Um estudo dos fundamentos dos métodos Fourier espectrais com aplicações computacionais

Fabiana Travessini, Caio Merlini Giuliani e Jáuber C. Oliveira
Departamento de Matemática
Universidade Federal de Santa Catarina
88040-900 Florianópolis - SC
fabiana@mtm.ufsc.br, caio@smalt.com.br, jauber@mtm.ufsc.br

Neste trabalho apresentamos um estudo dos fundamentos dos métodos de Fourier espectrais. Este estudo é complementado pela obtenção de soluções aproximadas para equações diferenciais importantes em aplicações. Analisamos questões de existência e unicidade de soluções e a convergência e estabilidade dos esquemas discretos empregados para resolver numericamente tais equações.

Utilizamos dois esquemas numéricos de discretização das equações: Galerkin e Colocação. A eficiência computacional é alcançada através do uso de transformada rápida de Fourier.

Dentre os problemas considerados detalhamos a seguir o caso da equação da onda unidirecional: encontrar u 2π-periódica tal que

$$u_t + a(x)u_x = f(x), \quad 0 < x < 2\pi, \quad t > 0 \quad (1)$$

com $u(x,0) = u_0(x)$ 2π-periódica e $a, f \in C^{\infty}_{per}(0, 2\pi)$, $a(x) > 0\ \forall x \in (0,\ 2\ \pi)$.

A solução exata (método das características) é:

$$u = \int_0^t f(g^{-1}(\sigma + g(x) - t))\, d\sigma + u_0(g^{-1}(g(x) - t))$$

onde $g(x) = \int_0^x \frac{1}{a(s)}\, ds$.

A formulação discreta pelo método de Galerkin é obtida definindo a aproximação para u na forma

$$u^N = \sum_{k=-N}^{N-1} (\widehat{u^N})_k e^{ikx}$$

e o resíduo $R_N = u^N_t + a(x)u^N_x - f(x)$.

Impomos que o resíduo seja ortogonal a $S_N := ger\left\{exp\left(ikx,\ k = -N, \cdots, N-1\right)\right\}$.

Aproximamos a derivada com relação ao tempo por diferenças finitas e obtemos a seguinte fórmula de recorrência:

$$(\widehat{u^N})^{n+1}_j = 2\Delta t\left((\hat{f}_j)^n - (\widehat{au^N_x})^n_j\right) + (\widehat{u^N})^{n-1}_j$$

Usamos, então, a condição inicial dada para fazer

$$(\widehat{u^N})^0_j = (\widehat{u_0})_j.$$

Obtemos a segunda condição inicial pelo método de Runge-Kutta. Com relação a análise de estabilidade do problema semi-discreto (com $f = 0$ por simplicidade), obtemos que

$$\left\|u^N(t)\right\|^2_{L^2(0,2\ \pi)} \leq e^{\alpha t}\left\|u_0\right\|^2_{L^2(0,2\ \pi)} \quad \forall t > 0,$$

$\alpha = \max_{0 \leq x \leq 2\pi} a_x(x)$.

Por um procedimento similar, mostramos que a solução da EDP satisfaz

$$\left\|u(t)\right\|^2_{L^2(0,2\ \pi)} \leq e^{\alpha t}\left\|u_0\right\|^2_{L^2(0,2\ \pi)} \quad \forall t > 0$$

Além disso, $\left\|u^N_x\right\|^2_{L^2(0,2\ \pi)} \leq e^{\alpha t}\left\|u_{0,x}\right\|^2_{L^2(0,2\ \pi)}$.

Quanto à análise de convergência do problema semi-discreto, obtemos que: se $u_0 \in H^m_{per}(0, 2\pi)$, $m \geq 2$ e u é a solução da equação (1) com dados iniciais e hipóteses nos coeficientes previamente citados, então existe uma constante C_1 independente de u_0 e N tal que $\forall t \in [0,\ T]$

$$\left\|u(t) - u^N(t)\right\|_{L^2} \leq Ce^{\alpha t}N^{1-m}\max_{0 \leq \tau \leq T}\left|u(\tau)\right|,$$

$m \geq 1$, onde u^N é a solução de

$$\frac{du^N}{dt} + P_N\left(a(x)\partial_x u^N\right) = 0, \quad u^N(0) = P_N(u_0).$$

A análise de convergência nos problemas-modelo evidencia a rápida taxa de convergência das aproximações, a qual depende apenas da suavidade dos dados do problema.

Referências

[1] Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quarteroni, Z., Zang, T. A., *Spectral methods in fluid dynamics*, Springer-Verlag, (1988).