

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

MODELAGEM DINÂMICA DE CABOS COM IDENTIFICAÇÃO PARAMÉTRICA E  
VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL

por

Guilherme Moraes de Menezes

Dissertação para obtenção do Título de  
Mestre em Modelagem Computacional

Rio Grande, Março, 2019



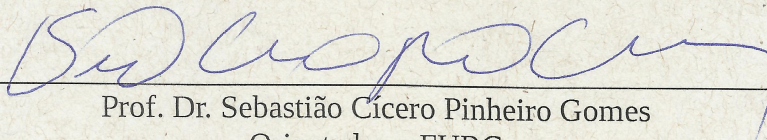
Guilherme Moraes de Menezes

“ Modelagem Dinâmica de cabos com identificação paramétrica e validação experimental ”

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal do Rio Grande - FURG, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre. Área concentração: Modelagem Computacional.

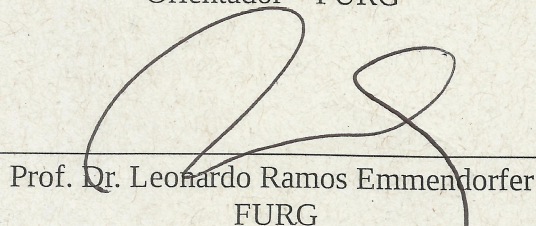
Aprovado em

BANCA EXAMINADORA



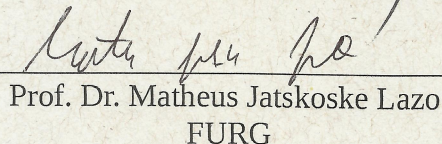
---

Prof. Dr. Sebastião Cícero Pinheiro Gomes  
Orientador – FURG



---

Prof. Dr. Leonardo Ramos Emmendorfer  
FURG



---

Prof. Dr. Matheus Jatskoske Lazo  
FURG



---

Prof. Dr. Alexandre Molter  
UFPEL

Rio Grande - RS  
2019



*Dedico este trabalho aos meus pais,  
que em momento algum deixaram de  
acreditar nos meus sonhos.*

## **AGRADECIMENTOS**

À Deus, por me conceder condições de concluir este trabalho.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Sebastião Cícero Pinheiro Gomes pelo excelente trabalho. Agradeço, ainda pela atenção, disposição, amizade e por todo o conhecimento e experiência obtidos durante esses dois anos de trabalho.

À Universidade Federal do Rio Grande (FURG) pelo acolhimento e pela oportunidade de obter mais este título.

Ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, pela oportunidade de desenvolver este trabalho.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela concessão de recursos ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

Ao Laboratório POLICAB, na pessoa do Prof. Dr. Carlos Eduardo Marcos Guilherme, pela disposição do espaço e suporte no desenvolvimento de parte deste trabalho.

Aos meus pais, Elódi e Terezinha, que sempre acreditaram em mim, me apoiaram nos momentos mais difíceis durante esses dois anos de trabalho e me incentivaram a nunca desistir dos meus sonhos.

Às minhas irmãs Juliana, Carla e Isadora, pela amizade e companheirismo da vida toda.

Aos amigos que a cidade de Rio Grande me deu, obrigado pela amizade e pelos momentos felizes vivenciados, em especial aos amigos Renato, Cristiane e Vicente que me acolheram como parte da família durante esse período da minha vida.

## RESUMO

A presente dissertação aborda a identificação paramétrica em modelos dinâmicos de estruturas flexíveis do tipo cabo. A modelagem dinâmica é feita a partir de um formalismo discreto, no qual se considera a flexibilidade contínua do cabo como aproximada por uma equivalente discreta, considerando-se elos rígidos conectados por articulações fictícias elásticas. Considera-se o cabo se movimentando no plano vertical. Foram desenvolvidos algoritmos para gerar o modelo dinâmico do cabo de forma automática, para um número qualquer de elos rígidos considerados na aproximação discreta. Considerou-se inicialmente um modelo dinâmico com sessenta elos como alvo, representando o resultado experimental. Outro modelo com doze elos deveria ter os parâmetros identificados de forma a que os resultados de simulação tenham erros mínimos com relação aos resultados com o modelo de sessenta elos. Utilizou-se o método Nelder–Mead Simplex para a minimização dos erros e a consequente identificação dos parâmetros das matrizes de rigidez e de atrito uma vez que os demais parâmetros referentes às massas e aos comprimentos dos elos são facilmente mensuráveis. Os resultados foram considerados bons, de forma que a estrutura proposta de identificação de parâmetros foi validada, fato que possibilitou a sua aplicação experimentalmente. Um cabo de fibra sintética e bastante flexível foi fixado ao teto de uma sala, deixando-se sua outra extremidade livre, na qual foi posta uma carga terminal. Ao longo do cabo foram demarcadas doze posições igualmente espaçadas, a fim de facilitar a identificação da configuração espacial do cabo a partir de uma câmera digital. Simulações e experimentos foram realizados sob as mesmas condições iniciais. Utilizou-se também o método Nelder–Mead Simplex para a identificação dos parâmetros do modelo. Os resultados de simulações foram muito próximos dos experimentais, de forma que a técnica de modelagem proposta em trabalhos anteriores a este foi validada experimentalmente.

Palavras-chaves: Modelagem dinâmica. Cabos. Identificação paramétrica. Minimização de Erros. Simulações.

## **ABSTRACT**

The present dissertation addresses the parametric identification in dynamic models of flexible cable-type structures. The dynamic modeling is done from a discrete formalism, in which the continuous flexibility of the cable is considered as approximated by a discrete equivalent, considering the rigid links connected by fictitious elastic joints. The cable is considered moving in the vertical plane. Algorithms were developed to generate the dynamic cable model automatically for any number of rigid links considered in the discrete approach. It was initially considered a dynamic model with sixty links as a target, representing the experimental result. Another model with twelve links should have the parameters identified so that the simulation results have minimal errors with respect to the results with the sixty-link model. The Nelder-Mead Simplex method was used for the minimization of errors and the consequent identification of the parameters of the stiffness and friction matrices since the other parameters concerning the masses and the lengths of the links are easily measurable. The results were considered good, so that the proposed parameter identification structure was validated, which enabled its application experimentally. A very flexible synthetic fiber cable was attached to the ceiling of a room, leaving its other free end, into which a terminal charge was placed. Twelve equally spaced positions were demarcated along the cable in order to facilitate the identification of the spatial configuration of the cable from a digital camera. Simulations and experiments were performed under the same initial conditions. The Nelder-Mead Simplex method was also used to identify the model parameters. The results of simulations were very close to the experimental ones, so that the modeling technique proposed in previous works to this one was validated experimentally.

**Keywords:** Dynamic modeling. Cables. Parametric identification. Minimization of Errors. Simulations.

# ÍNDICE

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>17</b>
1.1	Revisão bibliográfica .....	18
1.2	Objetivos .....	23
1.2.1.	Objetivo Geral .....	23
1.2.2.	Objetivos Específicos.....	23
1.3	Roteiro do Trabalho .....	24
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTOS TEÓRICOS .....</b>	<b>25</b>
2.1	Formalismo Discreto.....	25
2.2	A curva Catenária.....	35
<b>3</b>	<b>MODELAGEM DINÂMICA .....</b>	<b>41</b>
3.1	Introdução.....	41
3.2	Modelagem dinâmica para o cabo com dois elos .....	41
3.3	Modelagem dinâmica para o cabo com três elos .....	44
3.4	Modelagem dinâmica para o cabo de quatro elos.....	48
<b>4</b>	<b>ALGORITMOS GENÉRICOS .....</b>	<b>53</b>
4.1	Algoritmo genérico para a matriz de inércia .....	53
4.2	Algoritmo para a geração das matrizes de coeficientes de atrito e constantes elásticas .....	55
4.3	Algoritmo para a geração do vetor Coriolis-Centrífugo .....	56
4.4	Algoritmo para a geração do vetor gravitacional .....	57
<b>5</b>	<b>MÉTODO DE NELDER-MEAD.....</b>	<b>59</b>
5.1	Métodos Simplex .....	59
5.2	Método de Nelder-Mead .....	59
5.3	Algoritmo de Nelder-Mead .....	61
5.4	Exemplo: Função de Himmelblau .....	64
<b>6</b>	<b>ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS .....</b>	<b>67</b>
6.1	O processo de minimização.....	67
6.2	Resultados das Simulações.....	72
<b>7</b>	<b>VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL .....</b>	<b>80</b>
7.1	Suporte Experimental.....	80
7.2	Identificação paramétrica .....	82
7.3	Simulação e Experimento.....	86
<b>8</b>	<b>CONCLUSÕES.....</b>	<b>90</b>

<b>9</b>	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>93</b>
----------	-------------------------	-----------



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Plataformas petrolíferas. Fonte: <a href="http://diariodopresal.wordpress.com/petroleo-e-gas">http://diariodopresal.wordpress.com/petroleo-e-gas</a> . .	17
Figura 2.1 - Representação esquemática do cabo .....	25
Figura 2.2 - Estrutura flexível e sua representação discreta.....	26
Figura 2.3 - Representação da flexibilidade contínua com quatro elos .....	27
Figura 2.4 - Representação das alturas em um cabo com quatro elos .....	29
Figura 2.5 - Representação do sistema de referência para o segundo elo .....	31
Figura 2.6 - Representação do sistema de referência para o terceiro elo .....	32
Figura 2.7 - Catenária-Fonte: <a href="http://www.alfaconnection.pro.br/images/FOR020302a.gif">http://www.alfaconnection.pro.br/images/FOR020302a.gif</a> .....	35
Figura 2.8 - Representação gráfica de um ponto da catenária.....	36
Figura 3.1 - Posições dos centros de massa dos elos em uma estrutura com dois elos .....	41
Figura 3.2 - Representação geométrica do cabo com dois elos .....	42
Figura 3.3 - Representação geométrica do cabo com três elos.....	45
Figura 3.4 - Representação geométrica do cabo com quatro elos .....	48
Figura 5.1 - Iteração do Método de Nelder-Mead em $\mathfrak{R}^2$ ;.....	63
Figura 5.2 - Função de Himmelblau .....	65
Figura 5.3 - Algumas iterações do método de Nelder-Mead.....	66
Figura 6.1 - Catenária inicial: a) para 60 elos; b) para 12 elos. ....	69
Figura 6.2- Configuração espacial inicial do cabo, obtida a partir de uma curva catenária (escalas em m). ....	72
Figura 6.3 - Posição Y das articulações médias.....	73
Figura 6.4 - Posição X das articulações médias .....	74
Figura 6.5 - Posições das articulações 6 (modelo 12 elos) e 30 (modelo 60 elos). ....	75
Figura 6.6 - Posição Y das cargas terminais .....	76
Figura 6.7 - Posição X das cargas terminais.....	76
Figura 6.8 - Posição da carga terminal, considerando-se os modelos de 12 e 60 elos .....	77
Figura 6.9 - Animação com frames a cada 0.25 s, com o modelo 12 elos .....	78
Figura 6.10 - Configurações espaciais do cabo, de 0 a 1.75s (meio período), a cada 0.02s .....	79
Figura 7.1 - Configuração inicial do cabo e suas demarcações.....	81
Figura 7.2 - Layout do experimento .....	82
Figura 7.3 - Evolução do erro na minimização com a função “fminsearch.m” (MATLAB). ....	85
Figura 7.4 - Animação com os frames mostrando o movimento do cabo durante 1s: : simulação em azul e experimento em vermelho. ....	86

Figura 7.5 - Posições cartesianas do ponto médio e da carga terminal.....	87
Figura 7.6 - Erros nas posições do ponto médio e da carga terminal .....	88
Figura 7.7 - Coordenadas cartesianas do ponto médio e suas FFTs equivalentes .....	89

## LISTA DE TABELAS

Tabela 6.1 - Parâmetros adotados para o modelo de 60 elos.....	67
Tabela 6.2 - Parâmetros iniciais adotados para o modelo com 12 elos.....	68
Tabela 6.3 - Valores iniciais para os parâmetros de atrito e elasticidade do modelo com 12 elos ....	70
Tabela 6.4 - Diferenças médias.....	78
Tabela 7.1 - Parâmetros do experimento.....	81
Tabela 7.2 - Refinamento final do processo de minimização.....	84
Tabela 7.3 - Parâmetros do modelo simulado.....	85

## LISTA DE SÍMBOLOS

$a_i$	Alturas
$C$	Matriz dos coeficientes de atrito
$C_a$	Matriz dos coeficientes de atrito referente ao movimento de azimute
$c_c$	Condições cinemáticas
$C_e$	Matriz dos coeficientes de atrito referente ao movimento de elevação
$c_{ie}, i = 1, \dots, n$	Coefficiente de atrito do $i$ -ésimo elo
$C_t$	Matriz dos coeficientes de atrito referente ao movimento de torção
$E_c$	Energia Cinética
$E_{cR}$	Energia Cinética de rotação
$E_{cT}$	Energia Cinética de translação
$E_p$	Energia potencial
$\overline{Er}$	Vetor com a média das diferenças
$\overline{\overline{Er}}$	Média do vetor $\overline{Er}$
$Er_t$	Média das diferenças no instante de tempo
$\vec{F}$	Vetor Coriolis-Centrífugo
$f_i, i = 1, \dots, n$	Elementos do vetor Coriolis-Centrífugo
$g$	Aceleração da gravidade
$\vec{G}$	Vetor gravitacional
$g_i, i = 1, \dots, n$	Elementos do vetor gravitacional
$H$	Tensão da corda
$h_i, i = 1, \dots, n$	Altura total
$I$	Matriz de inércia
$I_a, I_e, I_t$	Sub-matrizes da matriz de inércia completa
$I_{ij}, i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n$	Elementos da Matriz de inércia
$I_{Rie}, i = 1, \dots, n$	Momento de inércia do $i$ -ésimo elo
$K$	Matriz das constantes elásticas
$K_a$	Matriz das constantes elásticas referente ao movimento de azimute
$K_e$	Matriz das constantes elásticas referente ao movimento de elevação
$k_{ie}, i = 1, \dots, n$	Constante elástica do $i$ -ésimo elo
$K_t$	Matriz das constantes elásticas referente ao movimento de torção

$L$	Lagrangiano do sistema
$l_i, i = 1, \dots, n$	Comprimento do elo
$m_{esp}$	Massa específica
$m_i, i = 1, \dots, n$	Massa do elo
$m_p$	Número de partículas
$N_a, N_e, N_t$	Sub-matrizes da matriz de inércia completa
$n$	Número de elos
$np$	Número de comparações
$P$	Ponto da curva catenária
$Pc1$	Vetor com as posições da carga terminal do modelo com 12 elos
$Pc2$	Vetor com as posições da carga terminal do modelo com 60 elos
$Pm1$	Vetor com as posições do ponto médio do modelo com 12 elos
$Pm2$	Vetor com as posições do ponto médio do modelo com 60 elos
$(p_{xi}, p_{yi}), i = 1, \dots, n$	Coordenadas do centro de massa do $i$ -ésimo elo no sistema de referência $X_{i-1}Y_{i-1}$
$Q$	Peso do cabo no vão da catenária
$q_i (i = 1, 2, \dots, n)$	Coordenadas generalizadas
$S$	Comprimento da corda
$s$	Segundo
$s_1$	Média das diferenças na coordenada $x$ dos pontos médios
$s_2$	Média das diferenças na coordenada $x$ das cargas terminais
$s_3$	Média das diferenças na coordenada $y$ dos pontos médios
$s_4$	Média das diferenças na coordenada $y$ das cargas terminais
$T$	Tensão
$T_a, T_e, T_t$	Sub-matrizes da matriz de inércia completa
$t$	Instante de tempo
$\vec{T}$	Vetor com os torques externos
$T_{\theta i}, i = 1, \dots, n$	Elementos do vetor de torques externos
$v_i$	$i$ -ésimo vértice reduzido
$\tilde{x}$	Coordenada $x$ referente ao modelo base
$\bar{x}$	Centróide
$(x_c, y_c)$	Coordenadas do centro de massa da carga terminal
$x_{ce}$	Vértice contraído externo



$x_{ci}$	Vértice contraído interno
$x_e$	Vértice expandido
$(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$	Coordenadas do centro de massa do $i$ -ésimo elo
$X_i Y_i, i = 1, \dots, n$	$i$ -ésimo sistema de referência
$x_r$	Vértice refletido
$X_0 Y_0$	Sistema de referência inicial
$W$	Peso da fração da corda
$\tilde{y}$	Coordenada $y$ referente ao modelo base

## LISTA DE SÍMBOLOS ESPECIAIS

$\alpha$	Multiplicador da matriz dos coeficientes de atrito
$\beta$	Multiplicador da matriz das constantes elásticas
$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right)$	Derivada total em relação ao tempo
$\frac{\partial L}{\partial \theta_i}$	Derivadas parciais do Lagrangeano
$\varrho$	Densidade do cabo
$\rho$	Coefficiente de reflexão
$\chi$	Coefficiente de expansão
$\gamma$	Coefficiente de contração
$\sigma$	Coefficiente de redução
$\dot{\theta}_{ie}$	Derivada em relação ao tempo das posições de elevação
$\theta_{ie}$	Ângulos de elevação de cada elo
$\vec{\theta}$	Vetor de estado com as posições angulares dos elos
$\dot{\vec{\theta}}$	Derivada primeira do vetor $\vec{\theta}$ em relação à $t$
$\ddot{\vec{\theta}}$	Derivada segunda do vetor $\vec{\theta}$ em relação à $t$

## LISTA DE ABREVIATURAS

SPF	Sistemas de Produção Flutuantes
ROV	Remotely Operated Vehicle
FFT	Fast Fourier Transform

# 1 INTRODUÇÃO

Com os tempos modernos, busca-se comodidade e facilidades, o que torna ainda mais intenso o estudo e desenvolvimento de sistemas que auxiliam na geração de energia, no transporte e nos serviços, tudo deve ser planejado desde o início da cadeia de produção. Nesta pesquisa, serão abordadas as estruturas flexíveis do tipo cabo, que estão presentes em diversas áreas, como por exemplo, Sistemas de Produção Flutuantes (SPF), conforme mostra a Figura 1.1, constituído por muitos elementos que integram o sistema como navios plataforma, plataforma fixa e semi-submersível, bem como veículos operados remotamente (ROVs - *Remotely Operated Vehicle*), os quais permitem manutenções e observações de estruturas subaquáticas.

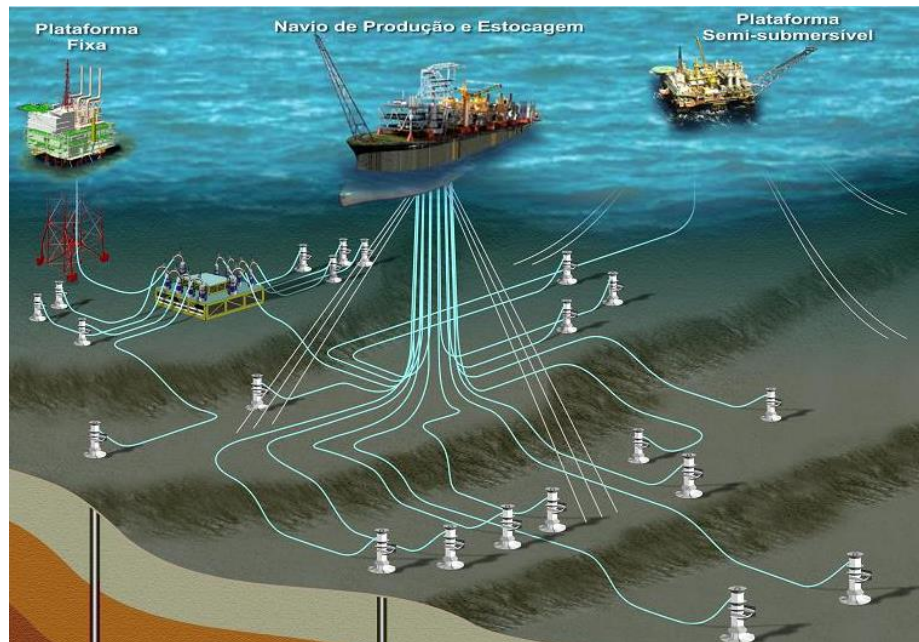


Figura 1.1 - Plataformas petrolíferas. Fonte: <http://diariodopresal.wordpress.com/petroleo-e-gas>.

Com isto, estudos têm sido realizados constantemente sobre a modelagem dinâmica de estruturas flexíveis do tipo cabo, que, além da complexidade devida às não linearidades e à flexibilidade no espaço tridimensional, têm-se, ainda, complexas interações sofridas pelo cabo com o meio no qual está inserido, aumentando assim a dificuldade de se desenvolver modelos que apresentem comportamento mais próximo da realidade física.

Na literatura há inúmeras abordagens de modelagem dessas estruturas a partir do Método dos Elementos Finitos (MEF), que consiste em um método numérico para análise de fenômenos físicos em meios contínuos, discretizando o sistema, a partir de vários elementos.

Esta dissertação utiliza a técnica de modelagem matemática conhecida como Formalismo Discreto, que também utiliza a teoria de Euler-Lagrange. Este formalismo foi proposto por [PEREIRA, 2010], para desenvolver a modelagem dinâmica de estruturas flexíveis do tipo cabo, partindo do fundamento principal, que é a suposição de que o cabo é formado por várias frações rígidas (elos) conectadas por articulações elásticas fictícias que permitem três movimentos distintos: elevação, azimute e torção, em um espaço tridimensional.

O desenvolvimento deste modelo tem complexidade diretamente proporcional ao número de elos que se leva em consideração, tornando-se basicamente inviável esse desenvolvimento para um número elevado de elos. Observando isto e a maneira de crescimento destas equações, [ZANELA, 2013] desenvolveu algoritmos genéricos que possibilitam a geração automática dos modelos, independentemente de quantos elos estão sendo considerados para representar a flexibilidade contínua do cabo.

Tomando-se como base trabalhos já realizados anteriormente, uma das principais contribuições deste projeto será a validação destes modelos já desenvolvidos, bem como a identificação paramétrica dos modelos. A validação se dará na forma de uma comparação e análise de erros e diferenças entre as simulações computacionais e os testes experimentais desenvolvidos em laboratório com o auxílio de recursos de vídeo para a identificação da configuração espacial do cabo.

Para que se possa usar um método matemático para realizar a comparação entre modelos, como também propõe este trabalho, se faz necessária uma validação do próprio método, mostrando a sua eficiência para este fim, conforme será apresentado nos capítulos seguintes. Com a validação do método de comparação realizada, pode-se usá-lo, então, para a identificação dos parâmetros de atrito e elasticidade das articulações da estrutura dinâmica experimental, fato que se constitui na principal contribuição desta dissertação.

## **1.1 Revisão bibliográfica**

Nesta seção, será feita uma revisão bibliográfica, buscando trabalhos e materiais de estudo que auxiliaram nas pesquisas iniciais e o desenvolvimento dos modelos referentes a este trabalho.

Os trabalhos de [PEREIRA, 2010] foram os pioneiros a trazer o Formalismo Discreto para a modelagem dinâmica de estruturas flexíveis do tipo cabo. Nestes estudos, o cabo foi dividido em frações rígidas, chamadas de elos, conectadas por articulações fictícias, utilizando o Formalismo de Euler-Lagrange para desenvolver o modelo dinâmico do cabo.



**F.A.Rochinha e P. Tallec (1990)***O método Lagrangeano aumentado no estudo de cabos umbilicais*

Este trabalho apresenta um modelo numérico para cabos umbilicais hiperelásticos que experimentam grandes deslocamentos e grandes rotações. O modelo mecânico resulta em um sistema não-linear, que é resolvido por um método de decomposição-coordenação via Lagrangeano Aumentado. Este tratamento possibilita a descrição do acoplamento existente entre flexão e torção em cabos submetidos à grandes deslocamentos.

**P. Warnitchai; Y. Fugino e T. Susumpow (1995)***A non-linear dynamics model for cables and its application a cable-structure System*

Neste trabalho os autores consideraram que os movimentos do cabo são separados em duas partes, os movimentos quase-estáticos, que são os deslocamentos do cabo que se move como um tendão elástico, devido a movimentos de apoio e, os movimentos modais, que são expressos como uma combinação linear dos modos não amortecidos do cabo com extremidades fixas. Estas equações que governam os movimentos não-lineares do cabo foram obtidas a partir das equações de Lagrange.

**A. K. Banerjee e V. N. Do (1995)***Deployment control of a cable connecting a ship to a underwater vehicle*

Este artigo apresenta o desenvolvimento de uma modelo de dinâmica de cabo subaquático e um sistema de controle realista de regulamentação e de recuperação de um veículo subaquático não tripulado amarrado à um navio. O cabo foi modelado como uma cadeia de hastes rígidas ligadas uma à outra por articulações, com dois graus de liberdade, que podem descrever a flexão do cabo em dois planos. Utilizaram um algoritmo de ordem  $n$  para a dinâmica do sistema com  $n$  hastes em movimento.

**P.H. Wang; R.F. Fung e M.J. Lee (1998)***Finite element analysis of a three-dimensional underwater cable with time-dependent length*

Neste artigo, os autores utilizaram o método dos elementos finitos para investigar as vibrações subaquáticas tridimensionais de um cabo geometricamente não-linear com uma carga na extremidade inferior em que o comprimento do cabo é variável.

**A. E. L. Pereira (1999)***Um estudo sobre a modelagem matemática de estruturas flexíveis*

Nesta dissertação foi desenvolvida e validada a técnica do formalismo discreto. Trata-se de um estudo sobre a modelagem dinâmica de uma estrutura flexível no plano, sendo esta estrutura articulada em uma extremidade e livre na outra. Neste trabalho a estrutura foi dividida em duas, três e quatro hastes rígidas conectadas por articulações elásticas, permitindo apenas o movimento de elevação no espaço bidimensional.

**M. A. Vaz e M. H. Patel (2000)***Three-dimensional behaviour of elastic marine cables in sheared currents*

Este trabalho apresenta uma formulação que descreve a geometria elástica de um cabo em termos de dois ângulos, azimute e elevação, que estão relacionadas com as coordenadas cartesianas pela compatibilidade das relações geométricas. Combinaram estas relações com as equações de equilíbrio do cabo para obter um sistema de equações diferenciais não-lineares, sendo este integrado numericamente pelos métodos de Runge-Kutta de quarta e quinta ordens e apresentam os resultados para tensão, ângulos, geometria e alongamento no cabo, para três exemplos: a instalação de um cabo de fibra óptica marinha, a análise estática de uma linha de amarração em águas profundas e a resposta de um cabo de telecomunicações para um perfil de corrente multi-direcional.

**C.C. Machado; A.E.L. Pereira; S.C.P. Gomes; A.L. de Bortoli (2002)***Um Novo Algoritmo para Modelagem Dinâmica de Manipuladores Flexíveis*

Neste artigo propõe-se um novo algoritmo para determinar de forma bastante simplificada, as equações diferenciais da dinâmica de uma estrutura do tipo manipulador com um único elo flexível. O algoritmo foi desenvolvido de modo que simplifique totalmente a obtenção do modelo para qualquer número de modos flexíveis considerados, além de introduzir modificações, em relação ao formalismo discreto original, que aumentam a precisão do modelo discreto. Desenvolve-se ainda funções de transferência analíticas para este problema específico, as quais são importantes para a validação do modelo discreto proposto na forma de um algoritmo.

**L.A. Isoldi; M.A.V. dos Santos (2003)***Análise Numérica da Dinâmica de Cabos Altamente Extensíveis*

Neste artigo foi implementado computacionalmente a solução de um sistema de equações capaz de descrever o movimento de cabos extensíveis em ruptura. Foi utilizado um sistema local e

um sistema global de referência. Empregou-se os parâmetros de Euler para representar a rotação relativa entre estes sistemas de coordenadas, onde evitou-se a singularidade associada aos ângulos de Euler. Foi necessária ainda a inclusão da rigidez flexional nas equações de governo, devido à possibilidade do esforço axial, em alguma parte do cabo, atingir um valor nulo ou negativo. Utilizou-se um esquema implícito de diferenças finitas para obter a solução numérica das equações de governo. Este modelo numérico foi usado para analisar o comportamento dinâmico de um cabo sintético durante e após sofrer uma ruptura. Observou-se ainda que a tração estática inicial do cabo é um fator determinante, e que um tempo de ruptura maior possibilita uma melhor dissipação de energia ao longo do cabo, tornando-o menos destrutivo que um cabo que se rompe rapidamente.

#### **L.R. dos Santos (2007)**

##### *Modelagem não-linear da dinâmica de cabos submarinos*

Nesta tese, o autor utilizou de um código para simular o comportamento de estruturas sujeitas a diversos tipos de solicitações como as devidas ao movimento das plataformas que as sustentam e também as forças hidrodinâmicas de arrasto decorrentes da ação das correntes marinhas. Esta estrutura é descrita por um mapeamento definido pela posição espacial dos pontos materiais pertencentes a uma curva definida como a linha dos centróides do corpo, e por uma base de diretores associada a cada ponto desta curva que define a orientação relativa de cada seção transversal.

#### **D.C.S. Cordovés (2008)**

##### *Análise de Confiabilidade Estrutural de Cabos Umbilicais*

Esta dissertação propôs um modelo para avaliar a confiabilidade estrutural do cabo umbilical, levando em consideração os mecanismos de falha por escoamento e por fadiga mecânica do mesmo. Foram consideradas tensões originadas pelos carregamentos das ondas do mar atuantes no cabo umbilical durante sua vida em uso, assim como a geometria e as propriedades mecânicas das armaduras de tração utilizadas nos umbilicais da plataforma. O modelo do cabo umbilical foi feito pelo método dos Elementos Finitos, e através dessa formulação, determinou-se o histórico de tensões atuantes na estrutura, estimou-se as funções de densidade de probabilidade das tensões estática e alternada corrigidas para curto e longo prazo, as quais caracterizam o carregamento atuante provocado pelas ondas.

**A.E.L. Pereira (2010)***O Método da Decomposição de Adomian Aplicado à Interação Fluido-Estrutura de um Cabo*

Nessa tese investigou-se a interação fluido-estrutura de um cabo submerso em um fluido, feita a partir do acoplamento entre a modelagem da dinâmica do cabo com o movimento do fluido. Na modelagem dinâmica do cabo criou-se um formalismo discreto, que tem como base o formalismo de Euler-Lagrange. O formalismo discreto é criado para a obtenção das equações de movimento de cabos umbilicais, divididos em elos rígidos conectados por articulações elásticas fictícias e permitindo movimentos tridimensionais. Para o movimento de fluido propõe-se o escoamento sobre o cilindro circular, obtendo-se as soluções analíticas das equações de Navier-Stokes através do Método da decomposição de Adomian.

**G. R. Di Marzo (2010)***Aplicação do Método dos Elementos Finitos na Análise de Tensões Induzidas em Cabos Umbilicais*

Nessa presente dissertação visa a aplicação de metodologias de análise de tensões induzidas em cabos de sinal de cabos umbilicais a partir da utilização do Método dos Elementos Finitos. O objetivo da aplicação é avaliar as tensões induzidas nos condutores de sinal a partir do acoplamento mútuo de fluxo magnético originados das correntes dos circuitos de potência do cabo umbilical. Foram apresentados modelos de condutores elétricos com ênfase no detalhamento geométrico, simplificações consideradas, adoção de parâmetros de suporte e condições de contorno. A avaliação das tensões induzidas nos condutores de sinal foi realizada tanto para simulações bidimensionais como para simulações tridimensionais.

**I.B.P. Rocha (2013)***Modelagem matemática de cabos umbilicais e veículos subaquáticos não tripulados*

Esta dissertação propõe um formalismo matemático que torne possível simular as duas dinâmicas, do cabo e do ROV, simultaneamente, onde o modelo do veículo é desenvolvido considerando a interação entre veículo e o meio aquático e a ação dos propulsores. A perturbação provocada pelo cabo é modelada a partir de um formalismo que trata a flexibilidade contínua do cabo aproximada de forma discreta e o ROV passa a ser a carga terminal do cabo, preso a sua extremidade livre, porém, com sua própria dinâmica.

**A. M. S. Gonçalves (2013)**

*O Problema de Min-max-min com Restrições Pelo Método de Nelder-mead*

Esta tese apresenta a resolução de um problema de *min-max-min* com restrições utilizando o Método de Nelder-Mead onde o método é reiniciado com novos valores iniciais na tentativa de busca de um mínimo global. Para a construção dos novos pontos de partida do método, a proposta apresentada neste trabalho são os pontos de uma curva de Lissajous. Esta modelagem pode ser vista como a localização em uma região  $S$  de  $n$  centros. Pode ocorrer que um ou mais destes centros fiquem localizados fora da região  $S$ . Para resolver este problema, é proposto o acréscimo de uma função de penalização à função objetivo, com a intenção de colocar os centros dentro da região  $S$ .

## **1.2 Objetivos**

### **1.2.1. Objetivo Geral**

A presente dissertação tem como objetivo geral a identificação dos parâmetros de atrito e de elasticidade do modelo dinâmico do cabo, a partir de um método de minimização de erros determinado pela diferença de posições dos elos em duas simulações diferentes (uma com 12 e outra com 60 elos) como forma de validação deste método e, posteriormente empregá-lo na identificação de parâmetros utilizando dados experimentais.

### **1.2.2. Objetivos Específicos**

Inicialmente, realizar pesquisas na literatura a respeito de trabalhos e contribuições que abordem formas e técnicas distintas sobre a modelagem dinâmica de estruturas flexíveis do tipo cabo, tais como Métodos dos Elementos Finitos e o Método da Formulação Discreta.

Realizar uma análise do comportamento do modelo dinâmico através de simulações computacionais considerando que a estrutura flexível foi dividida em 60 elos, sendo esta estrutura a base para a realização das comparações entre os modelos para que então possa ser realizada, por fim, a identificação dos parâmetros de atrito e elasticidade do modelo com 12 elos, utilizando-se de uma minimização dos erros em posição entre os modelos dinâmicos com 12 e 60 elos.

Uma vez validada a técnica de minimização empregada na identificação paramétrica pode-se cumprir um dos principais objetivos da dissertação, consistindo na utilização da mesma técnica



experimentalmente.

Os modelos dinâmicos já desenvolvidos em trabalhos anteriores bem como as simulações e o método de minimização de erros são implementados utilizando-se o software MATLAB<sup>®</sup>, cujos resultados serão analisados de forma qualitativa e quantitativa, a fim de se avaliar a consistência do método de minimização, para que este possa ser empregado em trabalhos futuros.

### **1.3 Roteiro do Trabalho**

Nesta seção é apresentada a organização da dissertação que está dividida em seis capítulos. O presente Capítulo apresenta uma introdução geral do trabalho com explicações introdutórias da linha de pesquisa, bibliografia utilizada e contribuições existentes na área e objetivos a serem alcançados.

No Capítulo 2 apresentam-se os fundamentos teóricos para o desenvolvimento dos modelos dinâmicos das estruturas flexíveis do tipo cabo.

No Capítulo 3 são mostrados os modelos dinâmicos dos cabos para os casos de dois, três e quatro elos.

O Capítulo 4 apresenta o desenvolvimento dos algoritmos genéricos para a geração automática dos modelos dinâmicos no plano.

O Capítulo 5 explana o método simplex de Nelder-Mead empregado na realização da minimização de erros e identificação de parâmetros.

O Capítulo 6 mostra o processo de minimização de erros, identificação de parâmetros e os resultados dessa minimização.

No Capítulo 7 será apresentada a validação experimental do método de identificação de parâmetros.

No Capítulo 8 é dedicado às conclusões e às considerações finais do trabalho, seguido das referências bibliográficas para o desenvolvimento do trabalho.

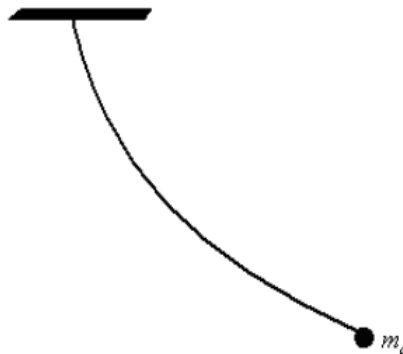
## 2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

No presente capítulo, será apresentada, a partir do formalismo de Euler-Lagrange, a modelagem matemática para a dinâmica de estruturas flexíveis do tipo cabo, acoplada a uma estrutura fixa em sua extremidade superior e livre em sua outra extremidade, onde será acoplada uma carga terminal de massa  $m_c$ .

As equações do modelo dinâmico são obtidas a partir da abordagem discreta, onde considera-se que o cabo (estrutura contínua) esteja dividido em partes rígidas (elos) e conectados por elementos flexíveis, denominados de articulações elásticas fictícias [PEREIRA, 2010].

### 2.1 Formalismo Discreto

Considerou-se um cabo fixo na extremidade superior a uma base fixa, contendo na outra extremidade uma massa  $m_c$ , conforme mostra a Figura 2.1.



*Figura 2.1 - Representação esquemática do cabo*

Este tipo de estrutura pode ser utilizada em várias situações práticas, como amarrações de plataformas petrolíferas, ancoragem de navios, cabos para rebocadores de embarcações, cabos umbilicais de ROV, etc.

Neste sistema, os cabos podem realizar movimentos de rotação e movimentos de translação no espaço. Devido a isto, se faz necessário estabelecer transformações entre os sistemas de coordenadas [ISOLDI, 2002].

Muito importante nas equações de Euler-Lagrange são as coordenadas generalizadas independentes fundamentais no sistema de equações. Em geral, o movimento de um sistema de  $m_p$  partículas sujeitas a condições cinemáticas  $c_c$  pode ser descrito unicamente por  $n$  coordenadas independentes  $q_i (i = 1, 2, \dots, n)$ , onde

$$n = 3m_p - c_c \quad (2.1)$$

é o número de graus de liberdade do sistema. O número de graus de liberdade do sistema coincide com o número mínimo de coordenadas independentes necessárias para descrevê-lo. As  $n$  coordenadas  $q_1, q_2, \dots, q_n$  são chamadas de coordenadas generalizadas [MEIROVITCH, 1970].

Na modelagem discreta, este cabo de flexibilidade contínua foi dividido em  $n$  partes rígidas de comprimento  $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$ , que são denominados *elos*, conforme Figura 2.2

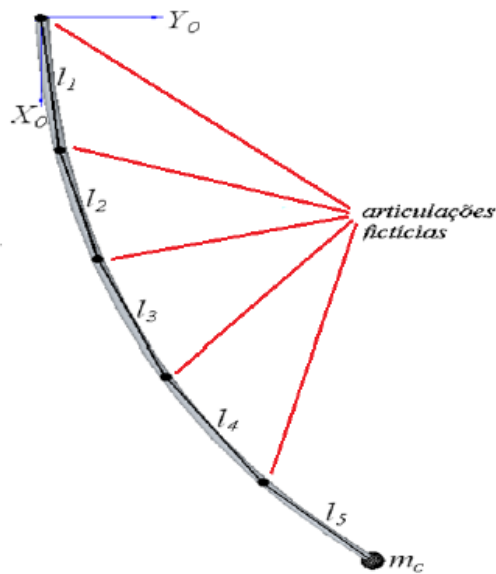


Figura 2.2 - Estrutura flexível e sua representação discreta

Na Figura 2.3, com maior descrição do sistema, pode-se observar a descrição do cabo, onde identifica-se, tanto o número de graus de liberdade quanto às coordenadas generalizadas do sistema, onde cada elo apresenta movimentos de elevação. Os elos têm massas concentradas no centro de massa de coordenadas  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n)$ . Essas massas são determinadas por  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ , respectivamente, e  $(x_c, y_c)$  são as coordenadas do centro de massa da carga terminal na extremidade final do cabo, representada por  $m_c$ . Em cada articulação do cabo são considerados movimentos de elevação do respectivo elo, onde  $\theta_{ie}$  corresponde ao ângulo de elevação, na  $i$ -ésima articulação do cabo, conforme mostra a Figura 2.3.

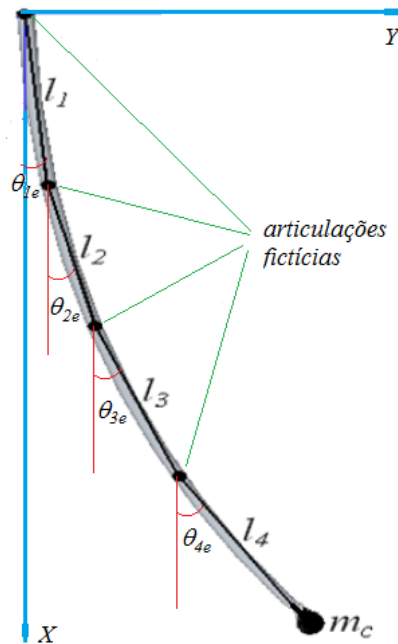


Figura 2.3 - Representação da flexibilidade contínua com quatro elos

Por tratar-se de um modelo bidimensional em cada articulação é considerada apenas uma constante elástica, ou seja, na  $i$ -ésima articulação é considerada a constante elástica  $k_{ie}$ .

O Lagrangeano do sistema é dado por:

$$L = E_c - E_p \quad (2.2)$$

onde  $E_c$  é a energia cinética e  $E_p$  é a energia potencial do sistema. A energia cinética, por sua vez, é definida por:

$$E_c = E_{cR} + E_{cT} \quad (2.3)$$

onde  $E_{cR}$  é a energia cinética devido ao movimento de rotação e  $E_{cT}$  é a energia cinética referente ao movimento de translação do cabo.

Em [PEREIRA, 2010] considera-se os ângulos de azimute, elevação e torção do cabo por se tratar do desenvolvimento de um modelo tridimensional. Neste trabalho considera-se apenas os ângulos de elevação, desconsiderando-se os ângulos de azimute e torção. A energia cinética devido ao movimento de rotação é dada por:

$$E_{cR} = \frac{1}{2} I_{R_{1e}} \dot{\theta}_{1e}^2 + \frac{1}{2} I_{R_{2e}} \dot{\theta}_{2e}^2 + \frac{1}{2} I_{R_{3e}} \dot{\theta}_{3e}^2 + \dots + \frac{1}{2} I_{R_{ne}} \dot{\theta}_{ne}^2 \quad (2.4)$$

Onde  $\theta_{1e}, \theta_{2e}, \theta_{3e}, \dots, \theta_{ne}$  são os ângulos de elevação nas articulações e  $I_{R_{1e}}, I_{R_{2e}}, I_{R_{3e}}, \dots, I_{R_{ne}}$  são os momentos de inércia de elo da estrutura. Pode-se observar, ainda, que a energia cinética rotacional poderia ter sido negligenciada pois, de fato, a energia cinética de translação é muito mais significativa que a de rotação e foi dada ênfase à energia cinética de translação neste formalismo de modelagem.

A energia cinética de translação do cabo é dada por [PEREIRA, 2010]:

$$E_{cT} = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} m_3 (\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2) + \dots + \frac{1}{2} m_n (\dot{x}_n^2 + \dot{y}_n^2) + \frac{1}{2} m_c (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) \quad (2.5)$$

onde  $\frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2)$ ,  $\frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$ ,  $\frac{1}{2} m_3 (\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2)$ , ...,  $\frac{1}{2} m_n (\dot{x}_n^2 + \dot{y}_n^2)$  e  $\frac{1}{2} m_c (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2)$  são as energias cinéticas de translação referentes ao movimento das massas  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$  dos elos e da massa  $m_c$  da carga na extremidade livre do cabo, respectivamente.

A energia potencial é definida por [PEREIRA, 2010]:

$$E_p = \frac{1}{2} k_{1e} \theta_{1e}^2 + \frac{1}{2} k_{2e} (\theta_{2e} - \theta_{1e})^2 + \frac{1}{2} k_{3e} (\theta_{3e} - \theta_{2e})^2 + \dots + \frac{1}{2} k_{ne} (\theta_{ne} - \theta_{(n-1)e})^2 + m_1 g h_1 + m_2 g h_2 + m_3 g h_3 + \dots + m_n g h_n \quad (2.6)$$

onde  $\theta_{1e}, \theta_{2e}, \theta_{3e}, \dots, \theta_{ne}$  são os ângulos de elevação nas articulações,  $k_{1e}, k_{2e}, k_{3e}, \dots, k_{ne}$  são as constantes elásticas nas articulações relativas aos ângulos de elevação e  $m_1 g h_1 + m_2 g h_2 + m_3 g h_3 + \dots + m_n g h_n$  são as parcelas de energia potencial gravitacional, onde  $h_1, h_2, h_3, \dots, h_n$  são alturas dos centros de massa dos elos definidas por:



$$\begin{aligned}
h_1 &= \frac{a_1}{2} \rightarrow h_1 = \frac{l_1}{2}(1 - \cos \theta_{1e}) \\
h_2 &= a_1 + \frac{a_2}{2} \rightarrow h_2 = a_1 + \frac{l_2}{2}(1 - \cos \theta_{2e}) \\
h_3 &= a_1 + a_2 + \frac{a_3}{2} \rightarrow h_3 = a_1 + a_2 + \frac{l_3}{2}(1 - \cos \theta_{3e}) \\
&\vdots \\
h_n &= \sum_{i=1}^{n-1} a_i + \frac{a_n}{2} \rightarrow h_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i + \frac{l_n}{2}(1 - \cos \theta_{ne})
\end{aligned} \tag{2.7}$$

onde,  $a_0 = 0, a_1 = l_1(1 - \cos \theta_{1e}), a_2 = l_2(1 - \cos \theta_{2e}), \dots, a_n = l_n(1 - \cos \theta_{ne})$  conforme definições vistas na Figura 2.4

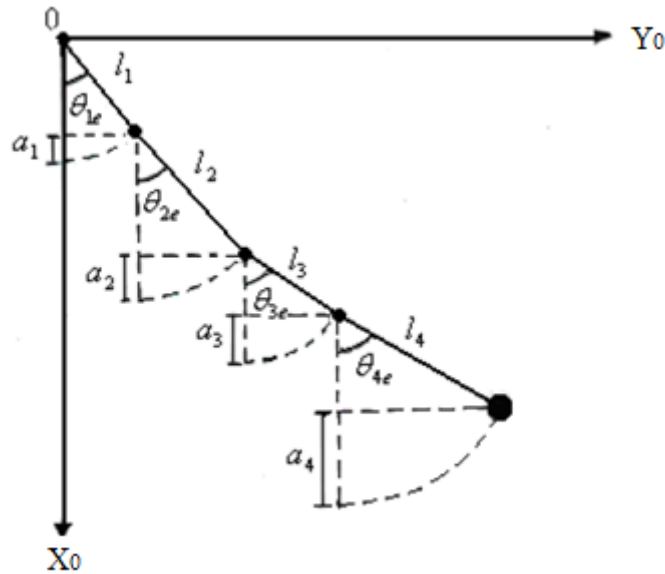


Figura 2.4 - Representação das alturas em um cabo com quatro elos

O Lagrangeano do sistema é obtido utilizando-se (2.1) e de (2.3), (2.4) e (2.5), na forma:

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2} I_{R_{1e}} \dot{\theta}_{1e}^2 + \frac{1}{2} I_{R_{2e}} \dot{\theta}_{2e}^2 + \frac{1}{2} I_{R_{3e}} \dot{\theta}_{3e}^2 + \dots + \frac{1}{2} I_{R_{ne}} \dot{\theta}_{ne}^2 + \\
&+ \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} m_3 (\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2) + \dots + \frac{1}{2} m_n (\dot{x}_n^2 + \dot{y}_n^2) + \\
&+ \frac{1}{2} m_c (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) - \frac{1}{2} k_{1e} \theta_{1e}^2 - \frac{1}{2} k_{2e} (\theta_{2e} - \theta_{1e})^2 - \frac{1}{2} k_{3e} (\theta_{3e} - \theta_{2e})^2 - \dots + \\
&- \frac{1}{2} k_{ne} (\theta_{ne} - \theta_{(n-1)e})^2 - m_1 g h_1 - m_2 g h_2 - m_3 g h_3 - \dots - m_n g h_n
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Então, com (2.7) e considerando-se  $\theta_0 = 0$ , tem-se:

$$L = \sum_{b=1}^n \left\{ \frac{1}{2} I_{R_{be}} (\dot{\theta}_{be})^2 + \frac{1}{2} m_b (\dot{x}_b^2 + \dot{y}_b^2) - \frac{1}{2} K_{be} (\theta_{be} - \theta_{(b-1)e})^2 + \right. \\ \left. - m_b g \left[ \sum_{i=1}^{b-1} a_i + \frac{l_b}{2} (1 - \cos \theta_{be}) \right] \right\} + \frac{1}{2} m_c (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) \quad (2.9)$$

onde  $n$  é o número de elos.

As coordenadas dos centros de massa das partes rígidas e da carga terminal são determinadas a partir de transformações homogêneas. A primeira articulação é colocada na origem do sistema de referência  $X_0Y_0$  e o ângulo de elevação  $\theta_{1e}$  é considerado de acordo com a Figura 2.4. As coordenadas do centro de massa do primeiro elo são:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{l_1}{2} \cos \theta_{1e} = p_{x1} \\ y_1 = \frac{l_1}{2} \sin \theta_{1e} = p_{y1} \end{cases} \quad (2.10)$$

onde  $(p_{x1}, p_{y1})$  são as coordenadas do centro de massa do primeiro elo no sistema de referência  $X_0Y_0$ .

A partir da Figura 2.4 pode-se concluir que as coordenadas da segunda articulação fictícia  $(x_{0_1}, y_{0_1})$  em relação ao sistema de referência  $X_0Y_0$  são:

$$\begin{cases} x_{0_1} = l_1 \cos \theta_{1e} \\ y_{0_1} = l_1 \sin \theta_{1e} \end{cases} \quad (2.11)$$

Para determinar as posições da articulação seguinte e do centro de massa do próximo elo, um novo sistema de referência  $X_1Y_1$  é incorporado na estrutura flexível, como mostra a Figura 2.5.

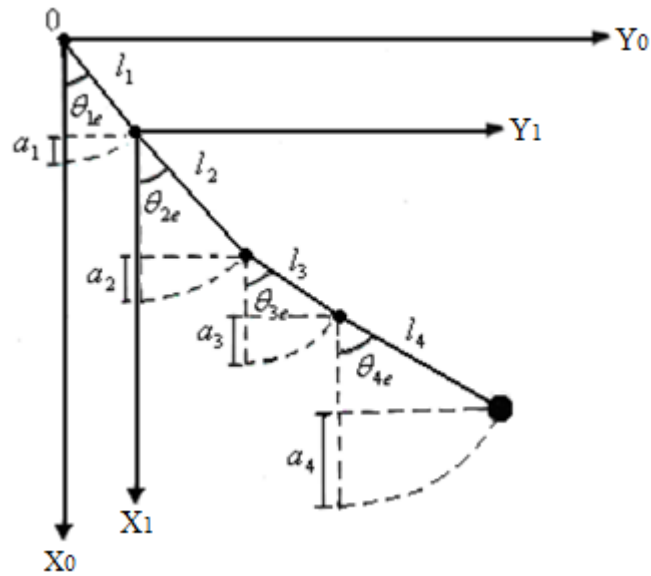


Figura 2.5 - Representação do sistema de referência para o segundo elo

Agora, tomando como base o referencial  $X_1Y_1$  pode-se determinar as coordenadas do centro de massa do segundo elo, que são:

$$\begin{cases} p_{x2} = \frac{l_2}{2} \cos \theta_{2e} \\ p_{y2} = \frac{l_2}{2} \sin \theta_{2e} \end{cases} \quad (2.12)$$

Conhecendo-se as coordenadas da segunda articulação e a posição do centro de massa do segundo elo no referencial  $X_1Y_1$ , basta somar essas duas coordenadas para se obter a posição do centro de massa do segundo elo em relação ao referencial  $X_0Y_0$ .

$$\begin{cases} x_2 = x_{01} + p_{x2} \\ y_2 = y_{01} + p_{y2} \end{cases} \quad (2.13)$$

Substituindo (2.11) e (2.12) em (2.13) obtêm-se as coordenadas do centro de massa do segundo elo no referencial  $X_0Y_0$ , que são:

$$\begin{cases} x_2 = l_1 \cos \theta_{1e} + \frac{l_2}{2} \cos \theta_{2e} \\ y_2 = l_1 \sin \theta_{1e} + \frac{l_2}{2} \sin \theta_{2e} \end{cases} \quad (2.14)$$

Considerando-se o próximo elo e colocando-se o sistema de referência  $X_2Y_2$  na terceira articulação fictícia, as coordenadas desta terceira articulação fictícia em relação ao referencial  $X_1Y_1$

são:

$$\begin{cases} x_{1_2} = l_2 \cos \theta_{2e} \\ y_{1_2} = l_2 \sin \theta_{2e} \end{cases} \quad (2.15)$$

De forma análoga, observa-se que as coordenadas da terceira articulação são determinadas a partir da segunda, ou seja, as coordenadas da terceira articulação no referencial  $X_0Y_0$  são dadas como a soma da posição da articulação anterior (no referencial  $X_0Y_0$ ) e a posição da articulação no referencial  $X_1Y_1$ , ou seja,

$$\begin{cases} x_{0_2} = x_{0_1} + x_{1_2} \\ y_{0_2} = y_{0_1} + y_{1_2} \end{cases} \quad (2.16)$$

Substituindo (2.11) e (2.15) em (2.16) obtêm-se as coordenadas da terceira articulação em relação ao referencial  $X_0Y_0$ , dadas por:

$$\begin{cases} x_{0_2} = l_1 \cos \theta_{1e} + l_2 \cos \theta_{2e} \\ y_{0_2} = l_1 \sin \theta_{1e} + l_2 \sin \theta_{2e} \end{cases} \quad (2.17)$$

Coloca-se o sistema de referência  $X_2Y_2$  na terceira articulação  $(x_{0_2}, y_{0_2})$  para que a partir deste se determine as coordenadas do centro de massa do terceiro elo e da quarta articulação, conforme mostra a Figura 2.6.

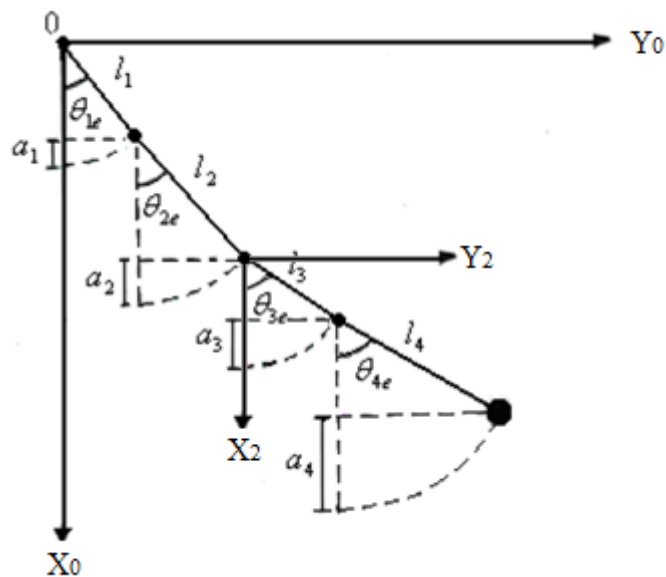


Figura 2.6 - Representação do sistema de referência para o terceiro elo

Seguindo de forma semelhante aos casos anteriores, tem-se que as coordenadas do centro de massa do terceiro elo em relação ao referencial  $X_2Y_2$ , ou seja,  $(p_{x3}, p_{y3})$  são descritas na forma:

$$\begin{cases} p_{x3} = \frac{l_3}{2} \cos \theta_{3e} \\ p_{y3} = \frac{l_3}{2} \sin \theta_{3e} \end{cases} \quad (2.18)$$

Sendo assim, a posição do centro de massa do terceiro elo em relação ao sistema de referência  $X_0Y_0$  corresponde à soma das coordenadas da posição da terceira articulação e das coordenadas de posição do centro de massa do terceiro elo com relação ao referencial  $X_2Y_2$ , ou seja,

$$\begin{cases} x_3 = x_{0_2} + p_{x3} \\ y_3 = y_{0_2} + p_{y3} \end{cases} \quad (2.19)$$

Substituindo (2.17) e (2.18) em (2.19) têm-se as coordenadas do centro de massa do terceiro elo em relação ao referencial  $X_0Y_0$  como

$$\begin{cases} x_3 = l_1 \cos \theta_{1e} + l_2 \cos \theta_{2e} + \frac{l_3}{2} \cos \theta_{3e} \\ y_3 = l_1 \sin \theta_{1e} + l_2 \sin \theta_{2e} + \frac{l_3}{2} \sin \theta_{3e} \end{cases} \quad (2.20)$$

A técnica de se obter as coordenadas da quarta articulação no referencial  $X_0Y_0$  é basicamente a mesma utilizada nas articulações anteriores. As coordenadas da quarta articulação com relação ao referencial  $X_2Y_2$  são descritas como:

$$\begin{cases} x_{2_3} = l_3 \cos \theta_{3e} \\ y_{2_3} = l_3 \sin \theta_{3e} \end{cases} \quad (2.21)$$

Sendo assim, para determinar as coordenadas da posição da quarta articulação no referencial  $X_0Y_0$  basta fazer a soma das coordenadas da posição da articulação anterior  $(x_{0_2}, y_{0_2})$  e das coordenadas da quarta articulação em relação ao referencial  $X_2Y_2$   $(x_{2_3}, y_{2_3})$ , obtendo-se então:

$$\begin{cases} x_{0_3} = x_{0_2} + x_{2_3} \\ y_{0_3} = y_{0_2} + y_{2_3} \end{cases} \quad (2.22)$$

Substituindo (2.17) e (2.21) em (2.22), obtêm-se as seguintes coordenadas para a posição da quarta articulação que também determina a posição de origem do referencial  $X_3Y_3$ , que são:

$$\begin{cases} x_{0_3} = l_1 \cos \theta_{1e} + l_2 \cos \theta_{2e} + l_3 \cos \theta_{3e} \\ y_{0_3} = l_1 \sin \theta_{1e} + l_2 \sin \theta_{2e} + l_3 \sin \theta_{3e} \end{cases} \quad (2.23)$$

Usando-se um procedimento análogo ao que foi mostrado para as coordenadas dos centros de massa para a primeira, segunda e terceira partes rígidas (elos), são obtidas as coordenadas da posição do centro de massa do  $k$ -ésimo elo e as coordenadas da carga terminal, respectivamente, como sendo:

$$\begin{cases} x_k = \sum_{i=1}^{k-1} (l_i \cos \theta_{ie}) + \frac{l_k}{2} \cos \theta_{ke} \\ y_k = \sum_{i=1}^{k-1} (l_i \sin \theta_{ie}) + \frac{l_k}{2} \sin \theta_{ke} \end{cases} \quad (2.24)$$

$$\begin{cases} x_c = \sum_{i=1}^n (l_i \cos \theta_{ie}) \\ y_c = \sum_{i=1}^n (l_i \sin \theta_{ie}) \end{cases} \quad (2.25)$$

onde  $n$  representa o número de elos adotado para o modelo.

Então, de (2.24) e (2.25) obtêm-se as derivadas destas coordenadas em relação ao tempo, que são dadas, respectivamente, por:

$$\begin{cases} \dot{x}_k = \sum_{i=1}^{k-1} (-l_i \sin \theta_{ie} \dot{\theta}_{ie}) - \frac{l_k}{2} \sin \theta_{ke} \dot{\theta}_{ke} \\ \dot{y}_k = \sum_{i=1}^{k-1} (l_i \cos \theta_{ie} \dot{\theta}_{ie}) + \frac{l_k}{2} \cos \theta_{ke} \dot{\theta}_{ke} \end{cases} \quad (2.26)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_c = \sum_{i=1}^n (-l_i \operatorname{sen} \theta_{ie} \dot{\theta}_{ie}) \\ \dot{y}_c = \sum_{i=1}^n (l_i \operatorname{cos} \theta_{ie} \dot{\theta}_{ie}) \end{cases} \quad (2.27)$$

## 2.2 A curva Catenária

O problema de determinar a verdadeira forma da catenária foi proposto por James Bernoulli, em 1690. Galileu lançou, bem antes, a hipótese de que a curva era uma parábola, mas Huygens mostrou, em 1646 (com apenas 17 anos) utilizando principalmente raciocínios físicos, que tal hipótese não estava correta. Ele, no entanto, não lançou qualquer luz sobre qual forma poderia ter. O desafio de Bernoulli produziu resultados rápidos, pois, em 1691 Leibniz, (Huygens com 62 anos) e o irmão de James, Jonh, publicaram soluções independentes do problema, Jonh Bernoulli ficou extremamente satisfeito por ter tido êxito em resolver o problema, ao contrário de seu irmão, que não tinha conseguido. Entretanto, James alcançou um feito equivalente provando no mesmo ano de 1691 que, de todas as possíveis formas que um fio suspenso entre dois pontos fixos pode ter, a catenária temo centro de gravidade mais baixo e, por tanto, a menor energia potencial. Foi uma descoberta muito significativa, pois, tratou-se da primeira manifestação da ideia profunda de que, de alguma maneira misteriosa, as configurações reais da natureza são aquelas que minimizam a energia potencial [SIMMONS, 1987]. A Figura 2.7 mostra um cabo com a característica de possuir pesos  $W$  iguais para comprimentos iguais.

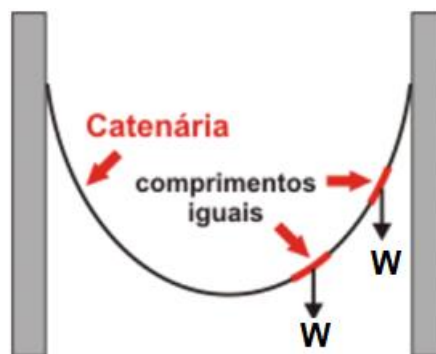


Figura 2.7 - Catenária-Fonte:<http://www.alfaconnection.pro.br/images/FOR020302a.gif>

Considera-se um sistema de coordenadas com origem no ponto mais baixo da curva, sendo a curva situada no plano  $xy$  e o eixo  $y$  perpendicular à curva considerada. Quando atingido o

equilíbrio estático, o cabo ficará contido em um plano, o vertical que passa por suas extremidades, como mostra a Figura 2.8.

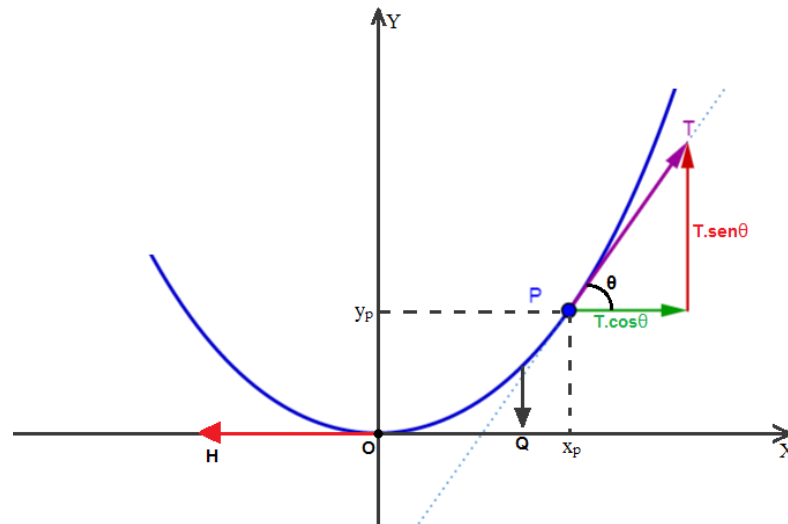


Figura 2.8 - Representação gráfica de um ponto da catenária

Considera-se  $P(x_p, y_p)$  um ponto qualquer do cabo. Considera-se agora o arco  $OP$  que, em razão do equilíbrio estático, encontra-se submetido à ação das forças seguintes:

$T$  é a tensão que age de forma tangente em  $P$  e forma um ângulo  $\theta$  com o eixo  $x$ .

$H$  é a tensão da corda no ponto  $O$ , agindo de forma horizontal.

$Q$  é o peso do cabo entre  $OP$ , cujo comprimento é  $S$  e atua verticalmente.

Considera-se que todos os pontos do cabo têm o mesmo peso, diferente disto, não se pode considerar que seja uma catenária. O cabo encontra-se em equilíbrio estático, logo todas as forças resultantes que atuam sobre cada ponto são iguais a zero.

A força de tensão varia ao longo do cabo e tem direção sempre tangente à curva em cada ponto do cabo. Portanto o cabo tende a estatizar seguindo as direções da tensão.

O equilíbrio estático garante que a soma dessas três forças que agem sobre o trecho  $OP$  é nula, ou seja:

$$H + T + Q = 0 \quad (2.28)$$



Decompondo a equação de equilíbrio sobre os eixos coordenados, tem-se:

$$-H + T \cos \theta = 0 \quad (2.29)$$

$$-Q + T \sin \theta = 0 \quad (2.30)$$

Da razão entre as equações (2.29) e (2.30) temos:

$$\tan \theta = \frac{Q}{H} \quad (2.31)$$

Conhecendo-se a densidade linear do cabo  $\rho$  (peso por unidade de comprimento), o peso do arco  $S$  pode ser escrito como  $Q = \rho S$  e, portanto,

$$\tan \theta = \frac{\rho}{H} S \quad (2.32)$$

Observa-se que a densidade linear  $\rho$  e a tensão  $H$ , são constantes e, portanto pode-se assumir que  $\frac{\rho}{H} = k$ .

Sabe-se que  $\tan \theta = \frac{dy}{dx}$ , então:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S}{k} \quad (2.33)$$

O comprimento do arco  $OP(s)$  é dado por:

$$S = \int_0^{x_p} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (2.34)$$

e assim,

$$\frac{dS}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (2.35)$$

Pode-se calcular  $\frac{dS}{dx}$  diferenciando-se ambos os lados da equação (2.33) em relação a  $x$ :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{k} \frac{dS}{dx} \quad (2.36)$$

Substituindo (2.36) em (2.35) tem-se a seguinte equação diferencial:

$$k \frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (2.37)$$

A equação (2.37) é denominada como a equação diferencial da catenária. Considerando-se  $\frac{dy}{dx} = p$ , tem-se:

$$k \frac{dp}{dx} = \sqrt{1 + p^2} \quad (2.38)$$

que resulta em uma equação diferencial de primeira ordem com variáveis separáveis:

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{dx}{k} \quad (2.39)$$

Integrando ambos os membros da equação (2.39), obtêm-se:

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \int \frac{dx}{k} \quad (2.40)$$

Sabe-se que:

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \ln(p + \sqrt{1 + p^2}) \quad (2.41)$$

Portanto, (2.40) assume a forma:

$$\ln(p + \sqrt{1 + p^2}) = \frac{x}{k} + c \quad (2.42)$$

Para  $x = 0$ , tem-se  $p(0) = y'(0) = 0$ . Logo,  $c = 0$  e a equação acima resulta em:

$$\ln(p + \sqrt{1 + p^2}) = \frac{x}{k} \quad (2.43)$$

A solução pode ser escrita como

$$p + \sqrt{1 + p^2} = e^{\frac{x}{k}} \quad (2.44)$$

ou ainda,

$$1 + p^2 = e^{\frac{2x}{k}} - 2p\sqrt{1 + p^2} - p^2 \quad (2.45)$$

Como  $e^{\frac{x}{k}} - p = \sqrt{1 + p^2}$ , substituindo em (2.45) tem-se:

$$p = \frac{e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}}{2} \quad (2.46)$$

Logo,

$$p = \sinh\left(\frac{x}{k}\right) \quad (2.47)$$

Como  $p = \frac{dy}{dx}$  e  $p = \frac{e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}}{2}$ , tem-se que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}}{2} \quad (2.48)$$

Integrando-se os ambos os lados,

$$\int dy = \frac{1}{2} \int \left( e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}} \right) dx \quad (2.49)$$

$$y(x) = \frac{k}{2} \left( e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}} \right) + c_1 \quad (2.50)$$

Para  $y(0) = 0$ , tem-se:

$$c_1 = -k \quad (2.51)$$

Chega-se à solução geral na forma:

$$y(x) = k \left( \frac{e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}}{2} \right) - k \quad (2.52)$$

Substituindo-se  $\cosh\left(\frac{x}{k}\right) = \frac{e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}}{2}$ , tem-se:

$$y(x) = k \left[ \cosh\left(\frac{x}{k}\right) - 1 \right] \quad (2.53)$$

## 3 MODELAGEM DINÂMICA

### 3.1 Introdução

Neste capítulo será apresentada a modelagem matemática para a dinâmica de uma estrutura flexível do tipo cabo a partir da formulação de Euler-Lagrange, considerando a estrutura fixa em sua extremidade superior e livre na outra extremidade, na qual se considera uma carga terminal de massa  $m_c$ .

As equações do modelo dinâmico serão obtidas a partir da abordagem discreta onde o cabo (estrutura contínua) é dividido em partes rígidas (elos) conectadas por elementos flexíveis denominadas articulações fictícias [PEREIRA, 2010]. Para o desenvolvimento destes modelos dinâmicos considerou-se a massa de cada elo concentrada no seu respectivo centro de massa, ou seja, a posição da massa do  $i$ -ésimo elo está a uma distância  $\frac{l_i}{2}$  da articulação anterior, conforme mostra a Figura 3.1.

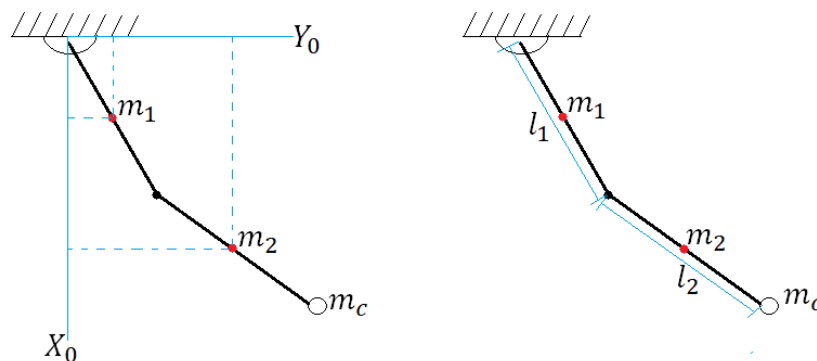


Figura 3.1 - Posições dos centros de massa dos elos em uma estrutura com dois elos

### 3.2 Modelagem dinâmica para o cabo com dois elos

Considera-se um cabo com o comprimento  $l$ , articulado na extremidade fixa e dividido em dois elos de comprimentos  $l_1$  e  $l_2$ , conectados por uma articulação, conforme mostra a Figura 3.2. Como o movimento do cabo está contido no plano vertical, adota-se, a partir desta seção, a nomenclatura  $\theta_i = \theta_{ie}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , ou seja, o subscrito  $e$  indicativo de ângulo de elevação será omitido.

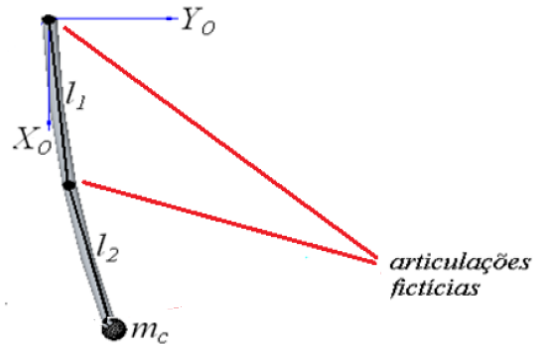


Figura 3.2 - Representação geométrica do cabo com dois elos

Conforme visto no Capítulo 2, aplica-se o formalismo de Euler-Lagrange em um sistema com dois elos, ou seja, para  $n = 2$ , obtendo-se, assim, o Lagrangeano deste sistema dado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 L = & \frac{1}{2} I_{R_1} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_{R_2} \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{m_1}{4} + m_2 + m_c \right) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{m_2}{4} + m_c \right) l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \\
 & + \left( \frac{m_2}{2} + m_c \right) l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \frac{1}{2} k_1 \theta_1^2 - \frac{1}{2} k_2 (\theta_2 - \theta_1)^2 + \\
 & - \left( \frac{m_1}{2} + m_2 + m_c \right) g l_1 (1 - \cos \theta_1) - \left( \frac{m_2}{2} + m_c \right) g l_2 (1 - \cos \theta_2)
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

A partir do Lagrangeano do sistema ( $L$ ) para 2 elos aplica-se a equação de Euler-Lagrange em cada uma das variáveis de (3.1), obtendo-se as seguintes equações:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = T_{\theta_1} - c_1 \dot{\theta}_1 - c_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) = T_{\theta_1} - (c_1 + c_2) \dot{\theta}_1 + c_2 \dot{\theta}_2 \tag{3.2}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = T_{\theta_2} - c_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) = T_{\theta_2} + c_2 \dot{\theta}_1 - c_2 \dot{\theta}_2 \tag{3.3}$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são coeficientes de atrito devido ao movimento angular de elevação de cada elo. Os torques externos que atuam nas articulações fictícias,  $T_{\theta_1}$  e  $T_{\theta_2}$  surgem em razão de diversas causas,

como correntes subaquáticas, movimento independente da carga terminal, força de empuxo, etc.

Desenvolvendo as equações (3.2) e (3.3) obtêm-se o seguinte sistema de equações diferenciais de segunda ordem:

$$I(\vec{\theta}) \ddot{\vec{\theta}} + C \dot{\vec{\theta}} + K \vec{\theta} + \vec{F}(\vec{\theta}, \dot{\vec{\theta}}) + \vec{G}(\vec{\theta}) = \vec{T}, \quad (3.4)$$

em que  $\vec{\theta} = [\theta_1, \theta_2]^T$  e  $I(\vec{\theta})$  é a matriz de inércia do sistema, que é simétrica:

$$I = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

onde têm-se

$$I_{11} = \left( \frac{m_1}{4} + m_2 + m_c \right) l_1^2 + I_{R_1}$$

$$I_{12} = l_1 l_2 \left( \frac{m_2}{2} + m_c \right) \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$I_{21} = I_{12}$$

$$I_{22} = \left( \frac{m_2}{4} + m_c \right) l_2^2 + I_{R_2}$$

A matriz dos coeficientes de atrito ( $C$ ) tem os seguintes elementos:

$$C = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

A matriz  $K$  referente às constantes elástica tem os seguintes elementos:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

As componentes do vetor Coriolis-Centrífugo  $\vec{F}(\vec{\theta}, \dot{\vec{\theta}})$  são:

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

onde

$$f_1 = l_1 l_2 \left( \frac{m_2}{2} + m_c \right) \text{sen}(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2$$

$$f_2 = -l_1 l_2 \left( \frac{m_2}{2} + m_c \right) \text{sen}(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2$$

O vetor gravitacional  $\vec{G}(\vec{\theta})$  possui a forma:

$$G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}$$

onde

$$g_1 = \left( \frac{m_1}{2} + m_2 + m_c \right) g l_1 \text{sen} \theta_1$$

$$g_2 = \left( \frac{m_2}{2} + m_c \right) g l_2 \text{sen} \theta_2$$

As componentes do vetor dos torques externos  $\vec{T}$  são:

$$\vec{T} = \begin{bmatrix} T_{\theta_1} \\ T_{\theta_2} \end{bmatrix}$$

### 3.3 Modelagem dinâmica para o cabo com três elos

Considera-se um cabo com o comprimento  $l$ , articulado na extremidade fixa e dividido em três elos de comprimentos  $l_1$ ,  $l_2$  e  $l_3$  conectados por duas articulações conforme mostra a Figura 3.3.



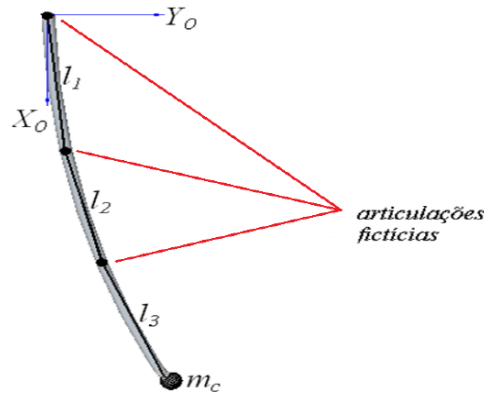


Figura 3.3 - Representação geométrica do cabo com três elos

Aplicando o formalismo discreto visto no Capítulo 2 para  $n = 3$  (número de elos do sistema) obtêm-se o Lagrangeano desse sistema que é dado por:

$$\begin{aligned}
 L = & \frac{1}{2} I_{R_1} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_{R_2} \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} I_{R_3} \dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 + m_c \right) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \\
 & + \frac{1}{2} \left( \frac{m_2}{4} + m_3 + m_c \right) l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{m_3}{4} + m_c \right) l_3^2 \dot{\theta}_3^2 + \\
 & + \left( \frac{m_2}{2} + m_3 + m_c \right) l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \left( \frac{m_3}{2} + m_c \right) l_1 l_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + \\
 & + \left( \frac{m_3}{2} + m_c \right) l_2 l_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 - \frac{1}{2} k_1 \theta_1^2 - \frac{1}{2} k_2 (\theta_2 - \theta_1)^2 - \frac{1}{2} k_3 (\theta_3 - \theta_2)^2 + \\
 & - \left( \frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + m_c \right) g l_1 (1 - \cos \theta_1) - \left( \frac{m_2}{2} + m_3 + m_c \right) g l_2 (1 - \cos \theta_2) \\
 & - \left( \frac{m_3}{2} + m_c \right) g l_3 (1 - \cos \theta_3)
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Após a obtenção do Lagrangeano do sistema ( $L$ ) aplica-se a equação de Euler-Lagrange a cada das variáveis em (3.6), onde as seguintes equações são obtidas:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = T_{\theta_1} - c_1 \dot{\theta}_1 - c_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) = T_{\theta_1} - (c_1 + c_2) \dot{\theta}_1 + c_2 \dot{\theta}_2 \tag{3.7}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = T_{\theta_2} - c_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) - c_3 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3) = T_{\theta_2} + c_2 \dot{\theta}_1 - (c_2 + c_3) \dot{\theta}_2 + c_3 \dot{\theta}_3 \tag{3.8}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_3} = T_{\theta_3} - c_3(\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_2) = T_{\theta_3} + c_3\dot{\theta}_2 - c_3\dot{\theta}_3 \quad (3.9)$$

onde  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  são coeficientes de atrito devido ao movimento angular de elevação de cada elo do sistema e  $T_{\theta_1}$ ,  $T_{\theta_2}$  e  $T_{\theta_3}$  são os torques externos que atuam sobre cada articulação do sistema dinâmico.

Após o desenvolvimento das equações (3.7), (3.8) e (3.9), obtêm o um sistema de equações diferenciais de segunda ordem que possui a forma da equação (3.4), onde a matriz de inércia do sistema é escrita na forma:

$$I = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix},$$

em que,

$$I_{11} = \left( \frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 + m_c \right) l_1^2 + I_{R_1}$$

$$I_{12} = l_1 l_2 \left( \frac{m_2}{2} + m_3 + m_c \right) \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$I_{13} = l_1 l_3 \left( \frac{m_3}{2} + m_c \right) \cos(\theta_1 - \theta_3)$$

$$I_{21} = I_{12}$$

$$I_{22} = \left( \frac{m_2}{4} + m_3 + m_c \right) l_2^2 + I_{R_2}$$

$$I_{23} = l_2 l_3 \left( \frac{m_3}{2} + m_c \right) \cos(\theta_2 - \theta_3)$$

$$I_{31} = I_{13}$$

$$I_{32} = I_{23}$$

$$I_{33} = \left( \frac{m_3}{4} + m_c \right) l_3^2 + I_{R_3}$$

A matriz dos coeficientes de atrito ( $C$ ) tem os seguintes elementos:

$$C = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

A matriz K referente às constantes elástica tem os seguintes elementos:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}$$

As componentes do vetor Coriolis-Centrífugo  $\vec{F}(\vec{\theta}, \dot{\vec{\theta}})$  são:

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

em que

$$f_1 = l_1 l_2 \left( \frac{m_2}{2} + m_3 + m_c \right) \text{sen}(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 + l_1 l_3 \left( \frac{m_3}{2} + m_c \right) \text{sen}(\theta_1 - \theta_3) \dot{\theta}_3^2$$

$$f_2 = -l_1 l_2 \left( \frac{m_2}{2} + m_3 + m_c \right) \text{sen}(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 + l_2 l_3 \left( \frac{m_3}{2} + m_c \right) \text{sen}(\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_3^2$$

$$f_3 = -l_1 l_3 \left( \frac{m_3}{2} + m_c \right) \text{sen}(\theta_1 - \theta_3) \dot{\theta}_1^2 - l_2 l_3 \left( \frac{m_3}{2} + m_c \right) \text{sen}(\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_2^2$$

Os elementos do vetor gravitacional  $\vec{G}(\vec{\theta})$  tem os seguintes elementos:

$$G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}$$

onde

$$g_1 = \left( \frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + m_c \right) g l_1 \text{sen } \theta_1$$

$$g_2 = \left( \frac{m_2}{2} + m_3 + m_c \right) g l_2 \text{sen } \theta_2$$

$$g_3 = \left( \frac{m_3}{2} + m_c \right) g l_3 \text{sen } \theta_3$$

As componentes do vetor dos torques externos  $\vec{T}$  são:

$$\vec{T} = \begin{bmatrix} T_{\theta_1} \\ T_{\theta_2} \\ T_{\theta_3} \end{bmatrix}$$

### 3.4 Modelagem dinâmica para o cabo de quatro elos

Neste modelo considera-se o cabo com comprimento  $l$  dividido em quatro partes rígidas de comprimentos  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$  e  $l_4$ , ligadas por três articulações fictícias conforme detalha a Figura 3.4.

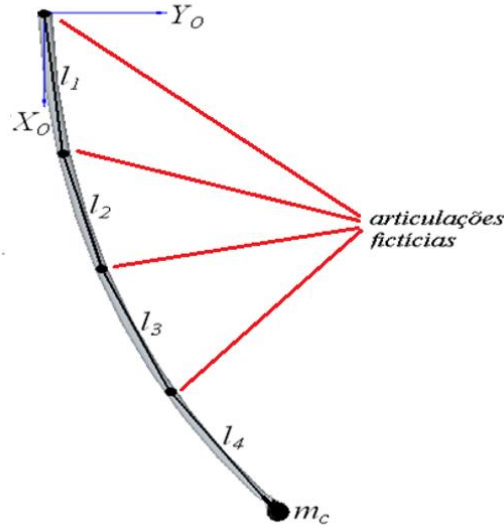


Figura 3.4 - Representação geométrica do cabo com quatro elos

Aplicando o formalismo de Euler-Lagrange para  $n = 4$ , obtêm-se o Lagrangeano deste sistema dinâmico dado como sendo o seguinte:

$$\begin{aligned}
 L = & \frac{1}{2} I_{R_1} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_{R_2} \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} I_{R_3} \dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2} I_{R_4} \dot{\theta}_4^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 + m_4 + m_c \right) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \\
 & + \frac{1}{2} \left( \frac{m_2}{4} + m_3 + m_4 + m_c \right) l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{m_3}{4} + m_4 + m_c \right) l_3^2 \dot{\theta}_3^2 + \\
 & + \frac{1}{2} \left( \frac{m_4}{4} + m_c \right) l_4^2 \dot{\theta}_4^2 + \left( \frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c \right) l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \\
 & + \left( \frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) l_1 l_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + \left( \frac{m_4}{2} + m_c \right) l_1 l_4 \cos(\theta_1 - \theta_4) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 + \\
 & + \left( \frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) l_2 l_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + \left( \frac{m_4}{2} + m_c \right) l_2 l_4 \cos(\theta_2 - \theta_4) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 + \\
 & + \left( \frac{m_4}{2} + m_c \right) l_3 l_4 \cos(\theta_3 - \theta_4) \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 - \frac{1}{2} k_1 \theta_1^2 - \frac{1}{2} k_2 (\theta_2 - \theta_1)^2 - \frac{1}{2} k_3 (\theta_3 - \theta_2)^2 + \\
 & - \frac{1}{2} k_4 (\theta_4 - \theta_3)^2 - \left( \frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + m_4 + m_c \right) g l_1 (1 - \cos \theta_1) +
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
& -\left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c\right)gl_2(1 - \cos \theta_2) - \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right)gl_3(1 - \cos \theta_3) \\
& \quad - \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right)gl_4(1 - \cos \theta_4)
\end{aligned}$$

Uma vez obtido o Lagrangeano do sistema com quatro elos utiliza-se a equação de Euler-Lagrange aplicada a cada uma das variáveis de (3.10). As equações têm as seguintes formas:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = T_{\theta_1} - c_1 \dot{\theta}_1 - c_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) = T_{\theta_1} - (c_1 + c_2) \dot{\theta}_1 + c_2 \dot{\theta}_2 \quad (3.11)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = T_{\theta_2} - c_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) - c_3 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3) = T_{\theta_2} + c_2 \dot{\theta}_1 - (c_2 + c_3) \dot{\theta}_2 + c_3 \dot{\theta}_3 \quad (3.12)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_3} = T_{\theta_3} - c_3 (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_2) - c_4 (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_4) = T_{\theta_3} + c_3 \dot{\theta}_2 - (c_3 + c_4) \dot{\theta}_3 + c_4 \dot{\theta}_4 \quad (3.13)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_4} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_4} = T_{\theta_4} - c_4 (\dot{\theta}_4 - \dot{\theta}_3) = T_{\theta_4} + c_4 \dot{\theta}_3 - c_4 \dot{\theta}_4 \quad (3.14)$$

onde  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  e  $c_4$  são coeficientes de atrito devido ao movimento angular de elevação de cada elo do sistema e  $T_{\theta_1}$ ,  $T_{\theta_2}$ ,  $T_{\theta_3}$  e  $T_{\theta_4}$  são os torques externos que atuam sobre cada articulação do sistema dinâmico.

Após o desenvolvimento das equações (3.11), (3.12), (3.13) e (3.14), obtem-se o sistema de equações diferenciais de segunda ordem a partir da equação geral da dinâmica que possui a forma da equação (3.4).

A matriz de inércia do sistema com 4 elos é escrita na forma:

$$I = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} & I_{14} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} & I_{24} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} & I_{34} \\ I_{41} & I_{42} & I_{43} & I_{44} \end{bmatrix},$$

em que

$$I_{11} = \left(\frac{m_1}{4} + m_2 + m_3 + m_4 + m_c\right) l_1^2 + I_{R_1}$$

$$I_{12} = l_1 l_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c\right) \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$I_{13} = l_1 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) \cos(\theta_1 - \theta_3)$$

$$I_{14} = l_1 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) \cos(\theta_1 - \theta_4)$$

$$I_{21} = I_{12}$$

$$I_{22} = \left(\frac{m_2}{4} + m_3 + m_4 + m_c\right) l_2^2 + I_{R_2}$$

$$I_{23} = l_2 l_3 \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) \cos(\theta_2 - \theta_3)$$

$$I_{24} = l_2 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) \cos(\theta_2 - \theta_4)$$

$$I_{31} = I_{13}$$

$$I_{32} = I_{23}$$

$$I_{33} = \left(\frac{m_3}{4} + m_4 + m_c\right) l_3^2 + I_{R_3}$$

$$I_{34} = l_3 l_4 \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) \cos(\theta_3 - \theta_4)$$

$$I_{41} = I_{14}$$

$$I_{42} = I_{24}$$

$$I_{43} = I_{34}$$

$$I_{44} = \left(\frac{m_4}{4} + m_c\right) l_4^2 + I_{R_4}$$

A matriz  $C$  que contem os coeficientes de atrito tem a seguinte forma:

$$C = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 & -c_4 \\ 0 & 0 & -c_4 & c_4 \end{bmatrix}$$

A matriz  $K$  referente às constantes elásticas do sistema dinâmico é descrita como:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix}$$

As componentes do vetor Coriolis-Centrífugo  $\vec{F}(\vec{\theta}, \dot{\vec{\theta}})$  são:

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

em que

$$f_1 = l_1 l_2 \left( \frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c \right) \text{sen}(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 + l_1 l_3 \left( \frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) \text{sen}(\theta_1 - \theta_3) \dot{\theta}_3^2 + \\ + l_1 l_4 \left( \frac{m_4}{2} + m_c \right) \text{sen}(\theta_1 - \theta_4) \dot{\theta}_4^2$$

$$f_2 = -l_1 l_2 \left( \frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c \right) \text{sen}(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 + l_2 l_3 \left( \frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) \text{sen}(\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_3^2 + \\ + l_2 l_4 \left( \frac{m_4}{2} + m_c \right) \text{sen}(\theta_2 - \theta_4) \dot{\theta}_4^2$$

$$f_3 = -l_1 l_3 \left( \frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) \text{sen}(\theta_1 - \theta_3) \dot{\theta}_1^2 - l_2 l_3 \left( \frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) \text{sen}(\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_2^2 + \\ + l_3 l_4 \left( \frac{m_4}{2} + m_c \right) \text{sen}(\theta_3 - \theta_4) \dot{\theta}_4^2$$

$$f_4 = -l_1 l_4 \left( \frac{m_4}{2} + m_c \right) \text{sen}(\theta_1 - \theta_4) \dot{\theta}_1^2 - l_2 l_4 \left( \frac{m_4}{2} + m_c \right) \text{sen}(\theta_2 - \theta_4) \dot{\theta}_2^2 + \\ - l_3 l_4 \left( \frac{m_4}{2} + m_c \right) \text{sen}(\theta_3 - \theta_4) \dot{\theta}_3^2$$

O vetor gravitacional  $\vec{G}(\vec{\theta})$  tem os seguintes elementos:

$$G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{bmatrix}$$

onde

$$g_1 = \left( \frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + m_4 + m_c \right) g l_1 \text{sen} \theta_1$$

$$g_2 = \left( \frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c \right) g l_2 \text{ sen } \theta_2$$

$$g_3 = \left( \frac{m_3}{2} + m_4 + m_c \right) g l_3 \text{ sen } \theta_3$$

$$g_4 = \left( \frac{m_4}{2} + m_c \right) g l_4 \text{ sen } \theta_4$$

As componentes do vetor dos torques externos  $\vec{T}$  são:

$$\vec{T} = \begin{bmatrix} T_{\theta_1} \\ T_{\theta_2} \\ T_{\theta_3} \\ T_{\theta_4} \end{bmatrix}$$

Após o desenvolvimento dos modelos dinâmicos com dois, três e quatro elos, foi possível observar um padrão no crescimento das equações bem como um padrão na expansão das matrizes e vetores da equação geral da dinâmica. Observando-se este comportamento foi possível desenvolver algoritmos para a geração automática dessas matrizes e vetores, conforme será apresentado no capítulo seguinte.



## 4 ALGORITMOS GENÉRICOS

No presente capítulo serão apresentados os algoritmos utilizados para a geração automática das matrizes e vetores dos modelos dinâmicos, considerando-se um número qualquer de elos.

O desenvolvimento dos algoritmos se justifica em razão do crescimento das equações com o aumento do número de elos, tornando basicamente inviável o desenvolvimento manual dessas equações para um número elevado de elos, que é o caso deste trabalho onde se utiliza modelos de 12 elos e 60 elos.

Estes algoritmos tomam como base os algoritmos desenvolvidos por [ZANELA, 2013] que geram as matrizes para um modelo no espaço tridimensional, ou seja, consideram-se os movimentos de elevação, azimute e torção de cada elo da estrutura flexível. No presente trabalho os algoritmos foram adaptados para desenvolver as matrizes e vetores para um modelo no plano, ou seja, desconsideram-se os movimentos de azimute e torção dos elos.

Conforme será visto a seguir, utiliza-se uma linguagem formal para descrever os algoritmos, uma vez que essa forma de descrição facilita a implementação computacional. Vale destacar que neste trabalho os algoritmos foram implementados no MATLAB.

### 4.1 Algoritmo genérico para a matriz de inércia

Conforme mencionado anteriormente, a partir do desenvolvimento dos modelos dinâmicos para o cabo fracionado em dois, três e quatro elos, obtiveram-se os elementos das respectivas matrizes de inércia destes modelos. A análise destes elementos possibilitou a identificação de um crescimento padrão, conforme adicionavam-se novos elos ao sistema dinâmico. Com isso foi possível desenvolver uma forma geral para a matriz de inércia, considerando um número qualquer de elos em que se divide o cabo.

A matriz de inércia é simétrica, ou seja,  $I_{ij} = I_{ji}$  e, portanto, o algoritmo determina os elementos da diagonal principal da matriz e os elementos acima desta diagonal.

Em [ZANELA, 2013] a matriz de inércia presente no modelo dinâmico possui um padrão de crescimento genérico, considerando-se  $n$  elos. Essa matriz completa possui a seguinte forma:

$$I = \begin{bmatrix} I_e & N_e & T_e \\ I_a & N_a & T_a \\ I_t & N_t & T_t \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

onde cada elemento é uma submatriz e os índices  $e$ ,  $a$  e  $t$  indicam que estas submatrizes são referentes aos movimentos de elevação, azimute e torção, respectivamente.

Neste trabalho desconsideram-se os movimentos de azimute e torção dos elos do modelo dinâmico. Logo, o algoritmo para a geração da matriz de inércia deste trabalho utiliza apenas a submatriz  $I_e$  e, portanto, toma-se a matriz  $I$  como sendo:

$$I = I_e, \quad (4.2)$$

onde  $I_e$  é também simétrica de ordem  $n \times n$ , onde  $n$  é o número de elos do modelo dinâmico.

Os elementos da matriz de inércia  $I$  do modelo dinâmico que considera apenas o movimento de elevação de cada elo podem ser obtidos a partir do seguinte algoritmo:

$$\begin{aligned} & \text{para } i = 1: n, \\ & \quad \text{para } j = i + 1: n, \\ & \quad \quad I(i, j) = l_i l_j \left( \frac{m_j}{2} + m_c + \sum_{k=j+1}^n m_k \right) [\cos(\theta_i - \theta_j)]; \\ & \quad \text{fim para}, \\ & \quad I(i, i) = l_i^2 \left[ \frac{m_i}{4} + m_c + \sum_{k=i+1}^n m_k \right] \\ & \text{fim para}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

No caso de se considerar a parcela de energia cinética rotacional do movimento de elevação, acrescentam-se aos elementos da diagonal principal da matriz  $I$ , os momentos de inércia rotacionais sobre os eixos transversais aos elos e passando pelos seus respectivos centros de massa, na forma:

$$I(i, i) = I(i, i) + I_{R_i}, \quad (4.4)$$

onde  $I_{R_i}$  é o momento de inércia rotacional de elevação referente ao elo  $i$ .

## 4.2 Algoritmo para a geração das matrizes de coeficientes de atrito e constantes elásticas

Conforme visto no Capítulo 3 deste trabalho, as matrizes dos coeficientes de atrito e a matriz de constantes elásticas obedecem à mesma regra de formação. Em [ZANELA, 2013] as matrizes dos coeficientes de atrito e constantes elásticas são diagonais por blocos, ou seja, os elementos da diagonal principal da matriz  $C$  e da matriz  $K$  são submatrizes postas da seguinte forma:

$$C = \begin{bmatrix} C_e & 0 & 0 \\ 0 & C_a & 0 \\ 0 & 0 & C_t \end{bmatrix}; \quad (4.5)$$

$$K = \begin{bmatrix} K_e & 0 & 0 \\ 0 & K_a & 0 \\ 0 & 0 & K_t \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

em que os índices  $e$ ,  $a$  e  $t$  são referentes aos movimentos de elevação, azimute e torção.

Conforme já mencionado anteriormente, desconsidera-se os movimentos de azimute e torção dos elos e, portanto, as matrizes  $C$  e  $K$  da modelagem dinâmica resumem-se nas submatrizes  $C_e$  e  $K_e$ , respectivamente:

$$C = C_e \text{ e } K = K_e \quad (4.7)$$

A matriz  $K$  para o caso de  $n = 2$  tem a seguinte configuração:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Para o caso de  $n = 3$ :

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Para o caso de  $n = 4$ :

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

A partir da observação do padrão de crescimento da matriz de acordo com o acréscimo de elos no modelo pôde-se deduzir o seguinte algoritmo para geração da matriz  $K$ :

$$\begin{aligned}
 & \text{para } i = 1: n, \\
 & \quad \text{para } j = 1: n, \\
 & \quad \quad K(i, j) = 0; \\
 & \quad \quad \text{se } (i = j) \text{ e } (i < n), \\
 & \quad \quad \quad K(i, j) = k_i + k_{i+1}; \\
 & \quad \quad \text{fim se}, \\
 & \quad \quad \text{se } (i = j) \text{ e } (i = n), \\
 & \quad \quad \quad K(i, j) = k_i; \\
 & \quad \quad \text{fim se}, \\
 & \quad \quad \text{se } j = i + 1, \\
 & \quad \quad \quad K(i, j) = -k_j; \\
 & \quad \quad \text{fim se}, \\
 & \quad \quad \quad K(i, j) = K(j, i); \\
 & \quad \quad \text{fim para}, \\
 & \text{fim para},
 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Como já foi mencionado anteriormente, a matriz dos coeficientes de atrito  $C$  e a matriz das constantes elásticas  $K$  obedecem às mesmas regras de formação, portanto, o algoritmo de geração de ambas é o mesmo, apenas usa-se  $k$  para a matriz das constantes elásticas e  $c$  para a matriz dos coeficientes de atrito.

### 4.3 Algoritmo para a geração do vetor Coriolis-Centrífugo

O vetor de esforços Coriolis-Centrífugo também pode ser gerado de forma automática a partir das observações dos padrões de crescimento das equações para os elementos deste vetor

conforme o aumento do número de elos da estrutura flexível visto no Capítulo 3, para os modelos com 2, 3 e 4 elos. Os termos deste vetor são obtidos utilizando a equação (4.12).

$$f_i = l_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left\{ \beta l_j \left( \frac{m_{\max(i,j)}}{2} + m_c + \sum_{g=\max(i,j)+1}^n m_g \right) \left[ -\frac{1}{2} \text{sign}(\beta) \cos(\theta_i) \text{sen}(\theta_j) + \frac{1}{\beta} \text{sen}(\theta_i) \cos(\theta_j) \right] \dot{\theta}_j^2 \right\} \quad (4.12)$$

onde  $\beta$  é uma constante que está condicionada a equação (4.13).

$$\beta = \begin{cases} 2 & \text{para } i > j \\ -2 & \text{para } i \leq j \end{cases} \quad (4.13)$$

#### 4.4 Algoritmo para a geração do vetor gravitacional

O vetor gravitacional apresenta a força exercida pela gravidade em cada elo da estrutura. Este vetor também apresenta um padrão de crescimento, em que pode-se observar através dos modelos das estruturas com 2, 3 e 4 elos.

Para o modelo com 2 elos tem-se os seguintes componentes do vetor gravitacional:

$$g_1 = \left( \frac{m_1}{2} + m_2 + m_c \right) g l_1 \text{sen } \theta_1 \quad (4.14)$$

$$g_2 = \left( \frac{m_2}{2} + m_c \right) g l_2 \text{sen } \theta_2 \quad (4.15)$$

No modelo com 3 elos os componentes do vetor gravitacional são:

$$g_1 = \left( \frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + m_c \right) g l_1 \text{sen } \theta_1 \quad (4.16)$$

$$g_2 = \left( \frac{m_2}{2} + m_3 + m_c \right) g l_2 \text{sen } \theta_2 \quad (4.17)$$

$$g_3 = \left(\frac{m_3}{2} + m_c\right) gl_3 \text{ sen } \theta_3 \quad (4.18)$$

Para o caso da estrutura com 4 elos o vetor gravitacional possui a seguinte forma:

$$g_1 = \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3 + m_4 + m_c\right) gl_1 \text{ sen } \theta_1 \quad (4.19)$$

$$g_2 = \left(\frac{m_2}{2} + m_3 + m_4 + m_c\right) gl_2 \text{ sen } \theta_2 \quad (4.20)$$

$$g_3 = \left(\frac{m_3}{2} + m_4 + m_c\right) gl_3 \text{ sen } \theta_3 \quad (4.21)$$

$$g_4 = \left(\frac{m_4}{2} + m_c\right) gl_4 \text{ sen } \theta_4 \quad (4.22)$$

A partir da observação dos componentes destes vetores desenvolveu-se a equação (4.23) que gera o  $i$ -ésimo termo do vetor gravitacional.

$$g_i = l_i \left( \frac{m_i}{2} + m_c + \sum_{k=i+1}^n m_k \right) g \text{ sen } \theta_i \quad (4.23)$$

onde  $n$  é o número de elos da estrutura e  $i = 1, 2, \dots, n$ .

## 5 MÉTODO DE NELDER-MEAD

Neste capítulo será apresentado o método simplex de busca direta usado para a minimização das diferenças (erros) em posição entre os modelos com 12 e 60 elos. O método será descrito de forma sucinta para que haja a compreensão do seu emprego neste trabalho.

### 5.1 Métodos Simplex

Um simplex em  $\mathcal{R}^n$  é um polítopo (região) formado pelo conjunto  $n + 1$  pontos em  $\mathcal{R}^n$

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}\}$$

chamados vértices do simplex.

Os métodos simplex são métodos de busca direta. Estes métodos têm como característica partirem de um simplex inicial e a cada iteração do método um novo simplex é obtido a partir de alguns testes com os valores da função nos vértices. Os novos vértices gerados satisfazem de alguma maneira uma condição de descida.

De acordo com [TSENG, 1999], o primeiro método simplex foi proposto por [SPENDLEY et. al, 1962] e parte de um simplex inicial em  $\mathcal{R}^n$  com  $n + 1$  vértices e a cada iteração busca excluir o pior deles (o vértice onde a função tem maior valor), através da reflexão isométrica deste vértice com relação aos  $n$  melhores vértices, gerando um novo vértice com o valor da função menor do que o vértice excluído, ou repetir o mesmo procedimento para o segundo pior vértice, fazendo a reflexão isométrica em relação aos demais  $n$ vértices.

Se o valor da função não puder ser melhorado no simplex atualizado, ele então é reduzido por uma fração em torno de seu melhor vértice, e em seguida uma nova iteração é feita. Neste método, o conjunto dos ângulos internos do simplex permanece constante.

O segundo método simplex foi proposto por John Nelder e Roger Mead em 1965 [NELDER e MEAD, 1965] com o intuito de aprimorar o método proposto por Spendley.

Desde então, mudanças vêm sendo propostas neste método, assim com novos métodos que têm como base o simplex.

Na próxima seção será descrito o Método de Nelder-Mead.

### 5.2 Método de Nelder-Mead

De acordo com [LAGARIAS, 1998] o método de Nelder-Mead tem sido um dos mais

populares métodos de busca direta utilizados em problemas de minimização sem restrição de uma função de  $n$  variáveis, em especial nas áreas de química, engenharia química e medicina.

O método de Nelder-Mead é bastante popular devido a diversos fatores, como os citados a seguir:

- A não necessidade do cálculo explícito ou implícito de quaisquer derivadas da função objetivo, usando apenas valores da função;
- A simplicidade de sua implementação computacional;
- Em cada iteração, poucas avaliações da função objetivo são feitas;
- O acentuado decréscimo do valor da função objetivo nas primeiras iterações.

Considere o problema de minimização irrestrita:

$$\min_{x \in \mathfrak{R}^n} f(x) \quad (5.1)$$

onde  $f: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ .

O método de Nelder-Mead resolve o problema (5.1) da maneira descrita a seguir.

Sejam  $f: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  e um simplex com  $n + 1$  vértices.

Em cada iteração do método, os  $n + 1$  vértices do simplex,  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$  pertencentes a  $\mathfrak{R}^n$ , são ordenados de forma crescente de acordo com os valores de  $f$  para cada vértice, isto é:

$$f(x_1) \leq f(x_2) \leq \dots \leq f(x_{n+1})$$

onde  $x_1$  é definido como o melhor vértice e  $x_{n+1}$  o pior vértice.

Levam-se em consideração quatro coeficientes para o reposicionamento desses vértices:

- $\rho$  - coeficiente de reflexão,
- $\chi$  - coeficiente de expansão,
- $\gamma$  - coeficiente de contração,
- $\sigma$  - coeficiente de redução,

os quais, segundo [NELDER e MEAD, 1965], devem satisfazer

$$\rho > 0, \chi > 1, 0 < \gamma < 1 \text{ e } 0 < \sigma < 1.$$



A escolha padrão dos coeficientes é dada por

$$\rho = 1, \chi = 1, \gamma = \frac{1}{2} \text{ e } \sigma = \frac{1}{2}$$

O método busca substituir o pior vértice do simplex por outro com um melhor valor. Este novo vértice é obtido a partir da reflexão, expansão ou contração do pior vértice ao longo da reta que passa por este vértice e o centróide dos  $n$  melhores vértices do simplex.

A cada iteração o método substitui o pior vértice por um novo vértice ou o simplex é reduzido em torno do melhor vértice.

### 5.3 Algoritmo de Nelder-Mead

Uma iteração do método de Nelder-Mead, conforme [LAGARIAS, 1998], é feita da seguinte maneira:

1º passo: **Ordenação**

Ordenar os  $n + 1$  vértices:  $f(x_1) \leq f(x_2) \leq \dots \leq f(x_{n+1})$ .

2º passo: **Centróide**

Calcular o centróide dos  $n$  melhores vértices:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}$$

3º passo: **Reflexão**

Calcular  $x_r$  (vértice refletido):

$$x_r = \bar{x} + \rho(\bar{x} - x_{n+1}) = (1 + \rho)\bar{x} - \rho x_{n+1}.$$

Se  $f(x_1) \leq f(x_r) < f(x_n)$

$$x_{n+1} = x_r.$$

encerra a iteração.

4º passo: **Expansão**

Se  $f(x_r) < f(x_1)$ , calcular  $x_e$  (vértice expandido):

$$x_e = \bar{x} + \chi(x_r - \bar{x}) = \bar{x} + \rho\chi(\bar{x} - x_{n+1}) = (1 + \rho\chi)\bar{x} - \rho\chi x_{n+1}.$$

Se  $f(x_e) < f(x_r)$

$$x_{n+1} = x_e \text{ e encerre a iteração}$$

Senão

$x_{n+1} = x_r$  e encerre a iteração.

5º passo: **Contração**

Se  $f(x_r) \geq f(x_n)$

**Externa:** Se  $f(x_n) \leq f(x_r) < f(x_{n+1})$ , calcular  $x_{ce}$  (vértice de contração externa)

$$x_{ce} = \bar{x} + \gamma(x_r - \bar{x}) = \bar{x} + \rho\gamma(\bar{x} - x_{n+1}) = (1 + \rho\gamma)\bar{x} - \rho\gamma x_{n+1}$$

Se  $f(x_{ce}) \leq f(x_r)$

$x_{n+1} = x_{ce}$  e encerre a iteração

Senão

Ir para o 6º passo

**Interna:** Se  $f(x_r) \geq f(x_{n+1})$ , calcular  $x_{ci}$  (vértice de contração interna)

$$x_{ci} = \bar{x} - \gamma(\bar{x} - x_{n+1}) = (1 - \gamma)\bar{x} + \gamma x_{n+1}$$

Se  $f(x_{ci}) < f(x_{n+1})$

$x_{n+1} = x_{ci}$  e encerre a iteração

Senão

Ir para o 6º passo

6º passo: **Redução**

Calcular os vetores  $v_i = x_1 + \sigma(x_i - x_1), i = 2, \dots, n + 1$ .

Os vértices (ainda não ordenados) para a próxima iteração são:

$$x_1, v_2, \dots, v_{n+1}$$

**Critério de parada**

De acordo com [NELDER e MEAD, 1965], dada uma tolerância  $\Delta_{tol}$ , o critério de parada leva em conta o valor da função nos vértices do simplex. Sendo assim, o algoritmo finaliza a minimização quando

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} \frac{(f(x_i) - f(\bar{x}))^2}{n}} < \Delta_{tol} \quad (5.2)$$

As possíveis operações para a atualização do simplex no método de Nelder-Mead para uma aplicação em duas dimensões e com a escolha padrão dos coeficientes são mostradas na Figura 5.1:

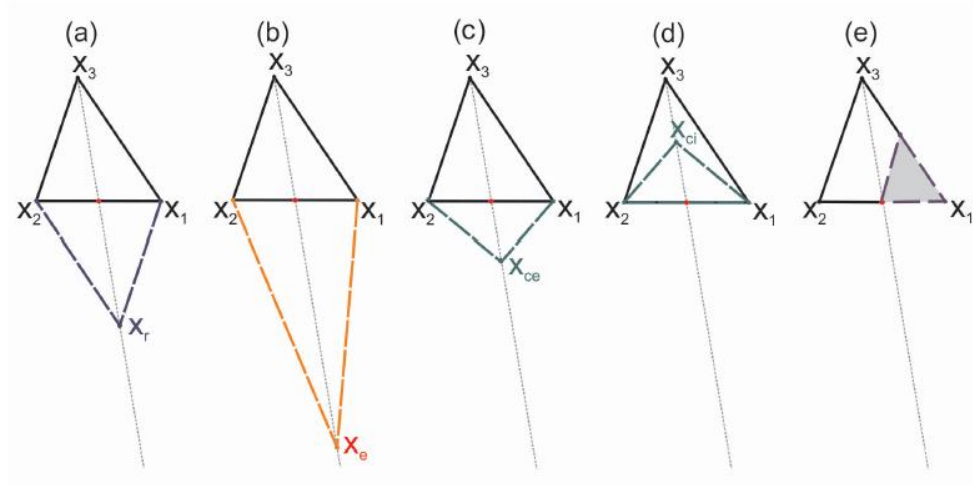


Figura 5.1 - Iteração do Método de Nelder-Mead em  $\mathbb{R}^2$ ;

(a) Reflexão (b) Expansão (c) Contração Externa (d) Contração Interna (e) Redução.

De acordo com o algoritmo de Nelder-Mead, o vértice alterado, quando não há redução, terá uma das seguintes formas:

$$x_r = \bar{x} + \rho(\bar{x} - x_{n+1})$$

$$x_e = \bar{x} + \rho\chi(\bar{x} - x_{n+1})$$

$$x_{ce} = \bar{x} + \rho\gamma(\bar{x} - x_{n+1})$$

$$x_{ci} = \bar{x} - \gamma(\bar{x} - x_{n+1})$$

Com isso, se na iteração  $k - 1$  não há redução, o novo vértice da iteração  $k$  ( $v^{(k)}$ ) pode ser escrito da seguinte forma:

$$v^{(k)} = \bar{x}^{(k)} + \tau(\bar{x}^{(k)} - x_{n+1}^{(k)}) = (1 + \tau)\bar{x}^{(k)} - \tau x_{n+1}^{(k)} \quad (5.3)$$

onde:

- $\tau = \rho$ , se a Reflexão for aceita;
- $\tau = \rho\chi$ , se a Expansão for aceita;

- $\tau = \rho\gamma$ , se a Contração Externa for aceita;
- $\tau = -\gamma$ , se a Contração Interna for aceita.

No exemplo a seguir o método de Nelder-Mead é aplicado a um problema-teste que facilita a compreensão da aplicação do método.

## 5.4 Exemplo: Função de Himmelblau

A função de Himmelblau (ver Figura 5.2) é uma das inúmeras funções de teste para minimizadores. Esta função é dada por

$$f(x, y) = (x^2 + y - 11)^2 + (x + y^2 - 7)^2 \quad (5.4)$$

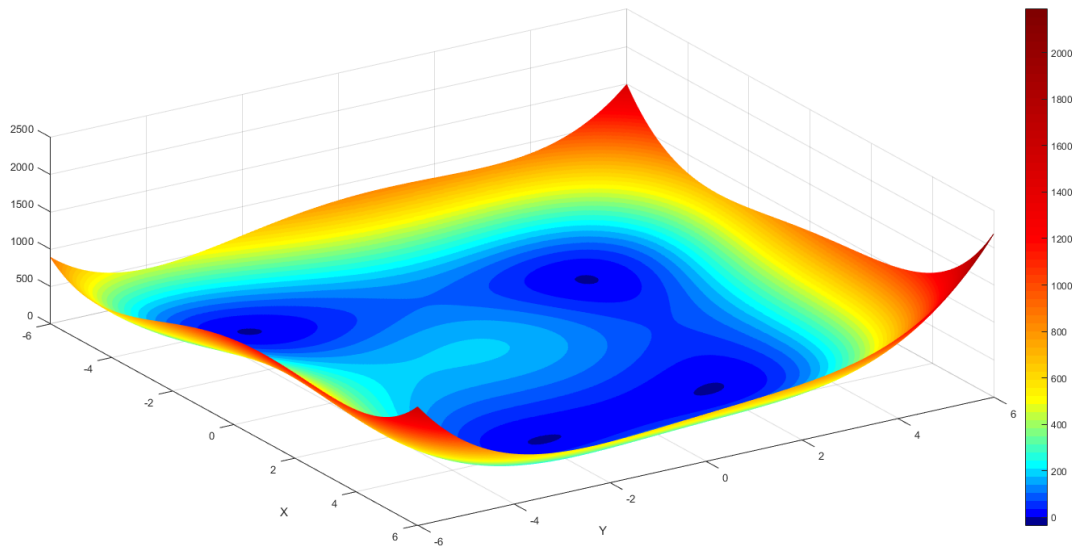
e possui quatro minimizadores globais distintos em:

$$f(3.0, 2.0) = 0.0$$

$$f(-2.805118, 3.131312) = 0.0$$

$$f(-3.779310, -3.283186) = 0.0$$

$$f(3.584428, -1.848126) = 0.0$$

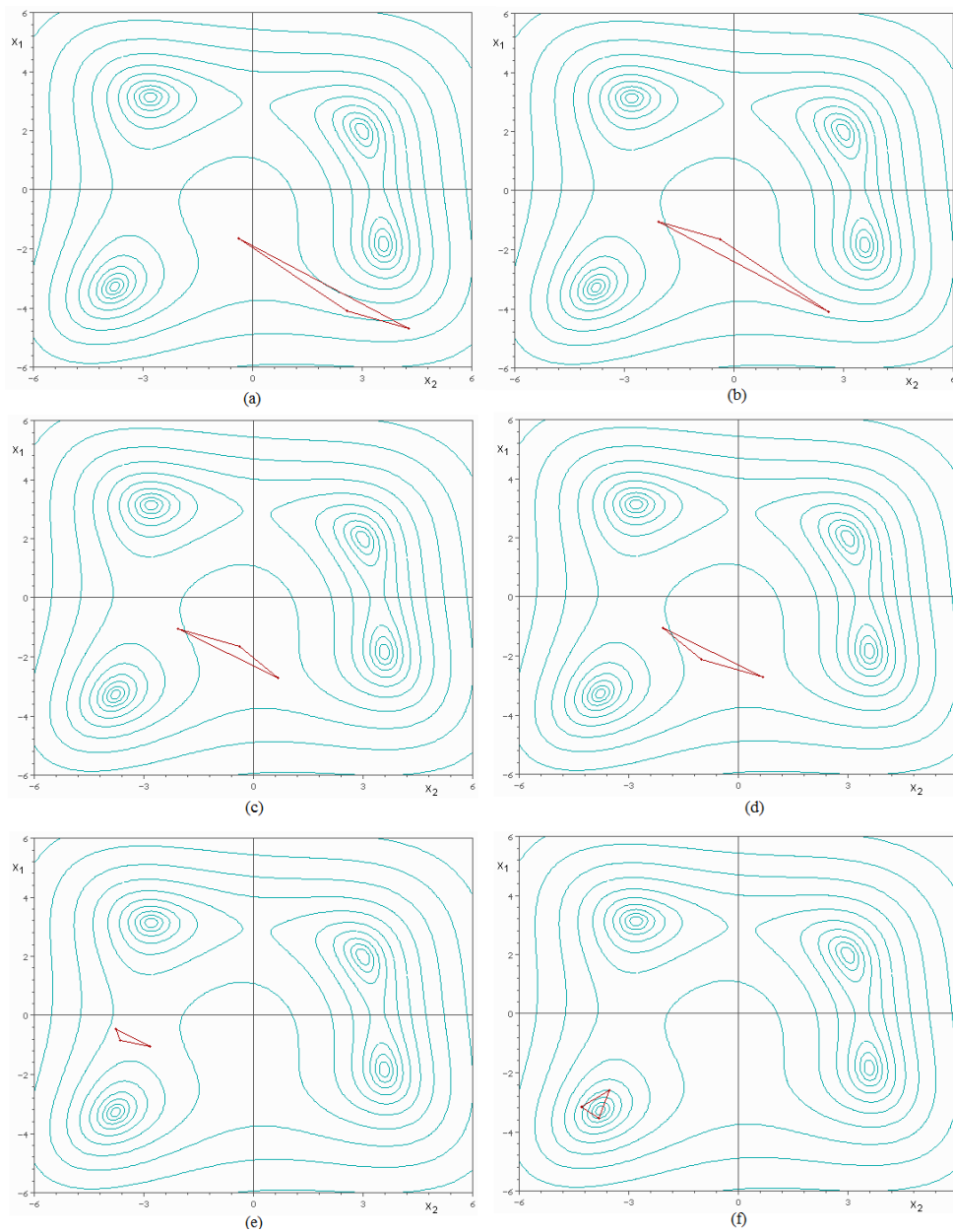


*Figura 5.2 - Função de Himmelblau*

A Figura 5.3 mostra algumas iterações do método de Nelder-Mead aplicado na função teste de Himmelblau<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> A visualização completa do método de Nelder-Mead aplicado a função teste de Himmelblau pode ser encontrada em: [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/96/Nelder\\_Mead2.gif](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/96/Nelder_Mead2.gif)



*Figura 5.3 - Algumas iterações do método de Nelder-Mead*

No exemplo anterior pode-se observar que o simplex inicial se encontra mais próximo do mínimo  $(3.584428, -1.848126)$  Figura 5.3(a) e após algumas iterações o método converge para o mínimo  $(-3.779310, -3.283186)$ , o que mostra que dependendo do simplex inicial o método pode não convergir para o mínimo mais próximo.

## 6 ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS

Neste capítulo será apresentada a técnica utilizada na identificação dos parâmetros que determinam os coeficientes de atrito e as constantes elásticas do modelo com 12 elos de maneira que o comportamento deste seja o mais próximo do modelo base (com 60 elos), a fim de se validar a utilização do método de minimização.

### 6.1 O processo de minimização

Inicialmente, realizou-se a simulação do modelo com 60 elos a partir dos algoritmos desenvolvidos em no Capítulo 4 adaptados para gerar os modelos dinâmicos no plano para que se tenha um modelo base de comparação. Considerou-se um modelo dinâmico com um número elevado de elos (60 elos) de forma que se tenha uma grande sensação de continuidade da estrutura flexível.

Para a simulação do modelo com 60 elos foram adotados os seguintes parâmetros físicos mostrados na Tabela 6.1.

*Tabela 6.1 - Parâmetros adotados para o modelo de 60 elos*

Parâmetro	Valor
Massa específica do cabo ( $kg/m$ )	$m_{esp} = 0.1424$
Comprimento do cabo ( $m$ )	$L = 3.39$
Número de elos (aproximação contínua)	$n = 60$
Comprimento $l_i$ de cada elo ( $m$ )	$l_i = L/n$
Massa da carga terminal ( $kg$ )	$m_c = 1.47$
Massa de cada elo ( $kg$ )	$m_i = m_{esp} l_i$
Momento de inércia rotacional de cada elo ( $kgm^2$ )	$I_{ri} = (m_i/12)l_i^2$
Coef. de atrito de cada articulação para 60 elos ( $Nms/rd$ )	$c_{ei} = 0.0336$
Const. elástica de cada articulação para 60 elos ( $Nm/rd$ )	$k_{ei} = 237.2412$
Coeficiente de arrasto atmosférico ( $Nm rd^2/s^2$ )	$c_v = 0.2$

Na sequência desenvolveu-se um algoritmo para executar o método de minimização. Os dados obtidos a partir da simulação de 60 elos não serão alterados por isso esta simulação foi

executada apenas uma vez, diferentemente da simulação com 12 elos que terá seus parâmetros de atrito e elasticidade alterados em cada iteração do método de forma a ser minimizada a diferença entre as posições cartesianas das articulações.

A primeira simulação com 12 elos é executada com parâmetros iniciais estipulados conforme mostra a Tabela 6.2.

*Tabela 6.2 - Parâmetros iniciais adotados para o modelo com 12 elos*

<b>Parâmetro</b>	<b>Valor</b>
Massa específica do cabo ( $kg/m$ )	$m_{esp} = 0.1424$
Comprimento do cabo ( $m$ )	$L = 3.39$
Comprimento $l_i$ de cada elo ( $m$ )	$l_i = L/n$
Massa da carga terminal ( $kg$ )	$m_c = 1.47$
Massa de cada elo ( $kg$ )	$m_i = m_{esp} l_i$
Momento de inércia rotacional de cada elo ( $kgm^2$ )	$I_{ri} = (m_i/12) l_i^2$
Coefficiente de arrasto atmosférico ( $Nm\ rd^2/s^2$ )	$c_v = 0.2$

As simulações, tanto a simulação da estrutura com 60 elos quanto a simulação do modelo de 20 elos foram colocadas em equilíbrio estático, ou seja, partiram de um momento onde as velocidades das articulações são nulas. Este equilíbrio estático formou uma Curva Catenária conforme mostra a Figura 6.1.



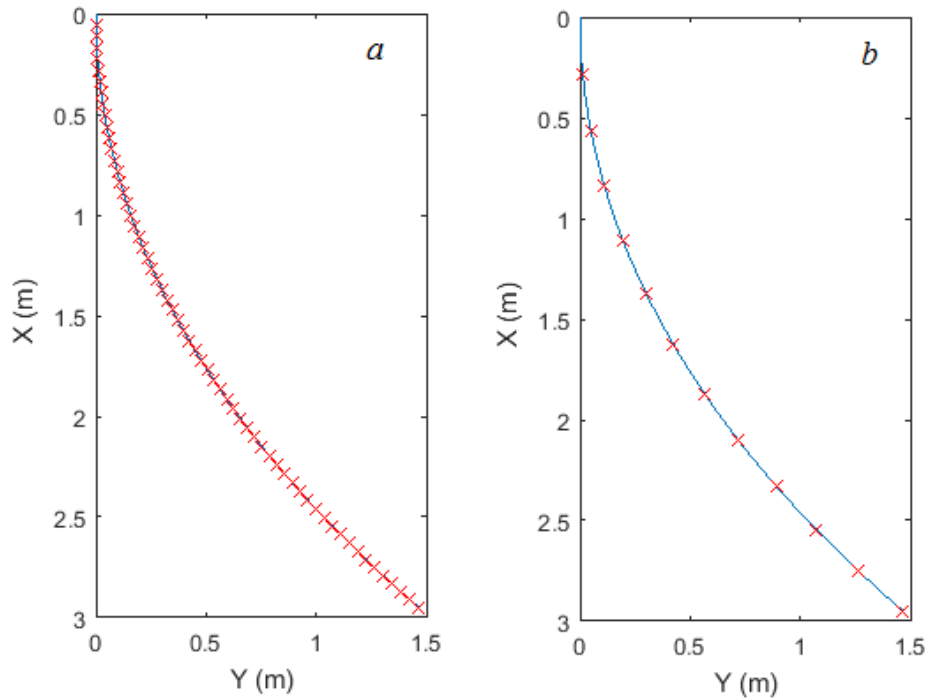


Figura 6.1 - Catenária inicial: a) para 60 elos; b) para 12 elos.

Com a configuração inicial dos modelos já definida (Figura 6.1) inicia-se a execução do método de minimização, mas para isso deve-se atribuir valores iniciais para o coeficiente de atrito e para a constante elástica do modelo. Como os parâmetros relativos às constantes elásticas e aos coeficientes de atrito são iguais para todas as articulações, a princípio, apenas dois coeficientes deveriam ser identificados:  $c_e = c_{ei}$  e  $k_e = k_{ei}$ ,  $i = 1, \dots, 12$ , onde  $c_{ei}$  e  $k_{ei}$  são o coeficiente de atrito e constante elástica da  $i$ -ésima articulação, respectivamente.

Porém, é lógico supor que a primeira articulação (extremidade fixa do cabo) pode ter parâmetros diferentes das demais articulações. Portanto foram identificados os parâmetros  $c_{e1}$ ,  $k_{e1}$ ,  $c_e = c_{ei}$  e  $k_e = k_{ei}$ ,  $i = 2, \dots, 12$ . Estes parâmetros são desconhecidos, mas como dito anteriormente, há a necessidade de se adotar valores iniciais para o processo de minimização, adotados conforme especificado na Tabela 6.3.

Tabela 6.3 - Valores iniciais para os parâmetros de atrito e elasticidade do modelo com 12 elos

Parâmetro	Valor inicial
$c_{e1}$	$2.688e - 4$
$c_{ei}, i = 2, \dots, 12$	$1.344e - 4$
$k_{e1}$	47.448
$k_{ei}, i = 2, \dots, 12$	47.448

Tomando os parâmetros mostrados na Tabela 6.1, na Tabela 6.2 e na Tabela 6.3, o processo neste trabalho inicia com a obtenção dos dados da simulação usada como base de comparação (estrutura com 60 elos), utilizando os algoritmos para a geração automática das matrizes da equação geral da dinâmica descritos no Capítulo 4. Após esta etapa, é simula-se o modelo com 12 elos, utilizando os valores iniciais da Tabela 6.3, na primeira iteração. Os dados obtidos nessas simulações consistem nos ângulos de cada elo com relação ao eixo vertical paralelo ao eixo vertical do referencial de origem do sistema.

Neste momento vale lembrar que o objetivo da utilização do método é alterar o simplex inicial conforme a Tabela 6.3 que são os coeficientes de atrito e constantes elásticas do modelo com 12 elos de forma que as diferenças das posições das duas estruturas seja a menor possível, com isso deve-se obter a posição de cada articulação em coordenadas cartesianas, tanto do modelo de 60 elos quanto para o modelo de 12 elos onde a posição da  $i$ -ésima articulação tem coordenadas  $(y_i, x_i)$ , onde essas coordenadas são obtidas através da transformação dos ângulos de cada articulação nos valores de  $y_i$  e  $x_i$ , onde

$$y_i = \sum_{k=1}^i \cos \theta_k l_k \quad (6.1)$$

$$x_i = \sum_{k=1}^i \sin \theta_k l_k \quad (6.2)$$

onde  $\theta_k$  e  $l_k$  é o ângulo e o comprimento da  $k$ -ésima articulação, respectivamente. Com isto obtêm-se as coordenadas cartesianas da  $i$ -ésima articulação.

A posição da carga terminal se dá da mesma forma, ao final do último elo do sistema, ficando, assim, determinada a posição da carga terminal:

$$y_c = \sum_{k=1}^n \cos \theta_k l_k \quad (6.3)$$

$$x_c = \sum_{k=1}^n \sin \theta_k l_k \quad (6.4)$$

onde  $n$  é o número de elos do sistema (60 e 12, neste caso).

Um detalhe muito importante que se deve destacar é o fato de que o modelo tomado como base tem um número múltiplo de elos com relação ao modelo simulado. Esse fato se deve a necessidade de haver uma certa equidistância nas frações de cada modelo a fim de comparações coerentes, neste trabalho tem-se um modelo de 60 elos tomado como base, ou seja, cinco vezes mais elos do que o modelo simulado, que são de doze elos.

Com este esclarecimento, pode-se obter a distância entre as posições das articulações  $5i$  do modelo de 60 elos e a articulação  $i$  do modelo de 12 elos em cada instante de ao longo do tempo de simulação, essa diferença é calculada da seguinte forma:

$$Er_t = \frac{\sum_{i=1}^{12} \sqrt{(\tilde{x}_{5i} - x_i)^2 + (\tilde{y}_{5i} - y_i)^2}}{12} \quad (6.5)$$

onde  $\tilde{y}$  e  $\tilde{x}$  são coordenadas cartesianas referentes ao modelo base,  $y$  e  $x$  são coordenadas cartesianas referentes ao modelo simulado e  $i = 1,2,3, \dots, 12$ .

$Er_t$  consiste na média entre as diferenças das posições da articulação  $5i$  do modelo de 60 elos e a posição da articulação  $i$  do modelo de 12 elos, no instante de tempo  $t$  da simulação. Cada simulação mostra o comportamento do cabo durante 3s e estas diferenças são calculadas a cada 0.001 s, a cada 0.001 s calcula-se a média das diferenças entre as articulações dos dois modelos. As diferenças médias  $Er_t$  geram um vetor  $\overrightarrow{Er}$  com a média das diferenças nos instantes de tempo  $t$ , obtido  $Er$  calcula-se o erro total (*Erro*) que consiste na média deste vetor, ou seja,

$$Erro = \overline{\overrightarrow{Er}} \quad (6.6)$$

A média de  $\overrightarrow{Er}$  é o valor a ser minimizado pelo método, em outras palavras, busca-se diminuir a média do vetor  $\overrightarrow{Er}$ .

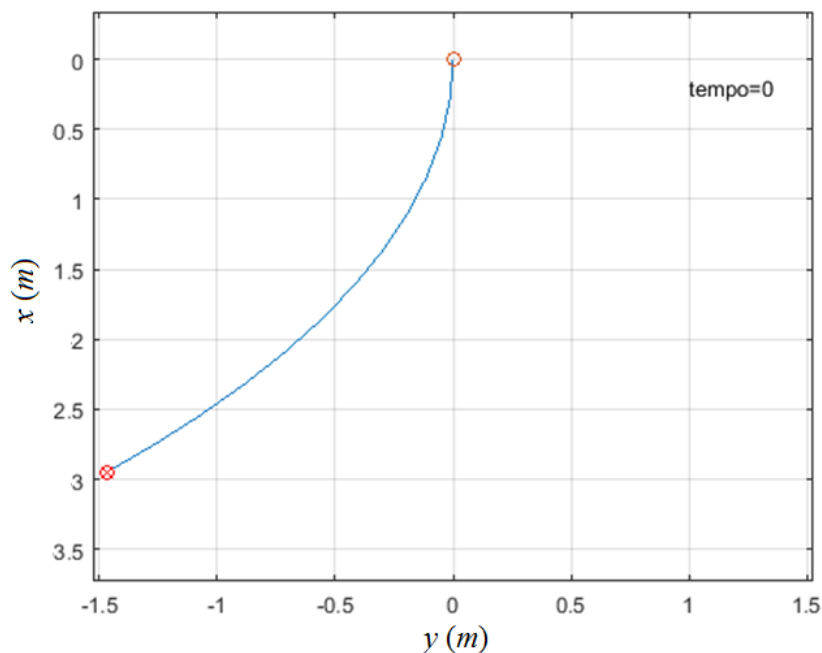
Obtido o erro (*Erro*) na primeira iteração o método de Nelder-Mead altera os valores

iniciais dos coeficientes de atrito e constantes elásticas e repete todo o processo novamente.

Os coeficientes de atrito e constantes elásticas não podem ser valores negativos e o método simplex de Nelder-Mead não faz distinção de valores negativos e positivos, por este motivo tomam-se como resultados do método o último simplex onde ambos os valores deste simplex são positivos.

## 6.2 Resultados das Simulações

As simulações apresentadas a seguir foram feitas com os modelos 60 elos e 12 elos, este último com os parâmetros estimados no processo de minimização do erro visto na seção anterior. O cabo parte do repouso, do equilíbrio estático inicial, com configuração espacial gerada a partir de uma curva catenária, idêntica à mostrada na Figura 6.2. A extremidade superior do cabo está articulada a uma estrutura fixa, enquanto que a inferior está livre. A partir desta configuração inicial no tempo zero, a dinâmica evolui sob o efeito dos torques gravitacionais.

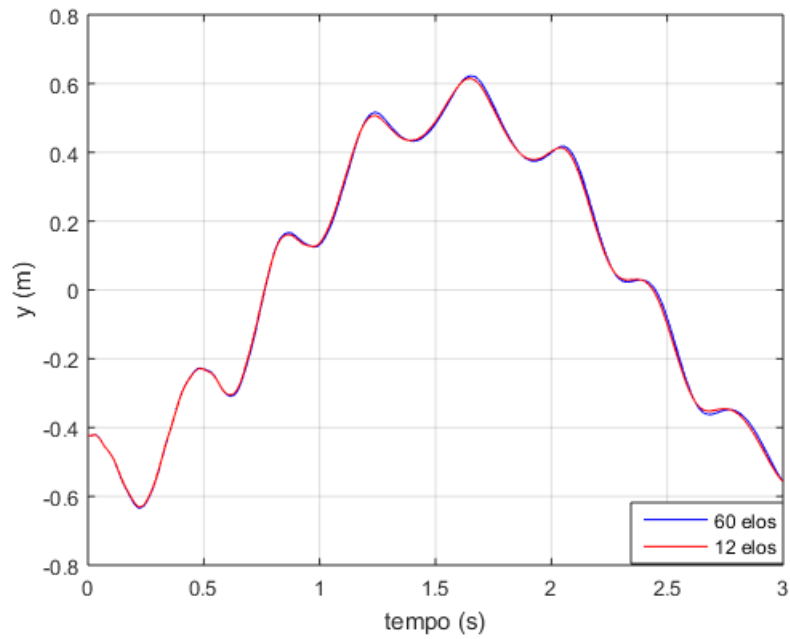


*Figura 6.2- Configuração espacial inicial do cabo, obtida a partir de uma curva catenária (escalas em m).*

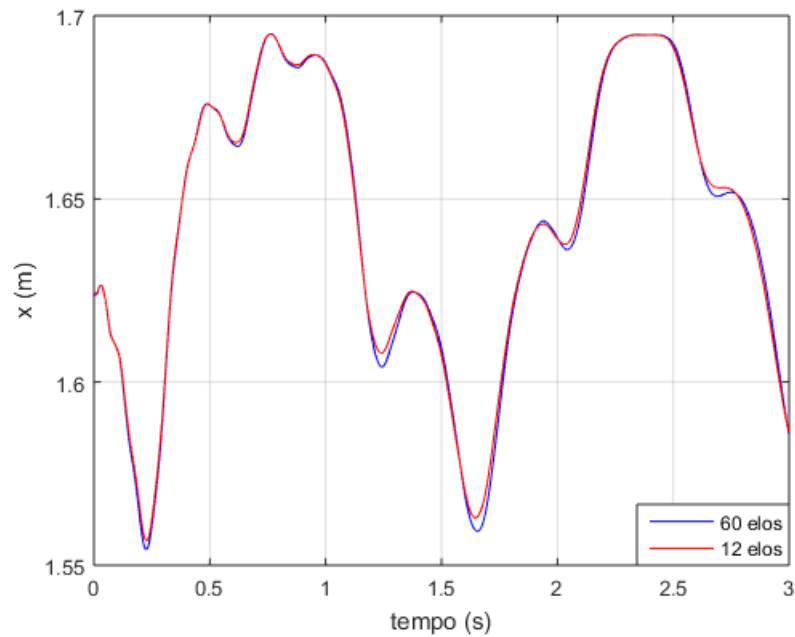
A partir dos dados obtidos como resultado do processo de minimização pôde-se gerar gráficos que facilitam a visualização das diferenças entre os modelos os quais levam a considerar que há uma diferença aceitável entre o modelo de 60 elos e o modelo de 12 elos, este por sua vez, já

com os coeficientes de atrito e constantes elásticas otimizados, ou seja, com esses valores obtidos após o processo de minimização.

As Figura 6.3 e Figura 6.4 mostram as diferenças entre os componentes  $Y$  e  $X$  do ponto cartesiano  $(Y, X)$  das articulações médias dos modelos comparados, 60 elos e 12 elos durante 3 s de simulação destes modelos.



*Figura 6.3 - Posição Y das articulações médias*



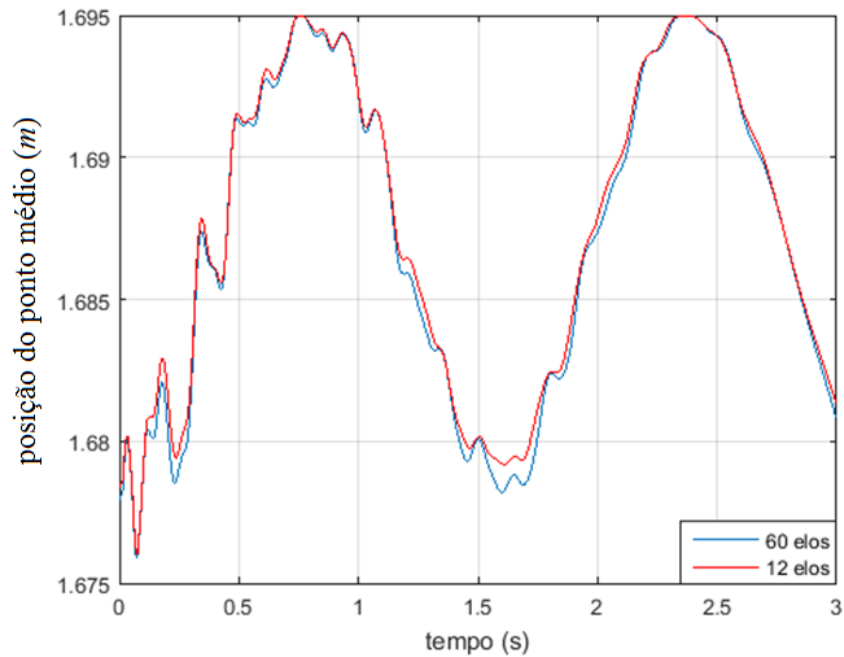
*Figura 6.4 - Posição X das articulações médias*

As posições das articulações médias são apresentadas como as distâncias entre a origem do sistema de referência até o ponto cartesiano da articulação média (articulação 6 para o modelo de 12 e articulação 30 no modelo de 60 elos) no determinado instante de tempo, ou seja,

$$Pm1_t = \sqrt{y_6^2 + x_6^2} \quad (6.7)$$

$$Pm2_t = \sqrt{y_{30}^2 + x_{30}^2} \quad (6.8)$$

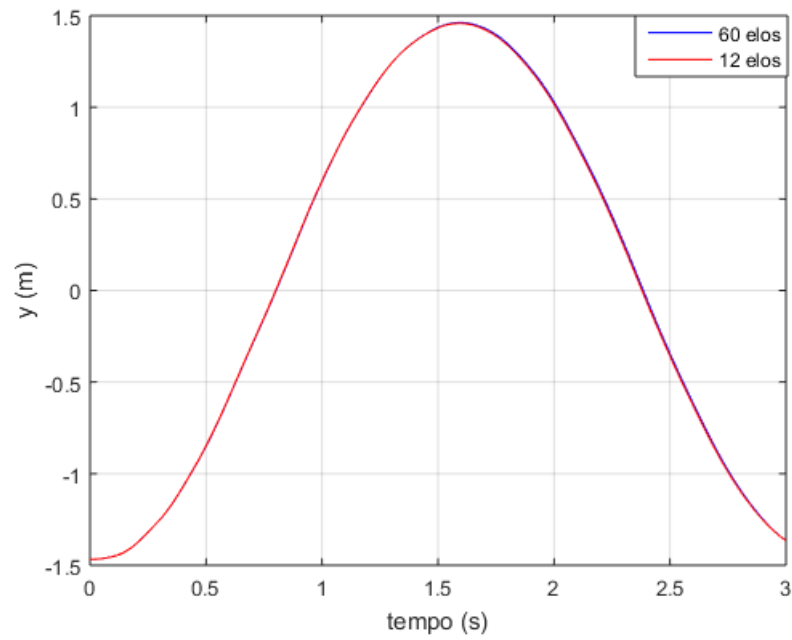
onde  $y_6$  e  $x_6$  são as coordenadas da articulação 6 e  $y_{30}$  e  $x_{30}$  são as coordenadas da articulação 30, ambas no instante de tempo  $t$ ,  $Pm1$  e  $Pm2$  são os vetores que contém as posições das articulações centrais dos modelos de 12 elos e de 60 elos, respectivamente. Essas posições são apresentadas na Figura 6.5.



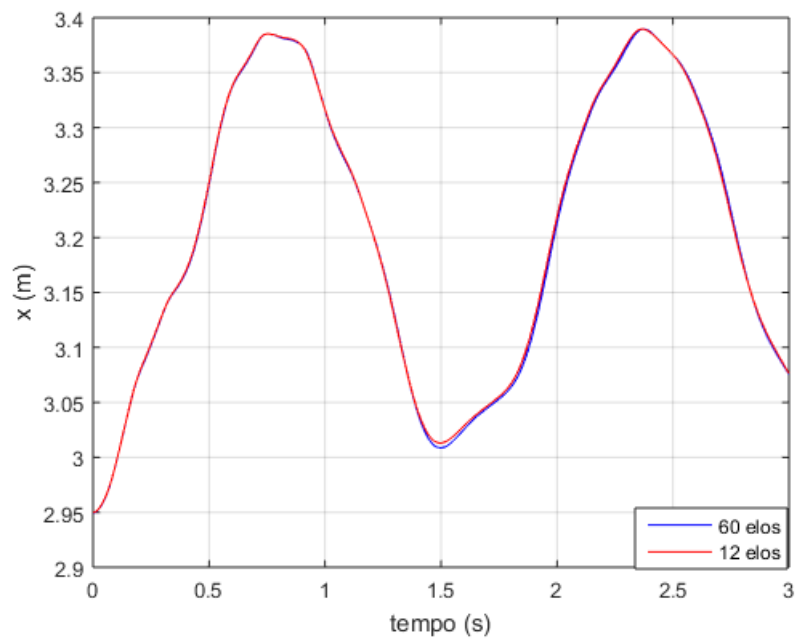
*Figura 6.5 - Posições das articulações 6 (modelo 12 elos) e 30 (modelo 60 elos).*

Assim, como para as articulações centrais dos modelos, as mesmas apresentações podem ser feitas para as cargas terminais destes sistemas. Com isso, pode-se obter, também, gráficos que apresentam as diferenças entre os componentes  $y$  e  $x$  da carga terminal obtidas com os modelos de 12 e 60 elos, bem como as posições destas no plano cartesiano.

A Figura 6.6 e a Figura 6.7 mostram as diferenças entre as componentes  $y$  e  $x$  dos pontos onde se encontram as cargas terminais em ambos os modelos.



*Figura 6.6 - Posição Y das cargas terminais*



*Figura 6.7 - Posição X das cargas terminais*

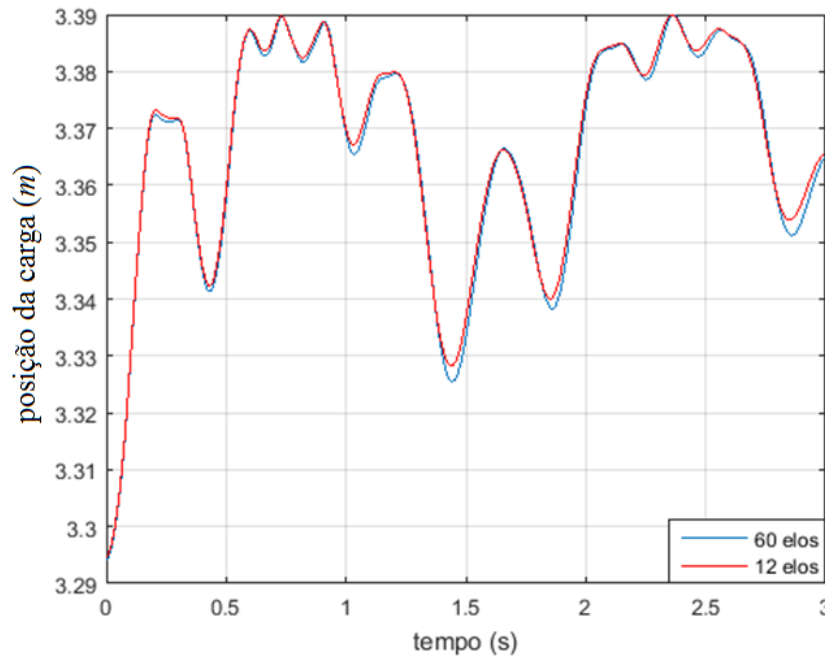
As posições das cargas terminais foram obtidas do mesmo modo que obteve-se as posições das articulações centrais, apenas utilizou-se as coordenadas cartesianas das cargas terminais para obter essas posições, da seguinte forma:



$$Pc1_t = \sqrt{y_{12}^2 + x_{12}^2} \quad (6.9)$$

$$Pc2_t = \sqrt{y_{60}^2 + x_{60}^2} \quad (6.10)$$

onde  $y_{12}$  e  $x_{12}$  são as coordenadas da carga terminal no modelo de 12 elos e  $y_{60}$  e  $x_{60}$  são as coordenadas da carga terminal no sistema com 60 elos, ambas no instante de tempo  $t$ ,  $Pc1$  e  $Pc2$  são os vetores que contém as posições das cargas terminais dos modelos de 12 elos e de 60 elos, respectivamente. As posições das cargas são apresentadas na Figura 6.8.



*Figura 6.8 - Posição da carga terminal, considerando-se os modelos de 12 e 60 elos*

Em ambos os casos, observa-se uma boa concordância entre os resultados com os dois modelos, indicando que os parâmetros identificados no modelo 12 elos foram de fato ótimos do ponto de vista do processo de minimização utilizado. Para facilitar a visualização destes resultados, a Tabela 6.4 apresenta as médias das diferenças de cada situação mostradas através das figuras anteriormente vistas.

Tabela 6.4 - Diferenças médias

Diferença	Valor
$y$ (nas articulações médias - Figura 6.3)	0.0056
$x$ (nas articulações médias - Figura 6.4)	0.0013
Posições (articulações médias - Figura 6.5)	3.0625e-04
$y$ (nas cargas terminais - Figura 6.6)	0.0055
$x$ (nas cargas terminais - Figura 6.7)	0.0018
Posições (cargas terminais - Figura 6.8)	9.9394e-04
<b>Total (entre os modelos)</b>	<b>0.0012</b>

Foi desenvolvido um *software* no MATLAB que permite visualizar uma animação a partir de frames com configurações espaciais do cabo. A Figura 6.9 mostra uma sequência de doze frames, coletados a cada 0.25 s, do tempo 0 até 2.75 s, significando aproximadamente um período completo do movimento espacial do cabo.

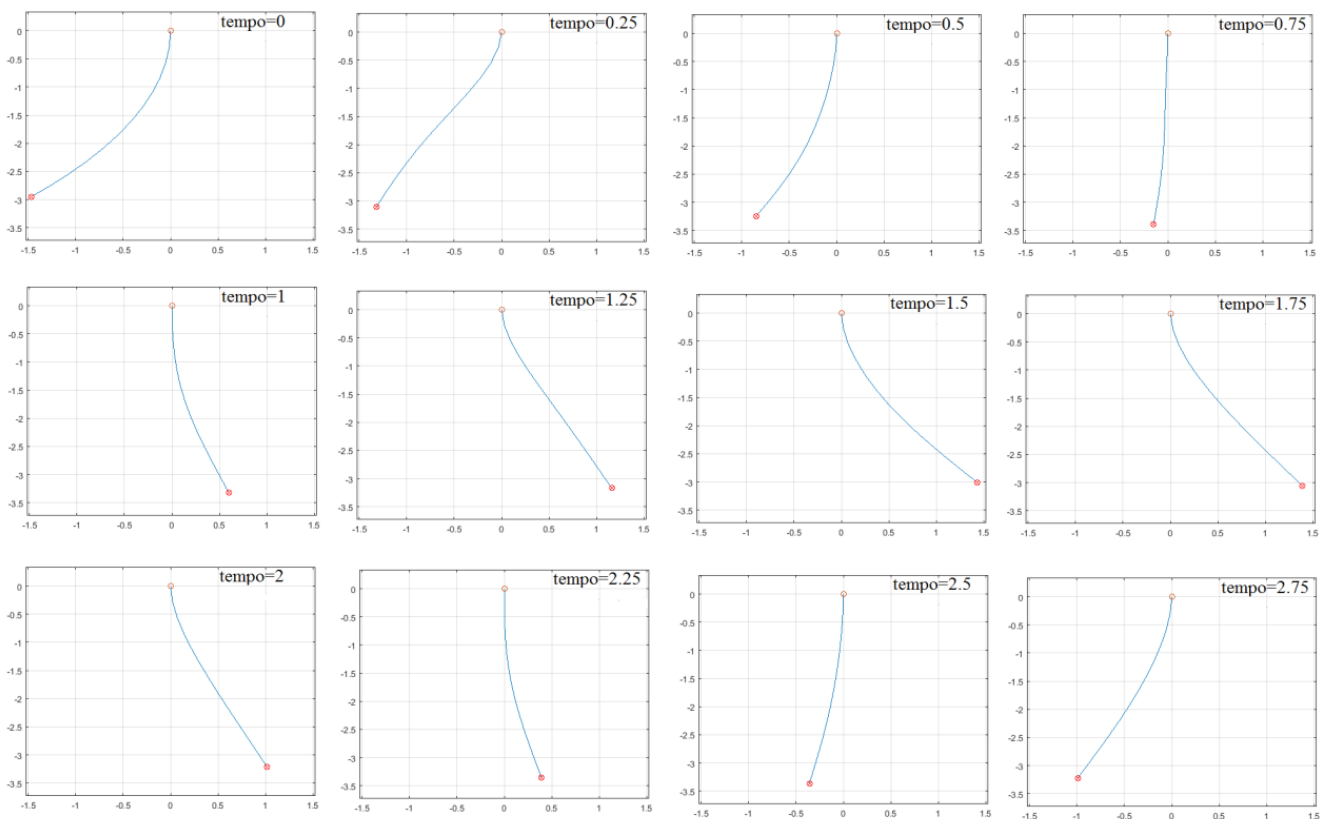
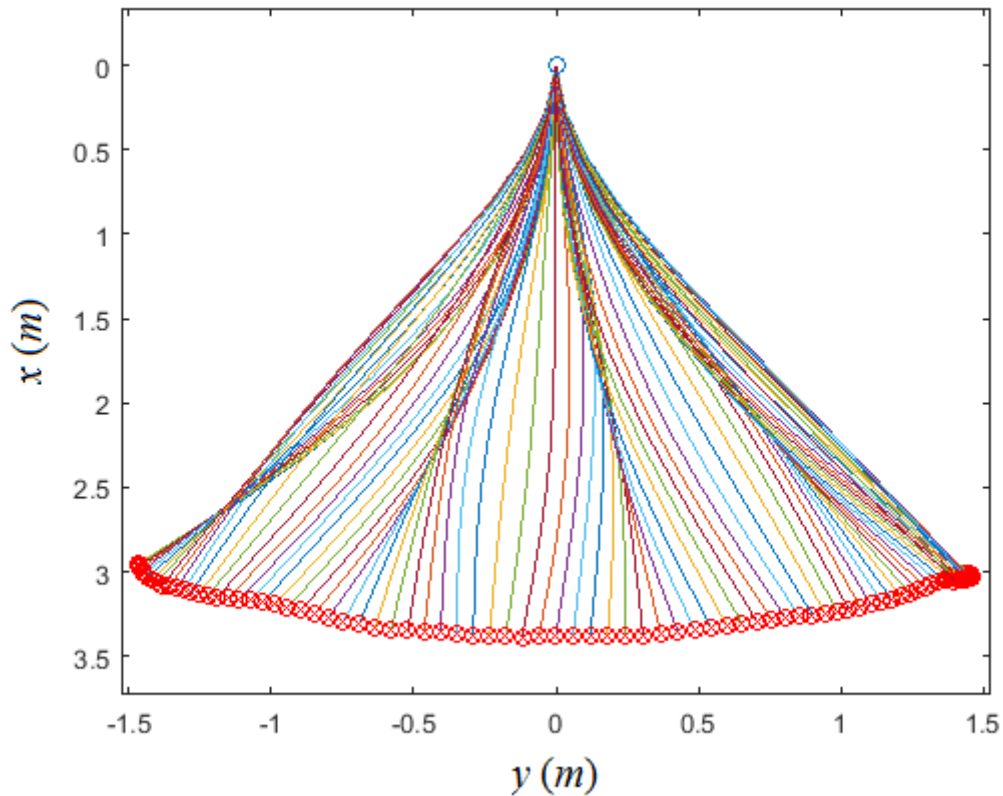


Figura 6.9 - Animação com frames a cada 0.25 s, com o modelo 12 elos

Na Figura 6.10 são mostradas configurações espaciais sobrepostas na mesma janela gráfica, do tempo 0 ao tempo 1.75 s, a cada 0.02 s, pode-se ter uma visão mais geral do movimento que a estrutura realiza durante o período de simulação.



*Figura 6.10 - Configurações espaciais do cabo, de 0 a 1.75s (meio período), a cada 0.02s*

Estes resultados, obtidos a partir do software de animação, permitiram observar uma forte sensação de realidade física, indicando que a modelagem dinâmica e o processo de identificação paramétrica podem conferir bons resultados na representação do fenômeno físico.

## 7 VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL

O presente capítulo consiste na validação experimental dos algoritmos de geração automática, ou seja, busca-se validar a modelagem dinâmica a partir de comparações entre simulação e resultado experimental. Essas comparações foram realizadas de forma muito semelhante às comparações apresentadas no Capítulo 6 deste trabalho, porém, substituiu-se o modelo de 60 elos por um resultado experimental, isto é, por um cabo real como suporte experimental.

### 7.1 Suporte Experimental

O suporte experimental utilizado neste trabalho foi desenvolvido em uma sala do Núcleo de Matemática Aplicada e Controle (NuMA-IMEF-FURG). Fixou-se a extremidade superior do cabo de fibra sintética ao teto da sala e manteve-se a outra extremidade livre, na qual foi colocada uma carga terminal de massa conhecida. Nesta estrutura foram demarcados (marcações em vermelho) 12 pontos de forma a tê-los igualmente espaçados e nas mesmas posições das articulações fictícias de um modelo com 12 elos. A Figura 7.1 mostra as demarcações feitas no cabo, quando este se encontra na configuração espacial inicial, correspondendo ao primeiro frame capturado por uma câmera digital, quando o cabo ainda encontra-se em forma de catenária.



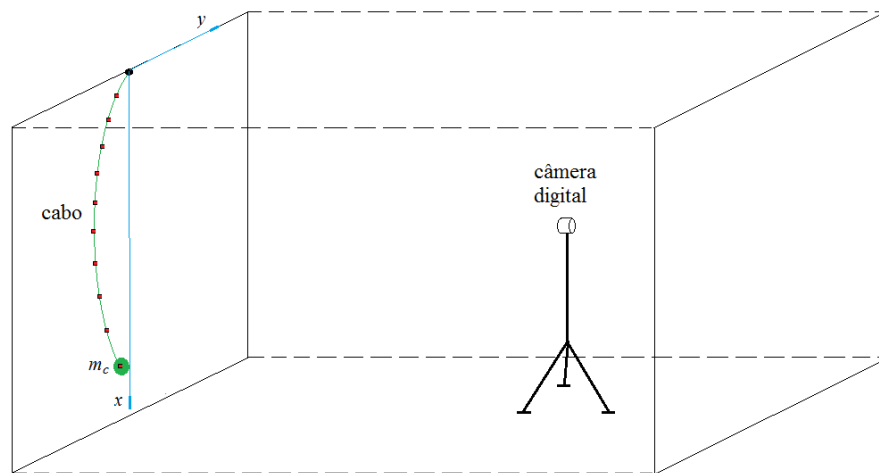
*Figura 7.1 - Configuração inicial do cabo e suas demarcações*

O cabo utilizado nos experimentos apresenta alguns parâmetros conhecidos, ou seja, foram mensurados e utilizados nas simulações, os quais estão descritos na Tabela 7.1:

*Tabela 7.1 - Parâmetros do experimento*

<b>Parâmetro</b>	<b>Valor</b>
Massa específica do cabo ( $kg/m$ )	$m_{esp} = 0.1424$
Comprimento do cabo ( $m$ )	$L = 2.585$
Número de demarcações	$n = 12$
Comprimento $l_i$ de cada elo ( $m$ )	$l_i = L/n$
Massa da carga terminal ( $kg$ )	$m_c = 1.381$
Massa de cada elo ( $kg$ )	$m_i = m_{esp} l_i$
Momento de inércia rotacional de cada elo ( $kgm^2$ )	$I_{ri} = (m_i/12)l_i^2$
Coefficiente de arrasto atmosférico ( $Nm\ rd^2/s^2$ )	$c_v = 0.2$

Para realizar comparações entre modelo e experimento foi necessário utilizar recursos de mídia para filmar digitalmente o experimento e assim, realizar a identificação das posições das articulações fictícias, marcadas em vermelho no cabo. Posicionou-se então uma câmera a uma distância de  $2.15m$  do cabo de modo que esta tenha alcance de filmar toda a amplitude do movimento do cabo para conseguir obter um número maior de frames (quadros) a serem comparados. A Figura 7.2 ilustra o suporte experimental, com a câmera posta perpendicularmente ao plano  $xy$  que contém o movimento do cabo, estando o eixo  $x$  na direção vertical e posicionado no centro da imagem capturada pela câmera.



*Figura 7.2 - Layout do experimento*

Com a captura das imagens obtêm-se os frames que serão utilizados para identificar as posições cartesianas dos pontos demarcados no cabo, as quais serão posteriormente utilizadas no processo de minimização dos erros na identificação paramétrica, conforme explicado a seguir.

## 7.2 Identificação paramétrica

Nesta identificação paramétrica foi utilizado o mesmo processo que foi apresentado no Capítulo 6. Porém, neste caso, foram usados dados experimentais, obtidos a partir das posições das demarcações feitas no cabo, as quais possibilitaram as análises dos erros entre simulação e experimento.

O processo de minimização foi todo implementado utilizando-se o software MATLAB, utilizando-se a função “*fminsearch.m*” que contém o método de Nelder-Mead Simplex. Foram

assumidos doze elos para o modelo, ou seja, o mesmo número de demarcações no cabo, coincidentes com as posições das articulações fictícias.

A técnica utilizada na identificação dos parâmetros de atrito e elasticidade do experimento foi a mesma utilizada para identificar esses parâmetros na minimização dos erros entre os modelo com 12 e 60 elos. Trabalhou-se com a identificação de duas constantes,  $\alpha$  e  $\beta$ , que multiplicam as matrizes dos coeficientes de atrito e das constantes elásticas, respectivamente. Uma vez que o cabo é composto pelo mesmo material ao longo do seu comprimento e o seu diâmetro é constante, pode-se considerar que os coeficientes de atrito e constantes elásticas são os mesmo para todas as articulações fictícias, de forma que há a necessidade de se identificar apenas dois parâmetros,  $\alpha$  e  $\beta$ , os quais multiplicam as matrizes de coeficiente de atrito e de constantes elásticas, respectivamente.

Como  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes que devem ser identificadas, esses valores devem ser inicializados, ou seja, foram atribuídos valores iniciais para estas constantes para que o processo de minimização seja inicializado de forma a se obter o menor erro, extraído das posições experimental e simulada.

O processo de minimização de erros inicia-se com os dados experimentais, posições cartesianas das demarcações do experimento. Posteriormente gera-se o modelo com 12 elos, no qual os multiplicadores das matrizes dos coeficientes de atrito e das constantes elásticas são os valores atribuídos inicialmente a  $\alpha$  e  $\beta$ . Uma primeira simulação é realizada e então, calcula-se o erro entre simulação e experimento na forma:

$$erro = \frac{(s_1 + s_2 + s_3 + s_4)}{4} \quad (7.1)$$

onde

$$s_1 = \frac{1}{n_p} \sum_{i=1}^{n_p} |X_{mi} - x_{mi}| \quad (7.2)$$

$$s_2 = \frac{1}{n_p} \sum_{i=1}^{n_p} |X_{ci} - x_{ci}| \quad (7.3)$$

$$s_3 = \frac{1}{n_p} \sum_{i=1}^{n_p} |Y_{mi} - y_{mi}| \quad (7.4)$$

$$s_4 = \frac{1}{n_p} \sum_{i=1}^{n_p} |Y_{ci} - y_{ci}| \quad (7.5)$$

onde  $n_p$  é o número de pontos de uma simulação, que é idêntico ao número de pontos do experimento (equivalente ao número de frames do vídeo).  $X_{mi}$  é a coordenada  $x$  do ponto médio experimental,  $x_{mi}$  a coordenada  $x$  do ponto médio simulado,  $X_{ci}$  é a coordenada  $x$  da carga terminal experimental,  $x_{ci}$  é a coordenada  $x$  da carga terminal simulada,  $Y_{mi}$  é a coordenada  $y$  do ponto médio experimental,  $y_{mi}$  é a coordenada  $y$  do ponto médio simulado,  $Y_{ci}$  é a coordenada  $y$  da carga terminal experimental e  $y_{ci}$  é a coordenada  $y$  da carga terminal do modelo simulado.

Ao se obter o valor numérico deste erro, o método de minimização vai alterar o simplex inicial (valores atribuídos  $\alpha$  e  $\beta$ ) de forma a se obter um valor menor do erro obtido com a equação (7.1). A Tabela 7.2 mostra o refinamento final da identificação. Por questão de espaço a Tabela 7.2 não mostra todos os passos do processo. Os parâmetros iniciais foram  $\alpha = 2.8$  e  $\beta = 1.8$ , sendo que os valores identificados para as constantes de atrito e elástica de cada articulação fictícia (já multiplicados por  $\alpha$  e  $\beta$ ) foram  $0.0403 \text{ Nms/rd}$  e  $0.0653 \text{ Nm/rd}$ , respectivamente.

*Tabela 7.2 - Refinamento final do processo de minimização.*

Erro (m)	$\alpha$	$\beta$
0.0203	2.2000	1.2000
0.0216	2.3100	1.2000
0.0203	2.2000	1.2600
0.0192	2.0900	1.2600
0.0186	1.9800	1.2900
0.0186	1.9800	1.2300
0.0187	1.8700	1.2150
0.0197	1.7600	1.3200
0.0187	1.8700	1.2900
0.0192	2.0900	1.2300
0.0186	1.9250	1.2750
0.0186	1.9250	1.2150
0.0186	1.8975	1.1775
0.0187	1.8700	1.2600
0.0186	1.9525	1.2375
0.0186	1.9525	1.1775
0.0186	1.9662	1.1288
0.0186	1.9387	1.1063
0.0186	1.9319	1.0406
0.0185	1.9731	0.9544
0.0186	1.9972	0.8241



Observa-se, na Tabela 7.2, que o menor erro obtido foi de  $0.0185\text{ m}$  (linha destacada em vermelho), para os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  iguais a 1.9731 e 0.9544, respectivamente. A Figura 7.3 mostra a evolução dos erros entre o modelo simulado e o experimento. Pode-se observar a redução do erro de forma considerável nos primeiros vinte passos do processo de minimização.

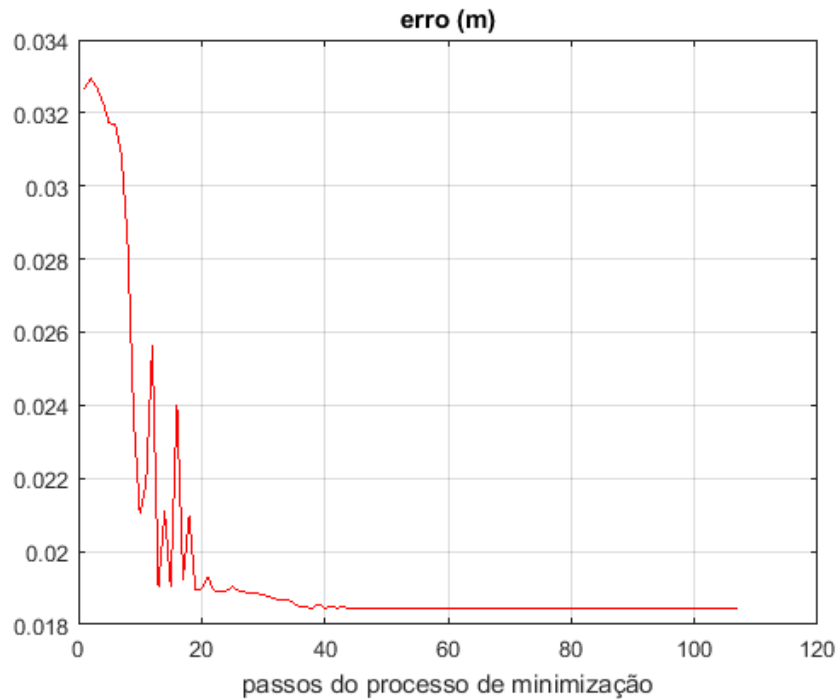


Figura 7.3 - Evolução do erro na minimização com a função “*fminsearch.m*” (MATLAB).

Com a identificação dos parâmetros de atrito e elasticidades o modelo usado nas análises dos resultados tem os parâmetros mostrados na Tabela 7.3.

Tabela 7.3 - Parâmetros do modelo simulado

Parâmetros	Valores
Comprimento do cabo ( $L_c$ )	2.585 m
Número de elos ( $n$ )	12
Comprimento de cada elo ( $l_i, i = 1, \dots, 12$ )	0.2154 m
Massa específica do cabo ( $m_{esp}$ )	0.1409 kg/m
Massa de cada elo ( $m_i, i = 1, \dots, 12$ )	0.0304 kg
Massa da carga terminal ( $m_c$ )	1.381 kg
Constante elástica de cada articulação fictícia ( $k$ )	0.0653 Nm/rd
Constante de atrito de cada articulação fictícia ( $c$ )	0.0403 Nms/rd

### 7.3 Simulação e Experimento

Nesta seção apresenta-se uma simulação confrontada a um resultado experimental. O cabo foi posto numa configuração espacial inicial e em seguida, solto do repouso, de forma que a sua dinâmica evolui a partir do tempo inicial nulo apenas sob o efeito da gravidade. Na simulação, as condições iniciais também foram as mesmas do experimento.

Com o objetivo de facilitar a visualização dos erros entre o modelo simulado e o experimento, foi desenvolvido um software no MATLAB que realiza a animação a partir de frames com configurações espaciais e apresenta esses movimentos simultâneos, ou seja, os dois movimentos vistos na mesma imagem, fato que também auxilia na visualização da coerência entre os movimentos, pois, quanto menor o erro mais semelhantes serão os movimentos simulado e experimental. A Figura 7.4 mostra uma sequência de dezesseis frames, coletados dentro de aproximadamente 1s (segundo) de animação, com período amostral de 0.0665s, sendo o movimento simulado em azul e o experimental em vermelho.

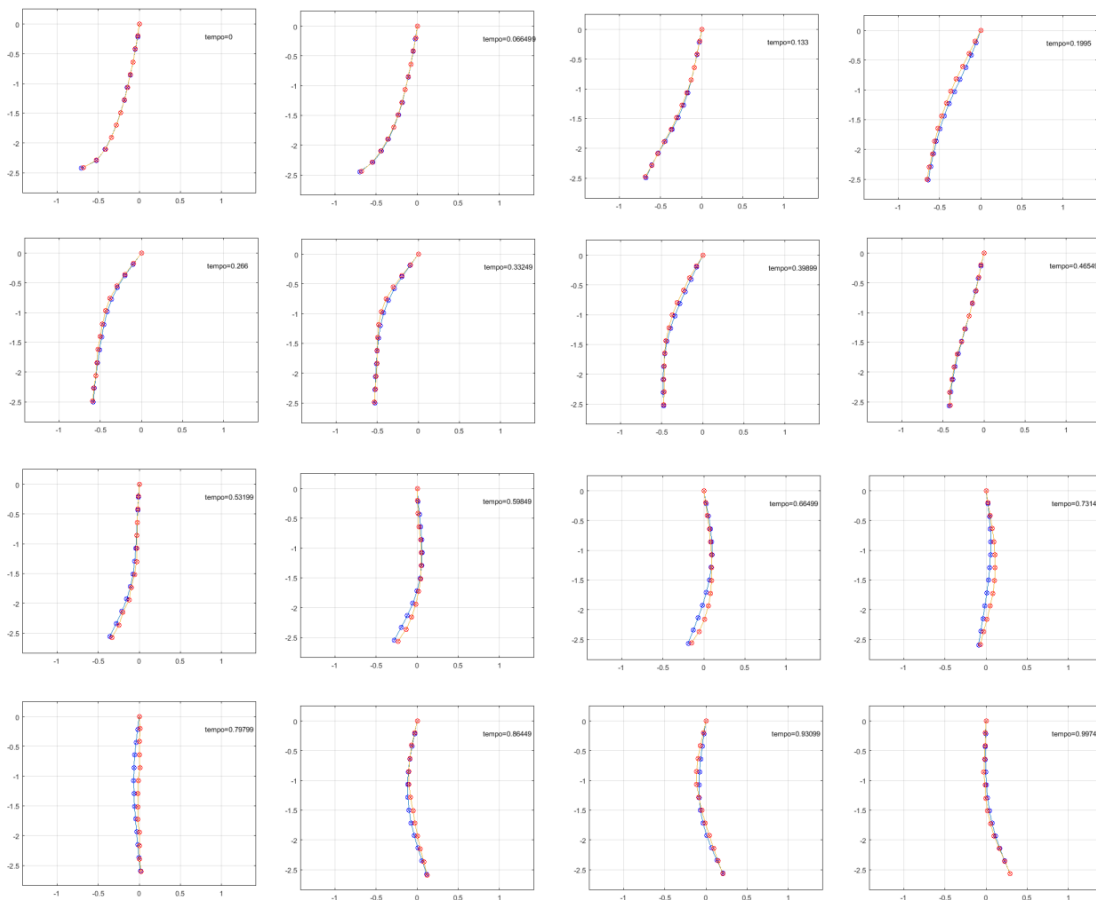


Figura 7.4 - Animação com os frames mostrando o movimento do cabo durante 1s: : simulação em azul e experimento em vermelho.

Detalhando-se ainda mais essas diferenças de posições entre os movimentos do cabo simulado e experimental, têm-se os gráficos da Figura 7.5 que apresentam as diferenças (erros) nas coordenadas  $x$  e  $y$  dos pontos médios e das cargas terminais, simulado e experimental, durante um tempo de aproximadamente 6.3s.

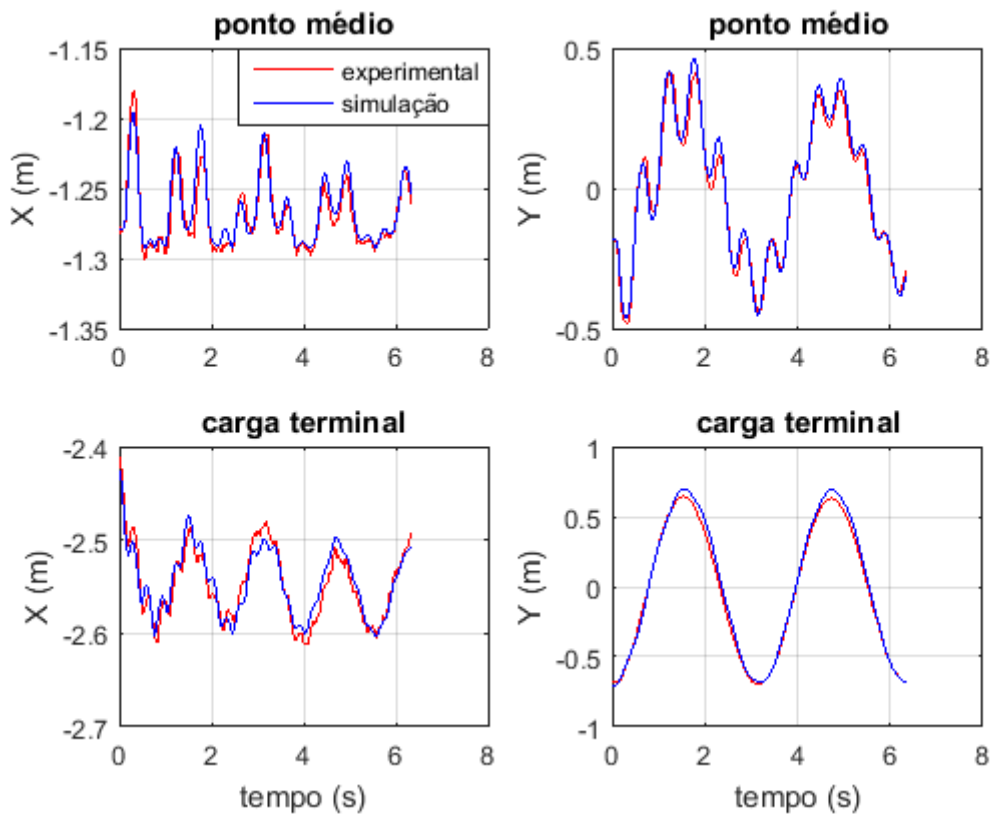


Figura 7.5 - Posições cartesianas do ponto médio e da carga terminal

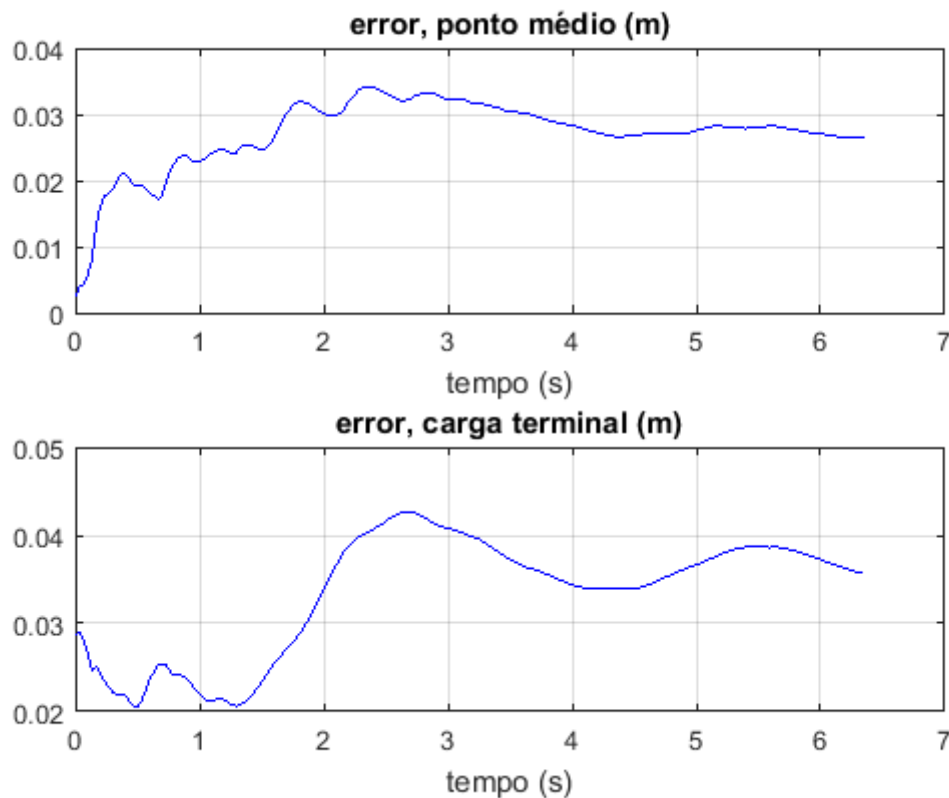
Optou-se por realizar as comparações durante este intervalo de tempo devido ao fato que nos primeiros segundos os movimentos apresentam transitório com as frequências bem visíveis, sendo ainda o intervalo de tempo que apresenta maiores diferenças de posições entre o modelo simulado e o experimento.

Foi realizada também uma análise de erros no ponto médio e na carga terminal. Estes erros foram calculados no ponto médio e na carga terminal nas formas:

$$Er_{\text{médio}} = \sqrt{(\tilde{x}_m - x_m)^2 + (\tilde{y}_m - y_m)^2} \quad (7.6)$$

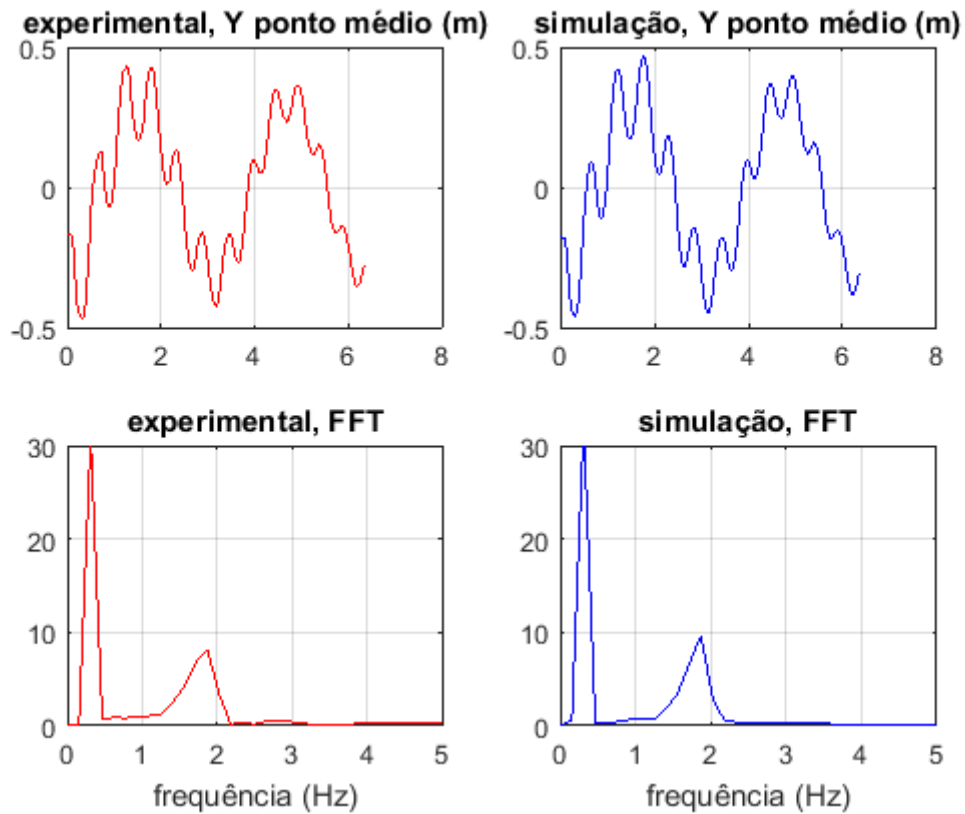
$$Er_{carga} = \sqrt{(\tilde{x}_c - x_c)^2 + (\tilde{y}_c - y_c)^2} \quad (7.7)$$

onde  $\tilde{x}_m$  e  $\tilde{y}_m$  são as coordenadas do ponto médio do experimento,  $x_m$  e  $y_m$  são as coordenadas do ponto médio do modelo simulado,  $\tilde{x}_c$  e  $\tilde{y}_c$  são as coordenadas da carga terminal do experimento e  $x_c$  e  $y_c$  são as coordenadas da carga terminal do modelo simulado. A *Figura 7.6* mostra as evoluções destes erros ao longo do tempo.



*Figura 7.6 - Erros nas posições do ponto médio e da carga terminal*

Outra forma de se analisar os resultados é a partir do espectro de frequências dos sinais, utilizando-se a FFT (*Fast Fourier Transform*, em português Transformada Rápida de Fourier). Nas comparações anteriores se trabalhou com as comparações no domínio do tempo (s). Com a utilização da FFT passou-se a trabalhar no domínio da frequência (Hz). A *Figura 7.7* mostra as coordenadas cartesianas e suas respectivas FFT. Percebe-se que as duas primeiras frequências são praticamente idênticas nos sinais simulado e experimental.



*Figura 7.7 - Coordenadas cartesianas do ponto médio e suas FFTs equivalentes*

A análise dos erros presente neste capítulo, entre simulação e experimento, permite afirmar que são de fato necessárias as identificações de apenas dois parâmetros do modelo dinâmico, de forma a que se tenha um modelo com boa representação da realidade física, atestada por simulações muito próximas a resultados experimentais obtidos sob as mesmas condições iniciais.

## 8 CONCLUSÕES

Neste Capítulo apresentam-se as conclusões gerais obtidas nesta dissertação, assim como possíveis trabalhos futuros que possam ser realizados a partir deste.

Um fato importante a ser mencionado é que todos os desenvolvimentos matemáticos relacionados à modelagem dinâmica do cabo com 2, 3 e 4 elos foram realizados e revisados manualmente, ou seja, sem o auxílio de *software* de manipulação simbólica.

Nesta dissertação a modelagem dinâmica foi adaptada para se trabalhar com a aplicação no plano vertical, diferentemente do desenvolvimento original que considerava movimentos no espaço tridimensional.

Conforme já comentado no capítulo de introdução, não há muitos trabalhos relacionados diretamente com a utilização deste formalismo discreto na literatura. Em sua grande maioria os artigos abordam técnicas com base em elementos finitos ou diferenças finitas.

Com o propósito de contribuir com a literatura relacionada à modelagem dinâmica de estruturas flexíveis do tipo cabo, a presente dissertação mostra a validação experimental dos algoritmos genéricos adaptados ao plano bem como a identificação de parâmetros a partir da minimização de erros entre simulação e experimento. Esta validação foi realizada pela primeira vez na presente dissertação e pode ser utilizada como base para trabalhos futuros que possam vir a usar esta modelagem dinâmica, bem como a identificação de parâmetros que exijam maiores dificuldades de mensuração.

Várias conclusões sobre as teorias desenvolvidas na presente dissertação já foram apresentadas no decorrer dos capítulos. Serão apresentados, entretanto, resumos sobre as principais conclusões extraídas de todo o trabalho realizado, com comentários que têm por objetivo auxiliar no esclarecimento e interpretação dos resultados do trabalho.

No capítulo 2 apresenta-se o desenvolvimento teórico do formalismo discreto, no qual o cabo é dividido em partes rígidas denominadas de elos que são conectadas por articulações fictícias elásticas, permitindo, neste caso, movimento livre de elevação no espaço bidimensional. As coordenadas do centro de massa e das articulações fictícias para cada elo são determinadas por transformações homogêneas. Assim, desenvolve-se uma única equação capaz de montar o Lagrangeano do sistema de forma simples, independentemente do número de elos que se queira dividir a estrutura. Este capítulo apresenta, ainda, a descrição da curva catenária que é utilizada para se conseguir a configuração espacial inicial, a qual confere o vetor de estado inicial para as simulações.

No capítulo 3 desta dissertação foi desenvolvida a modelagem dinâmica nos casos em que a estrutura foi dividida em dois, três e quatro elos e, a partir das equações de Euler-Lagrange, determinaram-se os sistemas de equações diferenciais ordinárias para os três modelos. Considera-se um cabo de comprimento  $L$ , articulado em uma extremidade e livre na outra. Cada parte em que é dividido o cabo tem comprimento  $l_i$ , sendo  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , sendo estes elos rígidos conectados por articulações fictícias elásticas. As equações do modelo foram desenvolvidas manualmente e à medida que se aumenta o número de elos, o Lagrangeano do sistema cresce muito, assim como o número de operações matemáticas na aplicação das equações de Euler-Lagrange.

No capítulo 4 é apresentada a formulação dos algoritmos genéricos a partir das equações gerais dos modelos desenvolvidas no capítulo anterior. Foram feitas análises sobre como ocorre o crescimento das matrizes e vetores dos modelos dinâmicos, para os casos de se considerar a estrutura com dois, três e quatro elos. Estas análises permitiram o desenvolvimento dos algoritmos genéricos. Estes algoritmos permitem gerar automaticamente os elementos que formam as matrizes e vetores do modelo dinâmico, possibilitando assim a geração de modelos com  $n$  elos.

O capítulo 5 apresentou o Método Simplex de Busca Direta de Nelder-Mead. Este método de minimização foi utilizado, principalmente pelo fato de apresentar uma minimização significativa nos primeiros passos do processo. Isso possibilita uma convergência mais rápida no processo de minimização. Como o método de Nelder-Mead não é o foco da presente dissertação, optou-se apenas por descrever o seu funcionamento e utilizar a função “*fminsearch.m*” já programada no *software* MATLAB. A proposta foi identificar apenas dois parâmetros, multiplicadores das matrizes de constantes elásticas e de atrito. Esta proposta se mostrou eficiente, conforme demonstrado no capítulo com a validação experimental.

O capítulo 6 apresentou a descrição do processo de identificação dos parâmetros de atrito e elasticidade de um modelo de 60 elos representando uma estrutura com flexibilidade contínua utilizada como alvo. Para isso, um modelo com 12 elos foi executado a cada passo do processo de minimização de erros, alterando os valores dos multiplicadores de  $C$  e  $K$  de forma a se obter o movimento do modelo com 12 elos o mais próximo possível do movimento do modelo com 60 elos, ou seja, minimizando-se os erros em posição. Os resultados obtidos validam o método de minimização de erros e foram considerados bons, tanto qualitativamente quanto quantitativamente, indicando assim que o processo de identificação paramétrica poderia ser utilizado experimentalmente.

O capítulo 7 apresentou a validação experimental, tanto do processo de identificação paramétrica quanto, e principalmente, da técnica de modelagem dinâmica proposta. Foram

realizadas comparações quantitativas entre o experimento e o modelo simulado, este último já com os parâmetros otimizados. Os resultados obtidos das análises comparativas foram considerados bons, uma vez que os movimentos do modelo simulado e do experimento foram muito semelhantes e, numericamente, os valores dos erros obtidos são pequenos se levado em conta o comprimento do cabo. A identificação dos parâmetros possibilitou resultados muito próximos entre simulação e planta física, indicando assim que a técnica de modelagem dinâmica permite gerar modelos que representam bem a realidade física do fenômeno.

Finalmente, pode-se considerar que os objetivos propostos para esta dissertação foram alcançados, uma vez que o processo de identificação de parâmetros se mostrou bastante eficaz tanto nas comparações simulação-simulação quanto nas comparações simulação-experimento. Os resultados muito semelhantes entre simulação e experimento permitem validar não apenas o método de identificação de parâmetros, mas, principalmente, a técnica de modelagem proposta com os algoritmos que geram os modelos de forma automática, sendo estas as principais contribuições desta dissertação na literatura da área de conhecimento. Como trabalhos futuros sugere-se o acoplamento entre a dinâmica do cabo com outras dinâmicas, como, por exemplo, plataformas móveis e robôs subaquáticos do tipo ROV.



## 9 REFERÊNCIAS

BANERJEE, A.K; DO, V.N. *Deployment Control of a Cable Connecting a Ship to an Underwater Vehicle*. Applied Mathematics and Computation, 70:97-116, 1995.

CORDOVÉS, D.C.S. *Análise de Confiabilidade Estrutural de Cabos Umbilicais*. Dissertação de Mestrado para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

FUGINO, Y., SUSUMPOW, T., e WARNITCHAI, P., *A non-linear dynamics model for cables and its application a cable-structure System*. Journal of Sound Vibration, Vol187, Issue 4, November 1995, pages 695-712.

FUNG, R.F., LEE, M.J., e WANG, P.H, *Finite element analisys of a three-dimensional underwater cable with time-dependent length*. Journal of Sound Vibration, Vol 209, Issue 2, January 1998, pages 223-249.

GONÇALVES, A.M.S., *O Problema de Min-max-min com Restrições Pelo Método de Nelder-mead*. Tese de Doutorado para obtenção do grau de Doutor em Ciências em Engenharia de Sistemas e Computação, Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, 2013.

ISOLDI, L.A. *Análise Numérica da Dinâmica de Cabos Altamente Extensíveis*. Dissertação de Mestrado para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Oceânica, Universidade Federal do Rio Grande – FURG, 2002.

ISOLDI, L.A.; SANTOS, M.A.V. *Análise Numérica Da Dinâmica De Cabos Altamente Extensíveis*. In: Revista Vetor, Vol.13, p. 7-23, 2003.

LAGARIAS, J. C., REEDS, J. A., WRIGHT, M. H. WRIGHT, P. E., *Convergence properties of the Nelder-Mead simplex method in low dimension*. SIAM Journal on Optimization, Vol 9, 1, 112-147, 1998.

LOPES, A.M. *Modelação Cinemática e Dinâmica de Manipuladores de Estrutura em Série*.

Robótica Industrial. FEUP, 2002.

MACHADO, C. C.; PEREIRA, A. E. L.; GOMES, S. C. P.; DE BORTOLI, A. L. *Um Novo Algoritmo para a Modelagem Dinâmica de Manipuladores Flexíveis*. In: Revista Controle e Automação, Vol. 13, p. 134-140, 2002.

MARZO, G.R. *Aplicação do Método dos Elementos Finitos na Análise de Tensões Induzidas em Cabos Umbilicais*. Dissertação de Mestrado para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2010.

MEIROVITCH, L. *Methods of Analytical Dynamics*, 1st Edition, McGraw-Hill Book Company, New York, United States of America, 1970.

NELDER, J. A., MEAD, R., *A simplex method for function minimization*. The computer Journal, 7, 308-313, 1965.

PEREIRA, A.E.L. *O Método da Decomposição de Adomian Aplicado à Interação fluido-estrutura de um cabo*. Tese de Doutorado para a obtenção do grau de Doutor em Matemática Aplicada, UFRGS, 2010.

PEREIRA, A.E.L. *Um estudo sobre Modelagem Matemática de Estruturas flexíveis*. Dissertação de Mestrado para a obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada, UFRGS, 1999.

ROCHA, I. B. P. *Modelagem Matemática de Cabos Umbilicais e Veículos Subaquáticos Não Tripulados*. Dissertação de Mestrado para a obtenção do grau de Mestre em Modelagem Computacional, Universidade Federal do Rio Grande - FURG. Rio Grande, 2013.

ROCHINA, F.A., SAMPAIO, R. e LE TALLEC, P. *O Método Lagrangeano Aumentado no Estudo de Cabos Umbilicais*. Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño em Ingenieria. Vol. 6,1, 97-108 (1990).

SANTOS, L.R., *Modelagem Não-linear da dinâmica de cabos Submarinos*. Tese de Doutorado para a obtenção do grau de Doutor em Ciências em Engenharia Mecânica. Universidade Federal do Rio

de Janeiro – UFRJ, 2007.

SIMMONS, G.F., *Cálculo com Geometria Analítica, vol1*, McGroe-Hill, São Paulo, Brasil, 1987.

SPENDLEY, W., HEXT, G. R., HINSWORTH, F. R., *Sequential application of simplex designs in optimization and evolutionary operation*. Technometrics, Vol. 4, No. 4, 441-461, 1962.

TSENG, P., *Fortified-Descent Simplicial Search Method: A General Approach*. SIAM Journal on Optimization, Vol. 10, pg 260–288, 1999.

VAZ, M.A; PATEL, M.H. *Three-Dimensional Behaviour of Elastic Marine Cables in Sheared Currents*. Applied Ocean Research. Vol. 22, Issue 1, p. 45-53, 2000.

ZANELA, E.B. *Modelagem Analítica de Estruturas do Tipo Cabo para Aplicações Subaquáticas*. Dissertação de Mestrado para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Oceânica, Universidade Federal do Rio Grande – FURG, 2013.