Gabrielly Costa Butierres

Uma proposta para introdução da Lógica nas aulas de Matemática

Rio Grande, RS

Julho, 2016

Gabrielly Costa Butierres

Uma proposta para introdução da Lógica nas aulas de Matemática

Dissertação submetida por Gabrielly Costa Butierres como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Universidade Federal do Rio Grande - FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física

Mestrado Profissional em Matemática

Orientador: Leandro Sebben Bellicanta

Coorientador: Cinthya Maria Schneider Meneghetti

Rio Grande, RS

Julho, 2016

Colaboradores

Universidade Federal do Rio Grande
http://www.furg.br

Instituto de Matemática, Estatística e Física
http://www.imef.furg.br

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
http://www.profmat-sbm.org.br

Sociedade Brasileira de Matemática
http://www.sbm.org.br

Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
http://www.capes.gov.br

Ficha catalográfica

B984p Butierres, Gabrielly Costa.
Uma proposta para introdução da Lógica nas aulas de Matemática / Gabrielly Costa Butierres. – 2016.
66 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Programa de Pós-graduação em Matemática, Rio Grande/RS, 2016.
Orientador: Dr. Leandro Sebben Bellicanta.
Coorientadora: Drª. Cinthya Maria Schneider Meneghetti.

1. Ensino de Matemática 2. Lógica 3. Função 4. Conjuntos 5. Exercícios I. Bellicanta, Leandro Sebben II. Meneghetti, Cinthya Maria Schneider III. Título.

CDU 510.6:37

Catalogação na Fonte: Bibliotecário Me. João Paulo Borges da Silveira CRB 10/2130

Gabrielly Costa Butierres

Uma proposta para introdução da Lógica nas aulas de Matemática

Dissertação submetida por Gabrielly Costa Butierres como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Trabalho APROVADO. Rio Grande, RS, 09 de julho de 2016:

Leandro Sebben Bellicanta
Orientador

Cinthya M. S. Meneghetti

Cinthya Maria Schneider Meneghetti
Coorientadora

Andrea Morgado
UFPEL

Fabiana Travessini De Cezaro

Fabiana Travessini de Cezaro
FURG

Rio Grande, RS
Julho, 2016

Este trabalho é dedicado a uma Vaca, um Baixinho, um Herói e as Ovelhas Negras.

Agradecimentos

Esse trabalho é um símbolo de tantas alegrias que tantas pessoas me ajudaram a viver e esses agradecimentos são um registro de toda a gratidão que carrego. Mas agradecer cada um que ajudou nesse trabalho não seria possível sem ocupar excessivas páginas ou deixar de citar alguém. Por isso trago algo que escrevi a muito tempo, mas o que transmite ainda é verdadeiro.

Não faz muito que descobri que sou um pouco de cada uma das pessoas que cruzaram meu caminho. Aprendi e descobri um pouco de mim em cada uma delas. Às vezes esse pedaço meu estava ali, no olhar delas. Em outras tantas, porém, foi preciso que elas me mostrassem sua pior face, para que eu pudesse me descobrir diferente. Algumas vezes foi preciso que essas pessoas partissem para que eu compreendesse a lição que me passariam. E existem tantas que nem ao menos sabem o quanto as amo e o quanto me ajudam a crescer. Me alegram aquelas que vejo pouco, ou que nem vejo mais, mas que, por uma dessas coisas da vida, aparecem justo no dia em que mais preciso... Aos que estão sempre comigo e que me conhecem mais do que eu mesma (talvez por eu ter muito deles em mim) só posso pedir desculpa pelos meus choros sem explicação, minhas brigas sem motivos, meu medo de perdê-los... e suplicar –lhes que entendam que se choro, se brigo é porque amo-lhes mais que a mim, pois tudo que sou é um pouco do amor que eles dedicaram à mim.

Obrigada!

"Primeiro é preciso ser humano,
depois, professor,
para só então ser professor de Matemática."
(LAAM)

Resumo

Embora a Lógica seja uma linguagem usada frequentemente pela Matemática, muitas vezes os estudantes da Educação Básica se formam sem conhecer noções dela. Por isso, devido a ampla contribuição da Lógica para a formação geral do estudante, neste trabalho são apresentados exercícios resolvidos sobre Conjuntos e Funções e conceitos de Lógica, permitindo, assim, que esses conceitos sejam apresentados aos estudantes sem precisar dedicar aulas exclusivas para isso. Além disso, o trabalho também traz a base teórica necessária para a resolução dos exercícios e, no fim, encontra-se uma lista com esses exercícios para impressão.

Palavras-chave: lógica. função. conjuntos. exercícios.

Abstract

Although Logic is a language often used by Mathematics, many times Basic Education students finish school not knowing about it. Therefore, due to a large contribution of Logic for the general instruction of the student, in the present research we show exercises about numerical sets, functions and Logic concepts, thus, allowing the presentation of the above referred concepts with no need of specific classes in order to accomplish it. Furthermore, the research also presents a theoretical base which is needed to solve the exercises and, in the end of this dissertation, there is a list of the exercises to be printed.

Keywords: logic. mathematical functions. sets.

Lista de ilustrações

Sumário

Introdução

Para estudar Matemática no Ensino Superior é preciso ter conhecimento de Lógica, tanto da Lógica Formal para a compreensão e demonstração de teoremas, quanto do raciocínio lógico, a "forma matemática de pensar". Contudo, esse é mais um ponto onde a matemática do Ensino Superior se distancia da matemática ensinada na Educação Básica.

Embora nos Parâmetros Curriculares Nacionais, Brasil (1998), a Lógica não seja posta como conteúdo explícito a ser trabalhado na sala de aula, eles indicam que "alguns de seus princípios podem e devem ser integrados aos conteúdos, desde os ciclos iniciais, uma vez que ela é inerente à Matemática". Porém, quem está em sala de aula sabe que está cada vez mais díficil equilibrar a quantidade de conteúdos que precisam ser apropriados pelos estudantes, especialmente aqueles explicítos pelos PCNs e pela Base Curricular Nacional, com o número de aulas presenciais que se tem com esses estudantes.

Por isso, nesse trabalho serão apresentadas algumas questões que possibilitam unir conteúdos normalmente desenvolvidos no primeiro ano do Ensino Médio com assuntos da Lógica. Assim, espera-se não só aproximar aquilo que é exigido na Educação Superior com o que é ensinado na Educação Básica mas, principalmente, possibilitar aos estudantes melhor compreensão sobre Conjuntos e Funções.

Nas questões propostas nesse trabalho, serão apresentados para os estudantes os conectivos lógicos e os quantificadores universal e existencial, mas não se propõe que esses conceitos sejam apresentados de maneira excessivamente formal e profunda, já que não se está em uma disciplina de Lógica. Antes dessas questões, apresenta-se de forma concisa os conceitos de Lógica necessários para a sua resolução, bem como dos conteúdos envolvidos: Conjuntos e Funções, com o objetivo de embasar teoricamente professores que optarão por aplicar tais questões em sala de aula. No fim desse trabalho, traz-se a resolução das questões e as conclusões obtidas.

Espera-se que leitura desse texto possa ser agradável e que as questões apresentadas sejam utilizadas pelos professores em reproduções nas suas salas de aula (ver folha para impressão nos apêndices), sempre citando a fonte, e também como inspiração para aqueles que não trabalham nos adiantamentos que estudam Funções e Conjuntos, mas que acreditam na importância do ensino da Lógica e da Matemática na formação de cidadãos críticos e capazes de modificar o lugar em que estão inseridos.

1 Objetivos

Quando busca-se questões sobre Lógica, encontra-se muitos exercícios, mas poucos deles relacionam conteúdos de Lógica com os de Matemática, mesmo que as duas, como cita Filho (2012), tenham forte relação: a Lógica é a linguagem utilizada pela Matemática para expressar conceitos e demonstrar afirmações sem a ambiguidade muitas vezes presente na língua materna. Por isso, ao desejar que o estudante domine esses conceitos e afirmações faz sentido ensinar-lhe também a linguagem que está sendo utilizada.

Contudo, sabe-se que não se pode exigir do professor que ensine "mais um" conteúdo quando ele tem dificuldades para ministrar aqueles que já lhe são designados pela Base Curricular Nacional e pelos Parâmetros Curriculares Nacionais. Assim, propõe-se nesse trabalho que o professor ensine alguns conceitos básicos de Lógica sem que ele precise disponibilizar aulas exclusivas para isso. Sendo assim, serão apresentadas questões que relacionam conteúdos do primeiro ano do Ensino Médio, como Conjuntos e Funções, que necessitam de conceitos básicos de Lógica para serem corretamente respondidas. Espera-se, assim, que o professor ensine tais conceitos para o estudante ao auxiliá-lo na resolução desses exercícios, fazendo com que esse estudante se aproprie melhor da linguagem e da formalidade presentes na Matemática e que se originam na Lógica, bem como possa desenvolver sua capacidade de compreensão, abstração e resolução de problemas.

Para que isso ocorra é importante que o professor tenha conhecimento dos conceitos que serão abordados nos exercícios. Por isso, espera-se fundamentar teoricamente os professores acerca de conceitos de Lógica e de fatos históricos importantes da mesma pois, embora, em geral, os cursos de Ensino Superior em Matemática apresentem aos seus graduandos conceitos ou mesmo disciplinas de Lógica, tal não é conteúdo obrigatório segundo Brasil (2002).

2 Origem, alguns fatos históricos e primeiros estudiosos

Os primeiros trabalhos sobre Lógica de que se tem conhecimento são do filósofo grego Aristóteles (384 - 322 a.C). Embora outros filósofos antes dele já tivessem discutido como garantir formas de determinar se um raciocínio está correto, foi ele quem sistematizou a Lógica. Aristóteles trabalhou com um raciocínio dedutivo, chamado silogismo, em que, a partir de duas afirmações (premissas), chega-se a uma terceira (conclusão). Esse trabalho chegou a atualidade atráves de seu livro denominado Organon (nome que pode ser traduzido como ferramenta ou instrumento) que até hoje é estudado e tem forte influência na Lógica Moderna. Pode-se ler algumas de suas obras no Acervo (2004).

Ainda na Grécia antiga, pode-se destacar Euclides de Megara e sua Escola dos Estóicos e Megários que desenvolveram áreas da Lógica que Aristóteles não abordou. Essa Escola tem papel importante na compreensão e desenvolvimento dos condicionais, das disjunções, assuntos que serão apresentados aqui mais adiante, e do que se conhece hoje como Cálculo Proposicional. Um pouco da filosofia dos Estóicos encontra-se em Bregalda (2009) e Dinucci (2011)

Por muitos séculos, a Lógica pouco ou nada se desenvolveu e os trabalhos publicados eram apenas de reprodução daquilo que os gregos haviam feito. Apenas no século XVII, com Leibniz, a Lógica voltou a se desenvolver, embora seus trabalhos só tenham sido publicados dois séculos depois. Leibniz utilizou-se da Lógica em sua busca por uma "matemática universal" e de uma linguagem capaz de propiciar o conhecimento funtamental de todas as coisas, como diz D'Ottaviano e Feitosa (2003). Em sua obra Leibniz utiliza quantificadores e lei da não contradição, dois assuntos que serão abordados nesse texto.

Embora tenha influência forte de Aristóteles e utilize-se da linguagem proposta por Leibniz, a Lógica como é concebida até hoje tem Gotllöb Frege como autor de destaque. Em seu livro Begriffsschrift (disponível em inglês no Frege (1879)), ele apresenta o cálculo proposicional de forma moderna, traz noções de função proposicional e faz análise lógica da Prova por Indução Matemática. Alguns desses assuntos o leitor pode buscar em Filho (2012).

Sobre a história da Lógica no século XX vale a leitura do livro Logicomix: Uma jornada épica em busca da verdade, Doxiadis e Papadimitriou (2010), vendido como um História em Quadrinhos que conta a vida de Bertrand Russell, referência importantíssima na lógica matemática, e "sua busca para estabelecer os fundamentos lógicos de todos os princípios matemáticos", o livro vai além e conta a história de grandes matemáticos e filósofos do século XX. O livro também pode ser recomendado como leitura para os estudantes da Educação Básica como motivação para o estudo dos conceitos aqui abordados.

3 Em quais ramos da ciência aparece a Lógica?

Graças a filósofos e matemáticos como Leibniz, Frege, Russell e outros, a Lógica e a Matemática possuem hoje um alto grau de formalização, com um sistema avançado de símbolos e regras capaz de levar a conclusões válidas. Tudo isso possibilitou a utilização da Lógica e da Matemática para os avanços tecnológicos. A Lógica é amplamente usada em linguagem de programação computacional, desde o mais simples programa capaz de somar dois números inteiros até mesmo em estudos avançados sobre inteligência artificial. Sendo, assim, é disciplina obrigatória em cursos de Programação Computacional (mesmo os de nível introdutório e técnico) e de Ciências da Computação.

Nos referenciais do Ministério da Educação, como os Parâmetros Curriculares e o Sistema de Avaliação da Educação Básica, encontramos a Lógica como importante ferramenta na área das Linguagens e da Ciências da Natureza, além da Matemática. A Lógica aparece na área das Linguagens como instrumento para compreensão e escrita de textos argumentativos e para estabelecer relações de causa e consequência em textos. Já nas Ciências da Natureza, a Lógica destaca-se para compreensão de hipóteses e análise das mesmas, bem como no desenvolvimento da capacidade do estudante de relacionar conhecimentos empíricos e conhecimentos formais.

No Ensino Superior, além da sua aplicação nas ditas Ciências Exatas e Engenharias e de seu estudo na Filosofia, existem grupos de estudos sobre Lógica e Linguagem Natural, vide Othero e Brauner (2007), e estudos de Lógica no Direito já que essas duas áreas tem forte relação no que tange a argumentação e a percepção de falácias [1] no discurso como o leitor pode ver em Souza (1998).

[1] Falácia, na Lógica, é um argumento falso que aparenta ser verdadeiro.

4 A importância da Lógica e os diferenciais dos estudantes que estudam Lógica na Educação Básica

Segundo Castrucci (1984), “na Lógica, estudaremos regras que nos permitem discutir a validade dos argumentos”, ela “é o estudo de métodos e princípios que permitem distinguir argumentos corretos e incorretos”. Por esse ponto de vista, a Lógica permite que se analise o raciocínio apresentado por alguém para chegar a determinada conclusão verificando unicamente a veracidade de seus argumentos, deixando de lado questões emocionais, por exemplo. Se por um lado a Lógica ajuda estruturar uma argumentação de forma a criar um discurso (oral ou escrito) que desencadeie em uma conclusão convincente ao ouvinte ou leitor, por outro lado permite ao receptor desse discurso refletir sobre a veracidade do mesmo e suas implicações.

Bianchi (2007) vai além e afirma que “a Lógica é a arte de pensar, a arte de raciocinar, sendo o raciocínio o pensamento em movimento, o encadeamento de juízos. É a ciência que trata das operações que o espírito humano usa, na busca da verdade”. Aqui, vê-se a Lógica como agente principal na construção de um cidadão crítico capaz de refletir sobre a realidade na qual está inserido e consciente de seu papel nessa realidade, pois esse cidadão só existe quando é ensinado a pensar, a raciocinar sobre tal realidade e os problemas presentes nela e não quando é induzido a se conformar com o que lhe é dito ou a simplesmente reproduzir uma técnica de resolução de problemas distantes de seu contexto social.

Sendo assim, a Lógica não restringe sua importância às demonstrações de teoremas e a análise de um debate filosófico, mas mostra-se uma ferramenta fundamental para atingir o objetivo proposto pelo MEC em Brasil (2008) de “criar condições para que cada brasileiro (...) seja capaz de atuar crítica e reflexivamente no contexto em que se insere, como cidadão cônscio de seu papel num mundo cada vez mais globalizado.”

Essas afirmações nos ajudam não só a responder sobre a importância da Lógica, mas também põem luz sobre os diferenciais que estudantes de Educação Básica que aprendem Lógica têm. Sabendo da importância da Lógica para a Matemática, uma vez que, segundo Filho (2012), a Lógica traz à Matemática exatidão necessária para que seus resultados sejam expressos sem ambiguidades, fica simples afirmar que esses estudantes teriam melhor desempenho nessa disciplina. Tendo maior conhecimento sobre a linguagem utilizada, poderá ficar mais claro para o estudante a mensagem que está sendo transmitida.

Entretanto pelo exposto acima, esses diferenciais podem ir além.

Se a Lógica permite um melhor discurso, com argumentos válidos e conclusões igualmente válidas obtidas deles, o estudante pode se expressar melhor em debates e escritas nas Ciências Humanas e também na área das Linguagens, assim como pode fazer uma análise mais precisa de suas hipóteses e dos resultados obtidos em experimentos dentro das Ciências da Natureza. No mercado de trabalho, uma argumentação convincente é importante na hora de convencer um cliente a comprar um produto, uma equipe a escolher seu líder, uma empresa a contratar um novo funcionário. Também existe um número grande de concursos públicos que cobram dos candidatos conhecimentos de Lógica em questões que, com os conhecimentos propostos nesse trabalho, podem ser respondidas de forma simples, mas que tornam-se questões complexas quando abordadas sem eles.

De forma igualmente importante, estudantes que optam por seguir seus estudos no Ensino Superior na área das Ciências Exatas e Engenharias e que tem a oportunidade de ter conhecimento de Lógica na Educação Básica poderão dar um importante passo frente aqueles que não a tem. Compreender teoremas do Cálculo e definições de Geometria, fazer demonstrações de Álgebra e fazer inferências Estatísticas, podem tornar-se muito mais simples quando o estudante domina a linguagem utilizada e a estruturação escolhida: a Lógica.

Se é considerada ferramenta fundamental na construção de um cidadão crítico, certamente os estudantes que aprendem Lógica durante a Educação Básica estarão mais próximos disso. Tendo consciência de seus papéis na realidade na qual estão inseridos, podem eles modificar, se assim acharem necessário, essa realidade. É importante esclarecer que não é apenas o contato com a Lógica da forma que se propõe nesse trabalho que dará todas as condições para que o estudante obtenha esses diferenciais. Seria necessário um trabalho contínuo durante toda a educação escolar desse estudante e não só no primeiro ano do Ensino Médio como é proposto aqui. Todavia esse trabalho propõe-se também como reflexão a possibilidade disso ser feito, não tornando a Lógica mais um conteúdo a ser trabalho dentro da disciplina de Matemática, mas como um assunto a ser integrado junto com outros conteúdos já tradicionalmente ensinados.

4.1 O que dizem os estudiosos sobre o ensino da Lógica?

Nos Paramêtros Curriculares Nacionais, Brasil (1998), a Lógica não é posta como conteúdo explícito a ser trabalhado na sala de aula, mas eles indicam que “alguns de seus princípios podem e devem ser integrados aos conteúdos, desde os ciclos iniciais, uma vez que ela é inerente à Matemática” . O que vai de encontro com as ideias de Bianchi (2007) que defende “a inclusão da Lógica no currículo da educação básica, não como conteúdo integrante da disciplina de Matemática, mas como tema transdisciplinar [1]". Em concordância com isso, não se propõe nesse trabalho que o professor modifique seu plano de curso para acrescentar a Lógica de forma isolada, mas que se integre, através de exercícios, conceitos presentes e importantes na Lógica aos conteúdos já trabalhados.

A escolha dos conteúdos dos exercícios aqui propostos se deu, além de ser o primeiro ano do Ensino Médio o adiantamento em que a autora mais tempo lecionou, por entender-se que no Ensino Médio os estudantes têm maior cobrança quanto a abstração, a capacidade de argumentar, de criar e analisar hipóteses e de tornar-se autonômo no pensar e é o primeiro ano o começo disso. O MEC norteia essa cobrança ao ressaltar em seu Plano de Desenvolvimento da Educação, Brasil (2013) que os estudantes do Ensino Médio "devem apresentar maior capacidade de lidar com o pensamento lógico e com o raciocínio abstrato". Para atingir tais capacidades, a Lógica sozinha pode não ser suficiente, mas a fala de Velasco (2009) mostra que pode a Lógica ser importante instrumento modificador e qualificador do pensar:

> se o ensino da lógica não é suficiente para um pensar autônomo por parte do educando (não temos garantia disso!), ao menos pode propiciar a esse a descoberta da possibilidade de pensar sobre o próprio pensar de forma organizada e encadeada – sistematizando as explicações, opiniões, crenças, etc. Por conseguinte, parece auxiliar no reconhecimento das diferentes estruturas argumentativas, permitindo àquele que se familiariza com os conceitos lógicos (ainda que elementares), um arcabouço teórico interessante tanto para a criação quanto para a avaliação crítica de argumentos.

Sendo assim, a Lógica vem para auxiliar os professores que acreditam que o ensino de Matemática deve ir além da reprodução de técnicas e fórmulas distantes tanto de estudantes que desejam prosseguir seus estudos no Ensino Superior em outras áreas quanto daqueles que pretendem buscar vaga no mercado de trabalho. Ao ensinar Lógica dentro da Matemática, o professor, segundo Bianchi (2007), auxilia o estudante a chegar a um tipo de pensamento considerado superior, que envolve a capacidade de abstração e argumentação desse estudante. Ou seja, ao ensinar Lógica, o professor ajuda seu estudante a compreender melhor as abstrações exigidas nas modelagens matemáticas e a fazer as argumentações coerentes que a resolução de muitos problemas necessita. E mais: Nunes (2015) destaca que existem situações em que será exigido do estudante

> argumentar de forma eficiente a fim de convencer seus interlocutores da confiabilidade de suas observações. O sucesso ou o fracasso da sua

[1] Segundo Jean Piaget "(...) à etapa das relações interdisciplinares, podemos esperar ver sucedê-la uma etapa superior que seria 'transdisciplinar', que não se contentaria em encontrar interações ou reciprocidades entre pesquisas especializadas, mas situaria essas ligações no interior de um sistema total, sem fronteira estável entre essas disciplinas". PEDAGOGIA DA ALTERNÂNCIA: I SEMINÁRIO INTERNACIONAL, de 03 a 05 de novembro de 1999 Centro de Treinamento de Líderes, Itapoan, Salvador, Bahia. Disponível em:<http://cetrans.futuro.usp.br/textos/artigos/centro_textos_artigos_pedagogiaalternancia.htm>

> defesa dependerá, dentre outros motivos, da aceitação ou não de seus argumentos. Torna-se assim importante o conhecimento de regras comuns da boa argumentação, que norteiam o que são ou não argumentos válidos. É neste contexto que aparece a importância do estudo da lógica.

Essas situações, percebe-se, não ocorrem somente no estudo da Matemática ou da Filosofia, mas em diversas áreas da vida de qualquer ser humano: em uma discussão com colegas de classe, em uma entrevista de emprego, em reuniões de trabalho, em provas dissertativas, etc. Assim, o professor que possibilita o contato de seus estudantes com a Lógica, permite que esses estudantes tenham tanto uma formação melhor na disciplina de Matemática quanto um melhor desenvolvimento de competências e habilidades importantes para sua vida em sociedade.

5 Definições importantes

Nas próximas páginas, serão apresentadas - de forma concisa - definições e conceitos importantes para que o professor possa planejar e aplicar as atividades propostas.

Para aquele leitor que desejar buscar mais sobre os conteúdos aqui disponibilizados sugere-se como leitura para estudos de Lógica: Castrucci (1984) e Filho (2012). Sobre Conjuntos e Funções, recomenda-se: Lima (2013) e os canais de vídeos OBMEP (2013) e Profmat (2015).

5.1 Lógica

Castrucci (1984) já foi citado para afirmar que na Lógica estuda-se regras para verificação de argumentos. Sendo assim, começa-se definindo a forma como esses argumentos são feitos: a chamada proposição.

Proposição ou *sentença fechada* é uma expressão para a qual é possível atribuir um *valor lógico*, ou seja, pode-se classificá-la como verdadeira ou falsa.

Exemplo 1. A expressão $4 + 10 = 14$ é uma proposição verdadeira.

Exemplo 2. A expressão $x \in B = \{2, 5, 9\}$ não é uma proposição, pois é preciso determinar características para x para dizer se a afirmação é verdadeira ou falsa. Esse tipo de expressão é chamada de *sentença aberta*.

É possível transformar algumas sentenças abertas em proposições usando os quantificadores *existencial* (existe) e *universal* (para todo). Veja:

Exemplo 3. Existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B = \{2, 5, 9\}$.

Note que no exemplo 3, a sentença aberta do exemplo 2 foi transformada em uma proposição verdadeira pelo uso do quantificador existencial.

Exemplo 4. Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos que $x \in B = \{2, 5, 9\}$.

Note que no exemplo 4, a sentença aberta do exemplo 2 foi transformada em uma proposição falsa pelo uso do quantificador universal.

Por necessitar de certo rigor para verificar a veracidade dos argumentos, a Lógica adota dois princípios: o princípio da não contradição e o princípio do terceiro excluído. Esses princípios, juntos, afirmam que toda proposição tem um e apenas um valor lógico. Veja:

Princípio 1 (Não Contradição)**.** Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

Princípio 2 (Terceiro Excluído)**.** Toda proposição ou é verdadeira ou é falsa, não há terceira possibilidade.

Esses princípios podem ser apresentados aos estudantes em uma conversa logo no início das aulas para que eles entendam que na Matemática existem regras bem definidas por ela utilizar-se, entre outras coisas, desses princípios e por isso ela é considerada uma Ciência Exata.

Exemplo 5. $2 + 3 = 5$.

Exemplo 6. $2 > 3$ *e* $3 < 4$.

Exemplo 7. A Terra é um planeta.

Exemplo 8. O Rio Grande do Sul é um estado da Argentina.

Exemplo 9. Se Pedro nasceu em Minas Gerais, então ele nasceu na Região Sudeste do Brasil.

Exemplo 10. Se Joana nasceu no Chile, então Joana nasceu na América Central.

Os exemplos 5, 7 e 9 (o exemplo 9 está na questão 5 na página 38) têm *valor lógico verdadeiro* e os exemplos 6, 8 e 10 (o exemplo 10 se encontra na questão 6 na página 39) têm *valor lógico falso*. Admite-se dizer apenas verdeiro ou falso no lugar de valor lógico verdadeiro ou valor lógico falso, respectivamente.

É possível transformar uma proposição em outra com valor lógico oposto utilizando a *negação*. Por exemplo, como é verdadeira a proposição 7, ao negá-la têm-se uma proposição falsa. Para fazer isso, acrescenta-se a palavra *não* de forma conveniente:

Exemplo 11. Dada a proposição *A Terra é um planeta*, sua negação será *A Terra não é um planeta*.

Uma proposição como a do exemplo 5 é chamada de *proposição simples*. Já a proposição como a do exemplo 6, que envolve mais de uma sentença, é chamada de *proposição composta*.

Para formar as proposições compostas são utilizados os *conectivos lógicos*:

- e
- ou

- ou...ou
- se...então...
- se, e somente se

Perceba que uma possível fonte de confusão aparece quando são utilizados na mesma frase as palavras "e" e "ou" da língua portuguesa e os conectivos lógicos *e* e *ou*. Para diferencia-los, neste trabalho aplica-se o estilo itálico sobre os conectivos lógicos e as palavras que exercem funções de preposição, conjunção e etc, estão no mesmo estilo de fonte do restante do texto. A saber, ao estudar Lógica com um pouco mais de profundidade, é comum utilizar símbolos para representar os conectivos lógicos, como apresentado na tabela 5.1.6 e, assim, evitar tais confusões.

5.1.1 Conectivo *e*

O conectivo *e* faz a *conjunção* de duas proposições. Foi apresentada no exemplo 6 a proposição "$2 > 3$ *e* $3 < 4$". Ela foi obtida de duas proposições simples:

$$p: \ 2 > 3$$

$$q: \ 3 < 4.$$

Cada uma dessas proposições simples tem seu valor lógico e desses valores depende o valor lógico da proposição composta. Nos casos das proposições compostas que utilizam o conectivo *e*, seu valor lógico será **verdadeiro** apenas quando **as duas proposições que as formam são verdadeiras**.

No exemplo 6, p é falsa e q é verdadeira, por isso "$2 > 3$ *e* $3 < 4$" é falsa. Agora considere o caso apresentado no exercício 3, página 37 onde precisa-se determinar qual é o conjunto numérico que o conjunto B representa. Para isso, considere as proposições

$$r: \ \frac{1}{2} \text{ não pertence a B.}$$

$$s: \ \sqrt{2} \text{ não pertence a B.}$$

r e s formam uma conjunção apresentada no exercício 3:

$$\frac{1}{2} \text{ não pertence a B e } \sqrt{2} \text{ não pertence a B.}$$

Ao resolver o exercício, descobre-se que B é o conjunto dos números naturais. Assim, essa conjunção é verdadeira, pois tanto r quanto s são verdadeiras.

5.1.2 Conectivo *ou*

Muitas vezes, na linguagem coloquial a palavra "ou" é usada com sentido exclusivo. Por exemplo:

Ana está em casa ou está no shopping.

Sabe-se que não é possível Ana estar em casa e no shopping ao mesmo tempo, ou seja, uma opção exclui a outra.

Contudo, na Lógica, o conectivo *ou* tem sentido inclusivo, em outras palavras, o conectivo *ou* faz uma *disjunção inclusiva*. Em um exemplo, considere as proposições:

$$p : 2 < 3,$$

$$q : 2 < 4.$$

Quando ocorrer a disjunção $p \, ou \, q$ tem-se a possibilidade de que p e q aconteçam ao mesmo tempo, ou seja, $2 < 3$ como também $2 < 4$.

De maneira mais precisa, tem-se que o valor lógico de uma proposição composta que utiliza o conectivo *ou* é **falso**, apenas quando **as proposições que a formam forem ambas falsas**. Assim, no exemplo, a proposição

$$2 < 3 \text{ } ou \text{ } 2 < 4$$

é verdadeira. No exercício 4 item (d) na página 37 encontra-se um exemplo de disjunção inclusiva. A saber, dados $A \cap B = \{2, 5\}$, $B = \{2, 5, 9\}$ e $A \cup B = \{2, 3, 5, 8, 9\}$ tem-se

$$9 \in A \, ou \, 3 \in B.$$

Esse exemplo é falso, pois, com as demais informações apresentadas no exercício, é possível mostrar que $9 \notin A$ assim como $3 \notin B$.

5.1.3 Conectivo *ou...ou*

Enquanto o conectivo *ou* tem sentido inclusivo, como exposto anteriormente, o conectivo *ou...ou* tem sentido exclusivo e faz a chamada *disjunção exclusiva* entre duas proposições. Isso implica que uma proposição composta que utiliza tal conectivo é **verdadeira** quando **uma e apenas uma das proposições que a formam é verdadeira.** Assim, a proposição:

$$ou \text{ } 2 \text{ é par } ou \text{ } 3 \text{ é par},$$

é verdadeira, pois a proposição "2 é *par*" é verdadeira, mas "3 é *par*" é falsa. Já a proposição

$$\textit{ou } 2 \text{ é par } \textit{ou } 3 \text{ é ímpar,}$$

é falsa, pois as proposições que a formam são ambas verdadeiras.

Já a proposição

$$\textit{ou } 2 \text{ é ímpar } \textit{ou } 3 \text{ é par,}$$

é falsa, mas agora o motivo é que as proposições que a formam são ambas falsas.

Outro exemplo pode ser encontrado no item I do exercício 3 (página 37) onde deve-se determinar o conjunto A sabendo que:

$$\textit{ou } \sqrt{2} \text{ pertence a } A \textit{ ou } \frac{1}{2} \text{ pertence a } A.$$

O fato dessa proposição ser verdadeira permite, juntamente com as demais informações do exercício, concluir que A é o conjunto dos números racionais.

5.1.4 Conectivo *se...então*

O conectivo *se...então* estabelece o que se chama de *condicional* entre duas proposições. Veja o caso semelhante ao apresentado na questão 5 na página 38:

Se Maria nasceu em Santa Catarina *então* Maria nasceu na região Sul do Brasil.

Neste exemplo, o condicional está formado a partir das proposições

p : Maria nasceu em Santa Catarina.

e

q : Maria nasceu na região Sul do Brasil.

É interessante estudar os valores lógicos desse tipo de proposição composta. Para isso, usa-se de um exemplo de Filho (2012) com a proposição: *Se eu receber um aumento de salário então vou comprar um carro novo*. Filho (2012) afirma que "a sentença será falsa, apenas no caso de quem a disser estiver mentindo". Assim, quando tal pessoa receber um aumento e comprar um carro, ela não mentiu e, portanto, a sentença é verdadeira. Também não estará mentindo ao não comprar um carro se não receber um aumento. Mas quando ela receber um aumento e não comprar um carro novo, ela mentiu e, portanto a sentença é falsa. Mais interessante é que se essa pessoa comprar um carro mesmo sem ter recebido um aumento ela não estará mentindo ao afirmar a sentença, pois não falou "o que ocorreria se não recebesse um aumento de salário".

Esse exemplo ilustra o fato de que uma sentença do tipo *Se p então q* só é **falsa** quando p **for verdadeira e** q **for falsa**.

Uma aplicação interessante do condicional ocorre quando é preciso estabelecer relações entre p e q para saber se p *implica em* q. Como exemplo pode-se tomar a questão 5 na página 38 sobre conjuntos. Para resolve-la é preciso, por exemplo, saber se o fato de alguém nascer no Norte do Brasil garante que essa pessoa é amazonense. Nesse caso, não tem-se essa garantia, pois alguém que nasce no Norte pode ter nascido no Acre, em Roraima, etc, ou seja, o fato de alguém nascer no Norte não implica necessariamente que essa pessoa nasceu no Amazonas. Por isso considera-se a proposição falsa. Já no item (a), o fato de Pedro ter nascido em Minas Gerais é suficiente para garantir que ele nasceu na região Sudeste e, por isso, a afirmação é verdadeira.

Outro fato interessante a ser considerado sobre o conectivo *se...então* é que esse também pode transformar duas sentenças abertas em uma sentença fechada. Considere as sentenças

$$r : n \text{ é par.}$$

$$s : n^2 \text{ é par.}$$

e o condicional formado por r e s

$$\textit{Se}\ n \text{ é par } \textit{então}\ n^2 \text{ é par.}$$

Ainda que r e s sejam sentenças abertas, ao ligá-las pelo conectivo *se...então*, obtêm-se uma sentença fechada. Formalmente, isso ocorre se junto com o condicional for usado um quantificador:

$$\textit{Para todo}\ n \in \mathbb{N},\ \textit{se}\ n \text{ é par } \textit{então}\ n^2 \text{ é par.}$$

Para Ferreira (2001), a ocultação desses quantificadores, embora se dê por um "abuso de linguagem", não causa nenhum prejuízo, pois "o próprio contexto permite reconhecer com facilidade se se pretende ou não exprimir uma implicação formal."

5.1.5 Conectivo *se e somente se*

O conectivo *se e somente se* faz o que se chama de *bicondicional* entre duas proposições. Considere as proposições

p : Lucas é gaúcho.
q : Lucas nasceu no Rio Grande do Sul.

Com elas é possível formar os condicionais:

Se Lucas é gaúcho *então* Lucas nasceu no Rio Grande do Sul.
e
Se Lucas nasceu no Rio Grande do Sul *então* Lucas é gaúcho.

O bicondicional une as duas proposições compostas acima em uma só:

Lucas é gaúcho *se e somente se* Lucas nasceu no Rio Grande do Sul.

Como dito antes, "*se p então q*" é falsa quando p for verdadeira e q for falsa. De forma análoga, "se q então p" é falsa quando q for verdadeira e p for falsa. Assim, pode-se concluir que "*p se e somente se q*" será **falsa** quando **uma e apenas uma das proposições que a formam for falsa**. Ou seja, "*p se e somente se q*" é **verdadeira quando ambas as proposições que a formam forem verdadeiras e quando ambas as proposições que a formam forem falsas**.

Outros exemplos de uso do bicondicional são apresentados na questão 10 - (d), página 41, e na questão 13 da página 43. No primeiro, pode-se analisar o valor lógico da proposição a partir da ideia de equivalência, isso é, *p implica em q* da mesma forma que *q implica em p*. No caso, a proposição é falsa, pois "$y = 1400$ não implica que $x = 8$" da mesma forma que "$x = 8$ não implica que $y = 1400$". No segundo, pela ordem do exercício, a proposição é verdadeira, mas veja que não tem nenhum sentido, no contexto da questão, se as proposições que formam o bicondicional forem falsas.

Assim como o condicional, o bicondicional pode ser usado juntamente com quantificadores para transformar duas sentenças abertas em sentenças fechadas, ainda que tais quantificadores fiquem ocultos. Tome como exemplo as sentenças abertas:

$$r : x^2 = 0$$

e

$$s : x = 0.$$

Ao utilizar o conectivo *se e somente se* forma-se uma sentença fechada válida para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$x^2 = 0 \textit{ se e somente se } x = 0.$$

5.1.6 Simbologia

A Lógica, assim como a Matemática, utiliza-se de uma linguagem simbólica própria que permite a compreensão de afirmações feitas independentemente da língua materna do emissor e do receptor dessas afirmações. Apresenta-se na Tabela 5.1.6 símbolos que representam algumas das definições expostas anteriormente.

Tabela 1: Símbolos para representação de quantificadores, valores e conectivos lógicos

Nome	Símbolo	Leitura
quantificador universal	$\forall$	para todo
quantificador existencial	$\exists$	existe; existe pelo menos um
valor lógico verdadeiro	V	verdadeiro
valor lógico falso	F	falso
negação	$\sim$	não
conjunção	$\wedge$	e
disjunção inclusiva	$\vee$	ou
disjunção exclusiva	$\veebar$	ou...ou
condicional	$\Rightarrow$	se...então
bicondicional	$\Leftrightarrow$	se e somente se

Parece interessante que o professor apresente tais símbolos aos estudantes, assim como outros de Funções e Conjuntos. Contudo, deve-se tomar cuidado para não sobrecarregar os estudantes da Educação Básica com a linguagem simbólica nem deixá-los esquecer dos símbolos ao nunca utilizá-los. Para isso, conta-se com o bom senso do professor e de seu conhecimento das habilidades e dificuldades de seus estudantes. Nas questões apresentadas nesse trabalho busca-se esse equilíbrio, mas cabe a cada professor adaptá-las, se necessário, para suas turmas.

5.2 Conjunto

Na Matemática (e na Lógica), existem termos que não possuem definição, os ditos *termos indefinidos*, que servem para definir todos os outros termos da teoria. Estes termos que não possuem definição devem ser interpretados a partir da intuição ou da aplicação na língua materna, desde que não contradigam os axiomas do contexto no qual estão inseridos.

Os termos

- *conjunto*,
- *elemento de um conjunto*
- *pertinência entre elemento e conjunto*

são termos indefinidos na Teoria dos Conjuntos. O que se pode considerar sobre esses termos, segundo Lima (2013), é que:

> Um conjunto é formado por elementos. Dados um conjunto A e um objeto qualquer a (que pode até ser outro conjunto), a pergunta cabível

em relação a eles é: a é ou não um elemento do conjunto A? No caso afirmativo, diz-se que a *pertence* ao conjunto A e escreve-se $a \in A$.

Destacam-se três formas de representar conjuntos:

1ª) por representação tabular,

2ª) por uma propriedade,

3ª) por diagrama de Venn.

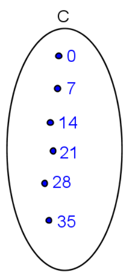
A primeira forma, consiste em listar os elementos que formam o conjunto entre chaves e separados por vírgula ou ponto e vírgula (ver exemplo 12). No segundo tipo de representação, os elementos que formam o conjunto são descritos por uma propriedade que os caracterize, como no exemplo 13.

Exemplo 12. $A = \{1, 3, 5, 7...\}$.

Exemplo 13. $B = \{x \,|\, x \text{ é } par\}$.

A representação de conjuntos por Diagramas de Venn[1] se dá através da colocação dos elementos desses conjuntos no interior de uma área plana delimitada por um linha. Como exemplo, veja a Figura 1.

Figura 1: Representação por Diagrama de Venn do conjunto $C = \{0, 7, 14, 21, 28, 35\}$



Dentre os diversos conjuntos existentes, o *Conjunto Vazio*, representado por $\varnothing$, se destaca por, segundo Lima (2013), cumprir "a utilíssima função de simplificar as proposições, evitando uma longa e tediosa menção de exceções. Qualquer propriedade contraditória serve para definir o conjunto vazio". Como o nome sugere, o *conjunto vazio* não possui elementos. Como exemplo, considere o conjunto $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \cdot 0 = 17\}$ e veja que não existe x que satisfaz tal propriedade.

[1] John Venn (1834 - 1923) foi um lógico e matemático britânico com participação importante nas duas áreas. Ele utilizou os diagramas por considerar a ilustração uma forma sensível para representar termos e proposições na Lógica. Pode-se saber mais de sua obra em Mendonça (2013).

Quando o conjunto possui apenas um único elemento, é chamado de *Conjunto Unitário*. Por exemplo, o conjunto $B = \{x \,|\, x \text{ é primo } e \text{ par } \}$ tem apenas o número 2 como elemento.

Definição 1 (Subconjunto)**.** Sejam A e B dois conjuntos. Se todos os elementos de A também são elementos de B, então A é *subconjunto* de B. Denota-se esse caso por $A \subset B$. Pode-se ainda dizer que A *está contido* em B. Essa relação entre conjuntos é chamada de *relação de inclusão*.

Aqui, vale ressaltar dois fatos importantes:

$$A \subset A$$

e

$$\varnothing \subset A$$

para qualquer que seja o conjunto A. Além disso, a relação de inclusão possui três propriedades, mas antes de vê-las, é necessário saber que:

Definição 2 (Igualdade entre conjuntos)**.** Dois conjuntos são iguais quando possuem os mesmos elementos.

Sendo assim, seguem as propriedades:

Propriedade 1 (Reflexividade)**.** $A \subset A$.

Propriedade 2 (Anti-simetria)**.** Se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$.

Propriedade 3 (Transitividade)**.** Se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.

A reflexividade diz que todo conjunto é subconjunto dele mesmo, o que é fato já que todos os elementos de um conjunto pertencem a ele.

A anti-simetria decorre da *definição de igualdade*. Esta propriedade é muito utilizada em demonstrações de igualdade entre dois conjuntos.

A propriedade da transitividade, segundo Lima (2013), tem forte relação com a Lógica:

> a propriedade transitiva da inclusão é a base do raciocínio dedutivo, sob a forma que classicamente se chama de *silogismo*[2]. Um exemplo de silogismo (tipicamente aristotélico) é o seguinte: todo ser humano é um animal, todo animal é mortal, logo todo ser humano é mortal. Na linguagem de conjuntos, isso seria formulado assim: sejam H, A e M respectivamente os conjuntos dos seres humanos, dos animais e dos mortais. Temos $H \subset A$ e $A \subset M$, logo $H \subset M$.

[2] destaque do autor

Quando existe pelo menos um elemento x de forma que $x \in A$ e $x \notin B$ diz-se que A *não está contido* em B e denota-se $A \not\subset B$. Essa definição ajuda a compreender por que $\varnothing \subset A$. Pela definição de *não contido*, precisa-se encontrar x de forma que $x \in \varnothing$ e $x \notin A$, mas uma vez que é impossível que $x \in \varnothing$, não existe $x \in \varnothing$ e $x \notin A$, portanto, $\varnothing \subset A$.

Outro conjunto que vale destacar é o chamado *Conjunto Universo* denotado por U. Esse conjunto contém todos os elementos do "universo" estudado. Por exemplo, pode-se considerar $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$ como o conjunto universo ao estudar o número de pessoas em uma fila, pois os elementos desse conjunto são todos os números possíveis em uma contagem.

Nas palavras de Lima (2013), "uma vez fixado U, todos os elementos a serem considerados pertencerão a U e todos os conjuntos serão subconjuntos de U". Assim, faz sentido definir o *Complementar* de um conjunto A.

Definição 3 (Complementar)**.** O conjunto que contém todos os elementos de U que não pertencem a A é chamado de complementar do conjunto A.

Denota-se o *complementar* de A por A^c ou por $\complement_U^A$ ou por $\overline{A}$. Ao utilizar o *princípio do terceiro excluído* e o *princípio da não-contradição* enunciados na página 22, pode-se afirmar que dado $x \in U$ e $A \subset U$ tem-se que ou $x \in A$ ou $x \notin A$. A partir disso, segue que:

Propriedade 4. Para todo $A \subset U$, tem-se $(A^c)^c = A$.

Propriedade 5. Se $A \subset B$ então $B^c \subset A^c$.

Duas operações importantes com conjuntos são a *União* e a *Intersecção*.

Definição 4 (União)**.** Dados dois conjuntos A e B, a *união* de A e B, denotada por $A \cup B$, é o conjunto formado pelos elementos de A mais os elementos de B:

$$A \cup B = \{x \,|\, x \in A \, ou \, x \in B\}.$$

Definição 5 (Intersecção)**.** A *intersecção* de A e B, denotada por $A \cap B$, é o conjunto formado pelos elementos que pertencem aos dois conjuntos simultaneamente:

$$A \cap B = \{x \,|\, x \in A \, e \, x \in B\}.$$

Quando $A \cap B = \varnothing$ diz-se que A e B são *conjuntos disjuntos*.

Exemplo 14. Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 8, 10\}$ e $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, tem-se que:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

$$A \cap B = \{8, 10\}.$$

O próximo exemplo foi retirado da questão 5 da página 38, nele é possível perceber que a união e a intersecção de conjuntos podem aparecer juntos na mesma expressão:

Exemplo 15. Se José não pertence a $(A \cup D) \cap (B \cup D)$, então ele não é baiano.

Para compreender melhor tal exemplo, além da leitura completa da questão, vale saber que essas duas operações são comutativas, associativas e distributivas em relação à outra, ou seja:

Propriedade 6. $A \cup B = B \cup A$.

Propriedade 7. $A \cap B = B \cap A$.

Propriedade 8. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Propriedade 9. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Propriedade 10. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Propriedade 11. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Veja que a conjunção e a disjunção da Lógica tem uma relação com a união e a intersecção de conjuntos. Esse aspecto pode (e deve) ser explorado pelo professor já ao apresentar essas operações para os estudantes. Por exemplo, o professor pode apresentar o conjunto A dos quadriláteros que tem os quatro ângulos retos e o conjunto B dos quadriláteros que tem os quatro lados com a mesma medida. A união de A e B é o conjunto dos *quadriláteros que tem quatro ângulos retos ou quatro lados com a mesma medida*, ou seja, fazemos a disjunção das proposições *p: O quadrilátero tem quatro ângulos retos* e *q: O quadrilátero tem quatro lados com a mesma medida*. O professor pode ressaltar aqui o fato do conectivo *ou* não ser exclusivo utilizando o exemplo do quadrado. De forma análoga, a intersecção de A e B se assemelha com a conjunção *p e q* e o único elemento que está nos dois conjuntos é o quadrado, ou seja, o quadrado é o único caso em que as duas proposições são verdadeiras ao mesmo tempo.

Definição 6. A *diferença* entre dois conjuntos A e B, denotada por $A - B$, é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A mas não pertencem a B:

$$A - B = \{x | x \in A \, e \, x \notin B\}.$$

Exemplo 16. Tome novamente os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 8, 10\}$ e $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, tem-se que $A - B = \{1, 2, 3, 4\}$.

Veja a representação gráfica de algumas dessas definições nos exercícios 1 (página 36) e 3 (página 37) e suas resoluções.

5.2.1 Conjuntos Numéricos

Os conjuntos numéricos se destacam pois, segundo Lima (2013), “a Matemática se ocupa primordialmente de números e do espaço”. Começa-se com o *conjunto dos números naturais* denotado por $\mathbb{N}$. A caracterização desse conjunto se baseia na ideia de *sucessor* – um termo indefinido, mas de fácil compreensão atráves da linguagem coloquial – e foi feita por Giuseppe Peano[3] em 1889. Os axiomas de Peano estão enunciados em Lima (2013).

Ao unirmos $\mathbb{N}$ com o conjunto formado pelo número zero e pelos inversos aditivos dos números naturais, temos o *conjunto dos números inteiros* denotado por $\mathbb{Z}$.

O *conjunto dos números racionais*, denotado por $\mathbb{Q}$, tem como elementos os números da forma $\dfrac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}\, e\, b \in (\mathbb{Z} - \{0\})$. Aqueles números que não podem ser escritos dessa forma são elementos do *conjunto dos números irracionais*, denotado por $\mathbb{I}$. Tem-se então o *conjunto dos números reais* que é a união do conjunto dos números racionais com o dos números irracionais e é denotado por $\mathbb{R}$. Assim, escreve-se

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \text{ e } \mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

No exercício 3 da página 37 o leitor encontra um exemplo envolvendo os elementos dos Conjuntos Numéricos.

5.3 Funções

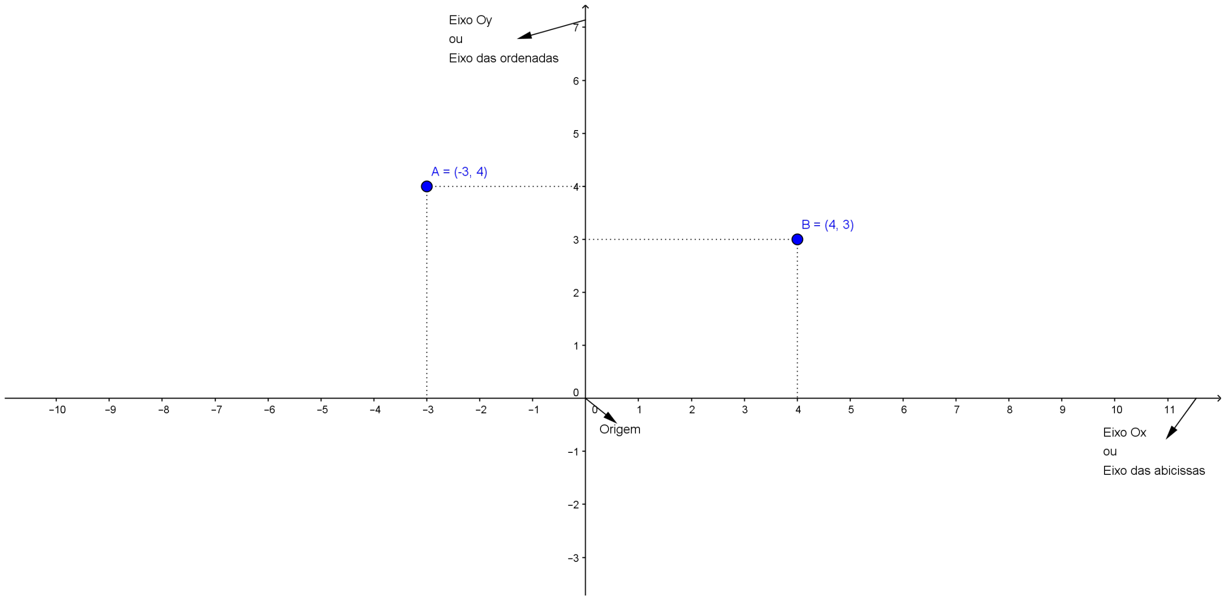
Para o que segue, define-se o conceito de função segundo Lima (2013).

> Dados os conjuntos X e Y, uma *função* $f : X \rightarrow Y$ (lê-se “uma função de X em Y”) é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$ (leia-se “y igual a f de x”). O conjunto X chama-se *domínio* e Y é o *contra-domínio* da função f. Para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ chama-se *imagem* de x pela função f, ou o *valor* assumido pela função f no ponto $x \in X$.

Os gráficos que representam funções são desenhados em um *plano cartesiano*. Esse plano possui um sistema de eixos coordenados formado por dois eixos perpendiculares chamados de *eixo Ox ou eixo das abcissas* e *eixo Oy ou eixo das ordenadas* que têm origem em O. Um ponto nesse plano é dado por um par ordenado (x, y) em que a primeira coordenada corresponde ao deslocamento no eixo das abcissas e a segunda coordenada ao deslocamento no eixo das ordenadas. Na Figura 2 estão marcados os pontos $A = (-3, 4)$ e $B = (4, 3)$.

[3] Matemático italiano, Peano estabeleceu axiomas que possibilitaram que todas as informações que se tem sobre os números naturais fossem deduzidas partindo-se desses axiomas.

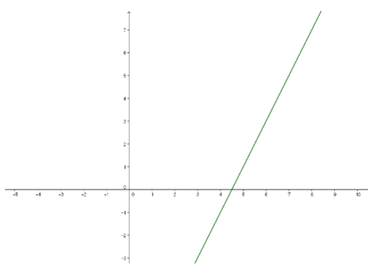
Figura 2: Plano Cartesiano e os pontos A e B



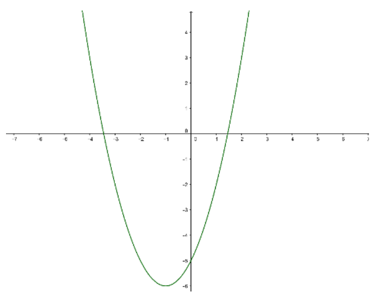
Chama-se de função *afim* uma função do tipo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax + b$ com $a \in \mathbb{R}\, e\, b \in \mathbb{R}$. Por exemplo, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x - 9$ é uma função afim assim como as funções $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 3x$ e $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = 3$. O gráfico de uma função afim é uma reta e é possível ver um exemplo na Figura 3(a) e outro na Figura 6 da questão 14, página 44.

Chama-se de função *quadrática* uma função do tipo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \in \mathbb{R} - \{0\}, b,\ c \in \mathbb{R}$. Por exemplo, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 + 2x - 5$ é uma função quadrática. O gráfico de funções desse tipo são parábolas como a que está na Figura 3(b) e na Figura 7 da questão 14, página 44.

Figura 3: Exemplos de gráficos de função afim e de função quadrática



(a) Gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x - 9$



(b) Gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 + 2x - 5$

6 Questões Propostas

Neste capítulo serão apresentadas questões que o professor pode utilizar em sala de aula para fixar, revisar ou avaliar conceitos de Conjuntos e Funções juntamente com conceitos iniciais de Lógica. À escolha do professor, pode-se em uma aula inicial apresentar aos estudantes a relação da Lógica com a Matemática e ainda a diferença na interpretação dos conectivos na linguagem coloquial e na Lógica ou pode-se no decorrer das aulas conforme surgirem os exercícios introduzir os conceitos necessários para a resolução dos mesmos.

Quanto aos símbolos, o professor pode utilizar a tabela apresentada em 5.1.6 para auxiliar os estudantes na identificação dos mesmos, ou explicar os significados deles ao passar a atividade ou, ainda, sugerir uma pesquisa aos estudantes para que eles possam descobrir o significado dos símbolos.

Na leitura das questões poderá surgir a pergunta: mas a afirmação também é verdadeira quando a proposição p é falsa? Por exemplo, quando considerar como verdadeira um proposição composta do tipo "p se e somente se q" ela seria verdadeira quando p e q fossem falsas. Deverá, então, em cada caso, analisar se tal situação (p e q sendo falsas) ajudará na resolução do exercício bem como se p e q sendo falsas não contradizem as demais proposições do exercício.

Contudo, antes das questões, veja na seção seguinte um truque mágico envolvendo um pouco de Lógica que poderá ser usado como motivação para o estudo da mesma.

6.1 Uma motivação divertida

Em um vídeo de título "Onde está a matemática?[1]", o professor Pedro Luiz Aparecido Malagutti realiza um "truque matemático" usando apenas a análise lógica da situação. Esse truque é simples de ser realizado, veja:

1. Escolha dois estudantes e peça que eles decidam, sem que você saiba, quem irá apenas dizer a verdade e quem irá apenas mentir.

2. Entregue um objeto aos estudantes, por exemplo, um relógio. Com as mãos escondidas nas costas, um dos estudantes esconde o objeto.

3. Pergunte a um dos estudantes: O relógio está com quem mente?

[1] disponível em <http://g1.globo.com/sp/sao-carlos-regiao/jornal-da-eptv/videos/t/edicoes/v/onde-esta-a-matematica-2-reportagem-mostra-a-matematica-no-mundo-magico/4998233/>

4. Se o estudante responder *sim*, então o relógio está com o outro.

5. Se o estudante responder *não*, então o relógio está com esse estudante.

O interessante desse truque é que, independente de quem responde falar a verdade ou a mentira, caso o estudante responda “sim”, segundo o professor, isso indica que o relógio está com o outro, mas se o estudante disser “não”, o relógio está com ele. Para confirmar isso é preciso analisar as duas situações.

Se o estudante responder *sim*, então o relógio está com o outro.

1. Se o estudante fala a verdade, então o relógio está com o outro. Nesse caso, o fato do estudante dizer a verdade, garante que o relógio está com quem mente, ou seja, o outro estudante.

2. Se o estudante mente, então o relógio está com o outro. Nesse caso, a pessoa que respondeu mente e, isso implica que, o relógio está com o outro estudante.

Assim, sempre que o estudante responder “sim”, o relógio estará com o outro estudante, conforme havia dito o professor Malagutti. Analisando agora o caso em que o estudante responde “não”:

Se o estudante responder *não*, então o relógio está com esse estudante.

1. Se o estudante fala a verdade, então o relógio está com o estudante. O fato de o estudante falar a verdade garante que o relógio não está com quem mente e, portanto, o relógio estará com quem respondeu.

2. Se o estudante mente, então o relógio também está com o estudante. Como quem fala mente, isso garante que o relógio *está* com quem mente, ou seja, com o próprio estudante.

Assim, sempre que o estudante responder “não”, significa que o relógio está com o próprio estudante.

6.2 Questões sobre Conjuntos

Exercício 1. Utilizando diagramas de Venn, ilustre as sentenças abaixo:

(a) $\exists\, x \in U \,|\, x \in A\, e\, x \in B$;

(b) $\forall\, x \in A$ temos que $x \in B$;

(c) $\nexists\, x \in U \,|\, x \in A\ e\ x \in B$;

(d) $\exists\, x \in U \,|\, x \in A\, e\, x \notin B$;

Nesse exercício o professor explora os quantificadores universal e existencial e os conectivos lógicos juntamente com as ideias de pertencimento, representação através de Diagrama de Venn, diferença de conjuntos, intersecção de conjuntos e conjuntos disjuntos. No exercício abaixo o estudante deverá dizer qual conceito de conjunto estudado a sentença representa.

Resolução: 1 na página 46

Exercício 2. Para cada caso do exercício 1, diga qual conceito de conjunto a sentença representa.

Resolução: 2 na página 46

Exercício 3. Sabendo que são verdadeiras as afirmações apresentadas, relacione corretamente as duas colunas abaixo:

Conjunto	Elementos
A ∘	∘ Números Naturais
B ∘	∘ Números Reais
C ∘	∘ Números Racionais

(I) Ou $\sqrt{2}$ pertence a A ou $\frac{1}{2}$ pertence a A.

(II) Ou $\frac{1}{2}$ pertence a B ou $\sqrt{2}$ pertence a C.

(III) $\frac{1}{2}$ não pertence a B e $\sqrt{2}$ não pertence a B.

Aqui o professor pode fixar a definição dos conjuntos numéricos bem como explorar a conjunção e a disjunção exclusiva.

Resolução: 3 na página 47

Exercício 4. Sabendo que $A \cap B = \{2, 5\}$, $B = \{2, 5, 9\}$ e $A \cup B = \{2, 3, 5, 8, 9\}$, classifique cada uma das afirmações em verdadeira ou falsa:

(a) $2 \in A$ e $2 \in B$.

(b) $8 \in A$ ou $8 \in B$.

(c) $3 \in A$ e $3 \in B$.

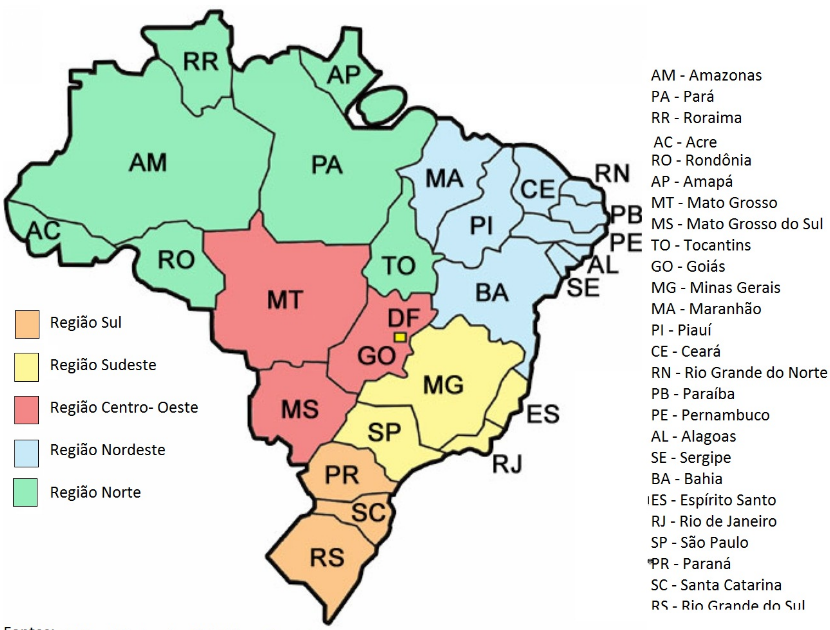
(d) $9 \in A$ ou $3 \in B$.

Aqui o professor explora os conceitos de união e intersecção de conjuntos e também os casos em que afirmações com os conectivos *e* e *ou* são verdadeiras.

Resolução: 4 na página 47

Exercício 5. (PAIVA, 2013) - Considere o conjunto universo U dos cidadãos brasileiros e os conjuntos abaixo:
$A = \{x \in U \,|\, x$ nasceu na região Sul do Brasil$\}$;
$B = \{y \in U \,|\, y$ nasceu na região Sudeste do Brasil$\}$;
$C = \{z \in U \,|\, z$ nasceu na região Centro-Oeste do Brasil$\}$;
$D = \{p \in U \,|\, p$ nasceu na região Nordeste do Brasil$\}$;
$E = \{q \in U \,|\, q$ nasceu na região Norte do Brasil$\}$.
Classifique em verdadeira ou falsa cada uma das afirmações a seguir, supondo que todas as pessoas mencionadas nasceram no Brasil.

Figura 4: Mapa das regiões do Brasil



Fontes: http://www.delfinadearaujo.com/on/on26/images/mapasigla.jpg e http://www.portalpower.com.br/wp-content/uploads/2015/01/Mapa-Brasil-Estados-e-Regioes.jpg

(a) Se Pedro nasceu em Minas Gerais, então ele pertence a B.

(b) Se Maria nasceu em Santa Catarina, então ela pertence a A.

(c) Se João nasceu no Piauí, então ele pertence a E.

(d) Se Vitor é amazonense, então ele pertence a E.

(e) Se Carlos pertence a E, então ele é amazonense.

(f) Se Lucas não pertence a $(A \cup B \cup C)$, então ele não é gaúcho.

(g) Se Luíza não pertence a $(C \cup D \cup E)$, então ela não é carioca.

(h) Se José não pertence a $(A \cup D) \cap (B \cup D)$, então ele não é baiano.

Nesse exercício, espera-se que o estudante apresente conhecimentos de Geografia, de pertencimento de um elemento a um conjunto, de operações com conjuntos e classificação de um condicional em verdadeiro ou falso. Também é necessário que o estudante saiba desencadear relações a partir das informações apresentadas para estudar as implicações.

Resolução: 5 na página 47.

O exercício abaixo apresenta as mesmas possibilidades, mas trabalha com o continente América e suas regiões (Sul, Central e Norte).

Exercício 6. Sendo U o conjunto das pessoas que nasceram na América, considere os conjuntos abaixo:
$A = \{x \in U \,|\, x$ nasceu na América do Sul$\}$;
$B = \{y \in U \,|\, y$ nasceu na América Central$\}$;
$C = \{z \in U \,|\, z$ nasceu na América do Norte$\}$.
Supondo que todas as pessoas citadas nasceram na América, classifique cada uma das afirmações em verdadeira ou falsa.

Figura 5: Mapa da Divisão Geográfica da América

(a) Se José nasceu em Cuba, então José pertence a A.

(b) Se Pablo nasceu na Argentina, então Pablo não pertence a B.

(c) Se Maria nasceu em El Salvador, então Maria pertence a B.

(d) Se Antonio pertence a C, então ele nasceu no Canadá.

(e) Se Castro pertence a $B \cup C$, então ele nasceu nos Estados Unidos.

(f) Se Joana nasceu no Chile, então Joana pertence $A \cup B$.

Resolução: 6 na página 48.

Exercício 7. A Escola Antonio Miranda Nobrega fica em um prédio de três andares e atende turmas do 7º ao 9º ano do ensino fundamental e do 1º ao 3º ano do Ensino Médio. Esse ano, a diretora da escola distribuiu as turmas da seguinte forma:

- No primeiro andar apenas as turmas do 7º ano do Ensino Fundamental e do 1º ano do Ensino Médio.
- No segundo andar apenas as turmas do 8º ano do Ensino Fundamental e do 2º ano do Ensino Médio.
- No terceiro andar apenas as turmas do 9º ano do Ensino Fundamental e do 3º ano do Ensino Médio.

Sabendo disso, leia as afirmações e classifique-as em verdadeiras ou falsas.

(a) Se Cátia estuda no 2º andar, então Cátia não está no 7º ano do Ensino Fundamental.

(b) Se Gustavo cursa o 1º ano do Ensino Médio, então ele estuda no 1º andar.

(c) Se Rafael estuda no 1º andar, então ele cursa o 7º ano do Ensino Fundamental.

(d) Se Veronica estuda no 2º andar, então ela cursa o 9º ano do Ensino Fundamental.

(e) Se Gabriela estuda no 3º andar, então ou Gabriela estuda no 3º ano do Ensino Médio ou Gabriela estuda no 9º do Ensino Fundamental.

(f) Se Breno estuda no 3º andar, então Breno não cursa o 8º ano do Ensino Fundamental e Breno não cursa o 1º ano do Ensino Médio.

(g) Se Julia estuda no 1º andar, então ou Julia não cursa o 7º ano do Ensino Fundamental ou Julia não cursa o 1º ano do Ensino Médio.

Nesse exercício, o professor pode explorar o uso do condicional juntamente com os conectivos *e*, *ou...ou* e *ou*.

Resolução: 7 na página 48.

Exercício 8. (DANTE, 2005) - Classifique em verdadeira (**V**) ou falsa (**F**) e justifique:

(a) Se **A** tem 3 elementos e **B** tem 4 elementos, então $A \cup B$ tem 7 elementos.

(b) Se **A** tem 2 elementos e **B** tem 3 elementos, então $A \cap B$ tem 2 elementos.

(c) Se $A \cap B = \varnothing$, **A** tem 5 elementos e **B** tem 4 elementos, então $A \cup B$ tem 9 elementos.

Esse exercício permite que o professor explore, além dos conceitos de condicional e conjunção, a compreensão das definições de união e intersecção de conjuntos e de que forma se relacionam o número de elementos dos conjuntos e de sua união e intersecção. Também é útil para avaliar como os estudantes fazem as jutificativas para as questões, se estão usando corretamente a linguagem matemática e a língua materna e se conseguem fazer tais justificativas de forma coerente.

Resolução: 8 na página 49.

6.3 Questões sobre Funções

Exercício 9. Sabendo que são verdadeiras as afirmações, determine a lei de formação da função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

(a) Se $x = 0$ então $y = 0$.

(b) Ou $f(9) = 3$ ou $f(0) = -2$.

(c) $y = 1$ se e somente se $x = 3$.

Agora, reflita: você precisa das três afirmações para determinar a lei de formação da função? Justifique.

Nesse exercício o professor poderá abordar junto com os conectivos lógicos as estratégias que o estudante pode usar para determinar a lei de formação de uma função afim e reforçar a ideia de x associar um único $y = f(x)$.

Resolução: 9 na página 49

Exercício 10. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 200x$ e classifique como verdadeiras ou falsas as afirmações, justificando sua resposta.

(a) Se $x = 3$, então $y = 300$.

(b) $y = 1600$ se, e somente se, $x = 8$.

(c) Se $y = 600$, então $x = 4$.

(d) $y = 1400$ se, e somente se, $x = 8$.

Aqui o professor pode explorar a unicidade de valores de y para cada valor de x, a substituição de valores de x ou de y na lei de formação da função e, para a escolher a opção correta, o professor deverá mostrar aos estudantes em que casos são verdadeiras as afirmações que possuem os conectivos apresentados.

Resolução: 10 na página 51

Exercício 11. Sejam as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = 3x$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $g(x) = 3x+3$ e $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $h(x) = 3x - 3$. A partir de seus conhecimentos sobre função e considerando as regras da lógica, analise as afirmações:

(I) $f(0) = 0$ e $g(0) = 0$.

(II) $g(1) = 6$ ou $h(1) = -3$.

(III) Ou $g(1) = 6$ ou $h(1) = 0$.

(IV) $\forall x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) \neq g(x)$.

(V) $\exists x \in \mathbb{R} \,|\, g(x) = -h(x)$.

Assinale a alternativa que contém apenas as afirmações verdadeiras:

(a) I, II, III e V.

(b) I, III, V.

(c) II, IV, V.

(d) II, IV.

(e) II, V.

A resolução desse exercício exige domínio sobre os casos em que as proposições compostas são verdadeiras, interpretação correta dos quantificadores e o estudo dos valores das funções nos pontos. Também é possível explorar os gráficos dessas funções e o fato que as retas possuem o mesmo coeficiente angular, ou seja, a função possui a mesma taxa de variação[2].

Resolução: 11 na página 51

Exercício 12. (FGV-SP) em (DANTE, 2005) - Os gastos de consumo (C) de uma família e sua renda (x) são tais que $C = 2000 + 0,8x$. Podemos então afirmar que:

(a) se a renda aumenta em 500, o consumo aumenta em 500.

(b) se a renda diminui em 500, o consumo diminui em 500.

(c) se a renda aumenta em 1000, o consumo aumente em 800.

(d) se a renda diminui em 1000, o consumo diminui em 2800.

(e) se a renda dobra, o consumo dobra.

Além do condicional, o professor pode utilizar esse exercício para explorar a ideia de crescimento e decrescimento e os valores de uma função. Aqui, a função afim aparece em um contexto de gastos e renda de uma família e pode ser tomada como exemplo para que o professor adapte outras questões aqui apresentadas para contextos de interesse da turma. Por exemplo, no exercício 10, ao invés de usar a questão da forma como está, o professor pode dizer que x representa a quantidade de tinta spray em ml e y os metros quadrados que são pintados com essa quantidade de tinta, se a turma possuir interesse em arte de rua ou estiver trabalhando com isso em outra disciplina.

Resolução: 12 na página 51

Exercício 13. Seja f uma função quadrática do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ com domínio e contradomínio em $\mathbb{R}$. Depois de analisar as afirmações verdadeiras (I) e (II), desenhe o gráfico de f.

(I) $x = -3$ é o zero da função f e o x do vértice de f é igual a $-\frac{1}{2}$.

(II) $(-3, 0)$ pertence ao gráfico da função f se e somente se $(1, -4)$ pertence ao gráfico da função f.

Aqui o professor pode explorar junto aos conceitos lógicos a construção do gráfico e a determinação da lei de formação da função quadrática atráves de determinados pontos dessa função.

Resolução: 13 na página 52

[2] Nesse caso, a taxa de variação nada mais é do que o coeficiente a de uma função afim. Também é chamada de taxa de crescimento. O leitor pode encontrar a definição formal e outras informações em OBMEP (2013)

Exercício 14. Com base nos gráficos das figuras 6 e 7, classifique como verdadeiras (V) ou falsas (F) as afirmações.

Figura 6: Gráfico da função $f(x)$ da questão 14

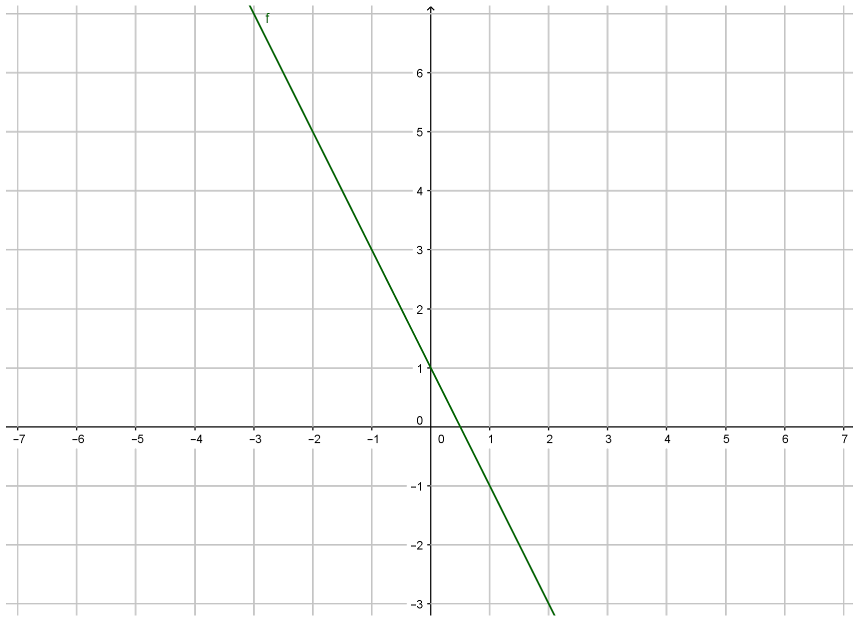
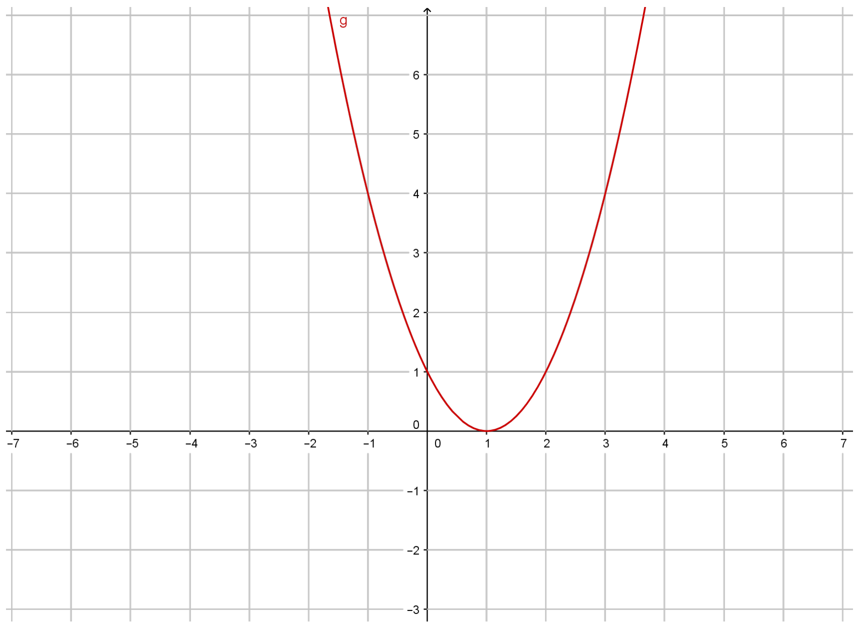


Figura 7: Gráfico da função $g(x)$ da questão 14



(a) $f(x)$ é função afim e $g(x)$ é função quadrática.

(b) Se $x = 1$ é zero da função $g(x)$ então $x = 1$ é zero da função $f(x)$.

(c) Se $x = 1$ é zero da função $f(x)$ então $x = 1$ é zero da função $g(x)$.

(d) Ou $(0, 1)$ pertence ao gráfico da função $f(x)$ ou $(1, 0)$ pertence ao gráfico da função $g(x)$.

(e) Ou a função $f(x)$ é decrescente ou a função $g(x)$ é crescente.

(f) $(3, -1)$ pertence ao gráfico da função $f(x)$ ou $(1, 0)$ pertence ao gráfico da função $g(x)$.

(g) $g(x)$ é uma função quadrática se e somente se $(1, 0)$ é o vértice da parábola que representa a função $g(x)$.

O exercício exige que o estudante interprete tanto as afirmações quanto os gráficos e, assim, o professor pode avaliar se o estudante compreende os conceitos teórica e graficamente. Além disso, esse exercício utiliza-se de todos os conectivos apresentados em 5.1.

Resolução: 14 na página 53

Exercício 15. [Adaptado de (RIBEIRO, 2016)] Sabendo que $f(x) = (3 - 2a)x + 2$ é uma função que tem o conjunto dos números reais como o Domínio e o Contradomínio e que a é um número real, analise se são verdadeiras ou se são falsas as afirmações:

(a) ( ) Se f é crescente, então $a \geq 3$.

(b) ( ) Se $a < \frac{3}{2}$, então f é crescente.

(c) ( ) Existe $a \in \mathbb{R}$ tal que f é constante.

(d) ( ) Para todo $a > 2$ tem-se f decrescente.

No exercício 15, além dos conceitos de função crescente, decrescente e constante, o professor pode explorar o condicional e os quantificadores existencial e universal.

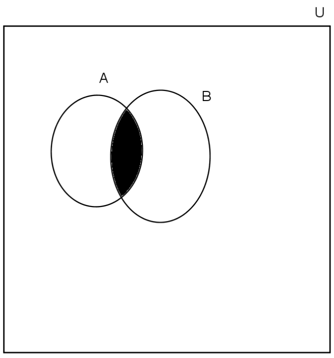
Resolução: 15 na página 53.

7 Resoluções

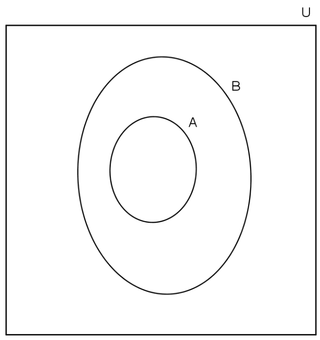
7.1 Resoluções das questões sobre conjuntos

Resolução 1. *Utilizando os diagramas é possível representar as situações solicitadas, hachurando quando necessário.*

Figura 8: Resolução dos itens (a) e (b) - Diagramas de Venn representando intersecção de conjuntos e subconjunto de um conjunto.

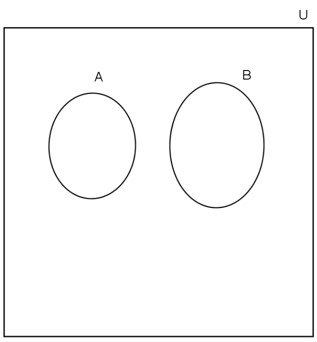


(a) 1a: Intersecção dos conjuntos A e B denotado por $A \cap B$

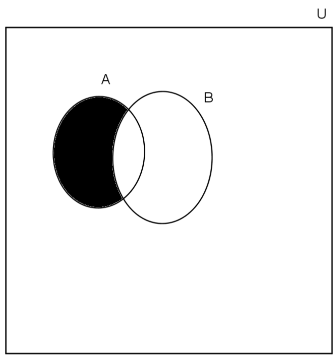


(b) 1b: A é subconjunto de B, denota-se $A \subset B$

Figura 9: Resolução dos itens (c) e (d) - Diagramas de Venn representando conjuntos disjuntos e diferença entre conjuntos.



(a) 1c: A e B são conjuntos *disjuntos*



(b) 1d: Essa é a diferença entre A e B, denota-se $A - B$

Vale ressaltar que é possível e correto utilizar conjuntos com finitos elementos para representar as situações presentes no exercício.

Resolução 2. *A resolução encontra-se na legenda das Figuras 9(a), 9(b), 10(a) e 10(b)*

Resolução 3. *Analisando o item (III), pode-se afirmar que B não contém os Números Racionais já que $\frac{1}{2}$ não pertence a B. Da mesma forma pode-se afirmar que B não contém os Números Reais já que $\sqrt{2}$ não pertence a B. Sendo assim, dentre as alternativas sugeridas, a única possível é a que relaciona B com os Números Naturais.*

Pelo item (I), A não pode ser o Conjunto dos Números Reais pois, caso fosse , as duas afirmações $\sqrt{2}$ pertence a A e $\frac{1}{2}$ pertence a A seriam verdadeiras, o que tornaria a disjunção exclusiva falsa. Da mesma forma, A não pode ser o Conjunto dos Números Naturais pois, caso fosse , as duas afirmações $\sqrt{2}$ pertence a A e $\frac{1}{2}$ pertence a A seriam falsas, o que tornaria a disjunção exclusiva falsa. Portanto, dentre as alternativas sugeridas, a única possível é a que relaciona A com os Números Racionais.

Resolução 4.

(a) ***V**, pois $2 \in A \cap B$ e a afirmação está de acordo com a definição de intersecção, ou seja, a conjunção é verdadeira.*

(b) ***V**, pois $8 \in A \cup B$ e a afirmação está de acordo com a definição de união, ou seja, a disjunção é verdadeira.*

(c) ***F**, como $3 \notin A \cap B$, uma das duas proposições que formam a conjunção em questão é falsa, logo, ela é falsa.*

(d) ***F**, $9 \notin A$, pois sabe-se que $9 \notin A \cap B$ e $9 \in B$. Sabe-se que $3 \notin B$, pois os elementos de B estão listados na questão. Assim, $9 \in A$ é falsa e $3 \in B$ é falsa, e, portanto, a disjunção é falsa.*

Resolução 5. *Todos os itens utilizam o condicional e sabe-se que um condicional* se p então q *só é falso quando p é verdadeiro e q é falso, por isso só esse caso será analisado, ou seja, p sempre será considerado verdadeiro e se verificará a veracidade de q ou então estuda-se a implicação como dito em 5.1.4 na página 25.*

*(a) Minas Gerais é um estado do Sudeste, portanto "Pedro pertence a B" é uma afirmação verdadeira. Assim, o condicional é **verdadeiro**.*

*(b) Santa Catarina é um estado do Sul, portanto a afirmação "Maria pertence a A" é verdadeira. Assim, o condicional é **verdadeiro**.*

*(c) Piauí é um estado do Nordeste, portanto a afirmação "João pertence a E" é falsa e o condicional é **falso**.*

*(d) Amazonas é um estado do Norte, portanto Vitor pertence a E e o condicional é **verdadeiro**.*

*(e) O fato de Carlos pertencer a E não garante que ele é amazonense, pois ele poderia ter nascido, por exemplo, no Acre. Assim, diz-se então que o condicional é **falso**.*

*(f) Como Lucas não pertence a união de A, B e C, por definição, ele não pertence a A e portanto não nasceu no Sul do Brasil. Com isso, pode-se concluir que a afirmação "ele não é gaúcho" é verdadeira. Portanto o condional é **verdadeiro**.*

*(g) O fato de Luiza não pertencer a $C \cup D \cup E$ só garante que ela não nasceu em estados das regiões Centro-Oeste, Nordeste e Norte. Portanto, diz-se que o condicional é **falso**.*

*(h) Perceba que $(A \cup D) \cap (B \cup D) = D \cup (A \cap B)$. Como $A \cap B = \varnothing$ é correto afirmar que $D \cup (A \cap B) = D$. Assim, dizer que João não pertence a $(A \cup D) \cap (B \cup D)$ é o mesmo que dizer que João não pertence a D e, portanto, ele não pode ser baiano. Assim, o condicional é **verdadeiro**.*

Resolução 6.

*(a) Como José nasceu em Cuba e Cuba fica na América Central, têm-se que José pertence a B. Logo, a afirmação é **falsa**.*

*(b) Como Pablo nasceu na Argentina e a Argentina fica na América do Sul, é fato que Pablo pertence a A. Também sabe-se que A, B e C são conjuntos disjuntos. Logo, Pablo não pertence a B e a afirmação é **verdadeira**.*

*(c) El Salvador fica na América Central. Como Maria nasceu em El Salvador, ela pertence a B. Logo, a afirmação é **verdadeira**.*

*(d) O fato de Antonio pertencer a C, diz que ele nasceu em um país da América Central, mas não garante que esse país seja o Canadá. Portanto, a afirmação é **falsa**.*

(e) A proposição "Castro pertence a $B \cup C$" diz que Castro nasceu na América Central ou *Castro nasceu na América do Norte e isso não é garantia suficiente para afirmar que Castro nasceu nos Estados Unidos. Assim, a afirmação é **falsa**.*

*(f) Joana nascer no Chile, garante que ela pertence a A e, portanto, pertence a $A \cup B$. Logo, a afirmação é **verdadeira**.*

Resolução 7.

*(a) Estudam no 2º andar apenas os estudantes das turmas de 8º ano do ensino fundamental e do 2º ano do ensino médio. Assim, Cátia só poderá ser de uma dessas turmas. Portanto, Cátia não está no 7º ano. Logo, a afirmação é **verdadeira**.*

*(b) A afirmação é **verdadeira**, pois as turmas do 1º ano do ensino médio estudam no 1º andar.*

(c) *O fato de Rafael estudar no 1º andar não é garantia de que ele curse o 7º ano do Ensino Fundamental, já que nesse andar também estudam alunos do 1º ano do Ensino Médio. Assim, a afirmação é* ***falsa****.*

(d) *Estudam no 2º andar estudante do 8º ano do Ensino Fundamental e do 2º ano do Ensino Médio. Assim, a afirmativa é* ***falsa****.*

(e) *Estudam no 3º andar estudantes do 3º ano do Ensino Médio e do 9º ano do Ensino Fundamental. Assim, a proposição "Gabriela estuda no 3º andar" garante que Gabriela estuda em um desses níveis. Como não pode haver estudantes que são ao mesmo tempo do 3º ano do Ensino Médio e do 9º ano do Ensino Fundamental, é* ***verdadeira*** *a afirmação.*

(f) *Como no 3º andar só estudam os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e do 3º ano do Ensino Médio, o fato de Breno estudar no 3º andar garante que ele não pode ser de nenhum outro nível. Portanto, a afirmativa é* ***verdadeira****.*

(g) *Não pode haver estudantes que são ao mesmo tempo do 1º ano do Ensino Médio e do 7º ano do Ensino Fundamental, mas o fato de Julia estudar no 1º andar garante que ela cursará um desses anos. Dessa forma, a disjunção será sempre verdadeira, pois as duas proposições não podem ser ambas falsas. Assim, a afirmativa é* ***verdadeira****.*

Resolução 8. *Estuda-se nessa questão a implicação como dito em 5.1.4 na página 25.*

(a) *O fato de A ter 3 elementos e B ter 4, não garante que a união deles terá 7 elementos, pois existem outras possibilidades como, por exemplo, o caso de $A \cap B$ ter um elemento e, então, $A \cup B$ terá 6 elementos. Assim, diz-se que o item é* ***falso****.*

(b) *Não se pode afirmar que $A \cap B$ tem 2 elementos, pois A e B podem, por exemplo, ser disjuntos. Portanto, o condicional apresentado é* ***falso****.*

(c) *Aqui, além de saber o número de elementos de A e de B, sabe-se que A e B são disjuntos e, por isso, pode-se garantir que $A \cup B$ tem 9 elementos (os 5 elementos de A mais os 4 elementos de B). Assim, o item é* ***verdadeiro****.*

7.2 Resoluções das questões sobre funções

Resolução 9. *De acordo com a ordem do exercício, a função é do tipo afim e por isso a lei de formação que se procura é do tipo*

$$f(x) = ax + b$$

É preciso então determinar a e b.

(a) *O condicional "se p então q" só é falso quando p é verdadeiro e q é falso. Como* x *é a variável independente, pode-se "escolher", ou seja, supor que seja verdadeira a igualdade* $x = 0$ *e, como o condicional é verdadeiro,* $y = 0$ *é verdadeiro também. Assim, é possível concluir que:*

$$f(0) = 0$$

$$0 = a.0 + b$$

$$\boxed{b=0.}$$

(b) *A disjunção exclusiva é verdadeira quando uma e apenas uma das proposições que a formam é verdadeira. Como, por a,* $f(0) = 0$*, tem-se que* $f(9) = 3$ *é verdadeiro. Assim,*

$$f(9) = a.9 + b = 3$$

$$\textit{Como } b = 0,\ 9a = 3.$$

$$a = \frac{3}{9}$$

$$\boxed{a = \tfrac{1}{3}.}$$

(c) *Pode-se utilizar a última afirmação para verificar se os valores encontrados nos itens anteriores estão corretos. Como o bicondicional é verdadeiro quando ambas as proposições que o formam forem verdadeiras e quando ambas as proposições que o formam forem falsas e como* x *é a variável livre, podemos considerar* $x = 3$ *verdadeira e, portanto,* $y = 1$ *também é verdadeira. Assim,*

$$f(3) = \frac{1}{3} \cdot 3 + 0$$

$$f(3) = \frac{1}{3} \cdot 3$$

$$f(3) = 1.$$

Portanto os resultados encontrados estão corretos e a lei de formação da função é:

$$f(x) = \frac{1}{3}x.$$

Perceba que foram necessárias apenas duas afirmações para determinar a lei de formação da função.

Resolução 10. *Aqui, é importante lembrar que o condicional "se p então q" é sempre verdadeiro, a menos que a premissa p seja verdadeira e a tese q seja falsa. Por isso, para decidir o valor lógico do condicional, verifica-se somente o caso no qual a premissa é verdadeira:*

(a) *Dado que* 3 *está no domínio, quando* $x = 3$ *a premissa é verdadeira e tem-se* $y = 200 \cdot 3 = 600$. *Portanto a tese* $y = 300$ *é falsa. Logo, o condicional é* ***falso***.

(b) *Aqui pode-se pensar em dois condicionais: se* $x = 8$ *então* $y = 1600$ *e se* $y = 1600$ *então* $x = 8$. *Para decidirmos o valor lógico de cada condicional, é necessário analisar apenas os casos onde as premissas são verdadeiras. Dado que* 8 *está no domínio, quando* $x = 8$ *tem-se* $y = 2 \cdot 8 = 1600$, *ou seja, o primeiro condicional é verdadeiro. Analisando o segundo condicional: dado que* $y = 1600$ *está no contra-domínio, tem-se que* $x = \frac{1600}{200} = 8$ *está univocamente determinado, ou seja, o segundo condicional é verdadeiro. Como os dois condicionais são verdadeiros, o bicondicional é* ***verdadeiro***.

(c) *Dado que* 600 *está no contradomínio, quando* $y = 600$ *a premissa é verdadeira e tem-se* $x = \frac{600}{200} = 3$. *Portanto a tese* $x = 4$ *é falsa. Logo, o condicional é* ***falso***.

(d) *Já foi dito que quando* $x = 8$, $y = 200 \cdot 8 = 1600$. *Portanto, o bicondicional é* ***falso***.

Resolução 11. *Analisa-se as afirmações uma a uma e depois escolhe-se a opção correta.*

(I) $f(0) = 3 \cdot 0 = 0$, *mas* $g(0) = 3 \cdot 0 + 3 = 3$, *ou seja,* $p : f(0) = 0$ *é verdadeira e* $q : g(0) = 0$ *é falsa. Portanto, a conjunção é* ***falsa***.

(II) *A afirmação* $p : g(1) = 6$ *é verdadeira, pois* $g(1) = 3 \cdot 1 + 3 = 6$. *Já a afirmação* $q : h(1) = -3$ *é falsa, pois* $h(1) = 3 \cdot 1 - 3 = 0$. *Assim, a disjunção é* ***verdadeira***.

(III) *Do item anterior, sabe-se que* $p : g(1) = 6$ *é verdadeira assim como* $q : h(1) = 0$, *portanto a disjunção exclusiva é* ***falsa***.

(IV) *De fato, qualquer que seja* $x \in \mathbb{R}$, *tem-se que* $3x \neq 3x + 3$, *pois se* $3x = 3x + 3$, *então* $0 = 3$, *o que não ocorre. Logo, a afirmação é* ***verdadeira***.

(V) *Tome* $0 \in \mathbb{R}$, *tem-se então* $g(0) = 3 \cdot 0 + 3 = 3$ *e* $-h(0) = -(3 \cdot 0 - 3) = 3$, *ou seja,* $g(0) = -h(0)$. *Assim, a afirmação é* ***verdadeira***.

Assim, são verdadeiras as afirmações II, IV e V e a alternativa correta é ***(c)***.

Resolução 12. *Sabe-se que o condicional se p então q só é falso quando p é verdadeiro e q é falso. Aqui, a renda é a variável independente e, por isso, pode-se atribuir a ela qualquer valor no domínio (que não está explícito, mas pode-se considerar o* $\mathbb{Q}$*). Como o exercício fala de aumento e diminuição da renda e do consumo, toma-se como parâmetro o caso em que a renda é* 0, *ou seja,* $C = 2000 + 0,8 \cdot 0 = 2000$.

(a) *Quando a renda aumenta 500, considera-se* $C(500) = 2000 + 0,8 \cdot (500) = 2000 + 400 = 2400$*, ou seja, o consumo aumenta em 400.*

(b) *Quando a renda diminui 500,* $C(-500) = 2000 + 0,8 \cdot (-500) = 2000 - 400 = 1600$*, ou seja, o consumo diminui em 400. item[(c)] Quando a renda aumenta em 1000, o consumo é* $C(1000) = 2000 + 0,8 \cdot (1000) = 2000 + 800 = 2800$*, ou seja, o consumo aumenta em 800. Portanto essa é a alternativa* ***correta****.*

(d) *De forma análoga, o consumo é* $C(-1000) = 2000 + 0,8 \cdot (-1000) = 2000 - 800 = 1200$*, ou seja, o consumo diminui em 800.*

(e) *É possível perceber pelos itens anteriores que as duas grandezas não possuem essa proporção.*

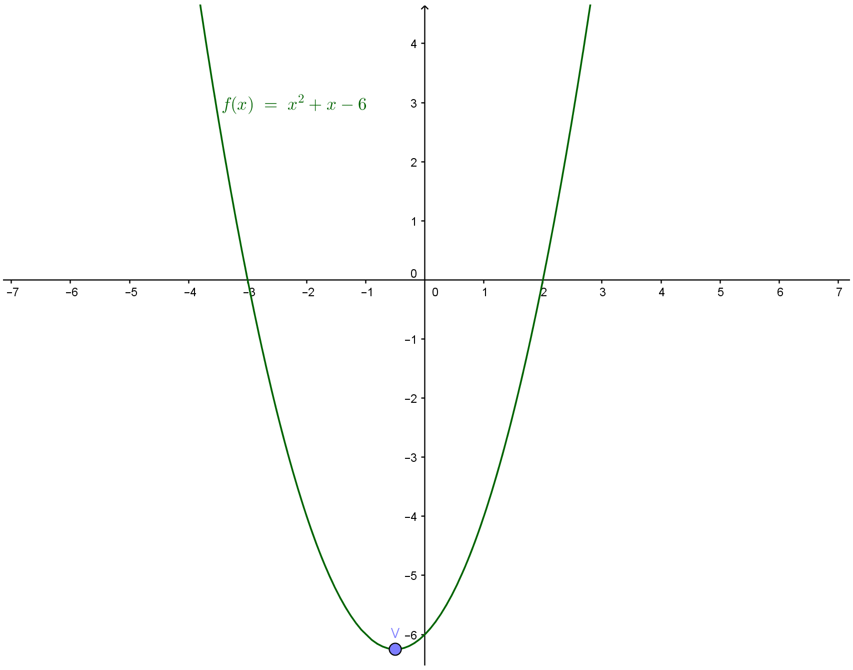
Resolução 13. *Utiliza-se o fato da conjunção ser verdadeira quando as duas proposições que a formam são verdadeiras e, devido a veracidade da conjunção, conclui-se que as duas proposições que formam bicondicional verdadeiro são verdadeiras.*

(I) *Sendo* $x = -3$ *zero da função, é correto afirmar que* $f(-3) = a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + c = 0$*, ou seja,* $9a - 3b + c = 0$*. Sendo* x *do vértice igual a* $-\frac{1}{2}$*, é correto afirmar que* $-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$*, ou seja,* $a = b$*. Com isso,* $6a + c = 0$*, isso é,* $c = -6a$*.*

(II) *Da afirmação anterior que garante que* $x = -3$ *zero da função, é verdadeira a afirmação que diz* $(-3, 0)$ *é ponto da função e, para que o bicondicional seja verdadeiro, também é verdade que* $(1, -4)$ *é um ponto da função. Assim,* $f(1) = a + b + c = -4$*, pelo item anterior,* $2a + c = -4$ *e assim,* $2a - 6a = -4$*. Portanto,* $a = 1$*,* $b = 1$*,* $c = -6$ *e*

$$f(x) = x^2 + x - 6, \text{ como ilustrado na figura 10.}$$

Figura 10: Gráfico da função $f(x) = x^2 + x - 6$ obtida na resolução da questão 13



Resolução 14.

(a) O gráfico da f é uma reta, por isso pode-se afirmar que f é uma função afim. O gráfico de g é uma parábola, por isso pode-se afirmar que g é uma função quadrática. Portanto, a conjunção é ***verdadeira****.*

(b) Em $x = 1$ o gráfico de g toca o eixo x, mas o gráfico de f não. Assim, $x = 1$ é zero de g e não é zero de f. Portanto, o condicional é ***falso****.*

(c) A sentença "$x = 1$ é zero da função $f(x)$" é falsa, mas "$x = 1$ é zero da função $g(x)$" é verdadeira. Assim, o condicional é ***verdadeiro****.*

(d) As duas afirmações são verdadeiras. Portanto a disjunção exclusiva é ***falsa****.*

(e) Pelo gráfico de f pode-se perceber que ao aumentar o valor de x, os valores de y correspondentes diminuem. Já o gráfico da g é possível perceber que há trechos de crescimento e de decrescimento, por isso não é possível classificar a função como crescente. Assim, a disjunção exclusiva é ***verdadeira****.*

(f) Como $(1, 0)$ pertence ao gráfico de g, a disjunção é ***verdadeira****.*

(g) Como as duas afirmações são verdadeiras, o bicondicional é ***verdadeiro****.*

Resolução 15. *Como a questão aborda crescimento e decrescimento da função, começa-se com essa análise. Para a função ser crescente, o coeficiente angular tem que ser positivo, ou seja,*

$$3 - 2a > 0$$

$$
\begin{aligned}
-2a &> -3 \\
-a &> -\frac{3}{2} \\
a &< \frac{3}{2}.
\end{aligned}
$$

*Com essa informação é possível afirmar que o condicional (a) é **falso**, pois sendo "f é crescente" verdadeiro, $a \geq 3$ é falso, e que o condicional (b) é **verdadeiro**, pois ambas proposições que o forma são verdadeiras.*

*Perceba ainda que quando $a = \frac{3}{2}$ o coeficiente angular é zero e, portanto, f é constante e (c) é **verdadeiro**. Também é **correta** a afirmação (d) uma vez que todo $a > \frac{3}{2}$ torna a função decrescente.*

8 Conclusão

Ao ensinar Lógica possibilita-se que o estudante desenvolva sua capacidade de argumentação, utilizada em todas as áreas do conhecimento e em diversos momentos da vida além da escola. Da mesma forma, possibilita que ele tenha maior atenção a discursos incoerentes e com argumentos falsos, infelizmente tão comuns naqueles que utilizam a inocência e o despreparo dos ouvintes para atingir objetivos que são, algumas vezes, escusos. Esses ensinamentos podem se dar desde os primeiros ciclos de ensino, desde que respeitadas as fases de desenvolvimento cognitivo de cada um deles.

Se desde o Ensino Fundamental o estudante estiver em contato com os conceitos da Lógica e possuir o domínio da linguagem da qual a Matemática se utiliza, possivelmente esse estudante terá uma facilidade muito maior de compreender os conceitos e as abstrações sobre as quais a Matemática se desenvolve. Da mesma forma, acredita-se que os estudantes que dominam a Matemática - e com isso diz-se o desenvolvimento de competências e habilidades que transformam conteúdos em interpretação e representação da realidade e ações que levem a solução dos problemas encontrados nessa realidade - serão capazes de atuar de forma mais consciente e crítica enquanto cidadãos.

Portanto, o que se apresentou nesse trabalho não deve ser visto como um encerramento de uma proposta, mas sim como o começo de uma proposta que deve permear toda a Educação Básica. Aqui apenas se está dando uma possibilidade para que a Lógica entre no currículo da Educação Básica sem sobrecarregar professores e professoras que já lutam para ensinar tantos conteúdos no pouco tempo que lhes é disponibilizado com os estudantes. Assim, espera-se que as questões aqui apresentadas possam ser utilizadas na sala de aula por aqueles que trabalham nos adiantamentos que ensinam Conjuntos e Funções, mas que também sirvam de inspiração para que sejam criadas questões que mesclem outros conteúdos com conceitos de Lógica.

As questões propostas nesse trabalho têm em vista que ou o professor ou a professora faça a mediação[1] da aprendizagem dos estudantes no momento da resolução das mesmas. É interessante que alguns conceitos tais como o de afirmação, proposição, valor lógico e a própria noção de que a Matemática usa uma linguagem diferente da linguagem coloquial, sejam apresentados aos estudantes no começo da aplicação dessa proposta. Contudo, outros conceitos serão explicados quando o professor ou a professora estiver fazendo a mediação durante a resolução de exercícios, não só porque assim o estudante poderá perceber que ao interpretar um conectivo lógico erroneamente, por exemplo, ele estará modificando significativamente aquilo que a sentença afirma, mas principalmente, como dito antes,

[1] O leitor pode encontrar mais sobre mediação de aprendizagem na página 38 dos PCNs (BRASIL, 1998).

por não ser o objetivo dessa proposta que se tenha várias aulas exclusivamente para o ensino formal de Lógica. É interessante também que o professor incentive os estudantes a pesquisar alguns desses conceitos, uma vez que a pesquisa, quando bem orientada, é ferramenta importante na aprendizagem do estudante.

Ainda sobre as questões, é importante destacar que optou-se por não trabalhar com contextos específicos para atingir um número maior de profissionais. Contudo, eles podem modificar as questões e transformar, por exemplo, a função f qualquer em uma função que represente o lucro de uma padaria ou o número de peixes em relação ao período do ano ou qualquer outro contexto no qual seus estudantes estejam inseridos.

Em trabalhos futuros, pretende-se aplicar essas e outras questões em turmas tanto de ensino regular quanto de jovens e adultos. Além disso, espera-se criar parcerias com professores e professoras de outras áreas do conhecimento para avaliar o desenvolvimento dos estudantes nessas áreas após o domínio dos conceitos de Lógica, assim como descobrir formas de incluir o ensino de Lógica nessas áreas.

Referências

BIANCHI, C. *A lógica no desenvolvimento da competência argumentativa*. Dissertação (Tese de Doutorado) — Universidade Estadual Paulista, 2007. Disponível em: <http://www.athena.biblioteca.unesp.br/exlibris/bd/brc/33004137031P7/2007/bianchi_c_dr_rcla.pdf>. Acesso em: 17 fev. 2016. Citado 3 vezes nas páginas 17, 18 e 19.

BRASIL. Ministério da Educação. *Diretrizes Curriculares Nacionais para os cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura*. Brasília, DF, 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf>. Citado na página 14.

BRASIL. Ministério da Educação. *Portal Domínio Público*. Brasília, DF, 2004. Disponível em: <http://www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/PesquisaObraForm.do?select{_}action={&}co{_}>. Acesso em: 06.3.2016. Citado na página 15.

BRASIL. Ministério da Educação. *PDE: Plano de Desenvolvimento da Educação: SAEB - matrizes de referência, tópicos e descritores*. Brasília,DF, 2008. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/saeb_matriz2.pdf>. Citado na página 17.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. *SAEB, Sistema de Avaliação da Educação Básica*. Brasília, 2013. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/web/saeb/aneb-e-anresc>. Citado na página 19.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais : Matemática*. Brasília, DF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Citado 3 vezes nas páginas 13, 18 e 55.

BREGALDA, M. M. Aspectos da lógica estoica e da lógica sêneca. *Nuntius Antiquus*, n. 3, 2009. Disponível em: <http://www.periodicos.letras.ufmg.br/index.php/nuntius{_}antiquus/article/view/2035/1>. Citado na página 15.

CASTRUCCI, B. *Introdução à lógica matemática*. 6. ed. São Paulo: GEEM: Distribuição Livraria Nobel S.A, 1984. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 21.

DANTE, L. R. *Matemática*. 1. ed. São Paulo: Ática, 2005. Citado 4 vezes nas páginas 41, 43, 4 e 5.

DINUCCI, A. L. *A lógica estóica segundo Suzanne Bobzien*. UFS, 2011. Disponível em: <http://ri.ufs.br/handle/123456789/744>. Acesso em: 06.3.2016. Citado na página 15.

D'OTTAVIANO Ítala M. L.; FEITOSA, H. de A. Sobre a história da lógica, a lógica clássica e o surgimento das lógicas não-clássicas. 2003. Disponível em: <ftp://ftp.cle.unicamp.br/pub/arquivos/educacional/ArtGT.pdf>. Citado na página 15.

DOXIADIS, A.; PAPADIMITRIOU, C. H. *Logicomix: Uma jornada épica em busca da verdade*. [S.l.]: WMF Martins Fontes, 2010. ISBN 8578272781. Citado na página 15.

FERREIRA, J. C. Elementos de lógica matemática e teoria dos conjuntos. *reedição dos capítulos iniciais de "Lições de Análise Real", Departamento de Matemática/Instituto Superior Técnico*, 2001. Citado na página 26.

FILHO, D. C. de M. *Um convite à Matemática*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. Citado 5 vezes nas páginas 14, 15, 17, 21 e 25.

FREGE, G. *Begriffsschrift*. Vojtěch Kolman, 1879. Disponível em: <http://dec59.ruk.cuni.cz/~kolmanv/Begriffsschrift.pdf>. Acesso em: 06.3.2016. Citado na página 15.

LIMA, E. L. *Números e Funções Reais*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Citado 6 vezes nas páginas 21, 28, 29, 30, 31 e 33.

MENDONÇA, B. R. *Conhecimento Simbólico em John Venn*. Dissertação (Dissertação de mestrado) — Universidade Federal de Santa Maria, 2013. Disponível em: <http://w3.ufsm.br/ppgf/wp-content/uploads/2011/10/dissertacao-mendonca.pdf>. Acesso em: 17 fev. 2016. Citado na página 29.

NUNES, A. A. da S. *Lógica Básica e o Método Axiomático: Uma Introdução Através da Teoria dos Conjuntos*. Dissertação (Dissertação de mestrado) — Universidade de Brasília, 2015. Disponível em: <http://repositorio.unb.br/handle/10482/18944>. Acesso em: 17 fev. 2016. Citado na página 19.

OBMEP. *Portal da Matemática*. 2013. Disponível em: <https://www.youtube.com/user/MPTOBMEP>. Acesso em: 06.3.2016. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 43.

OTHERO, G. de A.; BRAUNER, G. *Lógica e Linguagem Natural*. PUCRS, 2007. Disponível em: <http://www.pucrs.br/edipucrs/online/pesquisa/pesquisa/artigo11.html>. Acesso em: 06.3.2016. Citado na página 16.

PAIVA, M. *Matemática: Paiva*. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 2.

PROFMAT. *Profmat*. 2015. Disponível em: <https://www.youtube.com/channel/UCVRVgVxJw4JzSm6f0lRqUyA>. Acesso em: 06.3.2016. Citado na página 21.

RIBEIRO, A. G. Rede Omnia. *Exercícios Mundo da Educação*. Goiás, 2016. Disponível em: <http://exercicios.mundoeducacao.bol.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-funcao-1-o-grau.htm>. Acesso em: 24.4.2016. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 7.

SOUZA, P. R. A. de. *A importância da lógica e da argumentação para os profissionais do direito*. Âmbito Jurídico, 1998. Disponível em: <http://www.ambito-juridico.com.br/site/index.php?n{_}link=revista{_}artigos{_}leitura{&}ar>. Acesso em: 06.3.2016. Citado na página 16.

VELASCO, P. del N. Sobre o lugar da lógica na sala de aula. *Revista Sul-Americana de Filosofia e Educação, Brasília*, n. 13, 2009. Disponível em: <http://seer.bce.unb.br/index.php/resafe/article/view/5308/4423>. Citado na página 19.

Apêndices

Lista de Exercícios

Autoria: Gabrielly Costa Butierres

Escola:_______________________________________

Professor:____________________________________

Nome:____

1. Utilizando diagramas de Venn, ilustre as sentenças abaixo:

   (a) $\exists\, x \in U \,|\, x \in A\, e\, x \in B$;

   (b) $\forall\, x \in A$ temos que $x \in B$;

   (c) $\nexists\, x \in U \,|\, x \in A$ e $x \in B$;

   (d) $\exists\, x \in U \,|\, x \in A\, e\, x \notin B$;

2. Para cada caso do exercício 1, diga qual conceito de conjunto a sentença representa.

3. Sabendo que são verdadeiras as afirmações apresentadas, relacione corretamente as duas colunas abaixo:

Conjunto	Elementos
A ◦	◦ Números Naturais
B ◦	◦ Números Reais
C ◦	◦ Números Racionais

   (I) Ou $\sqrt{2}$ pertence a A ou $\frac{1}{2}$ pertence a A.

   (II) Ou $\frac{1}{2}$ pertence a B ou $\sqrt{2}$ pertence a C.

   (III) $\frac{1}{2}$ não pertence a B e $\sqrt{2}$ não pertence a B.

4. Sabendo que $A \cap B = \{2, 5\}$, $B = \{2, 5, 9\}$ e $A \cup B = \{2, 3, 5, 8, 9\}$, classifique cada uma das afirmações em verdadeira ou falsa:

   (a) $2 \in A$ e $2 \in B$.

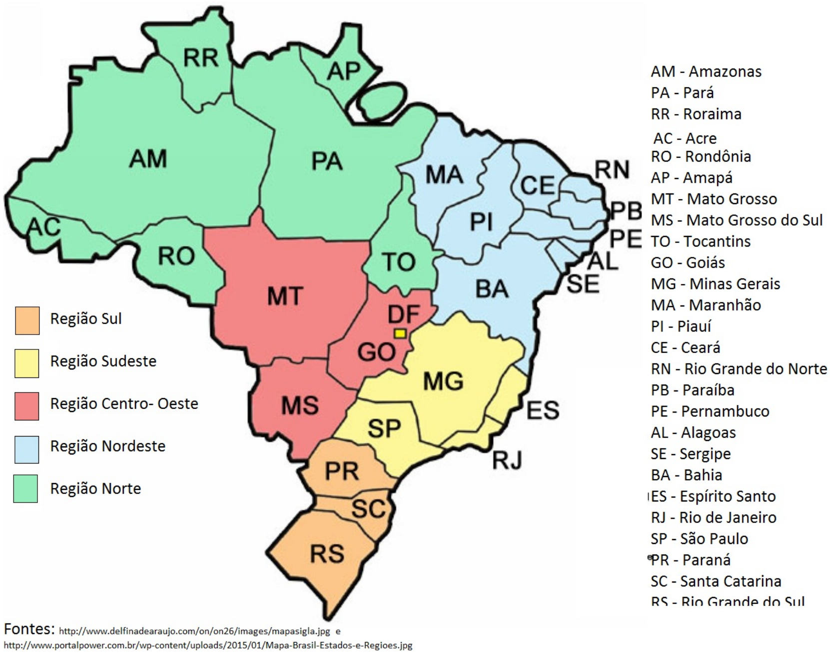
   (b) $8 \in A$ ou $8 \in B$.

   (c) $3 \in A$ e $3 \in B$.

   (d) $9 \in A$ ou $3 \in B$.

5. (PAIVA, 2013) - Considere o conjunto universo U dos cidadãos brasileiros e os conjuntos abaixo:
   $A = \{x \in U \,|\, x$ nasceu na região Sul do Brasil$\}$;
   $B = \{y \in U \,|\, y$ nasceu na região Sudeste do Brasil$\}$;
   $C = \{z \in U \,|\, z$ nasceu na região Centro-Oeste do Brasil$\}$;
   $D = \{p \in U \,|\, p$ nasceu na região Nordeste do Brasil$\}$;
   $E = \{q \in U \,|\, q$ nasceu na região Norte do Brasil$\}$.
   Classifique em verdadeira ou falsa cada uma das afirmações a seguir, supondo que todas as pessoas mencionadas nasceram no Brasil.

Figura 11: Mapa das regiões do Brasil



(a) Se Pedro nasceu em Minas Gerais, então ele pertence a B.

(b) Se Maria nasceu em Santa Catarina, então ela pertence a A.

(c) Se João nasceu no Piauí, então ele pertence a E.

(d) Se Vitor é amazonense, então ele pertence a E.

(e) Se Carlos pertence a E, então ele é amazonense.

(f) Se Lucas não pertence a $(A \cup B \cup C)$, então ele não é gaúcho.

(g) Se Luíza não pertence a $(C \cup D \cup E)$, então ela não é carioca.

(h) Se José não pertence a $(A \cup D) \cap (B \cup D)$, então ele não é baiano.

6. Sendo U o conjunto das pessoas que nasceram na América, considere os conjuntos abaixo:
   $A = \{x \in U \mid x \text{ nasceu na América do Sul}\}$;
   $B = \{y \in U \mid y \text{ nasceu na América Central}\}$;
   $C = \{z \in U \mid z \text{ nasceu na América do Norte}\}$.
   Supondo que todas as pessoas citadas nasceram na América, classifique cada uma das afirmações em verdadeira ou falsa.

Figura 12: Mapa da Divisão Geográfica da América

(a) Se José nasceu em Cuba, então José pertence a A.

(b) Se Pablo nasceu na Argentina, então Pablo não pertence a B.

(c) Se Maria nasceu em El Salvador, então Maria pertence a B.

(d) Se Antonio pertence a C, então ele nasceu no Canadá.

(e) Se Castro pertence a $B \cup C$, então ele nasceu nos Estados Unidos.

(f) Se Joana nasceu no Chile, então Joana pertence $A \cup B$.

7. A Escola Antonio Miranda Nobrega fica em um prédio de três andares e atende turmas do 7º ao 9º ano do ensino fundamental e do 1º ao 3º ano do Ensino Médio. Esse ano, a diretora da escola distribuiu as turmas da seguinte forma:

   - No primeiro andar apenas as turmas do 7º ano do Ensino Fundamental e do 1º ano do Ensino Médio.
   - No segundo andar apenas as turmas do 8º ano do Ensino Fundamental e do 2º ano do Ensino Médio.
   - No terceiro andar apenas as turmas do 9º ano do Ensino Fundamental e do 3º ano do Ensino Médio.

   Sabendo disso, leia as afirmações e classifique-as em verdadeiras ou falsas.

   (a) Se Cátia estuda no 2º andar, então Cátia não está no 7º ano do Ensino Fundamental.

   (b) Se Gustavo cursa o 1º ano do Ensino Médio, então ele estuda no 1º andar.

   (c) Se Rafael estuda no 1º andar, então ele cursa o 7º ano do Ensino Fundamental.

   (d) Se Veronica estuda no 2º andar, então ela cursa o 9º ano do Ensino Fundamental.

   (e) Se Gabriela estuda no 3º andar, então ou Gabriela estuda no 3º ano do Ensino Médio ou Gabriela estuda no 9º do Ensino Fundamental.

   (f) Se Breno estuda no 3º andar, então Breno não cursa o 8º ano do Ensino Fundamental e Breno não cursa o 1º ano do Ensino Médio.

   (g) Se Julia estuda no 1º andar, então ou Julia não cursa o 7º ano do Ensino Fundamental ou Julia não cursa o 1º ano do Ensino Médio.

8. (DANTE, 2005) - Classifique em verdadeira (**V**) ou falsa (**F**) e justifique:

   (a) Se **A** tem 3 elementos e **B** tem 4 elementos, então $A \cup B$ tem 7 elementos.

   (b) Se **A** tem 2 elementos e **B** tem 3 elementos, então $A \cap B$ tem 2 elementos.

   (c) Se $A \cap B = \varnothing$, **A** tem 5 elementos e **B** tem 4 elementos, então $A \cup B$ tem 9 elementos.

9. Sabendo que são verdadeiras as afirmações, determine a lei de formação da função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

   (a) Se $x = 0$ então $y = 0$.

   (b) Ou $f(9) = 3$ ou $f(0) = -2$.

   (c) $y = 1$ se e somente se $x = 3$.

   Agora, reflita: você precisa das três afirmações para determinar a lei de formação da função? Justifique.

10. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 200x$ e classifique como verdadeiras ou falsas as afirmações, justificando sua resposta.

    (a) Se $x = 3$, então $y = 300$.

    (b) $y = 1600$ se, e somente se, $x = 8$.

    (c) Se $y = 600$, então $x = 4$.

    (d) $y = 1400$ se, e somente se, $x = 8$.

11. Sejam as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = 3x$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $g(x) = 3x + 3$ e $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $h(x) = 3x - 3$. A partir de seus conhecimentos sobre função e considerando as regras da lógica, analise as afirmações:

    (I) $f(0) = 0$ e $g(0) = 0$.

    (II) $g(1) = 6$ ou $h(1) = -3$.

    (III) Ou $g(1) = 6$ ou $h(1) = 0$.

    (IV) $\forall x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) \neq g(x)$.

    (V) $\exists x \in \mathbb{R} \,|\, g(x) = -h(x)$.

    Assinale a alternativa que contém apenas as afirmações verdadeiras:

    (a) I, II, III e V.

    (b) I, III, V.

    (c) II, IV, V.

    (d) II, IV.

    (e) II, V.

12. (FGV-SP) em (DANTE, 2005) - Os gastos de consumo (C) de uma família e sua renda (x) são tais que $C = 2000 + 0,8x$. Podemos então afirmar que:

    (a) se a renda aumenta em 500, o consumo aumenta em 500.

    (b) se a renda diminui em 500, o consumo diminui em 500.

    (c) se a renda aumenta em 1000, o consumo aumente em 800.

    (d) se a renda diminui em 1000, o consumo diminui em 2800.

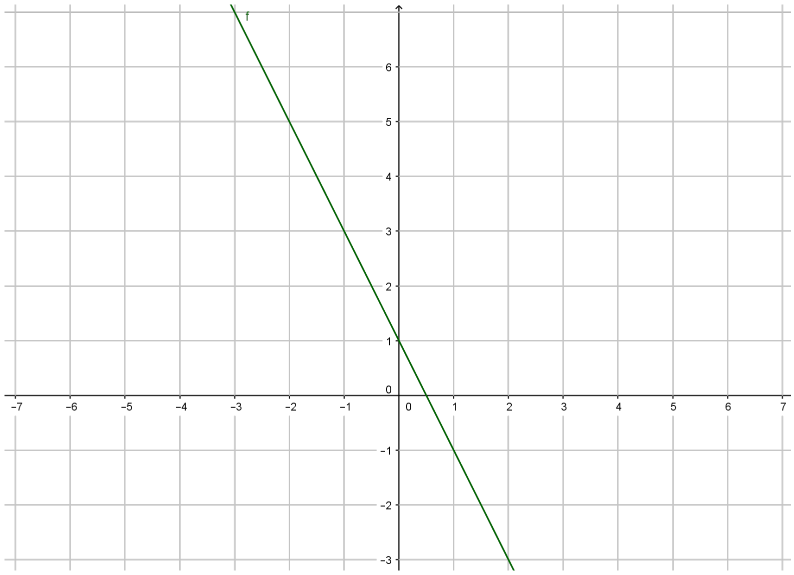
    (e) se a renda dobra, o consumo dobra.

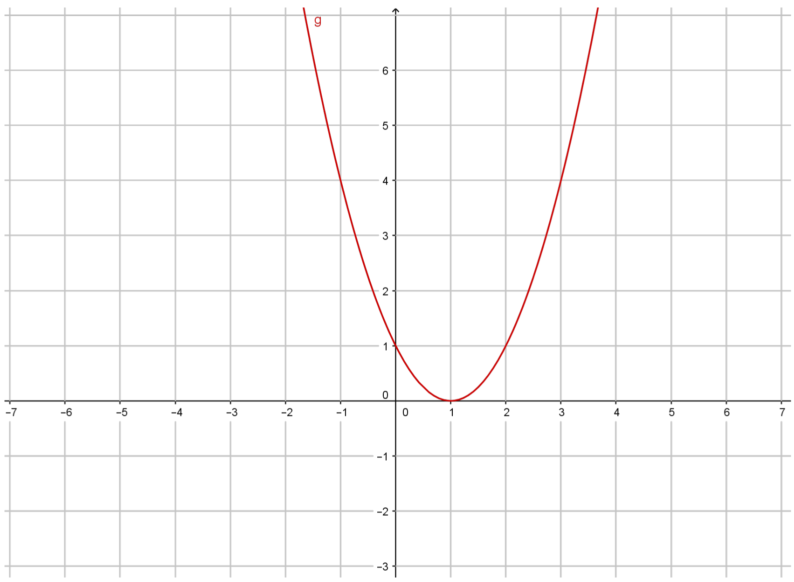
13. Seja f uma função quadrática do tipo $f(x) = ax^2+bx+c$ com domínio e contradomínio em $\mathbb{R}$. Depois de analisar as afirmações verdadeiras (I) e (II), desenhe o gráfico de f.

    (I) $x = -3$ é o zero da função f e o x do vértice de f é igual a $-\frac{1}{2}$.

    (II) $(-3, 0)$ é um ponto da função f se e somente se $(1, -4)$ é um ponto da função f.

14. Com base nos gráficos, classifique como verdadeiras (V) ou falsas (F) as afirmações.





    (a) $f(x)$ é função afim e $g(x)$ é função quadrática.

    (b) Se $x = 1$ é zero da função $g(x)$ então $x = 1$ é zero da função $f(x)$.

    (c) Se $x = 1$ é zero da função $f(x)$ então $x = 1$ é zero da função $g(x)$.

    (d) Ou $(0, 1)$ é ponto da função $f(x)$ ou $(1, 0)$ é ponto da função $g(x)$.

    (e) Ou a função $f(x)$ é decrescente ou a função $g(x)$ é crescente.

(f) $(3, -1)$ é ponto da função $f(x)$ ou $(1, 0)$ é ponto da função $g(x)$.

(g) $g(x)$ é uma função quadrática se e somente se $(1, 0)$ é o vértice da parábola que representa a função $g(x)$.

15. Adaptado de (RIBEIRO, 2016) - Sabendo que $f(x) = (3 - 2a)x + 2$ é uma função que tem o conjunto dos números reais como o Domínio e o Contradomínio e que a é um número real, analise se são verdadeiras ou se são falsas as afirmações:

(a) (   ) Se f é crescente, então $a \geq 3$.

(b) (   ) Se $a < \frac{3}{2}$, então f é crescente.

(c) (   ) Existe $a \in \mathbb{R}$ tal que f é constante.

(d) (   ) Para todo $a > 2$ tem-se f decrescente.