Universidade Federal do Rio Grande

Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências: Química da Vida e Saúde

Associação Ampla FURG / UFRGS / UFSM

Invariantes Operatórios do Campo Conceitual Algébrico Mobilizados por Crianças do Terceiro Ano do Ensino Fundamental

Vinicius Carvalho Beck

Orientador:
Prof. Dr. João Alberto da Silva

Rio Grande
2018

VINICIUS CARVALHO BECK

Invariantes Operatórios do Campo Conceitual Algébrico Mobilizados por Crianças do Terceiro Ano do Ensino Fundamental

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências da Universidade Federal do Rio Grande, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Educação em Ciências.

Linha de Pesquisa: Processos de ensino e aprendizagem na escola, na universidade e no laboratório de pesquisa.

ORIENTADOR: Prof. Dr. João Alberto da Silva

Rio Grande

2018

Ficha catalográfica

B393i Beck, Vinicius Carvalho.

Invariantes operatórios do campo conceitual algébrico mobilizados por crianças do terceiro ano do ensino fundamental / Vinicius Carvalho Beck. – 2018.

133 f.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências: Química da Vida e Saúde, Rio Grande/RS, 2018.

Orientador: Dr. João Alberto da Silva.

1. Pensamento Algébrico 2. Invariantes Operatórios 3. Criança 4. Teoria dos Campos Conceituais I. Silva, João Alberto da II. Título.

CDU 37-053.2

Catalogação na Fonte: Bibliotecário José Paulo dos Santos CRB 10/2344

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE - FURG
PPG EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS: QUÍMICA DA VIDA E SAÚDE

ATA DE DEFESA DE DOUTORADO Nº 14/2018

Aos vinte e oito dias do mês de novembro de 2018, na Universidade Federal do Rio Grande - FURG, reuniu-se a Comissão Examinadora para a Defesa de Doutorado do aluno **Vinicius Carvalho Beck,** composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. João Alberto da Silva (Orientador), Profa. Dra. Mauren Porciuncula Moreira da Silva (FURG), Prof. Dr. Antonio Mauricio Medeiros Alves (UFPel) e Profa. Dra. Síntria Labres Lautert (UFPE). Título da tese **"Invariantes Operatórios do Campo Conceitual Algébrico de Crianças do Terceiro Ano do Ensino Fundamental".** Dando início à reunião, o orientador agradeceu a presença de todos e fez a apresentação da Comissão Examinadora. Logo em seguida, esclareceu que o candidato teria um tempo de **25 a 40 min** para a explanação de sua pesquisa, e cada membro da Comissão um máximo de **30min** para arguição. A seguir, passou a palavra ao doutorando que apresentou a pesquisa e respondeu às perguntas formuladas pela banca. Após discussão a Comissão reuniu-se para arguição conjunta e considerou a tese APROVADA. Nada mais havendo a tratar, lavrou-se a presente ata que após lida e aprovada, será assinada pela Comissão Examinadora.

Orientações/observações da Banca sobre a pesquisa:

OBSERVAR AS ORIENTAÇÕES DOS PARECERES

Obs.: no caso de aprovação com restrições, as orientações e observações da banca devem ser acatadas pela doutoranda na versão final da pesquisa.

Prof. Dr. João Alberto da Silva (Orientador)

Profa. Dra. Mauren Porciuncula Moreira da Silva (FURG)

Prof. Dr. Antonio Mauricio Medeiros Alves (UFPel)

Profa. Dra. Síntria Labres Lautert (UFPE)

DEDICATÓRIA

Dedico esta tese à Zulma da Silva Carvalho, minha avó (*in memorian*) e à Taiane Carrilho Rosa, minha esposa.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à FURG pela oportunidade;

Ao Prof. Dr. João Alberto da Silva pela dedicada orientação;

Aos colegas do PPGEC pela amizade e pelos bons momentos de convivência e estudos.

RESUMO

BECK, Vinicius Carvalho. **Invariantes Operatórios do Campo Conceitual Algébrico Mobilizados por Crianças do Terceiro Ano do Ensino Fundamental**. 2018. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências. Universidade Federal do Rio Grande - FURG, Rio Grande, Brasil. 133p.

Invariantes operatórios são ações mentais que podem ser aplicadas a tipos diferentes de situações. Captar os invariantes operatórios de um sujeito enquanto ele tenta agir em determinada situação pode ser a chave para se compreender como a aprendizagem de certos conceitos acontece. Como defendemos a tese da existência de um campo conceitual do pensamento algébrico inicial, faz-se necessário compreender quais invariantes operatórios estão ligados ao pensamento algébrico da criança. O objetivo geral deste trabalho foi descrever e analisar os invariantes operatórios utilizados por estudantes do terceiro ano do Ensino Fundamental em situações que envolvem pensamento algébrico. A questão de pesquisa que buscamos responder foi: Como se caracterizam os invariantes operatórios que as crianças utilizam em problemas que envolvem o pensamento algébrico? Os procedimentos metodológicos de coleta e análise de dados utilizados neste trabalho são os mesmos que constituem o Método Clínico de Piaget. A aplicação do Método Clínico de manipulação-formalização envolvendo as principais ideias de pensamento algébrico aconteceu por meio de quatro atividades, as quais abordaram as principais noções algébricas de crianças já estudadas em trabalhos precedentes: 1) problema da balança; 2) copos comutativos; 3) álgebra das mesas; 4) problemas das balas. A tese de que há um campo conceitual do pensamento algébrico inicial se confirmou a partir dos experimentos realizados, tendo em vista a constatação do uso de invariantes operatórios que apresentam características de pensamento algébrico nas situações abordadas nesta pesquisa. Como características gerais que podemos extrair de todos estes invariantes operatórios, podemos destacar: o reconhecimento de regras gerais, os diferentes níveis de sofisticação das representações simbólicas e a possibilidade de um mesmo sujeito apresentar níveis de estratégias completamente diferentes, dependendo do tipo de noção algébrica que cada situação requer.

Palavras-chave: Pensamento algébrico. Invariantes operatórios. Criança. Teoria dos campos conceituais.

ABSTRACT

BECK, Vinicius Carvalho. **Operative Invariants of Algebraic Conceptual Field Mobilized by Children in the Third Grade of Elementary School**. 2018. Thesis (Doctoral Degree) - Graduate Program in Science Education. Federal University of Rio Grande - FURG, Rio Grande, Brazil. 133p.

Operative Invariants are mental actions that can be applied to different types of situations. Capturing the operative invariants from one while he/she tries to act in a given situation can be the key to understand how the learning of certain concepts happens. As we defend the thesis of the existence of a conceptual field of the initial algebraic thinking, it is necessary to understand which operative invariants are connected to algebraic thinking of the child. The aim of this study was to describe and analyze the operative invariants used by third grade students of an elementary school in situations involving algebraic thinking. The research question we sought to answer was: what are the invariants that children use in problems involving algebraic thinking like? The methodological procedures of collection and analysis of data used in this paper are the same as the ones in the clinical method of Piaget. The application of the clinical method of handling formalization involving the main ideas of algebraic thinking happened through four activities, which addressed the main algebraic notions of children studied in previous papers: 1) problem of the scale; 2) commutative cups; 3) table algebra; 4) problems of the candies.The thesis that there is a conceptual field of initial algebraic thinking was confirmed from the initial experiments performed, according to the finding of the use of operative invariants which present characteristics of algebraic thinking in situations addressed in this research. As general characteristics we can extract from all these operative invariants, we can highlight: the recognition of general rules, different levels of sophistication of the symbolic representations and the possibility that a same subject may present levels of completely different strategies, depending on the type of algebraic notion that each situation requires.

Keywords: Algebraic thinking. Operative invariants. Child. Theory of conceptual fields.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
ENEM	Encontro Nacional de Educação Matemática
FURG	Universidade Federal do Rio Grande
GEEMAI	Grupo de Estudos sobre Educação Matemática nos Anos Iniciais
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
MEC	Ministério da Educação
NCTM	National Concil of Teachers of Mathematics
NUEPEC	Núcleo de Estudos em Epistemologia e Educação em Ciências
PBM	Provinha Brasil de Matemática
PCN	Parâmetros Nacionais Curriculares
PPGEC	Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências
UFPEL	Universidade Federal de Pelotas

SUMÁRIO

Introdução

Por volta de 825 D.C., o matemático de origem árabe Mohammed ibn-Musa Al-Khwarizmi escreveu o livro *Al-Kitab al-jabr wa'l Muqabalah*. Nesse livro, ele apresentou os primeiros métodos formais de resolução de equações, e denominou o uso das técnicas apresentadas por ele de *al-jabr*, que foi traduzido para o português assumindo a forma *Álgebra* (BAUMGART, 1992). Os métodos de Al-Khwarizmi para resolver equações acabaram se tornando uma área da Matemática, a qual chegou até nossos dias, passando por várias transformações.

Embora formalmente a simbologia algébrica tenha sido desenvolvida em sua grande parte pelos matemáticos árabes e hindus a partir dos séculos VIII e IX D.C., existem registros históricos que comprovam que as ideias de incógnita e equação já haviam sido exploradas muito antes da Idade Média pelos povos antigos. Registros históricos, tais como as tábuas cuneiformes e o Papiro Rhind indicam a existência de uma Álgebra Retórica na Babilônia e no Egito Antigo (BOYER, 1991).

As obras do matemático grego Diofanto de Alexandria mostram que a adoção de símbolos para representar incógnitas já era utilizada na Grécia Antiga. Diofanto foi criador da Álgebra Sincopada, que ainda não utilizava letras para incógnitas, mas símbolos criados especialmente para designar valores desconhecidos em expressões matemáticas (FREITAS, 2015). As letras como incógnitas surgiram apenas nos trabalhos de Viète, no século XVI, dando início à Álgebra Simbólica (BOYER, 1991).

Atualmente, a Álgebra não diz respeito exclusivamente aos métodos de resolução de equações, mas também representa o estudo de uma grande variedade de conceitos matemáticos abstratos mais avançados, tais como: funções, matrizes, números complexos, sistemas lineares, vetores, funtores, grupos, anéis, corpos, homomorfismos, dentre outros (HEFEZ, 2014).

Alguns conceitos de Álgebra são abordados na educação básica de vários países. Normalmente, o conceito de equação costuma ser o primeiro a ser ensinado, na fase em que as crianças possuem entre dez e doze anos de idade. Essa é uma etapa em que vários professores e pesquisadores têm relatado dificuldades de entendimento de conceitos matemáticos (NCTM, 2000), sobretudo conceitos algébricos.

Há alguns anos, tal etapa era chamada de *passagem da Aritmética para a Álgebra*, uma vez que a partir daquele ponto o foco não mais estaria no estudo dos números e operações, mas passaria a se concentrar no estudo de problemas envolvendo equações, incógnitas, simplificação de expressões algébricas e operações com variáveis em fórmulas.

Não é mais consenso dizer que existe uma *passagem*, de modo que vários documentos que orientam as configurações curriculares e práticas docentes da educação básica já indicam que o trabalho com a Álgebra deve começar desde o início da escolaridade (NCTM, 2000). Muitos países já atentam para essa tendência e estão incluindo o que tem sido chamado de *pensamento algébrico* nos anos iniciais, ou *Early Algebra*, internacionalmente.

Essa inclusão da Álgebra nos anos inicias também se deve ao fato de vários pesquisadores estarem publicando estudos discutindo essa nova expressão chamada *pensamento algébrico* (BLANTON; KAPUT, 2005; CARPENTER; LEVI; FRANKE; ZERINGUE, 2005; IRWIN; BRITT, 2006; CANAVARRO, 2007; FUJII; STEPHENS, 2008; STEPHENS; WANG, 2008; BLANTON; STEPHENS; KNUTH *et al*., 2015), que seria a possibilidade de se tratar a Álgebra em uma linguagem que torna possível o entendimento para estudantes do início da escolaridade. A definição de pensamento algébrico que adotamos neste trabalho segue a caracterização proposta por Blanton e Kaput (2005, p.413):

> processo pelo qual os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de casos particulares, estabelecem essas generalizações através de discurso argumentativo, e expressam-nas de formas progressivamente mais formais e adequadas à sua idade.

No Brasil, o documento do MEC intitulado *Elementos Conceituais e Metodológicos para Definição dos Direitos de Aprendizagem e Desenvolvimento do Ciclo de Alfabetização (1º, 2º e 3º anos) do Ensino Fundamental* (BRASIL, 2012) é o primeiro que faz a tentativa formal de induzir uma nova abordagem para a alfabetização matemática, incluindo o pensamento algébrico como um dos assuntos a serem tratados também nessa etapa.

Em atividade desde 2012, o Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa (PNAIC) é um programa governamental que tem oferecido formação continuada para professores que ensinam Matemática e Língua Portuguesa nos anos iniciais do Ensino Fundamental (PNAIC, 2018). Cabe destacar que o PNAIC foi a primeira iniciativa de formação pedagógica em larga escala no Brasil a abordar o pensamento algébrico como um dos assuntos a serem tratados nos anos iniciais, sendo responsável, portanto, pela aproximação do assunto com os profissionais que trabalham efetivamente no contexto escolar.

Contudo, o pensamento algébrico passou a fazer parte do currículo de forma mais efetiva com a publicação da *Base Nacional Comum Curricular* (BRASIL, 2017). Este documento é também conhecido pela sigla BNCC. Na BNCC os conhecimentos de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental estão divididos em cinco eixos de conhecimentos: 1) Números; 2) Álgebra; 3) Geometria; 4) Grandezas e Medidas; 5) Probabilidade e Estatística.

Sendo assim, a situação atual no Brasil é a seguinte: não se tem um amplo debate sobre a inclusão do pensamento algébrico nos anos iniciais do Ensino Fundamental, a formação de professores para os anos iniciais, em geral, ainda não considera a Álgebra como um assunto a ser tratado desde a alfabetização e não se tem clareza sobre a caracterização dos problemas que podem ser abordados para desenvolver o pensamento algébrico da criança, já que não há uma convenção do tipo de problema que pode ser caracterizado como algébrico nos anos iniciais.

Para que se possa ampliar as possibilidades de debate sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico desde os primeiros anos escolares, é necessário uma ação conjunta de profissionais que trabalham na escola com ensino nos anos inicias, bem como de pesquisadores interessados em esclarecer questões que ainda persistem em aberto sobre a caracterização do pensamento algébrico.

É importante também destacar que a formação matemática de pedagogos, que são os profissionais responsáveis pelo ensino da Matemática nos anos iniciais, é bastante reduzida, e normalmente focada no ensino da Aritmética e de alguns conceitos geométricos, não abordando assuntos como o pensamento algébrico, o pensamento estatístico, o pensamento financeiro, seja por falta de tempo, ou por um entendimento de que esses assuntos não devem ser tratados nos anos iniciais (CURI; PIRES, 2008).

O conhecimento sobre as características do pensamento algébrico pode ser especialmente importante para intervenções pedagógicas conscientes no sentido de desenvolver habilidades algébricas nos estudantes e atenuar as dificuldades quando eles se deparam com representações mais sofisticadas nos anos finais do Ensino Fundamental.

No capítulo 1 desta tese apresentamos as informações gerais do estudo, tais como a justificativa e os objetivos. No capítulo 2 apresentamos uma revisão de estudos anteriores sobre a temática do pensamento algébrico. No capítulo 3 detalhamos a base teórica que fundamenta a tese proposta. No capítulo 4 descrevemos os procedimentos metodológicos adotados para coleta e análise dos dados. No capítulo 5 apresentamos os resultados da pesquisa. No capítulo 6 os principais resultados estão sintetizados e são feitas algumas considerações a respeito dos invariantes operatórios relacionados com o pensamento algébrico da criança.

1. Apresentação do Estudo

A tese que defendemos neste trabalho é a de que há um campo conceitual do pensamento algébrico inicial. Neste capítulo apresentamos a questão de pesquisa que norteou todo o trabalho, e também descrevemos o objetivo e a justificativa para o estudo realizado.

Pode-se definir um campo conceitual como um conjunto de situações associadas com um determinado conceito, que se constitui por esquemas mentais e representações de um sujeito para expressar suas ideias. Defender a tese de que há um campo conceitual do pensamento algébrico inicial significa, antes de mais nada, admitir que existem situações e representações próprias que inauguram as noções algébricas. Isto se contrapõe a uma ideia tradicional de que a aprendizagem da Álgebra deve proceder a aprendizagem de conceitos aritméticos.

A consequência lógica em se assumir que o pensamento algébrico se constitui como um campo conceitual, caracterizado por determinados tipos de situações e representações, é que o pensamento da criança desenvolve esquemas específicos para lidar com situações algébricas, bem como representações simbólicas (inicialmente diferentes dos signos algébricos socialmente estabelecidos), o que precisa ser aprofundado experimentalmente. Daí a importância de se comprovar a afirmação proposta pela tese.

A afirmação da existência de um campo conceitual também recai na sua caracterização e na explicitação das situações, esquemas mentais e representações. Não se trata apenas de uma enunciação da linguagem, de uma classificação arbitrária, mas de uma construção teórica que parte da realidade observada a partir de experimentos, os quais se constituem de registros importantes para que se possa inferir todos esses elementos que compõem um campo conceitual.

Uma breve descrição do percurso formativo do autor desta tese é feita a seguir. Sou licenciado em Matemática, tendo concluído posteriormente os cursos de Mestrado em Meteorologia e Mestrado em Educação, respectivamente. O interesse simultâneo pela Matemática e pela Educação fez com que eu optasse por seguir estudos no doutorado que contemplassem, ao mesmo tempo, estas duas importantes áreas do saber, por isso a escolha por realizar estudos sobre Educação em Ciências, com foco no Ensino e Aprendizagem da Matemática.

Tive contato, inicialmente, com o Núcleo de Estudos em Epistemologia e Educação em Ciências (NUEPEC) da Universidade Federal do Rio Grande (FURG) no ano de 2013, durante minha participação como aluno especial da disciplina Alfabetização em Ciências e Matemática, culminando no ingresso como aluno regular do Curso de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências (PPGEC) no início de 2016.

O foco de estudos dos professores e estudantes do NUEPEC estava no Ensino de Ciências e Matemática na educação básica, tanto em relação à aprendizagem dos estudantes dessa etapa, quanto em relação à formação de professores que ensinam Ciências e Matemática.

Em 2015 conclui a dissertação de mestrado intitulada *Os problemas aditivos e o pensamento algébrico no Ciclo de Alfabetização* (BECK, 2015), que analisou como o pensamento algébrico poderia estar presente em problemas aditivos na etapa de alfabetização matemática. O principal resultado dessa pesquisa de mestrado foi o fato de que o pensamento algébrico está presente também na resolução de problemas aditivos, e sua presença é notadamente mais frequente nas estratégias que envolvem um número maior de operações mentais dos estudantes, quando tais problemas possibilitam a exploração desses níveis mais elevados de estratégias mentais.

Mais recentemente, foi criado em 2016 o Grupo de Estudos sobre Educação Matemática nos Anos Iniciais (GEEMAI), em parceria com professores da Universidade Federal de Pelotas (UFPEL). A presente pesquisa se realiza no âmbito do início das atividades do GEEMAI, pretendo contribuir com resultados que oportunizarão reflexões sobre os processos de ensino-aprendizagem na alfabetização matemática.

A opção de continuar estudando questões ligadas ao pensamento algébrico na pesquisa de doutorado aconteceu devido ao fato de o autor do presente trabalho, bem como seu orientador, observar a escassez de trabalhos, no âmbito nacional, relacionados com esta temática, e também o fato de praticamente não haver uma abordagem pós-construtivista consolidada sobre o pensamento algébrico.

1.1 Justificativa

Segundo o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000), vários professores e pesquisadores afirmam ter dificuldades em se trabalhar com o ensino da Álgebra, e por isso, educadores matemáticos de todas as partes do mundo têm se preocupado em pensar estratégias didáticas que amenizem os efeitos das “assustadoras” representações algébricas que são utilizadas para expressar conceitos que envolvem o uso de fórmulas ou a resolução de equações.

Esta preocupação se concentra especialmente na etapa em que os estudantes deixam de realizar cálculos estritamente aritméticos e passam a ter contato com equações e fórmulas, ou seja, quando entram em contato com a linguagem algébrica, e precisam compreender, além do significado, as representações envolvidas.

Dentre as estratégias pensadas, uma das que mais tem sido discutidas nas pesquisas sobre pensamento algébrico é a de se incluir atividades desde os anos iniciais de escolaridade que propiciem o desenvolvimento de esquemas mentais que facilitem a construção de conceitos algébricos pelos estudantes.

No entanto, como o assunto é novidade, ainda não se tem clareza, mesmo no âmbito da pesquisa, do que pode ser considerado como problema que envolve pensamento algébrico. Esta dificuldade na caracterização, particularmente nos anos iniciais, é um campo aberto para que novas ideias sejam lançadas sobre os tipos de problemas e situações que podem ser utilizadas para promover o desenvolvimento do pensamento algébrico da criança.

Consideramos o trabalho de Blanton *et al*. (2015) como a principal referência em termos de problemas e estratégias que os estudantes dos anos iniciais utilizam para agir em situações que envolvem o pensamento algébrico. Além de revisar trabalhos anteriores e abordar as principais noções algébricas nos anos iniciais, os próprios autores são pioneiros nos estudos sobre pensamento algébrico, e por isso, consideramos que este trabalho sintetiza as concepções mais atuais sobre o tema.

No entanto, ainda que Blanton *et al.* (2015) tenham estudado as estratégias, produzido uma caracterização das situações e lançado compreensões sobre as representações simbólicas das crianças quando se deparam com situações algébricas, falta a ideia de compreender isso em termos de conceitualização e de campo conceitual, isto é, falta esclarecer esta problemática de um ponto de vista da teorias que surgiram após o construtivismo clássico de Jean Piaget, as quais hoje são conhecidas como teorias pós-construtivistas.

1.2 Objetivos da Pesquisa

Invariantes operatórios são ações mentais que podem ser aplicadas a tipos diferentes de situações. Captar os invariantes operatórios de um sujeito enquanto ele tenta agir em determinada situação pode ser a chave para se compreender como a aprendizagem de certos conceitos acontece. Como defendemos a tese da existência de um campo conceitual do pensamento algébrico inicial, faz-se necessário compreender quais invariantes operatórios estão ligados ao pensamento algébrico da criança.

O objetivo geral deste trabalho é descrever e analisar os invariantes operatórios utilizados por estudantes do terceiro ano do Ensino Fundamental em situações que envolvem pensamento algébrico.

A escolha por considerar estudantes do terceiro ano do Ensino Fundamental se justifica por ser o fim do Ciclo de Alfabetização, etapa na qual se espera que os alunos dominem os processos matemáticos elementares.

Para descrever e analisar os invariantes operatórios, no contexto dos estudos que se baseiam no construtivismo, é preciso ter alguma ideia dos níveis de respostas de sujeitos frente às situações do campo conceitual, bem como conhecimento da estrutura das estratégias já utilizadas (pelo menos por alguns indivíduos, experimentalmente), e ainda, das representações que podem ser admitidas sobre o conceito.

Por isso, o objetivo geral foi desmembrado em três objetivos específicos, que são: 1) Relacionar as estratégias encontradas na literatura com as categorias de procedimentos apresentadas pelos participantes, para cada uma das principais noções algébricas; 2) Classificar os níveis de respostas das crianças frente às situações algébricas, para cada uma das principais noções algébricas, tendo em vista a relação entre os procedimentos e as estratégias já conhecidas da literatura; 3) Apresentar as características gerais das estratégias utilizadas pelos estudantes participantes da pesquisa, a fim de corroborar ou ampliar a caracterização de pensamento algébrico proposta na literatura.

Tendo em vista os objetivos, notou-se a ausência de uma questão para motivar o trabalho de busca por novas respostas para problemas em aberto sobre o pensamento algébrico inicial. Percebeu-se que tal questão precisaria possuir também elementos de um referencial pós-construtivista, observando a tese que é defendida neste trabalho.

A questão de pesquisa que buscamos responder é a seguinte: Como se caracterizam os invariantes operatórios que as crianças utilizam em problemas que envolvem o pensamento algébrico?

2. Revisão de Estudos sobre Pensamento Algébrico[1]

Neste capítulo sintetizamos algumas ideias de trabalhos recentes que apresentam a revisão de literatura ou o estado da arte das pesquisas sobre o pensamento algébrico, focando transversalmente no que estes trabalhos mostram sobre as noções algébricas nos primeiros anos escolares.

Segundo Lins e Gimenez (2001), a noção de que a Aritmética precisa necessariamente ser ensinada antes da Álgebra está generalizada na comunidade de educadores matemáticos. Para os autores, é necessário perceber o que essas duas grandes áreas da Matemática têm em comum para que se possa trabalhar com ambas concomitantemente desde o início da escolaridade.

Falcão (2003) introduz o termo *pré-Álgebra* para denominar o uso de pensamento algébrico desde anos iniciais. Para o autor, a Álgebra não representa meramente uma extensão da Aritmética, mas sim uma área de conhecimento com características específicas e independentes, destacando que existe no meio escolar a ideia da anterioridade da Aritmética em relação à Álgebra. O autor também afirma que os conceitos de função e incógnita poderiam ser melhor compreendidos pelos estudantes em etapas posteriores se a pré-Álgebra fosse trabalhada desde o início do Ciclo de Alfabetização.

Gomes (2003) destaca as relações que podem ser estabelecidas entre Álgebra, Aritmética e Geometria nos anos iniciais de escolaridade, e aponta a *alfabetização algébrica* como um possível meio de articular relações entre esses três grandes eixos do conhecimento matemático. A autora recomenda várias situações envolvendo pensamento algébrico, nas quais explora o raciocínio da criança frente a problemas de sequências e combinações.

---

[1] Este capítulo é uma adaptação de um estudo anterior realizado por Beck e Silva (2015a). Alguns trabalhos foram incluídos, a fim de atualizar a revisão de literatura proposta por estes autores.

O conceito de *variável* exerce um papel muito importante na Álgebra, em vários níveis de conhecimentos, desde o mais elementar até a Matemática mais avançada. Fujii (2003) desenvolve o conceito de *quase-variável*, que vem a ser um conjunto de números que apresentam algum tipo de relação matemática, a qual pode ser considerada mesmo com a introdução de novos números ao conjunto. Assim, para Fujii (2003) a regularidade e a previsibilidade caracterizam as primeiras ideias algébricas da criança.

Blanton e Kaput (2005, p.413) caracterizam o pensamento algébrico como o "processo pelo qual os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de casos particulares, estabelecem essas generalizações através de discurso argumentativo, e expressam-nas de formas progressivamente mais formais e adequadas à sua idade". Esses autores desenvolveram pesquisas com o objetivo de compreender e caracterizar o pensamento algébrico nos primeiros anos escolares, definindo este início da aprendizagem de conceitos algébricos como *early algebra*. Blanton e Kaput (2005) afirmam que o pensamento algébrico se subdivide em duas vertentes: a *Aritmética Generalizada* e o *pensamento funcional*. A primeira se caracteriza pela generalização das operações e o raciocínio acerca da relação entre números. Já a segunda se caracteriza pela descrição da variação numérica em certo domínio.

Segundo Carraher *et al*. (2006), dois fatores contribuem para que a Aritmética anteceda a Álgebra no currículo escolar: 1) o fato de historicamente a Álgebra ter sido proposta muitos séculos depois do surgimento dos primeiros conceitos aritméticos; e 2) a compreensão amplamente aceita de que o estádio das operações concretas definido pelos estudos *piagetianos*, que é aquele no qual a criança normalmente ingressa na escola, só possibilita à criança o aprendizado dos números, das operações aritméticas elementares e da tabuada.

Segundo Kern e Gravina (2012), por ser de natureza mais abstrata e possuir um distanciamento maior em relação aos problemas da vida cotidiana, a Álgebra constitui-se como um dos assuntos que mais apresentam dificuldades de aprendizagem pelos estudantes.

Alguns pesquisadores têm trabalhado no sentido de desmistificar a ideia de que a Álgebra não deve ser caracterizada apenas como um conjunto de procedimentos envolvendo signos do alfabeto para representar incógnitas ou variáveis, mas também como uma forma de raciocinar em situações que envolvem pensamento matemático. Kieran (2007), por exemplo, utiliza o termo *Álgebra*, no mesmo sentido que Blanton e Kaput (2005) utilizam a expressão *pensamento algébrico*, defendendo a ideia de que a Álgebra não deve ser reduzida às representações algébricas, destacando a Álgebra também como forma de pensar.

Os conceitos de *Aritmética Generalizada* e *pensamento funcional* (BLANTON; KAPUT, 2005) acabaram influenciando muitos trabalhos posteriores. Um aspecto que acabou se destacando muito na vertente da Aritmética Generalizada, foi o que alguns autores (CARPENTER; LEVI; FRANKE; ZERINGUE, 2005; STEPHENS; WANG, 2008) chamam de *pensamento relacional*, que tem como foco o estudo das relações entre os números, e também entre as operações matemáticas.

Cyrino e Oliveira (2011) também propõem a *modelação algébrica*, que se caracteriza como a generalização de cálculos aritméticos e de aspectos mais gerais na resolução de problemas matemáticos. No entanto, este tipo de pensamento algébrico não aparece de forma recorrente em trabalhos sobre pensamento algébrico, possivelmente pelo fato de haver uma linha muito tênue entre este tipo de problemas e aqueles relacionados com a Aritmética Generalizada.

Problemas que apresentam um valor desconhecido no enunciado passaram a ser bastante explorados por autores que estudam o pensamento relacional. Carpenter *et al*. (2005), por exemplo, analisam o pensamento relacional de estudantes na resolução de problemas do tipo $a+b=\_+c$. Segundo os autores, este tipo de problema possibilita desenvolver nos estudantes a noção de que a igualdade também pode representar uma relação de equilíbrio entre quantidades, e não apenas o resultado de uma operação, exclusivamente.

Ao analisar o pensamento relacional de estudantes do 6º e 7º anos escolares em Portugal em situações aritméticas de adição, subtração, multiplicação e divisão, Stephens e Wang (2008) concluíram que a exploração de problemas desse tipo promove no estudante uma visão mais ampla do significado do símbolo de igualdade, se distanciando da ideia de que a igualdade representa necessariamente o resultado de operações aritméticas. Desse modo, os estudos de Stephens e Wang (2008) e Carpenter *et al*. (2005) se complementam em termos de resultados acerca do pensamento relacional.

Ao analisar as representações utilizadas por dois estudantes de sete anos de idade em três situações envolvendo sequências e combinações de objetos, Ponte e Velez (2011) concluem que as crianças conseguiram utilizar boas representações para as sequências, conseguiram prever termos próximos do início, e em alguns casos, até mesmo termos mais afastados, obtendo sucesso na tarefa proposta.

Utilizando o método de Análise do Conteúdo, Silva e Savioli (2012) investigaram o pensamento algébrico nas resoluções de tarefas realizadas por 35 alunos do 5º ano do Ensino Fundamental. As autoras concluíram que ainda que os estudantes tenham apresentado uma linguagem simbólica para formalizar o pensamento utilizado, constatou-se o uso de mecanismos primários de representação para visualizar a comparação de quantidades.

Lima (2016) ressalta que a abordagem do pensamento algébrico nos anos iniciais de escolaridade é uma tendência mundial, e que alguns documentos oficiais brasileiros já prevêem conteúdos relacionados com Álgebra desde o início do Ensino Fundamental. O autor realizou uma pesquisa bibliográfica com o objetivo de mapear os estudos sobre pensamento algébrico nos anos iniciais publicados no Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), constatando que existe um crescimento da produção acadêmica sobre o assunto nos últimos anos, necessitando de maior atenção da comunidade de pesquisadores em Educação Matemática. O autor também destaca que muitas publicações são provenientes de um grupo de pesquisa da Universidade Estadual de Londrina, principalmente no ano de 2013.

Silva, Soares e Nehring (2016) destacam que as estruturas de padrões e sequências frequentemente são associadas com o desenvolvimento do pensamento algébrico em trabalhos publicados em periódicos da área da Educação Matemática.

Almeida e Santos (2017), ao revisar as propostas de caracterização de pensamento algébrico de autores que desenvolveram trabalhos relevantes sobre o tema, concluíram que o pensamento algébrico é constituído por cinco habilidades principais: “estabelecer relações”, “modelar”, “generalizar”, “operar com o desconhecido” e “construir significado”.

Diante de tantas caracterizações, revisões e pesquisas bibliográficas, optamos por limitar nosso trabalho de revisão de pesquisas anteriores sobre pensamento algébrico nos anos iniciais, aos trabalhos mais comentados nesses estudos de revisão. Além disso, o próprio autor desta tese, juntamente com seu orientador, publicou um estudo apresentando o estado da arte das pesquisas sobre o pensamento algébrico com crianças (BECK; SILVA, 2015a), o qual serviu como norteador dos trabalhos descritos neste capítulo.

A fim de incluir algumas referências mais atuais sobre a temática do pensamento algébrico nesta revisão, apresentamos a seguir os resultados de pesquisas recentes, que não estão contemplados nos trabalhos de revisão de literatura sobre o pensamento algébrico consultados para a escrita deste capítulo.

Trivilin e Ribeiro (2015) realizaram um estudo com professores dos anos iniciais sobre o conhecimento de tais professores sobre os diferentes significados do sinal de igualdade, constatando limitações dos participantes da pesquisa, principalmente com relação à importância de este ser um assunto a ser incluído no currículo dos anos iniciais de escolaridade.

Ferreira, Ribeiro e Ribeiro (2017), ao realizar um estudo sobre o conhecimento matemático para ensinar Álgebra nos anos iniciais, verificaram pouca familiaridade dos participantes, professores dos anos iniciais, com abordagens sobre o pensamento algébrico inicial da criança.

Para complementar o conjunto de trabalhos apresentados neste capítulo, e também trazer para a discussão um estudo mais recente das principais referências mundiais no assunto, descrevemos rapidamente algumas ideias do trabalho de Blanton *et al*. (2015).

Seguindo a proposta inicial de Blanton e Kaput (2005) de uma divisão do pensamento algébrico nas duas vertentes (Aritmética Generalizada e pensamento funcional), Blanton *et al*. (2015) ampliam e rediscutem os tipos de situações destinadas ao desenvolvimento do pensamento algébrico. Considerando trabalhos produzidos no intervalo de tempo entre os dois estudos, as principais noções algébricas, para Blanton *et al*. (2015), são as seguintes: 1) Equivalência, Expressões, Equações e Inequações; 2) Aritmética Generalizada; 3) Pensamento Funcional;4) Variável; 5) Raciocínio Proporcional.

A situações Equivalência, Expressões, Equações e Inequações estão relacionadas com os estudos precedentes sobre o pensamento relacional (CARPENTER *et al.*, 2005; STEPHENS; WANG, 2008), com foco principalmente em se trabalhar os diferentes significados do sinal de igualdade, possibilitando um contato inicial com o conceito de equação. Por exemplo, inclui problemas do tipo $a+b=\_+c$. Esta classe de situações foi considerada em trabalhos anteriores como uma subvertente da Aritmética Generalizada, constituindo, no trabalho de Blanton *et al*. (2015), uma classe independente de situações relacionadas com o pensamento algébrico.

As situações de Aritmética Generalizada estão ligadas com a análise cognitiva das propriedades mais gerais das operações aritméticas, tais como a comutatividade, associatividade, distributividade, etc. Tais situações estão relacionadas com a ideia de generalização, ou seja, com a observação daquilo que é mais geral em situações aritméticas (BLANTON; KAPUT, 2005).

As situações de Pensamento Funcional constituem uma das vertentes do pensamento algébrico, já desde o trabalho de Blanton e Kaput (2005), sendo caracterizado por situações que apresentam a ideia de uma regra de associação entre duas grandezas, ou seja, se aproximando, em termos cognitivos, da ideia formal matemática de *função*.

As situações que envolvem a ideia de Variável apresentam características que introduzem a ideia de matemática de *variável*, isto é, a ideia de que uma grandeza pode ser expressa na forma de uma sequência de valores que se alteram. No trabalho de Blanton e Kaput (2005), este tipo de situação está classificado como Pensamento Funcional, mas nota-se que Fujii (2003) já havia proposto o conceito de *quase-variável* como um conjunto de valores que seguem algum tipo de regra, e que apresentam a possibilidade de previsão de resultados, o que indica a singularidade de problemas desse tipo. No trabalho de Blanton *et al*. (2015) as situações de Variável são classificadas como independentes das situações de Pensamento Funcional, apesar das características semelhantes.

A grande novidade, em termos classificatórios, do trabalho de Blanton *et al*. (2015), é a proposta das situações de Raciocínio Proporcional. Esta classe de situações está ligada com a ideia de proporção. Por exemplo: se 2 balas custam 10 centavos, quanto custam 4 balas? (BLANTON *et al*., 2015). Os próprios autores ressaltam que este eixo de conhecimentos algébricos não está explícito no currículo das escolas participantes da pesquisa, mas que foi uma escolha dos pesquisadores por considerarem uma tendência a ser implementada no ensino de Álgebra para os anos iniciais.

Embora não se tenha muitos trabalhos abordando a ideia de proporcionalidade no contexto do pensamento algébrico, alguns autores, como Silva *et al*. (2015), discutem os tipos de estratégias que estudantes do início da escolaridade utilizam para agir em situações multiplicativas. Segundo Silva *et al.* (2015), as estratégias multiplicativas mais primitivas estão relacionadas com a soma de parcelas iguais na resolução do problema de multiplicar duas quantidades, evoluindo para agrupamentos maiores, até, por fim, culminar na ideia do princípio multiplicativo, no caso da multiplicação. Resultados análogos são verificados para as estratégias que envolvem a ideia de divisão.

Nota-se que o trabalho de Blanton *et al.* (2015) divide o pensamento algébrico em cinco grandes noções, trazendo uma nova abordagem para o estudo desta temática. Esta nova divisão foi uma referência importante para o nosso trabalho de pesquisa, principalmente com relação às situações escolhidas para a aplicação do Método Clínico, as quais foram adaptadas daquele trabalho.

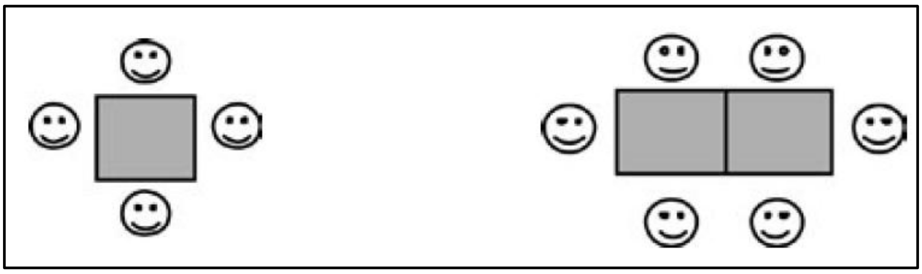
As principais noções algébricas propostas por Blanton *et al*. (2015) são as seguintes: 1) Equivalência, Expressões, Equações e Inequações; 2) Aritmética Generalizada; 3) Pensamento Funcional;4) Variável; 5) Raciocínio Proporcional. Deste ponto do texto em diante, vamos nos referir a cada uma das grandes noções algébricas, respectivamente como: 1) equivalência algébrica; 2) generalização algébrica; 3) recursividade algébrica; 4) padrão algébrico; 5) proporcionalidade algébrica.

A noção de equivalência algébrica de Blanton *et al*. (2015, p. 83, tradução nossa) foi analisada a partir do seguinte problema: "Preencha as lacunas com os números que tornam a sentença verdadeira. Como você conseguiu sua resposta? a) 7+3=__+4. Por quê? b) 5+3=__+3. Por quê?". Com este problema, Blanton *et al*. (2015) pretendiam avaliar a capacidade de estudantes do terceiro ano escolar na "resolução de problemas com valor desconhecido através das relações estruturais nas equações (sentenças numéricas abertas)", segundo os autores.

A noção de generalização algébrica foi analisada a partir da seguinte situação, proposta por Blanton *et al*. (2015, p. 83, tradução nossa): "A professora de Marcy pediu a ela que calculasse „23+15‟. Ela somou dois números e o resultado deu 38. A professora então pediu a ela para calcular quanto dá „15+23‟. Marcy prontamente sabia a resposta. a) Como ela sabia? b) Você acha que funciona para todos os números? Se sim, como você sabe?".

Para analisar as noções recursividade algébrica e padrão algébrico (BLANTON *et al.*, 2015, p. 85, tradução nossa): "Brady convidou seus amigos para uma festa de aniversário. Ele quer ter certeza de que todos terão lugar para sentar. Ele tem uma mesa quadrada. Ele pode ter 4 lugares em uma mesa quadrada, como mostra a figura. Se juntar outra mesa quadrada à primeira, ele pode ter 6 lugares. a) Se Brady continuar juntando as mesas dessa forma, quantas pessoas poderão sentar em: 3 mesas? 4 mesas? 5 mesas? b) Você percebe alguma relação na tabela? Explique. c) Encontre a regra que descreve a relação entre o número de mesas e o número de pessoas que podem sentar nas mesas. Descreva a regra em palavras. d) Descreva sua regra usando variáveis. O que suas variáveis representam? e) Se Brady juntar 10 mesas, quantas pessoas poderão sentar? Mostre como você chegou na resposta."

Figura 1 - Representação da Mesa com Quatro e Seis Lugares

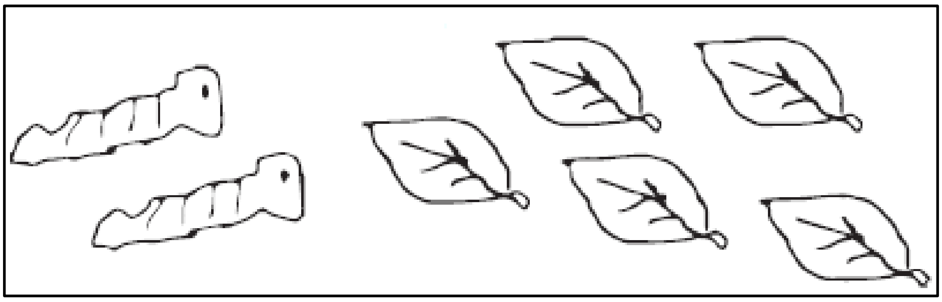


Fonte: Adaptado de Blanton *et al*. (2015).

Segundo os autores daquele trabalho, esta situação diz respeito à "geração e organização de dados em uma tabela de relação funcional; Identificação e descrição em palavras das propriedades recursivas; Uso de propriedades para prever os próximos resultados; Identificação e descrição em palavras de relações de covariação; Identificação e descrição em palavras de regras funcionais e variáveis; Uso de regras funcionais para prever números distantes do início da sequência".

A noção de proporcionalidade algébrica também foi analisada por Blanton *et al*. (2015, p. 86). Os próprios autores esclarecem que este problema talvez seja a grande inovação, em termos de principais noções algébricas, uma vez que até então a proporcionalidade algébrica não era considerada como uma das grandes vertentes de pensamento algébrico nos estudos anteriores sobre esta temática, assim como também não fazia parte do currículo de Matemática dos anos iniciais na região onde a pesquisa foi realizada. A situação é a seguinte (BLANTON *et al.*, 2015, p. 86, tradução nossa):"Uma turma de quarto ano precisa de 5 folhas por dia para alimentar seus 2 lagartos.Quantas folhas a turma precisaria para alimentar 12 lagartos? Explique como chegou na reposta".

Figura 2 - Representação das Folhas e Lagartos



Fonte: Adaptado de Blanton *et al*. (2015).

Neste problema Blanton *et al*. (2015, p. 86, tradução nossa) exploram o "uso de relação multiplicativa para raciocinar proporcionalmente sobre dados (por exemplo: se 2 balas custam 10 centavos, quanto custam 4 balas?)".

Em síntese, podemos dizer que a inclusão da Álgebra desde anos iniciais começou a ser discutida a partir do início da década de 2000 (LINZ; GIMENEZ, 2001; FALCÃO, 2003; GOMES, 2003; BLANTON; KAPUT, 2005, KIERAN, 2007); que problemas abordando a igualdade como uma relação de equilíbrio promovem o pensamento algébrico (CARPENTER *et al.*, 2005; STEPHENS; WANG, 2008; TRIVILIN; RIBEIRO, 2015); que a noção de variável pode ser desenvolvida desde o início da escolaridade (FUJII, 2003); e que o pensamento algébrico pode ser analisado em termos de pelo menos cinco noções: 1) Equivalência, Expressões, Equações e Inequações; 2) Aritmética Generalizada; 3) Pensamento Funcional; 4) Variável; 5) Raciocínio Proporcional (BLANTON *et al.*, 2015).

3. Base Teórica

Neste capítulo é apresentado o referencial teórico da pesquisa. Dividimos a apresentação do nosso referencial em três etapas: 3.1) conceitos algébricos do ponto de vista matemático; 3.2) introdução aos fundamentos da Epistemologia Genética, isto é, às ideias clássicas do construtivismo; 3.3) apresentação das principais ideias da Teoria dos Campos Conceituais, que constituem um importante representante das teorias pós-construtivistas, e que é o principal referencial teórico desta pesquisa.

3.1 Conceitos Algébricos do Ponto de Vista Matemático

Ainda que o contexto desta tese esteja centrado no pensamento algébrico da criança no início da escolaridade, acreditamos ser importante apresentar as principais noções algébricas também do ponto de vista formal matemático, tendo em vista que a abordagem dos conceitos e proposições no contexto científico acabam por influenciar a escolha dos temas a serem ensinados na escola, bem como a forma como são abordados. É o que Chevallard (1982, 2005, 2013) chama de *transposição didática*.

Embora a transposição didática não componha nossa fundamentação teórica para explicar os processos de aprendizagem de conceitos algébricos no início da escolaridade, é importante observar alguns de seus argumentos a fim de compreender como os conceitos mais formais da Matemática influenciam até mesmo o currículo dos anos iniciais. Por isso, a seguir apresentamos algumas definições e resultados formais que estão relacionados com as principais noções algébricas apresentadas por Blanton *et al*. (2015).

Comecemos pelas situações de Equivalência, Expressões, Equações e Inequações. Nessas situações, o conceito de *equação* desempenha um papel central. Por isso, é importante definir mais precisamente o que vem a ser uma equação.

Chamamos de *equação* uma igualdade entre duas expressões, onde pelo menos em uma delas, mas possivelmente em ambas, figuram *incógnitas* $x_1, x_2, .., x_n$, que são valores desconhecidos e que se pretende descobrir, embora nem sempre isto seja possível analiticamente (BECK, 2012, p. 12).

É importante destacar na definição dada de equação que a expressão *valores desconhecidos* remete a ideia de incógnita, normalmente representada por alguma letra do alfabeto latino nos livros de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental. Podemos dizer que esta definição formal matemática de equação concorda com a ideia de que a essência da equação está na busca por valor desconhecido.

Também é importante destacar que uma equação é uma *igualdade*. O conceito de igualdade também desempenha um papel central nas situações de Equivalência, Expressões, Equações e Inequações, sobretudo nos estudos sobre o pensamento relacional (CARPENTER *et al.*, 2005; STEPHENS; WANG, 2008).

Com base na definição de Beck (2012) para equação, pode-se também definir inequação: uma *inequação* é uma desigualdade entre duas expressões, onde pelo menos em uma delas, mas possivelmente em ambas, figuram *incógnitas* $x_1, x_2, .., x_n$, que são valores desconhecidos e pertencentes a intervalos numéricos que se pretende estabelecer, embora nem sempre isto seja possível analiticamente.

As situações de Aritmética Generalizada são referentes às propriedades aritméticas das operações numéricas, assunto extremamente importante entre os matemáticos, especialmente aqueles que se dedicam ao estudo da Álgebra Abstrata, ramo da Matemática que se ocupa em analisar as estruturas algébricas e as operações que são definidas nos diferentes tipos de conjuntos. No livro de Hefez (2014) as estruturas de conjunto, grupo, anel e corpo são estudadas com profundidade. Normalmente esse estudo faz parte do currículo de cursos superiores de Matemática. Com relação aos assuntos tratados neste trabalho, interessa aprofundar um pouco a discussão sobre conjuntos numéricos, e as principais operações aritméticas conhecidas, bem como suas propriedades.

A teoria básica de conjuntos pode ser encontrada em Miranda e Pena (2006). A seguir apresentamos apenas os conjuntos numéricos, importantes para o entendimento dos detalhes que permeiam as operações entre números naturais que são tratadas no presente trabalho.

Os *números naturais* constituem um poderoso modelo de contagem de objetos (LIMA *et al*., 2006). O conjunto formado por tais números é comumente representado na literatura matemática pelo símbolo $\mathbb{N} = \{0,1,2,3 \ldots\}$. O número zero está incluído neste conjunto, significando ausência de quantidade. O conjunto dos números naturais, retirando-se o zero é denotado por $\mathbb{N}^* = \{1,2,3 \ldots\}$.

Ressaltamos que várias teorias matemáticas desconsideram o zero como número natural. A inclusão ou não do zero no conjunto dos naturais é uma convenção adotada de acordo com os objetivos de cada teoria. Como neste trabalho estamos interessados particularmente nas operações elementares, isto é, operações que envolvem apenas números naturais, precisamos lembrar que na subtração é interessante podermos subtrair duas quantidades idênticas, daí segue a escolha pela inclusão do zero.

O *conjunto dos números inteiros*, representado por $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots\}$, também está associado com a contagem de objetos. No entanto, nos números inteiros existe a noção de *sentido*, ou seja, podemos contar uma *quantidade positiva* ou uma *quantidade negativa*, sendo que o significado destas expressões é convencionado de acordo com a grandeza envolvida (VERGNAUD, 1985).

As operações aritméticas elementares estudadas no início da escolaridade não envolvem números racionais. Ainda assim, o entendimento desses números é importante para a formalização da operação de divisão.

O *conjunto dos números racionais* é denotado por $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} \middle| \ m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$, e compreende todas as frações. Este conjunto é uma importante ferramenta para a contagem de *porções*, sendo uma primeira tentativa de medição fracionada, tanto no âmbito da história da humanidade, quanto na construção dos primeiros conceitos geométricos pela criança, embora as representações, nesse último caso, sejam pouco arbitrárias, e mais influenciadas pela transmissão social.

O entendimento dos números racionais é importante no estudo das inconsistências da operação de divisão, pois deve-se sempre ter em vista que o resultado desta operação não poderá extrapolar o conjunto dos números naturais nos anos iniciais de escolaridade.

No âmbito das operações elementares, o conjunto dos racionais é o conjunto de maior abrangência, visto que todas as operações entre números naturais podem no máximo, produzir números racionais como resultado. A saber: a adição de números naturais produz apenas números naturais; a subtração de números naturais pode resultar em números inteiros; a multiplicação de números naturais resulta apenas em números naturais; e a divisão de números naturais pode resultar, no máximo, em um número racional.

Ao longo da história, os números naturais foram formalmente abordados de várias formas. Atualmente, a fundamentação teórica aritmética baseia-se nos Axiomas de Peano (HEFEZ, 2005), a partir dos quais podem ser formalizadas as noções de *antecessor*, *sucessor*, *adição*, *subtração*, *multiplicação*, *divisão* e *ordem* nos números naturais.

É importante ressaltar que embora os aspectos formais da teoria dos números naturais sejam inadequados para utilização direta em sala de aula, o educador precisa ter a teoria em vista para que os conceitos sejam aprendidos pelos alunos de forma cientificamente consistente e didaticamente atualizada, isto é, conceitos constituídos de coerência matemática e em concordância com a bibliografia atual sobre o assunto.

A seguir, será descrita brevemente a *teoria elementar dos números naturais*. Maiores detalhes técnicos, bem como exemplos, poderão ser encontrados em: Domingues (1991); Domingues e Iezzi (2003); Hefez (2005); e também em Lima *et al*. (2006).

O símbolo $\mathbb{N}$ representa o conjunto dos números naturais. O que caracteriza tal conjunto é a noção de *sucessor*. Dados $n, n' \in \mathbb{N}$, diz-se que n' é *sucessor* de n quando n' representa uma quantidade maior do que n e não há números naturais entre eles.

A partir da noção de sucessor, pode-se caracterizar mais precisamente o conjunto dos naturais como o conjunto que satisfaz os seguintes axiomas, conhecidos como *Axiomas de Peano*:

A1) Todo número natural tem um único sucessor;

A2) Números naturais diferentes possuem sucessores diferentes;

A3) Existe um único número que não é sucessor de nenhum outro. Este número é chamado de *zero* - na língua portuguesa - e representado pelo símbolo *0*;

A4) Seja $X \subset \mathbb{N}$. Se $0 \in X$, e se o sucessor de qualquer elemento de X ainda está em X, então $X = \mathbb{N}$. (Axioma da Indução)

O restante dos números naturais é representado com o auxílio do sistema de numeração hindu-arábico. Uma alternativa para representação intuitiva dos números naturais é dada pela forma extensiva do conjunto $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,5, \ldots\}$.

A seguir vamos apresentar em termos formais as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão definidas no domínio do conjunto dos números naturais.

Chama-se *adição* a operação que associa dois números $n, p \in \mathbb{N}$, a um terceiro número natural, chamado de *soma* de n e p, o qual é representado pelo símbolo $n + p$. A soma $n + p$ é o número natural que se obtém a partir de n aplicando-se p vezes seguidas a operação de *tomar um sucessor*. Neste caso, os números n e p são chamados de *parcelas* (LIMA *et al*., 2006).

Chama-se *subtração* a operação que associa dois números $n, p \in \mathbb{N}$, a um terceiro número natural, chamado de *diferença* entre n e p, sendo representado pelo símbolo $n - p$. A diferença $n - p$, com $n > p$, é o número natural d tal que $n = p + d$, para algum $d \in \mathbb{N}$. Neste caso, o número n é chamado *minuendo*, e o número p é chamado *subtraendo*.

Chama-se *multiplicação* a operação que associa dois números $n, p \in \mathbb{N}$, a um terceiro número natural, chamado de *produto* de n e p, o qual é representado pelo símbolo $n \times p$. O produto $n \times p$ é o número natural que se obtém a partir da soma de n parcelas de p. Neste caso, os números n e p são chamados de *fatores*.

Chama-se *divisão* a operação que associa dois números $n, p \in \mathbb{N}$, a um terceiro número natural, chamado de *quociente* de n sobre p, sendo representado pelo símbolo $n \div p$. O quociente $n \div p$ é o número natural q tal que $n = p \times q + r$, para alguns $q, r \in \mathbb{N}$. Neste caso, o número n é chamado *dividendo*, o número p é chamado *divisor* e o número r é chamado *resto*.

Chama-se *comutatividade* a propriedade que afirma a equivalência de resultados quando dois objetos de um conjunto são operados em ordem distinta. Denotando pelo asterisco * uma operação qualquer, pode-se expressar em símbolos: $a * b = b * a$. As operações de adição e multiplicação são comutativas em $\mathbb{N}$. As operações de subtração e divisão não são comutativas em $\mathbb{N}$.

Chama-se *associatividade* a propriedade que afirma a equivalência de resultados quando uma operação é aplicada a três ou mais elementos de um conjunto, independentemente de quais pares de elementos sejam operados primeiro. Em símbolos: $(a * b) * c = a * (b * c)$. As operações de adição e multiplicação são associativas em $\mathbb{N}$. As operações de subtração e divisão não são.

No conjunto dos números naturais também vale a *distributividade da multiplicação em relação à adição*: $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$. Como não vale para $\mathbb{N}$ a distributividade da adição em relação à multiplicação, podemos falar apenas em *distributividade*, sem mencionar a orientação desta propriedade em termos de operações entre números naturais.

As situações de Pensamento Funcional, pela própria definição, envolvem a ideia matemática de função. Por isso optamos por aprofundar a descrição de conceitos relacionados com funções, no contexto da Matemática formal.

A seguir é dada a definição técnica de função. No entanto, algumas definições preliminares são fornecidas inicialmente, como o produto cartesiano e a relação entre conjuntos. Tais noções preliminares são fornecidas a fim de definir o conceito de função nos termos da teoria clássica de conjuntos.

Dados dois conjuntos A e B não vazios, definimos o *produto cartesiano* entre A e B, denotado por $A \times B$, como o conjunto de todos os pares ordenados da forma (a, b), nos quais $a \in A$ e $b \in B$, ou equivalentemente $A \times B = \{(a, b): a \in A, b \in B\}$.

Dados dois conjuntos A e B não vazios, chamamos de *relação* entre A e B, qualquer subconjunto do produto cartesiano $A \times B$. Uma relação R de A em B, isto é, na qual os elementos da primeira coordenada pertencem a A, e os elementos da segunda coordenada pertencem a B, pode ser denotada por $R: A \rightarrow B$. Neste caso, o conjunto A é chamado de *domínio da relação* e o conjunto B é chamado de *contradomínio da relação*.

Dados dois conjuntos A e B não vazios. Chamamos de *função* toda relação que associa a cada $x \in A$, um único $y \in B$. Uma função f de A em B pode ser denotada por $f: A \rightarrow B$. Neste caso, o conjunto A é chamado de *domínio da função*, o conjunto B é chamado de *contradomínio da função* e o conjunto $Y = \{y \in B: y = f(x),\ para\ algum\ x \in A\}$ é chamado de *imagem* de f.

Alternativamente, podemos dizer que uma *função* é uma regra de dependência entre dois conjuntos. Uma função $f: A \rightarrow B$ é uma regra na qual os elementos de B dependem dos elementos de A. Se $x \in A$, então se representa $f(x)$ o valor do conjunto B dependente de x. Chamamos de *atribuição* a substituição de x por algum elemento no domínio da função f.

As situações envolvendo a ideia de Variável estão relacionadas com a ideia algébrica de variável, que por sua vez, está intimamente ligada ao conceito de fórmula. Por isso esses dois conceitos são abordados a seguir.

Chamamos de *fórmula* uma representação simbólica que indica uma relação entre duas quantidades. As quantidades envolvidas em uma fórmula são chamadas de *variáveis*. Sendo assim, podemos dizer que a fórmula é a representação simbólica de qualquer subconjunto de um produto cartesiano, pois como vimos acima, cada subconjunto de um produto cartesiano pode ser definido como relação.

As situações de Raciocínio Proporcional não requerem um esclarecimento formal matemático além da própria definição da operação de multiplicação dada nesta seção, embora haja uma complexidade que transcende a ideia de que o produto é meramente o resultado dos fatores, já que no Raciocínio Proporcional os fatores podem não estar diretamente explícitos nos problemas, necessitando uma adaptação antes da realização da operação de multiplicação.

3.2 Principais Ideias da Epistemologia Genética

Em vários trabalhos do pesquisador suíço Jean Piaget (1926, 1936, 1937, 1945, 1950, 1959, 1967, 1970, 1975, 1977), alguns em colaboração com Bärbel Inhelder (PIAGET; INHELDER, 1959, 1962, 1968), a gênese do conhecimento foi detalhadamente estudada. O foco dessas pesquisas estava em compreender como o sujeito epistemológico realiza a construção de conceitos. Boa parte dos estudos de Piaget e seus colaboradores foi dedicada ao estudo da construção de conceitos fundamentais em Matemática, como o de número (PIAGET; SZEMINSKA, 1981).

A seguir, apresentamos alguns conceitos centrais da Epistemologia Genética, como ficou conhecido o conjunto de estudos construtivistas desenvolvido ao longo de algumas décadas por Piaget e colaboradores. Vamos começar por um dos conceitos centrais da teoria, que é a *equilibração das estruturas cognitivas* (PIAGET, 1975).

Como era biólogo, Piaget pretendia derivar vários conceitos referentes à aprendizagem a partir de ideias biológicas, como por exemplo, a adaptação. A equilibração das estruturas cognitivas, nessa perspectiva, seria o processo de tentativas do sujeito de entrar em equilíbrio com o meio. O termo *equilibração* foi utilizado para conotar um processo dinâmico, já que o *equilíbrio* seria, neste caso, o objetivo a ser alcançado, um produto final, que em termos reais torna-se intangível.

A equilibração das estruturas cognitivas é uma das ideias originais mais conhecidas da Epistemologia Genética, sendo considerada como um dos quatro principais fatores de impacto para o desenvolvimento cognitivo. Os outros três fatores apontados por Piaget (1975) como mais influentes são: a maturação biológica, a experiência e a transmissão social.

A *maturação biológica* diz respeito ao desenvolvimento natural do processo de embriogênese corporal, cerebral e mental. Em termos atuais, poderíamos dizer que é tudo aquilo referente à hereditariedade e formação psiconeurocorporal que exerce influência no processo de desenvolvimento cognitivo. A *experiência particular* dos indivíduos é constituída pelo conjunto de atividades realizada no meio em que se vive, e mais particularmente, como tais atividades afetam seu desenvolvimento cognitivo. A *transmissão social* é o processo de compartilhamento de representações simbólicas que acontece pela via da linguagem.

Estudiosos anteriores à Piaget já haviam ressaltado a importância da maturação biológica, da experiência e também da transmissão social como fatores de grande importância no desenvolvimento cognitivo, mas foi com advento da Epistemologia Genética que a questão da equilibração passou a ser considerada como um fator de influência.

Piaget era um estruturalista, no sentido de que buscava encontrar a essência do conhecimento, aquilo que se mantêm na variação. Para ele, o conhecimento é o resultado da ação mental, das *oper-ações*, o que o distancia de duas visões epistemológicas clássicas: o *empirismo*, que defende a experiência como única via de acesso ao conhecimento; e o *inatismo*, que considera a razão como principal forma de alcançar o conhecimento.

Para os inatistas, a maturação biológica é o fator determinante para o desenvolvimento. Nessa perspectiva, a apreensão do conhecimento é apenas uma questão de tempo, ou em outras palavras, o desenvolvimento cognitivo já está geneticamente programado para acontecer, aguardando apenas o sujeito atingir o período de maturação adequado para a aprendizagem de certos tipos de conhecimento.

Piaget considera a maturação biológica como uma condição de possibilidade, pois avalia sua importância para o processo de desenvolvimento cognitivo. No entanto, estudos realizados com crianças suíças, africanas e iranianas, para citar algumas variações culturais analisadas, concluíram que apesar de as etapas de desenvolvimento serem as mesmas, as idades cronológicas médias em que a criança passa de uma etapa à outra varia de uma cultura para outra. Sendo assim, Piaget considera que a explicação para o desenvolvimento cognitivo não pode ser reduzida apenas ao fator maturação biológica, ainda que este desempenhe algum papel no processo.

Já os empiristas tendem a reduzir o problema do desenvolvimento cognitivo ao conjunto de experiências vivenciadas pelo sujeito do conhecimento. O argumento de Piaget que relativiza este fator também como uma condição de possibilidade, contrariando sua importância como fator determinante, é baseado principalmente nas pesquisas realizadas por seu grupo nas décadas de 1940 e 1950, sobre a *conservação da substância*.

Um experimento muito conhecido nesses estudos é da bola de argila. Os pesquisadores forneciam uma bola de massa de modelar para a criança, e em seguida essa bola era transformada no formato de uma salsicha. O pesquisador perguntava então se havia a mesma quantidade de matéria, de peso e de volume no final do processo. Todos os estudos realizados constataram que a conservação da quantidade de matéria é a primeira a ser desenvolvida, seguida respectivamente, pela quantidade de peso e volume (PIAGET; INHELDER, 1962). Piaget observou que isto é um achado muito interessante, visto que o peso e o volume da argila podem ser testados experimentalmente, via instrumentos que potencializam a percepção humana. No entanto, a conservação da quantidade de matéria, ou seja, a conservação da substância é uma necessidade lógica, uma noção *a priori*, que prescinde da experiência. Isto significa que a experiência interfere no desenvolvimento, mas existem aspectos não experimentais que devem se levados em consideração.

Algumas teorias cognitivistas atribuem à transmissão social uma importância quase total para explicar o desenvolvimento cognitivo. Para avaliar a importância desse fator no desenvolvimento, Piaget idealizou um teste no qual a linguagem não deveria interferir nas ações do sujeito participante. Uma das mais conhecidas provas *piagetianas* é o problema das flores (PIAGET; SZEMINSKA, 1981). Ele constatou que, em geral, as crianças francesas de até 9 anos de idade não compreendiam o significado da expressão “algumas de minhas flores são margaridas”. A contingência lógica “algumas” não era bem entendida. E isto não era devido ao desconhecimento linguístico da palavra, pois tais crianças já estavam familiarizadas com o idioma francês. O problema era o não desenvolvimento da capacidade de classificar objetos.

Segundo Kamii (1990), a *classificação* consiste na habilidade da criança compreender as relações hierárquicas existentes entre as classes de objetos. As relações de contingência de conjuntos numéricos são um exemplo. A proposição “todo número natural é inteiro, mas nem todo número inteiro é natural” é um exemplo desse tipo de relação, já que o número -1, por exemplo, é um número inteiro, mas não é natural. Kamii (1990) também destaca a *seriação* como a capacidade de ordenar objetos seguindo algum critério objetivo para apresentá-los em sequências. O conceito de número é uma síntese das operações de classificação e seriação.

Para Piaget, como a classificação e a seriação são processos mentais que independem da linguagem, a transmissão social é insuficiente para explicar completamente o desenvolvimento cognitivo, ainda que seja uma condição de possibilidade para que ele ocorra.

Sendo assim, Piaget relativiza condições já anteriormente propostas por outros autores como determinantes para o desenvolvimento cognitivo. Ao fazer esta revisão epistemológica dos fatores que influenciam no desenvolvimento cognitivo, ele propõe uma visão que revisa teorias anteriores e amplia o problema do desenvolvimento, além de esclarecer que a aprendizagem depende da etapa do desenvolvimento cognitivo em que o sujeito se encontra.

A Epistemologia Genética é uma teoria do desenvolvimento e da aprendizagem. As principais conclusões de Piaget acerca da aprendizagem foram as seguintes (PIAGET, 1959): 1) a aprendizagem está subordinada ao processo de desenvolvimento cognitivo; 2) a *assimilação* é a relação fundamental que acontece em toda forma de aprendizagem ou desenvolvimento; 3) a equilibração é uma forma de eliminação de contradições lógicas, incompatibilidades, conflitos e inconsistências.

A *assimilação*, apontada como um dos principais processos relevantes para o desenvolvimento ou para aprendizagem, já havia sido objeto de estudo de Piaget (1936) desde suas primeiras pesquisas, relativas ao nascimento da inteligência da criança. Para ele, a *assimilação* se caracteriza pela aquisição de informações do meio que causem impacto na sua estrutura cognitiva. Essa aquisição de informações prepara o sujeito para lidar com novas situações, com potencial aumento do nível de complexidade. Em outras palavras, no processo de assimilação, o meio age sobre o indivíduo, gerando uma perturbação em sua estrutura cognitiva.

Para a Epistemologia Genética, tão importante quanto o processo de assimilação das informações do meio pelo indivíduo, é o processo de *acomodação* das informações do meio, o qual é realizado internamente. A *acomodação* consiste basicamente na adequação de esquemas mentais a novas informações que o indivíduo recebe em suas experiências. Dito de outro modo, no processo de acomodação, o indivíduo age sobre o meio, modificando-o de acordo com os pressupostos de sua estrutura cognitiva.

Apesar de afirmar que a aprendizagem está subordinada ao desenvolvimento, Piaget (1959) explica por meio da teoria da assimilação/acomodação como ocorrem as pequenas variações de estados de conhecimento, contribuindo decisivamente para o avanço das teorias da aprendizagem, que até então abordavam o tema de pontos de vista diferentes.

Como Piaget pretendia construir uma espécie de *Epistemologia baseada no Desenvolvimento Biológico-Cognitivo*, sua teoria articula terminologias da Biologia e da Filosofia. Por isso Piaget (1926, 1936, 1937, 1945) utiliza o termo *objeto* para denominar qualquer desafio externo do meio que exija ação mental do *sujeito epistemológico*, que seria o sujeito que assimila e acomoda as informações do meio, como forma de construção do conhecimento.

Ao contrário das teorias *inatistas*, as quais defendem que o conhecimento é inerente ao sujeito, e das teorias *empiristas*, as quais afirmam que o conhecimento é inerente ao objeto, na Epistemologia Genética tem-se como premissa básica que o conhecimento é fruto da *inter-ação* entre o sujeito e o objeto.

Piaget (1975) descreve o processo de desenvolvimento cognitivo como uma evolução realizada em estádios: 1) o estádio sensório-motor; 2) o estádio pré-operatório; 3) o estádio das operações concretas; 4) o estádio das operações formais.

A seguir apresenta-se as características gerais de cada estádio. A informação da faixa etária na qual cada um se desenvolve é apresentada, porém é preciso esclarecer que apenas os estudos iniciais de Piaget, e mesmo assim em contextos específicos, as idades de cada estádio foram consideradas. Na realidade, a informação mais importante é da ordem de sucessão dos estádios, o que possibilita compreender a dinâmica do desenvolvimento cognitivo dos sujeitos participantes das pesquisas que fundamentaram a Epistemologia Genética.

O estádio *sensório-motor* abrange em média os primeiros 18 meses de vida. Nessa primeira etapa do desenvolvimento a criança desenvolve esquemas de conhecimento prático, que vão desde reflexos até esquemas de movimentação e interação com objetos. A *sucessão temporal* e a *relação de causalidade* são exemplos de esquemas construídos pela criança nesse estádio. Certamente a análise e o tratamento teórico dados por Piaget a esses dois últimos esquemas tenham sido inspirados pela proposição das noções de *tempo* e *espaço*, amplamente discutidas pelo transcendentalismo *kantiano*, o qual é apresentado em linhas gerais no trabalho de Denis Thouard (1965).

O estádio *pré-operatório* ocorre aproximadamente dos 18 meses até os 7 anos de idade. Nesse estádio acontecem as primeiras formas de expressão da linguagem. A criança interage com o mundo ao redor por meio da comunicação, utilizando-se das primeiras representações simbólicas para manifestar desejos e responder ao meio. Nesse estádio a criança ainda não é capaz de realizar operações, mas ela consegue reconstruir esquemas desenvolvidos no estádio *sensório-motor*, agora com maior capacidade de representação simbólica desses esquemas.

O estádio das *operações concretas* se caracteriza pelo uso das primeiras *oper-ações*. Ele acontece geralmente na faixa dos 7 aos 12 anos de idade. As operações que a criança é capaz de realizar nesse estádio são de natureza concreta. Isto significa que o sujeito desse estádio opera diretamente sobre o objeto, adquirindo informações do meio, porém sem construir hipóteses, nem formalizar simbolicamente os conceitos com os quais opera.

O estádio das *operações formais* é caracterizado pelo uso do raciocínio hipotético-dedutivo, que possibilita ampliar o campo de ação do sujeito. O objeto nesse estádio não é o único alvo da ação, pois o sujeito pode também construir hipóteses e deduzir logicamente proposições a partir do objeto e de sua própria estrutura cognitiva. Esse estádio começa por volta dos 12 anos de idade e continua até o final da vida dos indivíduos.

Na verdade os quatro estádios de desenvolvimento cognitivo determinam as máximas possibilidades de alcance das operações do sujeito em cada faixa etária. Por exemplo, é possível acontecer o estádio *sensório-motor* na fase adulta, na aprendizagem de esquemas específicos, porém o adulto conseguirá atingir *operações formais*, enquanto a criança de cinco anos, por exemplo, não conseguirá porque o seu máximo alcance, em geral, é o estádio *pré-operatório*.

3.3 Teoria dos Campos Conceituais

A Teoria dos Campos Conceituais, proposta pelo professor e pesquisador francês Gérard Vergnaud (1985, 1990, 1997), foi o referencial escolhido para discutir os resultados obtidos por meio do Método Clínico. Vergnaud foi aluno de Jean Piaget, de modo que a Epistemologia Genética exerceu profunda influência para a formulação da Teoria dos Campos Conceituais.

Segundo Vergnaud (2017c, p. 63), a Teoria dos Campos Conceituais "é uma teoria psicológica e didática que tenta levar em conta a questão do desenvolvimento e da aprendizagem dos conhecimentos a longo prazo".

Além dos princípios fundamentais da Epistemologia Genética, Vergnaud também considera as situações experimentadas pelo sujeito e suas representações simbólicas como parte integrante no processo de construção de conceitos, atribuindo maior peso que Piaget a particularidade de cada tipo de conhecimento. Para Piaget, a inteligência é um prolongamento da adaptação biológica e, portanto, uma só para várias situações. Já Vergnaud (1985, 1990, 1997) destaca que os conceitos e esquemas dependem do tipo de situação com a qual o sujeito se depara, e por isso cada contexto exige o desenvolvimento de estruturas para ele, além de alguns outros conceitos fortemente correlacionados. Esta é uma das principais diferenças entre as concepções de aprendizagem de Piaget e Vergnaud.

Um *campo conceitual*, segundo Vergnaud (2017a, p. 18), é "... um conjunto de situações cujo tratamento implica em *eskemas*, conceitos e teoremas, em estreita conexão, assim como as representações de linguagem e representações simbólicas suscetíveis de serem utilizadas para representá-los". Nas palavras de Grossi (2012, p. 19), de forma mais simplificada, um campo conceitual é um "conjunto de situações cujo domínio progressivo exige uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão".

Os conceitos de *adição* e *subtração*, que constituem o *campo das estruturas aditivas*, foram amplamente estudados por Vergnaud e seus colaboradores. Similarmente, Vergnaud (1985) também estudou o *campo das estruturas multiplicativas*, considerando a *multiplicação* e a *divisão* como operações complementares.

Na Teoria dos Campos Conceituais o processo de conceitualização constitui a essência da aprendizagem, por isso nessa teoria existe a preocupação em definir mais rigorosamente o que é um conceito. Um *conceito*, para Vergnaud (1985, 1990) é uma tripla C={S,I,R} na qual S é um conjunto de situações, I é um conjunto de invariantes operatórios e R é um conjunto de representações simbólicas.

As *situações* são experiências possíveis que estão relacionadas com o conceito a ser desenvolvido, ou seja, situações nas quais o conceito exerce algum tipo de papel que pode ser explorado.

Os *invariantes operatórios* são estratégias mentais que podem ser utilizadas em situações diferentes que apresentam semelhanças sob certos aspectos. A noção de *invariante operatório* já havia sido proposta por Piaget (1967, 1970) como parte integrante do conjunto de esquemas mentais exigidos por determinadas situações. Na Teoria dos Campos Conceituais os invariantes operatórios podem ser classificados como *teoremas-em-ação* ou *conceitos-em-ação*. Um *teorema-em-ação* é uma proposição que o sujeito acredita ser verdadeira, ainda que seja em caráter provisório. Um *conceito-em-ação* é um "conceito considerado pertinente na ação em situação" (VERGNAUD, 2017d, p. 35), são como premissas, as quais podem ser utilizadas como informações nas quais o sujeito pode se basear para aplicar os teoremas-em-ação.

As *representações simbólicas* são manifestações da linguagem, da forma de se expressar do sujeito, as quais são usadas para dar forma ao conteúdo dos invariantes operatórios, realizar o compartilhamento social dos conceitos-em-ação e dos teoremas-em-ação. No contexto dos estudos psicológicos de Piaget e Inhelder (1959, 1962, 1968) os invariantes operatórios constituem os significados atribuídos aos conceitos pelo sujeito, enquanto as representações simbólicas constituem os significantes.

No estudo de Cardoso, Kato e Oliveira (2013), por exemplo, os autores constataram que há semelhança entre os raciocínios utilizados na resolução de problemas sobre matrizes pelos participantes, estudantes de graduação, com raciocínios válidos para números inteiros. Para os estudantes, o significado das operações para números inteiros, aparentemente, foi precocemente generalizado para matrizes, ainda que os significantes não fossem os mesmos.

Ao propor a Teoria dos Campos Conceituais, Gérard Vergnaud se concentra na questão dos invariantes, enquanto significados, procurando trazer o foco para a questão do ensino de conceitos matemáticos, e aproximando a proposta teórica de Piaget com os estudos precedentes que relacionam pensamento e linguagem de Vygotski (1934).

Grossi (2017) chama de pós-construtivistas aqueles estudos que se baseiam em resultados obtidos após as pesquisas clássicas de Jean Piaget, dentre os quais se encontra a Teoria dos Campos Conceituais. Segundo Grossi (2017), os esforços pós-construtivistas sobre o desenvolvimento cognitivo propõem um olhar mais acurado para o fato de que o processo de aprendizagem de cada indivíduo não coincide com a organização lógica do conhecimento.

Para Moreira (2017):

> A teoria de Vergnaud parece ser, então, um bom referencial para análise das dificuldades dos alunos na resolução de problemas em ciências e, consequentemente, da Conceitualização em ciências. Tais dificuldades poderiam, por exemplo, ser examinadas em termos de Invariantes Operatórios, quer dizer, em termos de quais os conceitos e teoremas-em-ação que os estudantes estariam usando na resolução de problemas e de quão distantes estariam dos conceitos e teoremas científicos adequados à resolução do problema em pauta.

Segundo Vergnaud (2017b, p. 53-54), a importância de sua teoria reside no fato de estabelecer maior vínculo entre os conceitos e os problemas ligados aos conceitos, o que é comumente objeto de estudo dos didatas. Particularmente na Didática da Matemática, há um interesse maior em demonstrar a necessidade do aprendizado dos conceitos. Segundo Vergnaud (2017), nem Piaget nem Vygotski se dedicaram suficientemente por esta questão.

De acordo com a teoria desenvolvida por Vergnaud, podemos dizer que as operações de adição e subtração estão fortemente relacionadas, e que existem vários tipos de problemas aditivos. É interessante ressaltar que a Teoria dos Campos Conceituais influenciou fortemente a elaboração de avaliações em larga escala. No Brasil, por exemplo, existe uma forte relação entre os tipos de problemas apresentados acima e as questões da Provinha Brasil de Matemática (INEP, 2017). Um exemplo é o modo como os problemas aditivos estão organizados na Provinha Brasil, divididos em problemas de juntar, acrescentar, separar, retirar, completar e comparar, o que é uma referência direta à Vergnaud (1985).

Apesar de estas categorias estarem aparentemente mais direcionadas para discussões teóricas sobre a aprendizagem de situações que envolvem problemas aditivos, a repercussão da Teoria dos Campos Conceituais no âmbito educacional prático pode ser ilustrada pelo papel que exerceu na concepção de aprendizagem presente em alguns documentos oficiais brasileiros, como os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1997) e a Provinha Brasil de Matemática (INEP, 2017).

Como destaca Vergnaud (2011), as abordagens mais atuais da Teoria dos Campos Conceituais estão baseadas em processos cognitivos de "longo prazo", ou seja, voltados para a consolidação de *competências*, mais do que contextos pontuais de aprendizagem.

Nesta nova perspectiva, Vergnaud (2011) tem destacado bastante a ideia de que as *filiações* e *rupturas* desempenham um papel fundamental na aprendizagem, tanto da criança que está tomando um primeiro contato com determinados conceitos, quando do adolescente que ainda apresenta dificuldades.

As filiações dizem respeito ao apoio das novas competências em competências já adquiridas anteriormente, enquanto as rupturas são caracterizadas pela renúncia de certas formas de agir para criar condições de tomada de consciência que favorecem o surgimento de novas competências.

Deste ponto de vista, nos resta investigar as filiações e rupturas que estão presentes para a evolução de competências relacionadas com o campo conceitual do pensamento algébrico.

4. Procedimentos Metodológicos

Esta é uma pesquisa de natureza experimental que segue uma abordagem qualitativa. Segundo Garnica (2004, p. 86), este tipo de pesquisa tem como principais características:

> (a) a transitoriedade dos seus resultados; (b) a impossibilidade de uma hipótese *a priori*, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; (c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; (d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que estas mesmas compreensões e também os meios de se obtê-las podem ser (re)configuradas; (e) a impossibilidade de se estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas.

Em síntese, pode-se dizer que a pesquisa qualitativa é caracterizada por se deter em um aprofundamento das características do fenômeno analisado, se distanciando da avaliação que segue parâmetros quantitativos para fundamentar a análise dos resultados.

Bogdan e Biklen (1994, p. 47-50) destacam cinco características principais da pesquisa qualitativa: 1) a fonte de dados é o próprio ambiente natural do fenômeno; 2) o foco do estudo tende a se aproximar de uma descrição dos objetos que constituem o fenômeno analisado; 3) os processos assumem um papel importante da análise; 4) uso maior de métodos indutivos para formular considerações e conclusões; e 5) esforço maior para a compreensão dos significados, em detrimento de características objetivas dos fenômenos.

O presente estudo fundamenta-se nos critérios de pesquisa qualitativa estabelecidos por Garnica (2004), e também por Bogdan e Biklen (1994). Além disso, a natureza da questão de pesquisa que se pretende responder neste estudo pressupõe a exigência de uma resposta baseada predominantemente nos aspectos qualitativos da problemática envolvida.

A metodologia de produção e análise de dados utilizada neste trabalho foi o Método Clínico de Piaget, o qual é descrito sistematicamente por Delval (2001). Tal método passou por várias modificações, conforme os estudos sobre o desenvolvimento evoluíram no grupo de pesquisa de Jean Piaget.

Uma primeira versão do método, proposta em meados da década de 1920, utilizava a entrevista como principal ferramenta para rastrear a essência do pensamento infantil. Nessa versão, a conversa aberta era utilizada como um caminho para obter respostas espontâneas das crianças entrevistadas. No entanto, como posteriormente Piaget viria a se interessar por investigar o desenvolvimento do pensamento da criança desde seus primórdios, surgiu a necessidade de desenvolver um método não-verbal de coleta de dados. Foi por isso que nos anos 1930, Piaget passou a utilizar uma versão não-verbal do Método Clínico, na qual a observação exaustiva das atitudes dos seus próprios filhos tornou-se o principal procedimento de coleta de dados.

A terceira fase de utilização do Método Clínico nas pesquisas sobre Epistemologia Genética aconteceu entre 1940 e 1955, período em que Piaget estuda mais detalhadamente o desenvolvimento das estruturas lógicas da criança. Nos livros publicados nessa época é utilizado um método de coleta de dados baseado na manipulação e na formalização, seguida de entrevista. Era comum que se pedisse para as crianças participantes que realizassem uma determinada tarefa e, em seguida, explicassem a ação realizada, partindo do pressuposto de que a explicação é um complemento da ação. Segundo Delval (2001, p. 67), o Método Clínico utilizado por Jean Piaget pode ser caracterizado da seguinte forma:

> Partimos do suposto de que o método clínico é um procedimento para investigar como as crianças pensam, percebem, agem e sentem, que procura descobrir o que não é evidente no que os sujeitos fazem ou dizem, o que está por trás da aparência de sua conduta, seja em ações ou palavras. Dado que muitas vezes o método clínico consiste em conversas com o sujeito, tende a ser identificado frequentemente com um método de entrevista verbal, de puras conversas com as crianças. Contudo, como já assinalamos, isso não é verdade e presume apenas uma visão superficial, visto que a essência do método não está na conversa, mas sim no tipo de atividade do experimentador e de interação com o sujeito.

Para o autor, a essência do Método Clínico é a intervenção sistemática do pesquisador na ação do sujeito participante, a fim de que ele explique suas ações.

Delval (2001, p. 70) também descreve as principais características da terceira versão do método, que é utilizada nesta pesquisa para coleta e análise dos dados referentes às atividades de manipulação-formalização propostas aos sujeitos participantes. Ele resume da seguinte forma a aplicação desta versão do método:

> Entrevista-se o sujeito sobre transformações que se produzem nos objetos que tem diante de si. As ações que o sujeito realiza e suas explicações nos informam sobre suas ideias. A conversa com o sujeito serve para dar-lhe instruções e nos ajuda a interpretar o sentido que ele faz.

O Método Clínico de Manipulação-Formalização foi utilizado nesta pesquisa com o intuito de rastrear a essência do pensamento algébrico dos participantes, enquanto executavam procedimentos para tentar resolver os problemas propostos.

4.1 Método Clínico de Manipulação-Formalização

A aplicação do Método Clínico de manipulação-formalização envolvendo as principais ideias de pensamento algébrico aconteceu por meio de quatro atividades: 1) problema da balança; 2) copos comutativos; 3) álgebra das mesas; 4) problemas das balas. A seguir, cada um destes experimentos será descrito em detalhes. Estas atividades foram inspiradas em problemas do trabalho de Blanton *et al*. (2015).

Atividade 1 (problema da balança): Quatro potes de plástico, preenchidos com bolinhas de argila não visíveis para o participante, são distribuídos igualmente em duas balanças eletrônicas. Pede-se para o participante equilibrar os pesos, de modo que a soma dos dois pesos de uma das balanças seja equivalente a soma dos pesos da outra. Três dos potes contêm uma etiqueta com a quantidade de bolinhas de argila que estão em seu interior, e um deles apresenta apenas um ponto de interrogação no rótulo. Pergunta-se ao participante quantas bolinhas estão contidas no pote com ponto de interrogação. Ressalta-se que para os primeiros doze participantes, os três rótulos identificados com as quantidades foram os seguintes: um, quatro e cinco, sendo dois o valor da incógnita. A partir do décimo terceiro participante, os números identificados foram: um, dois e três, sendo quatro o valor da incógnita.

A troca de valores foi realizada devido ao fato de as entrevistas com os últimos doze participantes terem sido realizadas alguns dias após as entrevistas com os doze primeiros estudantes, o que provocou receio nos pesquisadores de os estudantes comentarem sobre a atividade realizada neste intervalo de tempo entre as duas coletas de dados, e assim prejudicar a segunda etapa da coleta. A troca dos pesos foi importante para surpreender os participantes, no caso de eles previamente já estar a par das quantidades que estariam envolvidas na atividade.

Figura 3 - Material de Aplicação da Atividade 1

Fonte: Autoria própria.

Atividade 2 (copos comutativos): Uma certa quantidade de bolinhas de gude (que variou para cada participante do experimento) é distribuída desigualmente em dois copos de plástico, um verde e outro azul. Em seguida, pergunta-se para o participante o número total de bolinhas. Depois troca-se os copos de lugar e pergunta-se para o participante se a quantidade total de bolinhas permanece a mesma, com o intuito de avaliar o nível de compreensão da propriedade comutativa da operação aditiva.

Seguindo a ideia dos autores, ao propor a atividade 2, é possível avaliar a capacidade do participante de "análise de informações para desenvolver uma conjectura sobre uma relação aritmética; desenvolvimento de justificativa ou argumento (utilizando ideias empíricas ou partindo de representações) para sustentar a conjectura; identificação de valores para os quais a conjectura é verdadeira; verificações de condições que tornam a generalização (de uma propriedade) verdadeira para todos os números em um dado domínio".

Figura 4 - Material de Aplicação da Atividade 2

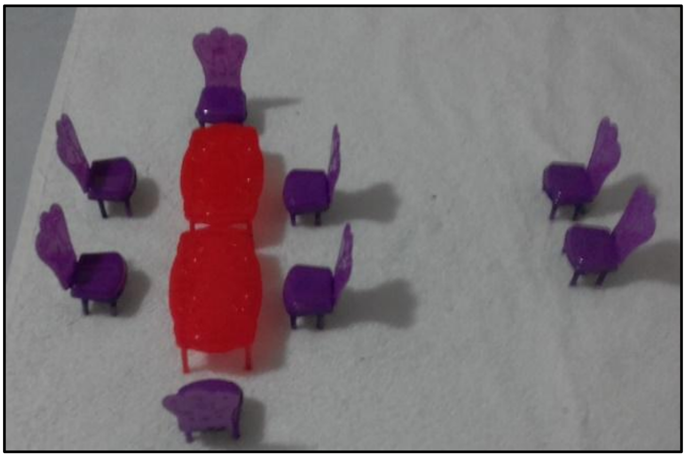
Fonte: Autoria própria.

Atividade 3 (álgebra das mesas): Propõe-se uma situação fictícia na qual um garoto, Bruno, convidou seus amigos para uma festa de aniversário. Ele quer ter certeza de que todos terão lugar para sentar. Na casa de Bruno há uma mesa retangular com quatro lugares, mas ele teve a ideia de juntar outra mesa. Pergunta-se ao participante quantos amigos poderão sentar com duas mesas juntas. Em seguida, aumenta-se gradativamente o número de mesas para analisar a capacidade de prever resultados do participante, a fim de captar a forma como ele percebe a regra que se forma quando o número de mesas aumenta, e também se consegue identificar que existe uma relação entre o número de mesas e de lugares.

A atividade 3 foi adaptada de uma situação apresentada por Blanton *et al*. (2015), na qual os autores pretendiam abordar, ao mesmo tempo, duas principais noções algébricas: recursividade algébrica e padrão algébrico. Como esta atividade é referente a duas grandes ideias algébricas, dividimos a análise em duas partes, que denominamos 3A e 3B, como pode ser visto no capítulo de resultados e discussões, a seguir.

A diferença da atividade 3A para a atividade 3B é que a 3A é focada na ideia de regularidade, de recursão, de processo iterativo, que utiliza um raciocínio anterior para projetar uma grandeza em um momento futuro, enquanto a atividade 3B é centrada na ideia de padrão, ou seja, de formalização de uma regra que relaciona duas grandezas, menos focada no processo e mais próxima de uma visão geral algorítmica que garante a previsibilidade do tempo futuro da experiência.

Figura 5 - Material de Aplicação da Atividade 3



Fonte: Autoria própria.

Atividade 4 (problema das balas): Propõe-se uma situação fictícia na qual um garoto, João, quer comprar balas. João precisa de 5 centavos para comprar 2 balas. Pergunta-se ao participante quanto vai custar se João quiser comprar 12 balas. Em seguida, pede-se que o participante explique como chegou na resposta, utilizando inclusive o material que é apresentado a ele. No final da atividade o pesquisador presenteia o participante com algumas balas utilizadas no experimento. Em alguns casos, principalmente com participantes que estudavam na mesma turma, trocava-se a quantidade de 12 balas por 6, 8 ou 10 no enunciado, a fim de eliminar a possibilidade de acerto por conhecimento prévio da resposta.

Figura 6 - Material de Aplicação da Atividade 4

Fonte: Autoria própria.

É importante ressaltar que a aplicação das atividades foi realizada na ordem que apresentamos nesta seção, para cada participante. Não foram exploradas as variações na ordem de aplicação. Sendo assim, os resultados obtido a partir deste estudo estão no escopo desta ordem de sucessão dos experimentos. Apenas em caráter ilustrativo, um exemplo de entrevista completa é apresentado no Apêndice 1 desta tese, com todas as etapas da aplicação dos experimentos transcritas.

4.2 Participantes

Os participantes da pesquisa foram 24 alunos do 3º ano do Ensino Fundamental (14 meninos e 10 meninas). O estudo foi realizado em uma escola pública localizada na periferia de um município do interior do estado do Rio Grande do Sul. A escolha por estudantes do 3º ano ocorreu porque este é o final do Ciclo de Alfabetização, e, além disso, as quatro atividades aplicadas nesta pesquisa foram adaptadas do trabalho de Blanton *et al*. (2015), que também utiliza sujeitos do nível escolar equivalente.

Esta é a etapa final do ciclo de alfabetização, na qual os estudantes presumidamente devem sair alfabetizados matematicamente, e com aquisição de habilidades iniciais do pensamento algébrico.

É importante ressaltar que nas turmas participantes não havia casos de altas habilidades, nem de dificuldades de aprendizagem diagnosticadas formalmente, de modo que os estudantes não apresentavam dificuldades ou facilidades extremas para agir nas situações propostas.

A coleta de dados foi toda realizada na mesma escola, com duas turmas de professoras diferentes. Vinte e quatro estudantes participaram do estudo, doze em uma tarde e mais doze em outra tarde. No primeiro dia foram entrevistados doze estudantes da mesma turma, e no segundo dia de coleta de dados foram entrevistados três estudantes da turma na qual foi realizada a primeira coleta, e mais nove estudantes de outra turma.

4.3 Método para Análise de Dados

Com relação à análise do pensamento dos estudantes, seguimos os procedimentos apontados por Delval (2001, p. 166): 1) categorização (tendências baseadas nos termos e expressões utilizadas pelos sujeitos); 2) agrupamento das Categorias (relação das categorias construídas com as hipóteses iniciais); 3) validação qualitativa das categorias (comparação das respostas dos sujeitos e conferência geral das categorias); 4) definição dos níveis de respostas (verificação de sobreposição categórica e diferenciação clara das categorias construídas).

As categorias foram construídas a partir dos dados coletados, sem um direcionamento *a priori*, por parte dos pesquisadores. Este tipo de abordagem para categorização segue a ideia de categoria emergente descrita por Fiorentini e Lorenzato (2006), no sentido fenomenológico.

Seguindo a sugestão de sequência de procedimentos de Delval (2001), juntamente com suas respectivas descrições, na etapa de validação qualitativa as categorias emergentes da coleta de dados foram apresentadas a uma pessoa que não participou do trabalho de pesquisa. É comum em pesquisas que utilizam o Método Clínico denominar esta pessoa de *juiz*.

Em nossa pesquisa, a pessoa convidada para ser o *juiz* é estudante de Licenciatura em Matemática, tendo participado de algumas pesquisas na área de Educação Matemática, porém sem experiência ou conhecimento detalhado do Método Clínico.

Logo após a apresentação das categorias e suas descrições ao *juiz*, apresentamos um representante sorteado de cada categoria, em uma ordem aleatória, de modo que a ordem das categorias não coincidisse, necessariamente, com a ordem de apresentação dos diálogos. Em cada trecho das falas apresentado, perguntava-se para a participante externa a qual categoria cada fala pertencia, esclarecendo que era possível uma categoria conter mais de uma fala, e inclusive não conter nenhuma (caso que não ocorria). Não houve diferença entre a categorização realizada pelos pesquisadores e a categorização realizada pelo juiz, o que indica a plausibilidade das escolhas realizadas no processo de construção e agrupamento das categorias.

5. Resultados e Discussão

Neste capítulo são apresentados e discutidos os resultados da pesquisa. As seções foram organizadas de acordo com as principais noções algébricas, seguindo a classificação de Blanton *et al*. (2015), porém com as adaptações terminológicas propostas no capítulo anterior, e ainda, uma caracterização dos invariantes operatórios algébricos das crianças: 5.1 Equilíbrio Algébrico; 5.2 Generalização Algébrica; 5.3 Recursividade Algébrica; 5.4 Padrão Algébrico; 5.5 Proporcionalidade Algébrica; 5.6 Caracterização dos Invariantes Operatórios Algébricos.

A etapa de categorização foi baseada nos procedimentos apresentados pelos estudantes e pelas expressões verbalizadas por eles durante a aplicação das atividades. Procedimentos semelhantes foram classificados pelo mesmo código, ou seja, designados como pertencentes a uma mesma categoria. Em seguida, foi realizado o agrupamento das categorias, que consistiu em reunir dados de mesmo código.

Para cada uma das principais noções algébricas, foi apresentada uma situação aos estudantes, as quais exigiram deles a execução de procedimentos manipulativos com os materiais disponibilizados. Tais procedimentos foram agrupados em categorias. Sendo assim, essas categorias emergiram da coleta de dados.

Estratégias mentais de pensamento algébrico já conhecidas na literatura (BLANTON; KAPUT, 2005; BLANTON *et al.*, 2015) foram consideradas para construir uma escala de níveis de procedimentos, a qual inicia pelos procedimentos mais intuitivos e aleatórios e culmina nos mais sofisticados.

5.1 Equilíbrio Algébrico

Nesta seção apresentamos os resultados da pesquisa, no que diz respeito aos diferentes significados do sinal de igualdade. A ideia de igualdade como forma de equilíbrio entre duas quantidades foi explorada na Atividade 1.

5.1.1 Procedimentos Equacionais

O Quadro 1, a seguir, apresenta o detalhamento da Atividade 1, que representa aqui a habilidade da criança de agir em situações que envolvem equilíbrio algébrico, mais particularmente, neste caso, no que diz respeito aos diferentes significados do sinal de igualdade. Embora as atividades já tenham sido apresentadas no capítulo que trata dos procedimentos metodológicos, consideramos pertinente trazê-las novamente ao leitor neste capítulo a fim de facilitar o acompanhamento da análise a partir dos dados obtidos por meio das respostas dadas pelos participantes.

Quadro 1 – Atividade 1

Equilíbrio Algébrico
<u>Atividade 1 (problema da balança)</u>: Quatro potes de plástico, preenchidos com bolinhas de argila não visíveis para o participante, são distribuídos igualmente em duas balanças eletrônicas. Pede-se para o participante equilibrar os pesos, de modo que a soma dos dois pesos de uma das balanças seja equivalente à soma dos pesos da outra. Três dos potes contêm uma etiqueta com a quantidade de bolinhas de argila que estão em seu interior, e um deles apresenta apenas um ponto de interrogação no rótulo. Pergunta-se ao participante quantas bolinhas estão contidas no pote com ponto de interrogação. Ressalta-se que para os primeiros doze participantes, os três rótulos identificados com as quantidades foram os seguintes: um, quatro e cinco, sendo dois o valor da incógnita. A partir do décimo terceiro participante, os números identificados foram: um, dois e três, sendo quatro o valor da incógnita.

Fonte: Autoria própria.

A primeira categoria de procedimentos que consideramos relevante apresentar é a que denominamos de *Escolha-Aleatória*. Esta categoria se caracteriza pela ausência de um procedimento bem definido para agir na situação proposta, na qual o estudante apenas sugere um número para que possa cumprir sua participação, não seguindo uma linha de pensamento operacional. No Quadro 2 são apresentados alguns trechos de falas que ilustram os procedimentos característicos da categoria Escolha-Aleatória[2].

Quadro 2 – Categoria Escolha-Aleatória

Escolha-Aleatória	[7] _Quantas tu acha que tem aqui nessa caixinha? _*Duas.* _Como tu sabe que é duas? _*Não sei.* _Se quiser pegar as maletinhas, pode pegar também (mas o estudante decide não pegar os potes). Como tu fez para chegar no dois? _*Contando de dois em dois.* [11] _Quantos tem nesta caixinha aqui? _*Três.* _Como tu sabe que é três? _*Não sei explicar.* _Tu fez alguma conta? _*Não.*

Fonte: Autoria própria.

É importante ressaltar que na elaboração do problema chamamos de *potes* o material utilizado, mas ao longo da entrevista, tanto o pesquisador como os participantes passaram a se referir aos *potes*, chamando-os de *caixas* ou *caixinhas*. Portanto, para informação do leitor, na análise da Atividade 1, os termos *pote*, *caixa* e *caixinha* são considerados sinônimos.

O procedimento utilizado pelo estudante [7], que disse ter chegado à resposta contando de dois em dois, ainda que não houvesse diferença em agrupar as quantidades, pareceu uma justificativa para que as perguntas cessassem, porém sem o desenvolvimento de uma linha de pensamento bem definida. O estudante [7] aparentemente não atribuiu importância à resposta do problema proposto. A estudante [11] reagiu às perguntas de forma semelhante. Ambos os estudantes realizaram estimativas diretas, sem considerar formas de pensar mais elaboradas para chegar à resposta.

A categoria *Pega-Caixa* (Quadro 3) apresenta procedimentos que se basearam principalmente no contato físico dos estudantes com os potes. Para eles, o critério de determinação da quantidade de bolinhas de argila contidas nos potes era unicamente o peso dos potes, não admitindo soluções envolvendo algum tipo de operação aritmética.

---

[2] Os números entre colchetes se referem aos participantes, na ordem em que as entrevistas foram realizadas. Os trechos em itálico constituem as respostas dadas pelos sujeitos participantes da pesquisa. O restante das falas, ou seja, sem itálico, foram realizadas pelo pesquisador, enquanto entrevistava as crianças.

Quadro 3 – Categoria Pega-Caixa

Pega-Caixa	[2] _Quantas bolinhas tu acha que tem nessa caixa aqui? _(pega a caixa com ponto de interrogação e sacode perto do próprio ouvido) *Duas, não, três.* _Duas ou três? Só vale uma. _*Duas.* [6] _Quantas bolinhas deve ter nessa caixinha aqui? _*Deve ter acho que umas três.* _Como é que tu sabe que é três? _*Por causa do peso que a gente sente.* [8] _Aqui tem quatro bolinhas de argila, e nesta aqui eu não sei. _*Duas!* _Como é que tu sabe que é duas? _*É que eu também balancei olha* (e balança a caixa com ponto de interrogação), *não uma só.* _Uma ou duas? O que tu acha? _*Ah, são duas.* _Mas teve colegas teus que disseram que tem três, tu acha que eles tão certos ou tão errados? _*Acho que alguns tão certos e outros tão errados*. _Quem tá errado, quem disse que tem três ou quem disse que tem dois? _*Acho que tem duas.* _Esta é tua resposta final, duas? _*Sim.* [9] _Aqui tem quatro, quantas tu acha que tem aqui? _*Uma.* _Como é que tu sabe que tem uma? _(balança a caixa próximo do ouvido) *Por causa do peso, dá para ver que é uma.* _Tu fez as contas? Tem colega teu que disse que tem mais. _*Não, eu acho que tem uma. Não tem duas.* _Pelo barulho? _*Sim.* [10] _Quanto tu acha que tem nessa caixinha? _(balança a caixinha próximo ao ouvido) *Uns dois*. _Por que tu acha que tem dois? _*Porque eu acabei de empurrar para cá e eu acho que tem dois.* _Tá bom, teve colega teu dizendo que deu um, teve colega dizendo que deu três, tu acha que tem dois? _*Eu acho que tem dois*. [12] _Quantas bolinhas tem aqui (apontando para a caixa com a interrogação no rótulo)? _*Quatro*. _Como tu sabe que é quatro? _*Não, não sei. Pelo peso. Eu posso ver o tamanho dessa?* _Pode pegar, só não pode abrir. _(balança a caixa próximo do ouvido) *É uma bolinha, mas é grande.* [13] _Quantas bolinhas tu acha que tem nessa caixa aqui? _*Acho que tem umas cinco*. _É por causa do peso da caixa? _*Sim. Não, tem nove*. _Cinco ou nove? _*Não sei*. [14] _Aqui tem uma, aqui tem duas, aqui tem três e aqui eu não sei, quantas tu acha que tem aqui? _*Pode fazer isso?* (balançando a caixa). _Pode. _*Quatro*. _Pelo peso? _*É*. _Tu fez alguma conta? _*Não*. [16] _Aqui tem uma, aqui tem três e aqui tem duas, quantas tu acha que tem aqui? _*Quatro*. _ Como é que tu sabe que é quatro? _*Pelo peso*. _Tu pegou a caixinha e sentiu o peso? _*É mais pesada que essa* (pega a caixa com três no rótulo). *Dessas aqui ela é a mais pesada*. _Mas poderia ser cinco, não é? Tem certeza que é quatro? (o participante testa todas as caixas e compara os pesos). _*Não parece ter três*. *Não, aqui tem cinco*. [17] _Quantas tu acha que tem nessa caixa? _*Uma, não, deixa eu vê. Três.* _Por que três? _*Pelo peso*. (e depois o participante confere todas as caixas). _E aí, quanto tu acha que tem? _*Quatro*.

	[18] _Aqui tem uma, aqui tem duas e aqui tem três, quantas tu acha que tem aqui. _*Quatro*. _Como é que tu sabe que tem quatro? _*Ah, não sei, eu acho que tem quatro*. _Foi pelo peso, como é que foi? _*Foi pelo peso*. _Tu fez alguma conta? _*Não*. [19] _Quantas bolinhas tu acha que tem nessa daqui? _*Três*. _Tu fez alguma conta, alguma coisa assim? Ou tu tá mais ou menos vendo o peso da caixa? _*Quando eu peguei a três, eu vi o peso que ela era, daí eu peguei essa aqui e vi que era o mesmo peso da três*. _E se eu te dissesse que dá para fazer alguma conta para saber quanto tem aqui exatamente, que conta tu faria? _*Não sei*. [20] _Quantas bolinhas tu acha que tem aqui dentro? _*Quatro*. _Como é que tu sabe que é quatro? _*Porque deu para ver a diferença que tem aqui, chegava a quase quatrocentos* (medida na balança), *e quando tem aquele três não chegava*. _Então tu viu pelo peso aqui na balança? _*É*. [21] _Quantas tu acha que tem aqui? _*Hã, cinco*. _Por que tu acha que tem cinco? _*Porque eu acho*. _Que conta tu tá fazendo, tu tá fazendo alguma conta? _*Pelo peso*. _Tu acha que esse aqui é mais pesado do que os outros? _*É*. [22] _Quanto vale esse aqui (apontando para a caixa com número desconhecido de bolinhas de argila)? _*Tudo junto, tem seis.* _Tudo junto? _*É*. _Tu fez o que? Três mais dois mais um? _*É*, *não sei*. _Tu pode ver pelo peso, quantas tem nessa aqui, só (apontando para a caixa com valor desconhecido)? (o participante se mostra pensativo). _Tu pode ver pelo peso, pode pegar as caixas. (o participante pega as caixas e testa os pesos). _*Acho que aqui tem duas. Não, acho que tem uma. Uma*. [24] _Quantas tu acha que tem nessa aqui? _*Quatro*. _Como é que tu sabe que é quatro? Tu fez alguma conta? É pelo peso? Tu pode pegar, se tu quiser, as caixinhas. _*É, quatro, ou cinco*. _tu tá em dúvida pelo peso? _*É, pode ser*. _Teve colega teu que disse que dá menos. Tu acha que eles tão errados? _*Não sei, eu acho que sim*. _Então quantas tu acha que tem aqui? Quatro ou cinco? _*Cinco*.

Fonte: Autoria própria.

A grande maioria dos entrevistados desta categoria optou por tentar descobrir o número de bolinhas de argila da caixa não identificada pelo peso, às vezes comparando com as outras, como no caso dos estudantes [16], [17] e [21], às vezes pelo barulho, como no caso da estudante [9]. Poucos estudantes observaram as relações entre as quantidades, talvez o estudante [20] tenha chegado o mais próximo disso, pois ele compreendeu que poderia usar a informação do peso do pote para responder a pergunta, mas este procedimento só serviu como um meio de testar se a caixa com a interrogação era a mais pesada, o que se mostrou uma forma eficiente de definir qual o mais pesado.

É importante destacar também que os procedimentos adotados pelos participantes da categoria Pega-Caixa foram os mais rapidamente colocados em prática, de modo que isso pode nos levar a inferir que este seja o procedimento mais intuitivo, que ocorreu quase instantaneamente por aqueles que o utilizaram.

A categoria *Por-Exclusão* (Quadro 4) abrange procedimentos que se basearam na necessidade lógica dos estudantes em operar com uma sequência ininterrupta de números. Nos procedimentos adotados pelas respostas desta categoria, não seria permitido "pular números".

Quadro 4 – Categoria Por-Exclusão

Por-Exclusão	[4] _Quantas bolinhas tu acha que vai ter aqui nesta caixa? _(pega a caixa na mão e balança próximo ao próprio ouvido) *Quatro.* _Como é que tu pensou para fazer? _*Era assim* (balançando a caixa). *Tem quatro, quer ver ó* (pega a caixa com rótulo "4", coloca em uma das balanças, e em seguida, põe a caixa de peso desconhecido na outra balança). *Não, não tem quatro* (testa todas as outras em seguida)*, tem três bolinhas aqui.* _Como é que tu pensou? _*Porque nenhum aqui é igual*. [5] _Nessa caixa eu não disse quantos tem, na verdade eu não sei também, queria que tu tentasse, de alguma maneira, responder. _*Dois*. _Como é que tu sabe que é dois? _*Porque não tem dois em nenhuma.* [15] _Quanto que vale o ponto de interrogação ali que eu não sei? _*Tem quatro*. _Como tu sabe que é quatro? _*Porque ali tem um, dois, três, só falta o quatro*. [23] _Quantas tu acha que tem aqui? _*Eu acho que tem quatro, eu não sei*. _Como é que tu sabe que tem quatro? _*Se esse é um, esse dois, e esse é três, então esse só pode ser quatro*. _Como é que tu sabe? _*Ah, pela ordem, não sei*. _E não poderia ser cinco? Por que não poderia ser cinco? _*Porque aí eu acho que não estaria na ordem*.

Fonte: Autoria própria.

A expressão "pela ordem", usada pelo estudante [23] indica que a criança que utiliza procedimentos da categoria Por-Exclusão adota uma lógica interna, na qual certa regra deve reger a construção da sequência. Neste caso, parece que a sequência não poderia repetir, nem pular números. Esta necessidade lógica de completar a sequência aparece também na fala da estudante [15], o que pode ser percebido pelo uso da expressão "só falta", na fala do estudante [4] quando usa a expressão “porque nenhum aqui é igual”, e também na fala da estudante [5], quando justifica dizendo “porque não tem dois em nenhuma”.

Tendo em vista que os rótulos foram alterados após a aplicação da atividade para os doze primeiros participantes, e que na segunda aplicação os rótulos eram um, dois e três; acreditamos que a mudança dos números nos rótulos não influenciou a maneira de pensar dos participantes que utilizaram a categoria de procedimentos Por-Exclusão, já que de qualquer forma, em ambas as sequências, a incógnita é um número natural diferente dos demais, os quais formam uma sequência de sucessores, apesar de não haver um motivo estritamente lógico ou físico para que na sequência não pudesse haver números repetidos.

Destaca-se que as regras matemáticas utilizadas pelos participantes que adotaram procedimentos do tipo Por-Exclusão, não foram enunciadas pelo pesquisador, nem estavam explícitas no material de manipulação apresentado.

A categoria *Compensação* (Quadro 5) compreende procedimentos que se basearam no cálculo mental de busca por valor desconhecido, no sentido discutido por Beck e Silva (2016), levando em consideração o equilíbrio dos potes nas balanças, e a relação matemática existente entre os potes. Este tipo de procedimento se mostrou bastante sofisticado, tendo em vista que envolve várias habilidades aritméticas e a percepção de valor desconhecido, que caracteriza situações de pensamento algébrico.

Quadro 5–Categoria Compensação

Compensação	[1] _Quantas bolinhas tu acha que tem aqui nesta caixa com ponto de interrogação? _*Acho que tem duas*. _Como é que tu sabe que tem duas? _*Eu também não sei, mas eu acho que tem, mas eu não consigo explicar.* _Mas tu pode tentar só me dizer como é que tu pensou? _*Eu acho que tem duas porque já que aqui deu quase a quantidade daqui* (apontando para as caixas contendo os rótulos “1” e “5”, e logo em seguida, para as caixas com rótulos “4” e “?”)*, eu acho que tem um pouco ... um pouco menos que tem dessa* (apontando para a caixa com rótulo “4”)*, para dar a mesma coisa dali.* [3] _Quantas bolinhas de argila tem aqui nessa caixa. _*Se desse lado aqui tem seis, aqui tem mais duas bolinhas, ou mais uma.* _Como é que tu pensou para fazer? _*Porque se aqui tem cinco e aqui tem mais uma, deu mais do que aqui, então esse aqui deve ter bolinha a menos.* _Então quantas bolinhas tem nesta caixa aqui que é interrogação? _*Nessa daqui tem duas*.

Fonte: Autoria própria.

As expressões “para dar a mesma coisa dali”, utilizada pela estudante [1], e “então esse aqui deve ter bolinha a menos”, usada pelo estudante [3] indicam o uso do critério de que o equilíbrio deveria ser mantido. Embora sejam procedimentos baseados em estimativas, representam uma evolução importante no sentido do reconhecimento da relação de equilíbrio entre duas medidas.

Os raciocínios que fundamentaram os procedimentos que compõem a categoria Compensação permitiram que os estudantes ficassem mais atentos no fato de buscar o valor desconhecido do que nas operações aritméticas ou nas propriedades físicas envolvidas no problema. Ainda que tenham estimado, e não realizado cálculos exatos, os procedimentos desta categoria se mostraram eficientes.

5.1.2 Discussão dos Procedimentos à Luz das Estratégias

As categorias construídas para situações envolvendo equilíbrio algébrico através da coleta de dados levaram em conta aquilo que foi efetivamente obtido das falas dos participantes. Nesta seção pretendemos aprofundar a relação entre os dados empíricos deste estudo com os tipos de estratégias já conhecidos da literatura, e mais especificamente, do estudo de Blanton *et al.* (2015), que buscou compreender o efeito de se introduzir atividades relacionadas com o pensamento algébrico no entendimento de estudantes dos anos iniciais. Segundo Blanton *et al.* (2015), os estudantes apresentam três tipos de estratégias frente às situações envolvendo equilíbrio algébrico, no que se refere aos diferentes significados do sinal de igualdade em equações: operatórias, computacionais e estruturais.

As estratégias *operatórias* consistem em focar apenas na operação aritmética a ser realizada entre os números. Por exemplo, ao se deparar com uma equação do tipo 7+3=_+4, a criança não hesita em preencher a lacuna com 10, pois entende que o sinal de igualdade cumpre a função de indicar que, logo em seguida, deve-se escrever o resultado da operação de adição entre os números 7 e 3.

As estratégias *computacionais* são caracterizadas por um tímido reconhecimento de que as quantidades dos dois lados do sinal de igualdade devem ser iguais, porém não há necessidade de que ambos os lados da igualdade sejam literalmente igualados a um mesmo resultado, possibilitando a conclusão de que ambos são iguais pela explicitação de um resultado de referência. Por exemplo, se perguntarmos a uma criança por que 7+3=6+4, e ela justificar esta afirmação dizendo que “é porque 7+3=10 e 6+4=10 também”, pode-se dizer que ela está usando uma estratégia computacional no entendimento do sinal de igualdade como equilíbrio entre duas quantidades, usando, para isso, o 10 como referência.

As estratégias *estruturais* se caracterizam pelo reconhecimento de que o sinal de igualdade representa equilíbrio entre quantidades, e além disso, um recurso para prescindir do uso de um terceiro valor de referência para comparação literal com as quantidades da equação. Por exemplo, ao se deparar com a equação 7+3=_+4, uma criança que utiliza esse tipo de estratégia irá responder que a lacuna deve ser preenchida com 6, sem a necessidade de igualar 7+3=10 e 6+4=10, ou seja, sem a explicitação do resultado “10”, conotando assim o entendimento de que o sinal de igualdade permite representar o equilíbrio de forma mais resumida.

Como procedimentos *pré-operatórios*, consideramos aqueles relacionados com estratégias que não apresentam explicitamente uma relação de causalidade nos raciocínios utilizados para agir nas situações. É o caso dos procedimentos de Escolha-Aleatória e Pega-Caixa, os quais não consideram as relações entre as quantidades apresentadas.

Os procedimentos *operatório-computacionais* se relacionam com estratégias que apresentam algum tipo de relação entre as quantidades, mas ainda não em um nível compensatório, que seria o desejável para obter sucesso na atividade apresentada envolvendo a ideia de equilíbrio algébrico. Não foi possível constatar a presença de procedimentos referentes às estratégias estritamente operatórias, no sentido de entender o sinal de igualdade apenas como indicativo de resultado, pois não havia uma representação clara do que seria o sinal de igualdade na atividade. Talvez possamos pensar que se algum dos participantes tivesse simplesmente somado os valores de dois potes, aleatoriamente, isto caracterizaria uma estratégia operatória, mas isto não aconteceu.

Nas estratégias encontradas no trabalho de Blanton *et al*. (2015), o nível computacional se refere a um valor de referência que é obtido para os dois lados da igualdade, de modo que é imprescindível a representação explícita desse valor para que o sujeito se certifique da igualdade. Isto não aconteceu explicitamente, mas podemos dizer que o procedimento usado por alguns participantes de tentar encontrar a incógnita pela exclusão das outras quantidades se aproxima bastante dessa forma de pensar, no sentido de que, é o princípio de pensamento sobre a relação entre as quantidades.

Devido à ausência de estratégias puramente operatórias, e considerando, em um sentido mais amplo, as estratégias computacionais como uma primeira tentativa de relacionar as quantidades do problema, optou-se por classificar os procedimentos Por-Exclusão no mesmo tipo de estratégias, denominadas Operatórias-Computacionais.

Nas estratégias *Estruturais* do trabalho de Blanton *et al*. (2015), a característica marcante está na compensação entre as quantidades, indicando o entendimento de que o sinal de igualdade representa o equilíbrio das quantidades, se distanciando do conceito de "igualdade como resultado". Foi esta mesma característica que encontramos na categoria de procedimentos de Compensação em nosso experimento. Por isso, propomos a fusão entre a categoria Compensação (construída empiricamente neste trabalho a partir da coleta de dados) e o tipo Estrutural de estratégias de pensamento algébrico (BLANTON *et al*., 2015), em outro tipo de estratégias, que denominamos de Estruturais-Compensatórias.

É importante ressaltar que partimos do trabalho de Blanton *et al*. (2015) apenas para seguir uma referência, e ao mesmo tempo, criar condições de discutir questões relacionadas com o pensamento algébrico no âmbito dos estudos mais recentes sobre esta temática. Todavia, ressalta-se que tanto a construção quanto o agrupamento das categorias teve como principal eixo condutor os resultados da etapa da coleta de dados.

5.1.3 Níveis de Respostas e Invariantes Operatórios

Organizamos os níveis de respostas seguindo os diferentes tipos de estratégias, porém recuperando as características principais dos procedimentos que associamos com as estratégias na seção anterior. Os níveis levam em conta as estratégias, mas sua hierarquização se dá de acordo com a qualidade operatória de cada estratégia, isto é, níveis mais altos estão associados com estratégias mais sofisticadas.

Uma única subdivisão foi realizada, para as estratégias pré-operatórias, uma vez que foi constatada uma clara diferença de procedimentos, entre aqueles participantes que optaram por comparar os pesos dos potes, como os estudantes

[9], [16], [17], [20], [21]; e aqueles que apenas enunciaram uma quantidade, sem esclarecer a estratégia matemática utilizada para chegar ao resultado, como os estudantes [7] e [11]. Por isso, consideramos a estratégia Pré-Operatória como o Nível I de respostas, subdividido em IA (procedimentos de Escolha-Aleatória) e IB (procedimentos de Pega-Caixa).

A estratégia Operatória-Computacional constitui o nível II de resposta, caracterizado por apresentar indícios de relações de causalidade no pensamento da criança, e constituída pelos procedimentos Por-Exclusão. Neste nível o sujeito acredita que pode inferir o valor desconhecido a partir das relações entre as quantidades, se distanciando da ideia empírica de avaliar o peso dos objetos ou da estimativa sem nenhuma hipótese. No entanto, como se pode notar nos procedimentos usados pelos estudantes [4], [5], [15], [23]; a lógica interna da criança, com regras próprias, como “não pode repetir”, “tem que estar em sequência” falam mais alto, e a ideia de equilíbrio não é predominante como critério a ser utilizado para determinar a quantidade desconhecida.

Os procedimentos de compensação utilizados pelos estudantes [1] e [3] constituem a estratégia Estrutural-Compensatória, o nível mais avançado de respostas, no qual se percebe a importância que o sujeito dá ao equilíbrio entre as quantidades como critério de decisão para determinar a quantidade incógnita. Por isso, consideramos os procedimentos desta estratégia como o nível III de respostas. Os diferentes níveis de repostas, acompanhados pela descrição dos procedimentos que os caracterizam, estão sintetizados no Quadro 6, a seguir.

Quadro 6 – Níveis de Respostas da Atividade 1

Níveis	**Descrição dos Procedimentos de Equilíbrio Algébrico**
Nível IA	A criança não percebe o equilíbrio dos pesos como algo importante, nem tenta relacionar as quantidades, adotando critérios intuitivos e sem uma lógica explícita para encontrar o resultado. O subnível IA se caracteriza por a criança não adotar nem mesmo critérios empíricos, como balançar as caixas, por exemplo, para chegar ao resultado.
Nível IB	A criança não percebe o equilíbrio dos pesos como algo importante, nem tenta relacionar as quantidades, adotando critérios intuitivos e sem uma lógica explícita para encontrar o resultado. O subnível IB se caracteriza pela adoção de critérios mais empíricos, como pegar ou balançar as caixas, apresentado a estratégia de comparação, não a partir das quantidades, mas das propriedades físicas dos objetos.

Nível II	A criança não considera o equilíbrio de pesos importante para calcular a incógnita, mas tenta estabelecer relações entre as quantidades.
Nível III	A criança percebe que para encontrar o valor desconhecido é preciso compensar os dois lados da balança, ou seja, só é possível tentar encontrar a incógnita a partir do equilíbrio dos pesos.

Fonte: Autoria própria.

É importante esclarecer que estes níveis de respostas são relativos apenas às atividades que propomos na etapa qualitativa da pesquisa. Para delimitarmos os invariantes operatórios para as principais noções algébricas abordadas neste trabalho, deve-se realizar uma análise a partir de argumentos que levam em conta a caracterização de um campo conceitual (VERGNAUD, 1985, 1990, 1997).

Tendo em vista o objetivo geral da pesquisa, isto é, descrever e analisar os invariantes operatórios utilizados por estudantes do terceiro ano do Ensino Fundamental em situações que envolvem pensamento algébrico, nesta subseção os níveis de estratégias são agora reanalisados do ponto de vista da Teoria dos Campos Conceituais, a fim de que se possa compreender os invariantes operatórios utilizados. Na Figura 7 apresenta-se uma síntese dos procedimentos, estratégias e níveis de repostas para a situação de equilíbrio algébrico proposta.

Figura 7 – Procedimentos, Estratégias e Níveis de Equilíbrio Algébrico

Procedimento		**Estratégia**		**Nível**
Escolha-Aleatória	→	Pré-Operatória	→	IA
Pega-Caixa	→	Pré-Operatória	→	IB
Por-Exclusão	→	Operatória-Computacional	→	II
Compensação	→	Estrutural-Compensatória	→	III

Fonte: Autoria própria.

Podemos destacar a existência de alguns conceitos-em-ação e teoremas-em-ação a partir dos níveis de respostas das crianças frente ao problema envolvendo a ideia de equilíbrio algébrico.

Um primeiro teorema-em-ação que podemos destacar é “completar a quantidade que falta”, presente nas estratégias de nível II, caracterizado principalmente por um raciocínio de exclusão, ou seja, a partir de um modelo mental do que deveria ser a sequência das caixas contendo bolas de argila, os estudantes deduziam aquela que estava em falta. Muitos acertaram, ainda que não houvesse garantia nenhuma de que não haveriam quantidades repetidas. Assim, podemos considerar que um dos invariantes operatórios quando se trata de problemas de busca por valor desconhecido é a dedução por exclusão de quantidades que se apresentam. Podemos associar a este teorema-em-ação, o conceito-em-ação de “número que não se repete”, que nem sempre se mostrará eficaz, mas que é uma estratégia utilizada, segundo os dados desta pesquisa.

Outro teorema-em-ação constado neste estudo foi o de “encontrar a incógnita a partir do equilíbrio”, que é caracterizado pelo entendimento de que o equilíbrio entre as quantidades deve ser o raciocínio predominante na estratégia de resolução do problema, de modo que os cálculos aritméticos são importantes apenas depois de haver uma definição clara da estratégia para encontrar o valor desconhecido. Sendo assim, na resolução de problemas que envolvem equilíbrio algébrico, o conceito-em-ação de “equilíbrio dos pesos na balança” é o mais importante, pois é ele que dá sentido à situação do ponto de vista algébrico.

As representações utilizadas pelos participantes estiveram muito restritas ao plano mental. Podemos dizer que as representações de nível II se baseiam fortemente no conceito-em-ação “sequência sem números que se repetem”. A partir desse conceito, desenvolvem o teorema-em-ação “estabelecer relações entre quantidades”. No caso dos problemas propostos, este teorema-em-ação foi eficaz, mas poderia não ser para outras situações. A não generalidade deste teorema-em-ação se deve ao fato de partir de uma representação simbólica que acabou restringindo o problema a uma situação mais simples, sem considerar casos mais particulares.

Podemos dizer que o teorema-em-ação “encontrar a incógnita a partir do equilíbrio”, parte de um conceito-em-ação que amplia o espectro de respostas em relação às estratégias de nível II. O procedimento de “compensar”, do nível III, procura eliminar a dúvida sobre o equilíbrio, e havendo equilíbrio, há garantia de que o problema foi resolvido, pois o objetivo da situação é garantir que as caixas tenham o mesmo peso.

Por isso, o invariante operatório mais eficaz em situações envolvendo equilíbrio algébrico é "encontrar a incógnita a partir do equilíbrio", mas antes de tudo, é importante que haja o reconhecimento do equilíbrio como algo a ser observado durante todo o processo, se distanciando da ideia de focar nas operações aritméticas envolvidas.

Portanto, constatou-se a possibilidade de uso de quatro invariantes operatórios: os teoremas-em-ação "completar a quantidade que falta" e "encontrar a incógnita a partir do equilíbrio"; e os respectivos conceitos-em-ação "sequência sem números que se repetem" e "equilíbrio dos pesos na balança".

5.2 Generalização Algébrica

Nesta seção apresentamos os resultados obtidos ao explorar a noção de comutatividade, que vem a ser uma representante da generalização das propriedades aritméticas dos números, ou seja, generalização algébrica.

5.2.1 Procedimentos Comutativos

No Quadro 7, a seguir, são apresentados os registros da aplicação da Atividade 2. Os copos, no caso desta atividade, representavam as quantidades, e a troca de lugar dos copos representava a propriedade comutativa dos números.

Quadro 7 – Atividade 2

Generalização Algébrica
Atividade 2 (copos comutativos): Uma certa quantidade de bolinhas de gude (que variou para cada participante do experimento) é distribuída desigualmente em dois copos de plástico, um verde e outro azul. Em seguida, pergunta-se para o participante o número total de bolinhas. Depois troca-se os copos de lugar e pergunta-se para o participante se a quantidade total de bolinhas permanece a mesma, com o intuito de avaliar o nível de compreensão da propriedade comutativa da operação aditiva.

Fonte: Autoria própria.

A primeira categoria de procedimentos que constatamos foi a *Sem-Justificativa*. Embora apenas uma estudante tenha utilizado este procedimento, pelo fato de este se diferenciar bastante de outros procedimentos adotados por outros estudantes, optou-se por classificá-lo em uma categoria a parte. O Quadro 8 apresenta alguns trechos do diálogo com a estudante [18].

Quadro 8 – Categoria Sem-Justificativa

Sem-Justificativa	[18] _E se eu fizer isso aqui (invertendo a ordem dos copos)? Quantas tu acha que tem agora? _*Dez*. _Por que tu acha que é dez? _*Eu não sei*. _Mas tu acha que mudou? _*Sim*. _Então tá, mas tem colega teu que disse que não mudou, que tem a mesma coisa, tu acha que ele pode estar certo ou tá errado? _*Eu acho que ele tá certo*.

Fonte: Autoria própria.

O estudante [8] não se preocupou em elucidar seu raciocínio ou apresentar uma justificativa convincente para suas repostas. Quando confrontado com a resposta de um colega, sua resposta direta foi que o colega estava certo, mesmo sem ouvir qual seria a quantidade indicada por ele. É possível que tenha concordado por falta de recursos para assimilar o que foi dito ou por realmente não estar interessado na resposta final, apenas esperando pelo término da atividade.

Outra categoria de procedimentos utilizados constatada foi a *Conta-um-Copo*, que consiste em contar as bolinhas de apenas um dos copos, e tomar esta contagem como a resposta que deveria ser dada, mesmo com a ênfase dada pelo pesquisador de que a resposta requerida seria a da soma das quantidades dos dois copos. No Quadro 9 são apresentados os registros das falas de dois estudantes que ilustram o uso desse procedimento.

Quadro 9– Categoria Conta-Um-Copo

Conta-Um-Copo	[2] _Troquei de lugar o azul e o verde, quantas têm, nesse, mais nesse? (o estudante pensa, e não sabe responder). Se quiser contar, pode contar (e ele conta novamente). Quantos tem agora nos dois copos? _*Doze* (que na verdade é a contagem apenas das bolinhas no copo verde). [11] _Se eu mudar de lugar, antes era azul mais verde, agora é verde mais azul, dá alguma diferença, quanto é que tu acha que tem que dá? _*Quinze.* (esta era a quantidade de apenas um dos copos, contada anteriormente pelo estudante)*. Porque agora tu mudou de lugar.* _Tu acha que mudou um pouquinho? _*Aham.*

Fonte: Autoria própria.

A necessidade de recontar as bolinhas depois da troca de copos, evidencia que a noção matemática de comutatividade ainda não está consolidada no pensamento dos estudantes [2] e [11]. Quando perguntados sobre quantidade de bolinhas “do copo verde mais do que no copo azul”, o uso do termo “mais” não é associado pelos estudantes à operação de adição, de modo que, por exemplo, quando o pesquisador pergunta à estudante [11] “tu acha que mudou um pouquinho”, ela responde afirmativamente, compreendendo que a quantidade perguntada se referia apenas a um dos lados, na qual após a troca dos copos estaria ocupada por outro copo, com uma quantidade diferente de bolinhas de gude.

Alguns dos estudantes que responderam corretamente a pergunta do total de bolinhas antes e depois da troca dos copos, só conseguiram chegar à resposta após conferir e recontar as bolinhas dos dois potes. Ou seja, o fato de os copos estarem invertidos provoca a necessidade de recontagem, mostrando que a noção de comutatividade nessa classe de procedimentos ainda não está consolidada. Denominamos esta categoria de procedimentos *Confere-Contando*. Trechos de respostas que ilustram esta categoria são apresentados no Quadro 10.

Quadro 10– Categoria Confere-Contando

Confere-Contando	[1] _Quanto tem ao todo aqui, nesse copo mais nesse? (apontando para os copos de cores verde e azul, respectivamente). _*Dezessete.* _Tá bem. Agora eu vou fazer o seguinte: vou dar uma misturada aqui (invertendo a posição dos copos), quantas têm no total agora? _(depois de pensar bastante) *Peraí, vou contar* (e recomeça a contagem dos dois copos). [21] _E se invés de perguntar o azul mais o verde, eu perguntasse o verde mais o azul (e inverte os copos)? (a participante pensa, por algum tempo). Antes de eu virar tu disse que dava dezesseis, e agora quanto tu acha que dá? _*Pode contar?* _Pode contar. _*Dezesseis*. _Dezesseis também? _*É*.

Fonte: Autoria própria.

A frase “Peraí, vou contar” da estudante [1] e a pergunta “Pode contar?” da estudante [21] retratam a necessidade de recontagem, e a forte dependência lógica desta contagem para determinar o valor total. Nem mesmo uma estimativa ou hipótese de que a quantidade total se manteve transpareceu nas respostas dadas por esses estudantes.

Outra categoria de respostas que constatamos, apesar de menos frequentes, foi a que denominamos *Troca-Algarismos*. Nesta categoria classificamos uma única resposta, na qual curiosamente o estudante troca os algarismos do numeral, quando perguntado sobre a quantidade total após a troca dos copos. O diálogo do Quadro 11, a seguir, ilustra esta categoria de repostas.

Quadro 11 – Categoria Troca-Algarismos

Troca-Algarismos	[10] _Quanto que deu ao todo aqui, nos dois copos? _*Dezesseis.* _Agora azul mais verde (invertendo os copos), quanto é que tem? _*Sessenta e um.* _Quer contar? _*Quero.* (e ele conta novamente) _*Aqui tem dez e aqui tem seis.* Aqui tem dez e aqui tem seis, quanto tem ao todo então? _*Dezesseis.* _Então é sessenta e um ou dezesseis? _*Dezesseis.*

Fonte: Autoria própria.

O estudante [10] só percebe que a quantidade respondida é desproporcional ao número de bolinhas nos copos depois de recontá-las. Para o estudante, os algarismos na representação dos números são também comutativos, porém a recontagem das bolinhas de gude demonstra que não é possível utilizar esta regra neste caso.

Avaliou-se também a possibilidade de o aluno ter reconhecido não haver comutatividade entre os algarismos, e exatamente por esse motivo, ao mudar a posição dos copos ele sugere a mudança na posição dos algarismos, devido ao seu valor posicional. No entanto, não é possível decidir por esta segunda hipótese, visto que não coletamos dados sobre o conhecimento do valor posicional dos algarismos nesta pesquisa. Por isto, para fins de categorização, vamos presumir que o estudante comuta os algarismos.

Vários estudantes responderam que apenas a inversão dos copos não altera a quantidade total de bolinhas, utilizando argumentos fundamentados na permanência física das bolinhas nos copos. Por isso denominamos esta categoria de repostas *Comuta-Copos*. O Quadro 12 apresenta as respostas dos estudantes.

Quadro 12 – Categoria Comuta-Copos

Comuta-Copos	[7] _E se eu fizer isso aqui? (invertendo os copos). _*Dezenove*. Como é que tu sabe que é dezenove? _*Porque é a mesma quantia*. _Tem diferença se eu colocar primeiro o azul e depois o copo verde? _*Não*. _Teve colega teu que disse que dá diferente, tu acha que ele tá certo ou tá errado? _*Errado*. _Por quê? _*Porque dá a mesma quantia*. [8] _E se eu mudar elas de lugar, e te perguntar quantas têm, ao todo? _*Não são vinte e quatro? Mais?* _Como é que tu sabe? _*Adivinhei.* Tu acha que tem diferença de eu fazer isso aqui ou isso aqui? (invertendo a ordem dos copos) _*Não, não tem diferença.* _Não precisa nem contar as bolinhas? Tu acha que vai ter a mesma quantidade? _*Sim.* [9] _E se eu mudar aqui, quanto vai ter ao todo? _(depois de pensar bastante) *Vinte e cinco, não tem?* _Não sei, o que tu acha? _*Acho que é vinte e cinco.* _É tua resposta final? _*É.* [12] _E se eu te perguntasse o pote verde mais o pote azul (invertendo os copos)? _(depois de pensar bastante) *Acho que dá a mesma coisa*. _Por que? _*Porque tu só mudou.* [13] _Se eu mudar assim os potes, quanto que tem agora, ao todo? _*Dezesseis*. _A mesma coisa? _*Sim*. _E como é que tu sabe que dá dezesseis? _*Não sei, acho que é isso aí mesmo*. _E mudar os potes faz alguma diferença? Muda a quantidade se eu mudar a ordem dos copos? _*Hum, não. Porque cada potinho tem..., tá aqui tem onze e aqui tem cinco, e daí se tu fizer assim* (o participante inverte os copos nesse momento) *não vai mudar nada*. [15] _E se eu mudar aqui, os copos? _*Dezesseis*. _Continua tendo dezesseis? _*É*. _Tu acha que eu mudar os copos não alterou a quantidade? _*Não*. [16] _E se eu fizer isso aqui (invertendo os copos)? Vai mudar algumas coisa? _*Não sei*. _Tu disse que antes deu doze, né? E se eu fizer isso aqui (invertendo novamente os copos)? Vai ter mais, vai ter menos? _*Sete*. _Vai diminuir? _*A mesma coisa*. _Como é que tu sabe que é a mesma coisa? _*Doze?* _Como é que tu sabe? _*Porque é a mesma coisa*. [17] _E se eu fizer isso aqui (invertendo os copos)? Quantas tem agora? _*Quinze*. _Quinze, igual? Tu acha que mudando a ordem só, não muda nada? _*Não*. [22] _E se eu fizesse isso daqui (invertendo os copos)? Se eu mudar, se invés de ser o verde mais azul, eu fizesse o azul mais o verde? _*Vai ter dezesseis*. _Dezesseis também? _*É.* _Então mudar os copinhos não muda nada? _*É, dá o mesmo resultado*. [24] _E se tu for fazer o azul mais o verde, quanto é que dá? _*Vai dá mesma coisa: dezesseis*. _então tu acha que não tem diferença então contar verde mais azul ou azul mais o verde? _*Não*.

Fonte: Autoria própria.

Destaca-se que as respostas obtidas na categoria de procedimentos que chamamos de Comuta-Copos revelam um avanço em relação às categorias descritas até este ponto do texto no que diz respeito à noção de comutatividade. O estudante [7], por exemplo, mesmo confrontado com a opinião de outro colega, mantém sua resposta, sem hesitar.

Algumas expressões, tais como "adivinhei", utilizada pelo estudante [8], revelam que ainda que a criança utiliza palavras que não expressam o uso de raciocínios sofisticados, a ação mental executada pode estar em um nível mais elevado do que aparenta. Logo após afirmar que foi por adivinhação, o estudante [8] afirma com toda certeza que não há diferença entre a ordem dos copos quando se pretende somar as duas quantidades de bolinhas dentro deles.

Várias expressões utilizadas pelos estudantes indicam que estes possuem a noção de comutatividade dos números, tomando como referência concreta as bolinhas e os copos. É o caso das expressões "dá a mesma coisa" (estudante [12]), "não vai mudar nada" (estudante [13]), "é a mesma coisa" (estudante [16]), "dá o mesmo resultado" (estudante [22]), "vai dá mesma coisa" (estudante [24]).

Outra categoria de respostas é a que denominamos *Comuta-Números*. As repostas que constituem esta categoria são bastante semelhantes às da categoria Comuta-Copos, porém a argumentação da comutatividade está centrada nos números, se distanciando dos objetos utilizados no experimento, o que revela um avanço em termos de representação, em relação às categorias apresentadas até este ponto do texto. O Quadro 13 ilustra esta categoria.

Quadro 13 – Categoria Comuta-Números

Comuta-Números	[4] _E se eu fizer assim, quantos tem agora? (invertendo os copos) _*Quarenta e sete*. _Continua mesma coisa? _*Sim.* _Tu pode me explicar porque que deu a mesma coisa? _*Esse aqui tava aqui, daí mudou de lado, aqui era vinte e oito e aqui era dezenove, e agora tá dezenove mais vinte e oito.* [5] _Como que tu sabe que tem a mesma coisa? _*Porque aqui tem dez e mais sete, deu dezessete, e dez mais sete deu dezessete (apontando os copos na ordem inversa).* [6] _E se eu fizer o seguinte, assim ó (invertendo os copos), o que que tu acha que pode acontecer? Se eu mudar de lugar e perguntar quantos tem, ao todo aqui, quanto que dá? _*É que eu faço continha, se tu faz as conta, daí dá dezesseis*. _A mesma coisa? _*É, sim.* _Por que que é a mesma coisa? _*Por causa que dez mais seis dá dezesseis, e se tu fizer seis mais dez dá dezesseis também.*

	[19] _E se eu fizesse o contrário: o pote azul mais o pote verde? _*O pote azul mais o pote verde?* _Isso. _*Continua sendo dezesseis*. _Por que que continua sendo dezesseis? _*Porque cinco mais onze é dezesseis, e onze mais cinco é dezesseis também*. [20] _Se eu inverter aqui, o copo verde e o copo azul, tu acha que daria alguma diferença? _*Não*. _Nenhuma diferença? _*Não*. _Por que tu acha que não teria nenhuma diferença? _*Ué, porque o cinco tá aqui e o onze tá aqui, se inverter os dois vai dá o mesmo resultado*. [23] _E no copo verde mais no capo azul (invertendo os copos)? _*Também dá dezesseis*. _Por quê? _*Porque de um número para o outro não tem diferença, é a mesma coisa, esse mais esse ou esse mais esse* (alternando a ordem dos copos) *é a mesma coisa, dá o mesmo resultado*.

Fonte: Autoria própria.

Os procedimentos de cálculo utilizados pelos estudantes nesta categoria revelam que estes não só possuem noções de comutatividade, como também conseguem representar mentalmente a inversão dos números associados com a quantificação realizada a partir da contagem de bolinhas nos dois copos.

Alguns trechos, tais como “aqui era vinte e oito e aqui era dezenove, e agora tá dezenove mais vinte e oito” (estudante [4]), “dez mais seis dá dezesseis, e se tu fizer seis mais dez dá dezesseis também” (estudante [6]), “cinco mais onze é dezesseis, e onze mais cinco é dezesseis também” (estudante [19]), “porque o cinco tá aqui e o onze tá aqui, se inverter os dois vai dá o mesmo resultado” (estudante [20]) ilustram o entendimento da comutatividade, representada já nas quantidades, sem depender das propriedades físicas dos objetos envolvidos.

Uma interessante categoria que emergiu a partir da coleta de dados foi a *Comuta-na-Conta*. Nesta categoria, a resposta dos estudantes está fortemente baseadas nas contas armadas aprendidas na escola. O estudante visualiza a “conta de mais” a ser realizada, percebendo que a inversão das parcelas, neste caso, não altera a resposta. Não há um conhecimento explícito da propriedade comutativa dos números, mas existe o entendimento de que alterar a ordem das parcelas na conta não altera a soma, que resulta da operação de adição realizada.

Quadro 14 – Categoria Comuta-na-Conta

Comuta-na-Conta	[3] _E se eu fizer isso aqui (invertendo os copos), se eu mudar a ordem, quantas bolinhas tem no total agora? _*Quarenta e sete também.* _Continua a mesma coisa? Como tu pensou? _*Porque dá a mesma coisa, se tu só troca o de cima e o de baixo na conta dá a mesma coisa.* [14] _E se invés de perguntar quantos tem no verde mais quanto tem no azul, eu inverter eles, colocar o azul primeiro e te perguntar quantos tem nos dois? _*Não vai dá a mesma conta?* _Como é que tu sabe que vai dá a mesma conta? _*Ah, porque é só inverter, tu não botou mais nem menos*.

Fonte: Autoria própria.

A fala do estudante [3] “tu só troca o de cima e o de baixo na conta dá a mesma coisa” indica que este estudante representa mentalmente o algoritmo da adição para responder a pergunta, ou seja, fundamenta sua resposta nesta conta armada. O questionamento “Não vai dá a mesma conta?” feito pela estudante [14] mostra que ele compreende que há uma conta a ser feita e que a ordem em que as parcelas são inseridas na conta não interfere no resultado final.

As categorias Comuta-Copos, Comuta-Números e Comuta-na-Conta se mostraram bastante eficazes, e muito mais eficientes do que as outras, pois as respostas corretas foram dadas de imediato, com procedimentos mentais realizados em um tempo muito menor do que os procedimentos das outras categorias, mesmo aqueles que também chegaram à resposta correta.

5.2.2 Discussão dos Procedimentos à Luz das Estratégias

O trabalho de Blanton *et al*. (2015) descreve e analisa as estratégias que os estudantes utilizam para resolver problemas em situações que envolvem generalização algébrica. A fim de traçar um paralelo entre os procedimentos que emergiram de nossa coleta de dados com as estratégias já conhecidas na literatura, apresentamos a seguir os três tipos de estratégias de generalização algébrica apresentados por Blanton *et al*. (2015).

As estratégias *operatórias* são aquelas que não admitem mais de um significado para os signos que são utilizados nos problemas de Matemática. Por exemplo, quando perguntamos a uma criança se a igualdade 39+121=121+39 é verdadeira ou falsa, e ela responde que é falsa porque 39+121 não é igual 121, entendendo o sinal de igualdade estritamente como resultado final da operação de adição, sem considerar a possibilidade de ele poder ser mais alguma coisa, como por exemplo, equilíbrio entre duas quantidades.

As estratégias *computacionais*, no caso dos problemas que envolvem generalização algébrica, estão baseadas na ideia de que as representações podem apresentar variações, que há possibilidade de generalizações, porém a forma de representar estas generalizações ainda é bastante limitada, ou ausente. Por exemplo, ao perguntar à uma criança se a igualdade 39+121=121+39 é verdadeira ou falsa, ela responde que é verdadeira por que 39+121=160 e 121+39=160. Há necessidade de realização de um cálculo para verificar se a reposta está correta. Não há entendimento de que existe uma propriedade comutativa que se aplica a todos os números na operação de adição, mas admite-se que a igualdade pode significar mais que meramente o resultado final de uma operação aritmética.

A estratégia *estrutural* se caracteriza pelo domínio da noção de comutatividade. Neste caso, quando a criança se depara com o problema de decidir se a igualdade 39+121=121+39 é verdadeira ou falsa, ela responde que é verdadeira porque tanto faz a ordem dos números quando a conta é de mais.

Para iniciar um paralelo entre os procedimentos constatados em nossa coleta de dados com as estratégias já presentes na literatura, em primeiro lugar precisamos destacar o fato de que as categorias de procedimentos Sem-Justificativa e Conta-um-Copo não apresentaram elementos que indiquem uso de relações de causalidade, e por isso, foram consideradas como procedimentos isolados, aparentemente não fundamentadas em estratégias pensadas com o intuito de se chegar à resposta esperada. Por isso chamamos as estratégias associadas com tais procedimentos de *pré-operatórias*.

Ressalta-se que pelo fato de não haver uma conta na qual se pudesse constatar raciocínios associados com estratégias operacionais do trabalho de Blanton *et al*. (2015), isto é, no problema apresentado não havia possibilidade de analisar se o estudante compreende o sinal de igualdade estritamente como resultado ou como equilíbrio. Por isso, optou-se por considerar procedimentos associados com estratégias computacionais como estratégias *operatório-computacionais*, ou seja, uma junção que unifica os dois tipos de estratégias.

A categoria de procedimentos Confere-Contando apresenta, claramente, características que indicam o uso de estratégias operatório-computacionais, uma vez que nesta categoria os estudantes demonstraram a necessidade de recontar os dois potes, mesmo que perceptualmente estivessem convencidos de que nenhuma bolinha havia sido removida ou inserida nos copos.

Associamos as categorias Troca-Algarismos, Comuta-Copos, Comuta-Números e Comuta-na-Conta com as estratégias estruturais do trabalho de Blanton *et al*. (2015). Isto porque em todas essas categorias de procedimentos observou-se o entendimento dos estudantes da noção de comutatividade, sem necessidade de recontagem ou de outro tipo de ação auxiliar para responder ao questionamento realizado pelo pesquisador.

Ainda que a categoria Troca-Algarismos não tenha sido bem-sucedida, ela apresenta esta característica de ser uma regra aplicável para vários casos. É importante ressaltar que este tipo de procedimento não se sustenta facilmente, pois como se pode ver no Quadro 11, um pequeno questionamento do pesquisador fez com que o participante repensasse sua reposta, e passasse a utilizar uma estratégia operatório-computacional em seguida.

Este é o procedimento que a mostra a transição das estratégias computacionais para as estratégias que se aproximam da ideia de comutatividade. Existe uma invariância presente no esquema mental dos estudantes, mas ele aplica esta regra aos algarismos, e não às parcelas da operação de adição.

Os procedimentos Comuta-Copos, Comuta-Números e Comuta-na-Conta estão claramente bem fundamentados na ideia de que a ordem dos números na adição não se altera, com pequenas diferenças nas justificativas apresentadas pelos estudantes. Como todos esses procedimentos, que foram os bem-sucedidos daqueles associados com as estratégias estruturais de Blanton *et al*. (2015), estão relacionados diretamente com a ideia de comutatividade, optamos por denominar as estratégias estruturais utilizadas neste experimento como estratégias *estruturais-comutativas*.

Assim, três tipos de estratégias mentais se destacaram na situação de generalização algébrica proposta em nossa pesquisa: as pré-operatórias; as operatório-computacionais, baseadas em valor de referências que comprova se a igualdade, de fato, se verifica; e as estruturais-comutativas, que dispensam cálculos e são fundamentadas na generalização de fatos sobre os números naturais.

5.2.3 Níveis de Respostas e Invariantes Operatórios

Para construir os níveis de respostas dos participantes com relação à situação de generalização algébrica proposta, foi observado o grau de sofisticação de cada tipo de estratégia, bem como de cada tipo de procedimento realizado na resolução do problema proposto.

O Nível I de respostas foi subdivido em IA e IB. O subnível IA compreende o procedimento Sem-Justificativa, com respostas sem o uso claro de qualquer estratégia. O subnível IB se refere ao uso do procedimento de Conta-um-Copo, no qual os participantes tomavam a contagem das bolinhas de apenas um dos copos como a soma perguntada pelo pesquisador. De forma geral, as estratégias pré-operatórias, relacionadas com estes dois tipos de procedimentos, constituem o Nível I de repostas.

O Nível II de respostas se caracteriza pelo uso de estratégias operatório-computacionais, e está relacionado com o uso de procedimentos do tipo Confere-Contando, utilizado por estudantes que consideraram necessário recontar as bolinhas dos copos para obter a resposta.

O Nível III de resposta se caracteriza pelo uso de estratégias estruturais-comutativas, relacionadas com as categorias de procedimentos Troca-Algarismos, Comuta-Copos, Comuta-Números e Comuta-na-Conta. Dividimos ente nível em dois subníveis: subnível IIIA, que se caracteriza pela inversão dos algarismos e que não é bem-sucedido; e o subnível IIIB, que se caracteriza pela consolidação da noção de comutatividade, que pode estar baseada nos objetos, nos números ou no algoritmo da adição. No Quadro 15, a seguir, estão sintetizados os níveis de repostas para a situação de generalização algébrica proposta:

Quadro 15– Níveis de Respostas da Atividade 2

Níveis	**Descrição dos Procedimentos**
Nível IA	A criança não compreende o problema da inversão das parcelas. No Nível IA apresenta uma quantidade qualquer como resposta, sem relação de causalidade aparente.
Nível IB	A criança não compreende o problema da inversão das parcelas. No Nível IB apresenta a contagem de uma das parcelas como resposta.
Nível II	A criança precisa verificar se a soma das quantidades permanece igual após a inversão das parcelas.
Nível IIIA	A criança possui a noção de que o resultado não se altera quando alguns signos são invertidos. No Nível IIIA a criança aplica a noção de inversão aos algarismos, o que representa uma assimilação degenerada da ideia de comutatividade.
Nível IIIB	A criança possui a noção de que o resultado não se altera quando alguns signos são invertidos. No Nível IIIB a comutatividade dos números naturais está consolidada.

Fonte: Autoria própria.

A partir dos níveis de respostas, foi possível definir os invariantes operatórios presentes nas estratégias dos estudantes no que se refere à ideia de generalização algébrica, conforme a atividade realizada com os participantes.

A partir do Nível II de respostas, podemos observar a presença do teorema-em-ação “verificar se a soma das quantidades permanece igual”. Pode-se notar, neste caso, a presença do conceito-em-ação “quantidade que se altera com inversão de parcelas”, pois do contrário, este procedimento de recontagem não estaria consistente com a estratégia adotada pelo participante.

Do Nível IIIA de respostas podemos inferir o uso do teorema-em-ação “inversão de algarismos”, baseado no conceito-em-ação de “resultado que não se altera com a inversão de quaisquer signos”. Ressalta-se que este teorema-em-ação é uma generalização bastante exagerada, e produzirá conclusões equivocadas, apesar de haver uma ideia primitiva de inversão de signos, que pode ser uma base para as generalizações corretas relacionadas com a comutatividade.

Do Nível IIIB pode-se observar a presença do teorema-em-ação “inversão das parcelas”, que é aplicado seguindo a ideia de que o “resultado que não se altera pela inversão das parcelas". Este é o teorema-em-ação mais sofisticado daqueles utilizados pelos participantes da pesquisa.

A fim de elucidar os invariantes operatórios ligados com a generalização de propriedades aritméticas dos números, apresentamos na Figura 8, a seguir, uma síntese dos procedimentos, estratégias e níveis de respostas para a situação de generalização algébrica.

Figura 8 – Procedimentos, Estratégias e Níveis de Generalização Algébrica

Procedimento		**Estratégia**		**Nível**
Sem-Justificativa	→	Pré-Operatória	→	IA
Conta-um-Copo	→	Pré-Operatória	→	IB
Confere-Contando	→	Operatória-Computacional	→	II
Troca-Algarismos	→	Estrutural-Comutativa	→	IIIA
Comuta-Copos	→	Estrutural-Comutativa	→	IIIB
Comuta-Números	→	Estrutural-Comutativa	→	IIIB
Comuta-na-Conta	→	Estrutural-Comutativa	→	IIIB

Fonte: Autoria própria.

Logo, seis invariantes operatórios foram constatados para a situação de generalização algébrica: os teoremas-em-ação "verificar se a soma das quantidades permanece igual", "inversão de algarismos" e "inversão das parcelas"; e seus respectivos conceitos-em-ação "quantidade que se altera com inversão de parcelas", "resultado que não se altera com a inversão de quaisquer signos" e "resultado que não se altera pela inversão das parcelas".

5.3 Recursividade Algébrica

Apresenta-se nesta seção os resultados obtidos a partir da exploração de atividades que envolveram a ideia de recursividade algébrica. Ressalta-se que o foco da análise esteve na tentativa de perceber nos estudantes traços de previsão de resultados a partir de uma regra de associação entre duas variáveis, no caso, as mesas e as cadeiras da situação apresentada.

5.3.1 Procedimentos Funcionais

No Quadro 16 apresenta-se a Atividade 3A. Esta atividade foi proposta para analisar o nível de desenvolvimento do pensamento funcional dos participantes da pesquisa.

Quadro 16 – Atividade 3A

Recursividade Algébrica
Atividade 3A (álgebra das mesas): Propõe-se uma situação fictícia na qual um garoto, Bruno, convidou seus amigos para uma festa de aniversário. Ele quer ter certeza de que todos terão lugar para sentar. Na casa de Bruno há uma mesa retangular com quatro lugares, mas ele teve a ideia de juntar outra mesa. Pergunta-se ao participante quantos amigos poderão sentar com duas mesas juntas. Em seguida, aumenta-se gradativamente o número de mesas para analisar a capacidade de prever de resultados do participante, a fim de captar a forma como ele percebe a regra que se forma quando o número de mesas aumenta, e também se consegue identificar que existe uma relação entre o número de mesas e de lugares.

Fonte: Autoria própria.

A análise teve como foco o pensamento dos estudantes para prever o resultado dos lugares, a partir da variação do número de mesas. A primeira categoria emergente foi a que denominamos Sem-Justificativa, ainda que apenas um estudante tenha apresentado este tipo de resposta. Algumas falas do estudante [2] são apresentadas no Quadro 17.

Quadro 17 – Categoria Sem-Justificativa

Sem-Justificativa	[2] _Com três mesas, quantos lugares tu acha ele vai ter? _*Três mesas?* (demonstrando dúvida, não conseguindo responder).

Fonte: Autoria própria.

O estudante [2] não conseguiu verbalizar nenhuma resposta frente à situação apresentada. Isto dificulta bastante a análise de como se estruturou o pensamento desta criança. Mesmo com outras tentativas de se obter uma resposta da criança, não houve possibilidade de análise, pois não captamos a resposta do participante.

Outro procedimento que constatamos foi o que chamamos de *Espacial*. Durante a realização da atividade, principalmente no início do enunciado da pergunta feita para os participantes, deixava-se claro que o próprio sujeito manuseasse os materiais para formular sua resposta. No entanto, a estudante [21] foi uma das poucas que optaram por não manipular o material, conforme está ilustrado no Quadro 18.

Quadro 18 – Categoria Espacial

Espacial	[21] _Se ele juntar outra mesa, quantos lugares ele vai ter? _*Hã, dez.* _Por que dez? _*Porque eu acho*.

Fonte: Autoria própria.

A estudante [21] olha para as mesas e responde o que estima espacialmente ser uma quantidade suficiente para preenchê-las, e no seu julgamento, acredita que dez lugares é o suficiente para resolver o problema. A estimativa espacial da estudante pode estar relacionada com o formato retangular da mesa, ainda que o pesquisador tenha deixado claro no início que cada mesa só poderia ter quatro lugares, com uma cadeira em cada lado da mesa. As dimensões diferentes da mesa podem ter dado a impressão de que mais cadeiras poderiam ser introduzidas, ou seja, a estudante pode ter adotado critérios estritamente físicos para estimar o número de lugares.

Outra resposta isolada que optamos por analisar de forma diferenciada foi a da estudante [11], que respondeu à pergunta adicionando um lugar a mesa. Para esta participante, existe uma relação entre o número de mesas e cadeiras, e a regra é adicionar mais uma cadeira para cada mesa adicionada, conforme está ilustrado no Quadro 19.

Quadro 19 – Categoria Um-Lugar-Mais

Um-Lugar-Mais	[11] _Se ele botar outra mesa (já havia duas, seria uma terceira mesa), quantos lugares vai ter? _*Sete.*

Fonte: Autoria própria.

Percebe-se que a estudante [11] apresenta um pensamento mais avançado em relação aos procedimentos de pensamento funcional apresentados anteriormente. Existe a ideia de dependência quantitativa entre as grandezas *mesa* e *cadeiras*. No entanto, não houve um esforço para relacionar de forma mais completa os possíveis resultados, e a forma mais simples de expressar esta regra de associação foi responder que bastava adicionar uma cadeira. Ou seja, a regra, para esta estudante, seria ter uma nova cadeira para cada mesa adicionada.

O segundo procedimento mais utilizado pelos estudantes foi aquele que denominamos Dobra-Lugares. Os participantes dessa categoria de procedimentos estavam conscientes de uma regra de associação entre o número de lugares e o número de mesas, acreditando que ao dobrar o número de mesas, deveria ser dobrado o número de lugares, sem se dar conta de que deveriam juntar as mesas. Os trechos das falas relacionadas com esta categoria são ilustrados no Quadro 20.

Quadro 20 – Categoria Dobra-Lugares

Dobra-Lugares	[1] _Com duas mesas, ele precisaria de quantas cadeiras? _*De oito?* (demonstrando dúvida). [3] _Com duas mesas, quantos lugares ele vai ter agora? _*Oito*. _E com três mesas? _*Vai dá nove*. _E como é que tu pensou para dar nove? _*Porque três mais três mais três dá nove.* [4] _Se ele juntar duas mesas, quantos lugares vai ter? _*Oito lugares.* [14] _Quantos lugares tu acha que vai ter com duas mesas juntas? _*Oito. Deu oito*. [15] _Se ele juntar uma outra mesa, quantos lugares ele vai ter? _*Oito*. [19] _Se ele juntar outra mesa, quantos lugares ele vai ter? _*Oito*. [20] _Se ele juntar uma outra mesa, quantos lugares tu acha que ele vai conseguir? _*Oito*.

Fonte: Autoria própria.

A fim de aprofundar mais a questão da regra de associação entre o número de cadeiras e mesas, perguntou-se para o estudante [3] quantos lugares seriam necessários ao adicionar mais outra mesa. Ele responde que daria nove “porque três mais três mais três dá nove”. Curiosamente, neste caso, ele parte de três lugares iniciais, ainda que tenha manuseado a mesa inicialmente com quatro lugares.

Com relação aos procedimentos adotados pelos estudantes [1], [4], [14], [15], [19] e [20], destaca-se que não foi levado em consideração o fato de que as mesas deveriam estar juntas, o que fez com que simplesmente as cadeiras fossem colocadas em duas mesas, separadamente. Em alguns casos, após o pesquisador chamar a atenção para este fato, a regra de associação foi alterada, e o procedimento de dobrar o número de lugares era abandonado. Destaca-se também a necessidade lógica de manusear e precisar ver, de fato, as cadeiras nas duas mesas para chegar a uma conclusão sobre o número de lugares.

O tipo de procedimento mais utilizado pelos estudantes foi o que denominamos Junta-Mesas. Este procedimento consistia em juntar as mesas e contar o número de lugares, conforme é apresentado no Quadro 21, a seguir.

Quadro 21 – Categoria Junta-Mesas

Junta-Mesas	[5] _Com duas mesas quantos lugares ele consegue? _*Seis.* [6] _Com duas mesas, quantos lugares ele consegue? _*Seis cadeiras.* [7] _Com duas mesas, quantos lugares ele tem? _*Oito.* _Mas quantas cadeiras tem aqui? _*Uma, duas, três, quatro, cinco, seis.* _então é seis ou é oito? _*Seis.* [8] Ele viu que se ele colocar mais uma mesa, ele consegue mais lugares. Quantos lugares têm aqui agora. (e junta duas mesas) _*Sete.* _Não, não, conta aí direitinho. _*Ah é, seis.* _Se ele colocar mais uma mesa, quantos lugares ele vai ter? _*Nove!* _Tu podes me mostrar os nove? _ *Aqui, com mais três cadeiras* (e começa a montar outra mesa ao lado das duas). _Tá, mas tu não juntou né? _*Ah é, aqui dá oito.* [9] Se ele juntar duas, quantos lugares eles vai ter aqui? _*Seis.* [10] _Quantos lugares ele vai ter então com duas mesas? _*Seis.* [12] _Quantos lugares ele consegue com duas mesas? _*Cinco, não, seis*. [13] _Quantos lugar vai ter se ele juntar duas mesas? _*Seis*. [16] _Se ele juntar outra mesa, quantos lugares ele vai ter? _*Seis*. [17] _Se ele quiser juntar uma outra mesa, quantos lugares ele vai ter? _*Seis*. _Como é tu fez a conta? Pode pegar aqui as mesas, as cadeiras. _*Um dois, três, quatro, cinco, seis* (apontando e contando os lugares). [18] _Se ele juntar mais uma mesa nessa daqui, quantos lugares ele vai ter? _*Nove*. _Por que nove? Tu pode me mostrar aqui com essa mesa e essas cadeiras, se quiser (a estudante faz vários testes com as mesas e cadeiras). E aí, quantos lugares vai ter? _*Seis*. [22] _Se ele juntar outra mesa, quantos lugares ele vai ter? _*Oito*.

	_Tu pode mostrar para mim os oito? (o estudante junta as mesas, e percebe diferença da sua resposta). _Então quantos lugares tem? _*Cinco*. _Tem certeza? (o estudante olha para a mesa, e conta novamente as cadeiras). _*Seis*. [23] _Se ele juntar as mesas, quantos lugares ele vai ter com duas mesas? _*Oito*. _Tu pode mostrar para mim? _*É, porque se juntar essa mesa com essa daí vai ficar assim*. _Tu não juntou as mesas tem que juntar as mesas. _*Ah é, assim?* _Isso. _*Daí coloco essa aqui, essa*. _Essa cadeira aqui ficou no meio das mesas, daí não pode, tem que ficar num lugar só. _*Ah tá*. _Quantas tem aí com duas mesas? _*Seis.* [24] _Se ele quiser colocar outra mesa aí, juntar as mesas, duas mesas, quantos lugares ele vai ter? _*Oito*. _Tu pode mostrar para mim? _*Posso*. (depois de juntar as mesas, o estudante muda sua resposta). *Não, seis*.

Fonte: Autoria própria.

Os estudantes que apresentaram procedimentos classificados como Junta-Mesas chegaram à resposta correta, devido ao fato de perceberem a necessidade de encostar uma mesa na outra, e ainda, utilizar a contagem de um até seis para responder à pergunta realizada pelo pesquisador.

Ressalta-se que o procedimento de juntar as mesas foi mais decisivo do que a obtenção da regra de associação entre o número de mesas e lugares, como pode ser percebido pelas falas do estudante [8], que só consegue acertar o número de lugares para duas e três mesas após contar, com o dedo apontado para as cadeiras, os lugares ao redor da mesa.

Alguns estudantes, como o estudante [23], colocaram uma cadeira no espaço entre duas mesas, o que não era permitido, conforme esclarecimento do pesquisador. Assim, a disposição das cadeiras, além da junção das mesas, também foi determinante para o acerto, mais do que a tentativa de formular uma regra de associação entre as duas grandezas.

Vários estudantes tentaram responder sem manipular as cadeiras e as mesas, porém alteraram suas respostas assim que realizaram a disposição física dos lugares, o que demonstra forte dependência manipulativa para responder a questões que envolvem o pensamento funcional. Este foi o caso dos estudantes [1], [7], [8], [12], [18] e [22].

5.3.2 Discussão das Categorias à Luz das Estratégias

O problema das mesas foi adaptado para esta pesquisa do trabalho de Blanton *et al*. (2015), sem muitas alterações, sendo essencialmente a mesma proposta daqueles autores. Blanton *et al*. (2015) constataram o uso de duas estratégias na resolução deste problema: pensamento recursivo e pensamento covariacional.

O *pensamento recursivo*, neste problema, se caracteriza pela necessidade de visualização das cadeiras que faltam quando se introduz a segunda mesa. Pode resultar em uma resposta correta, mas depende principalmente da percepção dos objetos concretos para agir nesta situação. Por exemplo, o estudante diz que vê dois lugares vazios depois de juntar a segunda mesa.

Já o *pensamento covariacional* se caracteriza pela previsão do resultado a partir de uma regra, a qual é construída pela criança, experimentando diferentes configuração das mesas e cadeiras, ou dispondo mentalmente as mesas e cadeiras. Por exemplo, quando o estudante chega à conclusão de que para cada mesa adicionada, ele precisa introduzir mais duas cadeiras, isto indica que ele domina a regra de associação entre mesas e cadeiras.

Nenhum dos estudantes entrevistados nesta pesquisa apresentou espontaneamente traços de pensamento covariacional. Ao longo das entrevistas, sob intervenção do pesquisador, os participantes foram levados a formular uma regra de associação. Porém esta regra não deve ser considerada como uma estratégia espontânea. A estratégia mais sofisticada registrada em nossa coleta de dados foi o pensamento recursivo.

Pode-se dizer que as categorias Sem-Justificativa e Espacial não estão associadas com nenhuma das estratégias já conhecidas na literatura. Esses procedimentos não apresentam uma relação de causalidade. Por isso, podemos dizer que este tipo de procedimento está associado com estratégias *pré-operatórias*, ainda que não se tenha encontrado este termo no trabalho de Blanton *et al.* (2015).

Os procedimentos de Um-Lugar-Mais, Dobra-Mesas e Junta-Mesas estão relacionados com o pensamento recursivo. Os participantes que utilizaram estes tipos de procedimentos criaram uma relação entre as grandezas *mesas* e *cadeiras*. Os participantes que optaram por procedimentos de Um-Lugar-Mais e Dobra-Mesas não chegaram à resposta correta por utilizarem uma regra falsa, mas apenas o fato de compreender que deveria haver uma relação entre mesas e cadeiras já indica um entendimento de relação de causalidade, faltando apenas a verificação de consistência com os resultados da experiência de manipulação dos materiais, que não concordava com as respostas dadas pelos estudantes.

Os procedimentos da categoria Junta-Mesas se mostraram eficientes porque os estudantes que optaram por este tipo de procedimento tomaram consciência de que deveria haver concordância com a experiência prática, além de atentar para as condições estabelecidas para o problema, sobretudo o fato de que as mesas deveriam estar juntas, o que eliminou a possibilidade de dobrar o número de lugares, e culminou na ideia de que duas cadeiras teriam que ser adicionadas.

Sendo assim, apenas estratégias pré-operatórias e de pensamento recursivo foram utilizadas pelos participantes, não sendo constatado o uso espontâneo da estratégia de pensamento covariacional.

5.3.3 Níveis de Respostas e Invariantes Operatórios

O Quadro 22, a seguir, apresenta os níveis de respostas constatadas com a aplicação da Atividade 3A. Ressalta-se a respostas foram divididas em dois níveis principais, seguindo o critério da presença de causalidade nas estratégias associadas com os procedimentos utilizados pelos estudantes.

Quadro 22 – Níveis de Respostas da Atividade 3A

Categoria	Descrição
Nível IA	A criança não consegue expressar uma resposta com justificativa.
Nível IB	A criança realiza uma estimativa espacial do número de lugares, sem apresentar argumentos numéricos na sua resposta.
Nível IIA	A criança acredita que para cada mesa introduzida deve-se adicionar uma cadeira, sem considerar a junção das mesas.
Nível IIB	A criança acredita que para cada mesa introduzida deve-se dobrar o número de cadeiras, sem considerar a junção das mesas.
Nível IIC	A criança percebe a importância da junção das mesas, e através de tentativas de introduzir as cadeiras, isto é, por abstração empírica, constata que para cada mesa deve-se adicionar duas cadeiras.

Fonte: Autoria própria.

Os níveis I e II estão associados, respectivamente, com estratégias pré-operatórias e recursivas. A subdivisão dos níveis foi baseada nos procedimentos utilizados pelas crianças. A relação entre procedimentos, estratégias e níveis de respostas para a atividade envolvendo recursividade algébrica está ilustrada na Figura 9.

Figura 9 – Procedimentos, Estratégias e Níveis de Recursividade Algébrica

Procedimento		**Estratégia**		**Nível**
Sem-Justificativa	→	Pré-Operatória	→	IA
Espacial	→	Pré-Operatória	→	IB
Um-Lugar-Mais	→	Recursiva	→	IIA
Dobra-Lugares	→	Recursiva	→	IIB
Junta-Mesas	→	Recursiva	→	IIC

Fonte: Autoria própria.

Com relação aos invariantes operatórios, podemos dizer que as estratégias recursivas apresentaram três tipos de teoremas-em-ação, os quais foram fundamentados em três respectivos conceitos-em-ação.

O primeiro teorema-em-ação que destacamos é “regra de associar acrescentando um”, que está baseado em um raciocínio direto de proporção unitária. Para cada unidade de determinada grandeza, deve-se adicionar um na outra, nesta perspectiva. Percebe-se aqui um distanciamento da situação, maior uso de abstração reflexiva, sem atentar para as especificidades da realidade apresentada. Neste caso, este teorema-em-ação está baseado no conceito-em-ação “relação biúnivoca entre grandezas”.

O segundo teorema-em-ação é a “regra de dobrar as quantidades”. Neste teorema-em-ação está presente a ideia de proporção. No entanto, existe a observação aqui de algumas propriedades dos objetos. No caso das mesas, os estudantes que utilizaram este teorema-em-ação são capazes de perceber que uma mesa tem quatro lugares, logo, duas mesas têm oito lugares. O fato de as mesas precisarem estar juntas não é levado em consideração. Podemos dizer que este segundo teorema-em-ação está baseado no conceito-em-ação “existência de relação proporcional entre quaisquer grandezas”. Na situação apresentada, a relação entre as grandezas propostas não é proporcional, sendo exatamente isto que caracteriza o problema como uma oportunidade para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

O terceiro teorema-em-ação é caracterizado pela forte dependência da realidade observada nas estratégias utilizadas pelos participantes. O fato de considerarem a junção das mesas acaba se sobrepondo à construção da regra matemática, fazendo com que os estudantes construam, de forma autônoma, uma nova regra a partir da realidade observada. Podemos dizer que houve uso do teorema-em-ação “construção da regra a partir da realidade observada”. Este teorema-em-ação está baseado no conceito-em-ação “necessidade de experimentar para inferir a regra”.

Pode-se explicar a dificuldade de alguns estudantes para atingir o nível IIC de respostas pelo fato de que a relação de *comparar* quantidades é uma relação ternária, isto é, que liga três elementos entre si, já que o número de seis cadeiras é dois *a mais* que quatro. Está é uma relação mais complexa que a relação binária “seis é maior que quatro”, que representa a ligação de apenas dois elementos (VERGNAUD, 1985, p. 24).

Portanto, para a situação envolvendo recursividade algébrica, foi constatado o uso de seis invariantes operatórios: os teoremas-em-ação “regra de associar acrescentando um”, “regra de dobrar as quantidades” e “construção da regra a partir da realidade observada”; e os conceitos-em-ação “relação biunívoca entre grandezas”, “existência de relação proporcional entre quaisquer grandezas” e “necessidade de experimentar para inferir a regra”.

5.4 Padrão Algébrico

Nesta seção são apresentados os resultados que foram obtidos com a aplicação da Atividade 3B, com foco na ideia de reconhecimento de padrões. O reconhecimento de padrões está diretamente relacionado com a ideia algébrica de variável, que é uma das principais noções algébricas, segundo Blanton *et al*. (2015). O material utilizado nesta atividade foi o mesmo material da Atividade 3A, porém a diferença entre 3A e 3B está nas perguntas direcionadas aos participantes.

5.4.1 Procedimentos de Padronização

Nesta seção são apresentados os resultados da coleta de dados da etapa qualitativa para a situação envolvendo a ideia de padrão algébrico em sequências de números ou de outras representações. Nesta coleta de dados o foco esteve em analisar se os estudantes eram capazes de reconhecer um padrão de associação numérica entre o número de mesas e lugares, e como descreviam o padrão encontrado. O Quadro 23 apresenta a situação proposta aos participantes.

Quadro 23 – Atividade 3B

Padrão Algébrico
Atividade 3B (álgebra das mesas): Propõe-se uma situação fictícia na qual um garoto, Bruno, convidou seus amigos para uma festa de aniversário. Ele quer ter certeza de que todos terão lugar para sentar. Na casa de Bruno há uma mesa quadrada com quatro lugares, mas ele teve a ideia de juntar outra mesa. Pergunta-se ao participante quantos amigos poderão sentar com duas mesas juntas. Em seguida, aumenta-se gradativamente o número de mesas para analisar a capacidade de generalização do participante, a fim de captar a forma como ele percebe a regra que se forma quando o número de mesas aumenta, e também se consegue identificar que existe uma relação entre o número de mesas e de lugares.

Fonte: Autoria própria.

Foram vários os tipos de procedimentos realizados pelos estudantes para agir nesta atividade. A primeira categoria de procedimentos que destacamos foi a *Sem-Justificativa*, que se caracteriza por uma reduzida presença de causalidade na forma de manipular os materiais e inferir uma regra que relacione o aumento do número de cadeiras devido ao número de mesas. O Quadro 24 apresenta algumas falas dos estudantes enquanto realizavam a Atividade 3B.

Quadro 24 – Categoria Sem-Justificativa

Sem-Justificativa	[17] _Quantos lugares tu acha que ele vai ter que colocar a mais, se ele quiser colocar três mesas? _*Dez*. [19] _Se eu quisesse colocar outra mesa (havia duas mesas), quantos lugares tu acha que ia ter? _*Acho que nove*. _Por que nove? Qual foi a conta que tu fez? _*Eu fiz dois mais quatro*. [21] _E se ele for juntando mesas assim, ele botou duas mesas, mas e se ele quiser botar uma terceira mesa, quantos lugares ele vai ter que colocar na mesa? (a estudante pensa bastante tempo) _*Cinco*.

Fonte: Autoria própria.

As respostas Sem-Justificativa revelam uma dificuldade no entendimento da expressão “a mais”, já constatada por estudos precedentes, como por exemplo no trabalho de Beck e Silva (2015a). O estudante [17] responde dez, pensando no número total de cadeiras, o que ainda assim indica uma previsão pautada em uma estimativa que não segue uma regra bem definida, e que não considera o uso da expressão “a mais”. Quando perguntado por que a resposta seria nove, o estudante

[19] explica que fez “dois mais quatro”, porém esta conta não resulta no número indicado, nem reflete as quantidades envolvidas no problema, já que havia duas mesas e seis cadeiras.

A categoria de procedimentos que denominamos por *Não-Junta-Mesas* se caracteriza pelo fato de haver a consciência de que o número de lugares iria aumentar devido ao aumento do número de mesas, porém o fato de as mesas precisarem ficar juntas não é levado em consideração. Os participantes que utilizaram este tipo de procedimento apenas adicionaram outra mesa e contaram o número de lugares. Um participante errou a contagem, contando três lugares a mais, e o outro acertou a contagem, no entanto sem juntar as mesas.

Quadro 25 – Categoria Não-Junta-Mesas

Não-Junta-Mesas	[1] _Se ele juntar duas mesas, ele sabe que ele vai conseguir convidar seis pessoas, e se ele conseguir mais uma mesa, três mesas, quantas pessoas podem ficar? _*Acho que nove*. _Como é que tu pensou para fazer? _*Eu contei daqui, mais a outra mesa que ele poderia colocar aqui* (colocando as cadeiras em volta das mesas, sem juntar uma mesa na outra). [5] _Se ele colocar mais uma mesa aqui, quantos lugares ele vai ter? _*Doze*. _Como é que tu sabe que dá doze? _ (a estudante pensa e refaz a atividade) *Dez, seis mais quatro, dá dez* (sem juntar as mesas).

Fonte: Autoria própria.

A participante [5] primeiramente responde doze, provavelmente realizando uma estimativa. Após manipular as mesas, porém sem juntá-las, ela conta e responde dez, sem atentar para o fato de que as mesas deveriam estar juntas.

Outra categoria de procedimentos que foi constatada é a que chamamos de *Mistura-Cadeiras*. Os estudantes que apresentaram procedimentos do tipo Mistura-Cadeiras compreendem que existe relação entre o número de mesas e cadeiras, no entanto possuem dificuldade para seguir o padrão de uma cadeira por lugar na mesa. O Quadro 26, a seguir, apresenta o uso deste tipo de procedimento.

Quadro 26 – Categoria Mistura-Cadeiras

Mistura-Cadeiras	[3] _Se eu botar mais uma mesa vai ter mais três lugares? _*Sim.* _Eu fiz esta pergunta em outra escola e teve um outro aluno que disse que dá 10, tu acha que ele está certo ou que ele está errado? _*Se tu colocou duas ó, em uma dá quatro, e se tu juntar duas mesas, dá seis, e se tu juntar mais uma mesa vai dar nove, posso colocar mais uma.* _E na ponta não pode ir mais uma cadeira? _*Sim, daí ia dar uma aqui e outra aqui* (colocando duas cadeiras no mesmo lugar da mesa). [6] _Se ele colocasse mais uma mesa, quantas cadeiras daria para colocar? Com três mesas? _*Doze.* Como é que tu pensou? _*Porque eu contei, aqui tem seis cadeiras, daí eu contei* (apontando para as mesas, e contando lugares onde não poderia haver cadeiras)*, sete, oito, nove, dez, onze, doze.* [12] _Se ele botar três mesas, quantos lugares ele vai ter? _*Dezesseis.* _Como é que tu sabe que é dezesseis? _*É só pensar na cabeça.* _Mas como é que tu pensou na cabeça? _*Tem isso aqui, daí coloca mais três fica dezesseis.* _Tu pode mostrar aqui com as peças? (a estudante pega as cadeiras e começa a distribuir sem uma ordem ou uma contagem definida) _*Deu doze*.

Fonte: Autoria própria.

A estudante [6], por exemplo, introduziu cadeiras na divisão das mesas, sem seguir o padrão inicial de uma cadeira para cada lugar da mesa. Por isso esta estudante contou vários lugares. O estudante [3] coloca duas cadeiras no mesmo lugar da mesa, o que prejudica sua avaliação sobre o reconhecimento de uma regularidade numérica do aumento do número de lugares.

Um dos estudantes respondeu inicialmente que mais três cadeiras deveriam ser colocadas na mesa. Porém após alguma insistência do pesquisador para que tentasse novamente, ele percebe que na verdade só precisa de duas cadeiras a mais. Destacamos esta resposta isolada como outra categoria, chamada *Acerto-Cadeiras*. Esta categoria recebe este nome pelo fato de que o acerto do número de lugares adicionais teve origem após o estudante experimentar a manipulação das cadeiras e perceber que não precisava adicionar a cadeira da ponta da mesa. O Quadro 27 ilustra esta experimentação.

Quadro 27 – Categoria Acerto-Cadeiras

Acerto-Cadeiras	[4] _Se ele quiser colocar uma outra mesa aqui (já havia duas), quantos lugares vai ter? _*Nove.* _Tem outras cadeiras aqui se tu quiser para pensar. _(depois de tentar novamente). *Oito.* _Teve outro colega que disse que dá diferente. Tu acha que ele tá certo ou está errado. _*Que ele tá errado.* _E o que ele pode ter feito errado? _*A mesma coisa que eu fiz, não sabia que tinha mais três cadeiras para colocar.*

Fonte: Autoria própria.

O estudante [4] tenta formular uma resposta imaginando que os três lugares que não estão na junção das mesas estivessem vazios. Porém quando resolve experimentar constata que não há necessidade de retirar o lugar da ponta. Deste modo, a abstração empírica possui um papel importante nesta mudança de resposta. A contra-argumentação do pesquisador ressalta que a criança está certa da última resposta, mas esta certeza se deve à experimentação com o material disponibilizado.

Chamamos de *Regra-Mais-Um* a categoria de procedimentos adotados por alguns estudantes de adicionar um lugar para cada mesa introduzida. Os estudantes que optaram por este tipo de procedimento não chegaram à resposta correta. Ainda que tentassem formular uma relação entre o número de mesas e cadeiras, a falta de experimentação prejudicou a análise desses participantes.

Quadro 28 – Categoria Regra-Mais-Um

Regra-Mais-Um	[2] _Com duas mesas tem seis, não é? Se ele colocasse outra mesa aí, quantos lugares ele ia ter? _*Sete.* _Como é que tu pensou? _*Eu imaginei, eu fiquei olhando para as cadeiras para ver.* [7] _Se ele colocar outra mesa, quantas cadeiras tu acha que vai dar para usar? _*Dá sete.* _Como é que tu sabe que é sete? _*Por que seis mais um dá sete*. _Então se ele botar mais uma mesa, ele vai ter mais um lugar? _ (depois de novas tentativas de manipulação e algum tempo de reflexão) *Não, vai dá oito*. _Como tu sabe que vai dá oito? _*Não, dá sete.* _Qual tua resposta final? _*Sete.* [11] _Em cada lugar da mesa só pode uma cadeira, então se botar mais uma mesa, quantos lugares vai ter? _*Seis.* _Então quantas cadeiras têm aqui? _*Sete.* _Então seis ou sete? _*Sete.* [13] _Se ele botar mais uma mesa (já havia duas mesas), quantos lugares tu acha que vai ter? _*Sete.* _Por que sete? _*Porque ele botou mais uma*.

Fonte: Autoria própria.

Como pode ser visto no Quadro 28, alguns estudantes que optaram por este tipo de procedimento ficaram em dúvida na escolha de sua resposta final. O estudante [13] deixa claro como está construindo sua regra. Na fala “porque ele botou mais uma”, ele atribui o aumento unitário de lugares ao aumento unitário de mesas. Percebe-se que há uma crença de relação biunívoca entre os objetos.

Apesar das dificuldades inerentes do problema apresentado, inclusive com relação ao fato de haver a expressão “a mais” nas perguntas direcionadas aos estudantes, alguns conseguiram chegar à resposta correta, utilizando meios adequados para inferir a regra que relaciona mesas e lugares. A categoria de procedimentos mais bem sucedida na Atividade 3B foi a que denominamos *Regra-Mais-Dois* que consiste em adicionar dois lugares para cada mesa introduzida. Isto caracteriza o padrão algébrico presente na situação apresentada aos estudantes. As repostas são apresentas no Quadro 29, a seguir.

Quadro 29 – Categoria Regra-Mais-Dois

Regra-Mais-Dois	[8] _E com quatro mesas? _*Aí já ficou difícil, peraí.* _Pode pegar os bonequinhos aqui se quiser. _*Dá dez.* _Se eu quisesse botar mais uma mesa, o que que tu acha que seria? _*Ih, ficou difícil. Onze, não peraí, doze.* _Tem alguma relação matemática aí, cada vez que tu coloca uma mesa, tem alguma coisa aí com os números? _*Ficou difícil.* _Vamos lembrar, com uma mesa, quatro lugares, com duas mesas, seis, com três mesas, oito, com quatro mesas, dez, cinco mesas doze. _*É.* _O que que tá acontecendo cada vez que eu coloco uma mesa, quantos lugares eu tenho que colocar a mais? _*Três.* Vamos pensar no primeiro caso: quantos lugares eu tive quando coloquei duas mesas? _*Seis.* _Então quantos eu tive a mais? _*Ih, tu passou conta complicada.* Vamos pensar de novo: eu tinha quatro lugares, daí inventei de colocar outra mesa, quantos lugares a mais tem agora? _*Seis.* _Então quantos que foram a mais, além dos que tinha? _*Oito, foram oito.* _Então esta é tua resposta? _*Sim.* [9] _Só para a gente fazer as contas: com uma mesa, quatro lugares, com duas mesas, seis lugares, com três mesas, oito lugares. Com quatro mesas, qual seria o número de lugares? _*Dez.* _Como tu sabe que é dez? _*Porque vai mais duas.* E se eu botasse mais uma mesa? _*Doze.* E mais outra mesa? _*Quatorze.* [10] _Então vai aumentando mais ...? _*Dois*. _Cada mesa que tu aumentou, foi aumentando mais duas cadeiras? _*Aham*.

Fonte: Autoria própria.

A estudante [9] infere a regra que relaciona mesas e número de lugares a partir de alguns exemplos dados pelo pesquisador. A constatação do reconhecimento de um padrão algébrico está na sua fala “porque vai mais duas”, indicando que há compreensão da relação “para cada mesa introduzida deve-se adicionar duas cadeiras”. Ressalta-se que, ainda que alguns estudantes tenham conseguido obter a resposta correta do problema, foram necessárias algumas sugestões dadas pelo pesquisador. Os estudantes [8] e [10], por exemplo, só chegaram à resposta após vários esclarecimentos.

A grande maioria dos procedimentos adotados na Atividade 3B, que analisou a capacidade dos estudantes em reconhecer padrões algébricos, foi adicionar três cadeiras para cada mesa introduzida. Chamamos esta categoria de procedimentos de *Regra-Mais-Três*, ilustrada no Quadro 30.

Quadro 30 – Categoria Regra-Mais-Três

Regra-Mais-Três	[14] _Se ele botar outra mesa aqui, quantas cadeiras ele vai ter que colocar a mais? _*Três*. (manuseando as cadeiras, a participante conta duas vezes o mesmo lugar, pois considera a cadeira que antes estava na ponta, como uma das cadeiras laterais na configuração seguinte, com uma mesa a mais, e além disso, adiciona duas cadeiras, criando assim, a regra de adicionar mais três cadeiras cada vez que uma mesa é introduzida). [16] _E se eu quisesse juntar outra mesa aí, quantas cadeiras eu teria que colocar a mais? _*Quatro*. _Mais quatro? _*Sim, uma cadeira aqui, outra aqui, não, três*. _Me explica como tu pensou (apontando para as cadeiras e mesas disponíveis para o experimento). _*Como juntei aqui, aí não dá para botar outra cadeira aqui, aí tem uma aqui e mais duas aqui, vai ficar três* (não considera a cadeira que já estava na mesa, contando uma a mais). [18] _E se ele quisesse colocar três mesas, quantas cadeiras ele ia ter que colocar a mais aí? _*Três*. _Tu pode me explicar porque tu pensou em três? (a estudante utiliza o material disponibilizado, mas conta duas vezes a cadeira da ponta, que já estava quando haviam duas mesas). _*Com três mesas, bota uma cadeira aqui, outra aqui, e outra aqui*. [20] _Se ele colocar um outra mesa (já havia duas), quantos lugares ele vai ter? _*Nove*. _Por que tu acha que é nove? _*Porque três mais três é seis, mais três é nove*. _Por que que tu fez mais três? _*Não sei*. [23] _Quantas cadeiras ele precisaria colocar a mais aqui se ele quisesse colocar outra mesa aqui, além das que estão aqui? _*Acho que ele colocaria mais seis*. _Vamos supor que ele quisesse colocar mais outra mesa, se ele juntasse outra mesa. Quantas cadeiras ele teria que colocar para completar as mesas? _*Três, como essa aqui, uma duas, três* (apontando para três lugares da mesa, mas considerando o lugar da ponta nas duas contagens). *Mais essa aqui, quatro* (e conta novamente o lugar da outra ponta). *Mas como essas duas aqui sobraram* (se referindo às cadeiras das duas pontas da mesa), *então ele só precisaria pegar mais duas*. _E se ele quisesse botar outra mesa? _*Ui, aí seria, ele pegaria mais quatro cadeiras, que ao todo, formaria doze*. _Tá, com duas mesas, ele precisaria de seis cadeiras, com três mesas, quantas cadeiras ele precisa? _*Nove* (repetindo lugares na sua contagem, afirmando que mais três cadeiras seriam necessárias). [24] _e se ele quisesse juntar três mesas, quantos lugares ele teria? _*Um, dois, ..., vai dá, seis*. _Seis também? _*É*. Se ele botar mais uma mesa? _*Não, oito*. _Como é que tu pensou? _*Assim* (e afasta a cadeira da ponta mostrando que terá mais dois lugares disponíveis). _Então ele vai ter que botar mais? _*Mais uma mesa*. _Tá, mais uma mesa, e mais quantas cadeiras? _*Hã, duas*. _E se ele quiser ainda, depois disso, colocar mais outra mesa, quantas cadeiras ele vai ter que colocar a mais ainda? _*Mais quatro*. _Tá, tu diz duas aqui, e ainda mais duas aqui? _*É*. _Tu acha que tem uma certa relação matemática? Cada mesa que ele coloca ele precisa colocar um certo número de cadeiras? Tu acha que tem um número certinho? _*Sim*. _Quantas? _*Quantas mesas*? _Se ele botar mais uma mesa aqui, quantas cadeiras ele vai ter que trazer a mais (já havia duas mesas)? _*Oito*. _Se ele botar mais outra? _*Onze*. _Por

	que ele teria que botar mais três cadeiras ainda? _*É*. _Cada mesa que ele coloca, quantas cadeiras ele tem que colocar a mais então? _*Tá, se for separado ele vai ter que colocar quatro, se for todas juntas, ele vai ter que colocar três*.

Fonte: Autoria própria.

Os estudantes da categoria Regra-Mais-Três não percebem que a cadeira da ponta não precisa ser retirada para que outra seja colocada. Isto está relacionado com a ausência de conservação no pensamento dos participantes. A estudante [18], por exemplo, indica os lugares onde podem ser colocadas cadeiras, dizendo "com três mesas, bota uma cadeira aqui, outra aqui, e outra aqui", sem perceber que a cadeira da ponta não precisa ser retirada. Foi interessante notar que o estudante [24] considerou a possibilidade de não juntar as mesas, constatando corretamente, que sem juntar as mesas precisaria de mais quatro lugares, porém inferindo incorretamente, que precisaria de mais três lugares, caso fosse necessário juntar as mesas, isto é, sem considerar que a posição da ponta seria conservada.

Duas estudantes desconsideraram a junção das mesas, mas conseguiram formular uma regra baseada no número de lugares "a mais" que seriam introduzidos. Estas participantes demonstraram perceber o papel da expressão "a mais" no problema, porém, por não estarem atentas à junção das mesas, a regra construída por elas foi ineficaz para resolver a situação. Esta categoria foi chamada de *Mais-Quatro*, pois ao desconsiderar a junção das mesas, todos os lugares deveriam ser preenchidos com novas cadeiras, na visão destas estudantes. Estes procedimentos estão ilustrados no Quadro 31, a seguir.

Quadro 31 – Categoria Regra-Mais-Quatro

Mais-Quatro	[15] _Olha só: antes tinha quatro, ne, aí ele botou mais uma mesa, quantos lugares ele teve que colocar a mais aqui? _*Quatro*. _E se ele botar mais outra mesa, quantos lugares ele vai ter que colocar a mais? _*Quatro*. _E se ele for colocar ainda mais uma depois? _*Quatro*. _Vai ser sempre a mesma coisa? _*Sim*. [22] _Quantas ele teria que colocar a mais, se ele fosse colocar uma terceira mesa aqui? _*Quatro*. _Mais quatro? _*Aham*. _Então cada mesa que ele coloca, ele precisa colocar mais quatro cadeiras? _*É*.

Fonte: Autoria própria.

Notamos que as estudantes [15] e [22] percebem um padrão algébrico na situação apresentada. Se no problema não estivesse especificado que as mesas deveriam estar juntas, estes procedimentos teriam sido eficazes. Mas para a situação apresentada, este tipo de procedimento se tornou ineficaz.

5.4.2 Discussão das Categorias à Luz das Estratégias

No trabalho de Blanton *et al*. (2015) as estratégias utilizadas pelos sujeitos daquele estudo para a situação das mesas, no que se refere ao pensamento funcional dos participantes, se dividem em três tipos: desenhar, utilização de recursividade e utilização de regra funcional.

A estratégia *desenhar* consiste em reproduzir as mesas na forma escrita, sejam quantas forem solicitadas. Por exemplo, quando se pergunta à criança quantos lugares serão necessários para que dez mesas sejam introduzidas, ela necessita do desenho das dez mesas para visualizar a situação concreta de se ter a disposição física das mesas e dos lugares.

A *utilização de recursividade* é uma estratégia que consiste na comparação da evolução das duas grandezas. A criança não necessita de uma representação concreta, mas precisa comparar a evolução numérica do número de lugares, o qual varia de acordo com o número de mesas que são colocadas. Por exemplo, quando perguntamos para a criança quantos lugares serão necessários para dez mesas, ela conta em pares: duas – seis, três – oito, quatro – dez, cinco –doze, seis – quatorze, sete – dezesseis, oito – dezoito, nove – vinte, dez – vinte e dois.

A *utilização de regra funcional* foi a estratégia mais sofisticada constata por Blanton *et al*. (2015). A criança capaz de formular uma explicação a partir de uma regra funcional consegue, por exemplo, no problema das dez mesas, perceber que deve multiplicar o número de mesas por dois e acrescentar mais duas cadeiras, pois esta é a regra de associação entre as duas grandezas, a qual é construída a partir da experimentação com os materiais disponibilizados para a realização da atividade.

Das categorias de procedimentos emergentes da presente pesquisa, podemos identificar relações com a estratégia desenhar e utilização de recursividade. Não constatamos a utilização de regra funcional como estratégia por nenhum dos estudantes.

As categorias de procedimentos Sem-Justificativa, Não-Junta-Mesas e Mais-Quatro não estão associadas com nenhum dos tipos de estratégias presentes no trabalho de Blanton *et al*. (2015), pois no caso da Sem-Justificativa não há presença de causalidade no pensamento dos estudantes, e no caso dos procedimentos do tipo Não-Junta-Mesas e Mais-Quatro, a premissa básica de que as mesas estivessem juntas não foi cumprida, de modo que a construção da regra não está consistente com a realidade observada pela situação concreta do problema. Por isso, consideramos tais categorias de procedimentos *pré-operatórias.*

Podemos afirmar que as categorias de procedimentos Mistura-Cadeiras, Acerto-Cadeiras, Regra-Mais-Um e Regra-Mais-Três possuem associação com a estratégia de desenhar, uma vez que tais procedimentos refletem a necessidade de representação concreta da situação proposta. Os equívocos dos estudantes que utilizaram tais tipos de procedimentos se referem à ausência de esquemas de reversibilidade e uma deformidade da abstração empírica, porém o entendimento da necessidade de junção das mesas e a noção de uma relação entre as grandezas número de mesas e número de cadeiras revelam um grande avanço na construção de padrões algébricos, e a presença de relações de causalidade nos esquemas produzidos por esses estudantes. Como desenhar é uma forma concreta de operar, podemos dizer que os procedimentos que associamos com as estratégias de desenhar, produziram em nossa pesquisa estratégias *funcionais-concretas*.

Percebe-se forte semelhança entre os procedimentos apresentados pelos estudantes que utilizaram procedimentos do tipo Regra-Mais-Dois e a estratégia de utilização de recursividade do trabalho de Blanton *et al*. (2015). Em ambos, os estudantes são capazes de relacionar diretamente as grandezas envolvidas, e conseguem prever resultados a partir da constatação da relação entre o número de mesas e cadeiras. Podemos dizer que foram utilizadas, em nossa pesquisa, estratégias *funcionais-recursivas*.

5.4.3 Níveis de Respostas e Invariantes Operatórios

O Nível I se caracteriza pelo pouco uso de esquemas causais nas estratégias utilizadas. Ele está subdividido em três subníveis, de acordo com os tipos de procedimentos utilizados pelos participantes. O Nível II se caracteriza pelo entendimento da necessidade de junção das mesas. Isto é o que diferencia o Nível I do Nível II. No primeiro, os estudantes não se preocupam com a junção das mesas, o que demonstra um avanço na representação da situação apresentada, ainda que equívocos de distribuição das cadeiras ou ausência de esquemas de reversibilidade estejam evidentes nas estratégias utilizadas por estes estudantes.

As estratégias no Nível III superam as dificuldades dos níveis precedentes, já que os estudantes que utilizaram estratégias de Nível III percebem a importância de juntar as mesas e operam os lugares de forma eficaz, o que possibilita uma correta construção da regra funcional que relaciona o número de mesas e o número de cadeiras. A partir dos procedimentos e estratégias apresentados nesta seção, foi possível construir o Quadro 32, que apresenta os níveis de respostas para a situação de padrão algébrico tratada a partir da Atividade 3B.

Quadro 32 – Níveis de Respostas da Atividade 3B

Categoria	**Descrição**
Nível IA	Há pouca ou nenhuma relação de causalidade na estratégia utilizada. A criança estima sem justificativa o número de lugares, sem relacioná-lo com o número de mesas.
Nível IB	Há pouca ou nenhuma relação de causalidade na estratégia utilizada. A criança não percebe a necessidade de juntar as mesas.Distribui aleatoriamente os lugares nas mesas.
Nível IC	Há pouca ou nenhuma relação de causalidade na estratégia utilizada. A criança não percebe a necessidade de juntar as mesas. Distribui quatro lugares para cada mesa que é introduzida.
Nível IIA	A criança percebe a necessidade de juntar as mesas. Não há entendimento de que cada lugar da mesa só deve abrigar uma cadeira, como no modelo apresentado. A criança coloca mais de uma cadeira em alguns lugares.
Nível IIB	A criança percebe a necessidade de juntar as mesas. A criança só acerta o número de cadeiras a partir da experimentação, necessitando colocar as cadeiras nos lugares, e ainda sendo incapaz de formular mentalmente a regra que relaciona o número de cadeiras como função do número de mesas.
Nível IIC	A criança percebe a necessidade de juntar as mesas. A criança realiza relação biúnivoca entre cadeiras e mesas.
Nível IID	A criança percebe a necessidade de juntar as mesas. A ausência de reversibilidade faz com o que o lugar da ponta seja contado duas

	vezes quando uma mesa é acrescentada, causando uma deformação na regra funcional que relaciona mesas e cadeiras.
Nível III	A criança utiliza a recursividade como forma de prever quantos lugares são necessários para qualquer número de mesas acrescentadas.

Fonte: Autoria própria.

A relação entre as estratégias, os procedimentos e o níveis de respostas dos estudantes com relação à Atividade 3B, referente à ideia de padrão algébrico, está sintetizada na Figura 10, a seguir.

Figura 10 – Procedimentos, Estratégias e Níveis de Padrão Algébrico

Procedimento		Estratégia		Nível
Sem-Justificativa	→	Pré-Operatória	→	IA
Não-Junta-Mesas	→	Pré-Operatória	→	IB
Mistura-Cadeiras	→	Pré-Operatória	→	IC
Acerto-Cadeiras	→	Funcionais-Concretas	→	IIA
Regra-Mais-Um	→	Funcionais-Concretas	→	IIB
Regra-Mais-Três	→	Funcionais-Concretas	→	IIC
Regra-Mais-Quatro	→	Funcionais-Concretas	→	IID
Regra-Mais-Dois	→	Funcionais-Recursivas	→	III

Fonte: Autoria própria.

A necessidade de "junção das mesas" pode ser considerada como um conceito-em-ação, que mobiliza o teorema-em-ação de "contar os lugares cada vez que uma mesa é introduzida". Esta contagem está presente nas estratégias funcionais-concretas, nas quais a criança percebe que há uma relação entre o número de mesas e cadeiras, mas não está certa de que pode construir e utilizar um cálculo matemático para calcular o número de lugares, a partir do número de mesas.

No Nível III de respostas é evidente o uso do teorema-em-ação "adicionar dois lugares cada vez que uma mesa é introduzida", com base no conceito-em-ação da "permanência dos lugares nas pontas das mesas", pois os sujeitos do Nível III percebem que as cadeiras da ponta das mesas nunca são retiradas, e são sempre introduzidos dois lugares nas laterais da nova mesa.

Em síntese, com relação à ideia de padrão algébrico, identificamos quatro invariantes operatórios: os teoremas-em-ação “contar os lugares cada vez que uma mesa é introduzida” e “adicionar dois lugares cada vez que uma mesa é introduzida”, respectivamente ligados com os conceitos-em-ação “junção das mesas” e “permanência dos lugares nas pontas das mesas”.

5.5 Proporcionalidade Algébrica

Nesta seção são apresentados os resultados da pesquisa na situação envolvendo proporcionalidade algébrica. Nesta situação-problema o foco foi avaliar a capacidade dos estudantes de perceber um valor desconhecido e lidar com regras de associação entre grandezas proporcionais.

5.5.1 Procedimentos Proporcionantes

A ideia de proporcionalidade algébrica dos participantes da pesquisa foi analisada a partir dos procedimentos utilizados por eles na Atividade 4, na qual a situação exigia a comparação multiplicativa entre duas medidas. A situação é apresentada no Quadro 33, a seguir.

Quadro 33 – Atividade 4

Proporcionalidade Algébrica
<u>Atividade 4 (problema das balas)</u>: Propõe-se uma situação fictícia na qual um garoto, João, quer comprar balas. João precisa de 5 centavos para comprar 2 balas. Pergunta-se ao participante quanto vai custar se João quiser comprar 12 balas. Em seguida, pede-se que o participante explique como chegou na resposta, utilizando inclusive o material que é apresentado a ele. No final da atividade o pesquisador presenteia o participante com algumas balas utilizadas no experimento. Em alguns casos, principalmente com participantes que estudavam na mesma turma, trocava-se a quantidade de 12 balas por 6, 8 ou 10 no enunciado, a fim de eliminar a possibilidade de acerto por conhecimento prévio da resposta.

Fonte: Autoria própria.

Apesar de o problema ser aparentemente simples e envolver um reduzido material para sua execução, constatou-se o uso recorrente de procedimentos diretos para responder à pergunta do pesquisador. Uma das formas de agir foi simplesmente não responder. Estes foram os procedimentos *Sem-Justificativa*, utilizados por dois estudantes.

Quadro 34 – Categoria Sem-Justificativa

Sem-Justificativa	[4] _Quantos centavos ele precisa para comprar doze balas? _*Pode fazer no celular?* _Não, mas como é que tu faria no celular? _*Na calculadora.* _E que conta tu faria na calculadora? _*Faria ...*(hesita e desiste de explicar a estratégia)*, dá cinquenta centavos.* _Como é que tu sabe? _*Não sei.* [12] _Com cinco centavos ele compra duas balas, mas ele quer comprar dez balas. Quanto que vai custar dez balas? _*Ah, então aí dá quatro balas.* _Ele quer comprar dez balas. Com cinco centavos ele vai na padaria compra duas balas. Mas ele não quer duas, ele quer dez. Quanto ele vai gastar? _*Não sei.*

Fonte: Autoria própria.

No Quadro 34 pode-se perceber que mesmo com a insistência do pesquisador, a expressão “não sei” foi utilizada tanto pelo estudante [4] quanto pela estudante [12], ambos com o intuito de induzir o fim da entrevista e demonstrando certo cansaço nas tentativas de responder às perguntas.

Vários estudantes utilizaram procedimentos *Contas-Aleatórias* para agir na situação apresentada, como pode ser visto no Quadro 35. Esta categoria de procedimentos se caracteriza pela certeza do participante em responder, porém não demonstrando relações de causalidade nos raciocínios apresentados.

Quadro 35 – Categoria Contas-Aleatórias

Contas-Aleatórias	[5] _Quantos centavos ele vai precisar para comprar doze balas dessas? _*Trinta.* _Como tu sabe que é trinta? _*Eu botei duas balas, comprando com cinco, dá trinta.* _Mas que conta tu fez? _*Não sei também, eu só sei que eu pensei, e deu isso.* _E se tivesse uma calculadora, como tu faria na calculadora? _*Também não sei.* _E se ele quisesse comprar, ao invés de doze, dez balas? _*Vinte centavos.* Como é que tu sabe que é vinte centavos? _*Porque trinta tira dez, dá vinte.* [6] _Quantos centavos ele vai precisar para comprar doze balas? _*Ele vai precisar de trinta e cinco centavos.* _Como é que tu sabe que dá trinta e cinco centavos? Porque teve colega teu que disse

	que dá menos. _*Cinco mais, mais, mais, trinta, daí trinta e cinco. Mais ou menos trinta eu acho.* [7] _Quanto custa doze balas? _*Cinquenta.* _Como é que tu sabe que é cinquenta? _*Hum, não sei.* [11] _Com cinco centavos ele compra duas balas, mas ele quer comprar seis balas. De quantos centavos ele vai precisar? _*Seis?* _Como é que tu sabe que é seis? _*Sabendo.* _Com cinco centavos ele compra duas balas, se ele quiser comprar seis balas, de quanto ele vai precisar? _*Sete.* _Como é que tu sabe que é sete? _*Oito, não sei.* [13] _Se tu quisesse comprar dez balas, quantos centavos tu precisaria? _*Dois pila, e ainda ia sobrar* (“pila” é uma popularização no estado do Rio Grande do Sul para a medida monetária *reais*, moeda oficial do Brasil em 2018). _Mas, sem sobrar, para dar bem certinho? _*Acho que vinte centavos*. [16] _Duas balas custam cinco centavos. Se eu quisesse comprar doze balas, quantos centavos custaria? _*Quarenta centavos*. _Como é que tu sabe que é quarenta centavos? _*Doze balas, dá quarenta centavos. Cada uma do mercado perto da minha casa lá tá cinco centavos, cada bala*. _Mas essas aqui tu leva duas balas por cinco centavos. Aí tu quer comprar doze balas, quanto tu vai gastar? _*Um e cinquenta*. _Por que um e cinquenta? Que conta que tu fez? _*Cinco centavos dá duas, mais cinco centavos dá mais duas, mais cinco centavos dá mais duas, mais cinco centavos dá mais duas, mais cinco centavos dá mais duas, e mais duas, e mais duas*. _E daí quantos centavos tu contou até agora? _*Sete centavos*. [17] _Duas balas custam cinco centavos, se ele quiser comprar oito balas, quanto ele vai gastar? _*Um real*. [18] _Duas balas custa cinco centavos, se tu quisesse comprar seis, quanto tu gastaria? _*Nove*. _Nove centavos? _*Um real*. _Que conta tu fez? (a estudante fica um pouco pensativa e muda sua resposta) _*Sete*. _Por que sete? _*Porque tem na conta*. _Qual conta tu fez? (a estudante pensa, mas não responde). [22] _Duas balas custam cinco centavos, se ele quiser comprar doze, quantos centavos vai custar? _*Dezessete reais*. _Como tu fez a conta? _*De cabeça, não sei se tá certa*. [23] _Duas balas custam cinco centavos, quanto custa doze balas? _*Sessenta centavos*. _Como tu sabe, como tu fez a conta? _*Ah, eu não sei, assim: cinco, dez, quinze, vinte, vinte e cinco, trinta, trinta e cinco, quarenta, quarenta e cinco, cinquenta, cinquenta e cinco, sessenta. Cada bala formaria os cinco centavos* _Mas não é cada bala, cinco centavos, é cada duas balas, custa cinco centavos. _*Então sessenta e cinco, acho, não sei*. _Como é que tu fez a conta, com os dedos? _*Não, agora, por exemplo, se for sessenta cada uma, duas seriam sessenta e cinco, só botar mais cinco.*

Fonte: Autoria própria.

É interessante notar que a estimativa é uma possibilidade de procedimento utilizado por alguns estudantes, como por exemplo a estudante [6], que responde “mais ou menos trinta eu acho”. Ainda que esta estudante não esteja confiante para formular e comunicar uma resposta exata, ela consegue ao menos apresentar uma estimativa.

Outros participantes, como o estudante [16] apresentam vários cálculos para justificar sua resposta, porém os resultados não se confirmam, e ainda assim o estudante continua apresentando uma resposta que acredita ser exata. A estudante [18] tenta várias respostas, sem explicar nenhum cálculo, apenas dita vários números e espera o pesquisador avaliar sua resposta.

O estudante [23] formula uma regra segundo a qual “é só botar mais cinco”, porém não explica como formulou esta regra, aparentemente da sua própria recitação dos números de cinco em cinco enquanto aguardava o pesquisador avaliar suas respostas, sem apresentar uma linha de pensamento que possibilitasse analisar uma relação de causalidade em seus raciocínios.

Denominamos *Vezes-Cinco* a categoria de procedimentos caracterizada por simplesmente multiplicar os cinco centavos pelo número de balas, isto é, sem considerar que com cinco centavos seria o preço de duas balas. Embora apenas um estudante tenha apresentado este tipo de procedimento, consideramos importante caracterizar este procedimento como uma estratégia isolada, já que este era um tipo de resposta esperada, mas não foi frequente.

Quadro 36 – Categoria Vezes-Cinco

Vezes-Cinco	[19] _Duas balas custa cinco centavos, se tu quisesse doze, quanto tu ia pagar? _*Sessenta centavos*. _Teve colega teu que disse que dá menos, tu acha que ele pode tá certo ou ele tá errado? _*Eu acho que ele pode tá errado*. _Por que? _*Porque eu contei de dois em dois, ele deve ter contado errado*.

Fonte: Autoria própria.

No Quadro 36 pode-se ver que o estudante [19] responde “sessenta centavos” porque multiplica cada bala por cinco, e mesmo após a contra-argumentação mantém esta resposta, certo da consistência de seu cálculo. Ressalta-se que o estudante não realiza nem contagem nos dedos, nem em outros objetos, foi uma multiplicação realizada estritamente por meio de cálculo mental.

Outra categoria de procedimentos utilizada por uma única estudante, mas que merece ser destacada é que chamamos de *Vezes-Dez*. Esta categoria de procedimentos se caracteriza pelo entendimento de que o valor pago deverá corresponder a dez vezes o número de balas, tal como é ilustrado no Quadro 37.

Quadro 37 – Categoria Vezes-Dez

Vezes-Dez	[9] _Se ele quiser comprar quatorze balas, quanto ele vai gastar? Quantos centavos ele precisa? _*Um e quarenta*. _Como é que tu sabe? _*Como ele quer quatorze, daí dez de cinco, daí vai dar isso daí.* _Tá mas cada duas balas, custa cinco centavos. Com cinco centavos ele compra duas balas e ele quer comprar quatorze balas. _*Para mim deu um e quarenta.* _Deu um e quarenta, resposta final? _*Sim.*

Fonte: Autoria própria.

A estudante [9] explica que "como ele quer quatorze, daí dez de cinco, daí vai dar isso daí", o que indica que provavelmente no seu entendimento, a quantidade de duas balas foi interpretada como um fator que deve ser multiplicado pelos cinco centavos, e este resultado, que seria dez, nesta forma de pensar, deveria por sua vez, ser multiplicado pelo número de balas. É uma forma bastante peculiar de interpretar e operar com as grandezas do problema.

Durante a aplicação da Atividade 4, os materiais das atividades anteriormente realizadas estavam dispostos na mesa para os estudantes. Embora não fosse esperado previamente pelos pesquisadores envolvidos no planejamento da atividade, alguns estudantes optaram por utilizar as bolinhas de gude da Atividade 2 como uma forma de representar os centavos, e em alguns casos, também as próprias balas, para quantidades maiores do que duas.

Classificamos os procedimentos utilizados pelos estudantes que aproveitaram as bolinhas de gude da Atividade 2 como *Conta-Bolinhas*. Esta categoria de procedimentos foi caracterizada pelo uso daquele material durante a execução da Atividade 4, envolvendo a ideia de proporcionalidade algébrica. Estes procedimentos são ilustrados no Quadro 38, a seguir.

Quadro 38 – Categoria Conta-Bolinhas

Conta-Bolinhas	[1] _Quanto ele vai gastar para comprar doze balas? _(depois de pensar bastante, e utilizar as bolinhas de gude da atividade 2 para representar as balas) *Acho que é 31 centavos, não sei.* (houve um erro de contagem com as bolinhas de gude). [8] _Duas balas custam cinco centavos. Agora ele quer comprar oito balas. Quantos centavos ele vai precisar para comprar oito balas? _*Trinta.* _Como é que tu sabe que é trinta? _*Imaginei, só na mente.* _Teve colega teu me dizendo que dá menos. Tu acha que eles tão certos ou tão errados? _ (o estudante pensou, mas não respondeu). _Olha só, presta atenção: cinco centavos, duas balas. Mas aí ele quer comprar oito balas. Se quiser pode usar bolinhas de gude ou nos dedos. _(o estudante pega bolinhas de gude para representar as balas, agrupando-as duas a duas) *Cinco, dez, vinte! Dá vinte centavos.* [10] _Duas balas custam cinco centavos, se ele quiser comprar dez balas, quanto ele vai gastar em centavos? _*Se duas são cinco, eu vou pegar isso aqui para contar quantas balas são* (e pega bolinhas de gude da atividade 2), *cinco, dez, quinze, vinte, vinte e cinco. Vai ser vinte e cinco centavos.* _Resposta final? _*Sim*. [14] _Com cinco centavos tu comprar duas balas, com quantos centavos tu compra doze balas? _*Uma, duas, três, quatro, cinco...* (contando as bolinhas de gude, mas desiste)*, ah eu acho que vai dá seis reais*. [20] _Essas duas balas aqui custam cinco centavos, mas tu quer comprar oito. Tu não quer comprar duas, mas tu quer comprar oito. Quanto tu vai gastar? _*Um real*. _Um real? Que conta tu fez? _*De mais*. _Olha só, duas custam cinco centavos, mas tu quer comprar oito. _*Cinco mais cinco é dez. Mas como não dá... Cinco, eu quero comprar oito.* _Tu pode pegar as bolinhas de gude se tu quiser (e o participante pegas as bolinhas de gude). _*Cinco, mais um, dez, quinze, mais cinco. Peraí* (e recomeça a contagem). *Cinco mais cinco é dez, ele quer comprar oito, eu vou usar... nove centavos*. [21] _Duas balas custam cinco centavos, mas tu quer comprar doze, quanto tu tem que pagar? Tu pode usar as bolinhas de gude, se quiser (a estudante conta nas bolinhas de gude) _*Dezesseis*. _Não, não. Tu pode usar para fazer as contas, as bolinhas de gude, essas aqui são dá outra conta, já foram contadas. Assim ó: tu sabe que duas balas custam cinco centavos, mas tu quer saber quanto custam doze balas. Que conta tem que fazer? _*Ai, me esqueci, eu sabia, mas me esqueci*. [24] _Vamos supor que duas balas custam cinco centavos, mas tu quer comprar oito, quantos centavos tu vai gastar? _*Cada bala?* _Cada duas balas custam cinco centavos, mas tu quer comprar oito (o estudante pensa por algum tempo, depois conta com o auxílio das bolinha de gude). _*Ele vai ter que ter pra comprar, quarenta centavos*. _Como é que tu pensou? Como é que tu fez a conta? _*Pelas bolinhas, também pensando: dez, cinco, ..., dez, ..., daí vai indo*.

Fonte: Autoria própria.

Ainda que esta estratégia tenha sido considerada pelos pesquisadores como bastante sofisticada, isto não implica na sua eficácia. A estudante [1], por exemplo, ao realizar a atividade, cometeu alguns erros na contagem das bolinhas, e isto acabou contribuindo para que apresentasse uma resposta incorreta. O estudante [20] também erra, apesar de utilizar o modelo das bolinhas de gude como um parâmetro de contagem.

O procedimento mais bem sucedido, e que demonstra uma necessidade de perceber concretamente a situação apresentada foi constatado na entrevista com o estudante [8], que em sua tentativa de resolver o problema via cálculo mental comete um erro de estimativa, mas ao perceber que poderia agrupar as bolinhas de duas em duas, como se fossem balas, e associar o valor de cinco centavos para cada dupla de bolinhas, consegue obter êxito e expressa estar certo de sua resposta.

A contagem foi um procedimento bastante utilizado pelos estudantes. Além de contarem utilizando as bolinhas de gude como recurso, alguns estudantes optaram por contar nos próprios dedos, como pode está ilustrado no Quadro 39, a qual ilustra procedimentos que categorizamos como *Conta-Dedos*.

Quadro 39 – Categoria Conta-Dedos

Conta-Dedos	[2] _Quanto ele precisa para comprar doze balinhas? _(utiliza as bolinhas de gude para representar as balas, em seguida também realiza contagem nos dedos) *Eu contei nos dedos, mas não adiantou nada, eu acho que deu cinquenta centavos.* _Outro colega disse que deu diferente, o que tu acha? _*Eu acho que é isso aí mesmo.* _ A tua resposta que está certa? _*É.* [3] _Tem um amigo meu, o João, ele quer comprar doze balas dessas aqui, duas custam cinco centavos. _*Vai dá dez centavos.* _Duas dá cinco centavos, ele que comprar doze. _*Deixa eu ver* (e começa a contar nos dedos)*, dá cinco, dez, quinze, duas fica cinco, mais duas dá quatro fica dez, mais duas fica seis dá quinze, mais duas fica oito dá vinte, mais duas fica dez, dá vinte e cinco, mais duas dá trinta e cinco centavos*. _Teve um outro colega que disse que deu menos que isso, tu acha que ele tá certo ou que ele tá errado? _*Tá errado.* _O que ele pode ter errado? _*Porque tu pode contar de cinco ó: cinco, dez, quinze, vinte, vinte e cinco, e já deu mais vinte e cinco, daí com mais dez vai dá trinta e cinco. Não, vai dar trinta centavos, é trinta centavos.* (o estudante reconta nos dedos e percebe o erro da primeira contagem) [15] _Duas balas custa cinco centavos. Quanto custa seis balas? _*Cinco mais cinco: dez. Dez mais cinco: vinte* (pensando e contando no dedos, ao mesmo tempo). _Dez mais cinco: vinte? _*Não, dez mais cinco: quinze. Eu errei. Quinze*.

Fonte: Autoria própria.

O estudante [2] admite que não está seguro de sua resposta ao dizer “eu contei nos dedos, mas não adiantou nada”, partindo em seguida para uma estimativa. Ainda que no final o estudante tenha utilizado uma estimativa, optou-se por classificar como contagem o procedimento utilizado por ele porque foi a ação utiliza na maior parte do tempo da entrevista, ainda que ele não tenha sido bem sucedido em sua resposta.

Destacamos que o estudante [3] e a estudante [15] produziram respostas e explicações eficazes para a situação apresentada, porém cometeram alguns erros na contagem, os quais foram contornados por uma conferência posterior em ambos os casos. Destaca-se também que mesmo utilizando uma estratégia sofisticada para tratar o fato de haver uma relação de proporção entre as grandezas, a estudante [15] comente um erro de adição bastante elementar, indicando que o desenvolvimento da habilidade de identificar proporções algébricos pode acontecer concomitantemente à construção do conceito de número e das primeiras operações entre número naturais.

5.5.2 Discussão das Categorias à Luz das Estratégias

Apesar de o trabalho de Blanton *et al*. (2015) discutir vários tipos de estratégias de crianças em problemas relacionados com o pensamento algébrico e propor uma nova grande ideia da Álgebra, que é o raciocínio proporcional, os autores daquele trabalho não fazem uma distinção clara das estratégias em situações envolvendo a proporcionalidade algébrica.

Ao invés de relacionarmos as estratégias encontradas no trabalho de Blanton *et al*. (2015), com os procedimentos emergentes da coleta de dados, foi necessário construir as estratégias a partir das categorias, seguindo as principais ideias das crianças em seus procedimentos adotados.

Os procedimentos Sem-Justificativa e Contas-Aleatórias não apresentam esquemas com a presença de relações de causalidade, por isso optamos por definir como *pré-operatórias* as estratégias utilizadas pelos estudantes que realizaram procedimentos dessas duas categorias.

Os procedimentos de multiplicação por cinco e dez revelam uma intenção inicial de relacionar o número de balas e o custo, porém a multiplicação foi o único recurso utilizado pelos estudantes que realizaram estes tipos de procedimentos. Chamamos as estratégias relacionadas com estes procedimentos de *multiplicativas*.

Já as crianças que optaram pela contagem, utilizando procedimentos das categorias Conta-Bolinhas e Conta-Dedos, conseguiram operar com as quantidades, relacionando por meio de uma regra de proporção a quantidade de balas e o preço total das balas. Por isso chamamos estas estratégias de *proporcionantes*.

5.5.3 Níveis de Respostas e Invariantes Operatórios

No Quadro 40 apresentamos os níveis de respostas dos estudantes, com base nos procedimentos e nas estratégias, construídas a partir dos procedimentos utilizados pelos participantes na Atividade 4.

Quadro 40 – Níveis de Respostas da Atividade 4

Categoria	Descrição
Nível IA	Ausência de relações causais. A criança não consegue formular uma resposta com justificativa ao pesquisador.
Nível IB	Ausência de relações causais. A criança realiza cálculos aleatórios, sem utilizar um parâmetro para seus cálculos.
Nível IIA	A criança utiliza a multiplicação como forma de agir na situação proposta. Multiplica por cinco, como se cada bala custasse cinco centavos, sem levar em consideração o fato de que duas balas custam cinco centavos.
Nível IIB	A criança utiliza a multiplicação como forma de agir na situação proposta. Multiplica por dez, pois necessita utilizar os dados do problema, sem atentar para as operações realizadas.
Nível IIIA	A criança estabelece uma relação entre o número de balas e moedas e representa esta relação utilizando os objetos à sua disposição como parâmetro.
Nível IIIB	A criança estabelece uma relação entre o número de balas e moedas e representa esta relação utilizando os dedos como parâmetro.

Fonte: Autoria própria.

O Nível I se caracteriza pela ausência de relações causais. O Nível II se constitui por aqueles procedimentos e estratégias ligados com a ideia de multiplicação, sem recorrer à contagem de objetos, o que caracteriza a passagem do Nível II para o Nível III. Este último possui duas subdivisões: contagem em objetos e contagem nos dedos. A Figura 11 apresenta uma síntese dos procedimentos, estratégias e níveis de reposta à Atividade 4, que envolve a ideia de proporcionalidade algébrica, também conhecida na literatura como raciocínio proporcional.

Figura 11 – Procedimentos, Estratégias e Níveis de Proporcionalidade Algébrica

Procedimento		Estratégia		Nível
Sem-Justificativa	→	Pré-Operatória	→	IA
Contas-Aleatórias	→	Pré-Operatória	→	IB
Vezes-Cinco	→	Multiplicativa	→	IIA
Vezes-Dez	→	Multiplicativa	→	IIB
Conta-Bolinhas	→	Proporcionante	→	IIIA
Conta-Dedos	→	Proporcionante	→	IIIB

Fonte: Autoria própria.

A partir da organização dos níveis de respostas dos estudantes, podemos constatar a presença de dois tipos de teorema-em-ação e seus respectivos conceitos-em-ação, o que constitui o corpo de invariantes operatórios de proporcionalidade algébrica.

Um primeiro teorema-em-ação que podemos destacar é a “multiplicação das balas por um fator”, presente nas estratégias multiplicativas e baseadas no conceito-em-ação “uma medida para cada objeto”. Para a criança que utiliza este teorema-em-ação, cada bala deve ter um preço, não estando clara a ideia de que pode haver um preço para um conjunto de várias balas.

Outro teorema-em-ação constatado nesta pesquisa foi “relacionar proporcionalmente duas grandezas”, neste caso, relacionar proporcionalmente o número de balas e o custo total, já que a multiplicação é uma operação insuficiente para inferir que duas balas podem estar associadas a um único preço. Assim, o conceito de ação de “uma medida para mais de um objeto” foi a base para o uso deste segundo teorema-em-ação.

Em suma, constatamos o uso de quatro invariantes operatórios relacionados com a proporcionalidade algébrica: os teoremas-em-ação “multiplicação das balas por um fator” e “relacionar proporcionalmente duas grandezas”, e os respectivos conceitos-em-ação “uma medida para cada objeto” e “uma medida para mais de um objeto”.

5.6 Caracterização dos Invariantes Operatórios Algébricos

Nesta seção apresentamos as características gerais dos invariantes operatórios constatados na pesquisa, bem como as relações existentes entre os diferentes tipos de teoremas-em-ação algébricos. No Quadro 41 apresentamos os níveis de respostas para cada estudante. Nota-se, de maneira geral, que não houve correspondência direta entre os níveis para os diferentes tipos de noções algébricas.

Quadro 41 – Relação entre participantes e níveis de estratégias

Estudante	Nível de Equilíbrio Algébrico	Nível de Generalização Algébrica	Nível de Recursividade Algébrica	Nível de Padrão Algébrico	Nível de Proporcionalidade Algébrica
1 (menina)	III	II	II	I	III
2 (menino)	I	I	I	II	III
3 (menino)	III	III	II	I	III
4 (menino)	II	III	II	II	I
5 (menina)	II	III	II	I	I
6 (menina)	I	III	II	I	I
7 (menino)	I	III	II	II	I
8 (menino)	I	III	II	III	III
9 (menina)	I	III	II	III	II
10 (menino)	I	III	II	III	III
11 (menina)	I	I	II	II	I
12 (menina)	I	III	II	I	I
13 (menino)	I	III	II	II	I
14 (menina)	I	III	II	III	III
15 (menina)	II	III	II	II	III
16 (menino)	I	III	II	III	I
17 (menino)	I	III	II	I	I
18 (menina)	I	I	II	III	I
19 (menino)	I	III	II	I	II
20 (menino)	I	III	II	III	III
21 (menina)	I	II	I	I	III
22 (menina)	I	III	II	II	I
23 (menino)	II	III	II	III	I
24 (menino)	I	III	II	III	III

Fonte: Autoria própria.

A partir deste resultado, podemos dizer que parece não haver uma correlação direta entre o desempenho de cada estudante em situações envolvendo diferentes noções algébricas. Por exemplo, a estudante [5] apresentou estratégias de nível II na situação de equilíbrio, nível III na situação de generalização, nível II na situação de recursividade, nível I na situação de padrão e nível I na situação de proporcionalidade. Isto ilustra a possibilidade de um mesmo sujeito estar em níveis totalmente diferentes de estratégias mentais em situações que envolvem o campo conceitual algébrico inicial.

É possível notar que a grande maioria dos participantes apresenta um nível baixo de resposta para situações de equilíbrio algébrico, porém nas situações de generalização algébrica e recursividade algébrica, a grande maioria alcançou o nível mais sofisticado de resposta. Nas situações de padrão algébrico e proporcionalidade algébrica não tivemos uma tendência geral. Podemos dizer, a partir destes dados, que os participantes apresentaram dificuldades na situação de equilíbrio, mas resolveram com maior facilidade as situações de padrão e proporcionalidade.

Esta diferenciação dos níveis de respostas, especialmente para atividades envolvendo noções algébricas diferentes para um mesmo participante, indica que o desenvolvimento destas noções acontece de forma independente, corroborando com a classificação proposta por Blanton *et al*. (2015), dividindo o pensamento algébrico em cinco grandes noções. Isto mostra que foi acertada a decisão desses autores em ampliar a classificação dos tipos de pensamento algébrico proposta inicialmente por Blanton e Kaput (2005).

Ainda que nossa análise esteja compreendida no escopo das situações que foram estudadas, a variedade de respostas obtidas, bem como os vários tipos de estratégias apresentadas pelos vinte e quatro estudantes, os resultados desta pesquisa ilustram a riqueza de possibilidades que se pode explorar com atividades envolvendo noções algébricas.

Foi possível produzir um panorama dos invariantes operatórios utilizados pelos estudantes nos experimentos. De acordo com os resultados obtidos, a seguir apresentamos novamente os invariantes constatados para cada uma das principais noções de pensamento algébrico, desta vez sintetizados como uma parte contínua do texto.

Com relação à noção de equilíbrio algébrico, constatou-se a possibilidade de uso de quatro invariantes operatórios: os teoremas-em-ação “completar a quantidade que falta” e “encontrar a incógnita a partir do equilíbrio”; e os respectivos conceitos-em-ação “sequência sem números que se repetem” e “equilíbrio dos pesos na balança”.

Com relação à noção de generalização algébrica, seis invariantes operatórios foram constatados para a situação de generalização algébrica: os teoremas-em-ação “verificar se a soma das quantidades permanece igual”, “inversão de algarismos” e “inversão das parcelas”; e seus respectivos conceitos-em-ação “quantidade que se altera com inversão de parcelas”, “resultado que não se altera com a inversão de quaisquer signos” e “resultado que não se altera pela inversão das parcelas”.

Com relação à noção de recursividade algébrica, foi constatado o uso de seis invariantes operatórios: os teoremas-em-ação “regra de associar acrescentando um”, “regra de dobrar as quantidades” e “construção da regra a partir da realidade observada”; e os conceitos-em-ação “relação biúnivoca entre grandezas”, “existência de relação proporcional entre quaisquer grandezas” e “necessidade de experimentar para inferir a regra”.

Com relação à noção de padrão algébrico, identificamos quatro invariantes operatórios: os teoremas-em-ação “contar os lugares cada vez que uma mesa é introduzida” e “adicionar dois lugares cada vez que uma mesa é introduzida”, respectivamente ligados com os conceitos-em-ação “junção das mesas” e “permanência dos lugares nas pontas das mesas”.

Com relação à noção de proporcionalidade algébrica, constatamos o uso de quatro invariantes operatórios relacionados com a proporcionalidade algébrica: os teoremas-em-ação “multiplicação das balas por um fator” e “relacionar proporcionalmente duas grandezas”, e os respectivos conceitos-em-ação “uma medida para cada objeto” e “uma medida para mais de um objeto”.

Como características gerais que podemos extrair de todos estes invariantes operatórios, podemos destacar: o reconhecimento de regras gerais, os diferentes níveis de sofisticação das representações simbólicas e a possibilidade de um mesmo sujeito apresentar níveis de estratégias completamente diferentes, dependendo do tipo de noção algébrica que cada situação requer.

O teorema-em-ação “resultado que não se altera pela inversão das parcelas”, por exemplo, utilizado pelos estudantes [3] e [14] em situações que envolvem a noção de generalização algébrica, ilustra como o reconhecimento de regras gerais que se aplicam para variados tipos de situações é uma característica presente nos invariantes operatórios do pensamento algébrico inicial, sobretudo nas estratégias mais sofisticadas.

Ainda considerando problemas que abordam a noção de generalização algébrica, podemos dizer que há diferentes níveis de sofisticação das representações simbólicas para representar as propriedades mais gerais dos números. O estudante [7], por exemplo, representa seu pensamento comutativo indicando que a ordem dos copos não faz diferença no resultado da soma. Já o estudante [3] utiliza a própria representação do algoritmo da adição como forma de expressar a mesma propriedade comutativa dos números. São níveis de representação diferentes que envolvem a mesma ideia de comutatividade.

A possibilidade de o mesmo sujeito apresentar diferentes níveis de respostas, dependendo da noção algébrica envolvida, já foi mencionada no início desta seção, quando apresentamos o caso da estudante [5], que demonstrou estar em níveis diferentes de compreensão para cada noção algébrica.

Estas três características corroboram para a validade da definição clássica de pensamento algébrico, no contexto da educação matemática, dada por Blanton e Kaput (2005):

> processo pelo qual os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de casos particulares, estabelecem essas generalizações através de discurso argumentativo, e expressam-nas de formas progressivamente mais formais e adequadas à sua idade.

A construção de regras gerais está de acordo com a ideia de que “os alunos generalizam ideias matemáticas”, assim como os diferentes níveis de sofisticação das representações simbólicas se aproximam bastante das “formas progressivamente mais formais e adequadas à sua idade”. Acrescentamos aqui, no sentido de complementar esta definição, que este processo evolui de formas distintas para cada tipo de noção algébrica.

6. Considerações Finais

Como síntese dos resultados, podemos dizer que o presente trabalho apresenta uma nova abordagem sobre as estratégias utilizadas em problemas que envolvem pensamento algébrico. Considerar a existência de um campo conceitual algébrico inicial implica reconhecer a importância dos teoremas-em-ação e conceitos-em-ação envolvidos em situações de equilíbrio algébrico, generalização algébrica, recursividade algébrica, padrão algébrico e proporcionalidade algébrica.

Voltando a questão de pesquisa: como se caracterizam os invariantes operatórios que as crianças utilizam em problemas que envolvem o pensamento algébrico? Podemos afirmar que tais invariantes se caracterizam pelo entendimento de que existem regras gerais que podem ser aplicadas às certas situações, as quais podem adquirir forma nas representações simbólicas da criança, mas não necessariamente correspondem aos signos algébricos usuais. Tais representações apresentam progressivos níveis de sofisticação e podem estar associadas com diferentes níveis de estratégias mentais para cada tipo de noção algébrica, isto é, é possível que o sujeito esteja plenamente desenvolvido na habilidade de reconhecer padrões algébricos, por exemplo, mas não seja capaz de agir em situações que envolvam generalização algébrica.

Esta independência entre os níveis de respostas para diferentes noções algébricas nos permite inferir que a divisão em vários tipos de problemas de pensamento algébrico, que vem sendo adotada na literatura, está coerente com as diferentes formas de pensar de estudantes do início de escolaridade.

Consideramos que os objetivos específicos (relacionar as estratégias, classificar os níveis de respostas e apresentar as características gerais das estratégias) foram alcançados, conforme pode ser visto no detalhamento apresentado no capítulo de resultados e discussões.

O objetivo geral deste trabalho foi descrever e analisar os invariantes operatórios utilizados por estudantes do terceiro ano do Ensino Fundamental em situações que envolvem pensamento algébrico. Consideramos que este objetivo foi alcançado, de modo que foi possível identificar e classificar as estratégias dos estudantes, além de apontar as principais características destes invariantes operatórios.

Através da aplicação do Método Clínico de Manipulação-Formalização identificamos e classificamos as diferentes estratégias das crianças enquanto agiam nas atividades propostas. Apesar do recorte realizado para analisar cada tipo de noção algébrica, já que não seria possível abordar aqui todos os tipos possíveis de problemas que envolvem cada noção, podemos dizer que pode-se aplicar o mesmo tipo de análise para outras situações, considerando as diferenças de sofisticação das explicações dadas pelos participantes.

Procuramos identificar as principais características dos invariantes operatórios que fomos constatando para cada tipo de noção algébrica. A caracterização dos invariantes operatórios foi totalmente baseada na análise das estratégias e níveis de respostas que emergiram dos dados desta pesquisa.

Ressaltamos que várias ideias apresentadas aqui já haviam sido apontadas em outros trabalhos da literatura sobre pensamento algébrico, de modo que nossos resultados corroboram com vários autores que já versaram sobre o tema. No entanto, a abordagem desta temática sob o ponto de vista da Teoria dos Campos Conceituais é o ponto no qual entendemos estar o maior grau de originalidade deste trabalho, que apresenta o pensamento algébrico da criança como um grande campo conceitual, que se subdivide em várias vertentes.

Como sugestão para trabalhos futuros, seguindo esta abordagem de ter os campos conceituais como referencial teórico, destacamos: 1) aprofundar a discussão sobre as representações simbólicas da criança, associadas com cada invariante operatório que descrevemos e analisamos nesta pesquisa; 2) estudar quantitativamente o uso das estratégias e níveis de repostas que apresentamos aqui; 3) aprofundar as relações conceituais que existem entre representações algébricas mais sofisticadas, como as utilizadas no final do Ensino Fundamental, por exemplo, e a forma de apresentação dos problemas que envolvem pensamento algébrico nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

O campo conceitual algébrico inicial, portanto, constitui-se de situações, invariantes operatórios e representações simbólicas que envolvem as noções de equilíbrio, generalização, recursividade, padronização e proporção, havendo várias formas de conexão com os campos conceituais das estruturas aditivas e multiplicativas. Muitas destas conexões ainda não são bem compreendidas na literatura, e também podem ser exploradas com maior profundidade em trabalhos futuros.

Os teoremas-em-ação e conceitos-em-ação do campo algébrico inicial utilizados pelos sujeitos participantes desta pesquisa variam desde ações que não se justificam por meio de explicações até procedimentos mais sofisticados e com explicações bem elaboradas. Isto indica que o pensamento algébrico das crianças participantes é ativo, e utiliza estratégias semelhantes aos problemas formais. Se dispensarmos um tratamento mais rigoroso com as representações, é possível verificar a sofisticação das estratégias algébricas.

Com base nos resultados desta tese, apresentamos algumas recomendações para o ensino da Álgebra nos anos iniciais: 1) utilização de problemas nos quais o sinal de igualdade não seja apenas o resultado de um processo aritmético, mas represente o equilíbrio entre duas expressões, exercitando assim o pensamento relacional da criança; 2) estímulo a resolução de problemas que envolvam as cinco grandes noções algébricas, como por exemplo, as atividades que apresentamos neste trabalho, e também as situações propostas no estudo de Blanton *et al.* (2015); 3) compreensão de que as respostas das crianças não precisam, necessariamente, apresentar representações sofisticadas, pois o foco nos anos iniciais deve estar em desenvolver o pensamento algébrico, já que o estudo da Álgebra, no contexto mais formal, só deve acontecer no final do Ensino Fundamental.

Os resultados deste trabalho podem ser utilizados nas escolas, tendo em vista que o pensamento algébrico é uma temática de interesse para vários níveis escolares, porém ainda há um reduzido número de iniciativas que promovam esclarecimentos sobre como a Álgebra deva ser tratada nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Esta tese pode ser usada como uma referência em cursos de formação inicial e continuada para professores que ensinam Matemática. Acredito este o impacto social do trabalho.

O impacto científico desta tese reside no fato de ser uma nova abordagem da temática do pensamento algébrico, partindo de um ponto de vista pós-construtivista, mais especificamente, utilizando argumentos da Teoria dos Campos Conceituais para explicar o fenômeno do pensamento algébrico inicial.

Para concluir, ao contrário do que acontece com os campos conceituais aritméticos (aditivo e multiplicativo), parece haver uma grande diferença entre as representações simbólicas no campo conceitual algébrico inicial e os signos algébricos usuais, embora seja possível identificar os invariantes operatórios algébricos, até mesmo nas estratégias de crianças do terceiro ano do Ensino Fundamental. Isto indica que é possível o desenvolvimento de intervenções pedagógicas que mobilizem o pensamento algébrico desde os anos iniciais, porém é preciso ter em vista que as representações são muito particulares e que as expressões utilizadas pelas crianças revelam o nível das estratégias mentais que elas são capazes de alcançar para diferentes tipos de noções algébricas.

Referências

ALMEIDA, J. R.; SANTOS, M. C. Pensamento Algébrico: Em Busca de uma Definição. **Revista Paranaense de Educação Matemática - RPEM**, Campo Mourão - PR, v.6, n.10, jan.-jun., p.34-60, 2017.

BAUMGART, J. K. **Álgebra**. Editora Atual, São Paulo, 1992. Coleção Tópicos em sala de aula para uso em sala de aula - Volume 4. Tradução de Higino H. Domingues. 112p.

BECK, V. C. **Elementos de Álgebra Linear e Geometria Analítica**. Editora Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2012. 139p.

BECK, V. C. **Os Problemas Aditivos e o Pensamento Algébrico no Ciclo de Alfabetização.** 2015. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande - RS. 74p.

BECK, V.C.; SILVA, J. A. A busca por valor desconhecido em problemas aditivos: uma possibilidade de desenvolvimento do pensamento algébrico na alfabetização. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v.9, n.1, p.64-85, 2016.

BECK, V. C.; SILVA, J. A. O Estado da Arte das Pesquisas sobre o Pensamento Algébrico com Crianças. **REVEMAT**, Florianópolis (SC), v.10, n.2, p.197-208, 2015a.

BECK, V. C.; SILVA, J. A. Pensamento Algébrico Funcional: O Uso da Previsão de Resultados em Problemas Aditivos. **Teoria e Prática da Educação**, v.18, p.69-78, 2015b.

BECKER, F. Modelos pedagógicos e epistemológicos. **Educação e Realidade**, v.19, n.1, p.89-96, 1999.

BLANTON, M.; KAPUT, J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, v.36, n.5, p.412-446, 2005.

BLANTON, M.; STEPHENS, A.; KNUTH, E.; GARDINER, A. M.; ISLER, I.; KIM, J.-S. The Development of Children‟s Algebraic Thinking: The Impact of a Comprehensive Early Algebra Intervention in Third Grade. **Journal for Research in Mathematics Education**, v.46, n.1, p.39-87, 2015.

BOYER, C. B. **História da matemática**. Trad. Elza F. Gomide. 2. ed., São Paulo: Edgard Blücher, 1996. 496p.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigaçãoqualitativa em educação**. Porto Alegre: Porto Editora, 1994.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica, Brasília, 2017.

______. **Elementos Conceituais e Metodológicos para os Direitos de Aprendizagem e Desenvolvimento do Ciclo de Alfabetização (1º, 2º e 3º anos) do Ensino Fundamental**. Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica, Brasília, 2012.

______. **PNAIC - Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa**.Ministério da Educação, Secretária de Estado de Educação, Brasília, 2018. Disponível em: <http://www.educacao.df.gov.br/pnaic-pacto-nacional-pela-alfabetizacao-na-idade-certa/>. Acesso em: 20 jun. 2018.

______. **PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática - 1º e 2º Ciclos**. Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica, Brasília, 1997.

CANAVARRO, A. P. O Pensamento Algébrico na Aprendizagem Matemática nos Primeiros Anos. **Quadrante**, v.16, n.2, p.81-118, 2007.

CARDOSO, V. C.; KATO, L. A.; OLIVEIRA, S. R. Um estudo no campo conceitual de Vergnaud aplicado às matrizes: uma investigação acerca dos invariantes operatórios. **REVEMAT**, Florianópolis (SC), v.08, Ed. Especial (dez.), p.95-116, 2013.

CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. D.; BRIZUELA, B. M.; EARNEST, D. Arithmetic and algebra in early Mathematics Education. **Journal for Research in Mathematics Education**, v.2, n.37, p.87-115, mar. 2006.

CARPENTER, T. P.; LEVI, L.; FRANKE, M. L. ZERINGUE, J. K. Algebra in the elementary school: developing relational thinking. **ZDM – The International Journal on Mathematics Education**, v.37, n.1, p.53-59, 2005.

CHEVALLARD, Y.; JOHSUA, M.-A. Un exempled"analyse de la transposition didactique: La notion de distance. **Recherches em didactique des mathématiques**, v.3, n.2, 1982.

CHEVALLARD, Y. **La transposiciónDidática**: del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires: Aique Grupo Editor, 2005.

CHEVALLARD, Y. Sobre a teoria da transposiçãodidática: algumas considerações introdutórias. **Revista de Educação, Ciências e Matemática**, v.3, n.2, 2013.

CURI, E.; PIRES, C. M. C. Pesquisas sobre a formação do professor que ensina matemática por grupos de pesquisa de instituições paulistanas. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.10, n.1, p.151-189, 2008.

CYRINO, M. C. C. T.; OLIVEIRA, H. M. Pensamento Algébrico ao Longo do Ensino Básico em Portugal. **Bolema**, Rio Claro (SP), v.24, n.38, p.97-126, 2011.

DELVAL, J. 2001. **Introdução à Prática do Método Clínico:** descobrindo o pensamento das crianças. Tradução de Fátima Murad. Porto Alegre: Artmed, 2002.

DOMINGUES, H. H. **Fundamentos de aritmética**. Editora Atual, São Paulo, 1991.

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. **Álgebra moderna**. Editora Atual, 4. ed., São Paulo, 2003.

FALCÃO, J. T. R. Alfabetização Algébrica nas Séries Iniciais. Como Começar?. **Boletim GEPEM**, n.42, Fev./Jul., p.27-36, 2003.

FERREIRA, M. C. N.; RIBEIRO, A. J.; RIBEIRO, C. M. Álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: Primeiras Reflexões à Luz de uma Revisão de Literatura. **Educação e Fronteiras On-Line**, Dourados - MS, v.6, n.17, mai./ago., p.34-47, 2016.

______, M. C. N.; RIBEIRO, M.; RIBEIRO, A. J. Conhecimento matemática para ensinar Álgebra nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. **Zetetiké**, v.25, n.3, p.496-514, 2017.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática:** percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006.

FREITAS, C. W.A. **Equações Diofantinas.** 2015. Dissertação (Mestrado em Matemática), Universidade Federal do Ceará, Fortaleza - CE. 201p.

FUJII, T. Probing Students" Understanding of Variables trough Cognitive Conflict Problems: Is the Concept of a Variable So Difficult for Students to Understand? In: PATEMAN, A.; DOUGHERTY, B. J. ZILLIOX, J. T. (Eds). **Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, (pp.49-65). PME, Honolulu, 2003.

FUJII, T; STEPHENS, M. Using number sentences to introduce the idea of variable. In: GREENES, C.; RUBENSTEIN, R. (Eds). **Algebra and algebraic thinking in school:** Seventieth Yearbook, (p.127-149). National Council of Teachers of Mathematics. VA, Reston, 2008.

GARNICA, A. V. M. História Oral e Educação Matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Editora Autêntica, Belo Horizonte, 2004.

GOMES, M. C. V. Álgebra, Geometria e Aritmética de Mãos Dadas no Ensino Fundamental. **Boletim GEPEM**, n.42, Fev./Jul., p.47-59, 2003.

GROSSI, E. P. **Em matemática também há psicogênese**. Porto Alegre: GEEMPA, 2017. 36p.

GROSSI, E. P. **Idéias Chave de Gérard Vergnaud**. Porto Alegre: GEEMPA, 2012. 32p.

HEFEZ, A. **Elementos de aritmética**. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2005.

HEFEZ, A. **Curso de Álgebra**, volume 1. 5 ed. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2014.

INEP. **Provinha Brasil**. Disponível em: <http://provabrasil.inep.gov.br/web/guest/provinha-brasil>. Acesso em: 30 jul. 2017.

IRWIN, K. C.; BRITT, M. S. The algebraic nature of students‟ numerical manipulation in the New Zeland Numeracy Project. **EducationStudies in Mathematics**, v.58, n.2, p.169-188, 2005.

KAMII, C. **A criança e o número:** implicações da teoria de Piaget. Editora Papirus, Campinas - SP, 1990.

KERN, N. B.; GRAVINA, M. A. Introdução ao Pensamento algébrico por meio de relações Funcionais. In:BÚRIGO, E. Z. (Org.) **Série Educação à Distância – A matemática na Escola: Novos conteúdos, novas abordagens**. p. 53-74. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2012.

KIERAN, C. Developing algebraic reasoning: The role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. **Quadrante**, v.16, n.1, p.5-26, 2007.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A.C. **A Matemática do Ensino Médio:** volume 1. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2006.

LIMA, J. R. C. Mapeamento de Trabalhos sobre Pensamento Algébrico nos Anos Iniciais nos ENEM (1998 - 2013). In: **XII Encontro Nacional de Educação Matemática - ENEM.** São Paulo - SP, 2016.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Editora Papirus, Campinas - SP, 2001.

MIRANDA, M. V.; PENA, F. S. **Teoria dos Conjuntos**. Instituto Piaget, 2006. 268p.

MOREIRA, M. A. O iceberg da conceitualização: a teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área.In: GROSSI, Esther Pillar (Org.). **O que é aprender? O iceberg da conceitualização. Teoria dos Campos Conceituais TCC**. Coleção Campos Conceituais. Porto Alegre: GEEMPA, 2017. 124p.

NCTM. 2000. **Princípios e Normas para a Matemática Escolar**. (1.ed. 2000) Tradução portuguesa dos Principles and Standards for School Mathematics. 2.ed., APM, Lisboa, 2008.

PIAGET, J. 1926. **A Representação do Mundo na Criança**. Editora Record, Rio de Janeiro, [sem data].

______, J. 1936. **O Nascimento da Inteligência na Criança**. Editora Zahar, Rio de Janeiro, 1975.

______, J. 1937. **A Construção do Real na Criança**. Editora Zahar, Rio de Janeiro, 1979.

______, J. 1945. **A Formação do Símbolo na Criança:** imitação, jogo e sonho; imagem e representação. Editora Zahar, Rio de Janeiro, 1978.

______, J. 1950. **Introduction à l'épistemologie génétique:** La pensée mathématique. Presses Universitaire de France, Paris, 1950. v.1.

______, J. 1959. **Aprendizagem e Conhecimento**. Freitas Bastos, Rio de Janeiro, 1974.

______, J. 1967. **Biologia e Conhecimento**. Editora Vozes, Petrópolis, 2003.

______, J. 1970. **A Epistemologia Genética**. Editora Vozes, Petrópolis, 1971.

______, J. 1975. **A Equilibração das Estruturas Cognitivas:** O Problema Central do Desenvolvimento. Editora Zahar, Rio de Janeiro, 1976.

______, J. 1977. **Abstração Reflexionante**. Editora Artmed, Porto Alegre, 1990.

______, J.; INHELDER, B. 1959. **Gênese das Estruturas Lógicas Elementares**. Editora Zahar, Rio de Janeiro, 1975. 356p.

______, J.; INHELDER, B. 1962. **O Desenvolvimento das Quantidades Físicas na Criança**. Editora Zahar, Rio de Janeiro, 1975. 359p.

______, J.; INHELDER, B. 1968. **Memória e Inteligência**. Editora Artenova, Brasília, 1979. 410p.

______, J.; SZEMINSKA, A. **A gênese do número na criança**. 3. ed. Tradução de: OITICICA, C. M. Rio de Janeiro: Zahar, 1981.

PONTE, J. P.; VELEZ, I. Representações em tarefas algébricas no 2^0 ano de escolaridade. **Boletim GEPEM**, n.59, Jul./Dez., p.53-68, 2011.

SILVA, A. L.; SOARES, M. A. S.; NEHRING, C. M. Pensamento Algébrico e Padrão: Explicitação de Entendimentos a Partir de Periódicos de Educação Matemática. In: **XII Encontro Nacional de Educação Matemática - ENEM.** São Paulo - SP, 2016.

SILVA, D. P.; SAVIOLI, A. M. P. D. Caracterizações do pensamento algébrico em tarefas realizadas por estudantes do Ensino Fundamental I. **Revista Eletrônica de Educação**, v.6, n.1, p.206-222, 2012.

SILVA, J.A.; JELINEK, K. R.; BECK, V. C.; MIRANDA, P.; FONSECA, W. Estratégias e procedimentos de crianças do Ciclo de Alfabetização frente à situações-problema que envolvem multiplicação e divisão. **Educação Matemática Pesquisa**, v.17, n.4, p.740-766, 2015.

STEPHENS, M.; WANG, X. Investigating some junctures in relational thinking: a study of year 6 and 7 students from Australia and China. **Journal of Mathematics Education**, v.1, n.1, p.28-39, 2008.

THOUARD, D. 1965. **Kant**. Tradução de Tessa Moura Lacerda. São Paulo: Estação Liberdade, 2004.

TRIVILIN, L. R.; RIBEIRO, A. J. Conhecimento Matemático para o Ensino dos Diferentes Significados do Sinal de Igualdade: um estudo desenvolvido com professores dos Anos Iniciais do ensino Fundamental. **Bolema**, Rio Claro (SP), v.29, n.51, p.38-59, 2015.

VERGNAUD, G. 1985. **A criança, a matemática e a realidade:** problemas do ensino da matemática na escola elementar. Tradução de Maria Lucia Faria Moro. 3.ed. Curitiba: Editora da UFPR, 2009.

______, G. A didática é uma provocação: ela é um desafio. In: GROSSI, Esther Pillar (Org.). **Piaget e Vygotsky em Gérard Vergnaud**: Teoria dos Campos Conceituais TCC. Coleção Campos Conceituais. Porto Alegre: GEEMPA, 2017a. 88p.

______, G. O longo e o curto prazo na aprendizagem da matemática. **Educar em Revista**, Editora UFPR, Curitiba (PR), n. especial 1/2011, p.15-27, 2011.

______, G. Piaget e Vygotski... essa é a questão? In: GROSSI, Esther Pillar (Org.). **Piaget e Vygotsky em Gérard Vergnaud**: Teoria dos Campos Conceituais TCC. Coleção Campos Conceituais. Porto Alegre: GEEMPA, 2017b. 88p.

______, G. Prenunciando a Teoria dos Campos Conceituais. In: GROSSI, Esther Pillar (Org.). **Piaget e Vygotsky em Gérard Vergnaud**: Teoria dos Campos Conceituais TCC. Coleção Campos Conceituais. Porto Alegre: GEEMPA, 2017c. 88p.

______, G. O que é aprender? Por que Teoria dos Campos Conceituais? In: GROSSI, Esther Pillar (Org.).**O que é aprender? O iceberg da conceitualização. Teoria dos Campos Conceituais TCC**. Coleção Campos Conceituais. Porto Alegre: GEEMPA, 2017d. 124p.

______, G. La théorie dês champs conceptuels. **Recherches em Didactique dês Mathématiques**, v.10, n.2-3, p.133-170, 1990.

______, G. The nature of mathematical concepts. In: NUNES, T. & BRYNT, P. (Eds.) **Learning and teaching mathematics, an international perspective**. Psychology Press Ltd, Hove (East Sussex), 1997.

VYGOTSKI, L. S. 1934. **A Construção do Pensamento e da Linguagem**. 3. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1991. Série Psicologia e Pedagogia.

Apêndice 1 – Exemplo de Entrevista Completa

[1] _Então (nome da participante), aqui a gente tem quatro atividades: a primeira, a segunda, a terceira e a última lá. Nesta primeira aqui a gente tem aqui duas balanças,ó (o pesquisador apresenta duas balanças digitais para a criança). Tu conhece isto aqui? São duas balanças para medir peso. Se tu quiser chegar a tua cadeira mais perto aqui. Só para testar para tu ver como funciona (e pesa duas caixas do experimento para demonstrar à participante o procedimento de pesar). Coloca essa maletinha aqui (apontando para a balança, a estudante coloca o peso na balança logo em seguida em seguida). Ela pesa 439 gramas, viu? Quase meio quilo (a estudante sorri). Não parece né? É tão pequeneninha. Eu queria que tu fizesse o seguinte ó, vamos tentar fazer o seguinte: aqui tem quatro caixinhas, né. Cada uma tem bolinhas de argila. Esta aqui tem uma bolinha de argila, esta aqui tem cinco, esta aqui eu não sei, e esta aqui tem quatro. Eu queria que tu tentasse equilibrar duas em uma balança e duas em outra, de forma que fique o mesmo peso, lá e aqui (apontando, respectivamente, para as duas balanças). Tu pode tentar fazer isso? *_Aham. Posso começar?* _Pode, pode começar. (a participante tenta equilibrar os pesos). O mesmo peso que está aqui tem que ficar lá. *_Aham*. _Vai lá então, tem cinco numa, quatro na outra, aqui nessa balança, naquela lá tu botou interrogação, e um. *_Deixa eu ver.* Ficou diferente o peso? *_Aham.* _Onde é que tem mais? *_Aqui* (apontando para a balança com as caixa de rótulo "5" e "4"). _Esta aqui que tem o cinco e o quatro, né? *_Aham. E nessa aqui tem menos* (apontando para a outra balança digital) _Tá, então tu podes trocar de lugar. *_Aham.* _Não tem problema. *_Vamo ver essa. Tô quase chegando perto, se eu trocar essa com essa, essa daqui vai pra cá.* _Agora ficou cinco e um naquela balança e quatro e interrogação nessa balança aqui, né? *_Aham. Então vamo ver essa. Aqui deu cento....* (a participante fica pensativa, com expressão de dúvida) _Quinhentos e trinta e um, ..., bom, tá muito próximo assim, claro, tem a precisão da balança, mas aqui a gente pode dizer que basicamente está o mesmo peso. *_É, só aqui é 36 e aqui é 31* (se referendo a 536 em uma das balanças e 531 na outra). _Mas isso, a balança dá uma diferencinha assim pequena,mas dá para dizer que elas tem o mesmo peso, né? *_Aham*. _Então assim, quantas tem aqui (apontando para uma das balanças)? Dentro dessa caixa aqui tem cinco e dentro dessa caixa aqui tem uma. *_Seis.* _E nessa aqui tem quatro, e nessa aqui tem ponto de interrogação, se tem o mesmo peso lá e aqui, quantas bolinhas tu acha que tem aqui nesta caixa com ponto de interrogação? *_Acho que tem duas*. _Como é que tu sabe que tem duas? *_Eu também não sei, mas eu acho que tem, mas eu não consigo explicar.* _Mas tu pode tentar só me dizer como é que tu pensou? *_Eu acho que tem duas porque já que aqui deu quase a quantidade daqui* (apontando para as caixas contendo os rótulos "1" e "5", e logo em seguida, para as caixas com rótulos "4" e "?")*, eu acho que tem um pouco ... um pouco menos que tem dessa* (apontando para a caixa com rótulo "4")*, para dar a mesma coisa dali.* _Sim, entendi, porque aqui tem só uma né, aqui tem cinco, e aqui tem quatro que é um pouquinho menos que cinco, deve ter mais. *_Dois aqui deve dá*. Tá certo, ta bom. Então ta, vamos partir para outro experimento então. Então tu acha que tem duas né? *_Aham. Passei?* _Sim, sim. Ó, tem umas bolinhas de gude aqui, eu queria que tu distribuísse umas aqui nesse pote azul e outras aqui nesse pote verde. *_Na mesma quantidade?* _Não, em quantidades diferentes. *_Tá.* _Pode ser, por exemplo, dez nesse e doze nesse, como tu quiser distribuir, entendeu? *_Entendi* (aluna distribui as bolinhas nos potes). *Deu.* _Deu? Quantas tem nesse copo aqui, azul? *_Aqui tem dez e aqui tem sete.* _Tu botou sete nesse e dez nesse? *_Aham.* _Quanto tem ao todo aqui, nesse copo mais nesse? (apontando para os copos de cores verde e azul, respectivamente). *_Dezessete.* _Tá bem. Agora eu vou fazer o seguinte: vou dar uma misturada aqui (invertendo a posição dos copos), quantas têm no total agora? _(depois de pensar bastante) *Peraí, vou contar* (e recomeça a contagem dos dois copos). *_Aqui onde era dez eu contei onze, então agora colocou dezoito.* _Tinha dezoito antes? *_Agora tem dezoito.* _Continua tendo dezoito? *_É, porque*

aquela hora eu contei no dez, agora eu contei onze aqui. _*Aham, não mas acho que tem dez aqui.* _*É?* _É, conta de novo. _*Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove e dez. É* (e sorri). _Aí eu troco de lugar (invertendo os potes novamente). E aí quanto tem agora, ao todo? _*Tá* (recomeça a contagem). *Fica a mesma coisa?* _Não sei, o que tu acha? _*Eu acho que fica.* _tu acha que fica? _*Eu to contando, ta dando a mesma coisa.* _tu pode me explicar como é que tu fez? _*Eu to contando do sete...* _Tu contou, começou a contar aqui pelo verde, certo? _*Sim, depois esse* (apontando para o azul). _E deu a mesma coisa que antes? _*Aham.* _E tua resposta final qual é? _*Dezessete, que nem esse.* _Tá, ok. Então, se eu mudasse de novo? _*Dez, ...* _Porque eu fiz isso em outra escola, né, to indo em várias escolas por aí, em Pelotas, e teve outro aluno que disse que se mudar de lugar muda alguma coisa, tu acha que ele ta certo ou que ele ta errado? _*Eu acho, hum, não sei, que ele ta certo,..., ou não, não sei.Mas o problema que eu tentei deu.* _Mas tu acha que dá a mesma coisa? _*Aham*. Tá bom, ta bom. Esta é tua resposta final? _*Aham.* _Tem um problema que é o seguinte, ó: O Bruno quer fazer uma festa e ele quer ter certeza que o número de mesas e cadeiras dá para o número de amigos que ele quer convidar. E ele já ta fazendo as contas, né, e cada mesa da festa dele tem quatro lugares, ta? Só que ele não tem quatro amigos, ele tem mais de quatro amigos, então ele vai convidar mais gente, e aí ele quer saber assim ó: se ele colocar mais mesas, quantas cadeiras ele vai precisar. Então, por exemplo, com uma mesa, ele precisa de quatro cadeiras. _*Ah, ta.* _Entendeu? _*Entendi.* _Agora, ele pode juntar uma outra mesa aqui. Se ele juntar outra mesa (o pesquisador é interrompido pela participante que tenta juntar a mesa, sem ouvir o resto da pergunta. Em seguida, o pesquisador continua). _*Eu acho que...* _Com uma mesa era quatro né? _*Aham.* _Com duas mesas, ele precisaria de quantas cadeiras? _*De oito?* (demonstrando dúvida). _Oito? _*É.* _Quantas tem aí? _*Aqui tem uma, duas, três, quatro, cinco, seis.* _Seis né? _*Aham.* _Então com uma mesa, ele precisa de quatro lugares, com duas mesas ele precisa de? _*Com duas mesas,..três pessoas em cada lugar*. _Vamos supor que, eu não sei quantas pessoas ele vai convidar, porque ele vai convidar conforme as mesas que ele tem, né, pra ninguém, fica sem lugar. _*Ah ta, sei.* _Entendeu? Esse é o problema, então assim ó, se ele juntar duas mesas, ele sabe que ele vai conseguir convidar seis pessoas, e se ele conseguir mais uma mesa, três mesas, quantas pessoas podem ficar? _*Acho que nove*. _Como é que tu pensou para fazer? _*Eu contei daqui, mais a outra mesa que ele poderia colocar aqui* (colocando as cadeiras em volta das mesas, sem juntar uma mesa na outra). *Eu contei assim. Assim, olha, aqui tem seis né?, e se eu colocar mais uma mesa aqui, ia formar assim ó* (a participante manipula as mesas e cadeiras neste momento), *aqui tem seis, sete, oito nove.* _Tu podes representar a mesa usando isso aqui, por exemplo (mostrando bolinhas de gude para a participante), ou com esses bonequinhos também (alguns pequenos bonecos que estavam sobre a mesa de aplicação das atividades). _*Hum. Aqui ó, mais uma mesa,..., seis sete, oito, nove, dez, acho que vai dá dez.* _Dez? _*Sim, resposta final, é dez. Tá certo?* _As repostas finais eu só vou dar quando todo mundo participar, mas é esta a tua resposta então? É dez? _*Aham.* _ Tá, e agora, o último problema: o João quer comprar balas. Cada duas balas custam cinco centavos. Entendeu? Cada duas balas custam cinco centavos, mas ele quer comprar doze. _*Doze.* _Quanto ele vai gastar para comprar doze balas? .... Cada duas balas custam cinco centavos, pra comprar estas balas aqui ó (apontando para as balas) precisa de cinco centavos. _*Então já gastou dez centavos né?* _Não, cinco. Duas balas ele compra com cinco centavos. _*Mais doze que ele quer comprar?.* _Doze, ele quer comprar doze. _(depois de pensar bastante, e utilizar as bolinhas de gude da atividade 2 para representar as balas, a participante responde) *Acho que é 31 centavos, não sei.* (houve um erro de contagem com as bolinhas de gude).