. J. Phys.*, **35**:24, (2005).

[22] W. Florkowski. *Phenomenology of Ultra-relativistic Heavy-ion Collisions*. World Scientific, (2010).

[23] P. Romatschke and U. Romatschke. *Phys. Rev. Lett.*, **99**:172301, (2007).

[24] M. Luzum and P. Romatschke. *Phys. Rev.*, **C78**:034915, (2008). [Erratum: Phys. Rev.C79,039903(2009)].

[25] M. Luzum. *Relativistic Heavy Ion Collisions: Viscous Hydrodynamics Simulations and Final State interactions*. PhD thesis, University of Washington, (2009).

[26] P. Bożek. *Phys. Rev.*, **C85**:034901, (2012).

[27] J. Noronha-Hostler, J. Noronha, and F. Grassi. *Phys. Rev.*, **C90**:034907, (2014).

[28] A. Muronga. *Phys. Rev.*, **C69**:034903, (2004).

[29] C. Eckart. *Phys. Rev.*, **58**:919, (1940).

[30] L.D. Landau and E. M. Lifshitz. *Fluid Mechanics. Landau and Lifshitz: Course of Theoretical Physics, Volume 6.* Butterworth-Heinemann Ltd., (1987).

[31] C. L. M. H. Navier. *Mem. Acad. R. Sci. Paris*, **6**:389, (1823).

[32] G. G. Stokes. *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, **8**:287, (1845).

[33] W. A. Hiscock and L. Lindblom. *Phys. Rev.*, **D31**:725, (1985).

[34] P. Romatschke. *Int. J. Mod. Phys.*, **E19**:1, (2010).

[35] H. Song. *Causal Viscous Hydrodynamics for Relativistic Heavy Ion Collisions.* PhD thesis, Ohio State University, (2009).

[36] I. Muller. *Z. Phys.*, **198**:329, (1967).

[37] W. Israel. *Annals Phys.*, **100**:310, (1976).

[38] W. Israel and J. M. Stewart. *Annals Phys.*, **118**:341, (1979).

[39] D. Jou, J. Casas-Vazquez, and G. Lebon. *Rep. on Prog. in Phys.*, **51**:1105, (1988).

[40] R. Derradi de Souza, T. Koide, and T. Kodama. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, **86**:35, (2016).

[41] H. Song and U. W. Heinz. *Phys. Rev.*, **C77**:064901, (2008).

[42] M. Natsuume and T. Okamura. *Phys. Rev.*, **D77**:066014, (2008). [Erratum: Phys. Rev.D78,089902(2008)].

[43] J. Noronha-Hostler, J. Noronha, and C. Greiner. *Phys. Rev. Lett.*, **103**:172302, (2009).

[44] F. Karsch, D. Kharzeev, and K. Tuchin. *Phys. Lett.*, **B663**:217, (2008).

[45] I. Kanitscheider and K. Skenderis. *JHEP*, **4**:62, (2009).

[46] A. Adams, L. D. Carr, T. Schäfer, P. Steinberg, and J. E. Thomas. *New J. Phys.*, **14**:115009, (2012).

[47] J. D. Bjorken. *Phys. Rev.*, **D27**:140, (1983).

[48] P. Bożek, W. Broniowski, and A. Olszewski. *Phys. Rev.*, **C91**:054912, (2015).

[49] T. Hirano and K. Tsuda. *Phys. Rev.*, **C66**:054905, (2002).

[50] Iu. A. Karpenko, P. Huovinen, H. Petersen, and M. Bleicher. *Phys. Rev.*, **C91**:064901, (2015).

[51] W. Florkowski, W. Broniowski, M. Chojnacki, and A. Kisiel. *J. Phys.*, **G36**:064067, (2009).

[52] S. Pratt. *Phys. Rev. Lett.*, **102**:232301, (2009).

[53] J. S. Moreland, J. E. Bernhard, and S. A. Bass. *Phys. Rev.*, **C92**(1):011901, (2015).

[54] R. Andrade, F. Grassi, Yogiro Hama, T. Kodama, and O. Socolowski. *Braz. J. Phys.*, **37**:717, (2007).

[55] R. J. Glauber. *Lectures on Theoretical Physics.* ed. WE Brittin and LG Dunham, New York, (1959).

[56] M. L. Miller, K. Reygers, S. J. Sanders, and P. Steinberg. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, **57**:205, (2007).

[57] R. C. Hwa and X. N. Wang. *Quark Gluon Plasma 3.* World Scientific, (2004).

[58] J. E. Bernhard, J. S. Moreland, S. A. Bass, J. Liu, and U. Heinz. *Phys. Rev.*, **C94**:024907, (2016).

[59] D. d'Enterria, G. Kh. Eyyubova, V. L. Korotkikh, I. P. Lokhtin, S. V. Petrushanko, L. I. Sarycheva, and A. M. Snigirev. *Eur. Phys. J.*, **C66**:173, (2010).

[60] C. Loizides, J. Nagle, and P. Steinberg. *SoftwareX*, **1-2**:13, (2015).

[61] P. Bożek, W. Broniowski, and M. Rybczynski. *Phys. Rev.*, **C94**:014902, (2016).

[62] P. Bożek and W. Broniowski. *Phys. Rev.*, **C88**:014903, (2013).

[63] K. Welsh, J. Singer, and U. W. Heinz. *Phys. Rev.*, **C94**:024919, (2016).

[64] H. Song and U. W Heinz. *Phys. Rev.*, **C81**:024905, (2010).

[65] F. Cooper and G. Frye. *Phys. Rev.*, **D10**:186, (1974).

[66] F. Cooper, G. Frye, and E. Schonberg. *Phys. Rev.*, **D11**:192, (1975).

[67] S. Z. Belenkij and L. D. Landau. *Nuovo Cim. Suppl.*, **3S10**:15, (1956).

[68] M. Chojnacki, A. Kisiel, W. Florkowski, and W. Broniowski. *Comput. Phys. Commun.*, **183**:746, (2012).

[69] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation.* W. H. Freeman, (1973).

[70] S. DeGroot. *Relativistic Kinetic Theory - Principles and Applications.* North Holland, (1980).

[71] D. Teaney. *Phys. Rev.*, **C68**:034913, (2003).

[72] A. Kisiel, M. Gałażyn, and P. Bożek. *Phys. Rev.*, **C90**:064914, (2014).

[73] S. Gavin. *Nuclear Physics A*, **435**:826, (1985).

[74] C. Sasaki and K. Redlich. *Phys. Rev.*, **C79**:055207, (2009).

[75] K. Dusling and T. Schäfer. *Phys. Rev.*, **C85**:044909, (2012).

[76] P. Bożek. *Phys. Rev.*, **C81**:034909, (2010).

[77] P. Bożek and I. Wyskiel-Piekarska. *Phys. Rev.*, **C85**:064915, (2012).

[78] D. M. Dudek. *Efeitos da equação de estado em hidrodinâmica relativística através de alguns observáveis*. PhD thesis, IFT - Unesp, 2014.

[79] W.-L. Qian, R. Andrade, O. Socolowski, Jr., F. Grassi, T. Kodama, and Y. Hama. *Braz. J. Phys.*, **37**:767, (2007).

[80] P. Huovinen and P. Petreczky. *Nucl. Phys.*, **A837**:26, (2010).

[81] R. Andrade. *Sobre a evolução hidrodinâmica da matéria nuclear criada em colisões de íons pesados relativísticos - um estudo com condições iniciais flutuantes*. PhD thesis, USP, 2011.

[82] D. S. Lemos, J. Carvalho, and O. Socolowski Jr. *J. Phys. Conf. Ser.*, **630**:012032, (2015).

[83] C.-Y. Wong. *Introduction to High-Energy Heavy-Ion Collisions*. World Scientific Pub. Co. Inc., (1994).

[84] G. B. Arfken and H. Weber. *Física Matemática: Métodos Matemáticos para Engenharia e Física*. Elsevier, (2005).

[85] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn, and V. F. Weisskopf. *Phys. Rev.*, **D9**:3471, (1974).

[86] D. Griffiths. *Introduction to Elementary Particles*. Wiley, 2008.

[87] G. D. Yen, M. I. Gorenstein, W. Greiner, and S.-N. Yang. *Phys. Rev.*, **C56**:2210, (1997).

[88] D. H. Rischke, M. I. Gorenstein, H. Stoecker, and W. Greiner. *Z. Phys.*, **C51**:485, (1991).

[89] C. Gattringer and C. B. Lang. *Quantum chromodynamics on the lattice: an introductory presentation.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2010).

[90] M. Creutz. *Quarks, Gluons and Lattices.* Cambridge University Press, (1985).

[91] E. M. S. Santos. *QCD na Rede: Um estudo não-perturbativo do calibre de Feynman.* PhD thesis, USP, (2011).

[92] A. Bazavov et al. *Phys. Rev.*, **D80**:014504, (2009).

[93] P. Petreczky. *J. Phys.*, **G39**:093002, (2012).

[94] I. G. Bearden et al. *Phys. Rev. Lett.*, **94**:162301, (2005).

[95] C. Roland et al. *Nucl. Phys.*, **A715**:745, (2003).

[96] H. A. Gustafsson, H. H. Gutbrod, B. Kolb, H. Löhner, B. Ludewigt, A. M. Poskanzer, T. Renner, H. Riedesel, H. G. Ritter, A. Warwick, F. Weik, and H. Wieman. *Phys. Rev. Lett.*, **52**:1590, (1984).

[97] J.-Y. Ollitrault. *Phys. Rev.*, **D46**:229, (1992).

[98] N. van der Kolk. *To flow or not to flow: A study of elliptic flow and nonflow in proton-proton collisions in ALICE.* PhD thesis, Utrecht University Library, (2011).

[99] J.-Y. Ollitrault. *Phys. Rev. D*, **46**:229, (1992).

[100] A. M. Poskanzer and S. A. Voloshin. *Phys. Rev.*, **C58**:1671, (1998).

[101] R. Hanbury Brown and R. Q. Twiss. *Phil. Mag. Ser.7*, **45**:663, (1954).

[102] R. Hanbury Brown and R. Q. Twiss. *Nature*, **177**:27, (1956).

[103] R. Hanbury Brown and R. Q. Twiss. *Nature*, **178**:1046, (1956).

[104] R. Hanbury Brown, R. C. Jensen, and M. K. De Gupta. *Nature*, **170**:1061, (1952).

[105] E. M. Purcell. *Nature*, **178**:1449, (1956).

[106] S. S. Padula. *Braz. J. Phys.*, **35**:70, (2005).

[107] G. Goldhaber, S. Goldhaber, W. Lee, and A. Pais. *Phys. Rev.*, **120**:300, (1960).

[108] A. Kisiel, W. Florkowski, and W. Broniowski. *Phys. Rev.*, **C73**:064902, (2006).

[109] G. F. Bertsch. *Nucl. Phys.*, **A498**:173C, (1989).

[110] A. Wiedemann and U. W. Heinz. *Phys. Rept.*, **319**:145, (1999).

[111] J. Adams et al. *Phys. Rev.*, **C71**:044906, (2005).

[112] J. Adams et al. *Phys. Rev.*, **C72**:014904, (2005).

[113] R. Snellings. *New J. Phys.*, **13**:055008, (2011).

[114] R. D. Woods and D. S. Saxon. *Phys. Rev.*, **95**:577, 1954.

[115] M. Rybczynski, G. Stefanek, W. Broniowski, and P. Bożek. *Comput. Phys. Commun.*, **185**:1759, (2014).

[116] S. Salinas. *Introdução à Física Estatística.* EdUsp, 2nd edition, (2008).

[117] R. K. Pathria and P. D. Beale. *Statistical mechanics.* Elsevier, 3ed edition, (2011).

[118] M. I. Gorenstein, H. Stoecker, G. D. Yen, S. N. Yang, and W. Greiner. *J. Phys.*, **G24**:1777, (1998).