UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE - FURG
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

OS PROBLEMAS ADITIVOS E O PENSAMENTO ALGÉBRICO NO CICLO DE ALFABETIZAÇÃO

Vinicius Carvalho Beck

Orientador: Prof. Dr. João Alberto da Silva

Rio Grande
2015

VINICIUS CARVALHO BECK

Os Problemas Aditivos e o Pensamento Algébrico no Ciclo de Alfabetização

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Rio Grande, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Educação.

Linha de Pesquisa: Espaços e Tempos Educativos

ORIENTADOR: Prof. Dr. João Alberto da Silva

Rio Grande

2015

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE – FURG
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EDUCAÇÃO
MESTRADO EM EDUCAÇÃO

ATA DE DEFESA DE MESTRADO – Nº 07/2015

Ao dia nove do mês de novembro de 2015, na Universidade Federal do Rio Grande – FURG, reuniu-se a Comissão Examinadora de Defesa de Mestrado do aluno **Vinícius Carvalho Beck**, composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. João Alberto da Silva (Orientador - FURG), Profª. Drª. Karin Ritter Jalinek (FURG), Profª. Drª. Rute Elizabete de Souza Rosa Borba (UFPE) e Prof. Dr. Antônio Maurício Medeiros Alves (UFPel). Dissertação intitulada: "*Os Problemas Aditivos e o Pensamento Algébrico no Ciclo da Alfabetização*". Dando início à reunião o orientador agradeceu a presença de todos, fez a apresentação da comissão examinadora e esclareceu aos presentes que a candidata teria um tempo aproximado de 30 minutos para explanação do tema e igualmente cada membro para arguição. A seguir, passou a palavra para o mestrando que apresentou o tema e respondeu às perguntas formuladas pela banca. Após discussão, reuniu-se a comissão para arguição conjunta e considerou a dissertação APROVADA (aprovada/ aprovada com restrições/ reprovada). Nada mais havendo a tratar lavrou-se a presente ata.

Prof. Dr. João Alberto da Silva
(Orientador - FURG)

Profª. Drª. Karin Ritter Jalinek (FURG)

Prof. Dr Antônio Maurício Medeiros Alves (UFPel)

POR PARECER

Profª. Drª. Rute Elizabete de Souza Rosa Borba (UFPE)

B393p Beck, Vinicius Carvalho.
Os problemas aditivos e o pensamento algébrico no ciclo de alfabetização / Vinicius Carvalho Beck. – 2015.
74 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Programa de Pós-graduação em Educação, Rio Grande/RS, 2015.
Orientador: Dr. João Alberto da Silva.

1. Problemas aditivos 2. Pensamento algébrico 3. Ciclo de alfabetização 4. Educação matemática I. Silva, João Alberto da II. Título.

CDU 512:372.4

Catalogação na Fonte: Bibliotecário Me. João Paulo Borges da Silveira CRB 10/2130

DEDICATÓRIA

Dedico esta dissertação à Zulma da Silva Carvalho, minha avó (*in memorian*) e à Taiane Carrilho Rosa, minha esposa.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à FURG pela oportunidade;

Ao Prof. João Alberto da Silva pela dedicada orientação; e

Aos colegas do NUEPEC pela amizade e competência no trabalho de produção dos dados da pesquisa.

RESUMO

BECK, Vinicius Carvalho. **Os Problemas Aditivos e o Pensamento Algébrico no Ciclo de Alfabetização**. 2015. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Educação. Universidade Federal do Rio Grande - FURG, Rio Grande, Brasil. 74p.

O estudo apresentado neste trabalho integra a pesquisa já em andamento no Núcleo de Estudos em Epistemologia e Educação em Ciências (NUEPEC) da Universidade Federal do Rio Grande (FURG), que tem por objetivo analisar as principais estratégias e procedimentos de alunos do 3° ano do Ciclo de Alfabetização na resolução de problemas que envolvem as competências e descritores previstos na matriz de referência para avaliação da Provinha Brasil de Matemática. Em particular, o estudo das estratégias utilizadas para resolver problemas aditivos, resultou em algumas discussões dentro do grupo de pesquisa sobre a possibilidade de desenvolvimento do pensamento algébrico em alguns problemas abordados, principalmente os problemas envolvendo as ações de completar e comparar. Foi destas discussões que surgiu a ideia de realizar uma análise sobre a relação entre os problemas aditivos e o pensamento algébrico na alfabetização. Por questões éticas, os dados completos da escola e das crianças participantes são mantidos em sigilo. A escola se localiza na periferia de uma cidade do interior do Rio Grande do Sul. De acordo com o perfil socioeconômico levantado pela direção, o corpo discente é constituído por filhos e filhas de trabalhadores, muitos dos quais se encontram em situação de vulnerabilidade social. O objetivo deste trabalho é compreender de que forma o pensamento algébrico pode estar presente nas resoluções de problemas aditivos por estudantes do Ciclo de Alfabetização. A metodologia utilizada na produção de dados é a Investigação-Ação Escolar, com utilização de situações-problema baseadas na matriz de referência da Provinha Brasil de Matemática. A análise de dados levou em consideração a Teoria dos Campos Conceituais para avaliar o potencial algébrico de alguns problemas aditivos. Constata-se o uso de duas estratégias na situação de completar, que são: busca por valor desconhecido seguida por contagem e busca por valor desconhecido seguida por subtração. Na situação de comparar constata-se o uso da estratégia de previsão seguida por contagem. Concluímos que problemas de completar e comparar podem oportunizar o uso de estratégias algébricas, que os problemas aditivos não são meramente aritméticos, e que não há razões para desconsiderar o pensamento algébrico no Ciclo de Alfabetização.

Palavras-chave: Problemas Aditivos. Pensamento Algébrico. Ciclo de Alfabetização.

ABSTRACT

BECK, Vinicius Carvalho. **The Additive Problems and the Algebraic Thinking on the Early Years of School**. 2015. Dissertation (Master's Degree) - Graduate Program in Education. Universidade Federal do Rio Grande - FURG, Rio Grande, Brazil. 74p.

The study presented in this paper integrates the research already underway at the Núcleo de Estudos em Epistemologia e Educação em Ciências (NUEPEC) of the Universidade Federal do Rio Grande (FURG), whose aim is to analyse the main strategies and procedures of early years of school students in solving problems that involve the competences and abilities provided in the reference matrix to evaluation of Provinha Brasil de Matemática (a Mathematics Brazilian test). In particular, the study of the strategies used to solve additives problems resulted in some discussion within the research group on the possibility of developing algebraic thinking in some issues discussed, mainly the problems involving the actions of complete and compare. It was from these discussions came the idea to carry out an analysis of the relationship between the additives problems and the algebraic thinking on early years of school. Cause ethical questions, the full details of the school and the children are kept confidential. The school is located on the outskirts of a city in the interior of Rio Grande do Sul state. According to the social-economic profile raised by the school administration, the student group consists of sons and daughters of workers, many of whom are in situation of social vulnerability. The aim of this paper is to understand how algebraic thinking may be present in the solving of additive problems by students of early years of school. The methodology used in the production of data is the Research-Action in School, with the use of problem-situations based on the Provinha Brasil de Matemática reference matrix. The analysis of data took into consideration the Theory of Conceptual Fields in order to evaluate the algebraic potential of some additive problems. It has been noted the use of two strategies in the situation of completing, which are: searching for unknown value followed by counting, and searching for unknown value followed by subtraction. In the situation of comparing, it has been noted the use of prediction strategy followed by counting. We concluded that completing and comparing problems can create opportunities to use algebraic strategies, that the additive problems are not merely arithmetic, and that there is no reason to disregard the algebraic thinking on the early years of school.

Keywords: Additives Problems. Algebraic Thinking. Early Years.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Figurinhas Disponibilizadas aos Estudantes................................ 47

LISTA DE QUADROS

Quadro 1	Problemas Aditivos na Teoria dos Campos Conceituais...........	36
Quadro 2	Problemas Aditivos na Provinha Brasil de Matemática.............	40
Quadro 3	Detalhamento da Investigação-Ação...	44
Quadro 4	Questões Propostas nas Situações-Problema..........................	49

LISTA DE ABREVIATURAS

CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
FURG	Universidade Federal do Rio Grande
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
MEC	Ministério da Educação
NCTM	National Concil of Teachers of Mathematics
NUEPEC	Núcleo de Estudos em Epistemologia e Educação em Ciências
OBEDUC	Observatório Nacional da Educação
PBM	Provinha Brasil de Matemática
PPGEDU	Programa de Pós-Graduação em Educação
SciELO	Scientific Eletronic Library On-Line

SUMÁRIO

Introdução.. 12

1 Estado da Arte.. 17
1.1 Estratégias Utilizadas por Crianças em Problemas Aditivos.......... 19
1.2 Pesquisas sobre o Pensamento Algébrico com Crianças............. 25

2 O Campo Conceitual das Estruturas Aditivas................................. 32
2.1 Teoria dos Campos Conceituais.. 32
2.2 Problemas Aditivos na Teoria dos Campos Conceituais.............. 34
2.3 Problemas Aditivos na Provinha Brasil de Matemática................. 38

3 Metodologia.. 42
3.1 Delineamento.. 43
3.2 Campo de Estudo e Participantes da Pesquisa............................ 45
3.3 Método de Produção de Dados.. 46
3.4 Método de Análise de Dados.. 50

4 O Pensamento Algébrico nas Estratégias Aditivas.......................... 52
4.1 Busca por Valor Desconhecido... 52
4.2 Previsão de Resultados... 56

5 Considerações Finais... 61

Referências.. 67

Introdução

A pesquisa apresentada no presente trabalho é parte de um projeto mais amplo, que tem por objetivo analisar as principais estratégias e procedimentos de alunos do Ciclo de Alfabetização na resolução de problemas de Matemática. Em particular, o estudo das estratégias utilizadas para resolver problemas aditivos, resultou em algumas discussões sobre a possibilidade de desenvolvimento do pensamento algébrico em alguns problemas abordados no projeto mais amplo. Foi dessas discussões que surgiu a ideia de realizar uma análise sobre a relação entre os problemas aditivos e o pensamento algébrico na alfabetização.

O autor desta dissertação é um professor de Matemática, que começou a se interessar e aprofundar seus estudos sobre aprendizagem e desenvolvimento cognitivo a partir do momento em que passou a integrar o grupo de pesquisa que originou este e outros trabalhos sobre alfabetização matemática, pouco antes de iniciar seus estudos no Mestrado em Educação.

A alfabetização é escolhida como foco do estudo porque o autor desta dissertação integra o Núcleo de Estudos em Epistemologia e Educação em Ciências (NUEPEC), grupo de pesquisa que tem trabalhado em projetos que visam melhor compreender a aprendizagem da Matemática no Ciclo de Alfabetização, e o projeto inicial do trabalho aqui apresentado é resultado de investigações realizadas dentro desse grupo, especialmente aquelas ligadas com problemas aditivos.

Alguns tipos de problemas aditivos elementares sugerem o uso de estratégias tais como busca por um valor desconhecido e previsão de resultados, que são estratégias muito semelhantes às utilizadas em problemas algébricos envolvendo equações e fórmulas, e ao mesmo tempo, apontadas por documentos oficiais de âmbito nacional e internacional (NCTM, 2000; BRASIL, 2012) como características do pensamento algébrico. Assim, no início da pesquisa assumiu-se a hipótese de que é possível estabelecer relações entre alguns tipos de problemas aditivos e o pensamento algébrico, embora houvesse necessidade de compreender mais precisamente estas relações.

Explicar como o pensamento lógico-matemático se desenvolve tem sido um grande desafio para os estudiosos das Ciências Cognitivas, sobretudo a partir da segunda metade do século XX. Jean Piaget (1937, 1950, 1977) foi um dos primeiros pesquisadores a estudar de forma mais detalhada o processo de aprendizagem da Matemática na infância. Em seu trabalho, ele apresentou estudos experimentais no âmbito da Psicologia, a partir dos quais pôde construir um modelo da organização do pensamento lógico-matemático da criança. Alguns de seus alunos de doutorado, como Constance Kamii e Gérard Vergnaud, deram prosseguimento às suas pesquisas nesse sentido.

Kamii (1990), investigando o processo de construção do número pela criança, esclareceu vários pontos importantes na aprendizagem inicial, apresentando em seus trabalhos uma descrição de como a criança desenvolve os processos de seriação, classificação, quantificação e contagem, conceitos que hoje são fundamentais no âmbito da alfabetização matemática.

Gérard Vergnaud (1985, 1990) desenvolveu pesquisas abordando os diferentes tipos de problemas que envolvem as principais operações aritméticas. Como resultado desses estudos, o autor afirma que cada operação não está necessariamente associada com um único tipo de problema, isto é, cada operação pode ser utilizada numa grande variedade de classes de situações, e reciprocamente, um mesmo problema pode ser resolvido com a utilização de duas ou mais operações. Para explicar como os diferentes tipos de situações se relacionam com as operações matemáticas elementares, Vergnaud (1985, 1990, 1997) propôs a Teoria dos Campos Conceituais.

Com base nos trabalhos de Kamii (1990) e Vergnaud (1985,1990, 1997), surgiram estudos abordando as estratégias utilizadas por crianças na resolução de problemas aritméticos (NUNES e BRYANT, 1997; MAGINA, CAMPOS, NUNES e GITIRANA, 2001; BORBA, 2002; BORBA e NUNES, 2004; NUNES, CAMPOS, MAGINA e BRYANT, 2005; CHAPIN e JOHNSON, 2006; LÔBO, 2012), e em particular, os problemas aditivos. Algumas avaliações de larga escala, como a Provinha Brasil de Matemática (INEP, 2015), já assimilaram estes novos estudos em suas respectivas concepções de avaliação da aprendizagem.

Há muito tempo, a alfabetização é tema recorrente de debates entre educadores. Até a década de 1990, a concepção de alfabetizar estava centrada nos aspectos linguísticos do conhecimento. Nessa perspectiva, o indivíduo alfabetizado seria caracterizado por ter a capacidade de ler e escrever utilizando os códigos da sua língua materna.

A partir dos anos 1990, entretanto, surgiram vários estudos ressaltando a importância de considerar outros aspectos, além da linguística, na alfabetização, como por exemplo, os conceitos elementares das Ciências e da Matemática, sugerindo assim, a proposta de uma *alfabetização em Ciências e Matemática*. No Brasil, um dos maiores avanços ocorridos nesse sentido foi o surgimento de estudos sobre competências e habilidades envolvidas na construção de conceitos nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Para Danyluk (1991), a Matemática é mais uma das várias formas de linguagem dos seres humanos. Nessa perspectiva, de forma semelhante ao que acontece no aprendizado da língua materna, há uma leitura de mundo que precede o entendimento lógico-matemático da criança.

Com base no trabalho de Danyluk (1991), Silva e Mirandoli (2007) desmistificam a ideia de que a alfabetização está atrelada ao aprendizado da língua materna apenas, considerando também a Matemática como uma linguagem sob a ótica construtivista. Desse modo, o termo *alfabetização matemática* adquire um sentido bem definido, como sendo uma iniciação à linguagem da Matemática. Para essas autoras a *alfabetização matemática* se caracteriza pela aquisição da leitura e da escrita associada com o uso social destas duas competências.

Para alguns autores, entretanto, a *alfabetização matemática* é caracterizada apenas pela aquisição da leitura e da escrita de códigos, sendo o uso social destes códigos aprendidos chamado de *letramento matemático*. Esta denominação é fortemente influenciada pelos estudos de Soares (2004) sobre o aprendizado da língua materna, que denomina de *letramento* a capacidade de socializar os códigos aprendidos. Fayol (2012) chama de *numeramento* o processo completo, abrangendo a *alfabetização matemática* e o *letramento matemático*.

No presente estudo, utilizamos o termo *alfabetização matemática* no sentido de Danyluk (1991), e também de Silva e Mirandoli (2007), que é equivalente ao *numeramento* proposto por Fayol (2012).

Outra discussão cada vez mais frequente entre pesquisadores da área de educação matemática, diz respeito ao fato de que a alfabetização matemática não se resume apenas à construção do conceito de número e manipulação das operações da Aritmética Elementar, mas também abrange conhecimentos de Geometria, grandezas, medidas e tratamento da informação.

Também surgiram mais recentemente, no âmbito da alfabetização matemática, trabalhos abordando o desenvolvimento do pensamento algébrico (BLANTON e KAPUT, 2005; CARPENTER, LEVI, FRANKE e ZERINGUE, 2005; IRWIN e BRITT, 2006; CANAVARRO, 2007; FUJII e STEPHENS, 2008; STEPHENS e WANG, 2008).

Alguns documentos que embasam a prática docente já apresentam uma expectativa de se desenvolver o pensamento algébrico desde anos iniciais do Ensino Fundamental (NCTM, 2000; BRASIL, 2012). Embora muitos trabalhos sobre o pensamento algébrico abordem direta ou indiretamente problemas do tipo aditivo, ainda não se tem uma compreensão muito clara da relação que existe entre esses dois campos de estudo.

Uma justificativa para a realização desta pesquisa é o fato de que o pensamento algébrico pode ser explorado de várias formas na alfabetização, e em particular, também por meio dos problemas aditivos, ainda que não se tenha tanta clareza da relação entre o pensamento algébrico e esta classe de problemas.

O método de Investigação-Ação foi escolhido para a etapa de produção dos dados devido ao potencial de retorno do estudo para a comunidade escolar, uma vez que este procedimento metodológico permite maior proximidade entre os participantes da pesquisa e os pesquisadores, e no caso desta pesquisa, maior proximidade também com os professores dos estudantes participantes, uma vez que eles também integraram o grupo de pesquisa, em todas as etapas do processo investigativo.

O referencial escolhido para analisar os dados foi a Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1985, 1990, 1997), tendo em vista que muitos fenômenos da aprendizagem têm sido explicados por esta teoria e, além disso, ela é fortemente influenciada pelos estudos construtivistas de Jean Piaget, que constituem o referencial teórico dos trabalhos que são produzidos no NUEPEC.

Com base na justificativa apresentada e no referencial teórico da Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1985, 1990, 1997), construímos a seguinte questão de pesquisa: Como pode ser caracterizado o pensamento algébrico nas estratégias de resolução de problemas aditivos na etapa de alfabetização?

O objetivo deste trabalho é compreender de que forma o pensamento algébrico pode estar presente nas resoluções de problemas aditivos por estudantes do Ciclo de Alfabetização, levando em conta os diferentes tipos de estratégias apresentadas e também os recursos cognitivos mobilizados nestas resoluções.

No capítulo 1 é apresentado o estado da arte das pesquisas sobre as estratégias de resolução de problemas aditivos e sobre o pensamento algébrico. No capítulo 2 introduz-se o referencial teórico da pesquisa, isto é, são destacados alguns aspectos da Teoria dos Campos Conceituais a respeito dos problemas aditivos e também são enumerados os descritores associados a essa classe de problemas na matriz de referência de avaliação da Provinha Brasil de Matemática (PBM). No capítulo 3 apresenta-se a metodologia utilizada na produção e na análise dos dados. No capítulo 4 são discutidos os resultados e no capítulo 5 são feitas considerações finais.

1 Estado da Arte

Neste capítulo é apresentado o estado da arte das pesquisas sobre as estratégias de resolução de problemas aditivos e das pesquisas que abordam o pensamento algébrico, situando o leitor no contexto temático em que se enquadra este trabalho. Consideremos a definição proposta por Romanowski e Ens (2006):

> Um estado da arte pode constituir-se em levantamento do que se conhece sobre determinada área, desenvolvimento de protótipos de análises de pesquisas, avaliação da situação da produção do conhecimento da área focalizada [...]. Pode, também, estabelecer relação entre produções anteriores, identificando temáticas recorrentes e apontando novas perspectivas, consolidando uma área de conhecimento e constituindo-se orientações de práticas pedagógicas para a definição de parâmetros de formação de profissionais [...]. Pode, ainda, verificar na multiplicidade e pluralidade de enfoques e perspectivas, indicativos para esclarecer e resolver as problemáticas históricas [...]. Igualmente torna possível reconhecer a importância da investigação, os aportes significativos da construção da teoria e prática pedagógica [...]. (ROMANOWSKI e ENS, 2006, p.41).

No caso desta pesquisa, o estado da arte é constituído pelo levantamento do que se conhece sobre o tema da pesquisa e pela relação entre produções anteriores para indicar novas perspectivas.

Este capítulo é dividido em duas partes: na primeira, são considerados trabalhos a respeito das estratégias utilizadas por crianças em problemas aditivos. Foram consideradas, principalmente, produções a partir do ano de 2004 para compor esta primeira parte, embora também sejam citados alguns textos anteriores a este período que tenham servido como referencial teórico para outros trabalhos de pesquisa. Na segunda parte são apresentados trabalhos que constituem o estado da arte sobre as pesquisas envolvendo o pensamento algébrico. Nessa segunda parte, considerou-se principalmente os trabalhos produzidos a partir de 2003, embora também sejam citados alguns referenciais anteriores a este período, bem como documentos oficiais que nortearam boa parte destas pesquisas.

Inicialmente, foram feitas consultas nas bases de dados da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal Superior (CAPES) e no *Scientific Eletronic Library On Line* (SciELO). No entanto, constatamos que alguns trabalhos muito importantes sobre o pensamento algébrico não foram encontrados (BLANTON e KAPUT, 2005; FUJII e STEPHENS, 2008; KIERAN, 2007). Assim, optou-se por realizar buscas diretamente nos periódicos da área da Educação, especialmente aqueles nos quais predominam produções no campo da Educação Matemática.

Em uma primeira procura, realizada diretamente em sites de busca da internet, o trabalho de Canavarro (2007) foi encontrado. Ele contém várias citações de artigos bastante relevantes sobre o pensamento algébrico, e também situa o leitor sobre as principais pesquisas realizadas até então. Além disso, ele também indicou os periódicos que poderiam conter mais trabalhos versando sobre o mesmo tema.

Foram feitas buscas nos seguintes periódicos: Journal for Research in Mathematics Education (qualis A1), Educação Matemática Pesquisa (qualis B2), Estudos em Avaliação Educacional (qualis A2), Quadrante (qualis B1), ZDM - The International Journal on Mathematics Education (qualis A1), Boletim GEPEM (qualis B1), Education Studies in Mathematics (qualis A2), Revista Latinoamericana de Investigación em Matemática Educativa (não informado), Revista Eletrônica de Educação (B1), International Journal for Research in Mathematics Education (qualis B2) e Recherches em Didactique des Mathématiques (não informado). A consulta sobre o qualis de cada periódico foi feita no sistema *webqualis* (CAPES, 2015), tomando como referência o parâmetro *Educação* no campo *Área de Avaliação*.

Além dos trabalhos consultados nos periódicos, também foram incluídas dissertações, teses e trabalhos publicados em congressos que de alguma forma se relacionam com o tema tratado nesta dissertação. Não houve uma busca específica no sentido de encontrar estes últimos trabalhos. O critério foi simplesmente afinidade com o tema da pesquisa. Eles foram escolhidos na medida em que eram considerados relevantes para compor este estado da arte, por abordarem questões relativas à resolução de problemas aditivos ou por tratarem do pensamento algébrico nas etapas iniciais da Educação Matemática.

1.1 Estratégias Utilizadas por Crianças em Problemas Aditivos

Uma grande contribuição da Teoria dos Campos Conceituais foi mostrar que as operações de adição e subtração são, na verdade, duas faces da mesma moeda. Nessa teoria elas são consideradas complementares, sendo o campo conceitual relacionado com estas duas operações chamado de campo das estruturas aditivas. Nesse contexto, os problemas do tipo aditivo são, na verdade, problemas que envolvem a adição e/ou a subtração, e não apenas a adição, como o nome talvez possa sugerir em princípio. Além disso, Vergnaud (1985, 1990) destaca que muitos problemas aditivos podem ser resolvidos tanto pela adição quanto pela subtração, o que vai de encontro à ideia da anterioridade da adição em relação à subtração no currículo escolar, tradicionalmente estabelecida.

Vergnaud (1985, 1990) também analisou os problemas envolvendo multiplicação e/ou divisão, denominando o campo conceitual que envolve estas operações de campo das estruturas multiplicativas. Na presente pesquisa, nosso foco está nos problemas do tipo aditivo apenas, não abordando o campo multiplicativo.

A Teoria dos Campos Conceituais está em forte sintonia com as tendências das pesquisas e políticas públicas em Educação Matemática, sobretudo com relação ao conceito de situação-problema (MEIRIEU, 1998; PERRENOUD, 2000; BRASIL, 1997). Por exemplo, a PBM considera seis tipos de habilidades na resolução de problemas envolvendo operações Aritméticas: juntar, separar, acrescentar, retirar, comparar e completar. Cada uma destas habilidades está associada a um tipo de situação-problema diferente. Dentro de cada tipo, apenas a natureza dos objetos envolvidos é alterada, sendo que a estrutura é sempre mantida, ou seja, a matriz de referência das habilidades avaliadas na PBM sugere que diferentes tipos de situação-problema podem levar a utilização do mesmo tipo de estruturas.

Além das pesquisas sobre os diferentes tipos de problemas matemáticos nos primeiros anos escolares, também existem estudos sobre as estratégias que as crianças utilizam para resolver problemas aditivos (NUNES e BRYANT, 1997; BORBA e NUNES, 2004; CHAPIN e JOHNSON, 2006; SILVA, 2014; SILVA, JELINEK, BECK, SARAIVA e FONSECA, 2014). Estes estudos têm cada vez mais evidenciado que os algoritmos (ou “contas armadas”, como são mais conhecidos) não constituem as estratégias mais utilizadas pelas crianças em fase de alfabetização e que existem vários estágios gradativos que levam a uma conceitualização das estruturas aditivas e multiplicativas. Outro dado importante que essas novas pesquisas nos trazem, e que, aliás, confirma as proposições da Teoria dos Campos Conceituais, é que não existe uma ordem bem definida entre a adição e a subtração.

Além disso, nos últimos anos têm-se cada vez mais observado que olhar apenas para os problemas a serem resolvidos e para os fundamentos matemáticos inerentes a tais problemas, isto é, considerar apenas os processos exclusivamente de ensino, já não é mais suficiente para atender as demandas da educação atual. A aprendizagem vem ganhando cada vez mais destaque nas pesquisas sobre Educação Matemática. Um exemplo são os estudos sobre as estratégias que os alunos utilizam para resolver problemas aritméticos (NUNES e BRYANT, 1997; BORBA e NUNES, 2004; SILVA, 2014).

É importante ressaltar que esta mudança de paradigma, no que diz respeito à variedade de problemas a serem utilizados, foi fortemente influenciada pelos resultados das pesquisas abordando as estratégias utilizadas por crianças. Os esquemas cognitivos mobilizados por estudantes dos primeiros anos escolares na resolução de problemas aditivos têm sido tema de pesquisa recorrente na área da Educação Matemática. A seguir são apresentados os principais resultados de cinco importantes pesquisas abordando esses assuntos.

Ao analisar resoluções de problemas envolvendo operações com números naturais, Nunes e Bryant (1997) afirmam que o nível de dificuldade de um problema depende do número de operações mentais envolvidas e da coordenação destas operações. Os autores ressaltam que o número de operações mentais utilizadas em problemas com mudança de quantidade depende da posição em que se encontra o número requerido (valor inicial desconhecido, transformação desconhecida ou valor final desconhecido). Problemas com valor inicial desconhecido ou com transformação desconhecida demandam maior número de operações mentais. Por exemplo, um problema do tipo 4+?=5 (com transformação desconhecida) demanda maior quantidade de operações mentais do que um problema do tipo 4+1=? (com valor final desconhecido).

Borba e Nunes (2004), ao analisar a compreensão de estudantes a respeito dos significados, propriedades e formas de representação sobre números inteiros relativos por crianças de sete e oito anos de idade, afirmam que em problemas diretos (com valor final desconhecido) determina-se o valor final agindo diretamente nos dados, enquanto os problemas inversos (com valor inicial desconhecido) podem ser resolvidos por tentativas, uso da comutatividade ou inversão da operação envolvida, ou seja, exigem maior número de operações mentais do que os problemas diretos.

Justo (2004), sob a perspectiva da Epistemologia Genética e da Teoria dos Campos Conceituais, descreve os esquemas que promovem a evolução do processo de construção do conceito de subtração, com foco nos problemas de composição e transformação (VERGNAUD, 1985). A pesquisadora propôs a estudantes das 2º e 3º séries (hoje 3º e 4º anos) situações-problema envolvendo as estruturas aditivas. Ao final do estudo, ela conclui que o processo de construção da operação subtração ocorre mais lentamente se comparado com o processo de construção da operação adição. A autora ressalta que os significados da adição e da subtração são construídos em conexão ao longo de um processo, no qual há uma relação de dependência entre esses dois conceitos, reforçando o que já havia sido proposto por Vergnaud (1985). A autora também ressalta que a comutatividade da adição, a noção de operação inversa, a inclusão de classes e o contato com problemas envolvendo transformação de medidas são condições necessárias para a plena construção do conceito de subtração.

Chapin e Johnson (2006) identificaram, em seus estudos, três tipos de estratégias na resolução de problemas elementares envolvendo as operações de adição e subtração nos anos iniciais: estratégias baseadas na contagem nos dedos ou objetos físicos, estratégias baseadas na contagem em sequências (ou por blocos) e estratégias baseadas em sentenças numéricas (com representação mais sofisticada, algumas vezes fazendo uso de algoritmos).

Mendonça, Magina, Cazorla e Santana (2007) realizaram um estudo com 1803 estudantes de dois estados brasileiros (São Paulo e Bahia), de 1º a 4º série (hoje 2º a 5º anos), no qual as pesquisadoras propunham aos estudantes 12 problemas envolvendo adição e subtração, nos quais eles poderiam utilizar apenas lápis e papel. O estudo tinha como referencial a Teoria dos Campos Conceituais. As situações propostas envolviam a composição, a transformação e a comparação de medidas (VERGNAUD, 1985). As autoras concluem, ao final do estudo, que há um crescimento nas taxas de acertos conforme as crianças avançam no processo de alfabetização, ainda que em proporções diferentes nos dois estados, e que mesmo estudantes da 4º série (hoje 5º ano) ainda podem apresentar dificuldades em resolver problemas que envolvem as operações de adição e subtração. As autoras também destacam que os estudantes apresentam muita dificuldade nos problemas em que aparecem expressões como *a mais* e *a menos*, características de problemas de comparação, mas por outro lado, tiveram facilidade na resolução de problemas de composição, e ainda, que o problema mais difícil para os estudantes foi o que envolvia uma transformação desconhecida e o segundo mais difícil foi um problema de comparação com relação negativa desconhecida.

Sintetizando algumas das ideias dos trabalhos apresentados, podemos dizer que problemas inversos demandam um número maior de operações mentais que problemas diretos (NUNES e BRYANT, 1997; BORBA e NUNES, 2004); que o processo de construção do conceito de subtração ocorre mais lentamente que o processo de construção da adição, sendo que problemas de transformações de medidas podem facilitar o entendimento da subtração (JUSTO, 2004); que a contagem é uma das estratégias mais primitivas na resolução de problemas aditivos, evoluindo para estratégias que utilizam sentenças numéricas (CHAPIN e JOHNSON, 2006); e que o número de acertos em problemas aditivos tende a aumentar conforme as crianças avançam na idade, embora possam apresentar dificuldades nesse tipo de problema mesmo depois de ultrapassar a etapa de alfabetização (MENDONÇA et al., 2007).

Estas compreensões mostram que abordagens didáticas que consideram exclusivamente o uso de algoritmos como estratégia são insuficientes para o desenvolvimento de esquemas mentais capazes de responder a uma variedade de situações aditivas. Pode-se explorar a multiplicidade de problemas que podem facilitar o desenvolvimento do pensamento aditivo, bem como as variadas estratégias que os alunos utilizam para resolver esses problemas, a partir daquilo que aprendem em seu meio social, como a contagem, que parece ser a estratégia mais espontânea, pelo menos inicialmente.

No entanto, isso não significa que os algoritmos não possam ser abordados, e que os modos de resolução do aluno devam ser mantidos mesmo se não forem eficazes ou eficientes. Pelo contrário, deve-se partir da forma de resolver mais espontânea utilizada pelo estudante para que ele consiga compreender as estratégias mais eficientes possíveis dentro de seu nível de desenvolvimento.

É importante também destacar que o uso da contagem como estratégia aditiva tem sido verificado por várias pesquisas recentes (NUNES e BRYANT, 1997; BORBA e NUNES, 2004; CHAPIN e JOHNSON, 2006). Apenas para exemplificar, apresenta-se a seguir três estudos que destacam o uso da contagem em problemas envolvendo as estruturas aditivas.

Vece (2012), apoiando-se na Teoria dos Campos Conceituais, realizou um estudo com 22 alunos do 1º ano do Ensino Fundamental, no qual a autora analisa quais as estratégias os estudantes utilizam para resolver três problemas de transformação negativa (VERGNAUD, 1985) e que dificuldades de natureza cognitiva e emocional apresentam. Ao final da pesquisa, a autora conclui que as crianças de seis anos não apresentaram dificuldades emocionais ao lidar com problemas de transformação negativa, e que a maior fonte de erros não foi a dificuldade semântica de compreensão dos enunciados, mas sim a habilidade no uso da contagem (estratégia utilizada pela grande maioria das crianças nos três problemas, segundo a autora).

Mariano (2012), com base na Teoria dos Campos Conceituais, desenvolveu um estudo com alunos do 2º ano do Ensino Fundamental, no qual pretendia analisar quais procedimentos as crianças utilizariam para resolver problemas aditivos envolvendo transformações de medidas (VERGNAUD, 1985). A autora conclui, ao final da pesquisa, que os estudantes utilizam variadas estratégias envolvendo a contagem para resolver problemas dessa classe, em concordância com Chapin e Johnson (2006), no que diz respeito às estratégias iniciais. A autora também ressalta que as crianças utilizam algoritmos convencionais com maior recorrência na resolução de problemas do tipo 4+5=?, e em contrapartida, utilizam procedimentos que se apoiam em desenhos e números isolados para resolver problemas do tipo 4+?=9 ou do tipo ?+5=9.

Os dados da pesquisa apresentada na presente dissertação foram coletados no âmbito de um projeto mais amplo, o qual pretendia avaliar as estratégias utilizadas por estudantes do Ciclo de Alfabetização na resolução de problemas envolvendo todas as habilidades e competências da PBM. Na fase preliminar do estudo, elaboramos no grupo de pesquisa algumas situações-problema semelhantes àquelas exploradas na PBM. Silva et al. (2014) analisaram os mesmos dados da pesquisa apresentada nesta dissertação. No entanto, ao invés de focalizar o estudo na relação dos problemas aditivos com o pensamento algébrico (como é feito aqui), os autores pretendiam compreender quais as principais estratégias utilizadas por alunos do Ciclo de Alfabetização na resolução de problemas aditivos, concluindo que a contagem desempenha um papel muito importante enquanto estratégia de resolução, em convergência com Chapin e Johnson (2006), Vece (2012) e Mariano (2012). Isso foi constatado pelo fato de que a grande maioria dos alunos participantes da pesquisa utilizou essa estratégia.

Em síntese, o resultado encontrado por Chapin e Johnson (2006), com relação ao fato de a contagem ser uma das primeiras estratégias, muito utilizada na alfabetização, é confirmado nas pesquisas de Vece (2012) e Mariano (2012), e também na pesquisa de Silva et al. (2014).

A PBM tem sido usada como referência de avaliação em algumas pesquisas. Câmara (2013), por exemplo, realizou um estudo com o objetivo de compreender os fatores que influenciam na resolução de problemas envolvendo estruturas aditivas. Nesse estudo foram aplicados 192 itens da pré-testagem da PBM para 12 mil alunos de escolas brasileiras localizadas em diferentes estados. O autor conclui, ao final do estudo, que o índice de sucesso dos alunos na resolução de problemas aditivos da PBM varia de acordo com o tipo de contexto, a presença ou não de imagens, a magnitude dos números envolvidos e a localização dos dados no problema.

Segundo Câmara (2013), nos problemas que envolvem as ideias de juntar, acrescentar e retirar, os maiores índices de acerto ocorreram em problemas que apresentam um tipo de contexto familiar à faixa etária, sem a presença de imagens, com magnitude abaixo de 10 no caso da subtração e acima de 10 no caso da adição (embora a diferença entre os índices de acerto no caso da adição tenha sido de apenas 3%) e com localização dos dados tanto na imagem quanto no texto. Entretanto, nos problemas que envolvem as ideias de completar e comparar, os maiores índices de acerto ocorreram com a presença de imagens, com magnitude acima de 10 e com a localização dos dados tanto na imagem quanto no texto.

Além de explicar como a aprendizagem evolui, também é interessante a compreensão do erro. Explicar por que um estudante comete erros é uma tarefa difícil no âmbito da aprendizagem matemática, mas alguns estudos podem contribuir para esse fim. Um exemplo são as pesquisas que abordam a congruência semântica em expressões matemáticas, os quais descrevem algumas barreiras impostas pelas representações aditivas. A seguir será brevemente descrito um critério de decisão sobre a congruência semântica em problemas aditivos.

Tendo como referencial teórico os Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (1993), Brandt, Dionísio, Eslompo e Mildenberg (2010) analisaram problemas aditivos, ressaltando que a aprendizagem acontece quando se tem dois ou mais registros de representação semiótica do mesmo objeto matemático. Para que tais registros sejam congruentes, três condições devem ser satisfeitas: 1) correspondência semântica entre unidades significantes; 2) mesma ordem de apreensão das unidades nas duas representações; e 3) conversão um-a-um entre unidades significantes. Quando alguma dessas condições não é satisfeita, então está caracterizado o fenômeno da não congruência semântica.

Portanto, pode-se dizer, considerando o estado da arte das pesquisas sobre as estratégias utilizadas por crianças na resolução de problemas aditivos, que: problemas inversos demandam maior ação mental que problemas diretos; que o processo de construção do conceito de subtração ocorre mais lentamente que o da adição; que a contagem é uma das estratégias mais primitivas, evoluindo para estratégias mais sofisticadas e podendo chegar até o uso de algoritmos; que o número de acertos em problemas aditivos tende a aumentar conforme as crianças avançam na idade, ainda que possivelmente apresentem dificuldade em etapas posteriores; que o índice de sucesso dos alunos na resolução de problemas aditivos pode variar dependendo do tipo de contexto, da presença de imagens, da magnitude dos números e da localização dos dados no problema; e que a não congruência semântica pode explicar o insucesso na resolução de alguns problemas aditivos.

1.2 Pesquisas sobre o Pensamento Algébrico com Crianças

Segundo Ifrah (1998), uma das ideias matemáticas mais remotas é a ideia de *contagem*, que inicialmente foi utilizada para correspondência de objetos concretos. Mais tarde, as exigências do meio fizeram com que fossem utilizadas novas representações. O avanço nessas representações evoluiu em termos de linguagem, até o aparecimento dos primeiros sistemas simbólicos algébricos.

A palavra *Álgebra* se originou da palavra árabe *al-jabr*, a qual foi utilizada no livro *Al-Kitab al-jabr wa'l Muqabalah*, escrito por Mohammed ibn-Musa Al-Khwarizmi por volta 825D.C., que apresentava alguns métodos de resolução de equações, e por isto, o termo *Álgebra* passou a ser referente ao estudo das equações (BAUMGART, 1992).

Nos últimos anos, muito tem se discutido no cenário das pesquisas em Educação Matemática a respeito do conceito de pensamento algébrico (BLANTON e KAPUT, 2005; CARPENTER et al., 2005; IRWIN e BRITT, 2006; CANAVARRO, 2007; FUJII e STEPHENS, 2008; STEPHENS e WANG, 2008). A seguir, apresenta-se algumas definições desse tipo de pensamento encontradas na literatura.

Blanton e Kaput (2005, p.413) caracterizam o pensamento algébrico como o “processo pelo qual os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de casos particulares, estabelecem essas generalizações através de discurso argumentativo, e expressam-nas de formas progressivamente mais formais e adequadas à sua idade”. Esses autores desenvolveram pesquisas com o objetivo de compreender e caracterizar o pensamento algébrico nos primeiros anos escolares, definindo esse início da aprendizagem de conceitos algébricos como *early algebra*.

Considerar a generalização, a argumentação e a expressão como partes constituintes do processo de aprendizado da Álgebra é admitir que o aprendizado algébrico não está restrito exclusivamente à compreensão dos símbolos e manipulação de expressões envolvendo incógnitas e variáveis, mas também deve contemplar formas de pensar mais generalistas, argumentativas e com maior poder de representação de ideias matemáticas, o que amplia consideravelmente o horizonte de contextos nos quais o pensamento algébrico pode desempenhar algum papel importante.

Verschaffel, Greer e De Corte (2007) entendem que o pensamento algébrico está associado com o reconhecimento do que é geral numa situação matemática e à expressão de generalizações. Kieran (2007) ressalta que a Álgebra não deve ser entendida apenas como um conjunto de procedimentos envolvendo símbolos alfabéticos, que não deve ser encarada apenas como um conjunto de técnicas, mas também como uma forma de pensar e raciocinar em situações matemáticas. Apesar de Kieran (2007) utilizar o termo *Álgebra*, e não *pensamento algébrico*, a *Álgebra* de Kieran (2007) parece estar definida no mesmo sentido do *pensamento algébrico* de Verschaffel et al. (2007), e também de Blanton e Kaput (2005).

Linz e Gimenez (1996) ressaltam que o conceito de pensamento algébrico no meio acadêmico não é compreendido da mesma forma por todos os profissionais que de alguma forma trabalham com a Álgebra, o que acaba por influenciar muitos professores a caracterizar a Álgebra como uma área na qual se trabalha exclusivamente a habilidade de *calcular com letras*, atribuindo mais importância à sintaxe do que ao pensamento da criança.

A ideia de se trabalhar com o pensamento algébrico nas etapas iniciais da Educação Escolar é relativamente recente. O *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000) destaca quatro eixos estruturantes (grupos de assuntos da Matemática) que devem orientar o trabalho pedagógico envolvendo o pensamento algébrico nos vários níveis de ensino. São eles: “(1) compreender padrões, relações e funções; (2) representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos; (3) usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas; e (4) analisar a mudança em vários contextos”. Cada nível de ensino deve considerar também aspectos específicos da faixa etária dos alunos e dos conteúdos de outros eixos da Matemática, recebendo adequações de acordo com essas características (NCTM, 2000).

Logo em seguida da publicação das orientações do NCTM (2000), surgiram na literatura vários trabalhos abordando questões relativas ao desenvolvimento do pensamento algébrico, inclusive no Brasil.

Falcão (2003) questiona a anterioridade da Aritmética em relação à Álgebra, destacando que a Álgebra é um campo com características específicas, e não simplesmente uma extensão da Aritmética. O autor conclui que a Álgebra no Ensino Fundamental não deve se restringir apenas à aquisição de códigos algorítmicos ao final desta etapa de ensino, destacando que as noções de função e incógnita poderiam ser mais bem desenvolvidas se esses assuntos fossem abordados com maior frequência e desde o Ciclo de Alfabetização. Um termo utilizado pelo autor que merece destaque, tendo em vista a proposta de Álgebra na alfabetização, é o que ele chama de *pré-Álgebra*, ou seja, uma primeira experiência com o pensamento algébrico, sem a exigência rigorosa de uma representação simbólica.

No entanto, abordar uma pré-Álgebra trouxe para a comunidade de educadores matemáticos diversas novas questões, pois pouco se discutia sobre o pensamento algébrico na alfabetização. Aliás, por se tratar de um eixo estruturante recente, até mesmo a formulação de tarefas e situações-problema não são claramente diferenciadas de outros eixos na literatura.

Os primeiros problemas propostos abordando o pensamento algébrico ressaltavam a ideia de regularidade e previsibilidade, na maioria das vezes estando relacionados com sequências e combinações.

Gomes (2003) apresenta e recomenda diversas situações algébricas para o Ensino Fundamental envolvendo sequências e combinações, as quais podem servir como base para a criação e manipulação de equações e expressões algébricas. A autora afirma que a Álgebra pode ser abordada desde o início do Ensino Fundamental, destacando a ideia de uma *alfabetização algébrica*, e ainda evidencia as relações que podem ser traçadas entre a Álgebra, a Geometria e a Aritmética.

Fujii (2003) utiliza a expressão *quase-variável* para designar um número ou conjunto de números numa expressão que revelam uma relação matemática e que se manterá independentemente dos números a serem posteriormente utilizados. Isto é, o autor define uma quase-variável como uma sequência que apresenta regularidade e previsibilidade.

Como se pode notar, tendo em vista os trabalhos de Falcão (2003), Gomes (2003) e Fujii (2003), em um primeiro momento os trabalhos sobre o pensamento algébrico estavam mais ligados ao estabelecimento de uma constituição terminológica para os conceitos envolvidos, estando centrados nas ideias de regularidade e previsibilidade, com situações que envolviam basicamente sequências e combinações de objetos. Com base nas tarefas abordadas nesses primeiros estudos, pode-se definir situações envolvendo combinações como aquelas nas quais uma contagem de objetos é requerida, na qual a ordem desses objetos é alterada ou constitui uma informação relevante para a determinação da estratégia de resolução.

Blanton e Kaput (2005) afirmam que o pensamento algébrico se subdivide em duas vertentes: a *Aritmética Generalizada* e o *pensamento funcional*. A primeira se caracteriza pela generalização das operações e o raciocínio acerca da relação entre números. Já a segunda se caracteriza pela descrição da variação numérica em certo domínio.

Destacamos que as duas vertentes do pensamento algébrico propostas por Blanton e Kaput (2005) ampliam consideravelmente a noção de pensamento algébrico. Vamos nos concentrar, em um primeiro momento, na Aritmética Generalizada. Blanton e Kaput (2005) abordam vários tipos de situações que demandam este tipo de pensamento, destacando principalmente as propriedades e relações entre números inteiros, as propriedades entre as operações, o uso da igualdade como uma relação entre quantidades, a estrutura dos números e a resolução de expressões numéricas com número desconhecido em falta.

Um aspecto que acabou se destacando muito na vertente da Aritmética Generalizada, foi o que alguns autores (CARPENTER et al., 2005; IRWIN e BRITT, 2006; FUJII e STEPHENS, 2008; STEPHENS e WANG, 2008) chamam de *pensamento relacional*, que tem como foco o estudo das relações entre os números, e também entre as operações matemáticas. Alguns autores (STEPHENS e WANG, 2008; IRWIN e BRITT, 2006) afirmam que o pensamento relacional se caracteriza pela compensação e pela equivalência na resolução de problemas matemáticos.

Fujii e Stephens (2008) afirmam que o pensamento relacional se caracteriza pela exploração de padrões de variação sem necessariamente apresentar representações envolvendo expressões algébricas. Os autores ressaltam que este tipo de pensamento pode ser visto como uma *proto-Álgebra*, ou seja, um pensamento algébrico sem representação sofisticada.

Carpenter et al. (2005), ao abordar o pensamento relacional, propõem o uso de problemas do tipo a+b=_+c para auxiliar no processo de desenvolvimento desse tipo de pensamento. Segundo o autor, situações dessa natureza oportunizam ao estudante pensar na igualdade não apenas como um resultado, mas como uma relação entre quantidades.

Stephens e Wang (2008), em um estudo que analisou o pensamento relacional de estudantes do 6º e 7º anos escolares em Portugal, utilizaram questões abordando o pensamento relacional. Além do tipo de questões utilizadas por Carpenter et al. (2005), eles também utilizaram problemas envolvendo a multiplicação e a divisão. As conclusões do trabalho de Stephens e Wang (2008) são semelhantes às de Carpenter et al. (2005), ou seja, problemas aritméticos envolvendo o pensamento relacional promovem uma visão diferenciada da operação de igualdade, que leva o estudante a considerá-la não apenas como indicativo de resultado, mas também como uma relação entre as quantidades.

Já abordamos algumas das principais discussões a respeito da Aritmética Generalizada, vamos agora nos concentrar no que Blanton e Kaput (2005) denominam pensamento funcional. O pensamento funcional está mais associado à ideia de descrição da variação de quantidades, que é a mesma ideia do conceito de função em matemática. Blanton e Kaput (2005) apresentam vários exemplos de problemas que podem auxiliar no desenvolvimento desse tipo de pensamento, destacando principalmente a simbolização das quantidades, as operações com expressões simbólicas, a representação gráfica de dados, a descoberta de relações funcionais e a previsão de resultados desconhecidos utilizando dados conhecidos.

Embora o conceito de função seja tratado mais formalmente apenas no final do Ensino Fundamental e/ou início do Ensino Médio, existem situações-problema e tarefas que podem ser realizadas desde os anos iniciais do Ensino Fundamental com o objetivo de desenvolver o pensamento funcional nos estudantes. A seguir são apresentadas as pesquisas de Ponte e Velez (2011), e também de Silva e Savioli (2012), que ilustram essa possibilidade.

Ponte e Velez (2011) analisaram as representações de dois estudantes de 7 anos em 3 tarefas envolvendo sequências e combinações de objetos. Os autores constataram que as crianças conseguiram utilizar boas representações para as sequências, conseguiram prever termos próximos do início, e em alguns casos, até mesmo termos mais afastados, seguindo o raciocínio esperado de acordo com a proposta da tarefa. No entanto, destaca-se que algumas representações podem indicar erroneamente um bom desenvolvimento do processo de conceitualização, citando o caso de um dos estudantes, que elaborou uma representação para as combinações sem, no entanto, produzir explicações que evidenciassem o entendimento do raciocínio utilizado.

Silva e Savioli (2012) utilizaram o método de Análise do Conteúdo para compreender o pensamento algébrico nas resoluções de tarefas realizadas com 35 alunos do 5º ano do Ensino Fundamental. As autoras concluíram que embora os estudantes não apresentem uma linguagem simbólica para formalizar o pensamento algébrico, eles possuem mecanismos de representação para visualizar a comparação de quantidades, abstraindo algumas relações matemáticas do contexto apresentado. Em uma das tarefas aplicadas na pesquisa, não havia uma contextualização, apenas instruções que mencionavam um procedimento numérico. Nessa última tarefa, ainda que não houvesse um contexto para que as crianças o representassem, elas identificaram padrões e algumas conseguiram compreender e prever facilmente os valores que deveriam preencher nas lacunas em branco, conforme a demanda da tarefa.

Com essas duas pesquisas, finalizamos a apresentação do estado da arte sobre o pensamento funcional, e assim, fechamos a descrição das duas abordagens do pensamento algébrico indicadas por Blanton e Kaput (2005). Ressalta-se que embora novas abordagens do pensamento algébrico tenham surgido nos últimos anos, há predominância da abordagem que o considera sendo constituído estritamente por problemas que envolvem sequências e combinações com termos desconhecidos.

No Brasil, apenas recentemente o pensamento algébrico passou a fazer parte das orientações curriculares em nível nacional. Em 2012 o Ministério da Educação (MEC) publicou um documento sobre os direitos de aprendizagem no Ciclo de Alfabetização (BRASIL, 2012). Segundo esse documento, que é o primeiro a citar o pensamento algébrico como um dos eixos, o conhecimento matemático nos anos iniciais deve ser desenvolvido simultaneamente em cinco eixos estruturantes: (1) Números e Operações; (2) Pensamento Algébrico; (3) Espaço e Forma; (4) Grandezas e Medidas; e (5) Tratamento da Informação. Assim como nas abordagens estrangeiras, o pensamento algébrico no Brasil ainda está fortemente associado com a ideia de sequências e combinações de objetos. Os problemas do tipo aditivo estão, em sua totalidade, contemplados no eixo estruturante “Números e Operações”.

O MEC também publicou nos cadernos de formação entregues aos professores participantes do Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa – PNAIC (BRASIL, 2013) algumas atividades que podem auxiliar o professor dos anos iniciais do Ensino Fundamental no desenvolvimento do pensamento algébrico de seus alunos, sinalizando uma preocupação também com o pensamento algébrico, enquanto assunto a ser tratado no Ciclo de Alfabetização.

Também é importante destacar a predominância da Epistemologia Genética de Jean Piaget (1937, 1950, 1977) e da Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud (1985, 1990, 1997), enquanto referenciais teóricos que têm fundamentado as pesquisas sobre o pensamento algébrico, não apenas na alfabetização, mas também em outras etapas da Educação Escolar.

2 O Campo Conceitual das Estruturas Aditivas

Neste capítulo são apresentadas as principais ideias da Teoria dos Campos Conceituais, a abordagem dos problemas aditivos nessa teoria e também a abordagem dos problemas aditivos na matriz de referência de avaliação da PBM.

2.1 Teoria dos Campos Conceituais

Antes dos estudos construtivistas, o ensino das operações matemáticas elementares era considerado como uma evolução linear natural, que começava pela adição, depois subtração, e em seguida a multiplicação e divisão, com ênfase no treinamento de algoritmos que resolvem problemas numéricos envolvendo essas quatro operações. Com base nos estudos precedentes de Piaget e Kamii, Vergnaud (1985, 1990, 1997) propôs a Teoria dos Campos Conceituais, postulando que a essência da aprendizagem está no processo de conceitualização.

Em termos de teoria, Vergnaud amplia a questão de Piaget no que se refere à aprendizagem de novos conhecimentos. Para Piaget (1937, 1950, 1977), o conhecimento é construído pelo desenvolvimento de estruturas e esquemas que se reduzem, em última instância, ao desenvolvimento de operações lógicas. Para Vergnaud (1985), deve-se levar em consideração a particularidade de cada tipo de conhecimento, sendo que as dificuldades do processo de assimilação/acomodação se alteram bastante de um conhecimento para outro, atribuindo especial importância à transmissão social e ao uso da linguagem no processo de desenvolvimento cognitivo.

Há uma grande produção acadêmica abordando especificamente a Teoria dos Campos Conceituais. Neste trabalho, vamos focar nossa análise em três pontos-chave que norteiam os estudos de Vergnaud: situações, invariantes operatórios e representações simbólicas. A noção de *campo conceitual*, termo cunhado por Vergnaud (1985, 1990), é na verdade uma síntese destes três pontos-chave da teoria.

Vergnaud (1985, 1990, 1997) define campo conceitual como um conjunto de conceitos, os quais só possuem sentido no escopo de um conjunto de situações e representações próprias, a partir das quais certas estratégias cognitivas, chamadas de invariantes operatórios, são exigidas para superar as dificuldades impostas pelas situações. Um conceito, segundo Vergnaud (1985, 1990, 1997) pode ser considerado como uma tripla C={S,I,R}, onde S é um conjunto de situações envolvendo o conceito, I é um conjunto de invariantes operatórios e R é um conjunto de representações simbólicas associadas com o conceito.

Pode-se dizer que a variedade de situações com as quais o sujeito tem contato ao longo de sua história, delimitam suas respostas e seus processos cognitivos quando novamente defrontado com situações semelhantes. Daí a importância de se considerar as classes possíveis de situações constituintes de um campo conceitual.

Piaget (1967, 1970) já observava nos estudos da Epistemologia Genética que cada situação exige um conjunto de esquemas constituídos por metas, antecipações, regras de ação, inferências e invariantes operatórios. Os invariantes operatórios são procedimentos que podem ser aplicados a uma classe de situações semelhantes entre si. Dividem-se em dois tipos: teoremas-em-ação e conceitos-em-ação. Os teoremas-em-ação são proposições tidas pelo sujeito como verdadeiras. Ao contrário dos teoremas matemáticos, nem sempre podem ser generalizados ou provados, estando sempre sujeitos a reorganização. Os conceitos-em-ação são características atribuídas a sujeitos ou objetos, constituindo as premissas, ou seja, informações que podem ser utilizadas nos teoremas-em-ação com o objetivo de dominar situações de um determinado campo conceitual. Em termos psicológicos, os invariantes operatórios são os significados atribuídos aos conceitos (PIAGET e INHELDER, 1959; PIAGET e INHELDER, 1962; PIAGET e INHELDER, 1968).

As representações simbólicas que o sujeito elabora a partir das situações e invariantes operatórios constituem a componente dos significantes do campo conceitual. A simbologia utilizada para definições, a forma de representar os teoremas-em-ação, assim como a linguagem utilizada para formular as situações são alguns exemplos de representações simbólicas.

Quando Vergnaud (1985, 1990) propôs a Teoria dos Campos Conceituais, ele se interessou inicialmente pelas estratégias empregadas por estudantes na resolução de problemas aditivos e multiplicativos, sem considerar se determinadas classes de problemas favorecem o desenvolvimento do pensamento algébrico. Da mesma forma, na teoria de Vergnaud não fica explícito que problemas estariam mais ligados à alfabetização e que problemas estariam mais ligados a outras etapas da Educação Escolar. Devemos ter em vista que quando a teoria foi proposta, a alfabetização matemática estava centrada na Aritmética, sem contemplar ainda o pensamento algébrico e outros eixos temáticos. Além disso, a própria ideia de alfabetização matemática ainda era bastante incipiente, pois estava focada quase que exclusivamente no ensino da língua materna.

Seria interessante contextualizar o referencial da Teoria dos Campos Conceituais com as abordagens que surgem à luz das novas tendências na Educação Matemática e nas novas concepções de alfabetização. Por exemplo, dentro dos problemas aditivos, poderíamos analisar que problemas possibilitam o uso de um pensamento algébrico. Destaca-se que embora seja uma tendência no Brasil e no mundo considerar o pensamento algébrico na etapa de alfabetização, ainda há um número relativamente pequeno de estudos que abordam o tema, o que tem motivado, nos últimos anos, o surgimento de trabalhos nesse sentido.

Utilizar o referencial da Teoria dos Campos Conceitos para melhor compreender o pensamento algébrico vai fortemente ao encontro do objetivo da pesquisa, que é compreender de que forma o pensamento algébrico pode estar presente nas resoluções de problemas aditivos por estudantes do Ciclo de Alfabetização, particularmente com relação aos problemas aditivos, já tratados no contexto dessa teoria.

2.2 Problemas Aditivos na Teoria dos Campos Conceituais

Para Vergnaud (1990), o campo das estruturas aditivas é “o conjunto das situações, cujo tratamento implica uma ou várias adições ou subtrações ou uma combinação destas operações, e também como o conjunto de conceitos, teoremas e representações simbólicas que permitem analisar tais situações como tarefas matemáticas”.

Vergnaud (1985) também propõe uma classificação para os diversos tipos de problemas aditivos, com base nos conceitos de número natural, número relativo, medida, composição, transformação, número inteiro e relação.

O número natural, para Vergnaud (1985), é um conceito idêntico ao de número natural considerado pelos matemáticos. O conjunto dos números naturais em matemática é o conjunto {1,2,3,...}. São os números inteiros sem sinal, em contraponto aos números dotados de sinal, os quais Vergnaud (1985) define como números relativos. As medidas são as representações de quantidades que a criança elabora. A composição é simplesmente a junção de duas medidas em outra, sem a necessidade de uso de outro tipo de operação. Os números relativos, quando utilizados em transformações ou composições também são chamados de estados relativos. As transformações são operações que agem em medidas, ou estados relativos, resultando em novas medidas, ou em novos estados relativos. As relações são associações entre duas medidas ou estados relativos.

Vergnaud (1985) classifica todos os problemas considerados no campo conceitual aditivo em seis categorias: composição de medidas; transformação de medidas; relação entre medidas; composição de transformações; transformação de estados relativos; e composição de estados relativos. Apenas para ilustrar os problemas que estamos discutindo nesta seção, são apresentados a seguir no Quadro 1 alguns exemplos destas categorias.

Quadro 1 - Problemas Aditivos na Teoria dos Campos Conceituais.

CATEGORIAS DE PROBLEMAS ADITIVOS	EXEMPLOS DE PROBLEMAS
C1 - Composição de Medidas	"João comprou 4 maçãs e 3 laranjas. Quantas frutas ele comprou?" (composição aditiva) "Pedro comprou 4 maçãs e algumas laranjas. Se ao todo ele comprou 7 frutas, quantas laranjas ele comprou?" (composição subtrativa)
C2 - Transformação de Medidas	"Maria tem 5 bonecas. Ela ganhou mais 3. Quantas bonecas Maria tem agora?" (transformação positiva) "Paulo tinha 5 bolas de gude. Ele deu 3 bolas de gude para seu amigo. Com Quantas Paulo ficou?" (transformação negativa)
C3 - Relação entre Medidas	"Paulo tem 4 figurinhas. Pedro tem 2 a mais que Paulo. Quantas figurinhas tem Pedro?" (relação positiva) "João fez 4 gols. Pedro fez 2 gols a menos. Quantos gols Pedro fez?" (relação negativa)
C4 - Composição de Transformações	"Maria tinha 3 bonecas antes do seu aniversário. Ela ganhou 2 bonecas de aniversário. Um tempo depois, ela deu 4 bonecas para sua irmã menor. Quantas bonecas Maria tem agora?"
C5 - Transformação de Estados Relativos	"Ontem estava frio, a temperatura chegou à -2°C na rua. Hoje não está tão frio, a temperatura está +10°C. Qual foi a variação de temperatura entre ontem e hoje?"
C6 - Composição de Estados Relativos	"Ás 8:00 o termômetro marcava -2°C, ás 12:00 marcava 0°C, e ás 16:00 marcava +4°C. Qual foi a variação de temperatura entre ás 8:00 e 16:00?"

Fonte: Adaptados do livro *A criança, a matemática e a realidade* (VERGNAUD, 1985).

A categoria *C1 – Composição de Medidas* compreende problemas em que as operações aditivas são utilizadas para reunir medidas de natureza diferente em um grande conjunto destacando alguma semelhança entre as medidas da situação. No exemplo do Quadro 1, maçãs e laranjas são reunidas em um grande conjunto por aquilo que possuem em comum, ou seja, porque ambas podem ser classificadas como frutas.

Na categoria *C2 – Transformação de Medidas* estão aquelas situações em que uma determinada medida é transformada em outra medida, com quantidade menor ou maior, dependendo da situação, mas preservando sempre a natureza da grandeza envolvida. No exemplo do quadro, por exemplo, a medida de bonecas é transformada em outra medida de bonecas pela operação de adição.

Na categoria *C3 – Relação entre Medidas* estão situações em que duas medidas são comparadas. Geralmente nesse tipo de situação aparecem expressões tais como *a menos* ou *a mais*.

A categoria *C4 – Composição de Transformações* compreende situações em que duas ou mais transformações são realizadas de forma consecutiva, de modo a aumentar o conjunto de dados fornecidos pelo problema e exigir do estudante a habilidade de agir em situações com transformações simples, tais como as da categoria C2.

Na categoria *C5 – Transformação de Estados Relativos* encontram-se aquelas situações que apresentam medidas que podem ser relativizadas, normalmente recebendo uma designação, como por exemplo, assumindo que abaixo de zero tem-se o sinal de *menos* e acima de zero tem-se o sinal *mais*.

A categoria *C6 – Composição de Estados Relativos* é composta por situações em que duas ou mais transformações de estados relativos são realizadas consecutivamente. Essas situações são análogas às da categoria C4, porém considerando que aqui as medidas podem receber designações.

É importante ressaltar que a estrutura de um problema não depende apenas da forma como é enunciado ou da expressão que o representa, pois ele está sempre condicionado aos teoremas-em-ação utilizados para resolvê-lo. As classes de situações apresentadas no Quadro 1 não foram propostas deliberadamente. Elas são o resultado de uma série de estudos, nos quais foram analisadas as principais estratégias utilizadas por crianças. Por isto, quando se fala em estrutura de um problema, no contexto da Teoria dos Campos Conceituais, os processo cognitivos também devem ser levados em consideração como constituintes desta estrutura.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997), apenas os problemas das quatro primeiras categorias são adequados para os anos iniciais do Ensino Fundamental.

Pode-se dizer que as operações de adição e subtração estão fortemente relacionadas e que existem vários tipos de problemas aditivos. É interessante ressaltar que a Teoria dos Campos Conceituais influenciou fortemente a elaboração de avaliações em larga escala. No Brasil, por exemplo, existe uma íntima relação entre os tipos de problemas apresentados acima e as questões da PBM.

2.3 Problemas Aditivos na Provinha Brasil de Matemática

O MEC, em conjunto com o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), lançou em 2008 a Provinha Brasil de Língua Portuguesa. Apesar de ser uma avaliação em larga escala, os resultados da aplicação desta prova deveriam servir apenas como uma referência para avaliação local, em cada escola. Foram disponibilizados materiais com instruções aos docentes.

Ainda em 2008, o MEC e o INEP planejaram a criação de uma avaliação semelhante à Provinha Brasil de Língua Portuguesa, mas com foco na alfabetização matemática. Em 2010, foi realizada a pré-testagem da PBM.

Como o público alvo da PBM são crianças matriculadas nos três primeiros anos do Ensino Fundamental, a forma de aplicação da prova segue a recomendação de que os aplicadores leiam oralmente os enunciados para os estudantes, uma vez que não se espera que a habilidade de leitura esteja plenamente desenvolvida até final do Ciclo de Alfabetização. Os enunciados, sempre acompanhados de uma pequena ilustração, são fornecidos apenas aos aplicadores. Os estudantes recebem uma folha com a ilustração em tamanho maior, que visualizam enquanto o enunciado é lido pelo aplicador.

A PBM possui uma matriz de referência de avaliação, na qual constam vários descritores (habilidades a serem avaliadas), agrupados em competências, que por sua vez estão agrupados em eixos temáticos. Os problemas aditivos, nesta matriz são contemplados no eixo Números e Operações, na competência C2 -

Resolver problemas por meio da adição ou subtração, e compreende os descritores D2.1 - Resolver problemas que demandam as ações de juntar, separar, acrescentar e retirar quantidades e D.2.2 - Resolver problemas que demandam as ações de comparar e completar quantidades.

Para ilustrar os tipos de situações propostas na PBM, é apresentado a seguir um exemplo de cada categoria da matriz de referência relativa aos problemas aditivos. É importante ressaltar que os enunciados do Quadro 2 foram retirados diretamente do guia para aplicadores da PBM, ou seja, a ideia é que os enunciados devem ser lidos oralmente para as crianças, pois não se espera que elas já tenham desenvolvido a habilidade de leitura plenamente. Por isto os enunciados estão em formato de instrução, já que não são os próprios estudantes que devem ler os problemas. As alternativas foram omitidas, pois não são relevantes para o propósito da tabela. Ressalta-se também que como nas edições de 2011, 2012, 2013 e 2014 não constaram problemas que demandassem a ação de separar na PBM, esta habilidade não aparece no Quadro 2. No entanto, para situar o leitor, podemos dizer que os problemas de separar se equivalem aos problemas categorizados por Vergnaud (1985) como problemas de composição subtrativa.

Quadro 2 - Problemas Aditivos na Provinha Brasil de Matemática.

CATEGORIAS DE PROBLEMAS ADITIVOS	**EXEMPLOS DE PROBLEMAS**
Juntar	“Caio tem quatro gatinhos e Maria tem três. Faça um X no quadradinho que mostra quantos gatinhos eles têm juntos.” (problema 7 da provinha de 2011/01)
Acrescentar	“Paulo tinha 9 chaveiros. Ganhou mais 3 de seus avós. Quantos chaveiros ele tem agora? Faça um X no quadradinho que indica quantos chaveiros ele tem agora.” (questão 6 da provinha de 2013/01)
Retirar	“Veja os lápis de Mariana.” Em seguida há um desenho com 17 lápis. “Mariana deu 6 lápis para sua irmã. Marque um X no quadradinho que indica com quantos lápis Mariana ficou.” (questão 11 da provinha de 2014/01)
Comparar	“João tem mais peixes que Vânia. Veja.” Em seguida há um desenho que mostra o aquário de João com 9 peixes e o aquário de Vânia com 6 peixes. “Marque um X no quadradinho que mostra quantos peixes João tem a mais que Vânia.” (questão 19 da provinha de 2014/01)
Completar	“Luiza precisa arrumar nove livros na estante da biblioteca. Ela já colocou cinco livros na estante.” Na prova há um desenho ilustrando desta situação. “Faça um X no quadradinho que mostra a quantidade de livros que Luiza ainda precisa colocar na estante.” (questão 9 da provinha de 2012/02)

Fonte: INEP (2015).

Nota-se semelhança entre os problemas de juntar com a categoria da composição de medidas, e também entre os problemas de acrescentar e retirar com a categoria dos problemas de transformação de medidas, e ainda, entre os problemas de comparar e a categoria de relação entre medidas de Vergnaud (1985). Os problemas de completar da PBM podem ser considerados como problemas de transformação de medidas, uma vez que a natureza da medida é preservada neste tipo de problema, ainda que a transformação esteja omitida, ou seja, não são problemas com valor inicial ou final desconhecido.

A Teoria dos Campos Conceituais e a PBM sugerem a existência de várias categorias de problemas aditivos. Isso vai de encontro ao reducionismo algorítmico fortemente presente no contexto escolar tradicional, que considera apenas uma operação de adição, ignorando suas variantes, e as habilidades envolvidas em cada uma delas. Mais do que destacar essas habilidades, o presente estudo também analisa o potencial de desenvolvimento de pensamento algébrico de alguns tipos de problemas aditivos.

3 Metodologia

O estudo apresentado neste trabalho integra a pesquisa já em andamento no NUEPEC da Universidade Federal do Rio Grande (FURG), que tem por objetivo analisar as principais estratégias e procedimentos de alunos do Ciclo de Alfabetização na resolução de problemas que envolvem as competências e descritores da PBM (INEP, 2015).

Ressalta-se que as competências e descritores da PBM foram utilizados apenas para nortear o tipo de problema a ser abordado. As situações efetivamente utilizadas nas pesquisas foram elaboradas em reuniões do NUEPEC, de forma coletiva, ou seja, para este estudo não foram utilizadas as questões da PBM, optou-se por produzir situações originais dentro do próprio grupo.

O grupo trabalhava no projeto “Práticas Pedagógicas para Alfabetização Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental” na época em que os dados foram produzidos, isto é, entre março e agosto de 2014. O principal objetivo era realizar uma investigação para mapear e desenvolver práticas de alfabetização matemática nas escolas públicas parceiras na execução do projeto. O trabalho que analisa as estratégias utilizadas nos problemas do campo aditivo já foi publicado (SILVA et al., 2014).

As estratégias utilizadas pelos estudantes em todas as competências e descritores da PBM foram registradas nas anotações dos diários de campo. O conjunto destas anotações, contendo diálogos entre estudantes e pesquisadores, e também comentários dos pesquisadores, constitui um banco de dados utilizado pelos integrantes do NUEPEC (do qual o autor deste trabalho faz parte) para análise posterior.

Em particular, o estudo das estratégias utilizadas para resolver problemas aditivos, resultou em algumas discussões dentro do grupo sobre a possibilidade de desenvolvimento do pensamento algébrico em alguns problemas abordados, principalmente os problemas envolvendo as ações de completar e comparar. Foi destas discussões que surgiu a ideia de realizar uma análise sobre a relação entre os problemas aditivos e o pensamento algébrico na alfabetização. A partir do momento em que surgiu no grupo de pesquisa a proposta de estudar a relação entre os problemas aditivos e o pensamento algébrico, construiu-se a questão de pesquisa: Como pode ser caracterizado o pensamento algébrico nas estratégias de resolução de problemas aditivos na etapa de alfabetização?.

3.1 Delineamento

O presente trabalho apresenta uma pesquisa de natureza qualitativa, tendo em vista que os objetivos estão voltados para a compreensão de um fenômeno, que os dados analisados são oriundos de diálogos entre os participantes da pesquisa, e que não são utilizados métodos quantitativos na produção de dados e na análise dos resultados. Segundo Garnica (2004), a pesquisa qualitativa tem como principais características:

> (a) a transitoriedade dos seus resultados; (b) a impossibilidade de uma hipótese a priori, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; (c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; (d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que estas mesmas compreensões e também os meios de se obtê-las podem ser (re)configuradas; (e) a impossibilidade de se estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas (2004, p.86).

Dado o potencial de retorno dos resultados da pesquisa para a sala de aula e o trabalho docente, optamos pela metodologia de Investigação-Ação na produção de dados. Ela é constituída por quatro etapas: planejamento, ação, observação e reflexão (CARR e KEMMIS, 1988). Nessa modalidade, tanto os sujeitos quanto os pesquisadores são considerados como participantes da pesquisa, interagindo na ação a ser analisada. Há, portanto, uma relação muito próxima entre teoria e prática.

As docentes da escola na qual o estudo foi realizado também integravam o grupo NUEPEC na época em que os dados foram produzidos. A participação das docentes foi muito importante, sobretudo na etapa de produção dos dados. Em um primeiro momento, também houve participação das docentes na análise destes dados, ainda que inicialmente não houvesse a definição clara de um referencial teórico. A decisão de adotar a Teoria dos Campos Conceituais ocorreu em um momento posterior à participação das docentes no projeto, e apenas alguns integrantes do NUEPEC o fizeram. Sendo assim, não foi possível identificar se as docentes adotaram algum referencial teórico, e em caso afirmativo, qual ou quais referenciais foram adotados.

As quatro etapas compõem o que se tem chamado de ciclos da espiral de investigação-ação escolar (KEMMIS e MACTAGGART, 1988). No caso específico desta pesquisa, as etapas da investigação-ação escolar são apresentadas no Quadro 3.

Quadro 3 - Detalhamento da Investigação-Ação.

Momentos	**Descrição**
Planejamento	Estudo inicial da realidade da proposta dentro do grupo de pesquisa. Construção das situações-problemas. Elaboração dos materiais a serem aplicados. Elaboração do roteiro para a atividade.
Ação	Ação nas turmas de 3º ano em escolas da rede municipal, parceiras do grupo de pesquisa para a produção dos dados. Proposição das atividades. Elaboração de perguntas durante o desenvolvimento das estratégias pelas crianças.
Observação	Observação das condutas das crianças, dos materiais que produziram e das explicações que adotaram para algumas estratégias. Registro nos diários de campo das respostas das crianças, bem como das estratégias utilizadas por elas na tentativa de encontrar soluções para as situações-problema propostas.
Reflexão	Análise dos dados coletados. Reflexão sobre os limites da situação-problema empregada. Elaboração de uma compreensão de como as crianças do Ciclo de Alfabetização agem e as capacidades que apresentam na resolução de problemas aditivos elementares. (Posteriormente, também foram analisadas as mesmas estratégias do ponto de vista do pensamento algébrico).

Fonte: NUEPEC/FURG.

No caso deste estudo, as duas professoras das escolas parceiras da FURG, que integram o projeto com o Observatório Nacional da Educação (OBEDUC) e participaram das reuniões semanais do NUEPEC que antecederam a atividade analisada na pesquisa, relataram as limitações e habilidades já desenvolvidas por seus alunos. Em seguida, todos os integrantes do NUEPEC discutiram a respeito de uma proposta de situação-problema, a qual é apresentada na seção 3.3, sugerida por alguns integrantes do grupo. Ao final, chegamos a um consenso e passamos a próxima etapa, que seria a implementação da atividade na escola.

3.2 Campo de Estudo e Participantes da Pesquisa

Como a ideia inicial (do estudo mais amplo) era compreender quais as estratégias e procedimentos empregados pelas crianças do Ciclo de Alfabetização na resolução de problemas que contemplam as competência e habilidades previstas na matriz de referência da PBM, entendeu-se que os sujeitos da pesquisa deveriam ser alunos do último ano do ciclo, ou seja, do 3º ano. Caso investigássemos estudantes dos outros anos, poderíamos encontrar dificuldades devido à ausência de contato com os conteúdos em discussão. Espera-se que ao final do Ciclo de Alfabetização todos os estudantes já tenham entrado em contato, mesmo que minimamente, com os temas pesquisados.

Por questões éticas, os dados completos da escola e das crianças participantes são mantidos em sigilo. A escola se localiza na periferia de uma cidade do interior do Rio Grande do Sul. De acordo com o perfil socioeconômico levantado pela direção, o corpo discente é constituído por filhos e filhas de trabalhadores, muitos dos quais se encontram em situação de vulnerabilidade social.

Foram realizadas testagens das atividades propostas com três turmas de aproximadamente 20 alunos. Tal estratégia foi necessária na medida em que a cada aplicação notavam-se problemas nas atividades elaboradas e dificuldades na produção de dados. Assim, foram realizadas três aplicações-piloto até entender-se que o instrumento atingira um desenvolvimento satisfatório. Os dados apresentados foram produzidos a partir da aplicação na quarta e última turma, na qual a situação-problema atingiu o auge do seu refinamento e as estratégias e procedimentos puderam ser melhor observados.

Durante a realização das atividades propostas as crianças eram organizadas em trios a fim de que pudessem dialogar entre si e compartilhassem o modo pelo qual resolviam os problemas. Essa abordagem facilitou a produção de dados, pois permitiu que os observadores capturassem mais precisamente as falas dos participantes do estudo.

3.3 Método de Produção de Dados

O método de produção dos dados da pesquisa foi todo idealizado e realizado pelo grupo de pesquisa maior, durante as reuniões do NUEPEC. Dentro da perspectiva da investigação-ação escolar, durante a etapa do planejamento, diversos foram os movimentos de estruturação das situações-problema a serem desenvolvidas com os estudantes. Nesse momento, os pesquisadores e os professores da educação básica organizaram-se de forma a criar situações didáticas não muito diferenciadas do contexto escolar, mas focadas em demandas relativas às competências e habilidades em questão.

Perrenoud (2000) define que competência é a capacidade de agir eficazmente nas situações, mobilizando os recursos disponíveis, sejam materiais, afetivos ou cognitivos. No mesmo sentido, as habilidades configuram-se como o conjunto de conhecimentos práticos voltados a um saber-fazer e ao desenvolvimento de procedimentos. Elas ampliam as ideias dos conteúdos, que, usualmente, adquirem um fundo mais informacional, sem se ocupar das aprendizagens dos saberes procedimentais e atitudinais (ZABALA, 2000).

Como estratégia didática e de desenvolvimento de habilidades e competências, temos pensado na ideia de situação-problema. Ela se caracteriza por ser um recorte de um domínio complexo, cuja realização implica saber usar recursos materiais e cognitivos, tomar decisões e mobilizar estratégias de solução de problemas (PERRENOUD, 2000). Na mesma direção, segundo Meirieu (1998), as situações-problema apresentam-se como uma circunstância didática que demanda ao estudante uma tarefa que ele não pode realizar sem aprender alguma coisa. Em outras palavras, a situação-problema é uma estratégia que visa desenvolver uma capacidade e não apenas a verificação da acumulação dos conteúdos. Por meio dela podemos evidenciar as habilidades e as competências que as crianças possuem, bem como sua capacidade de aprender e reagir frente a situações com as quais não haviam mantido contato.

Foram desenvolvidas seis situações-problema, uma para cada habilidade do campo aditivo, seguindo os descritores previstos na PBM (INEP, 2015), na qual os alunos deveriam relatar como estavam resolvendo os problemas apresentados. Como a pesquisa é de caráter qualitativo, elaboramos alguns critérios para serem analisados no decorrer da atividade, porém consideramos que ao longo da análise também outros fatores foram relevantes, principalmente no tocante às falas dos alunos, enquanto tentavam resolver os problemas.

Inicialmente, os estudantes foram divididos em dois grandes grupos, e foram disponibilizadas várias figuras com animais para que eles pintassem. O objetivo era familiarizar os estudantes com o material e também ajustar o vocabulário da turma quanto à nomenclatura dada a cada imagem. Havia quatro papagaios, cinco galinhas, cinco vacas, três porcos, três cavalos, oito patos e um galo. No decorrer da atividade, entretanto, essas quantidades sofriam pequenas alterações para surpreender os grupos. As figuras apresentadas foram as seguintes:

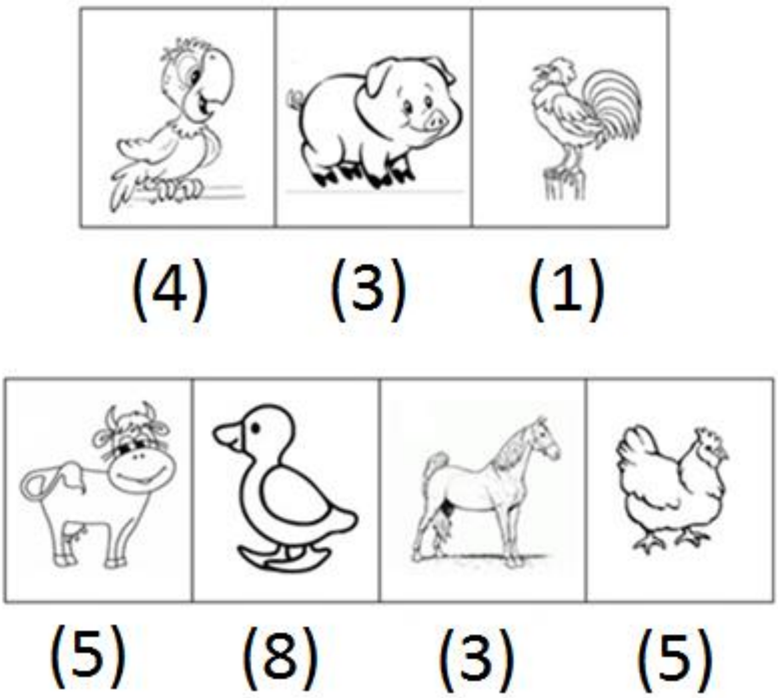

Figura 1 - Figurinhas Disponibilizadas aos Estudantes.
Fonte: Estas figurinhas são adaptações de figuras disponíveis gratuitamente na Internet nos respectivos sites: CLIQUETANDO, 2015; ESSASEOUTRAS, 2015; COLORIR.COM, 2015; DESENHOSERISCOS, 2015; COLORIR DESENHOS, 2015; DESENHOS PARA COLORIR, 2015; GALINHAS PINTADINHA, 2015.

Em seguida, os pesquisadores ficaram organizados em um canto da sala com certa quantidade de figuras, com várias figuras de animais de cada uma das espécies apresentadas. Dos dois grandes grupos formados, que estavam pintando as figuras, três alunos foram escolhidos aleatoriamente para sentarem-se à mesa dos pesquisadores e responderem às situações-problema que foram previamente elaboradas. Antes de os alunos responderem, os pesquisadores perguntaram se eles conheciam aquelas espécies de animais e explicaram que eles moravam na “Fazenda Cocoricó”. Com base nessas informações, eles responderam às perguntas, que são apresentadas no Quadro 4 a seguir. Depois que esse grupo terminou, outro grupo de três alunos sentou-se à mesa com os pesquisadores e o mesmo procedimento foi realizado, e assim sucessivamente.

As situações-problema foram elaboradas inicialmente para quantidades específicas das espécies. No entanto, quando um grupo se dissolvia e voltava para pintar, pensamos que uma possível comunicação com os colegas que ainda não haviam participado da atividade poderia induzir as respostas dos colegas quando estes participassem. Por isso, ao longo da atividade fomos alterando um pouco o enunciado de cada situação-problema. Por exemplo, em dado momento, enunciamos “Quantos animais de duas patas moram na fazenda Cocoricó?” (em vez de quatro patas, originalmente previsto), a fim de eliminar a possibilidade de acerto por conhecimento prévio da resposta. No entanto, ao perceber que os grupos não estavam comunicando as respostas para outros grupos, fixamos novamente as quantidades iniciais. As perguntas utilizadas para analisar cada uma das ações foram:

Quadro 4 - Questões Propostas nas Situações-Problema.

CATEGORIAS DE PROBLEMAS ADITIVAS	**PROBLEMAS ELABORADOS**
Juntar	Quantos animais de quatro patas moram na fazenda Cocoricó?
Separar	Todos os animais da fazenda Cocoricó foram convidados para uma festa, mas os cavalos não podem entrar porque são muito bravos. Quantos animais vão poder entrar na festa?
Acrescentar	Chegaram mais duas galinhas para morar na fazenda. Quantas galinhas moram na fazenda Cocoricó agora?
Retirar	Três patos foram morar na fazenda vizinha. Quantos patos restaram na fazenda Cocoricó?
Comparar	A fazenda vizinha possui cinco papagaios a mais que a fazenda Cocoricó. Quantos papagaios moram na fazenda vizinha?
Completar	O dono da fazenda Cocoricó tem sono pesado e precisaria de cinco galos para ser acordado. Quantos galos faltam para que o dono consiga acordar de seu sono pesado?

Fonte: NUEPEC/FURG.

Na situação-problema de *comparar* a quantidade inicial foi fixada em quatro papagaios e na situação-problema de *completar* a quantidade inicial foi fixada em um galo. Essas quantidades iniciais foram representadas na forma de figurinhas entregues aos estudantes no momento em que o problema era enunciado pelos pesquisadores (quatro figurinhas de papagaios no primeiro problema e uma figurinha de galo no segundo).

Todas as situações-problema foram analisadas do ponto de vista das estratégias utilizadas, pois este era o foco do projeto mais amplo. No entanto, apenas as duas últimas situações do Quadro 4 interessaram a alguns integrantes do grupo NUEPEC do ponto de vista do pensamento algébrico, pois entendeu-se que a ideia de uma busca por valor desconhecido poderia ser utilizada na situação de completar e que um pensamento funcional poderia ser utilizado na resolução da situação de comparar. Esta suposição inicial foi estudada com mais profundidade na etapa de análise dos dados. O método utilizado nessa etapa é apresentado a seguir.

3.4 Método de Análise de Dados

O método de análise dos dados foi inteiramente idealizado e utilizado pelo autor desta dissertação, seguindo as correções e sugestões propostas pelo seu orientador ao longo do processo de análise. Tendo em vista o objetivo desta pesquisa, que é identificar características de um pensamento algébrico na resolução de problemas aditivos por estudantes do Ciclo de Alfabetização, desenvolveu-se uma metodologia definida como *Análise do Potencial Algébrico de Problemas Aditivos*, com base nas estratégias apresentadas pelos estudantes, no referencial adotado (Teoria dos Campos Conceituais) e na comparação dos resultados desta pesquisa com resultados de outros trabalhos que compõem o estado da arte das pesquisas sobre o pensamento algébrico.

A *Análise do Potencial Algébrico de Problemas Aditivos* consiste em cinco etapas, as quais são descritas a seguir:

1º) Classificação do problema, segundo o referencial teórico (VERGNAUD, 1985; INEP, 2015);

2º) Análise dos erros;

3º) Descrição das estratégias eficazes, seguindo a literatura sobre estratégias empregadas em problemas aditivos (NUNES e BRYANT, 1997; BORBA e NUNES, 2004; CHAPIN e JOHNSON, 2006), mas também ressaltando aspectos próprios daqueles problemas que assumimos por hipótese estar ligados com o pensamento algébrico;

4º) Tentativa de se identificar um pensamento algébrico, guiando-se pelo que caracteriza esta forma de pensamento (BLANTON e KAPUT, 2005; CARPENTER et al., 2005; IRWIN e BRITT, 2006; CANAVARRO, 2007; FUJII e STEPHENS, 2008; STEPHENS e WANG, 2008); e

5º) Identificação de teoremas-em-ação nas estratégias bem-sucedidas, seguindo o referencial da Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1985, 1990, 1997).

Ressaltamos que das seis categorias de problemas investigadas, apenas as duas últimas apresentaram características diferenciadas daquelas já encontradas na literatura sobre problemas aditivos. Nas situações relacionadas com as quatro categorias precedentes (juntar, separar, acrescentar e retirar) a estratégia de contagem foi a mais utilizada pelos estudantes, e a grande maioria dos grupos não apresentou dificuldades para encontrar a resposta. No entanto, nos deparamos com resultados mais complexos, em termos de análise, quando aplicamos as situações de completar e comparar. Após algumas discussões dentro do grupo, emergiu a ideia de que as estratégias apresentadas pelos estudantes nesses últimos dois problemas estivessem associadas com uma forma algébrica de pensar, e por isso escolhemos as estratégias utilizadas nessas duas situações para compor o *corpus* deste trabalho. Os resultados são apresentados a seguir, no Capítulo 4.

4 O Pensamento Algébrico nas Estratégias Aditivas

Neste capítulo é apresentada a análise dos resultados da pesquisa. Apenas para fins de organização, define-se como *situação-problema 1* a situação referente à habilidade de completar e como *situação-problema 2* a situação que se refere à habilidade de comparar.

4.1 Busca por Valor Desconhecido

Na situação-problema 1 foi perguntado: "O dono da fazenda Cocoricó tem sono pesado e precisa de cinco galos para ser acordado. Quantos galos faltam para que o dono consiga acordar de seu sono pesado?". Nesta seção são apresentadas as cinco etapas da metodologia *Análise do Potencial Algébrico de Problemas Aditivos* para a situação-problema 1.

1º) Classificação do problema:

Esta situação-problema pode ser considerada como um problema que demanda a ação de completar, de acordo com a matriz de referência da PBM, mas também pode ser incluída na categoria que Vergnaud (1985, 1990) denomina problemas de transformação de medidas, já que a natureza da medida envolvida se mantém.

Nesta situação-problema foi disponibilizada apenas uma figurinha representando o único galo da fazenda, isto é, propositadamente, não foram fornecidas as figurinhas com os galos que faltavam justamente para avaliar a capacidade dos estudantes de lidar com quantidades desconhecidas. Alguns alunos demonstraram a expectativa de que os galos faltantes seriam fornecidos, mas como isto não foi feito, houve necessidade de raciocinar a respeito de quantidades hipotéticas, sem representação concreta. Dos cinco grupos participantes, dois não conseguiram chegar ao resultado correto e três responderam corretamente.

2º) Análise dos erros:

Os dois grupos que não chegaram à resposta correta utilizaram ambos a estratégia de tentativa e erro, perguntando várias vezes se a quantidade que diziam era a correta. Os estudantes desses grupos claramente não compreenderam o papel desempenhado pela expressão *quantos faltam* no enunciado.

Essa não compreensão da expressão *quantos faltam* pode ser explicada pela não congruência semântica (BRANDT et al., 2010; CÂMARA, 2013) do enunciado, pois os dados são apresentados na seguinte ordem: 1) a quantidade inicial de galos; 2) a quantidade final de galos, que é cinco; e por fim, 3) uma transformação desconhecida, implícita na expressão *quantos faltam*. Vamos denotar por *Qi* a quantidade inicial e *x* a transformação desconhecida. Sendo assim, não há uma operação que resolva o problema utilizando uma representação matemática na ordem *Qi, 5, x*. Logo, uma estratégia eficiente vai necessariamente exigir a inversão de pelo menos uma das unidades de representação, o que contraria a condição de mesma ordem de apreensão das unidades nas representações (BRANDT et al., 2010), caracterizando assim uma não congruência semântica.

Por outro lado, a dificuldade em compreender a expressão *quantos faltam* também pode ser devida à transposição dessa expressão para a linguagem matemática, influenciando também na escolha da operação a ser utilizada. Afinal, não havia indicação clara no enunciado sobre a utilização da adição ou da subtração. Os estudantes que compunham esses grupos podem ter tido a expectativa de que no enunciado as operações seriam explicitamente apresentadas, e esta expectativa pode ter obscurecido a percepção de que o problema deveria ser reformulado para que a operação fosse desvendada.

3º) Descrição das estratégias eficazes:

Dos três grupos que chegaram à resposta correta, dois utilizaram a contagem como estratégia básica, enquanto o outro grupo utilizou a estratégia de subtração para chegar ao resultado.

Os dois grupos que responderam corretamente utilizando a contagem como estratégia, realizaram um procedimento de contagem unitária nos dedos. Apenas como ilustração desse tipo de reposta, apresenta-se a seguir anotações dos pesquisadores sobre a fala de um dos estudantes enquanto realizava o procedimento:

> — O dono da fazenda Cocoricó tem sono pesado e precisa de cinco galos para ser acordado. Quantos galos faltam para que o dono consiga acordar de seu sono pesado?
> — Se ele precisa de cinco e aqui só tem um, então falta dois, três, quatro, cinco – e começou a contar nos dedos a partir do número um – . Então ele precisa de quatro.
>
> Fonte: Anotações do Diário de Campo dos pesquisadores.

Antes de o estudante decidir pelo uso da contagem como estratégia, ele percebe que há um critério de parada a ser respeitado, um valor a ser alcançado e o que falta para alcançar esse valor é uma quantidade desconhecida. Isso caracteriza um problema inverso (BORBA e NUNES, 2004), no qual a transformação é desconhecida. Entender que se trata de um problema com critério de parada é uma capacidade que envolve um número maior de operações mentais, o que explicaria o uso de uma estratégia mais ampla do que a contagem nesse caso, pois o uso exclusivo da contagem constitui apenas uma operação mental, ou seja, é mais característico de problemas diretos.

O grupo que chegou à resposta correta pelo uso da subtração utilizou o procedimento de diminuir utilizando os dedos. Um dos alunos, por exemplo, primeiro representou na mão o minuendo e abaixou o dedo que representava o subtraendo. Assim, os dedos restantes seriam a diferença procurada.

É interessante destacar aqui a complexidade do pensamento utilizado na estratégia, pois um esquema mental de inversão foi realizado por esse grupo. De fato, um problema originalmente proposto na forma 1+?=5 foi substituído por 5-1=?, o que comprova a capacidade desses estudantes em decidir pelo uso da operação que possibilita cálculos diretos, fazendo com que o valor desconhecido nesse caso seja o resultado direto do processo.

4º) Tentativa de se identificar um pensamento algébrico:

Os dois grupos que obtiveram êxito na resolução deste problema pela contagem perceberam, em primeiro lugar, que havia um valor desconhecido envolvido, por isso, pode-se dizer que acertaram a resposta utilizando também uma estratégia de *busca por valor desconhecido*, antecedendo a contagem. Essa primeira estratégia consiste na tentativa de reorganizar o problema, a fim de que seja identificada mais precisamente a natureza do dado que está em falta (valor inicial, transformação ou valor final) e seja tomada a decisão sobre qual operação deve ser realizada para chegar até este dado em falta.

Do mesmo modo ocorrido nos grupos que utilizaram a contagem, antes de decidir pelo uso da subtração, o único grupo que utilizou essa estratégia compreende que o problema exige uma busca por valor desconhecido, uma vez que o enunciado não induz diretamente o uso da operação de subtração. O diálogo a seguir ilustra o uso dessa estratégia:

> — O dono da fazenda Cocoricó tem sono pesado e precisa de cinco galos para ser acordado. Quantos galos faltam para que o dono consiga acordar de seu sono pesado?
> — Faltam quatro!
> — Como tu sabes que a resposta é quatro?
> — Porque ele precisa de cinco galos e só tem um. Estão faltando quatro!
> — O que tu fizeste pra achar essa resposta?
> — Ele precisa de cinco galos não é?
> — É!
> — Então, ele só tem um – abaixando um dedo – , então ele precisa de quatro galos!
>
> Fonte: Anotações do Diário de Campo dos pesquisadores.

Essa habilidade de buscar valores desconhecidos em sentenças matemáticas é utilizada em várias etapas posteriores à alfabetização, como nos anos finais do Ensino Fundamental e em todos os anos do Ensino Médio. Por exemplo: na resolução de equações, sistemas de equações e nos assuntos que derivam desses dois, tais como Sistemas Lineares, Álgebra Matricial e Geometria Analítica. Dessa maneira, a busca por valor desconhecido anuncia os primórdios do pensamento algébrico e constitui-se importante indicador do processo de alfabetização matemática.

É importante destacar que a busca por valor desconhecido constitui uma experiência com a noção de incógnita. A diferença das incógnitas de equações para as incógnitas mentais das situações apresentadas neste trabalho está na representação simbólica. Enquanto as primeiras apresentam representações mais sofisticadas, nas últimas a representação pode até mesmo estar apenas no campo mental.

5º) Identificação de teoremas-em-ação nas estratégias bem-sucedidas:

Blanton e Kaput (2005) ressaltam que um dos aspectos da Aritmética Generalizada, vertente do pensamento algébrico, é *resolver expressões numéricas com número desconhecido em falta*. Assumindo o referencial da Teoria dos Campos Conceituais, pode-se dizer que este aspecto é um invariante operatório do pensamento algébrico, o qual pode ser denominado, por simplicidade, busca por valor desconhecido.

Desse modo, a situação-problema 1, além de constituir um problema aditivo (e portanto aritmético, em princípio), também pode oportunizar o uso de estratégias que desenvolvem o invariante busca por valor desconhecido, característico de um pensamento algébrico.

Ainda dentro da referência da Teoria dos Campos Conceituais, pode-se dizer que foram identificados dois teoremas-em-ação na resolução da situação-problema 1: a) busca por valor desconhecido seguida por contagem; e b) busca por valor desconhecido seguida por subtração. Esses teoremas-em-ação foram eficientes para contornar a dificuldade imposta pela não congruência semântica do enunciado.

Portanto, neste problema aritmético, que é um problema de completar (INEP, 2015) ou de transformação de medidas (VERGNAUD, 1985), é possível visualizar estratégias que promovem avanços no sentido de se desenvolver buscas por valores desconhecidos, que é uma característica do pensamento algébrico, mais especificamente da Aritmética Generalizada, apontada por Blanton e Kaput (2005).

4.2 Previsão de Resultados

Na situação-problema 2, fez-se a seguinte pergunta: “A fazenda vizinha possui cinco papagaios a mais que a fazenda Cocoricó. Quantos papagaios moram na fazenda vizinha?”. Em seguida, eram disponibilizadas quatro figurinhas com papagaios representando os papagaios da fazenda Cocoricó. Nesta seção são apresentadas as cinco etapas da metodologia de *Análise do Potencial Algébrico de Problemas Aditivos* para a situação-problema 2.

1º) Classificação do problema:

Esta situação-problema pode ser considerada como um problema de comparar da matriz de referência da PBM, e também está incluída na categoria que Vergnaud (1985) denomina problemas de relação entre medidas.

Dos cinco grupos participantes, apenas dois conseguiram chegar ao resultado correto, enquanto os outros três grupos responderam incorretamente as perguntas feitas pelos pesquisadores.

2º) Análise dos erros:

Dos três grupos que não conseguiram chegar à resposta, um deles apresentou respostas aleatórias (os integrantes desse grupo diziam vários números e perguntavam se cada um desses números era a resposta do problema), enquanto os outros dois grupos simplesmente não responderam, demonstrando dificuldades no entendimento do enunciado. O extrato de protocolo apresentado a seguir ilustra a dificuldade de um dos grupos. Esses estudantes não conseguiram chegar à resposta correta, aparentemente por não compreenderem o significado da expressão *a mais*. Logo após um dos pesquisadores fazer a pergunta ao grupo, um integrante falou:

> — A vizinha possui cinco papagaios a mais que a fazenda Cocoricó. Quantos papagaios moram na fazenda vizinha?
> — Mas não tem como resolver porque estão faltando papagaios.
> — Por que tu achas que estão faltando?
> — Porque nós só temos quatro papagaios e a resposta é cinco.
> — Como tu sabes que é cinco?
> — Porque está dizendo ali na pergunta.
>
> Fonte: Anotações do Diário de Campo dos pesquisadores.

A não congruência semântica pode explicar essa dificuldade. De fato, não há conversão um-a-um entre as unidades significantes, que é uma das três condições necessárias para congruência (BRANDT et al., 2010). A natureza da quantidade inicial do enunciado é distinta da natureza da quantidade inicial do cálculo a ser realizado, já que a quantidade inicial do enunciado (que vamos denotar por *Ki*) é a quantidade de papagaios da Fazenda Cocoricó, enquanto a quantidade inicial do cálculo *Ki + 5 = quantidade final*, que resultará na resposta, é uma quantidade referente aos papagaios da fazenda vizinha. Essa possibilidade de diferença nas unidades significantes pode ter sido uma barreira que alguns grupos não conseguiram ultrapassar.

Outra explicação possível para o erro é a dificuldade na transposição da expressão *a mais* para a linguagem matemática. Apesar da presença da palavra *mais*, indicando a operação, a ordem dos dados não corresponde à ordem usual da operação de adição, de modo que ainda que alguns estudantes possivelmente possam ter conjecturado o uso da adição para resolver o problema, podem não o ter feito porque os dados dessa operação matemática não são usualmente dispostos como no enunciado.

3º) Descrição das estratégias eficazes:

É interessante destacar que mesmo nos grupos que conseguiram responder corretamente, houve dificuldade em lidar com a expressão *a mais* do enunciado. Os pesquisadores precisaram repetir várias vezes a expressão para que os estudantes evoluíssem na sua compreensão. Em um dos grupos que acertaram a resposta, dois estudantes separaram apenas os papagaios e começaram a observar os mesmos. O extrato de protocolo a seguir apresenta o diálogo entre os dois estudantes desse grupo:

> — A fazenda vizinha possui cinco papagaios a mais que a fazenda Cocoricó. Quantos papagaios moram na fazenda vizinha?
> — Estão faltando papagaios aqui.
> — Claro que não. A gente tem que somar. Tu não estás vendo?
> — Mas não tem nada para somar aqui. Só temos quatro papagaios.
> — Claro que tem. Olha, se a fazenda vizinha tem cinco papagaios a mais que a nossa, quer dizer que temos que somar cinco com quatro (ele começou a contar nos dedos: 5,6,7,8,9) que vai dar nove e que é a resposta.
> — Ah, agora entendi. É que eu pensei que tinha que usar as figuras.
>
> Fonte: Anotações do Diário de Campo dos pesquisadores.

Em termos de estratégia, nota-se que a contagem não constituiu a estratégia principal para que o grupo obtivesse a resposta do problema. O estudante que propôs a contagem para que o grupo obtivesse a resposta, só utilizou o procedimento de contagem nos dedos após apresentar um raciocínio de *previsão* de como chegar ao número desconhecido, percebendo que a expressão *a mais* do enunciado é um dado que apenas indica a regra de previsão, e não um valor em si mesmo, o que fica explícito na frase “quer dizer que temos que somar cinco com quatro”, que constitui uma espécie de “tradução” da linguagem semântica para a linguagem matemática.

Foram utilizadas duas estratégias articuladas, constituindo uma estratégia composta: a previsão, que tinha como objetivo reformular o enunciado para que pudesse ser tratado por alguma estratégia cognitivamente mais familiar aos estudantes; e a contagem, que foi uma estratégia secundária utilizada apenas para resolver o problema aritmético resultante da reformulação realizada com o uso da previsão, sendo esta última a estratégia cognitivamente mais familiar almejada no início da resolução.

O outro grupo que conseguiu responder corretamente não apresentou dificuldades para resolver o problema, o que apesar de positivo em termos de avaliação escolar, não oportunizou uma análise mais detalhada das estratégias utilizadas devido à simplicidade dos diálogos. Como ilustração da resolução proposta por este grupo, apresenta-se o extrato de protocolo a seguir:

> — A fazenda vizinha possui cinco papagaios a mais que a fazenda Cocoricó. Quantos papagaios moram na fazenda vizinha?
> — É nove!
> — Por que a resposta é essa?
> — Porque aqui já tem quatro, e lá tem mais cinco. Então, é nove!
>
> Fonte: Anotações do Diário de Campo dos pesquisadores.

4º) Tentativa de se identificar um pensamento algébrico:

A partir dos dados, nota-se o uso de uma estratégia composta que pode ser chamada de previsão seguida por contagem. Destaca-se, tendo em vista as estratégias utilizadas pelas crianças, que o problema apresenta potencial para desenvolver na criança a habilidade de *prever resultados desconhecidos usando dados conhecidos*, que constitui um dos aspectos apontados por Blanton e Kaput (2005) para o desenvolvimento do pensamento funcional – uma das duas vertentes do pensamento algébrico. Assumindo o referencial da Teoria dos Campos

Conceituais, podemos dizer que esse aspecto é um invariante operatório do pensamento algébrico, que poderia ser denominado, mais sinteticamente, *previsão de resultados*.

Essa habilidade de prever resultados a partir de dados conhecidos é utilizada em várias etapas no final do Ensino Fundamental e também no Ensino Médio. Por exemplo: ao utilizar qualquer fórmula o estudante parte da expressão conhecida para deduzir um resultado particular. Outro exemplo: ao atribuir valores no domínio de uma função o estudante parte da regra de associação entre o domínio e a imagem para obter a imagem de um valor particular do domínio.

Assim, o domínio desses esquemas mentais desde o Ciclo de Alfabetização potencializa o êxito nas ações matemáticas futuras, promovendo uma aprendizagem com mais possibilidades de compreensão dos processos.

A previsão de resultados, no caso da situação apresentada nesta pesquisa, constitui uma primeira experiência com a noção de variável, pois as grandezas envolvidas estão relacionadas seguindo uma regra que depende das medidas envolvidas. No caso do problema proposto aos estudantes, essa regra poderia ser descrita como Y=X+5, com Y sendo os papagaios da fazenda vizinha e X sendo os papagaios da fazenda Cocoricó.

5º) Identificação de teoremas-em-ação nas estratégias bem-sucedidas:

A situação-problema 2, além de ser um problema aditivo, também pode oportunizar o uso de estratégias que desenvolvem o invariante previsão de resultados, que está ligado ao pensamento algébrico. Pode-se dizer que foi identificado o seguinte teorema-em-ação: c) previsão seguida por contagem.

Portanto, neste problema, que é um problema aritmético de comparar (INEP, 2015) ou de relação entre medidas (VERGNAUD, 1985), foi possível constatar a eficácia de uma estratégia que envolve previsão de resultados a partir de dados conhecidos, que é uma característica do pensamento algébrico, da vertente pensamento funcional proposta por Blanton e Kaput (2005).

5 Considerações Finais

O cenário das pesquisas sobre a relação entre os problemas aditivos e o pensamento algébrico ainda não está bem definido, mas alguns avanços estão ocorrendo, e esta pesquisa é uma contribuição nesse sentido. Neste trabalho aborda-se a questão "Como pode ser caracterizado o pensamento algébrico nas estratégias de resolução de problemas aditivos na etapa de alfabetização?", tendo como objetivo compreender de que forma o pensamento algébrico pode estar presente nas resoluções de problemas aditivos por estudantes do Ciclo de Alfabetização.

Com base nos resultados apresentados, pode-se dizer que existem problemas aditivos que oportunizam à criança a utilização de estratégias que apresentam traços de um pensamento algébrico. No caso desta pesquisa, duas situações mostraram favorecer o uso de pensamento algébrico: as situações de completar e de comparar. A identificação deste pensamento algébrico seguiu a caracterização proposta por Blanton e Kaput (2005). Esta identificação foi baseada na ideia do uso de estratégias mentais, as quais foram denominadas teoremas-em-ação, pois o referencial para analisá-las foi a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1985, 1990, 1997).

Foi constatado o uso de dois teoremas-em-ação na situação de completar: a) busca por valor desconhecido seguida por contagem e b) busca por valor desconhecido seguida por subtração. Na situação de comparar, constatou-se a estratégia de c) previsão seguida por contagem. Isto significa que os estudantes, quando defrontados com alguns tipos de situações de completar e comparar, são capazes de utilizar estratégias que envolvem busca por valor desconhecido e previsão de resultados, caracterizando assim o uso de pensamento algébrico (BLANTON e KAPUT, 2005).

Estes resultados indicam que as estratégias utilizadas por estudantes do Ciclo de Alfabetização para resolver problemas aditivos podem oportunizar o uso de pensamento algébrico, dependendo da situação-problema proposta.

A hipótese de que os problemas de completar e comparar poderiam produzir estratégias algébricas se confirmou, contribuindo em favor da proposta de Falcão (2003), que questiona a anterioridade da Aritmética em relação à Álgebra. Assim, pode-se concluir que problemas de completar e comparar não são meramente aritméticos, e que não há razões para desconsiderar o pensamento algébrico no Ciclo de Alfabetização.

Pode-se ainda teorizar a respeito da conclusão principal da pesquisa a fim de que possam ser fornecidas explicações mais consistentes a respeito das resoluções apresentadas neste estudo. Ao notar que as estratégias utilizadas nos problemas do tipo completar e comparar apresentam elementos tanto aritméticos quanto algébricos, pode-se dizer que essas estratégias constituem soluções em um nível mais sofisticado de complexidade. Isto indica que podemos falar em níveis de solução.

Alguns problemas podem ser resolvidos com estratégias constituídas por apenas um esquema mental, outros demandam o uso de vários esquemas. Se associarmos o número de esquemas que constituem as estratégias de resolução de problemas matemáticos com os níveis de solução, poderíamos dizer que estratégias com nível de solução 1 são constituídas por um único esquema, estratégias com nível de solução 2 são constituídas por dois esquemas, e assim por diante. E ainda, poderíamos dizer que as estratégias pré-cognitivas (procedimentos intuitivos ou memorizados), nas quais não há necessidade de uso de esquemas mentais, possuem nível de solução 0. Estes níveis de solução são propostos pelo autor desta dissertação, seguindo orientações e sugestões de seu orientador.

Podemos definir estratégias intuitivas como aquelas nas quais são utilizados procedimentos originalmente desenvolvidos para resolver outra classe de situações, ou situações de outros campos conceituais. Já as soluções memorizadas podem ser definidas como procedimentos consolidados por treinamento contínuo ou informações isoladas sem relação direta com os conceitos envolvidos na classe de situações-problema que está sendo abordada. As estratégias intuitivas e memorizadas constituem o nível 0 de solução de problemas, o nível pré-cognitivo.

Ao adotar esta escala de níveis de solução, pode-se dizer que as estratégias bem sucedidas utilizadas nos problemas de completar e comparar são estratégias de solução do nível 2, pois envolvem, em um primeiro momento, a reformulação da situação-problema, e em seguida, a escolha de uma operação matemática. A partir daí, os estudantes utilizam procedimentos (como contar nos dedos ou nas figuras, por exemplo), que constituem a parcela pré-cognitiva ou procedimental da solução.

Tendo em vista os resultados apresentados, pode-se ainda explicar as estratégias utilizadas pelos estudantes nesta pesquisa em termos destes níveis de solução.

Na situação-problema 1 foi perguntado: "O dono da fazenda Cocoricó tem sono pesado e precisa de cinco galos para ser acordado. Quantos galos faltam para que o dono consiga acordar de seu sono pesado?". Em primeiro lugar, o estudante percebe que deve buscar um valor desconhecido (pensamento algébrico); depois ele decide a operação matemática a ser utilizada (contagem ou subtração); e por fim, ele realiza o procedimento que produz o resultado esperado (contagem nos dedos, subtração nos dedos). O procedimento final seria o nível 0 da solução, a decisão pela operação seria o nível 1 e a consciência do valor desconhecido seria o nível 2.

Na situação-problema 2, fizemos a seguinte pergunta: "A fazenda vizinha possui cinco papagaios a mais que a fazenda Cocoricó. Quantos papagaios moram na fazenda vizinha?". Em primeiro lugar, o estudante percebe que deve haver uma previsão de quantos papagaios existem na fazenda vizinha (pensamento algébrico); depois ele decide a operação matemática a ser utilizada (contagem); e por fim, ele realiza o procedimento que produz o resultado esperado (contagem nos dedos, contagem mental). O procedimento final seria o nível 0 da solução, a decisão pela operação seria o nível 1 da solução e a compreensão da existência de uma regra de previsão seria o nível 2.

Pode-se dizer que três fatores contribuíram para que as estratégias utilizadas nestes problemas apresentassem um nível de solução mais elevado: a presença da não congruência semântica nos enunciados; a necessidade de transposição para a linguagem matemática dos termos *quantos faltam* e *a mais*; e a possibilidade de uso de mais do que uma operação matemática.

De fato, a não congruência semântica exigiu dos estudantes uma reordenação dos dados, a fim de que a interpretação matemática da situação pudesse ser pensada em termos das operações elementares de adição e subtração.

A partir do momento em que os estudantes percebiam que algo deveria ser alterado no enunciado, a reformulação passava a ser o próximo desafio, já que a resposta do problema deveria ser fornecida em linguagem matemática. Esta necessidade de transposição para a linguagem matemática era um passo que os estudantes precisavam superar antes de utilizar operações aditivas.

A possibilidade de uso de mais do que uma única operação aritmética nas situações propostas contribuiu para o aumento da complexidade na etapa de decisão da operação a ser utilizada, sendo que em alguns casos, foram observadas propostas de uso de operações diferentes nos grupos.

Neste estudo, o pensamento algébrico foi utilizado no nível 2 de solução, como ponto inicial das estratégias, enquanto as operações aritméticas foram utilizadas no nível 1 da solução. Os procedimentos decorrentes da operação aditiva escolhida constituíram o nível 0.

Esta teorização sobre os níveis de solução está em concordância com os resultados de Borba e Nunes (2004), no que diz respeito ao fato de que os problemas inversos demandam maior número de operações mentais do que os problemas diretos. De fato, o que explica este número mais elevado de operações mentais é que nos problemas inversos a busca por um valor desconhecido constitui o nível 2 da solução, a fim de que a escolha da operação seja realizada no nível 1. Em contrapartida, nos problemas diretos a escolha da operação é realizada em primeiro lugar, possibilitando ao estudantes iniciar a resolução no nível 1 da solução, já que não há necessidade de reflexão sobre a ordenação dos dados e a relação desta ordenação com as operações aditivas.

Os níveis de solução também podem explicar porque, no estudo de Mariano (2012), os estudantes utilizaram regras convencionais para resolver problemas diretos e representações não convencionais, como desenhos e números isolados, para resolver problemas inversos. Os desenhos e os números isolados não constituem procedimentos de obtenção da resposta final, como se fossem um nível 0 de solução. Estas representações eram tentativas de reformular o problema, caracterizando soluções de nível 2, para que só depois a escolha da operação fosse realizada e, daí em diante, o estudante pudesse avançar para o nível 1, de escolha da operação, e por fim, ao nível 0, no qual seria realizado o procedimento para obtenção das respostas. Ressalta-se que são representações de níveis de solução diferentes, neste caso. As representações convencionais eram procedimentos de nível 0, enquanto as não convencionais eram tentativas de representar a solução de nível 2.

Os resultados apresentados indicam que o pensamento algébrico é uma das componentes do campo das estruturas aditivas. Pode-se dizer que ele é uma estratégia metacognitiva, no sentido de que determina a operação aritmética a ser utilizada no caso dos problemas aditivos, é uma operação sobre outra operação, justificando assim o nivelamento das estratégias.

Tendo em vista os resultados, também podemos dizer que há uma diferenciação do conceito de busca por valor desconhecido. Os problemas com valor final desconhecido (juntar, separar, acrescentar, retirar) abordados nesta pesquisa não envolveram uma escolha precedente ao uso da operação, sendo suficiente a aplicação direta das regras aritméticas elementares. Nesses problemas, não foi possível caracterizar uma busca por valor desconhecido, uma vez que só houve aplicação direta das operações de adição e subtração. As situações cujas soluções apresentaram características de um pensamento algébrico foram o problema com valor inicial desconhecido (comparar) e o problema com transformação desconhecida (completar). Ainda assim, no problema de comparar a característica de previsão predomina. Apenas no problema de completar, isto é, com transformação desconhecida, é que a busca por valor desconhecido apresenta-se de forma efetiva.

É importante destacar essa diferença, pois pode-se pensar *a priori* que apenas pelo fato de um problema ter sua resposta ou resolução desconhecida, ele é uma problema com busca por valor desconhecido, mas isto não é consistente com a definição proposta por Blanton e Kaput (2005). Se assim fosse, então poder-se-ia dizer que todo problema cuja resposta não esteja explícita seria um problema de busca por valor desconhecido que envolve um pensamento algébrico, e não haveria necessidade de estudos específicos nesse campo.

Para responder a questão de pesquisa proposta neste trabalho “como pode ser caracterizado o pensamento algébrico nas estratégias de resolução de problemas aditivos na etapa de alfabetização?”, com base na análise dos resultados obtidos, pode-se dizer que a compreensão de expressões tais como *a mais* e *quantos faltam* é um primeiro passo para a criança avançar no seu pensamento algébrico, pois estas expressões são formas simplificadas de enunciados de problemas matemáticos que exigem operações metacognitivas.

É importante esclarecer que, não só a verbalização enquanto representação, mas também enquanto internalização do significado destas expressões provocam na criança reflexões que possibilitam desenvolver estratégias aditivas com características de busca por valor desconhecido e previsão de resultados.

Cabe ainda ressaltar que o uso de tais tipos de problema na alfabetização pode ser utilizado intencionalmente como estratégia didática para o desenvolvimento do pensamento algébrico, e inclusive esse uso intencional viabilizaria uma avaliação gradativa do processo de aprendizagem da Álgebra, promovendo experiências muito significativas no sentido de familiarizar o estudante nas etapas que antecedem o uso de representação simbólica mais rigorosa, como por exemplo, na etapa em que deve-se aprender equações e realizar simplificações algébricas, que têm sido as grandes vilãs do ensino de Matemática em vários países do mundo (NCTM, 2000) há algumas décadas.

Como proposta para trabalhos de pesquisa futuros, propõe-se: analisar características de pensamento algébrico em problemas multiplicativos; realizar estudos quantitativos sobre o pensamento algébrico em problemas aditivos; utilizar a metodologia de Análise do Potencial Algébrico de Problemas Aditivos, apresentada nesta dissertação, para realizar estudos mais conclusivos sobre a relação dos problemas aditivos com o pensamento algébrico.

Como proposta didática direcionada para professores do Ciclo de Alfabetização, propõe-se: utilizar problemas que envolvem a habilidade de *comparar* durante as aulas de Matemática, principalmente aqueles que apresentam expressões tais como *a mais* e *a menos* no enunciado; utilizar problemas que envolvem a habilidade de *completar*, principalmente os que apresentam expressões tais como *quanto falta?* no enunciado.

Para concluir, pode-se pensar na ideia de que o pensamento algébrico constitui uma elevação do nível de solução apresentado pelas estratégias de estudantes na resolução de problemas aditivos. Alguns tipos de problemas permitem que esta exploração de níveis mais complexos de solução seja possível. Para delimitar a caracterização desses tipos de problemas, será necessário investigar com mais profundidade as estratégias utilizadas por estudantes em problemas aditivos em outras pesquisas, adotando-se, por exemplo, o referencial da Teoria dos Campos Conceituais e analisando os níveis de solução dos teoremas-em-ação utilizados pelos estudantes.

Referências

BLANTON, Maria; KAPUT, James. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, v.36, n.5, p.412-446, 2005.

BAUMGART, J. K. **Álgebra**. Editora Atual, São Paulo, 1992. Coleção Tópicos em sala de aula para uso em sala de aula - Volume 4. Tradução de Higino H. Domingues. 112p.

BORBA, Rute. **The effect of number meanings, conceptual invariants and symbolic representations on children's reasoning about direct numbers**. 2002. Tese (PhD in Education), Oxford Brooks University, Inglaterra.

BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa; NUNES, Terezinha. Como significados, propriedades invariantes e representações simbólicas influenciam a compreensão do conceito de número inteiro relativo. **Educação Matemática Pesquisa**, v.6, n.1, p.76-100, 2004.

BRANDT, Célia Finck; DIONÍSIO, Fátima Aparecida Queiroz; ESLOMPO, Marli Ribeiro Maia; MILDENBERG, Adriane. Análises das dificuldades na resolução de problemas aditivos à luz da Teoria de Representações Semióticas. In: **VIII Encontro de Pesquisa em Educação da Região Sul – ANPEDSUL**, Londrina-PR, 2010.

BRASIL. **PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática - 1º e 2º Ciclos**. Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica, Brasília, 1997.

______. **Elementos Conceituais e Metodológicos para os Direitos de Aprendizagem e Desenvolvimento do Ciclo de Alfabetização (1º, 2º e 3º anos) do Ensino Fundamental**. Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica, Brasília, 2012.

______. 2013. **Cadernos de Formação do Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa.** Disponível em: http://pacto.mec.gov.br/. Acesso em: 18 nov 2015.

CÂMARA, Marcelo. Análise dos Resultados do Pré-Teste da PBM de Matemática. **Estudos em Avaliação Educacional**, v.24, n.54, p.100-117, 2013.

CANAVARRO, Ana Paula. O Pensamento Algébrico na Aprendizagem Matemática nos Primeiros Anos. **Quadrante**, v.16, n.2, p.81-118, 2007.

CAPES. **Sistema WebQualis**. Disponível em: <http://qualis.capes.gov.br/webqualis/publico/pesquisaPublicaClassificacao.seam>. Acesso em: 02 Mai. 2015.

CARPENTER, T. P.; LEVI, L.; FRANKE, M. L. ZERINGUE, J. K. Algebra in the elementary school: developing relational thinking. **ZDM – The International Journal on Mathematics Education**, v.37, n.1, p.53-59, 2005.

CARR, W.; KEMMIS, S. **Teoría crítica de la enseñanza:** la investigación-acción en la formación del profesorado. Barcelona: Martinez Roca, 1988.

CHAPIN, S. H.; JOHNSON, A. **Math matters:** understanding the Math you teach, grades K-6. 2ed. Sausalito, CA, USA: Math Solutions, 2006.

CLIQUETANDO. **Papagaio**. Disponível em: <http://cliquetando.xpg.uol.com.br/2014/05/papagaios-para-imprimir-e-colorir-gratis.html>. Acesso em: 16 out. 2015.

COLORIR DESENHOS. **Pato**. Disponível em: <http://colorirdesenhos.com/desenhos/346-pato >. Acesso em: 16 out. 2015.

COLORIR.COM. **Desenho de galo a cantar para colorir**. Disponível em: <http://animais.colorir.com/a-quinta/galo-a-cantar.html>. Acesso em: 16 out. 2015.

DANYLUK, Ocsana. **Alfabetização Matemática:** O Cotidiano da Vida Escolar. Editora EDUCS, Caxias do Sul - RS, 1991.

DESENHOS PARA COLORIR. **Cavalo Branco**. Disponível em: <http://www.desenhoseriscos.com.br/2013/01/desenhos-riscos-vaquinhas.html>. Acesso em: 16 out. 2015.

DESENHOSERISCOS. **Desenho para colorir de vaquinha balançando o rabo**. Disponível em: < http://www.desenhoseriscos.com.br/2013/01/desenhos-riscos-vaquinhas.html>. Acesso em: 16 out. 2015.

DUVAL, Raymond. Registres de representation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pense. **Annales de Didactique et de Siences Cognitivas. IREM de Starbourg**, n.5, p.37-65, 1993.

ESSASEOUTRAS. **Porco**. Disponível em: <http://essaseoutras.xpg.uol.com.br/desenhos-para-colorir-de-animais-leao-girafa-esquilo-porco-e-mais/>. Acesso em: 16 out. 2015.

FALCÃO, Jorge Tarcísio da Rocha. Alfabetização Algébrica nas Séries Iniciais. Como Começar?. **Boletim GEPEM**, n.42, Fev./Jul., p.27-36, 2003.

FAYOL, Michel. **Numeramento: aquisição das competências matemáticas**. Tradução de Marcos Bagno. Editora Parábola, São Paulo, 2012.

FUJII, T.Probing Students' Understanding of Variables trough Cognitive Conflict Problems: Is the Concept of a Variable So Difficult for Students to Understand? In: PATEMAN, A.; DOUGHERTY, B. J. ZILLIOX, J. T. (Eds). **Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, (pp.49-65). PME, Honolulu, 2003.

______; STEPHENS, M. Using number sentences to introduce the idea of variable. In: GREENES, C.; RUBENSTEIN, R. (Eds). **Algebra and algebraic thinking in school:** Seventieth Yearbook, (pp.127-149). National Council of Teachers of Mathematics. VA, Reston, 2008.

GALINHAS PINTADINHA. **Galinha para Pintar**. Disponível em: <www.galinhaspintadinha.com.br>. Acesso em: 16 out. 2015.

GARNICA, A. V. M. História Oral e Educação Matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Editora Autêntica, Belo Horizonte, 2004.

GOMES, Maria da Conceição Vieira. Álgebra, Geometria e Aritmética de Mãos Dadas no Ensino Fundamental. **Boletim GEPEM**, n.42, Fev./Jul., p.47-59, 2003.

IFRAH, Georges. **História Universal dos Algarismos**. Editora Nova Fronteira, Rio de Janeiro, 1998. 1050p.

INEP. **Prova Brasil**. Disponível em: <http://provabrasil.inep.gov.br/downloads>. Acesso em: 07 Fev. 2015.

IRWIN, K. C.; BRITT, M. S. The algebraic nature of students' numerical manipulation in the New Zeland Numeracy Project. **Education Studies in Mathematics**, v.58, n.2, p.169-188, 2005.

JUSTO, Jutta Cornelia Reuwsaat. **Mais ... ou Menos ...:** a construção da operação de subtração no campo conceitual das estruturas aditivas. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 135p.

KAMII, Constance. **A criança e o número:** implicações da teoria de Piaget. Editora Papirus, Campinas, 1990.

KEMMIS, S.; MACTAGGART, R. **Cómo planificar la Investigación-Acción**. Barcelona: Laertes, 1988.

KIERAN, Carolyn. Developing algebraic reasoning: The role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. **Quadrante**, v.16, n.1, p.5-26, 2007.

LINZ, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI**. Editora Papirus, Campinas, 2006. 176p.

LÔBO, Karla Adriana Barbosa Mendes da Silva. **Investigando a presença de imagem na resolução de problemas com ideias aditivas na provinha Brasil de matemática**. 2012. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica), Universidade Federal de Pernambuco, Recife-PE. 94p.

MAGINA, S.; CAMPOS, T. M. M.; NUNES, T.; GITIRANA, V. **Repensando adição e subtração**: contribuições da teoria dos campos conceituais. PROEM, São Paulo, 2001.

MARIANO, Solange de Fátima S. Procedimentos de crianças do 2º ano do ensino fundamental na resolução de problemas do campo aditivo com o significado de transformação. In:CURI, Edda (org.); NASCIMENTO, Julia Cassia P. (org.). **Educação Matemática**: grupos colaborativos, mitos e práticas. Editora Terracota, São Paulo, 2012. 204p.

MEIRIEU, P. **Aprender... sim, mas como?**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

MENDONÇA, Tânia Maria; MAGINA, Sandra Maria Pinto; CAZORLA, Irene Maurício; SANTANA, Erivalda Ribeiro dos Santos. As Estruturas Aditivas nas Séries Iniciais do Ensino Fundamental: um Estudo Diagnóstico em Contextos Diferentes. **Revista Latinoamericana de Investigación em Matemática Educativa**, v.10, n.2, p.219-239, 2007.

NCTM. 2000. **Princípios e Normas para a Matemática Escolar**. (1.ed. 2000) Tradução portuguesa dos Principles and Standards for School Mathematics. 2.ed., APM, Lisboa, 2008.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática**. Artes Médicas, Porto Alegre, 1997.

NUNES, T.; CAMPOS, T. M. M.; MAGINA, S.; BRYANT, P. **Educação Matemática**: números e operações numéricas. Editora Cortez, São Paulo, 2005.

PERRENOUD, Philippe. **Dez novas competências para ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 2000.

PIAGET, Jean. 1937. **A Construção do Real na Criança**. Editora Zahar, Rio de Janeiro, 1979.

______, Jean. 1950. **Introduction à l'épistemologie génétique:** la pensée mathématique. Presses Universitaire de France, Paris, 1950. v.1.

______, Jean. 1967. **Biologia e Conhecimento**. Editora Vozes, Petrópolis, 2003.

______, Jean. 1970. **A Epistemologia Genética**. Editora Vozes, Petrópolis, 1971.

______, Jean. 1977. **Abstração Reflexionante**. Editora Artmed, Porto Alegre, 1990.

______, Jean; INHELDER, Bärbel. 1959. **Gênese das Estruturas Lógicas Elementares**. Editora Zahar, Rio de Janeiro, 1975. 356p.

______, Jean; INHELDER, Bärbel. 1962. **O Desenvolvimento das Quantidades Físicas na Criança**. Editora Zahar, Rio de Janeiro, 1975. 359p.

______, Jean; INHELDER, Bärbel. 1968. **Memória e Inteligência**. Editora Artenova, Brasília, 1979. 410p.

PONTE, João Pedro da; VELEZ, Isabel. Representações em tarefas algébricas no 2^0 ano de escolaridade. **Boletim GEPEM**, n.59, Jul./Dez., p.53-68, 2011.

ROMANOWSKI, Joana Paulin; ENS, Romilda Teodora. As pesquisas denominadas “estado da arte” em educação. **Revista Diálogo Educacional**, v.6, n.19, Set./Dez., p.37-50, 2006.

SILVA, João Alberto (Org.). **Alfabetização Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental**. 1. ed. Editora CRV, v.1, Curitiba, 2014. 180p.

SILVA, João Alberto da; JELINEK, Karin Ritter; BECK, Vinicius Carvalho; SARAIVA, Pamela; FONSECA, Willian. Strategies and procedures of Literacy Cycle Children in problem situations involving Addition and Subtraction. **International Journal for Research in Mathematics Education**, v.4, n.3, 2014. ISSN 2238-0345.

SILVA, Anne Gladys Guerreiro Rangel; MIRANDOLI, Priscila Rodrigueiro. Construtivismo e letramento: um novo olhar para o ensino da matemática. **Arq Mundi**. 11 (Supl.2): 372-8, 2007.

SILVA, Daniele Peres; SAVIOLI, Angela Marta Pereira das Dores. Caracterizações do pensamento algébrico em tarefas realizadas por estudantes do Ensino Fundamental I. **Revista Eletrônica de Educação**, v.6, n.1, p.206-222, 2012.

SOARES, Magda. **Letramento:** um tema em três gêneros. 2.ed., Editora Autêntica, Belo Horizonte, 2004.

STEPHENS, M.; WANG, X. Investigating some junctures in relational thinking: a study of year 6 and 7 students from Australia and China. **Journal of Mathematics Education**, v.1, n.1, p.28-39, 2008.

VECE, Janaína Pinheiro. Alunos do 1^0 ano do ensino fundamental e os problemas de transformação negativa. In:CURI, Edda (org.); NASCIMENTO, Julia Cassia P. (org.). **Educação Matemática:** grupos colaborativos, mitos e práticas. Editora Terracota, São Paulo, 2012. 204p.

VERGNAUD, Gérard. 1985. **A criança, a matemática e a realidade:** problemas do ensino da matemática na escola elementar. Tradução de Maria Lucia Faria Moro. 3ed. Editora da UFPR, Curitiba, 2009.

______, Gérard. La théorie des champs conceptuels. **Recherches em Didactique des Mathématiques**, v.10, n.2-3, p.133-170, 1990.

______, Gérard. The nature of mathematical concepts. In NUNES, T. & BRYNT, P. (Eds.) **Learning and teaching mathematics, an international perspective**. Psychology Press Ltd, Hove (East Sussex), 1997.

VERSCHAFFEL, L.; GREER, B.; De CORTE, E. Whole number concepts and operations . In LESTER, F. K. (Ed.) **Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**, p.557-628, Charlotte, NC: NCTM & Information Age Publishing, 2007.

ZABALA, A. **A prática educativa:** como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 2000.