

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E FÍSICA
CENTRO DE CIÊNCIAS COMPUTACIONAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

Jorge Cipriano Fernandes dos Santos

*Uma Nova Proposta de Resolução para o Problema das
 p -Medianas Ponderado*

Rio Grande

2014

Jorge Cipriano Fernandes dos Santos

*Uma Nova Proposta de Resolução para o Problema das
p-Mediana Ponderado*

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação
em Modelagem Computacional da FURG, como
requisito para a obtenção do grau de Mestre em
Modelagem Computacional.

Orientador: Prof^ª Dr^ª Catia Maria dos Santos Machado

Rio Grande

2014

dos Santos, Jorge

Uma Nova Proposta de Resolução para o Problema das p -Medianas Ponderado / Jorge dos Santos - 2014

86.p

1. Teoria de Grafos 2. Álgebra Linear. I. Uma Nova Proposta de Resolução para o Problema das P -Medianas Ponderado.

CDU 519.1

Jorge Cipriano Fernandes dos Santos

*Uma Nova Proposta de Resolução para o Problema das
p-Medianas Ponderado*

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação
em Modelagem Computacional da FURG, como
requisito para a obtenção do grau de Mestre em
Modelagem Computacional.

Aprovado em

BANCA EXAMINADORA

Prof^a Dr^a Catia Maria dos Santos Machado

Prof^a Dr^a Daiane Silva de Freitas

Doutora em Matemática

Prof^a Dr^a Diana Francisca Adamatti

Doutora em Engenharia Elétrica

Prof^a Dr^a Renata Hax Sander Reiser

Doutora em Ciência da Computação

Aos meus pais, meu irmão, minha esposa, pelo amor e carinho.

Aos amigos, pelo apoio e companheirismo.

Agradecimentos

Aos meus pais e irmão por sempre me darem o apoio e incentivo necessário para seguir no caminho certo. Servindo de base e inspiração para me tornar o que sou hoje.

Também aos amigos que com sua amizade me fizeram me recuperar de um momento difícil de minha vida.

A minha esposa pela paciência e por estar sempre ao meu lado em horas boas ou difíceis.

Aos professores do IMEF, C3 e EE pelos seus ensinamentos. Em especial, ao professor Mario Rocha Retamoso pelo incentivo e inspiração e à professora Catia Machado, pela dedicação, amizade e simplicidade. Gostaria também de agradecer as professoras que comporam a banca, Renata Hax Sander Reiser, Diana Francisca Adamatti e Daiana Freitas pelo cuidado na leitura e contribuição no trabalho possibilitando torná-lo melhor.

”Viver no mundo sem tomar consciência do significado do mundo é como vagar por uma imensa biblioteca sem tocar os livros”

Os Ensinos Secretos de Todos os Tempos

Resumo

Neste trabalho é apresentada uma nova abordagem para resolver o problema das p -medianas ponderado, a qual modela importantes e complexos problemas de localização. A partir de um estudo sobre a medida de centralidade de autovetor, foi observado uma forte relação entre determinação do vetor centro com a determinação da mediana de saída de um grafo não-dirigido, onde a centralidade de autovetor hierarquiza os vértices segundo a importância de cada um. Um algoritmo que combina o Método das Potências com o algoritmo clássico de Teitz e Bart é desenvolvido com o intuito de possibilitar uma maior avaliação sobre os resultados observados. Testes computacionais realizados com redes pequenas e médias geradas aleatoriamente mostraram que a busca da centralidade de autovetor de um vértice aponta para uma solução das medianas, indicando que o Método das Potências pode ser um fator determinístico da solução inicial para o método de Teitz e Bart.

Palavras-chaves: p -medianas, Método das Potências, Problemas de Localização.

Abstract

In this work is presented a new approach to solve the p -median problem, that model important and complex problems of locations. From a study of the measure of eigenvector centrality, was observed a strong relation between the determination of the vector center with the determination of the output median of an undirected graph, where the centrality of eigenvector ranks the vertexes in order of importance of each one. An algorithm that combine the Power's Method with the classic algorithm of Teitz and Bart is developed with the purpose of enable a greater evaluation of the results. Computational test with small and medium networks random showed that the search of the eigenvector centrality of a vertex points to a solution of the medians, indicating that the power's method can be a deterministic factor of the initial solution for the method of Teitz and Bart.

Keywords: p -medians, power's method, location problems.

Sumário

Lista de Figuras	8
Lista de Tabelas	9
1 Introdução	10
1.1 Objetivos	11
1.2 Importância e contribuição do trabalho	11
1.3 Organização do trabalho	12
2 Revisão Bibliográfica	14
2.1 Conceitos básicos	14
2.1.1 Grafos	14
2.1.2 Autovalores e autovetores	16
2.1.3 Teoria Espectral de Grafos	17
2.2 Problema das p -medianas	20
2.2.1 Histórico e desenvolvimento do problema das p -medianas	20
2.3 Trabalhos relevantes que utilizam o modelo das p -Medianas	21
2.4 Definição do problema	25
2.4.1 Formulação matemática do problema das p -medianas	27
2.4.2 Resultados obtidos por Hakimi	28
2.4.3 Algoritmo de Teitz e Bart	31
3 Centralidades	33

3.1	Medidas de centralidade espectral	33
3.1.1	Centralidade de autovetores	33
4	Método das Potências	36
4.1	Teoremas de limites sobre autovalores	36
4.2	Método das Potências	38
4.2.1	PageRank	42
5	Proposta de Resolução do Problema das p-medianas	45
5.1	Uma proposta para resolução do problema das p -medianas ponderado . . .	45
6	Resultados e Conclusão	56
6.1	Testes computacionais	56
6.2	Conclusões	57
7	Sugestões para trabalho futuros	59
	Referências Bibliográficas	60
A	Figuras adicionais utilizadas no trabalho	66
B	Tabelas adicionais utilizadas no trabalho	71
C	Código do Algoritmo implementado em Matlab	72

Lista de Figuras

2.1	Exemplo de grafo simples e grafo orientado	15
2.2	Exemplo de grafo	17
3.1	Exemplo de grafo com 5 vértices para centralidade de autovetor	34
4.1	Discos de Gerschgorin	38
5.1	Fluxograma do Algoritmo Proposto	49
5.2	Exemplo de grafo em HÖRNER(2009)	50
6.1	Gráfico da diferença de solução entre 2 métodos	56
A.1	Fluxograma do Algoritmo Proposto- 1º ciclo	66
A.2	Fluxograma do Algoritmo Proposto- 2º ciclo	67
A.3	Fluxograma do Algoritmo Proposto- 3º ciclo	68
A.4	Processo de exclusão de arestas para cada vértice do grafo proposto	69
A.5	Processo de exclusão de arestas para cada vértice do grafo proposto	70

Lista de Tabelas

4.1	Exemplo do Método das Potências	42
B.1	Resultados computacionais- Diferença do número de transmissão	71

1 Introdução

O problema das p -medianas faz parte de um amplo conjunto de problemas conhecido como problemas de localização, que consiste localizar objetos, estabelecimentos, fábricas, entre outros, de forma a otimizar um determinado critério. Os problemas de localização estão presentes na história da humanidade desde os tempos mais primórdios, quando os povos antigos procuravam o melhor local para se instalarem de modo a obter o maior número de recursos possíveis para a sua sobrevivência. Avançando no tempo temos também a revolução industrial em meados do século XVIII, na Inglaterra, com o surgimento das máquinas que substituíram a mão de obra humana, os processos tornaram-se mais automatizados necessitando então de uma melhor gestão dos recursos, alocando facilidades de modo a aperfeiçoar a produção e o rendimento dos funcionários.

No mundo atual, a localização é um desafio multidisciplinar. Segundo PIZZOLATO (2012) o tema localização permeia várias fronteiras da ciência e goza de um prestígio excepcional podendo ser classificado em três vertentes: a prática, a acadêmica e a aplicada. Na vertente prática estão aqueles desafios tipicamente assumidos por empresas de consultoria que buscam determinar a localização ideal de uma atividade industrial ou comercial específica. Na vertente acadêmica estão aqueles atores envolvidos com a proposta de desenvolver modelos matemáticos cada vez mais refinados, tendo em vista a contribuição do conhecimento. Na vertente aplicada estão aqueles que fazem pesquisa objetivando resolver desafios do mundo real, notadamente complexos, beneficiando-se das contribuições proporcionadas pela área acadêmica.

O presente trabalho é direcionado na vertente acadêmica mostrando que é possível trabalhar na fronteira entre a Álgebra Linear e Otimização Combinatória. A partir de um estudo sobre a formulação matemática do problema das p -medianas, foi possível identificar propriedades matemáticas da Álgebra Linear, que quando devidamente aproveitadas, tornam-se uma ferramenta a mais na resolução de problemas reais.

1.1 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo geral, desenvolver um novo algoritmo para o problema p -medianas. A fim de alcançar tal objetivo, os seguintes objetivos específicos serão considerados no decorrer do trabalho.

- Apresentar conceitos e resultados matemáticos que fundamentam o trabalho proposto;
- Utilizar o método das potências para determinar o autovalor dominante da matriz de distâncias mínimas de um grafo com vértices ponderados;
- Desenvolver uma estratégia de solução que possibilite determinar a importância dos vértices candidatos a p -medianas, definindo assim uma boa solução inicial;
- Implementar a estratégia desenvolvida combinada com o algoritmo de Teitz e Bart;
- Avaliar a estratégia utilizada na determinação dos vértices candidatos a p -medianas em redes pequenas e médias geradas aleatoriamente;
- Estabelecer uma conexão entre a Álgebra Linear e a Otimização Combinatória na aproximação do conjunto ótimo das p -Medianas;
- Apontar as vantagens e desvantagens observadas em relação ao método.

1.2 Importância e contribuição do trabalho

O estudo da centralidade de autovetor para grafos não dirigidos e ponderados na resolução de problemas de otimização combinatória é um tema de pesquisa interessante, tornando-se uma ferramenta a mais no auxílio da tomada de decisão. O estudo baseado nessa teoria conduz a resultados matemáticos que podem ser aproveitados para o desenvolvimento de algoritmos que solucionam problemas de p -medianas como, localização de órgãos públicos (hospitais, escolas, terminais de ônibus), indústrias, comércio e de telecomunicações.

O problema das p -medianas está inserido na classe dos problemas NP -Completo, ou seja, o tempo de solução ótima do problema cresce exponencialmente a medida que os

dados de entrada aumentam. No sentido de obter uma solução satisfatória, ao longo dos últimos anos são sugeridas várias técnicas aplicadas ao problema das p -medianas. FREITAS (2012), desenvolveu uma estratégia eficiente (no sentido de qualidade de solução) de solução inicial para o algoritmo de Teitz e Bart para resolução do problema das p -medianas baseada na teoria espectral e estudos de otimização combinatória sobre grafos não dirigidos e não ponderados de médio e grande porte. Além disso, sugeriu que estudos fossem realizados para grafos não dirigidos e ponderados. Nesse sentido, uma contribuição importante desse trabalho é com relação a possibilidade da realização de testes computacionais sobre grafos não dirigidos e ponderados. Mostrando, desse modo, que é possível gerar uma boa solução inicial para o algoritmo de Teitz e Bart, através do estudo da relação entre as medidas de centralidade de autovetor e os problemas de localização.

1.3 Organização do trabalho

O presente trabalho foi estruturado em 6 capítulos, de maneira que, no primeiro é feita uma revisão dos conteúdos presentes na Álgebra Linear e Teoria de Grafos, buscando a fundamentação da proposta deste trabalho. Também é apresentada a revisão bibliográfica do problema das p -Medianas, a qual mostra o histórico e desenvolvimento do mesmo, durante os mais variados períodos da humanidade. Seguido pela apresentação de trabalhos referentes a diversos Problemas de Localização, onde todos foram realizados entre os últimos 55 anos. Na sequência é apresentado a definição do problema, juntamente com sua formulação matemática. Ainda no mesmo capítulo, são mostrados resultados importantes, obtidos pelo matemático Seifollah Louis Hakimi, que possibilitaram a criação de diversos algoritmos heurísticos de resolução do problema, onde dentre esses, foi desenvolvido o algoritmo de Teitz e Bart, apresentado posteriormente.

No segundo capítulo, é feita uma breve apresentação sobre teoria da centralidade, mais particularmente sobre centralidade de autovetores, a qual é amplamente utilizada na análise de redes sociais.

O terceiro capítulo é reservado a apresentação e formulação do Método das Potências. Onde, inicialmente é mostrado um pouco da fundamentação matemática do Método das Potências seguido por suas definições. Tal método foi utilizado para estimar o autova-

lor dominante associado a uma dada matriz simétrica e fundamentalmente uma aplicação do algoritmo Page Rank utilizado pela empresa Google em seu programa de busca na internet.

Com a fundamentação necessária apresentada, no quarto capítulo é apresentado o algoritmo proposto, juntamente com um exemplo utilizado na literatura. Além disso, a estrutura do algoritmo é explicada passo a passo com o objetivo de facilitar o entendimento do mesmo.

No capítulo 5 são mostrados os resultados computacionais de 40 exemplos de grafos com pequeno e médio tamanho, ou seja, com 50 a 500 nós em cada simulação. A partir disso, são apresentadas as conclusões em relação ao método.

No capítulo 6 são listadas algumas propostas para trabalhos futuros referentes ao método apresentado.

2 Revisão Bibliográfica

Tendo em vista, a fundamentação teórica necessária no desenvolvimento do algoritmo de solução para o problema p -medianas, o capítulo foi dividido em duas partes. A primeira parte é referente a Teoria de Grafos e Álgebra Linear. Na segunda parte consta um breve histórico do problema, trabalhos desenvolvidos utilizando p -medianas e o método heurístico de resolução Teitz e Bart.

2.1 Conceitos básicos

A seguir são apresentados conceitos básicos sobre a teoria dos grafos, a qual se trata de uma ferramenta simples mas poderosa para a construção de modelos e resolução de problemas. Tal fundamentação teórica será importante para o entendimento dos capítulos seguintes, FREITAS (2010).

2.1.1 Grafos

Um grafo $G = (X(G), E(G))$ é uma estrutura, consistindo de um conjunto finito e não vazio de vértices $X = X(G)$ e um conjunto $E = E(G)$ formado por pares de elementos de X que é chamada relação de adjacência dos vértices de G . Sejam x_i e $x_j \in X$, dizemos que x_i e x_j são vértices adjacentes ou vizinho se a aresta $e_{ij} = \{x_i, x_j\} \in E$. Neste caso, dizemos que e_{ij} incide tanto em x_i quanto em x_j , sendo x_i e x_j os extremos de e_{ij} . O conjunto formado por todos os vértices adjacentes a x_i é denominado vizinhança de x_i (ou vizinhança de primeira ordem de x_i) e denotado por $\Gamma(x_i)$. A vizinhança de segunda ordem de x_i é $\bigcup_{x_j \in \Gamma(x_i)} \Gamma(x_j)$. Similarmente, vizinhanças de ordens superiores podem ser definidas. O número de vértices n e o número de arestas m de G são respectivamente iguais a $|X(G)| = n$ e $|E(G)| = m$. Uma aresta incidente a apenas um vértice é denominada laço e duas ou mais arestas incidentes ao mesmo par de vértices são chamadas de aresta múltiplas. Grafos sem laços ou arestas múltiplas são chamados de grafos simples. Um

grafo orientado é definido quando um par de vértices x_i e $x_j \in X$ conectados por uma aresta tem sentido definido de x_i para x_j ou vice-versa, lembrando que grafos podem ser mistos, ou seja, possuir arestas orientadas e não orientadas. Neste caso, a maioria dos problemas envolve grafos simples e não orientados e assim deverão a menos que especificado em contrário.

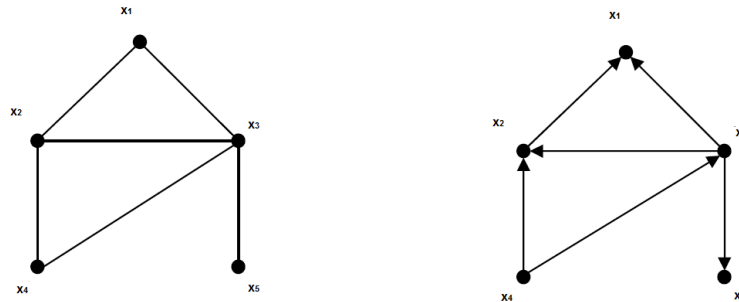


Figura 2.1: Exemplo de grafo simples e grafo orientado

O grau de um vértice x_k , denotado por $d(x_k)$ ou d_k , é o número de arestas incidentes em x_k . O grau máximo de G , denotado por $\delta(G)$, é o maior grau dentre todos os graus do vértice de G . O número $\bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{x_i \in X} d_i$ é chamado grau médio de G . Dizemos que um vértice $x_k \in X$ é um vértice universal de G se $d_k = n - 1$. Um grafo G é k -regular, ou simplesmente regular, se cada vértice tem grau k . Um grafo é chamado completo se quaisquer dois pares distintos de vértices são adjacentes. K_n denota o grafo completo de n vértice. O grafo $G_1 = (X_1, E_1)$ é um subgrafo de G se $X_1 \subseteq X$ e $E_1 \subseteq E$. Além disso, se G_1 contém exatamente as arestas de G incidentes nos vértices de X_1 , G_1 é um subgrafo induzido de G , e se contém todos os vértices de G , G_1 é um subgrafo gerados de G . Uma cadeia, ou percurso, é uma seqüência finita e alternada de vértice e arestas. Uma trilha é uma cadeia sem aresta repetida. Um caminho, denotado por P_n , é uma cadeia onde todos os n vértices são distintos. Um grafo G é conexo se existe um caminho ligando cada par de vértices. Caso contrário, G é desconexo. Um grafo G desconexo é formado por pelo menos dois subgrafos induzidos conexos denominados componentes conexas de G . O comprimento de um caminho é o número de arestas que neles ocorrem. Um menor caminho entre dois vértices x_i e x_j é conhecido como geodésica.

2.1.2 Autovalores e autovetores

Nesta seção, é apresentado alguns conceitos básicos de Álgebra Linear necessários para o desenvolvimento do trabalho. Por MADRI (2009), considera-se A uma matriz $n \times n$ real.

Definição 2.1.1. Um número $\lambda \in \mathbb{R}$ é dito ser um autovalor de A se existe um vetor não-nulo $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $Av = \lambda v$, ou equivalentemente, se λ é uma raiz de $p(x)$, polinômio característico de A . Lembramos que o polinômio característico de A está dado por $p(x) = \det(A - \lambda I)$.

Se λ é um autovalor de A , então o conjunto a seguir é um subespaço vetorial não-nulo, chamado de auto-espaço associado a λ :

$$W_\lambda := \{v \in \mathbb{R}^n | Av = \lambda v\}$$

Assim, associados a um autovalor de A temos definidos dois números inteiros: um deles a multiplicidade de λ como raiz do polinômio característico e o outro a dimensão do auto-espaço v_λ .

Definição 2.1.2. Dados λ um autovalor de A definimos a sua multiplicidade algébrica como sendo igual à multiplicidade de λ como raiz do polinômio característico. A multiplicidade geométrica estará dada pela dimensão do auto-espaço associado a λ .

Observação 2.1.1. A multiplicidade algébrica de um autovalor λ é sempre maior ou igual à multiplicidade Geométrica do mesmo. Já que se a multiplicidade geométrica for $m \leq n$, então existem $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ autovetores não-nulos, linearmente independentes associados a λ . Considerando $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ um base de \mathbb{R}^n temos que a matriz C é equivalente à matriz A .

Portanto A e C têm o mesmo polinômio característico. Note que o polinômio característico de C está dado por $p(x) = (x - \lambda)^m \det(xI_{n-m} - C_{2,2})$ e logo λ tem multiplicidade algébrica pelo menos m .

Proposição 2.1.1. *Sejam λ um autovalor de A e $B(\lambda)$ a matriz $n \times n$ dada por:*

$$B(\lambda) = \text{adj}(\lambda I - A)$$

então as colunas não-nulas de $B(\lambda)$ são autovetores de A associados a λ .

Demonstração. De fato, pelas propriedades da adjunta, temos que

$$\begin{aligned} (\lambda I - A)B(\lambda) &= (\lambda I - A) \operatorname{adj}(\lambda I - A) \\ &= \det(\lambda I - A) I_n \\ &= p(\lambda) I_n \\ &= 0, \end{aligned}$$

já que λ é uma raiz do polinômio característico p de A . Logo temos que cada colunas não-nula é autovetor não-nulo associado a λ . \square

2.1.3 Teoria Espectral de Grafos

Nesta seção apresentaremos alguns conceitos da teoria espectral de grafos.

Seja G um grafo não orientado com n vértices. A matriz de adjacência $A(G)$ de G é uma matriz de ordem n cujas entradas são:

$$\begin{cases} 1, & \text{se } \{x_i, x_j\} \in E \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.1)$$

Onde E é o conjunto de arestas do grafo. Assim para um grafo não-orientado, $A(G)$ é uma matriz binária e simétrica, isto é, $a_{ij} = a_{ji}$, para todo i, j $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, cujo traço é zero. Um exemplo de um grafo simples não orientado de 5 vértices com 6 aresta e sua respectiva matriz de adjacência $A(G)$ é dado a seguir na Figura 2.2:

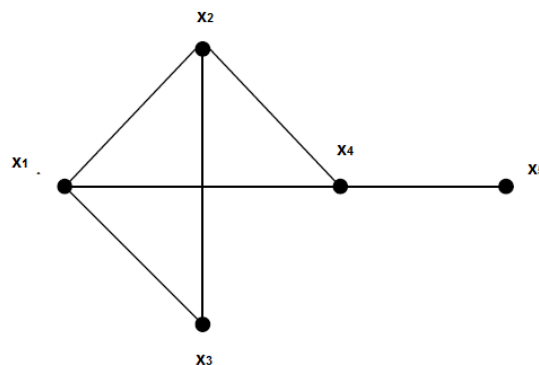


Figura 2.2: Exemplo de grafo

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Veja que a soma das entradas de cada linhas da matriz de adjecência de um grafo é igual ao grau do vértice correspondente. A k -ésima potência da matriz de adjacência é relacionada ao número de cadeias de comprimento k no grafo. Em particular, $(A(G)^k)_{ij}$ fornece o número de cadeias de comprimento k entre x_i e x_j .

Como visto na seção anterior o polinômio característico de $A(G)$ fornece os autovalores do grafo G .

Definição 2.1.3. Se $A(G)$ possui t autovalores distintos, o espectro de G , denotado por $spect(G)$, é definido por uma matriz $2 \times t$, onde a primeira linha é constituída pelos autovalores distintos de $A(G)$, dispostos em ordem não-crescente e a segunda, pela respectivas multiplicidades algébricas. Assim, se $\lambda_1 > \dots > \lambda_t$ são os autovalores de $A(G)$ e, para $1 \leq i \leq t$, $ma(\lambda)$ são suas multiplicidades algébricas, então o espectro de G é:

$$spect(G) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_t \\ m_a(\lambda_1) & \dots & m_a(\lambda_t) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

O maior autovalor de G é denominado índice de G e denotado por $ind(G)$.

Exemplo 2.1.1. Considere o grafo G da Figura 2.2 com a matriz de adjacência $A(G)$. Seu polinômio característico é $p_G(\lambda) = \lambda^5 - 6\lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda + 2\lambda$ e seu espectro é dado por:

$$spect(G) = \begin{bmatrix} 2,6412 & 0,7237 & -0,5892 & -1 & -1,7757 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim o índice do grafo G é $ind(G) = \lambda_1 = 2,6412$. A multiplicidade geométrica do autovalor λ , denotada por $m_g(\lambda)$, é a dimensão do autoespaço X_λ associado ao autovalor λ , isto é

$$m_g(\lambda) = dim X_\lambda$$

O raio espectral de um grafo G , denotado por $\rho(G)$, é o número real não negativo $\rho(G) = \max_i |\lambda_i|$, onde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ são os autovalores de G . O raio espectral de G é o raio do menor círculo centrado na origem que contém o espectro de G . Esse círculo é chamado círculo espectral de G .

Definição 2.1.4. Dizemos que uma matriz $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ é redutível se existe alguma matriz de permutação P e algum inteiro $1 \leq m \leq n - 1$ tal que

$$P^T A P = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

onde B é uma matriz $m \times m$, D é uma matriz $n - m \times n - m$, C é uma matriz $m \times (n - m)$ e 0 é a matriz nula $(n - m) \times m$. Caso contrário, dizemos que A é uma matriz irredutível.

Para um grafo G conexo, a matriz de adjacência $A(G)$ é irredutível. Sob tais condições, é possível enunciar o teorema de Perron-Frobenius:

Teorema 2.1.1 (Perron-Frobenius). *Seja $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ uma matriz irredutível e não-negativa, então*

1. *A tem um autovalor positivo r , igual ao raio espectral de $A(G)$.*
2. *Existe um autovetor positivo associado a r .*
3. *O autovalor r tem multiplicidade algébrica igual a um.*

A demonstração deste teorema é feita através do método desenvolvido por Weilandt em WEILANDT (1950) e pode ser encontrada em MADRI (2009).

O Teorema de Perron-Frobenius garante que matrizes de adjacência associadas a grafos conexos possuem o maior autovalor positivo e, associado a este, um único autovetor unitário positivo. Tal resultado será possui grande relevância no desenvolvimento do método, como poderá ser visto posteriormente.

2.2 Problema das p -medianas

Nesta seção, será visto um pouco sobre o histórico do problema. De forma que, posteriormente são mostrados conceitos, fundamentações e definições do problemas das p -Medianas, seguido pela apresentação do algoritmo clássico de Teitz e Bart.

2.2.1 Histórico e desenvolvimento do problema das p -medianas

Conforme Dias (2005), o problema das p -medianas encontra pontos (designados medianas) num dado conjunto finito de pontos, de modo a minimizar a distância média ou total entre pontos e medianas. Este tipo de problema teve a sua origem no século XVII, quando Pierre de Fermat colocou a seguinte questão: dados os vértices de um triângulo (três pontos no plano), encontrar o ponto do plano (mediana), tal que a soma das distâncias entre cada um dos vértices e a mediana seja mínima, REESE(2006). No início do século XX, Alfred Weber apresentou o mesmo problema, com a atribuição de pesos a cada um dos três pontos para simular pedidos de clientes, REESE(2006). Nesta situação, cada um dos três pontos corresponde a um cliente, os pesos correspondem a procura de um dos três clientes a um determinado produto ou serviço, e encontrar a mediana corresponde a encontrar a melhor localização de um equipamento para satisfazer os pedidos dos três clientes. Esse problema é usualmente apresentado como o primeiro problema de localização. Mais tarde, ele foi generalizado quer para encontrar a mediana de mais de três pontos no plano quer para selecionar $p > 1$ medianas com localização contínua no plano (problema de Weber com vários equipamentos).

O problema de Weber significa localizar medianas (equipamentos) em localizações contínuas no plano Euclidiano. No início dos anos 60, Hakimi desenvolveu problemas similares aos de Weber para encontrar medianas num grafo, HAKIMI(1965). No seu problema da mediana absoluta, semelhante ao problema ponderado de Weber, Hakimi definiu mediana absoluta como o ponto, num grafo, que minimiza a soma das distâncias ponderadas entre esse ponto e os vértices do grafo. Hakimi tomou como hipótese, que a mediana absoluta se situasse em qualquer lugar ao longo das arestas do grafo, mas provou que uma mediana absoluta ótima está, sempre, localizada num vértice do grafo. Em HAKIMI(1965),

Hakimi generaliza o problema das p -medianas aplicado ao problema da gestão ótima da diversidade mediana absoluta para encontrar p medianas num grafo. Deste modo, Hakimi proporciona uma representação discreta de um problema contínuo, restringindo a procura da solução do problema aos vértices do grafo. O problema das p -medianas difere do problema de Weber porque é discreto, uma consequência de se restringirem as localizações possíveis das medianas ao conjunto de vértices. Também é definido num grafo, e não no plano como no problema de Weber, no qual as distâncias são definidas pela métrica Euclidiana.

Hakimi desenvolveu os problemas da mediana absoluta e das p -medianas com o objetivo de encontrar a melhor localização para a instalação de centro(s) de comutação, numa rede de comunicação. O sucesso obtido por Hakimi fez com que, desde então, o problema das p -medianas tenha sido inseparável da teoria da localização, tornando-se um dos mais comuns modelos de localização de facilidades.

Em suma, Weber estudou o problemas das p -medianas ponderado sem fazer nenhuma afirmação de onde as p -medianas estavam localizadas (cada mediana podia estar localizada em uma aresta grafo), enquanto que Hakimi estudou o mesmo problema, provando que a mediana se encontra sempre num vértice do grafo e não em uma aresta do grafo.

2.3 Trabalhos relevantes que utilizam o modelo das p -Medianas

O problema de p -medianas modela de forma eficiente diversos problemas reais como:

- Alocação de serviços públicos. O qual consiste em alocar um serviço de forma que o mesmo atenda o maior número possíveis de pessoas e de forma eficaz.
- Cobertura das antenas de telefonia. Trata-se do problema em que são alocadas um determinado número de antenas para que sua cobertura atenda o maior número de usuários possíveis.
- Análise de redes sociais. O problema em que cabe determinar quais são as pessoas

que possivelmente são conhecidas ou amigas dos usuários das rede sociais.

- Alocação de paradas de transporte coletivo. O qual consiste em determinar onde devem ser implantadas paradas de veículos de transporte coletivos, de modo a atender o maior número de usuários possível, otimizando a distância de suas residências até as paradas.

Conforme Horner (2009), vários trabalhos utilizam o tema localização e fazem uso do problema p -Medianas. As primeiras generalizações do problema de Weber, que tratam da localização de depósitos para indústrias privadas são: COOPER (1963), KUEHN e HAMBURGER (1963), EILON et al.(1971), WESOLOWSKY e LOVE (1971) e CORNEUJOLS et al. (1977).

Talvez o mais importante trabalho da década de 1960 se deva a HAKIMI (1964 e 1965). O teorema de Hakimi prova que ao menos um conjunto de pontos ótimos do problema será constituído de nós do grafo. A demonstração desse teorema, apresentado no decorrer do trabalho, faz com que as heurísticas de busca não percam tempo procurando a solução sobre os arcos do grafo. O método mais citado na literatura e muito utilizado na resolução de problemas reais é o de Teitz e Bart. Este método é chamado de Algoritmo de Substituição de Vértices . Como o nome menciona, o algoritmo consiste em partir de uma solução inicial viável e substituir os vértices do grafo um a um, até que não haja mais melhoria. Além de obter soluções de qualidade, é de fácil implementação. No entanto, o algoritmo pode convergir para um ponto de mínimo local e encerrar a busca.

Alguns trabalhos listados abaixo utilizaram a metodologia p -Medianas como:

- TONDO (1992), abordou a modelagem da localização de um conjunto de contêineres no estado de São Paulo resolvendo o problema com a utilização da metodologia das p -medianas. Ao apresentar uma metodologia aplicada ao extrativismo do babaçu.
- PIZZOLATO (1994), propôs um método para o problema das p -medianas destinado para redes grandes. A técnica se inicia com a construção de p árvores cujas formas vão progressivamente sendo modificadas de acordo com os sucessivos testes. Neste mesmo trabalho é apresentada uma aplicação da técnica para localização de 85

escolas públicas na cidade do Rio de Janeiro.

- BEZERRA (1995), buscou racionalizar o trabalho de transporte entre o local de coleta e o de processamento. Para a otimização do problema foram utilizados três algoritmos: o de Floyd para determinar as distâncias mínimas entre cada nó que compõem a rede viária; o de p -medianas de Teitz e Bart para a localização dos postos de coleta, e um algoritmo Genético para determinar o roteiro para o problema do caixeiro viajante.
- SOUZA (1996), utilizou a abordagem do problema das p -medianas adaptado para o caso emergencial com a justificativa de que em países com menos recursos financeiros, como o Brasil, não se tem normalmente um número adequado de equipamentos para atender todos os usuários.
- LIMA (1996), utilizou o modelo das p -medianas para localizar centros de serviços de saúde, onde se buscou minimizar a distância a ser percorrida pelos usuários. Sua aplicação apresentou uma proposta para os serviços de cardiologia em Santa Catarina de forma hierárquica, com hospitais locais, centros intermediários e um centro de referência no estado.
- O estudo da melhor localização de centros de assistência materna e perinatal no município de Rio de Janeiro foi o tema do estudo de VASCONCELOS (1997). Neste trabalho o autor utiliza o modelo das p -medianas interligado a sistemas de informações geográficas (SIG). O problema foi resolvido com o algoritmo de Teitz e Bart e também por um algoritmo exato proposto por Galvão e Raggi. As duas soluções foram comparadas e foi apresentado a distribuição espacial dos serviços de saúde.
- NUNES (1998) utilizou o Algoritmo Genético para resolver o problema das p -medianas aplicado a um problema de roteirização calculando os pontos de parada das rotas.
- No estudo de SAMPAIO (1999), utilizou-se o problema de capacitado para verificar a necessidade de ampliação ou redução da capacidade de escolas estaduais no município de Curitiba.

- CORRÊA (2000) apresentou um estudo sobre o problema de localização de facilidades, objetivando otimizar a designação de candidatos ao vestibular para os locais de provas mais próximos de suas residências. Trata-se também de problema de p -medianas capacitado, para o qual foram propostas duas heurísticas, uma baseada em um Algoritmo Genético simples que utiliza os operadores genéticos usuais e um operador heurístico chamado hiper-mutação direcionada e a outra heurística é baseada em Busca Tabu.
- PIRES (2002) fez uso do Algoritmo Genético para encontrar a melhor localização de escolas no município de Coronel Vivida no Paraná, já que o município contava com escolas superlotadas e outras subutilizadas. O modelo das p -medianas foi resolvido para equilibrar a distribuição dos alunos e minimizar a distância a ser percorrida pelos usuários.
- LOBO (2003), aplicou o problema das p -medianas juntamente com diagramas de Voronoi para determinar um dimensionamento adequado para as unidades de educação infantil.
- LORENA et al. (2004), avaliaram em um artigo a melhor localização de escolas de Ensino Fundamental na cidade de Vitória (ES) utilizando para isso o modelo de p -medianas capacitado e não-capacitado.
- A metodologia das p -medianas foi utilizada por ROSA (2006) para maximizar o valor presente líquido do projeto de desenvolvimento de campos de petróleo offshore. A representação da superfície do fundo do mar dá-se neste trabalho através de um grafo e é feita a comparação entre a maximização do valor presente líquido e a minimização de custos de investimentos.
- SILVA (2006) fez um levantamento sobre a Logística contemporânea e a conseqüente necessidade de uma rede de distribuição integrada especificamente em uma indústria siderúrgica. Nesse sentido se faz necessário encontrar a melhor disposição dos estoques da empresa, e para isso, o autor propõe um modelo de localização de instalações levando em conta questões táticas como a distribuição dos estoques na rede logística.

- No estudo de BANDEIRA (2006), foi apresentada uma metodologia que identifica e caracteriza áreas candidatas à localização e o número de depósitos a serem instalados. A autora fez uma aplicação em uma empresa de suprimentos industriais.
- Uma comparação entre um algoritmo que usa Busca Tabu e um algoritmo de Relaxação Lagrangeana aplicado ao problema das p -medianas capacitado é feita no trabalho de DUCATI (2003). A partir de testes computacionais a autora conclui que, contrariando a maioria dos trabalhos, o algoritmo de Busca Tabu apresenta um desenvolvimento melhor tanto em tempo de processamento quanto em qualidade de solução.
- Recentemente, FREITAS (2012), propôs um modelo para resolução do problema das p -medianas baseado na divisão de grafos (com arestas obtidas através da distância Euclidiana) não dirigido e não ponderados em p -regiões de modo a solucionar, pelo método das potências, qual vértice é mediana de cada grupo. O algoritmo apresentou bons resultados tanto em tempo computacional quanto em qualidade de solução.

2.4 Definição do problema

De acordo com PEREIRA (2005), o problema das p -medianas é um problema de localização-alocação, ou seja, visa determinar a configuração de custo mínimo de instalação de facilidades e de atendimento da demanda de cada cliente em uma rede conectada por um número finito de caminhos. Além disso, os dados relevantes do problema das p -medianas são: o número finito de pontos de demanda, o número finito de candidatos à instalação de facilidades, a distância entre os pontos de demanda e o número p de facilidades a serem instaladas. Sabendo da representação do problema em um grafo e a ponderação dos pesos de cada um dos vértices, faz-se necessária a construção da matriz de distâncias mínimas. Esta matriz é a representação matricial dos menores caminhos que ligam um vértice a todos os demais vértices da rede e, obviamente, é uma matriz quadrada de tamanho $n \times n$ cujas as entradas são definidas como as distâncias mínimas entres dois pontos do grafo. A matriz peso-distância é a matriz de caminhos mínimos onde cada vértice é multiplicado pelo seu peso. Como exemplo, em um problema de localização de um depósito, o peso

pode ser a quantidade de viagens que saem do depósito até o nó de demanda n em um determinado período.

Para cada vértice $x_i \in X$, sendo distância do vértice x_i ao vértice x_j representada por $d(x_i, x_j)$, o peso de um determinado vértice representado por b_j , define-se como número de transmissão de saída (out-transmission) e número de transmissão de entrada (in-transmission) respectivamente:

$$\sigma_o(x_i) = \sum_{x_j \in X} b_j \cdot d(x_i, x_j) \quad (2.3)$$

$$\sigma_t(x_i) = \sum_{x_j \in X} b_j \cdot d(x_j, x_i) \quad (2.4)$$

O número $\sigma_o(x_i)$, denominado número de transmissão de saída, é a soma dos elementos da linha x_i da matriz peso-distância e o número de transmissão de entrada $\sigma_t(x_i)$ é a soma dos elementos da coluna x_i . Define-se como mediana de saída (out-median) de um grafo o vértice \bar{x}_0 para o qual:

$$\sigma_o(\bar{x}_i) = \min_{x_i \in X} [\sigma_o(x_i)] \quad (2.5)$$

E de modo análogo, a mediana de entrada (in-median) é:

$$\sigma_t(\bar{x}_i) = \min_{x_i \in X} [\sigma_t(x_i)] \quad (2.6)$$

Generalizando o conceito de uma mediana para o caso de p -medianas, considerando para isso um subconjunto $X_p \subseteq X$ com p vértices, tem-se a distância deste subconjunto até os demais vértices x_j como sendo:

$$d(X_p, x_j) = \min_{x_i \in X_p} [d(x_i, x_j)] \quad (2.7)$$

$$d(x_j, X_p) = \min_{x_i \in X_p} [d(x_j, x_i)] \quad (2.8)$$

Os respectivos números de transmissão de saída e de entrada deste subconjunto X_p de vértices são:

$$\sigma_o(X_p) = \sum_{x_j \in X} b_j \cdot d(X_p, x_j) \quad (2.9)$$

$$\sigma_t(X_p) = \sum_{x_j \in X} b_j \cdot d(x_j, X_p) \quad (2.10)$$

Assim, os números de saída $\sigma_o(\bar{X}_p)$ e de entrada $\sigma_t(\bar{X}_p)$ serão:

$$\sigma_o(\bar{X}_{po}) = \sum_{X_p \subseteq X} [\sigma_o(X_p)] \quad (2.11)$$

$$\sigma_t(\bar{X}_{pt}) = \sum_{X_p \subseteq X} [\sigma_t(X_p)] \quad (2.12)$$

Desta forma, considerando que cada vértice é uma mediana em potencial, define-se formalmente o problema da localização de p -medianas da seguinte forma:

Seja $G(X, E)$ um grafo não orientado onde X é o conjunto de vértices e E é o conjunto de arestas. Deve se encontrar um conjunto de vértices $X_p \subset X$ (conjunto de medianas) com cardinalidade p , tal que, a soma das distâncias de cada vértice restante em $X - X_p$ (conjunto de demandas) até seu vértice mais próximo em X_p seja a mínima possível.

2.4.1 Formulação matemática do problema das p -medianas

Nesta seção é descrito o problema de p -medianas do ponto de vista matemático, e desta forma, segundo CHRISTOFIDES (1975), tem-se:

$$\min Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} \cdot \xi_{ij} \quad (2.13)$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^n \xi_{ij} = 1, \forall j = 1, \dots, n \quad (2.14)$$

$$\sum_{i=1}^n \xi_{ii} = p \quad (2.15)$$

$$\xi_{ij} \leq \xi_{ii}, \forall i, j = 1, \dots, n \quad (2.16)$$

$$\xi_{ij} \in \{0, 1\} \quad (2.17)$$

Onde:

n é o número de nós do grafo do problema,

p é o número de medianas a ser instalado,

$[d_{ij}]$ a matriz de distâncias ponderadas, onde d_{ij} é o produto da distância entre os vértices x_i e x_j pelo peso w_j , sendo w_j a demanda de cada vértice x_j ,

$[\xi_{ij}]$ é a matriz de alocação, que será 1 se o nó x_j é alocado ao nó x_i e 0 em caso contrário.

A restrição (2.12) garante que um dado nó x_j é alocado a somente um nó x_i , que é

mediana. A restrição (2.14) garante o número de medianas desejado. A restrição (2.15) garante que o ponto x_j só esteja alocado à mediana x_i e a restrição (2.13) corresponde às condições de integralidade, que garante que a matriz de alocação ξ_{ij} será 0 ou 1.

Ainda quanto a definição e formulação do problema das p -medianas, MINIEKA (1977), classifica o problema em medianas e medianas absolutas. O problema das medianas absolutas, objetiva encontrar a melhor localização nos vértices e nos arcos, enquanto que o problema das p -medianas procura a melhor solução somente nos nós do grafo.

Na próxima seção serão vistos alguns resultados obtidos por Hakimi que deram condições para o desenvolvimento de algoritmos para a resolução do problema das p -medianas.

2.4.2 Resultados obtidos por Hakimi

O teorema de Hakimi, como ficou conhecido, prova a existência de um conjunto formado apenas por vértices que gera um resultado tão bom quanto um conjunto formado por pontos, localizado em qualquer parte do grafo. Isso facilita a busca pela melhor solução fazendo com que o algoritmo não pesquise pontos que estão sobre os arcos.

Considerando uma rede não orientada, pode-se ignorar os índices t e o de entrada e saída respectivamente. Buscando encontrar uma mediana (1-mediana), a pergunta que se faz, é se existe um ponto y em algum arco, não necessariamente num vértice do grafo de forma que o número de transmissão:

$$\sigma(y) = \sum_{x_j \in X} b_j \cdot d(y, x_j)$$

seja menor que a mediana do grafo. Onde b_j é o peso referente ao vértice x_j e $d(y, x_j)$ é distância do ponto y ao mesmo vértice. Se tal ponto existir, pode-se chamar este ponto \bar{p} de "Mediana Absoluta" do grafo G . Hakimi provou que este ponto \bar{y} não existe (LARSON e ODONI, 1981).

Teorema 2.4.1. *Existe pelo menos um vértice x do grafo G com $\sigma(x) \leq \sigma(y)$, para qualquer ponto arbitrário y em G .*

Uma forma de demonstrar o Teorema de Hakimi, baseada em Larson e Odoni (1981), é:

Demonstração. Supõe-se que a localização ótima de uma facilidade é um ponto x entre os nós p e q , ou seja, pertencente ao arco (p, q) , Seja $G(V, E)$ um grafo não orientado e k positivo e inteiro. O conjunto de pontos distintos, do grafo G , é dado por $X_k = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$. E a distância mínima, $d(X_k, j)$, entre os pontos x_i de X_k e o vértice j de G , dado por:

$$d(X_k, j) = \min_{x_i \in X_k} d(x_i, j)$$

A definição do conjunto de k -medianas do grafo é dado por k pontos de X_k^* em G , se para todo X_k de G temos:

$$J(X_k^*) \leq J(X_k)$$

Assim segue a demonstração para $k = 1$:

A distância $d(x, j)$ entre x e um vértice j de X é:

$$d(x, j) = \min\{d(x, p) + d(p, j), d(p, j) + d(q, j)\}$$

P é o conjunto de nós que são mais eficientes acessado por p e Q é o conjunto de pontos que são melhor acessados por q .

$$X = P \cup Q$$

Assume-se agora que mais vértices são acessados através de p :

$$\sum_{j \in P} h_j \geq \sum_{j \in Q} h_j$$

Utilizando os conceitos apresentados, pode-se escrever:

$$J(x) = \sum_{j \in N} h_j \cdot d(x, j)$$

$$J(x) = \sum_{j \in P} h_j \cdot [d(x, p) + d(p, j)] + \sum_{j \in Q} h_j \cdot [d(x, q) + d(q, j)]$$

$$J(x) = \sum_{j \in P} h_j \cdot [d(x, p) + d(p, j)] + \sum_{j \in Q} h_j \cdot [d(p, q) - d(x, p) + d(q, j)]$$

$$J(x) = \sum_{j \in P} h_j \cdot d(x, p) + \sum_{j \in P} h_j \cdot d(p, j) + \sum_{j \in Q} h_j \cdot d(p, q) - \sum_{j \in Q} h_j \cdot d(x, p) + \sum_{j \in Q} h_j \cdot d(q, j)$$

$$J(x) = d(x, p) \left(\sum_{j \in P} h_j - \sum_{j \in Q} h_j \right) + \sum_{j \in P} h_j \cdot d(p, j) + \sum_{j \in Q} h_j \cdot [d(p, q) + d(q, j)]$$

Da definição de distância $d(p, j)$, tem-se:

$$d(p, j) \leq d(p, q) + d(q, j)$$

Então:

$$J(x) \geq d(x, p) \left(\sum_{j \in P} h_j - \sum_{j \in Q} h_j \right) + \sum_{j \in P} h_j \cdot d(p, j) + \sum_{j \in Q} h_j d(q, j)$$

$$J(x) = d(x, p) \left(\sum_{j \in P} h_j - \sum_{j \in Q} h_j \right) + \sum_{j \in N} h_j \cdot d(p, j)$$

$$J(x) = d(x, p) \left(\sum_{j \in P} h_j - \sum_{j \in Q} h_j \right) + J(p)$$

Assumimos inicialmente que:

$$\sum_{j \in P} h_j - \sum_{j \in Q} h_j \geq 0$$

Isto implica que o produto

$$d(x, p) \left(\sum_{j \in P} h_j - \sum_{j \in Q} h_j \right) \geq 0$$

e isso nos leva a concluir que:

$$J(x) \geq J(p)$$

o que contradiz nossa hipótese.

Assim prova-se que ao menos uma boa solução movendo a facilidade de x para p , o que completa a demonstração. \square

Teorema 2.4.2. *Existe pelo menos um subconjunto $X_p \subseteq X$ contendo p vértices tais que $\sigma(X_p) \leq \sigma(Y_p)$ para qualquer conjunto arbitrário de Y_p de p vértices localizados nos arcos ou nos vértices do grafo $G(V, E)$.*

Demonstração. O segundo teorema é uma generalização do primeiro teorema que acabou de ser demonstrado. \square

Os resultados destes dois teoremas têm sido fundamental para o desenvolvimento de todos os algoritmos elaborados para o problema das p -medianas, já que eles fazem com que possamos restringir a busca somente aos vértices de G .

A seguir é apresentado o algoritmo de Teitz e Bart considerado por muitos autores como um algoritmo que apresenta soluções de qualidade e de fácil implementação.

2.4.3 Algoritmo de Teitz e Bart

Por HÖRNER (2009), o método de Teitz e Bart, ou método da Substituição de Vértices, é um algoritmo que foi apresentado por Michael B. Teitz e Polly Bart no artigo intitulado "Heuristic methods for estimating the generalized vertex median of a weighted graph", em 1968.

Informalmente, o algoritmo consiste em partir de uma solução aleatória inicial e a partir dela comparar um a um os nós que estão fora da solução atual, substituindo os nós mais bem colocados na função objetivo.

O procedimento pode ser descrito da seguinte forma:

Algoritmo Clássico de Teitz e Bart

Passo 1- Selecione um conjunto S de p vértice, formando uma aproximação inicial do conjunto ótimo \bar{X}_p . Chamar todos os vértices $x_j \notin S$ de vértices "não testados" e os $x_j \in S$ de "testados".

Passo 2- Selecionar um vértice não testado $x_j \notin S$, compute a "redução" Δ_{ij} no número de transmissão, se x_i é substituído por x_j , isto é, compute

$$\Delta_{ij} = \sigma(S) - \sigma(S \cup \{x_j\} - \{x_i\})$$

Passo 3- Encontre $\Delta_{i_0j} = \max_{x_j \in S} [\Delta_{ij}]$

1. Se $\Delta_{i_0j} \leq 0$ rotule o vértice x_j como testado e volte ao passo 2.
2. Se $\Delta_{i_0j} > 0$ efetuar $S \leftarrow S \cup \{x_j\} - \{x_i\}$, rotular x_j como testado e volte a passo 2.

Passo 4- Repetir 2 e 3 até que todos os vértices de X estejam rotulados como "testados". Este procedimento é referido como ciclo.

Se, durante o último ciclo nenhuma substituição foi feita no passo 3(2), vá ao passo 5.

Caso contrário, se foi feita alguma substituição, rotule todos os vértices como "não testados" e retorne ao passo 2.

Passo 5- Pare. O conjunto S atual é o conjunto de p -medianas \bar{X}_p .

Observa-se que o passo 1 do algoritmo consiste em selecionar um número de medianas para fazerem parte da solução inicial do problema denominado conjunto S , considerando uma solução como uma aproximação do conjunto ótimo. Ainda neste passo os nós que não fazem parte da solução inicial, $x_j \notin S$, são rotulados como "não testados".

No passo 2 é feita a seleção de um vértice $x_j \notin S$ qualquer para ser comparado aos vértices x_i que estão na solução. É feita a comparação com o vértice x_i entre todos os vértices x_j e são computadas as reduções, ou acréscimos, no número de transmissão ($\sigma(S)$), que é representado por Δ_{ij} .

O passo 3 é responsável pela escolha da redução máxima (Δ_{i_0j}). Se a redução máxima é positiva, o nó x_j é substituído e passa a fazer parte da nova solução, caso contrário, o nó x_j é rotulado como testado e volta-se ao passo 2.

O ciclo é caracterizado no passo 4. É nesta etapa que os passos 2 e 3 são repetidos até que não haja mais alterações durante o último ciclo completo. Caso isso ocorra, o passo 5 é responsável pelo fim do algoritmo e o conjunto solução \bar{X}_p é considerado a melhor aproximação do ótimo.

O algoritmo de Teitz e Bart se baseia no princípio de otimização local, caracterizando a idéia de λ - *otimalidade* utilizada em vários problemas de otimização combinatorial que foi generalizado posteriormente por LIN e KERNIGHA (1973) para o problema do caixeiro viajante.

3 Centralidades

3.1 Medidas de centralidade espectral

Por DE FREITAS (2010), as medidas de centralidade espectrais procuram obter propriedades estruturais dos vértices de um grafo a partir das propriedades dos autovalores e autovetores das matrizes associadas a estes grafos, mediante conceitos fundamentais de Álgebra Linear. Assim, serão apresentadas aqui uma das medidas de centralidade que avaliam o grau de relevância dos vértices a partir da representação de um grafo por uma matriz. A centralidade de autovetor atribui alta relevância para um vértice, em função da sua relação com seus vizinhos, ou seja, mesmo se um vértice v_k está ligado somente a outro vértice v_i (tendo assim uma baixa centralidade de grau), os vizinhos de v_i podem ser importantes, e conseqüentemente, o vértice v_k também será importante, obtendo uma elevada centralidade de autovetor. Tal medida de centralidade, agregadas a aquelas já apresentadas ao longo do texto, são uma importante ferramenta para o estudo e análise de redes.

3.1.1 Centralidade de autovetores

O Teorema de Perron-Frobenius, apresentado anteriormente, garante que em grafos conexos, o raio espectral coincide com o índice do grafo, isto é, $r(G) = ind(G)$, pois grafos conexos têm matrizes de adjacência irredutíveis. Além disso, este teorema garante que $r(G) > 0$ e, como autovalor, tem multiplicidade algébrica igual a 1. Portanto, a multiplicidade geométrica é também igual a 1, isto é, o espaço gerado pelos autovetores associados ao índice é unidimensional.

Pelo mesmo teorema, tem-se ainda que existe um autovetor associado ao índice com todas as coordenadas positivas. Isto permite introduzir mais uma medida de centralidade de vértice em um grafo.

A medida proposta por BONACICH (1987), chamada centralidade de autovetor, é base-

ada no conceito de autovalores e autovetores da matriz de adjacência do grafo G . Pode-se defini-la da seguinte maneira:

Definição 3.1.1. Seja G um grafo conexo com n vértices e seja x_k um vértice de G . A centralidade de autovetor de u_k é dada por:

$$c_{eig}(x_k) = u_k, \quad (3.1)$$

onde u_k é a k -ésima coordenada do autovetor unitário u associado ao índice do grafo, isto é,

$$u_k = \frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^n a_{kj} u_j; k = 1, \dots, n \quad (3.2)$$

Como a multiplicidade do raio espectral é igual a 1, qualquer outro autovetor positivo associado ao índice será múltiplo escalar deste. Logo, sejam $v = (v_1, \dots, v_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ ambos autovetores positivos associados ao índice de G tais que $y = \alpha v$. Se $v_i \leq v_j$ então $y_i \leq y_j$.

Muitos autores utilizam o termo autocentralidade para indicar a centralidade de autovetor.

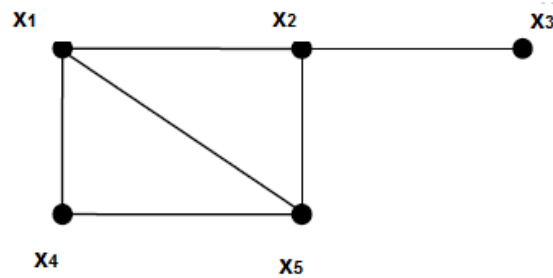


Figura 3.1: Exemplo de grafo com 5 vértices para centralidade de autovetor

Exemplo 3.1.1. Calculando o polinômio característico do grafo G e seu respectivo espectro têm-se:

$$p_G(\lambda) = \lambda^5 - 6\lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda + 2$$

$$SpectG = \begin{pmatrix} 2,641 & 0,723 & -0,589 & -1 & -1,775 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nota-se que existem autovalores negativo associados ao grafo da Figura 3.1, porém o autovalor dominante é $\rho = 2,641$. E desta forma, o autovetor positivo e de norma 1 associado a $\rho = 2,641$ é:

$$u = \left(0,587 \quad 0,474 \quad 0,179 \quad 0,406 \quad 0,537 \right)^T$$

Assim, as centralidades de autovetor dos respectivos vértices de G são:

$C_{eig}(x_1) = C_{eig}(x_5) = 0,537$; $C_{eig}(x_2) = 0,474$; $C_{eig}(x_3) = 0,179$; $C_{eig}(x_4) = 0,406$. Portanto, medida indica os vértice x_1 e x_5 como mais centrais do grafo da Figura 3.1.

O significado da centralidade de autovetor como medida de propagação é porque o autovetor define como o vértice mais central aquele que está ligado a outros que por sua vez também estabelecem relações com vértices que estão em posições centrais, e assim por diante.

A centralidade de autovetor de um vértice é uma combinação linear das centralidades dos vértices com ele conectados, RUHNAU (2000), e desta forma, pode ser justificado pelo que veremos logo a seguir, conhecido como Método das Potências, BARTOLI (2003).

Em linhas gerais, o método consiste em determinar o autovalor de maior valor absoluto de uma matriz e seu correspondente autovetor de maneira aproximada.

A partir dele, pode-se deduzir fatos interessantes sobre a importância de um vértice a um determinado conjunto pertencente a grafo G .

4 Método das Potências

Neste capítulo é apresentado o Método das Potências que servirá de base para o desenvolvimento de uma nova proposta de resolução para o problema das p -Medianas.

O Método das Potências é um método iterativo que calcula facilmente o autovetor dominante, ou pela Teoria de Grafos, o índice de um grafo G .

4.1 Teoremas de limites sobre autovalores

Teorema 4.1.1 (Discos de Gerschgorin). *Seja A uma matriz de ordem n , e d_i , $i = 1, 2, \dots, n$ os discos cujos centros são os elementos de a_{ii} e cujos raios r_i são dados por*

$$r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, i = 1, 2, \dots, n$$

Seja D a união de todos os discos d_i . Então, todos os autovalores de A encontram-se contidos em D .

Demonstração. Seja λ um autovalor de A e v um autovetor correspondente, tal que $\max_i |v_i| = 1$. Então,

$$\lambda v = Av,$$

de onde

$$(\lambda - a_{ii})v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| v_j, i = 1, 2, \dots, n,$$

Supondo que $|v_k| = 1$, então

$$\begin{aligned} |\lambda - a_{kk}| &\leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}| |v_j|, \\ &\leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}| = r_k, \end{aligned}$$

isto é, o autovalor λ está contido no disco d_k e, como λ é arbitrário, então todos os autovalores de A devem estar contidos na união de todos os discos D . \square

O exemplo a seguir apresenta uma aplicação do teorema dos Discos de Gerschgorin.

Exemplo 4.1.1. Dada a matriz B :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & 10 \end{bmatrix}$$

tem como seus autovalores $\lambda_1 = 10,3863$, $\lambda_2 = 2,8037$ e $\lambda_3 = 0,8100$. Calculando os discos de Gerschgorin, temos:

$$d_1 = |z - 1| < |0| + |-1| = 1$$

$$d_2 = |z - 4| < |-1| + |-1| = 2$$

$$d_3 = |z - 10| < |-1| + |-2| = 3$$

Como todos os autovalores de B são números reais, e observando (veja a Figura 4.1) que em cada disco deve-se ter um autovalor, é possível dizer que:

- existe um autovalor, λ_1 , que está dentro do disco centrado em 10 e possui raio 3 e, realmente, $7 < 10,3863 < 13$;
- existe um autovalor, λ_2 , que está dentro do disco centrado em 4 e possui raio 2 e, de fato, $2 < 3,8037 < 6$;
- existe um autovalor, λ_3 , que está dentro do disco centrado em 1 e possui raio 1, implicando em $0 < 0,81 < 2$;

Uma consequência do teorema de Gerschgorin é a determinação do maior disco que contém todos os autovalores de A . É possível obter, a partir dos discos, os extremos ao longo do eixo dos números reais, isto é, o intervalo $[\alpha, \omega]$ tal que

$$\alpha = \min_i \{a_{ii} - r_i\}, \omega = \max_i \{a_{ii} + r_i\}, i = 1, 2, \dots, n \quad (4.1)$$

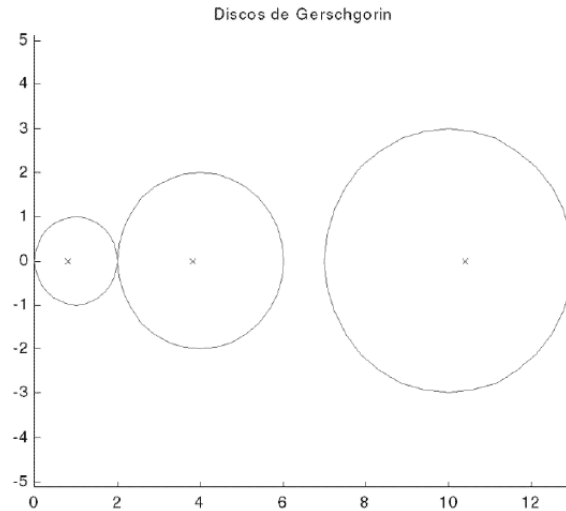


Figura 4.1: Discos de Gerschgorin

e o maior disco é justamente aquele com centro $(\alpha + \omega)/2$ e raio $(\alpha + \omega)/2$. No caso em que todos os autovalores são reais, basta considerar o intervalo $[\alpha, \omega]$.

Teorema 4.1.2 (Maior e menor autovalor). *Seja A uma matriz real simétrica de ordem n , e $v \in \mathbb{R}$ um vetor arbitrário. Então,*

$$\lambda_1 = \max_{v \neq 0} \frac{v^T A v}{v^T v}, \lambda_n = \min_{v \neq 0} \frac{v^T A v}{v^T v}$$

onde os autovalores são ordenados tais que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$.

A razão

$$\lambda_1 = \max_{v \neq 0} \frac{v^T A v}{v^T v}, \lambda_n = \min_{v \neq 0} \frac{v^T A v}{v^T v}$$

é chamada de quociente de Rayleigh correspondente a v .

O quociente de Rayleigh juntamente com o teorema 4.1.2, nos permitirá estimar de forma bastante rápida um autovalor de uma matriz simétrica, conforme será visto na próxima seção.

4.2 Método das Potências

O cálculo de autovalores e autovetores via polinômio característico possui um elevado custo computacional, e por este motivo em muitos casos são utilizados métodos iterativos

para o mesmo.

Além disso, há situações em que não é necessário encontrar todos os autovalores e seus correspondentes autovetores como é o caso do algoritmo PageRank utilizado pela empresa Google para realizar buscas na internet calculando o autovetor associado ao autovalor dominante para listar sites em ordem de importância.

Desta forma, um desses métodos iterativos é o método das potências, o qual calcula o autovetor associado ao autovalor dominante de forma eficiente de acordo com a teoria de centralidade de autovetor.

Por ANTON e C.BUSBY (2003), há muitas aplicações onde um vetor v_o de \mathbb{R}^n é multiplicado repetidamente por uma matriz A de tamanho $n \times n$ para produzir uma sequência

$$v_o, Av_o, A^2v_o, \dots, A^k v_o$$

Dizemos que uma sequência dessa forma é uma sequência de potências geradas por A . Nesta seção, iremos dar atenção à convergência de sequência de potências e suas aplicações no estudo de autovalores e autovetores. Para tal objetivo apresentamos a seguinte definição:

Definição 4.2.1. Se os autovalores distintos de uma matriz A são $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ e se $|\lambda_1|$ é maior do que $|\lambda_2|, \dots, |\lambda_k|$, então λ_1 é denominado um autovalor dominante de A . Qualquer autovetor associado a um autovalor dominante é denominado um autovetor dominante de A .

Por hipótese, assume-se que existem n autovetores linearmente independentes v_i , de onde qualquer vetor arbitrário z_o pode ser expresso como combinação linear desses autovetores, isto é.

$$z_o = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \quad (4.2)$$

considere agora o método da aproximação sucessiva

$$z_k = Az_{k-1}, k = 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

onde z_o é um vetor inicial, dado. Usando as equações $Av = \lambda v$, (4.2) e reescrevendo (4.3)

em termos de z_0

$$\begin{aligned} z_k &= Az_{k-1} = A^2 z_{k-2} = \dots = A^k z_0 \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^k v_i \end{aligned} \quad (4.4)$$

Se ao menos um dos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ não é nulo, então os termos correspondentes a eles, ou seja, $\sum_{i=1}^r \alpha_i \lambda_i^k v_i$ irão dominar o somatório da equação (4.4). Suponha, por exemplo, que temos um autovalor dominante, λ_1 de A . Considerando que $\alpha_1 \neq 0$ podemos reescrever (4.4) como

$$z_k = \lambda_1^k \left(\alpha_1 v_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k v_i \right) \quad (4.5)$$

Note agora que, como $\lambda_1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, por hipótese, então os termos $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k$ tende a zero à medida que k cresce. Daí, podemos escrever

$$z_k = \lambda_1^k (\alpha_1 v_{1+k}) \quad (4.6)$$

onde v_k é um vetor com elementos próximos a zero. O vetor z_k tende, então, a aproximar o autovetor não-normalizado v_1 . Essa equação permite escrever o assim chamado *Método das Potências*. Da equação (4.6), é possível reescrever

$$z_{k+1} = \lambda_1^{k+1} (\alpha_1 v_{1+k+1})$$

e dividindo a i -ésima componente da equação acima pela k -ésima componente de (4.6), obtemos

$$\frac{(z_{k+1})_i}{(z_k)_i} = \lambda_1 \left(\frac{\alpha_1 v_{1+k+1}}{\alpha_1 v_{1+k}} \right) \rightarrow \lambda_1, \text{ quando } k \rightarrow \infty, i = 1, 2, \dots, n \quad (4.7)$$

onde $(z_k)_i$ indica o elemento i do vetor z_k . A equação (4.7) nos diz que a taxa de convergência do método depende não só das constantes α_i , mas principalmente das frações

$$\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|, \left| \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \right|, \dots, \left| \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right| \quad (4.8)$$

Quanto menores forem essas frações, mais rápida é a convergência; por isso diz-se que o método da potência é eficiente e converge rapidamente para um autovalor (desde de que esse autovalor seja dominante, isto é, relativamente distante dos demais como já visto).

Das equações (4.3) e (4.7), é possível escrever um algoritmo para o Método da Potências.

Uma questão que se coloca é: quais valores, iniciais, λ_0 e z_0 , deve-se utilizar para o autovalor dominante e seu autovetor? Para z_0 , considera-se um vetor arbitrário, o qual será normalizado antes de se iniciar as interações. Com essa escolha, utiliza-se a equação ($Ax = \lambda x$), e é escrito:

$$Az_0 = \lambda_0 z_0 \therefore \|z_0\| = 1 \therefore \\ z_0^T Az_0 = z_0^T \lambda_0 z_0 = \lambda_0 (z_0^T z_0) = \lambda_0$$

Aplica-se, então, repetidamente a equação (4.3), normalizando o vetor z_k a cada iteração, conforme mostrado no algoritmo.

O exemplo é apresentado para a melhor compreensão do método.

Além disso, o método das potências possui diversas variações como, por exemplo, o método das potências com mudança de escala de entrada máxima, onde em vez da utilização da norma Euclidiana, é adotada a norma do máximo. Porém, não vem ao caso entrar em detalhes dessas variações, pois nenhuma delas foi utilizada no trabalho, em função do método utilizado não ter apresentado diferenças significativas em relação aos demais.

Exemplo 4.2.1.

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 90 \end{bmatrix}$$

a qual tem como autovalores e respectivos autovetores,

$$\lambda_1 = 90,0115, \lambda_2 = 7,6308, \lambda_3 = 5,3577$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0,0245 \\ 0,0115 \\ 0,9996 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -0,9353 \\ 0,3539 \\ -0,0043 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} -0,0043 \\ -0,0111 \\ 0,9996 \end{bmatrix}.$$

Utilizando-se o método das potências com um vetor com três elementos escolhidos arbitrariamente e normalizado, $z_0 = (0,4394, 0,6415, 0,6287)^T$, obtém-se a seguinte seqüência

de valores, com uma tolerância para convergência de 10^{-5} , como pode ser visto na Tabela 4.1:

k	z_k	λ_k
0	$(0, 4394, 0, 6415, 0, 6287)^T$	40,5408
1	$(0, 0940, 0, 0590, 0, 9936)^T$	89,2834
2	$(0, 0313, 0, 0133, 0, 9994)^T$	89,9939
3	$(0, 0251, 0, 0115, 0, 9996)^T$	90,0102
4	$(0, 0246, 0, 0115, 0, 9996)^T$	90,0114
5	$(0, 0245, 0, 0115, 0, 9996)^T$	90,0115
6	$(0, 0245, 0, 0115, 0, 9996)^T$	90,0115

Tabela 4.1: Exemplo do Método das Potências

onde verifica-se que z_6 é uma boa aproximação para v_1 obedecendo a tolerância imposta.

Observação 4.2.1. A taxa de convergência do método depende da razão $\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_2|}$, de forma que, se esta razão estiver próxima de 1 então a sua taxa de convergência da série de potências para a solução, é pequena.

Observação 4.2.2. Se a matriz não possuir autovalor dominante então o Método das Potências divergirá.

A seguir é visto uma aplicação muito importante do Método das Potências no algoritmo PageRank utilizado pela empresa Google.

4.2.1 PageRank

De acordo com ANTON e C. BUSBY (2003), o método das potências foi utilizado para desenvolver um novo tipo de algoritmo para execução de serviços de buscas na internet. Esse algoritmo, denominado PageRank, é implementado pelo programa de busca da Google, e foi desenvolvido por Larry Page e Sergey Brin, ambos pós-graduandos da Universidade de Standford, nos EUA. Enquanto a maioria dos serviços de busca verifica

o título e conteúdo das páginas para determinar uma lista de sites relevantes, o algoritmo PageRank determina quais páginas são referidas por outras páginas, cria então uma matriz de referências para descrever a estrutura das referências, e então usa o autovetor dominante (a centralidade de autovetor) de uma matriz associada para criar uma lista ordenada dos sites que aparentemente são mais relevantes para a busca.

Para explicar o algoritmo PageRank, supõe-se que o conjunto de busca S contém n e define-se a matriz de adjacência de S de tamanho $n \times n$ como a matriz de referência dos sites entre si, de modo a indicar o valor 1 para a referência do i -ésimo ao j -ésimo site (com $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, n$), e o valor 0 para ausência da referência. Além disso, tal matriz possui diagonal nula, pois supõe-se que nenhum site faz referência a si mesmo.

Um site pode desempenhar um de dois papéis básicos no processo de busca: pode ser um centro, o que significa que ele faz referência a muitos outros sites, ou pode ser um autoridade, o que significa que ele é realmente referido por muitos outros sites. Um dado site tipicamente pode ter propriedades tanto como de centro quanto de autoridade, por fazer referências e pode ser referido.

Em geral, se $A(G)$ é uma matriz de adjacência de n sites da internet, então as somas das entradas de colunas medem o aspecto autoridade dos sites e as somas das entradas de linhas medem o aspecto centro dos sites.

Em vista disso, se $A(G)$ é uma matriz de adjacência afirma-se que o vetor h_0 das somas das entradas de linhas de $A(G)$ é o vetor-centro inicial de $A(G)$ e o vetor a_0 como o vetor das somas das entradas das colunas de $A(G)$ é o vetor-autoridade inicial de $A(G)$. As entradas do vetor-centro são denominadas os pesos de centro e as do vetor-autoridade, os pesos de autoridade.

Uma vez obtido o vetor-autoridade inicial calcula-se a primeira iteração do algoritmo pela seguinte fórmula:

$$h_1 = \frac{A(G)a_0}{\|A(G)a_0\|} \text{ e } a_1 = \frac{A(G)^T h_1}{\|A(G)^T h_1\|} \quad (4.9)$$

Assim, obtidos um vetor-centro h_1 e um vetor-autoridade a_1 atualizados, o programa de busca Google repete o processo e calcula uma sucessão de vetores-centro e vetores-

autoridade gerando, assim, seqüências inter-relacionadas

$$h_1 = \frac{A(G)a_0}{\|A(G)a_0\|}, h_2 = \frac{A(G)a_1}{\|Aa_1\|}, \dots, h_k = \frac{Aa_{k-1}}{\|A(G)a_{k-1}\|}, \dots \quad (4.10)$$

$$a_0, a_1 = \frac{A^T h_1}{\|A^T h_1\|}, a_2 = \frac{A^T h_2}{\|A^T h_2\|}, \dots, a_k = \frac{A(G)^T h_k}{\|A(G)^T h_k\|}, \dots \quad (4.11)$$

De forma análoga pode-se escrever os k -ésimos termos das equações acima como:

$$a_k = \frac{(A(G)^T A(G)) a_{k-1}}{\|(A(G)^T A(G)) a_{k-1}\|} \quad (4.12)$$

$$h_k = \frac{(A(G)A(G)^T) h_{k-1}}{\|(A(G)A(G)^T) h_{k-1}\|} \quad (4.13)$$

Observação 4.2.3. Como as matrizes $A(G)A(G)^T$ e $A(G)^T A(G)$ são simétricas então as mesmas possuem autovalores dominantes positivos e assim o método converge para os seus respectivos autovetores dominantes.

No próximo capítulo é apresentado uma nova proposta para resolução do problema das p -medianas, combinando o método das potências juntamente com o algoritmo de Teitz e Bartz.

5 Proposta de Resolução do Problema das p -medianas

A partir do que foi visto na revisão bibliográfica, o problema das p -medianas devido à explosão combinatorial está inserido na classe dos NP -Completo, ou seja, o tempo de solução ótima do problema cresce exponencialmente a medida que os dados de entrada aumentam. Nesse sentido, a solução do problema via algoritmo clássico de Teitz e Bartz pode tornar-se inviável, pois o tempo computacional, aumenta de forma expressiva, para redes acima de 100 nós. Devido a isso, estudos fundamentados na Álgebra Linear e Teoria Espectral podem se tornar uma excelente alternativa, no auxílio da busca de uma aproximação da solução ótima do algoritmo de Teitz e Bart.

Recentemente, em Freitas (2012) foi proposta uma modificação no algoritmo de Teitz e Bart, que teve como objetivo, auxiliar a resolução de problemas de grande porte, inicialmente modelados por grafos completos e não-ponderados. A vantagem da proposta está em partir de uma boa solução inicial, que garante a preservação da qualidade da solução que ocorre em redes pequenas e médias. Depois, arestas desnecessárias são excluídas da avaliação, buscando contornar a explosão combinatorial que ocorre no método de Teitz e Bart tradicional. Também, busca-se realizar perturbações nas soluções, a exemplo do Algoritmo Genético que utiliza a mutação da solução, tentando evitar a convergência do método a um ponto mínimo local do problema a ser solucionado.

5.1 Uma proposta para resolução do problema das p -medianas ponderado

Como mencionado anteriormente sobre o trabalho de FREITAS(2012), o método descrito apresenta grandes vantagens computacionais para grafos não-ponderados. A partir da matriz de distâncias Euclidianas é possível resolver o problema das p -medianas, combi-

nando o método das potências com o algoritmo combinatorial de Teitz e Bart.

Nesta seção, a proposta é apresentar uma estratégia de resolução para o problema das p -medianas para grafos não-dirigidos e ponderados, buscando de forma similar, utilizar propriedades do método das potências para redes com vértices ponderados, definindo uma boa solução inicial, buscando também aumentar a convergência do método. A ideia do método se baseia em obter importâncias de saída (centro) de cada vértice via método das potências em relação aos demais, de forma a avaliar a importância de cada um, em relação as suas conectividades de saída, excluindo assim, arestas desnecessárias a cada vértice. Além disso, definir uma proposta que cause uma perturbação na solução do algoritmo original, buscando otimizar o desempenho do mesmo. A seguir, é apresentado algoritmo referente a proposta deste trabalho.

Algoritmo para a Resolução do Problemas das p -Medianas Ponderado

Passo 1: Considere $A_p(G)$ como a matriz de distâncias mínimas ponderadas, faça $A' = A_p(G)$;

Passo 2: Calcule o vetor centro de A' pelo Método das Potências, denotado por γ ;

Passo 3:

- Se A' possui pelo menos p -colunas, onde cada uma tem no máximo p -elementos, vá para o passo 6.
- Senão vá para o passo 4.

Passo 4: Calcule $R_i = \left[\sum_{j=1}^n A'_{ij} \right] \gamma_i^2$, para todo i ;

Passo 5: Para todo i e para todo j :

Se $A'_{ij} > R_i$ então $A'_{ij} = 0$, vá para o passo 2;

Passo 6: Hierarquize o vetor γ em ordem crescente, armazenando a ordem em O e adote p -menores componentes como solução inicial S do algoritmo;

Passo 7: Calcule o número de transmissão, $\sigma(S)$, obedecendo a hierarquização de O e a matriz $A_p(G)$;

Passo 8: Determine quais vértices são atendidos por cada candidato a mediana, formando assim p -grupos chamados de G^{v_k} , com $k = 1, \dots, p$;

Passo 9: Calcule o número de transmissão ($\sigma_{G^{v_k}}(S)$) para cada grupo G^{v_k} ;

Passo 10: Verifique se cada candidato a mediana pode ser substituído por outro vértice que apresente melhor desempenho em seu grupo de acordo com o número de transmissão de cada grupo;

- Se há substituição vá para o passo 7.
- Senão vá para o passo 11.

Passo 11: Selecione o conjunto S de p vértices, use o conjunto S como aproximação inicial do conjunto ótimo \bar{V}_p . Chamando todos vértices $x_i \in S$ de testados;

Passo 12: Rotule os vértices de $x_i \notin S$, como não testado.

Passo 13: Para algum j , selecione um vértice $x_j \notin S$ não testado, de acordo com a hierarquia em ordem crescente do vetor importância γ .

Passo 14:

- Se todos os vértices estão rotulados como testados vá para o passo 16.
- Senão vá para o passo 15.

Passo 15: Compute a "redução" Δ_{ij} no número de transmissão, da substituição de x_i por x_j , isto é, compute:

$$\Delta_{ij} = \sigma(S) - \sigma(S \cup \{x_i\} - \{x_j\})$$

e adote Δ_{ij}^m como o máximo dos Δ_{ij}

- Se $\Delta_{ij}^m \leq 0$ rotule o vértice x_i como testado e volte ao passo 13.
- Senão efetue $S \leftarrow S \cup \{x_i\} - \{x_j\}$, rotule como testado, rotule todos os vértices $x_i \notin S$ como "não testados", e retorne ao passo 8.

Passo 16: Pare. O conjunto S atual é o conjunto de p -medianas \bar{X}_p .

A Figura 5.1 apresenta o fluxograma que demonstra o funcionamento do algoritmo proposto.

O primeiro passo consiste em definir uma matriz auxiliar de forma que para cada vértice é possível utilizar, no cálculo do número de transmissão, a matriz peso-distância original. No segundo passo é calculado a importância de todos os vértices em relação a rede auxiliar pelo Método das Potências, de forma que vetor γ converge ao autovetor dominante da matriz AA^T . Além disso, a explicação do uso da matriz AA^T , está presente no fato da matriz A' não ser simétrica, sem que se tenha assim, garantia de convergência do método. Os passos 2, 3, 4 e 5 formam o primeiro ciclo, Figura A.1, os quais definem a redução do número de arestas do grafo, com o objetivo de aproximar uma boa solução inicial do algoritmo, evidenciando os vértices mais distantes no grafo.

Os passos 6 e 7 são responsáveis pela definição da solução inicial e do valor de transmissão dos candidatos à mediana. Nos passos 8 e 9, os grupos G^{x_i} são definidos, juntamente com seus respectivos valores de transmissão. Sendo que o valor de transmissão do problema é composto da soma dos valores de transmissão dos grupos G^{x_i} .

No passo 10, é verificado em cada grupo, se no grupo existir um vértice que tenha desempenho melhor que o candidato a mediana, esse vértice substitui a possível mediana em questão, esse passo constitui o 2º ciclo, Figura A.3.

O passo 11 define a solução inicial para o algoritmo de Teitz e Bart, rotulando os vértices pertencentes ao conjunto solução \bar{X}_p , como testados.

Por outro lado, o passo 12 rotula os vértices que não pertencem a solução inicial, como não testados.

No passo 13, é iniciado o processo de substituição de vértices, de forma a utilizar o vetor de ordenação O , como ordem de substituição.

O passo 14, garante o terceiro ciclo do algoritmo, Figura A.3, o qual permite que o algoritmo seja executado até que todos vértices estejam rotulados com "testados". O passo 15 é o último ciclo do algoritmo, substituindo vértices que tenham melhor desempenho na solução. Este passo busca a perturbação da solução, com objetivo de evitar a convergência do método para um mínimo local.

O passo 16 é responsável pelo fim do algoritmo e o conjunto solução \bar{X}_p é considerado a

melhor aproximação do ótimo.

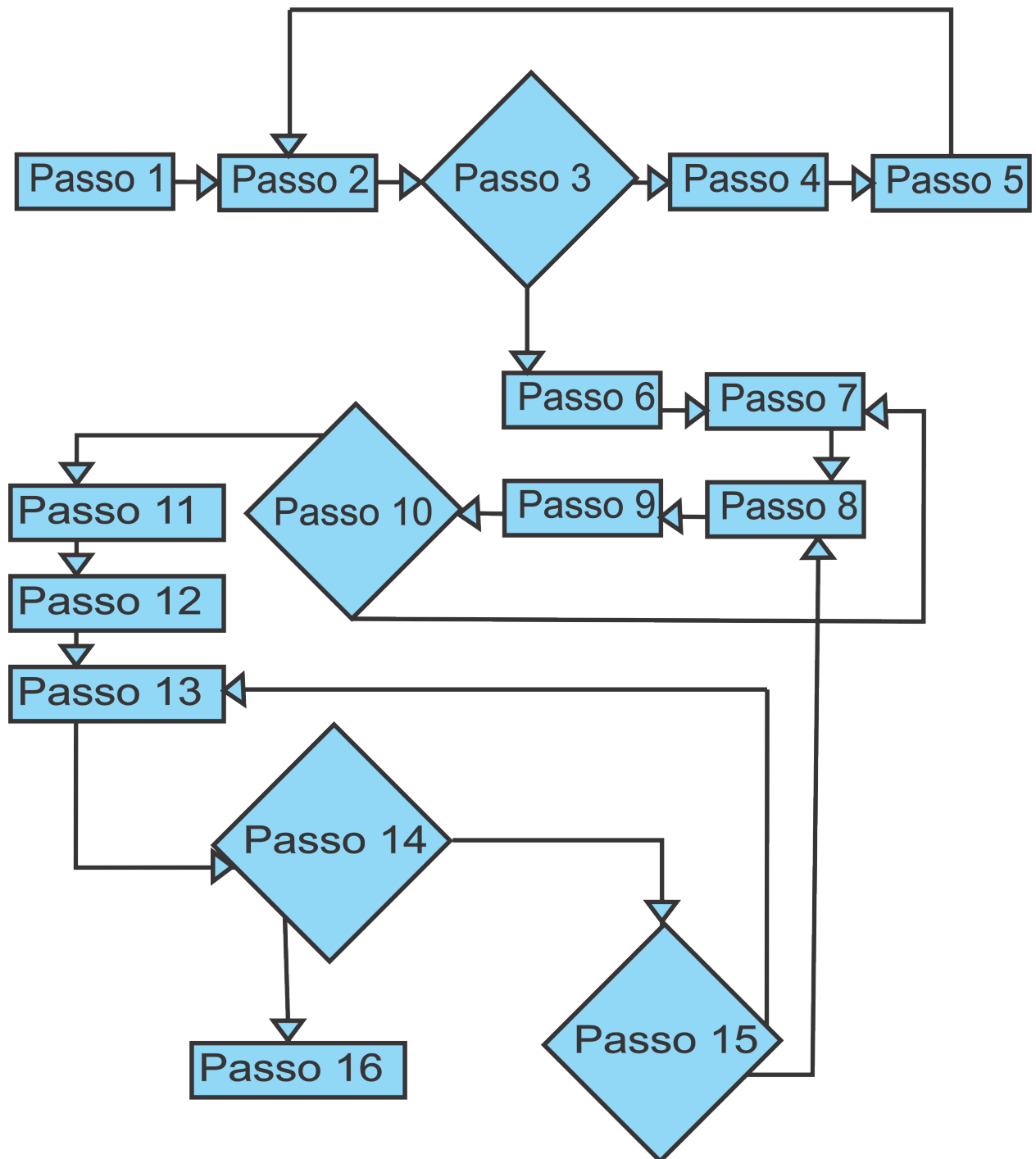


Figura 5.1: Fluxograma do Algoritmo Proposto

Para ilustrar o algoritmo é apresentado um exemplo proposto pela literatura mais particularmente por HÖRNER (2009).

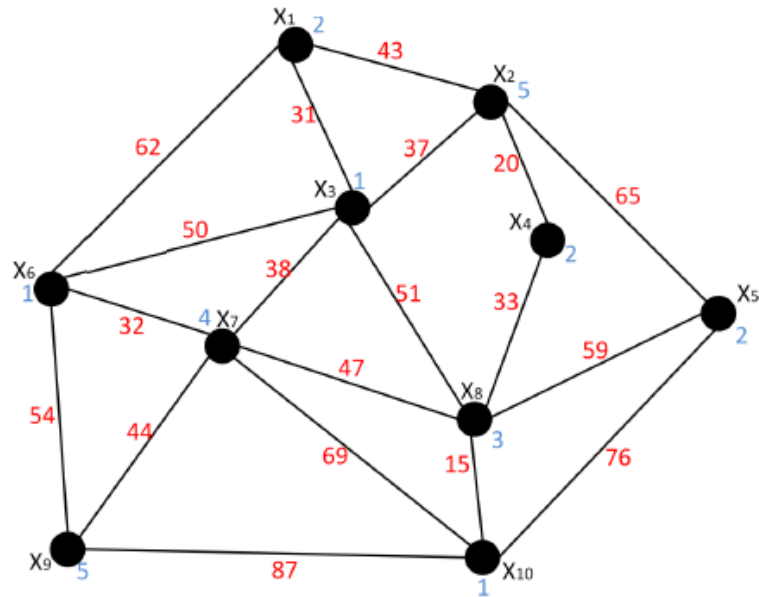


Figura 5.2: Exemplo de grafo em HÖRNER(2009)

Exemplo 5.1.1. O funcionamento do método será ilustrado no exemplo proposto, apresentando as vantagens do mesmo. Define-se D como a matriz de distâncias mínimas, a qual foi obtida pelo algoritmo de Dijkstra clássico, e $A_p(G)$ como a matriz peso-distância do grafo da Figura 5.1, resultante da multiplicação do vetor peso P_e pela matriz D . Onde

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 43 & 31 & 63 & 108 & 62 & 69 & 82 & 113 & 97 \\ 43 & 0 & 37 & 20 & 65 & 87 & 75 & 53 & 119 & 68 \\ 31 & 37 & 0 & 57 & 102 & 50 & 38 & 51 & 82 & 68 \\ 63 & 20 & 57 & 0 & 85 & 107 & 80 & 33 & 124 & 48 \\ 108 & 65 & 102 & 85 & 0 & 138 & 106 & 59 & 150 & 76 \\ 62 & 87 & 50 & 107 & 138 & 0 & 32 & 79 & 54 & 94 \\ 69 & 75 & 38 & 80 & 106 & 32 & 0 & 47 & 44 & 62 \\ 82 & 53 & 51 & 33 & 59 & 79 & 47 & 0 & 91 & 15 \\ 113 & 119 & 82 & 124 & 150 & 54 & 44 & 91 & 0 & 87 \\ 97 & 68 & 66 & 48 & 76 & 94 & 62 & 15 & 87 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_e^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 2 & 2 & 1 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 215 & 31 & 126 & 216 & 62 & 276 & 246 & 565 & 97 \\ 86 & 0 & 37 & 40 & 130 & 87 & 300 & 159 & 595 & 68 \\ 62 & 185 & 0 & 114 & 204 & 50 & 152 & 153 & 410 & 66 \\ 126 & 100 & 57 & 0 & 170 & 107 & 320 & 99 & 620 & 48 \\ 216 & 325 & 102 & 170 & 0 & 138 & 424 & 177 & 750 & 76 \\ 124 & 435 & 50 & 214 & 276 & 0 & 128 & 237 & 270 & 94 \\ 138 & 375 & 38 & 160 & 212 & 32 & 0 & 141 & 220 & 62 \\ 164 & 265 & 51 & 66 & 118 & 79 & 188 & 0 & 455 & 15 \\ 226 & 595 & 82 & 248 & 300 & 54 & 176 & 273 & 0 & 87 \\ 194 & 340 & 66 & 96 & 152 & 94 & 248 & 45 & 435 & 0 \end{bmatrix}$$

Como exemplo é escolhido $p = 3$, e desta forma:

Passo 1: Faça $A' = A_p(G)$

Passo 2: Nesse exemplo o algoritmo tem como número de medianas $p = 3$. Desta forma é calculado o vetor γ de A' via Método das Potências. Desta forma, têm-se

$$\gamma^T = \begin{bmatrix} 0.3511 & 0.2986 & 0.2634 & 0.3307 & 0.4552 & 0.3030 & 0.2291 & 0.2791 & 0.2831 & 0.3150 \end{bmatrix}$$

Passo 3: Entra-se no primeiro ciclo do algoritmo, pois o grafo ainda é conexo e A' é irredutível pelo Teorema 2.4.1.

Passo 4: Calcule o raio de cada vértice no grafo por $R_i = \left[\sum_{j=1}^n A'_{ij} \right] \gamma_i^2$. Assim temos

$$R = \begin{bmatrix} 226.1 & 133.9 & 96.8 & 180.1 & 492.8 & 167.8 & 72.3 & 109.2 & 163.6 & 165.7 \end{bmatrix}$$

Note que a importância de cada vértice agora refletida como um valor real, que representa intuitivamente a cobertura de cada vértice no grafo G .

Passo 5: Neste passo a matriz A' passa por um processo de filtragem. Se a distância do vértice i ao vértice j é maior do que o raio R_i , o elemento a_{ij} da matriz A' recebe o valor zero.

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{215} & 31 & 126 & 216 & 62 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 97 \\ 86 & \mathbf{0} & 37 & 40 & 130 & 87 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 68 \\ 62 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 50 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 66 \\ 126 & \mathbf{100} & 57 & 0 & 170 & 107 & \mathbf{0} & \mathbf{99} & \mathbf{0} & 48 \\ 216 & \mathbf{325} & 102 & 170 & 0 & 138 & \mathbf{424} & \mathbf{177} & \mathbf{0} & 76 \\ 124 & \mathbf{0} & 50 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{128} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 94 \\ 0 & \mathbf{0} & 38 & 0 & 0 & 32 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 62 \\ 0 & \mathbf{0} & 51 & 66 & 0 & 79 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 15 \\ 0 & \mathbf{0} & 82 & 0 & 0 & 54 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 87 \\ 0 & \mathbf{0} & 66 & 96 & 152 & 94 & \mathbf{0} & \mathbf{45} & \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}$$

As figuras A.4 e A.5 ilustram o funcionamento da exclusão de arestas, mostrando quem é atendido por cada vértice no grafo. Após retorna-se ao passo 2.

Passo 2-3: Neste passo como a matriz A' tem no mínimo p -colunas, nesse caso tem 4 colunas. Cada coluna tem no máximo 3 elementos (colunas 2, 7, 8 e 9), como pode ser visto na matriz A' acima. Dessa forma, o algoritmo segue ao passo 6.

Passo 6: Como neste passo

$$\gamma^T = \begin{bmatrix} 0.1531 & 0.0414 & 0.0053 & 0.1119 & 0.6033 & 0.0277 & 0.0022 & 0.0072 & 0.0062 & 0.0417 \end{bmatrix}$$

Então têm-se

$$O^T = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 9 & 8 & 6 & 2 & 10 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

e como solução inicial o conjunto $\{x_7, x_3, x_9\}$.

Passo 7:

O número de transmissão, ou seja, o valor da função objetivo é 800, pela matriz $A_p(G)$.

Passo 8:

Pela solução inicial

$$\begin{bmatrix} & x_1 & x_2 & x_4 & x_5 & x_6 & x_8 & x_{10} \\ x_3 & 62 & 185 & 114 & 204 & 50 & 153 & 66 \\ x_7 & 138 & 375 & 160 & 212 & 32 & 141 & 62 \\ x_9 & 226 & 595 & 248 & 300 & 54 & 273 & 87 \end{bmatrix}$$

onde cada vértice fora da solução é atendido por um candidato a mediana. Representado pelo valor mínimo na sua respectiva coluna. Por exemplo x_1 pode ser atendido por x_3 , x_7 ou x_9 , com custos de 62, 138 e 226, desta forma como 62, referente a x_3 , é o mínimo dos valores, então x_1 é atendido por x_3 .

Assim, sabe-se que x_3 , nessa configuração de solução atende x_1, x_2, x_4 e x_5 ; x_7 atende x_6, x_8 e x_{10} . Além disso, x_9 não atende ninguém.

$$G^{x_3} = \begin{bmatrix} 0 & 215 & 31 & 126 & 216 \\ 86 & 0 & 37 & 40 & 130 \\ 62 & 185 & 0 & 114 & 204 \\ 126 & 100 & 57 & 0 & 170 \\ 216 & 325 & 102 & 170 & 0 \end{bmatrix} \quad G^{x_7} = \begin{bmatrix} 0 & 128 & 237 & 94 \\ 32 & 0 & 141 & 62 \\ 79 & 188 & 0 & 15 \\ 94 & 248 & 45 & 0 \end{bmatrix}$$

x_9 não possui uma matriz que reflète seu conjunto, pois tal candidato a mediana não atende nenhum vértice.

Passo 9:

Calculando o número de transmissão têm-se:

$$\sigma_{G^{x_3}} = 62 + 185 + 114 + 204 = 565$$

$$\sigma_{G^{x_7}} = 32 + 141 + 62 = 235$$

$$\sigma_{G^{x_9}} = 0$$

Verificando tem-se que a solução inicial é igual a 800, ou seja, $\sigma_{G^{x_3}} + \sigma_{G^{x_7}} + \sigma_{G^{x_9}} = 565 + 235 + 0 = 800$.

Passo 10:

Neste passo é verificado se alterações na solução pela soma da linha de cada grupo.

$$G^{x_3} = \begin{bmatrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & & \\ x_1 & 0 & 215 & 31 & 126 & 216 & = \sum_{j=1}^n G^{x_3}(1, j) = 588 & \\ x_2 & 86 & 0 & 37 & 40 & 130 & = \sum_{j=1}^n G^{x_3}(2, j) = 293 & \\ x_3 & 62 & 185 & 0 & 114 & 204 & = \sum_{j=1}^n G^{x_3}(3, j) = 565 & \\ x_4 & 126 & 100 & 57 & 0 & 170 & = \sum_{j=1}^n G^{x_3}(4, j) = 453 & \\ x_5 & 216 & 325 & 102 & 170 & 0 & = \sum_{j=1}^n G^{x_3}(5, j) = 813 & \end{bmatrix}$$

$$G^{x_7} = \begin{bmatrix} & x_6 & x_7 & x_8 & x_{10} & & & \\ x_6 & 0 & 128 & 237 & 94 & = \sum_{j=1}^n G^{x_7}(1, j) = 459 & & \\ x_7 & 32 & 0 & 141 & 62 & = \sum_{j=1}^n G^{x_7}(2, j) = 235 & & \\ x_8 & 79 & 188 & 0 & 15 & = \sum_{j=1}^n G^{x_7}(3, j) = 282 & & \\ x_{10} & 94 & 248 & 45 & 0 & = \sum_{j=1}^n G^{x_7}(4, j) = 387 & & \end{bmatrix}$$

Desta forma, ocorre uma alteração no grupo G^{x_3} pois v_2 atende de melhor forma os demais vértice do grupo do que x_3 . Os grupos G^{x_7} e G^{x_9} se mantêm os mesmos. Retorna-se ao passo 7, pois houve uma alteração.

Passo 7:

Agora, o valor da função objetivo é 528.

Passo 8:

Pela solução inicial

$$\begin{bmatrix} & x_1 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_8 & x_{10} & \\ x_2 & 86 & 37 & 40 & 130 & 87 & 159 & 68 & \\ x_7 & 138 & 38 & 160 & 212 & 32 & 141 & 62 & \\ x_9 & 226 & 82 & 248 & 300 & 54 & 273 & 87 & \end{bmatrix}$$

Como não há alteração dos grupos as matrizes peso-distância, serão respectivamente as mesmas. E pelos passos 9 e 10, o algoritmo segue sem alterações ao passo 11, com solução inicial $\{x_2, x_7, x_9\}$.

Passo 11:

Os vértices do conjunto $\{x_2, x_7, x_9\}$ são rotulados como testados. Os demais são rotulados como não testados

Passo 12-13-14-15:

Pelo vetor γ podemos hierarquizar os vértices em ordem crescente de importância de modo que: $x_7 < x_3 < x_9 < x_8 < x_6 < x_2 < x_{10} < x_4 < x_1 < x_5$, é armazenado nessa ordem em O . Pela hierarquia do vetor importância do conjunto de transmissão O escolhe-se o vértice 3 como candidato a ser testado. É computada a modificação que o mesmo vértice faria no número de transmissão. Assim:

$$\Delta_{23} = 528 - 800 = -272$$

$$\Delta_{73} = 528 - 687 = -159$$

$$\Delta_{93} = 528 - 978 = -450$$

$\Delta_{i3}^m = \max\{\Delta_{23}, \Delta_{73}, \Delta_{93}\} = -159 < 0$, então como não houve redução na Função Objetivo, então, o vértice 3 é rotulado como testado e volta-se ao passo 12 seguindo a hierarquia do vetor importância do conjunto de transmissão. Desta forma escolhemos 8 como o novo vértice a ser testado. Assim:

$$\Delta_{28} = 528 - 685 = -157$$

$$\Delta_{78} = 528 - 526 = 2$$

$$\Delta_{98} = 528 - 548 = -20$$

$\Delta_{i8}^m = \max\{\Delta_{28}, \Delta_{78}, \Delta_{98}\} = 2 > 0$, como houve redução

$$S \leftarrow S \cup \{x_8\} - \{x_7\}$$

V_8 é rotulado como testado.

Como houve uma substituição, retorna-se ao passo 8.

Todos os passos a partir do 8 são executados novamente, sem que haja alteração na solução.

Passo 16: Desta forma, o algoritmo é finalizado, com $\{x_2, x_8, x_9\}$ sendo a melhor aproximação do conjunto solução do problema, e valor de transmissão igual 526.

6 Resultados e Conclusão

6.1 Testes computacionais

Nesta seção serão mostrados testes computacionais iniciais, referentes a problemas de pequeno e médio porte, gerados aleatoriamente, em 40 casos com tamanho distintos, onde as conexões dos vértices estão definidos no intervalo inteiro de 1 até 1000, e os pesos no intervalo inteiro de 1 até 100. O algoritmo proposto foi implementado na linguagem Matlab, como pode ser visto no Anexo C, e simulado em um computador Pentium Quad Core 1.8 Ghz, 4 Gb de memória RAM DDR2.

A seguir são mostrados os gráficos de comparação entre o algoritmo proposto e o algoritmo clássico de Teitz e Bart. Onde, na figura 6.1, o eixo horizontal representa as simulações dos grafos e o vertical o valor das funções objetivo de cada caso.

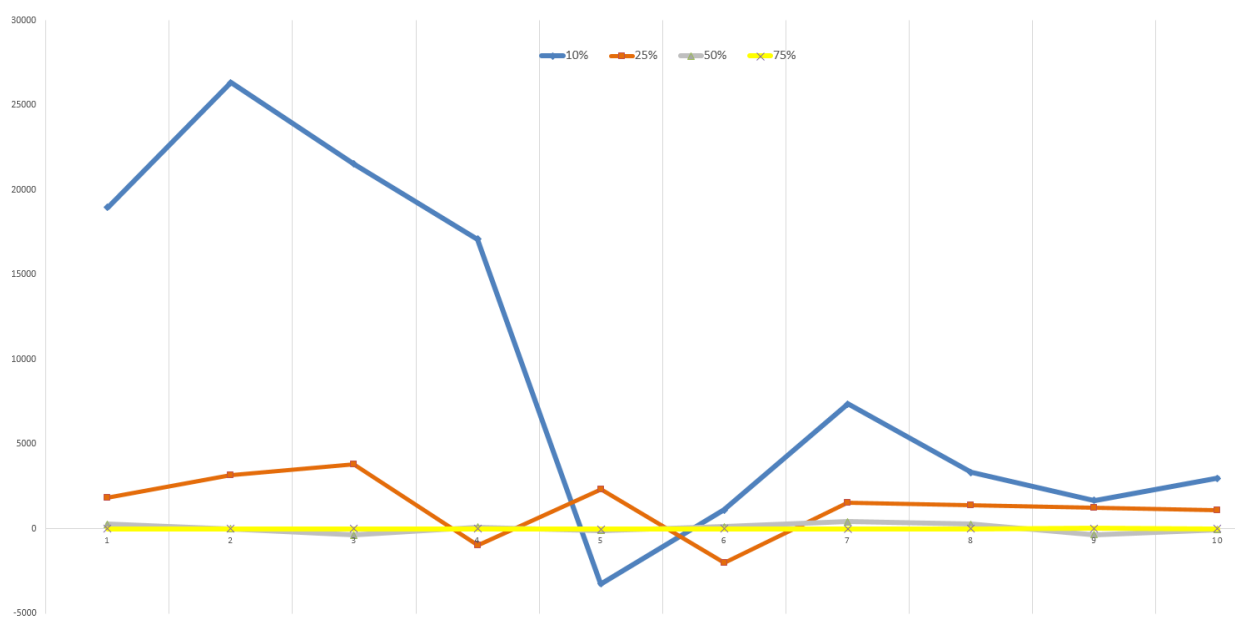


Figura 6.1: Gráfico da diferença de solução entre 2 métodos

A figura 6.1 mostra a diferença do algoritmo de Teitz e Bart clássico com o método proposto neste trabalho, onde os valores acima do zero demonstram o ganho de solução

do método proposto em relação ao algoritmo clássico de Teitz e Bart.

Como pode ser visto na Tabela B.1 foram simulados grafos com 10 tamanhos diferentes, de modo que, para cada tamanho foi simulado casos em que o número de medianas era 10%, 25% , 50% e 75% do valor total de vértices da simulação, representados em azul, laranja, cinza e amarelo repectivamente.

Através do gráfico da Figura 6.1 é possível observar que o método proposto apresentou um desempenho superior ao algoritmo clássico de Teitz e Bart quanto a solução, nos casos em que o número de medianas eram equivalentes a 10% e 25% do valor total de vértices n . Além disso, nos casos em que o número de medianas foi equivalente a 50% e 75% o método apresentou comportamento similar ao método clássico, onde foi observado que, nos problemas gerados aleatoriamente, com o aumento do número p cresce o número de medianas isoladas, ou seja medianas que não atendem nenhum vértice, diminuindo assim a efetividade da rotina de perturbação do algoritmo proposto.

6.2 Conclusões

Os resultados computacionais se mostraram satisfatórios no sentido de aproximação do conjunto ótimo de medianas, onde na maioria dos casos, a proposta apresentou valores de solução superiores aos do algoritmo clássico de Teitz e Bart. Ao longo do desenvolvimento do trabalho, foi possível constatar que:

- A base matemática apresentada pela teoria espectral, teoria da centralidade e Álgebra Linear servem de suporte para combinação dos métodos Heurísticos com métodos iterativos da Álgebra Linear Computacional.
- O algoritmo encontrou soluções satisfatórias, a maioria das vezes superior ao algoritmo clássico de Teitz e Bart, que é amplamente utilizado em aplicações reais, por fácil implementação e por resultados com boa qualidade.
- De acordo com as simulações foi possível notar que o número de substituições efetuadas pelo algoritmo apresentado foi consideravelmente menor do que a do algoritmo

clássico de Teitz e Bart.

- O algoritmo é uma ferramenta a mais para resolução do problema de p -medianas em grafos de pequenos e médio porte. Além disso, mostramos que é possível trabalhar na fronteira, entre a Álgebra Linear e a Otimização Combinatória.
- A perturbação das soluções se mostrou um ferramenta útil no auxílio da determinação de uma solução aproximada do ótimo.
- Testes iniciais, em redes grandes mostraram-se promissores.

Contudo, o algoritmo se mostrou eficiente em termos de aproximação de solução, quando o número de medianas não ultrapassa 50% do tamanho do grafo, pois quando o mesmo não ocorreu o algoritmo teve desempenho, em geral, igual ao do algoritmo clássico de Teitz e Bart. E isso mostra que o algoritmo apresentado mostrou resultados promissores, para pelo menos uma classe do problema.

De acordo com o estudo desenvolvido ao longo de dois anos foram constatadas algumas dificuldades, em função do comportamento combinatorial das soluções, que em alguns casos diminuiu a efetividade de alguns passos do algoritmo.

Por fim, a proposta de combinar Álgebra Linear, Teoria de Grafos e Teoria Espectral, se mostrou promissora. As três áreas foram bem relacionadas como pôde ser visto no decorrer do trabalho, mostrando assim, que é possível combinar diversas áreas da matemática e computação na resolução de problemas complexos. Além disso, juntamente com o trabalho de FREITAS (2012), a proposta é pioneira no propósito de combinar tais áreas para resolução do problema das p -Medianas.

7 Sugestões para trabalho futuros

Em vista do trabalho desenvolvido, recomenda-se o uso de diversas técnicas para a otimização do algoritmo proposto neste trabalho, além de estudos para validação do mesmo.

Assim recomenda-se:

- O estudo da topologia dos grafos, buscando analisar o pontos de mínimos locais e globais referentes ao problema.
- O estudo mais aprofundado de normas utilizadas pelo Método das Potências.
- O estudo aprofundado da complexidade dos algoritmos envolvidos no algoritmo de Teitz e Bart modificado proposto.
- A formalização matemática de algumas propriedades presentes no métodos proposto.
- O estudo do tempo computacional do método proposto.
- A utilização de técnicas de aceleração de convergência para o método das potências, mais particularmente, extrapolação de Aitken.
- A aplicação do algoritmo proposto neste trabalho em problemas reais de localização.
- A implementação do algoritmo proposto utilizando conceitos de paralelismo, presentes em Computação de Alto Desempenho.
- A incorporação de técnicas de clusterização, com objetivo de melhorar a solução inicial do algoritmo.

Referências Bibliográficas

- [1] ANTON, HOWARD e C. BUSBY, ROBERT. *Álgebra Linear Contemporânea*.
- [2] BANDEIRA, R. A. de M. *Proposta de uma Sistemática de Análise para a localização de Depósitos*. Dissertação de Mestrado. UFRGS, Porto Alegre, 2006.
- [3] BAVELAS, A., 1950, *Communication patterns in task oriented groups*, *Journal of the Acoustical Society of America*, v. 22, pp. 72530.
- [4] BEZERRA, O. B. *Localização de Postos de Coleta para o Apoio ao Escoamento de Produtos Extrativistas Um Estudo de Caso Aplicado ao Babaçu*. Dissertação de Mestrado. UFSC, Florianópolis, 1995.
- [5] BIGGS, N., 1993, *Algebraic Graph Theory*. 2 ed. New York, Cambridge.
- [6] BOAVENTURA NETTO, P. O., 2001, *Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos*. 2 ed, São Paulo, Editora Blucher.
- [6] BONACICH, P., 1987, *Power and Centrality: A Family of Measures*, *The American Journal of Sociology*, v. 92, n 5, pp. 11701182.
- [7] Bortoli, Álvaro. Cardoso, . Fachin, Maria. da Cunha, Rudnei. *Introdução ao Cálculo Numérico, 2ª. Edição*. Instituto de Matemática, Departamento de Matemática Pura e Aplicada, Universidade Federal de Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 2003.
- [8] BRANDES, U., 2001, *A faster algorithm for betweenness centrality*, *Journal of Mathematical Sociology*, v.25, pp. 163177.
- [9] BRANDES, U., FLEISCHER, D., 2005, *Centrality Measures Based on Current Flow*, V. Diekert and B. Durand (Eds.): STACS 2005, LNCS 3404, pp. 533544.
- [10] CAPRI, M. A. V.; STEINER, M. T. A. *Otimização no serviço do estacionamento rotativo regulamentado utilizando técnicas da pesquisa operacional*. In: XXXVIII

- SBPO (Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional), 2006, Goiânia,Go. A Pesquisa Operacional na Sociedade: Educação, Meio Ambiente e Desenvolvimento, 2006. p. 14131423.
- [11] CHRISTOFIDES, N. *Graph Theory: an algorithmic approach*. London: Academic Press, 1975.
- [12] COOPER, L. L. *Location-Allocation Problems. Operations Research*, 11 (1963) p. 331 343.
- [13] CORNUEJOLS, G.; FISCHER, M. L.; NEMHAUSER, G. L. *Location of Bank Accounts to Optimize Float: An analytic Study of Exact and Approximate Algorithms*. *Management Science*, 23, (1977), p. 789 810.
- [14] CORRÊA, E. S. *Algoritmos Genéticos e Busca Tabu aplicados ao problema das p-medianas*. Dissertação de Mestrado. UFPR, Curitiba, 2000.
- [15] DE FREITAS, LEANDRO Q. *MEDIDAS DE CENTRALIDADE EM GRAFOS*, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010.
- [16] DIAS, F. ANTÓNIO. *O problema da p-mediana aplicado ao problema da gestão óptima da diversidade*. Dissertação de mestrado, Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro, 2005.
- [17] DIESTEL, R., 2005, *Graph Theory*. Eletronic version of third Edition, New York, Springer-Verlag.
- [18] DONADELLI, J., 2006, *Uma Introdução à teoria espectral de Grafos*, Monografia preliminar do Departamento de Informática da Universidade Federal do Paraná, UFRPR. Disponível em <http://www.inf.ufpr.br/jair/MANUSCRIPTS/>, acesso em 04/04/2009.
- [19] DUCATI, E. A. *Busca Tabu aplicada ao problema de localização de facilidades com restrições de capacidade*. Dissertação de Mestrado. Unicamp, Campinas, 2003.

- [20] EILON, S.; WATSON-GANDY, C. D. T.; CHRISTOFIDES, N. *Distribution Management: Mathematical Modeling and Practical Analyses*. London: Griffin Publishing, 1971.
- [21] FREEMAN, L. C., 1978/79, *Centrality in Social Networks: Conceptual Clarification*, *Social Networks*, v. 1, pp. 215-239.
- [22] FREEMAN, L. C., 1977, *A Set of Measures of Centrality Based on Betweenness*, *Sociometry*, v. 40, n. 1, pp. 35-41.
- [23] FREITAS, CAROLINA. *Teoria Espectral Aplicada a Problemas de Localização*. Dissertação (Mestrado em Modelagem computacional), Universidade Federal de Rio Grande, Rio Grande, 2012.
- [24] FREITAS, LEANDRO QUINTANILHA. *Medidas de Centralidade em Grafos* Dissertação (mestrado) UFRJ/ COPPE/ Programa de Engenharia de Produção, 2010. de Freitas. - Rio de Janeiro:UFRJ/COPPE, 2010.
- [25] HAKIMI, S. L. *Optimal Locations of Switching Centers and the Absolute Centers and Medians of a Graph*. *Operations Research*, 12, (1964), p. 450-459.
- [26] HAKIMI, S.L, 1965 *Optimum distribution of switching centers in a communication network and some related graph theoretic problems*, *Oper Res* 13, 462-475.
- [27] HORN, R. A., JOHNSON, C. R., 1985, *Matrix Analysis*, Cambridge Univ. Press.
- [28] HÖRNER, DOUGLAS. *Resolução do problema das p-medianas não capacitado: Comparação de algumas técnicas heurísticas 2009*. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção), Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis. 2009.
- [29] MADRID, KELLY. C.A *TEORIA DE PERRON-FROBENIUS E APLICAÇÕES* Dissertação (mestrado) Curso de Mestrado em Matemática da Universidade Federal Fluminense, 2009.
- [30] KUEHN, A. A.; HAMBURGER, M.A *Heuristic Program for Locating Warehouses*. *Management Science*, 9, p. 643-666, 1963.

- [31] LARSON, R. C.; ODONI, A. R. *Urban Operations Research*. New Jersey: Prentice-hall, 1981.
- [32] LIMA, F. S. *Distribuição Espacial de Serviços especializados de saúde*. Dissertação de Mestrado. Florianópolis, UFSC, 1996.
- [33] LIN, S.; KERNIGHAN, B. W. *An effective heuristic Algorithm for the Traveling Salesman Problem*, *Operations Research*, v. 21, p. 498 516, 1973.
- [34] LOBO, D. daS. *Dimensionamento e otimização locacional de unidades de educação infantil*. Tese de Doutorado. UFSC, Florianópolis, 2003.
- [35] LORENA, L. A. N.; FURTADO, J. C. *Constructive genetic algorithm for clustering problems*. *Evolutionary Computation*, 9, p. 309 328, 2001.
- [36] MINIEKA, E. *The Centers and Medians of a graph*. *Operations Research*, 25, p. 641 650, 1977.
- [37] MOXLEY, R. L., MOXLEY, N. F., 1974, *Determining point-centrality in uncontrived social networks*, *Sociometry*, v. 37, pp. 120133.
- [38] NEWMAN, M. E. J., 2005, *A measure of Betweenness centrality based on random walks*, *Social Networks*, v. 27, pp. 3954.
- [39] NUNES, L. F. *Algoritmos Genéticos aplicados na Abordagem de um Problema Real de Roteirização de Veículos*. Dissertação de Mestrado. UFPR, Curitiba, 1998.
- [40] PEREIRA, M. A. *Um método Branch-and-Price para problemas de localização de p-medianas*. Tese de Doutorado. INPE, São José dos Campos, 2005.
- [41] PIRES, L. A. *Algoritmo Genético Aplicado na Localização de Escolas do Município de Coronel Vivida PR*. Dissertação de Mestrado. UFPR, Curitiba, 2002.
- [42] PIZZOLATO, N. D. *A Heuristic for Large-Size p-Median Location Problems with Application to School Location*. *Annals of Operations Research*, 50, p. 473 485, 1994.

- [43] PIZZOLATO, N. D.; BARROS, A. G.; BARCELOS, F. B.; CANEN, A. G. *Localização de Escolas Públicas: Síntese de Algumas Linhas de Experiências no Brasil*. In: SOBRAPO, 24, Rio de Janeiro, 2004.
- [44] PIZZOLATO, N. D. ; RAUPP, F.M.; ALZAMORA, G. S. *Revisão dos Desafios Aplicados em Localização com Base em Modelos da p-Mediana e suas Variantes*. Sobrapo, Rio de Janeiro, v.4,n.1, p.2012.
- [45] POOLE, DAVID; SALERNO, MARTHA. *Álgebra Linear*.
- [46] REESE, J. *Solution Methods for the p-Median Problem: An Annotated Bibliography*, 2006.
- [47] ROSA, V. R. *Otimização em Localização de Plataformas de Produção. Dissertação de Mestrado*. UFRJ, Rio de Janeiro, 2006.
- [48] RUHNAU, B., 2000, *Eigenvectocentralitya nodecentrality?*, *Social Networks*, v. 22, pp. 357365
- [49] SABIDUSSI, G., 1966, *The centrality index of a graph*, *Psychometrika*, v. 31, pp. 581603.
- [50] SAMPAIO, M. E. C. e S. *Aplicação de Metaheurísticas ao Problema de Localização de Escolas de Ensino Fundamental*. Dissertação de Mestrado. UFPR, Curitiba, 1999.
- [51] SHAW, M. E., 1964, *Communication networks*, In L. Berkowitz (ed).
- [52] SILVA, M. V. da. *Localização de Estoques na Rede de Distribuição de uma Empresa do Setor Siderúrgico*. Dissertação de Mestrado, UFMG, Belo Horizonte, 2006.
- [53] SOUZA, J. C. *Dimensionamento, localização e escalonamento de serviços de atendimento emergencial*. Tese de Doutorado, UFSC, Florianópolis, 1996.
- [54] TEITZ, M. B.; BART, P. *Heuristic methods for estimating the generalized vertex median of a weighted graph*. *Operations Research*, 16, p. 955 961, 1968.

- [55] TONDO, C. M. *Um modelo matemático para a localização estratégica de terminais de contêineres no interior: aplicação ao estado de São Paulo*. Tese de Doutorado. USP, São Paulo, 1992.
- [56] VASCONCELOS, M. M. *Modelos de Localização e Sistemas de Informações Geográficas na Assistência Materna e Perinatal: Uma aplicação no município do Rio de Janeiro*. Tese de Doutorado, UFRJ, Rio de Janeiro, 19
- [57] WIELANDT, H.: *nicht-negative Matrizen*
, Math Z, 52, 642-648 (1950).
- [58] WESOLOWSKY, G. O.; LOVE, R. F. *Location of Facilities with Rectangular Distances among Point and Area Destinations*. *Naval Research Logistic Quarterly*, 18 (1971) p. 83-90.

A Figuras adicionais utilizadas no trabalho

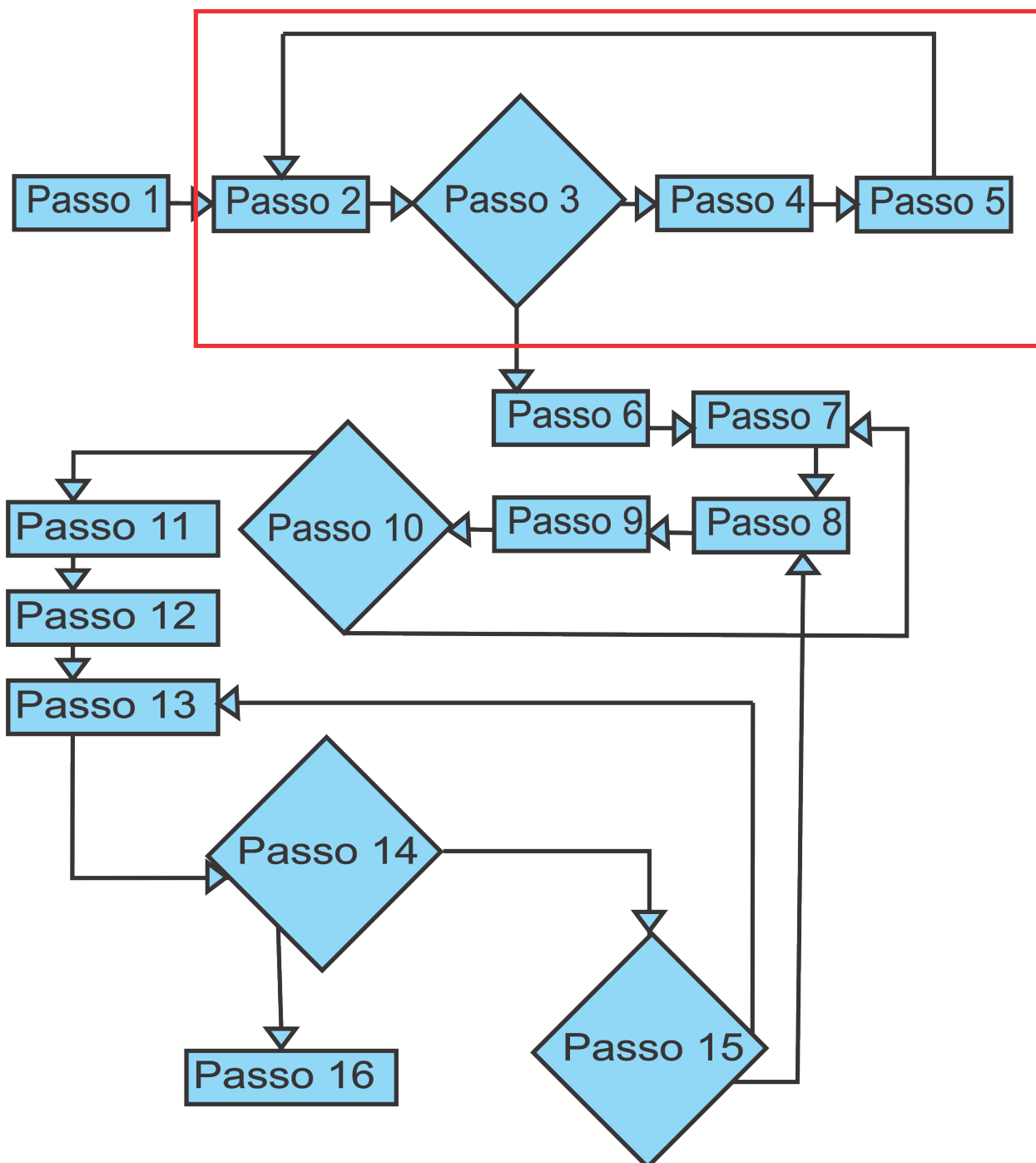


Figura A.1: Fluxograma do Algoritmo Proposto- 1º ciclo

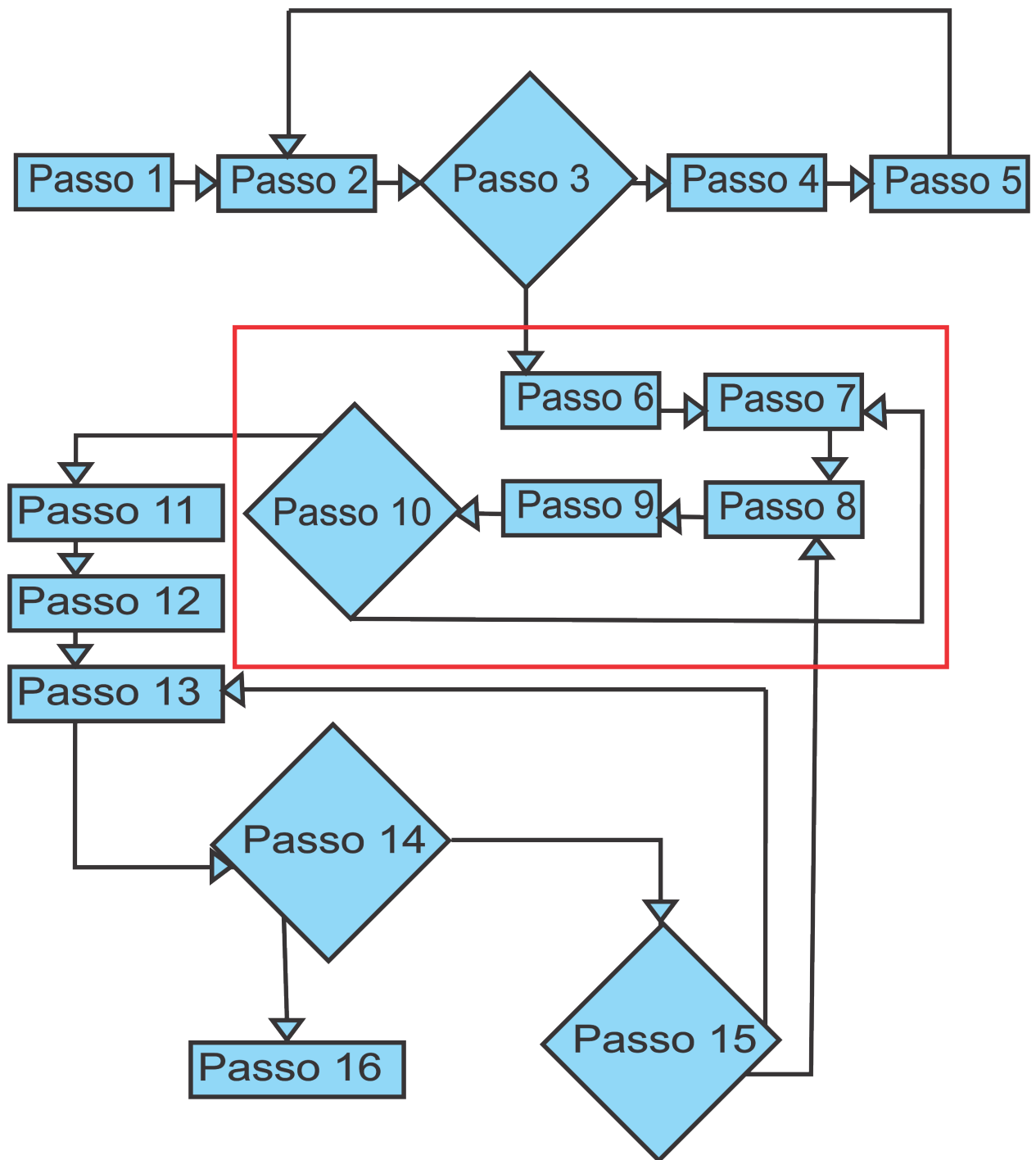


Figura A.2: Fluxograma do Algoritmo Proposto- 2º ciclo

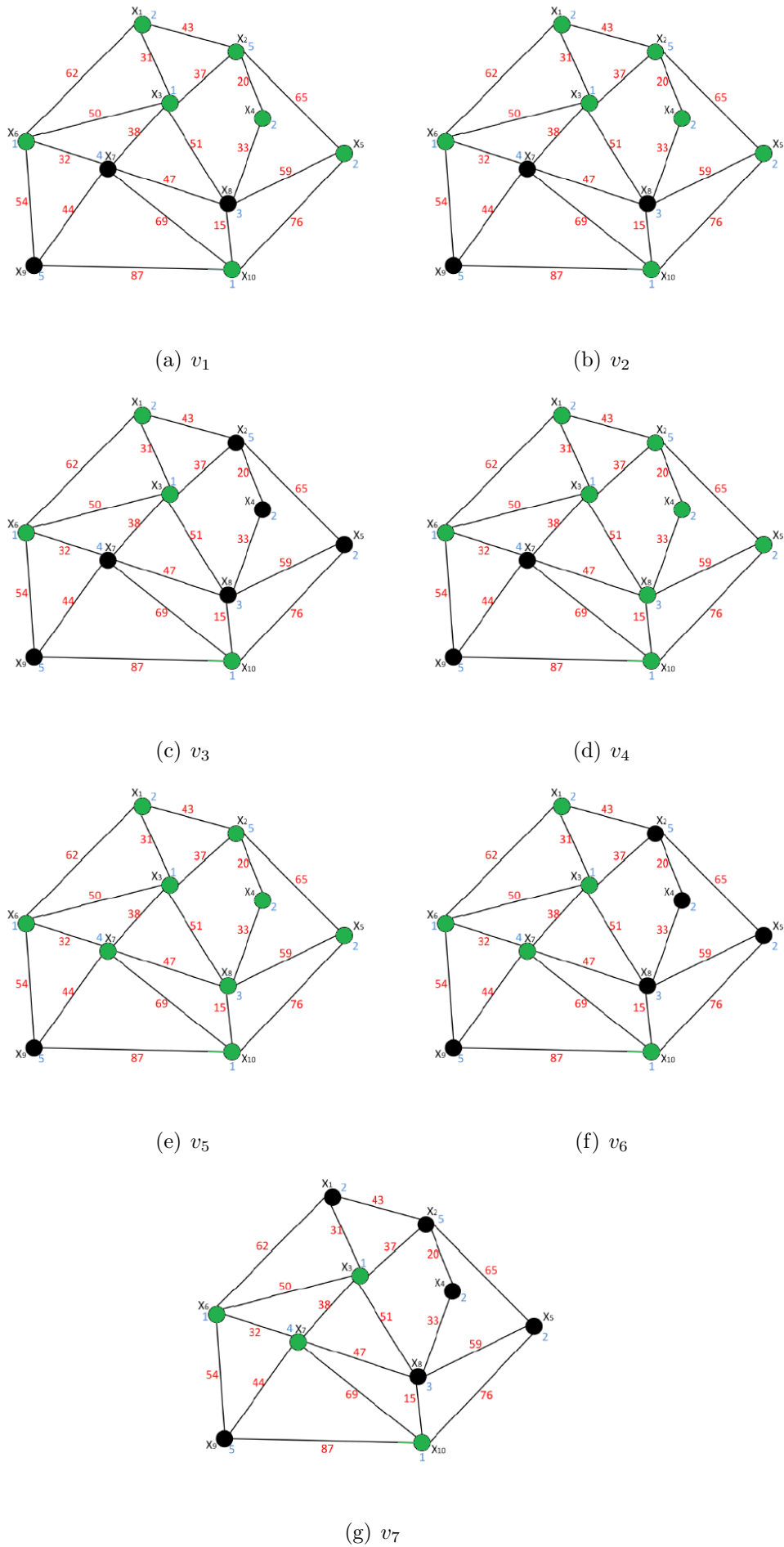


Figura A.4: Processo de exclusão de arestas para cada vértice do grafo proposto

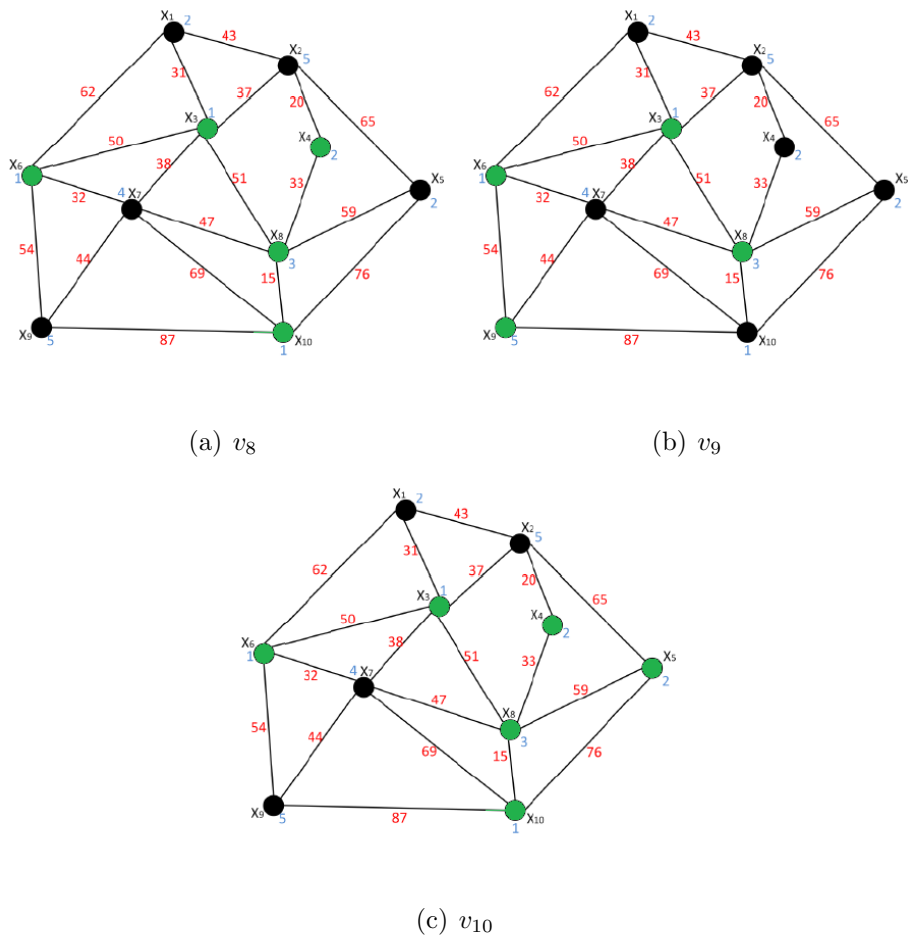


Figura A.5: Processo de exclusão de arestas para cada vértice do grafo proposto

B Tabelas adicionais utilizadas no trabalho

Tabela B.1: Resultados computacionais- Diferença do número de transmissão

n	p=10 por cento	p=25 por cento	p=50 por cento	p=75 por cento
50	18957	1817	279	0
100	26321	3155	0	0
150	21533	3828	-378	0
200	17100	-988	108	0
250	-3254	2320	-104	-15
300	1118	-1991	122	11
350	7368	1548	412	-6
400	3315	1407	270	0
450	1689	1263	-330	22
500	2976	1120	-41	0

C Código do Algoritmo implementado em Matlab

```
clear all\\
% Entradas
n=input('digite o tamanho da matriz -->');
p=input('digite o numero de medianas a serem instaladas -->');
% Alocação da matriz e do peso
A=randint(n,n,[1,1000]);
peso=randint(n,1,[1,100]);
epsilon=0.000005;
substituicao=0;
% Matriz Transposta
for i=1:n,
    for j=1:n
        A(j,i)=A(i,j);
    end\\
A(i,i)=0;
end\\
% Ponderação da Matriz e Save da matriz A
for i=1:n\\
    for j=1:n\\
        A(i,j)=A(i,j)*peso(j);
    end
end
save A;
%Tempo
tempoTBM1=clock;
```

```
raio=MP(n,A,epsilon)
[valorcentro,indcentro]=min(raio);
%Filtros
Aux=A;
AA=A;
cln=0;
while cln<p
for i=1:n,
raio(i)=(raio(i)^2)*100;
    for k=1:n
        if(Aux(i,k)~=0)
if(Aux(i,k)>(raio(i)*(sum(AA(i,:)))/100))
            Aux(i,k)=0;
        end
    end
end
end
for e=1:n
    cl=0;
    for x=1:n
        if(Aux(x,e)==0)
            cl=cl+1;
        end
    end
if(cl>=(n-p))
    cln=cln+1;
end
end
AA=Aux;
raio=MP(n,AA,epsilon);
end
```

```
vetorcentro=MP(n,Aux,epsilon);
for i=1:n
    gamma(i)=(vetorcentro(i)^2);
end
for i=1:n
    [trash,ordenacao(i)]=min(gamma);
    gamma(ordenacao(i))=inf;
end
for i=1:p
    ini(i)=ordenacao(i);
end
for i=1:n
    marcador(i)=0;
end
verificador=0;
while(verificador==0)
verf=0;
ini;
while verf==0
FOO=FO(n,ini,A,p)
for i=1:n
for j=1:n
G(i,j)=0;
end
end
for i=1:p
G(ini(i),ini(i))=ini(i);
end
for i=1:n
ver=0;
for(j=1:p)
```

```
if(i==ini(j))
ver=1;
end
end
if(ver==0)
minimo=+inf;
k=0;
for (j=1:p)
if(minimo>A(ini(j),i))
minimo=A(ini(j),i);
k=ini(j);
end
end
G(k,i)=i;
end
end

for i=1:p
    for j=1:n
        valorG(j)=+inf;
    end
contador=1;
for j=1:n
soma=0;
if(G(ini(i),j)~=0)
for b=1:n
if(G(ini(i),b)~=0)
soma=soma+A(G(ini(i),j),G(ini(i),b));
end
end
valorG(G(ini(i),j))=soma;
```

```
end
contador=contador+1;
end
    [vv,ini(i)]=min(valorG);
end
F002=F0(n,ini,A,p);
verf=0;
if (F00-F002)~=0
    F00=F002;
else
    verf=1;
end
end
%Teitz e Bart
F003=F00;

for i=1:n
    marcador(i)=0;
end
conj_p=ini;
F00=F0(n,ini,A,p);
i=1;
ntestado=0;
subs=0;
red=0;

while ((ntestado~=n)&(red==0))
    ntestado=0;
    for j=1:p
        marcador(conj_p(j))=1;
    end
end
```



```
    avalia=0;
if(marcador(ordenacao(i))==0)
for j=1:p
conj_p2=conj_p;
conj_p2(j)=ordenacao(i);
F000(j)=F0(n,conj_p2,A,p);
end
[NFO,ind_f]=min(F000);
Red=F00-NFO;
    if(Red>0)
        conj_p(ind_f)=ordenacao(i);
        F00=NFO;
        avalia=1;
        i=0;
        subs=subs+1;
    else
        marcador(ordenacao(i))=1;
    end
    if(avalia==1)
        for j=1:n
            marcador(j)=0;
        end
    end
end
    i=i+1;
for j=1:n
    if(marcador(j)==1)
        ntestado=ntestado+1;
    end
end
end
```

```
if(F003==F00)
    verificador=1;

end
ini=conj_p;

end
tempoTBM2=clock;

%'solucao'
%conj_p
'novos'
'FO'
F00
conj_p;
'tempo'
etime(tempoTBM2,tempoTBM1)
tempoTB1=clock;
for i=1:n
    ordenacao(i)=i;
end
    for i=1:p
        ini(i)=ordenacao(i);
    end
for i=1:n
    marcador(i)=0;
end
    conj_p=ini;
    F00=F0(n,ini,A,p);

i=1;
```

```
ntestado=0;
subs=0;
while (ntestado~=n)
    ntestado=0;
    for j=1:p
        marcador(conj_p(j))=1;
    end
    avalia=0;
    if(marcador(ordenacao(i))==0)
        for j=1:p
            conj_p2=conj_p;
            conj_p2(j)=ordenacao(i);
            F000(j)=F0(n,conj_p2,A,p);
        end
        [NF0,ind_f]=min(F000);
        Red=F00-NF0;
        if(Red>0)
            conj_p(ind_f)=ordenacao(i);
            F00=NF0;
            avalia=1;
            i=0;
            subs=subs+1;
        else
            marcador(ordenacao(i))=1;
        end
        if(avalia==1)
            for j=1:n
                marcador(j)=0;
            end
        end
    end
end
```

```
    i=i+1;
  for j=1:n
    if(marcador(j)==1)
      ntestado=ntestado+1;
    end
  end
end
end
tempoTB2=clock;
'clássico'
'F0'
F00
'tempo'
etime(tempoTB2,tempoTB1)
'conjunto'
conj_p;
```

```
function [vetorcentro]=MP(n,A,epsilon)
dif1=1000;
dif2=1000;
for i=1:n
    a0(i)=sum(A(i,:));
end
a0=a0';
h(:,1)=A*a0/norm(A*a0);
a(:,1)=A'*h(:,1)/norm(A'*h(:,1));
cont=2;
while (dif1>epsilon & dif2>epsilon)
    h(:,cont)=A*a(:,cont-1)/norm(A*a(:,cont-1));
    a(:,cont)=A'*h(:,cont-1)/norm(A'*h(:,cont-1));
    dif1=norm(h(:,cont)-h(:,cont-1));
    dif2=norm(a(:,cont)-a(:,cont-1));
    cont=cont+1;
end
vetorcentro(:,1)=h(:,cont-1);

function [FuncObj]=FO(n,vetor,A,p)

sum=0;
cont=0;

for j=1:n
    for k=1:p
        vet(k)=A(vetor(k),j);
        if(j==vetor(k))
            cont=cont+1;
        end
    end
end
```

```
    if (cont==0)
        sum=sum+min(vet);
    else
        cont=0;
    end
end
end
```

```
FuncObj=sum;
```

```
end
```