

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

## **UM PROBLEMA INVERSO EM ELETROENCEFALOGRAMA**

por

Aline de Lurdes Zuliani Lunkes

Orientador: Prof. Dr. Adriano De Cezaro  
Co-orientadora: Profa. Dra. Celene Buriol

Rio Grande, agosto de 2018

Para todos aqueles em que o destino e a vida pediram para embarcar em busca dos seus sonhos, se distanciarem dos que mais amam e pagar o alto preço de viver longe de casa. Nós que viemos não estamos livres do medo e de tantas fraquezas, mas estamos para sempre livres do medo de nunca termos tentado.

# AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha família que mesmo a distância sempre estiveram presente em todos os momentos desta jornada.

Agradeço ao meu namorado pela paciência, amizade e conselhos prestados mesmo que distante.

Agradeço a todos os colegas pela amizade e carinho recebidos neste período e desde os tempos de graduação. Infelizmente não foi possível citar nomes, pois (felizmente) vocês formam uma lista quase não enumerável.

Agradeço ao meu orientador pelo conhecimento compartilhado e pela forma com que conduziu este trabalho.

Agradeço a minha co-orientadora pela paciência, amizade, pelo conhecimento compartilhado e pela forma com que conduziu esse trabalho.

Agradeço aos professores da Top Way Nataliya, Henrique, pelas excelentes aulas de inglês e também pelas conversas e risadas.

Agradeço aos professores do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional da FURG, em especial aos professores: Bárbara Rodriguez, Graçaliz Dimuro, Jeferson Souza e Antonio Goulart pelas excelentes aulas e incentivos.

Agradeço aos professores da banca Antonio e Vinícius pelas sugestões que enriqueceram este trabalho.

Agradeço ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal do Rio Grande.

Agradeço também a CAPES pelo suporte financeiro.

# RESUMO

Neste trabalho trataremos do problema de identificação da atividade cerebral, a partir de medidas indiretas do potencial elétrico no couro cabeludo, obtida por meio de eletrodos. Este problema é de extrema importância médica em diagnósticos relacionados ao Eletroencefalograma (EEG). Provaremos propriedades do Problema Direto associado ao problema de (EEG), as quais estão associadas as propriedades de uma equação diferencial elíptica, deduzida a partir das equações de Maxwell para o eletromagnetismo. Tais propriedades implicarão que o Problema Inverso, a saber, o problema de determinar a localização e a intensidade da atividade cerebral a partir das medidas do potencial elétrico associado na fronteira do domínio (couro cabeludo), é instável com relação as medidas do potencial na fronteira do domínio. Em particular, apresentamos algumas estratégias de regularização possíveis de serem aplicadas, de forma a obter soluções aproximadas do problema inverso em questão, de forma estável e convergente. Além da instabilidade, este trabalho mostra que o problema de identificação de fonte estudado não possui solução única. Finalmente, apresentamos os algoritmos que devem ser implementados para a solução do problema em questão.

**Palavras-chave:** Eletroencefalograma, Problemas Mal-postos, Problema Inverso, Problema Direto, Métodos de Regularização.

# ABSTRACT

In this work we will deal with the problem identify the brain activity from measurements of the electric potential on the scalp, obtained through electrodes. This problem has many interesting implications in the help of medical diagnostics related to the Electroencephalogram (EEG). We will prove properties of the Forward Problem associated related to the elliptic partial differential equation deduced from Maxwell equations for electromagnetism. Such properties will imply that the Inverse Problem, the problem of determining the location and intensity of brain activity by measuring the associated indeed, electrical potential at the boundary of the domain (the scalp), is instable in relation to the measurements. In particular, we present some of the regularization strategies that can be applied in order to obtain approximate solutions to the Inverse Problem in a stable and convergent way. Apart from instability, this work shows that the problem of source identification in EEG does not have a single solution. Finally, we present the algorithms that should be implemented for the solution to the Inverse Problem.

**Palavras-chaves:** Inverse Problem, Forward Problem, Ill-posed Problem, Electroencephalography, Regularization Methods.

# ÍNDICE

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>Resultados preliminares</b>	<b>14</b>
2.1	Noções sobre distribuições	14
2.1.1	Espaços de funções teste e derivada distribucional	14
2.2	Operadores lineares e limitados	16
2.3	Operador linear e compacto	17
2.4	Operadores adjuntos	18
2.5	Topologia fraca	18
2.6	Espaço de Sobolev	19
2.6.1	Os espaços $L^p$	20
2.6.2	Os espaços de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ , $W_0^{m,p}(\Omega)$ e $W^{-m,p}(\Omega)$	21
2.7	O teorema de Lax-Milgram	22
2.8	Conceito de Hadamard para problemas bem-postos	23
2.9	Existência de solução fraca para EDP's elípticas	24
2.10	Princípio do máximo	25
<b>3</b>	<b>Problema direto em EEG</b>	<b>26</b>
3.1	Modelagem do problema	26
3.1.1	O problema direto em EEG	30
3.1.2	Propriedades da solução do problema direto em EEG	30
3.2	O problema direto como uma equação de operadores	33
3.3	Operador adjunto	35
3.3.1	Operador adjunto: Caso de medidas contínuas no problema de EEG	36
3.4	Caso de medidas reais no problema de EEG: Sistema de operadores	37
3.5	A abordagem adjunta-discreta	38
<b>4</b>	<b>Problema inverso em EEG</b>	<b>40</b>
4.1	Problemas inversos e mal postos	40
4.2	Problemas inversos como equações de operadores	41
4.3	Estratégias de regularização	42
4.3.1	Problema inverso em EEG	43
4.4	Regularização de Tikhonov	44
4.5	Regularização por métodos iterativos para problemas lineares	46
4.5.1	Métodos iterativos associados a estratégias de ponto Fixo	46

4.5.2	O método de Landweber . . . . .	47
4.5.3	Método de Landweber para o problema de EEG . . . . .	50
4.5.4	Algoritmo de iteração baseado no método de Landweber para o problema em EEG. . . . .	51
<b>5</b>	<b>Não unicidade para o problema inverso em EEG</b>	<b>52</b>
5.1	O suporte singular do potencial elétrico . . . . .	52
5.2	Representação de Green . . . . .	55
5.3	O problema inverso . . . . .	58
<b>6</b>	<b>Considerações finais e trabalhos futuros</b>	<b>60</b>
6.1	Trabalhos futuros . . . . .	60
<b>7</b>	<b>Apêndices</b>	<b>65</b>
7.1	Fundamentos fisiológicos e os geradores de sinais do EEG . . . . .	65
7.2	Caso discreto . . . . .	66
7.2.1	Discretização para a solução da equação (3.1.12), (3.1.16) por elementos finitos . . . . .	66

## LISTA DE FIGURAS

Figura 71: Uma imagem simples da transmissão de sinal nos neurônios, consultar (TANZER, 2006) . . . . .	65
--	----

# LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathcal{D}(\Omega)$	Espaço das distribuições
$\mathcal{D}'(\Omega)$	O conjunto das distribuições definidas em $C_0^\infty(\Omega)$
$H$	Espaço de <i>Hilbert</i>
$X$	Espaço de <i>Banach</i>
$n$	Vetor normal
$J$	Densidade de corrente de condução (ampere/ $m^2$ )
$J^p$	Densidade de corrente primária
$E$	Campo elétrico (volt/ $m$ )
$U$	Potencial elétrico (volt)
$D$	Deslocamento elétrico (coulomb/ $m^2$ )
$B$	Densidade do fluxo magnético (tesla)
$H$	Campo magnético (ampere/ $m$ )
$a$	Condutividade média (siemens/ $m$ )
$\epsilon_0$	Permissividade elétrica média (farad/ $m$ )
$\mu$	Permissividade magnética
$\rho$	Densidade de carga (coulomb/ $m^3$ )
$\Omega$	Volume condutor
$\partial\Omega$	Fronteira de $\Omega$
$\rightarrow$	Convergência forte
$\rightharpoonup$	Convergência fraca
$L^p$	Espaço das funções escalares p-integráveis em $\Omega$ .
$L^2$	Espaço das funções escalares quadrado integráveis a Lebesgue em $\Omega$ .
$H^1(\Omega)$	$\{v \in L^2(\Omega) / \mathcal{D}^\alpha \in L^2(\Omega);  \alpha  \leq 1\}$ .
$C((a, b); X)$	Espaço das funções contínuas de $(a, b)$ em $X$ .
$C((0, +\infty); X)$	Espaço das funções contínuas de $(0, \infty)$ em $X$ .
$C_C^\infty$	Espaço das funções $C^\infty$ com suporte compacto
$C^1((a, b); X)$	Espaço das funções contínuas e derivadas primeiras contínuas de $(a, b)$ em $X$ .
$\Delta$	Operador Laplaciano, $\Delta u(x) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2}$ para $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

# 1 INTRODUÇÃO

O Eletroencefalograma (EEG) é um exame que analisa a atividade elétrica cerebral espontânea advinda de estímulos externos específicos. Com base nesta análise, é possível detectar se as atividades cerebrais estão condizentes com o esperado, ou se há distúrbios advindos de alguma anomalia. Por isso, a descoberta do eletroencefalograma foi um marco para o avanço da neurociência e da prática neurológica e neurocirúrgica cotidiana, especialmente para o diagnóstico e auxílio ao tratamento de pacientes com convulsões. Este diagnóstico não-invasivo permitiu, e ainda permite, descobrir a natureza real de doenças, distúrbios e sua gestão.

A descoberta do Eletroencefalograma em 1929 pelo psiquiatra alemão Hans Berger foi um marco histórico, fornecendo uma nova ferramenta para diagnósticos neurológicos e psiquiátricos. Berger acreditava que um cérebro pode transmitir sinais de ondas de rádio que podem ser captados por outros cérebros que estão na mesma frequência. Suas primeiras experiências foram feitas em pacientes que haviam feito cirurgias no crânio e em pessoas saudáveis, incluindo sua filha. Berger foi o pioneiro no processo de gravação de sinais elétricos a partir de um cérebro humano, em 1924. Ciente da importância de sua descoberta, o médico manteve o seu segredo guardado durante anos, acumulando mais e mais dados para fazer um anúncio oficial em 1929. Para detalhe do trabalho de Berger consulte (BERGER, 1929).

As técnicas não-invasivas modernas de gravação de EEG são o resultado de um processo de pesquisa interdisciplinar comum às áreas de neurologia, neurocirurgia, matemática e física. A iteração entre especialistas destas áreas e o fruto de muitas pesquisas permitiram a modelagem do problema de EEG a partir de equações diferenciais parciais (baseado na aproximação estática das equações de Maxwell). Essa modelagem permitiu a introdução de técnicas de mapeamento cerebral, as quais iniciaram-se no século XIX, (REIF; STRZELCZYK; ROSENOW, 2016), (CICHOCKI; SANEI, 2007).

Após a descoberta do EEG por Hans Berger e sua implementação em procedimentos de diagnósticos em pacientes com epilepsia, uma nova era teve início quando Foerster e Altenburger realizaram o primeiro registro de EEG não-invasivo em 1934 (FOERSTER; H, 1934). Adicionado a isso o trabalho de Wilder Penfield e Herbert Jasper [(PENFIELD; BOLDREY, 1937), (JASPER, 1941)], resultaram em uma base para uma nova compreensão da epilepsia. Tais contribuições influenciaram nas investigações das próximas gerações de pesquisadores, culminando com o aparecimento de dispositivos desenvolvidos por Jean Talairach e Jean Bancaud, que formaram uma parte fundamental para a compreensão das funções cerebrais em pacientes com epilepsia, ver (TALAIRACH; BANCAUD, 1966).

O desenvolvimento de técnicas de obtenção de imagem permitiu uma combinação de dados estruturais e eletrofisiológicos, as quais permitiram uma diminuição drástica das indicações para avaliações invasivas. Além disso, contribuiu para novos conceitos no processo de diagnóstico, incluindo a rede neural epileptogênica e a compreensão fisiopatológica do tecido epileptogênico, ver (REIF; STRZELCZYK; ROSENOW, 2016).

Atualmente, as imagens oriundas do EEG são utilizadas para detectar morte cerebral, demência, doença de Parkinson, doença de Alzheimer, pressão intra-craniana, para auxiliar na anestesia de pacientes, epilepsia, etc, ver (ODJEL; ETAL, 2005). No caso da epilepsia, existem pequenas zonas cerebrais que influenciam consideravelmente na geração do campo elétrico. Os neurologistas estão interessados em determinar a localização de tais zonas epileptogênicas a partir do potencial medido no couro cabeludo, a fim de evitar técnicas invasivas, consultar (CICHOCKI; SANEI, 2007).

A obtenção da localização de ondas cerebrais é a principal motivação para o nosso trabalho. Estabelecemos o problema da seguinte forma: do ponto de vista matemático, o processo de obtenção de imagens por EEG pode ser compreendido como sendo um problema de reconstrução de fonte a partir de medidas do potencial elétrico, que associamos a um modelo de equações diferenciais parciais elípticas de segunda ordem, baseadas em uma aproximação estática das Equações de Maxwell para o eletromagnetismo [(WAGNER, 2011), (SADIKU, 2012)] (apresentaremos essa modelagem mais adiante neste trabalho). Este problema faz parte da teoria dos chamados Problemas Inversos [(WOLTERS et al., 2007), (WOLTERS, 2003), (KIRSCH, 1996)] que está em contra-ponto ao Problema Direto, o qual consiste em determinar uma solução para a equação diferencial parcial elíptica baseada nas Equações de Maxwell, para uma fonte conhecida e para condições de contorno (potencial) adequadas na fronteira do domínio de interesse (EVANS, 2010).

Muitos algoritmos de localização de fonte inversa usam a abordagem de campo principal [(WAGNER, 2011), (MOHR, 2003)]. Esta ideia consiste em considerar que a distribuição da corrente, dentro da cabeça humana é discretizada. Além disso, consideramos que essa corrente é composta de um número reduzido de fontes bipolares possíveis. Nesta abordagem, a equação diferencial parcial que modela o problema direto em EEG tem que ser resolvida três vezes por fonte bipolar possível. Este processo é caro do ponto de vista computacional, (BAUMEISTER, 1987).

De qualquer forma, o problema de recuperação de fonte é um problema mal-posto no sentido de Hadamard. Isto é, o problema de identificação de fontes abordado nesta proposta não depende continuamente das medidas do potencial na fronteira do domínio de interesse, ver Capítulo 4. Como na prática as medições estão sempre sujeitas a ruídos (erros), uma solução adequada do problema de identificação requer a adoção de técnicas que possibilitem controlar o nível de ruído nas medidas. Tais técnicas são conhecidas como métodos de regularização para problemas inversos (KIRSCH, 1996)

Para apresentar a análise do problema em EEG, o presente trabalho foi dividido em sete Capítulos: No Capítulo 1, trataremos da introdução sobre EEG. No Capítulo 2, apresentaremos resultados básicos da teoria de Análise Funcional e Equações Diferenciais Parciais (EDP). Tais resultados são base para o entendimento deste trabalho. Além disso, o torna autocontido. Com relação aos resultados apresentados, preferimos omitir as demonstrações pois estas são conhecidas e de fácil acesso. Porém, daremos referências às mesmas sempre que enunciadas.

No Capítulo 3, tratamos da modelagem matemática para o problema em EEG. Essa mode-

lagem baseia-se nas equações de Maxwell para o eletromagnetismo que pode ser traduzida em uma EDP elíptica com condições de fronteira de Neumannn homogênea. Faremos a dedução de tal equação na Seção 3.1, baseada em argumentos inerentes à modelagem do problema de EEG. Utilizaremos os resultados apresentados no Capítulo 2 para mostrar que tal EDP possui uma única solução (fraca) que depende continuamente das condições de fronteira, em espaços de funções adequados. Em outras palavras, que o problema direto para EEG é bem-posto no sentido de Hadamard (HADAMARD, 1923). A EDP resultante é conhecida como o problema direto para o problema de EEG. Na Seção 3.2 escreveremos o problema direto em EEG como uma equação de operadores. Com base na equação de operadores proposta, em espaços de funções adequadas. Provaremos que tal operador (denotado por  $A$ ) é bem posto, linear, limitado e compacto. Em particular, a compacidade do operador que modela o problema estudado possui implicações das mais importantes para o estudo do problema proposto neste trabalho. Na Seção 3.3 determinaremos o operador adjunto da derivada de Fréchet de  $A$  e mostramos que o mesmo é bem-posto. A Subseção 3.3.1 será importante para o Capítulo 4, pois representaremos o problema adjunto da maneira como as medidas do problema em EEG, são obtidas em toda a superfície  $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Diferentemente do que assumimos na Subseção 3.3.1, na Seção 3.4 trataremos das medidas no caso real. Na Seção 3.5 discutiremos sobre a abordagem adjunta-discreta.

No Capítulo 4 trataremos dos chamados de problemas inversos e mal postos, bem como métodos de regularização do tipo Tikhonov, e métodos iterativos como Landweber. Este Capítulo é de suma importância para esta dissertação, pois, no Capítulo 3 discutimos o problema direto em EEG bem como a sua modelagem, e neste trataremos do problema inverso em EEG, utilizando os resultados obtidos do problema direto. Na Seção 4.1 trataremos de resultados de problemas inversos e mal postos. Na Seção 4.2 formularemos de maneira mais precisa o conceito de problemas inversos usando equações de operadores. Na Seção 4.3 abordaremos alguns resultados de estratégias de regularização para os problemas inversos, tendo em vista a falta de dependência contínua nos dados. Com esta regularização, propomos uma aproximação estável e convergente para a solução do nosso problema. Na Seção 4.3.1 abordaremos alguns conceitos para o nosso problema inverso de estudo. Na Seção 4.4 introduziremos a regularização de Tikhonov, e enunciaremos alguns resultados que nos levarão a construir o operador de regularização  $R_\alpha$  para o problema inverso em EEG. Alguns métodos iterativos podem ser usados como estratégias de regularização para problemas inversos. Na Seção 4.5 abordaremos conceitos de regularização por métodos iterativos para problemas lineares. Na Subseção 4.5.1 trataremos do método iterativo associado a estratégias de ponto fixo. Na Subseção 4.5.2 abordaremos o método iterativo de Landweber como um método de regularização com menor custo computacional e mostraremos como o problema inverso em EEG pode ser tratado com esta estratégia.

No Capítulo 5 provaremos que o problema inverso em EEG não possui solução única, como uma segunda fonte de má-colocação do problema em EEG, aliada a instabilidade com relação às medidas já apresentada no 4. Na Seção 5.1 trataremos de um modelo esférico e homogêneo

do cérebro. Na Seção 5.2 expressaremos o potencial elétrico exterior como uma representação da integral de Green. Na Seção 5.3 queremos obter parte da corrente neural que pode ser recuperada através das medidas do potencial elétrico na superfície da esfera.

No Capítulo 6 apresentamos as considerações finais e os trabalhos futuros. O Capítulo 7 é formado pelos apêndices deste trabalho.

Para elaborar essa dissertação utilizamos como referências os trabalhos (WAGNER, 2011), (MOHR, 2003), (TANZER, 2006) e (WOLTERS et al., 2007). Pode-se encontrar nessas referências a modelagem e a implementação numérica para o problema em EEG. Optamos pelo estudo teórico da modelagem detalhada para o problema em EEG, visto que nas referências estudadas o formalismo matemático está incompleto. Por exemplo, não encontramos a prova da compacidade do operador  $A$ , e tal prova consta nessa dissertação, para a solução numérica do nosso problema, utilizamos um método de descida máxima, a saber o método de Landweber, e descrevemos o algoritmo para este método. A implementação deste algoritmo foi deixado para trabalhos futuros.

## 2 RESULTADOS PRELIMINARES

Neste Capítulo apresentamos alguns conceitos e resultados básicos, mas importantes, de Análise Funcional e Equações Diferenciais Parciais que serão utilizados ao longo deste trabalho. Desta forma, este Capítulo pode ser considerado como um Capítulo de resultados preliminares que tem o objetivo de tornar essa dissertação autocontida. Em particular, cremos que este Capítulo é importante para o leitor que não está habituado com o formalismo matemático que será desenvolvido no decorrer do trabalho. Por fim, como tais resultados já são bem conhecidos, não apresentaremos as suas demonstrações que podem ser encontradas, pelo leitor interessado nas referências citadas ao longo do texto.

### 2.1 Noções sobre distribuições

#### 2.1.1 Espaços de funções teste e derivada distribucional

Antes de definirmos o espaço das funções teste, serão feitas algumas considerações sobre as notações.

Por um multi-índice entendemos uma  $n$ -upla  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  de números inteiros não negativos, e designamos por  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$  a ordem do multi-índice  $\alpha$ . Sendo  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , o operador derivação é denotado por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Para  $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$ , temos  $D^0 u = u$ , isto é, o operador derivação neste caso é a identidade.

Sejam  $\Omega$  um subconjunto do  $\mathbb{R}^n$  e  $u : \Omega \rightarrow \mathcal{R}$  contínua, onde  $\mathcal{R}$  é um espaço vetorial real (ou complexo). O suporte de  $u$ , denotaremos por  $\text{supp}(u)$ , é definido como sendo o fecho em  $\Omega$  do conjunto dos pontos  $x$  pertencentes a  $\Omega$  em que  $u$  não se anula.

Simbolicamente tem-se:

$$\text{supp}(u) = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}}.$$

**Definição 2.1.1** Representamos por  $C_C^\infty(\Omega)$  o conjunto das funções

$$u : \Omega \rightarrow \mathcal{R},$$

de modo que as derivadas de todas as ordens são contínuas e que tem suporte compacto contido em  $\Omega$ . Os elementos de  $C_C^\infty(\Omega)$  são chamados de funções teste.

Tem-se que,  $C_C^\infty(\Omega)$  é um espaço vetorial sobre o corpo  $K$  com as operações usuais de soma de funções e de multiplicação por escalar.

### Convergência em $C_C^\infty(\Omega)$

**Definição 2.1.2** *Sejam  $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  uma sequência em  $C_C^\infty(\Omega)$  e  $\varphi \in C_C^\infty(\Omega)$ . Dizemos que  $\varphi_k \rightarrow \varphi$  se:*

- i) Existe  $\mathcal{R} \subset \Omega$ ,  $\mathcal{R}$  compacto, tal que  $\text{supp}\{\varphi_k\} \subset \mathcal{R}$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ .*
- ii) Para cada  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ,  $D^\alpha \varphi_k(x) \rightarrow D^\alpha \varphi(x)$  uniformemente em  $\Omega$ .*

**Definição 2.1.3** *O espaço vetorial  $C_C^\infty(\Omega)$  com a noção de convergência definida acima é denotado por  $\mathcal{D}(\Omega)$  e é chamado de espaços das funções teste.*

**Definição 2.1.4** *Sejam  $X, Y$  espaços vetoriais sobre o mesmo corpo de escalares. Uma aplicação  $T : X \rightarrow Y$  é linear se*

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T x + \beta T y$$

*para todo  $x, y \in X$  e quaisquer escalares  $\alpha, \beta$ . Aplicações lineares de  $X$  com a imagem no seu corpo de escalares são chamados de funcionais lineares.*

**Definição 2.1.5** *Uma transformação linear  $T$  do espaço normado  $X$  no espaço normado  $Y$  é contínua se para todo  $x_0 \in X$  e  $\varepsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$  tal que  $\|Tx - Tx_0\| < \varepsilon$  sempre que  $x \in X$  e  $\|x - x_0\| < \delta$ .*

**Definição 2.1.6** *O conjunto de todos os funcionais lineares, contínuos definidos, em um espaço vetorial  $X$ , é denotado por  $X'$  e é chamado de **espaço dual algébrico** de  $X$ .*

**Definição 2.1.7** *Uma distribuição sobre  $\Omega$  é um funcional linear definido em  $\mathcal{D}(\Omega)$  e contínuo em relação a noção de convergência definida em  $\mathcal{D}(\Omega)$ . O conjunto de todas as distribuições sobre  $\Omega$  é denotado por  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .*

Desse modo,  $\mathcal{D}'(\Omega) = \{B : \Omega \rightarrow \mathcal{R}; B \text{ é um funcional linear e contínuo}\}$ . Observamos que  $\mathcal{D}'(\Omega)$  é um espaço vetorial sobre  $\mathcal{R}$ . Se  $B \in \mathcal{D}'$  e  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  denotamos por  $\langle B, \varphi \rangle$  o valor de  $B$  aplicado ao elemento  $\varphi$ .

### Convergência em $\mathcal{D}'(\Omega)$

**Definição 2.1.8** *Dizemos que  $B_k \rightarrow B$  em  $\mathcal{D}'(\Omega)$  se  $\langle B_k, \varphi \rangle \rightarrow \langle B, \varphi \rangle$ , para toda  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ .*

**Definição 2.1.9** *Sejam  $B \in \mathcal{D}'(\Omega)$  e  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  um multi-índice. A derivada distribucional (derivada fraca) de ordem  $\alpha$  de  $B$  é a distribuição  $D^\alpha B$  definida por :*

$$\langle D^\alpha B, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle B, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

**Definição 2.1.10** *Sejam  $X$  e  $Y$  dois espaços vetoriais com  $X \subset Y$ . Dizemos que  $X$  está imerso continuamente em  $Y$  quando a aplicação inclusão  $i : X \rightarrow Y$  definida por  $i(x) = x$ ,  $x \in X$  for contínua.*

**Observação 2.1.1** *Usaremos a notação  $X \hookrightarrow Y$  para designar que o espaço  $X$  está imerso continuamente em  $Y$ .*

## 2.2 Operadores lineares e limitados

**Definição 2.2.1** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Banach. Um operador linear é uma aplicação linear  $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$  com  $D(A)$  o domínio do operador  $A$ . Diz-se que o operador linear é limitado se existe uma constante  $C \geq 0$  tal que*

$$\|Au\|_Y \leq C\|u\|_X, \forall u \in D(A).$$

Neste caso, se o domínio de  $A$  é denso em  $X$  então  $A$  pode ser estendido de maneira linear e limitada a todo  $X$  (como demonstrado em (KREYSZIG, 1978) na página 100).

Representa-se por  $B(X, Y)$  a família dos operadores lineares limitados de  $X$  em  $Y$ . A função real  $\|\cdot\|_{B(X, Y)}$  definida por

$$\|A\|_{B(X, Y)} = \sup_{x \in X: \|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y < \infty,$$

é uma norma sobre  $B(X, Y)$ . Sabemos da teoria de análise funcional (consultar (KREYSZIG, 1978)) que  $B(X, Y)$  é um espaço de Banach.  $B(X)$  representa os operadores lineares limitados de  $X$  em  $X$ .

**Definição 2.2.2** [Fréchet-diferenciável] *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Banach e  $U$  um aberto em  $X$ . Dizemos que uma função  $f : U \rightarrow Y$  é Fréchet-diferenciável no ponto  $x_0 \in U$  se existe um operador linear contínuo  $A : X \rightarrow Y$  tal que*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + A(h) + R(x_0, h),$$

para todo  $h$  tal que  $x_0 + h$  pertence a uma bola aberta centrada em  $x_0$  e contida em  $U$ , onde  $R(x_0, h) = o(\|h\|)$ , isto é:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R(x_0, h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Neste caso,  $A$  é chamada de derivada de Fréchet de  $f$  em  $x_0$  e denotada por  $A = Df(x_0)$ .

Como é usual, dizemos que  $f$  é Fréchet-diferenciável se  $f$  for Fréchet-diferenciável em todos os pontos de  $U$ .

**Exemplo 2.2.1** *Sejam  $H$  um espaço de Hilbert e*

$$f : H \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \|x\|^2.$$

Então,  $f$  é Fréchet-diferenciável e  $Df(x)(h) = 2\langle x, h \rangle$  para todos os pontos  $x, h \in H$ . De fato,

$$\|x - h\|^2 - \|x\|^2 - 2\langle x, h \rangle = \|h\|^2 = o(\|h\|).$$

**Definição 2.2.3** A inversa Generalizada  $A^\dagger$  do operador  $A$  é definida como uma extensão única e linear de  $\overline{A}^{-1}$  para

$$\mathcal{D}(A^\dagger) = R(A) + R(A)^\perp$$

com

$$\mathcal{N}(A^\dagger) = R(A)^\perp$$

onde,

$$\overline{A} = A|_{\mathcal{N}(A)^\perp} : \mathcal{N}(A)^\perp \rightarrow R(A).$$

$A^\dagger$  está bem definido, desde que  $\overline{\mathcal{N}} = \{0\}$  e  $R(\overline{A}) = R(A)$ , e  $A^{-1}$  existe.

## 2.3 Operador linear e compacto

Um operador linear  $A : X \rightarrow Y$  entre espaços de Banach é compacto se o fecho de  $A(U)$  é compacto em  $Y$ , onde  $U \subset X$  é a bola unitária aberta.

**Teorema 2.3.1** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços normados e  $A : X \rightarrow Y$  um operador linear compacto com núcleo  $\mathcal{N}(A) = \{x \in X : Ax = 0\}$ . Seja o espaço quociente  $X/\mathcal{N}(A)$  de dimensão infinita. Então, existe uma sequência  $\{x_n\} \subset X$  tal que  $Ax_n \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$  mas  $\{x_n\}$  não converge. Podemos escolher  $\{x_n\}$  tal que  $\|x_n\| \rightarrow \infty$ , quando  $n \rightarrow \infty$ . Em particular, se  $A$  é injetor, o seu inverso  $A^{-1} : Y \supset R(A) \rightarrow X$  é ilimitado. Aqui,  $R(A) = \{Ax \in Y : x \in X\}$  é a imagem de  $A$ .*

Seja  $A : X \rightarrow Y$  um operador linear limitado entre espaços de Banach. Sejam  $X_1 \subset X$  um subespaço, e  $\|\cdot\|_1$  a norma “mais forte” em  $X_1$ , ou seja, existe  $c > 0$  tal que  $\|x\| \leq c\|x\|_1$  para todo  $x \in X_1$ . Então, definimos, para  $\delta > 0$  e  $E > 0$ ,

$$\mathcal{F}(\delta, E, \|\cdot\|_1) = \sup \{\|x\| : x \in X_1, \|Ax\| \leq \delta, \|x\|_1 \leq E\} \quad (2.3.1)$$

e chamamos  $\mathcal{F}(\delta, E, \|\cdot\|_1)$  de *erro de pior-caso* para o erro  $\delta$  nos dados e uma informação à priori  $\|x\|_1 \leq E$ .

Como  $\mathcal{F}(\delta, E, \|\cdot\|_1)$  depende do operador  $A$  e das normas em  $X, Y$  e  $X_1$ , é desejável que este erro de pior-caso não só convirja para zero, quando  $\delta$  tende a zero, mas que ainda seja de ordem  $\delta$ . Isto é verdade (mesmo sem informações à priori) para operadores inversíveis e limitados, como é visto a partir da desigualdade  $\|x\| \leq \|A^{-1}\| \|Ax\|$ .

**Lema 2.3.2** *Seja  $A : X \rightarrow Y$  um operador linear e compacto, e assumimos que  $X/\mathcal{N}(A)$  é de dimensão infinita. Então, para todo  $E > 0$  existem  $c > 0$  e  $\delta_0 > 0$  tais que  $\mathcal{F}(\delta, E, \|\cdot\|) \geq c$  para todo  $\delta \in (0, \delta_0)$ .*

## 2.4 Operadores adjuntos

**Teorema 2.4.1** [Operador adjunto] *Seja  $A : X \rightarrow Y$  um operador linear e limitado entre espaços de Hilbert. Então, existe um único operador linear limitado  $A^* : Y \rightarrow X$  com a propriedade*

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle, \forall x \in X, y \in Y.$$

*O operador  $A^* : Y \rightarrow X$  é chamado de operador adjunto de  $A$ .*

Para  $X = Y$ , o operador  $A$  é chamado de auto-adjunto se  $A^* = A$ .

**Teorema 2.4.2** [Compacidade do adjunto] *Se  $A : H \rightarrow H$  é compacto, então o seu adjunto  $A^* : H \rightarrow H$  também é um operador compacto.*

**Teorema 2.4.3** *Sejam  $A$  um operador compacto e  $B$  um operador linear limitado, então  $A \cdot B$  é um operador compacto.*

## 2.5 Topologia fraca

Para definirmos a topologia fraca precisaremos de alguns conceitos básicos de topologia que enunciaremos a seguir:

**Definição 2.5.1** *Uma topologia em um conjunto  $X$  é uma coleção  $\tau$  de subconjuntos de  $X$  com as seguintes propriedades:*

- 1)  $\emptyset$  e  $X$  estão em  $\tau$ .
- 2) A união de elementos de uma subcoleção qualquer de  $\tau$  está em  $\tau$ .
- 3) A interseção de elementos de uma subcoleção finita qualquer de  $\tau$  está em  $\tau$ .

Um conjunto  $X$  munido de uma topologia  $\tau$  é chamado de *espaço topológico*.

Um subconjunto  $A$  de um espaço topológico  $X$  é *fechado* se o seu complementar for um conjunto aberto.

Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos. Uma função  $f : X \rightarrow Y$  é *contínua* se para cada subconjunto aberto  $V$  de  $Y$ , o conjunto  $f^{-1}(V)$  é um subconjunto aberto de  $X$ .

Um *espaço vetorial topológico* é um espaço vetorial  $X$  munido com uma topologia  $\tau$  de modo que, com respeito a essa topologia as operações de soma e multiplicação por escalar são funções contínuas.

Por exemplo, todo espaço vetorial com uma norma é um espaço vetorial topológico.

Se  $X$  é um espaço vetorial real (ou complexo), uma *seminorma* é uma função  $p : X \rightarrow [0, \infty)$  com as propriedades:

- a)  $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$  para todos  $x, y \in X$
- b)  $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$  para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$  (ou em  $\mathbb{C}$ ) e  $x \in X$ .

Dizemos que um espaço vetorial topológico é *localmente convexo* se sua topologia for definida por uma família de seminormas  $\mathcal{P}$  tal que  $\bigcap_{p \in \mathcal{P}} \{x : p(x) = 0\} = \{0\}$ .

Finalmente chegamos no momento de definir uma topologia fraca:

Seja  $X$  um espaço normado. Para cada  $x' \in X'$ , defina a seminorma

$$p_{x'}(x) = |x'(x)|.$$

Assim, considerando a coleção  $\mathcal{P} = \{p_{x'} : x' \in X'\}$ , temos que  $X$  é então um espaço vetorial topológico localmente convexo, e a topologia definida em  $X$  por essas seminormas é chamada de *topologia fraca* de  $X$  e é denotada por  $\sigma(X, X')$ .

Um subconjunto de um espaço topológico munido de uma topologia fraca é fracamente fechado se o seu complementar for aberto nessa topologia.

**Definição 2.5.2** *Um funcional linear  $f$  é chamado de limitado se existir uma constante  $c > 0$  tal que*

$$|f(x)| \leq c\|x\|.$$

para todo  $x$  no domínio de  $f$ .

**Definição 2.5.3** *Dizemos que a sequência  $\{u_k\} \subset X$  converge fracamente para  $u \in X$ , e escrevemos*

$$u_k \rightharpoonup u,$$

se

$$\langle u^*, u_k \rangle \rightarrow \langle u^*, u \rangle,$$

para cada funcional linear limitado  $u^* \in X'$ .

**Lema 2.5.1** *[Lema de Mazur] Assumimos que  $\{x_n\}$  converge fracamente para  $x$ . Então, existe uma sequência  $\{y_n\}$  composta de combinações convexas dos termos de  $\{x_n\}$  que converge fortemente para  $x$ .*

**Teorema 2.5.2** *[Teorema de Mazur] Sejam  $X$  um espaço normado e  $U$  um subconjunto convexo de  $X$ . Então, o fecho de  $U$  na topologia da norma coincide com o fecho de  $U$  na topologia fraca. Em particular, um conjunto convexo é fechado na topologia fraca se, e somente se, é fechado na topologia da norma.*

**Observação 2.5.1** *Todo conjunto fracamente fechado é fortemente fechado, e a recíproca é falsa em espaços de dimensão infinita. Porém, para conjuntos convexas, fracamente fechado é igual a fortemente fechado (BREZIS, 2013).*

## 2.6 Espaço de Sobolev

A seguir, enunciaremos alguns dos principais resultados sobre espaço de Sobolev que serão utilizados ao longo deste trabalho.

### 2.6.1 Os espaços $L^p$

**Definição 2.6.1** Denotamos por  $L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis à Lebesgue  $u : \Omega \rightarrow \mathcal{R}$  tais que  $x \rightarrow |u(x)|^p$  seja integrável em  $\Omega$ , no sentido de Lebesgue. A norma de  $u \in L^p(\Omega)$  é dada por:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

**Teorema 2.6.1** Os espaços  $L^p(\Omega)$ , com  $1 \leq p < \infty$  são espaços de Banach.

**Observação 2.6.1** No caso em que  $p = 2$ , obtemos o espaço  $L^2(\Omega)$ . Este é um espaço de Hilbert, cuja norma e produto interno são definidos, respectivamente, por:

$$\|u\| = \left( \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

e

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx.$$

Na teoria dos espaços  $L^p$  ressaltamos três desigualdades básicas, (BREZIS, 2013):

**Definição 2.6.2** [Desigualdade de Young] Seja  $1 < p < \infty$  e  $q$  o expoente do conjugado de  $p$ , isto é,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Se  $a, b \in \mathbb{R}$  são não negativos, então

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

**Definição 2.6.3** [Desigualdade de Hölder] Sejam  $1 \leq p \leq \infty$  e  $q$  o expoente conjugado de  $p$ . Se  $u \in L^p(\Omega)$  e  $v \in L^q(\Omega)$  então:

$$u \cdot v \in L^1(\Omega) \quad e \quad \|u \cdot v\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

**Definição 2.6.4** [Desigualdade de Minkowski] Se  $u$  e  $v \in L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , então:

$$\|u + v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}.$$

**Definição 2.6.5** Sejam  $\Omega \in \mathbb{R}^3$  um conjunto aberto e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função Lebesgue mensurável. Se  $f$  é tal que a sua integral de Lebesgue é finita para todo subconjunto compacto  $K$  de  $\Omega$ , dizemos que  $f$  é localmente integrável. O conjunto de tais funções é denotado por  $L^1_{loc}(\Omega)$ .

**Teorema 2.6.2** Se  $1 \leq p \leq \infty$  então valem as seguintes cadeias de injeções contínuas e densas

$$\mathcal{D} \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega).$$

**Definição 2.6.6**  $L^\infty(\Omega)$  é o conjunto das funções  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f$  é mensurável e existe uma constante  $C$  tal que  $|f(x)| \leq C$  quase sempre em  $\Omega$ . Com a norma  $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{C; |f(x)| \leq C \text{ quase sempre em } \Omega\}$ .

### 2.6.2 Os espaços de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ , $W_0^{m,p}(\Omega)$ e $W^{-m,p}(\Omega)$

**Definição 2.6.7** Sejam  $m \in \mathbb{N}$  e  $1 \leq p \leq \infty$ . Indicaremos por  $W^{m,p}(\Omega)$  o conjunto de todas as funções  $u \in L^p(\Omega)$ , tais que para todo  $|\alpha| \leq m$ ,  $D^\alpha u$  pertence a  $L^p(\Omega)$ , sendo  $D^\alpha u$  a derivada distribucional de  $u$ . O espaço  $W^{m,p}(\Omega)$  é chamado de Espaço de Sobolev de ordem  $m$  relativo ao espaço  $L^p(\Omega)$ .

Simbolicamente,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\}.$$

Para cada  $u \in W^{m,p}(\Omega)$  tem-se que

$$\|u\|_{m,p} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |(D^\alpha u)(x)|^p dx \right)^{1/p}, \text{ se } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|u\|_{m,\infty} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}^p \right), \text{ se } p = \infty$$

definem uma norma em  $W^{m,p}(\Omega)$ .

**Observação 2.6.2** 1.  $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p})$  é um espaço de Banach.

2. Quando  $p = 2$  o espaço de Sobolev  $W^{m,2}(\Omega)$  é um espaço de Hilbert separável, continuamente imerso em  $L^2(\Omega)$ , geralmente denotado por  $H^m(\Omega)$ . Em símbolos, temos:

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha, |\alpha| \leq m\}$$

com a norma e produto interno dados respectivamente por

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |(D^\alpha u)(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

e

$$(u, v)_{H^m \Omega} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx, u, v \in W^{m,2} \Omega.$$

3. O espaço  $W^{m,p}(\Omega)$  é reflexivo se  $1 < p < \infty$ , e separável quando  $1 \leq p < \infty$ .

4. No caso particular em que  $m = 0$ , temos  $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ .

**Proposição 2.6.3** Se  $n, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  são tais que  $n < s$  então  $H^s(\Omega) \hookrightarrow H^n(\Omega)$  a imersão é densa.

**Observação 2.6.3** Quando  $p = 2$ , escreve-se  $H_0^m(\Omega)$  ao invés de  $W^{m,p}(\Omega)$ .

**Definição 2.6.8** Suponhamos que  $1 \leq p < \infty$  e  $q > 1$  são tais que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Representa-se por  $W^{-m,q}(\Omega)$  o dual topológico de  $W_0^{m,p}(\Omega)$ .

O dual topológico de  $H_0^m(\Omega)$  é representado por  $H^{-m}(\Omega)$ .

**Proposição 2.6.4** Se  $1 \leq p < \infty$  então valem as seguintes cadeias de injeções contínuas e densas

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega).$$

**Teorema 2.6.5** [Desigualdade de Poincaré] Sejam  $1 \leq p < \infty$  e  $\Omega$  um conjunto aberto e limitado. Então, existe uma constante  $C_p$  (com  $C_p > 0$ ) tal que

$$\|u\|_{L^p} \leq C_p \|\nabla u\|_{L^p}$$

para todo  $u \in W_0^{1,p}(X)$ .

**Proposição 2.6.6** [Fórmulas de Green] Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado com fronteira de classe  $C^2$ . Então valem as seguintes fórmulas:

$$\int_{\Omega} v(x) \Delta u(x) dx = - \int_{\Omega} \nabla v(x) \cdot \nabla u(x) dx \quad v \in H_0^1(\Omega), u \in H^2(\Omega) \quad (2.6.1)$$

e

$$\int_{\Omega} v(x) \Delta u(x) dx = \int_{\Omega} \nabla v(x) \cdot \nabla u(x) dx \quad v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2. \quad (2.6.2)$$

## 2.7 O teorema de Lax-Milgram

**Definição 2.7.1** Seja  $H$  um espaço de Hilbert real. Um funcional  $\bar{a} : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  é chamado de forma bilinear se  $\bar{a}(\cdot, v)$  é linear para cada  $v \in H$  e  $\bar{a}(u, \cdot)$  é linear para cada  $u \in H$ .

**Definição 2.7.2** i) Diz-se que uma forma bilinear  $\bar{a}(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua se existe uma constante  $C_{cont} > 0$  tal que

$$|\bar{a}(u, v)| \leq C_{cont} \|u\|_H \|v\|_H, \text{ para quaisquer } u, v \in H.$$

ii) Uma forma bilinear  $\bar{a}(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  é dita coerciva se existe uma constante  $C_{coe} > 0$  tal que

$$\bar{a}(u, u) \leq C_{coe} \|u\|_H^2, \text{ para todo } u \in H.$$

**Teorema 2.7.1** [Teorema Lax-Milgram] *Sejam  $H$  um espaço de Hilbert real e*

$$\bar{a} : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$$

*uma forma bilinear, tal que existam constantes  $M, \alpha > 0$  satisfazendo*

$$i) |\bar{a}(u, v)| \leq M \|u\| \|v\| \text{ para quaisquer } u, v \in H, \quad (\text{isto é, contínua}),$$

$$ii) \alpha \|u\|^2 \leq \bar{a}(u, u) \text{ para qualquer } u \in H, \quad (\text{isto é, coerciva}).$$

*Seja  $l : H \longrightarrow \mathbb{R}$  um funcional linear limitado em  $H$ . Então, existe uma única solução para o problema*

$$\bar{a}(u, v) = l(v), \quad \text{para todo } v \in H. \quad (2.7.1)$$

*Além disso, temos que*

$$\|u\|_H^2 \leq \frac{1}{\alpha} \|l\|. \quad (2.7.2)$$

**Proposição 2.7.2** *Considere uma forma bilinear  $\bar{a}(\cdot, \cdot)$ , contínua e coerciva. Suponha ainda que  $\bar{a}(u, v) = \bar{a}(v, u)$ . Então, a solução  $u$  para o problema 2.7.1 é a única solução do seguinte problema de minimização:*

$$J(u) = \inf_{v \in H} J(v), \quad (2.7.3)$$

*onde  $J(v) = \frac{1}{2} \bar{a}(v, v) - l(v)$ , para todo  $v \in H$ .*

## 2.8 Conceito de Hadamard para problemas bem-postos

*Segundo Hadamard, um problema de natureza matemática dado por uma equação é bem-posto se sua solução satisfaz as condições de existência, unicidade e dependência contínua dos dados, para todo conjunto de dados admissíveis. Caso uma dessas propriedades não seja válida, dizemos que o problema é mal-posto. Os problemas inversos não satisfazem algumas (ou todas) as condições de Hadamard, ver (ALVES, 2005), (KIRSCH, 1996).*

**Definição 2.8.1** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços normados e  $A : X \longrightarrow Y$  uma aplicação (linear ou não-linear). A equação  $Ax = y$  é chamada de bem-posta se possui as seguintes condições:*

- 1) *Existência:* Para todo  $y \in Y$  existe um  $x \in X$  tal que  $Ax = y$ .
- 2) *Unicidade:* Para todo  $y \in Y$  existe no máximo um  $x \in X$  com  $Ax = y$ .
- 3) *Estabilidade:* A solução  $x$  depende continuamente de  $y$ , ou seja, para toda sequência  $\{x_n\} \subset X$  com  $Ax_n \longrightarrow Ax (n \longrightarrow \infty)$ , temos que  $x_n \longrightarrow x (n \longrightarrow \infty)$ , consultar (KIRSCH, 1996).

*Na definição anterior, a existência e unicidade dependem apenas da natureza algébrica dos espaços  $X, Y$  e da aplicação  $A$ . Por outro lado, a estabilidade depende também da topologia dos espaços, ou seja, se o operador inverso  $A^{-1} : Y \longrightarrow X$  é contínuo. Por exemplo, pelo Teorema*

da Aplicação Aberta, o operador inverso  $A^{-1}$  é contínuo desde que  $A$  seja linear e contínuo, e os espaços  $X$  e  $Y$  sejam de Banach.

A existência de um operador inverso deve ser ressaltada. Em dimensão finita, a garantia de injetividade da matriz  $A$  implica na existência da matriz inversa. Esta propriedade já é suficiente para garantir a continuidade da inversa, e o problema inverso possui a propriedade da dependência contínua automaticamente. Com isso, problemas numéricos estão relacionados ao mal condicionamento da matriz do operador inverso.

## 2.9 Existência de solução fraca para EDP's elípticas

Seja  $\Omega$  um subconjunto aberto e limitado do  $\mathbb{R}^n$  com  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $u = u(x)$ . Considere  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função dada. Denotamos por  $L$  o operador diferencial parcial de segunda ordem dado por

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n (a^{i,j}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x)u_{x_i} + c(x)u \quad (2.9.1)$$

com as funções coeficientes dadas por  $a^{i,j}$ ,  $b^i$ ,  $c \in L^\infty(\Omega)$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ).

**Definição 2.9.1** Um operador diferencial de ordem  $2m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , da forma

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha(x) D^\alpha u, \quad u \in C^m(\Omega)$$

é chamado operador elíptico se existe uma constante  $C > 0$ , tal que

$$\sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha(x) \xi^{2\alpha} \geq C |\xi|^{2m}$$

para todo  $\xi \in \mathbb{R}^n$  e para todo  $x \in \Omega$ .

**Definição 2.9.2** i) A forma bilinear  $\bar{a}(\cdot, \cdot)$  associada à forma de divergente do operador elíptico  $L$  definido pela equação (2.9.1) é

$$\bar{a}(u, v) = \int_{\Omega} \left( \sum_{i,j=1}^n a^{i,j} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} v + cuv \right) dx, \quad \text{para } u, v \in H_0^1(\Omega).$$

ii) Dizemos que  $u \in H_0^1(U)$  é uma solução fraca de  $Lu = f$  se

$$\bar{a}(u, v) = \langle f, v \rangle, \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega) \text{ e } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ denota o produto interno em } L^2(\Omega).$$

**Teorema 2.9.1** Seja  $\Omega$  um conjunto limitado com fronteira de classe  $C^1$ . Então, existe um operador linear limitado  $T : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$  tal que

$$i) Tu = u|_{\partial\Omega} \text{ se } u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}),$$

$$ii) \|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

para cada  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ , com a constante  $C$  dependendo apenas de  $p$  e  $\Omega$ .

**Definição 2.9.3** Chamamos  $Tu$  de traço de  $u$  na  $\partial\Omega$ .

**Teorema 2.9.2** [Teorema do Traço] Seja  $\Omega$  um domínio limitado em  $\mathbb{R}^n$  com fronteira lipschitziana. Então,

(i) existe um único operador linear limitado  $T : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$ , isto é,  $\|Tu\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}$  com a propriedade que se  $u \in C^1(\bar{\Omega})$ , então  $Tu = u|_{\partial\Omega}$  no sentido convencional;

(ii) a imagem de  $T$  é densa em  $L^2(\partial\Omega)$ .

Mais geralmente, se  $u \in H^m(\Omega)$  e  $T_j u \equiv \frac{\partial^j u}{\partial v^j}$ , para  $0 \leq j \leq m-1$ , então  $T_j : H^m(\Omega) \rightarrow H^{m-j-1/2}(\partial\Omega)$  é uma sobrejeção linear e contínua, ver (SILTANEN; MUELLER, 2012), na página 306.

## 2.10 Princípio do máximo

O princípio do Máximo é importante para determinar propriedades interessantes de soluções fracas para problemas elípticos.

**Teorema 2.10.1** [Princípio do Máximo para solução Fraca] Considere um operador elíptico simétrico  $Lu \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  a solução da equação  $Lu = f$ , onde  $f \in C(\Omega)$  e  $f \leq 0$  em  $\Omega$ . Então, o máximo de  $u$  em  $\bar{\Omega}$  é alcançado na fronteira de  $\Omega$  e

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u. \quad (2.10.1)$$

Além disso, se o máximo é alcançado em um ponto interior de  $\Omega$ , então a função  $u$  é constante.

**Corolário 2.10.2** Considere um operador elíptico  $L$ . Se  $Lu = f \geq 0$  em  $\Omega$ , então, o mínimo de  $u$  em  $\bar{\Omega}$  é alcançado na fronteira de  $\Omega$  e

$$\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u. \quad (2.10.2)$$

### 3 PROBLEMA DIRETO EM EEG

Neste Capítulo apresentaremos a modelagem matemática para o problema de EEG. Tal modelagem baseia-se nas equações de Maxwell para o eletromagnetismo (SADIKU, 2012). Como veremos na Seção 3.1, sob hipóteses compatíveis para a aplicação sob investigação, as equações de Maxwell traduzem-se em uma EDP elíptica. Além disso, na Seção 3.1.2, apresentaremos propriedades da solução da EDP elíptica que modela o problema de EEG, que são fundamentais para o decorrer deste trabalho. Na Seção 3.2, descreveremos o problema direto como uma equação de operadores. Na Seção 3.3, determinaremos o operador adjunto da derivada de Fréchet do operador  $A$ . Na Subseção 3.3.1, discutiremos a representação do problema adjunto considerando que as medidas em EEG, sejam tomadas em toda a superfície na  $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Na Seção 3.4, trataremos da formulação do operador adjunto considerando as medidas reais, onde as medições em EEG são tomadas de maneira pontual. Na Seção 3.5, abordaremos brevemente o problema relacionado à adjunta-discreta.

#### 3.1 Modelagem do problema

Uma maneira geral de introduzirmos o conceito de **Problema Direto** é considerar o problema físico investigado como um fluxograma, onde conhecemos todas as causas (parâmetros e condições iniciais na equação que modela o problema) para as quais devemos encontrar um efeito (solução da equação associada).

Nesta Seção utilizaremos as equações de Maxwell (SADIKU, 2012) que descrevem a relação entre o campo elétrico  $E$  e magnético  $B$  para derivar a equação que modela o problema de EEG de nosso interesse.

Vamos associar as equações de Maxwell às leis fundamentais do eletromagnetismo, (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS, 1977).

Seja  $E$  o campo elétrico ao redor de uma carga  $q$ . A primeira lei do Eletromagnetismo descreve o fluxo do campo elétrico: “O fluxo de  $E$  por qualquer superfície fechada é igual à razão da carga dentro da superfície por uma constante  $\varepsilon_0$  chamada de permissividade elétrica.” Em símbolos matemáticos temos

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (3.1.1)$$

Notamos que (3.1.1) é a mesma equação para a famosa Lei de Coulomb, desde que apenas adicionemos a ideia de que o campo de uma única carga seja esfericamente simétrica.

Se tivermos uma curva estacionária arbitrária no espaço, e medirmos a circulação (ou o trabalho de uma partícula por essa curva calculado por uma integral de linha) do campo elétrico ao redor dessa curva, obtemos que esse valor não é, em geral, nulo. Por outro lado, para a eletricidade existe a segunda lei do eletromagnetismo que afirma: “Se  $B$  é o campo magnético de uma carga  $q$  e  $S$  é uma superfície qualquer (não fechada) cujo bordo é a curva fechada  $C$

então, a circulação de  $E$  ao redor de  $C$  é igual à derivada com relação ao tempo do fluxo de  $B$  por  $S$ .” Desta lei obtemos a segunda equação de Maxwell:

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}. \quad (3.1.2)$$

A terceira lei do eletromagnetismo, também chamada de lei de conservação do fluxo magnético ou lei de Gauss para campos magnetoestáticos, afirma que: “O fluxo total por uma superfície fechada em um campo magnético deve ser nulo, ou seja,

$$\oint B \cdot dS = 0.” \quad (3.1.3)$$

Aplicando o Teorema da Divergência em (3.1.3), obtemos a terceira equação de Maxwell:

$$\oint_S B \cdot dS = \int_v \nabla \cdot B \, dv = 0,$$

ou ainda,

$$\nabla \cdot B = 0. \quad (3.1.4)$$

Para a última lei da eletrodinâmica precisamos da constante  $c$  que é a velocidade da luz. Essa constante aparece na última lei pois o magnetismo é na realidade um efeito relativista da eletricidade. Deste modo, temos que a quarta lei da eletrodinâmica é: “Para uma superfície  $S$  limitada por uma curva fechada  $C$ , a quantidade  $c^2$  multiplicada pela circulação de  $B$  ao redor da curva  $C$  é igual à soma do fluxo da corrente elétrica por  $S$  dividido por  $\epsilon_0$ , com a derivada com relação ao tempo do fluxo de  $E$  por  $S$ .” Em símbolos, a última lei se resume na última equação de Maxwell

$$c^2 \nabla \times B = \frac{J}{\epsilon_0} + \frac{\partial E}{\partial t},$$

ou ainda,

$$\nabla \times B = \frac{J}{c^2 \epsilon_0} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} \quad (3.1.5)$$

colocando  $(c^2 \epsilon_0)^{-1}$  em evidência obtemos a expressão mais conhecida da última equação de Maxwell:

$$\nabla \times B = \mu \left( J + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right), \quad (3.1.6)$$

onde  $\mu = \frac{1}{c^2 \epsilon_0}$  é uma constante chamada de permissividade magnética,  $J$  também é chamado de densidade da corrente.

Outra informação importante que precisamos, chamada de lei da conservação da carga, é que o fluxo da corrente de uma superfície fechada é igual ao decréscimo da carga dentro da superfície, em símbolos,

$$\nabla \cdot J = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (3.1.7)$$

Pelo fato de lidarmos com frequências que estão abaixo de 100 Hz no bioeletromagnetismo,

a aproximação quase-estática das equações de Maxwell pode ser aplicada (WAGNER, 2011), isto nos permite negligenciar a derivada temporal do campo magnético e do campo elétrico nas equações de Maxwell, consultar (HSU, 1972), (TANZER, 2006) e (SADIKU, 2012).

A divergência da densidade de corrente é dada pela mudança temporal da densidade de carga. Com isso, pode ser dividida num meio não magnético passivo para a corrente óhmica e a corrente de polarização. Assim,

$$J = aE + \frac{\partial P}{\partial t}, \quad (3.1.8)$$

onde  $a$  é a condutividade e  $P = (\varepsilon - \varepsilon_0)E$  é a polarização do volume com a permissividade do meio de  $\varepsilon$ .

Negligenciando a derivada temporal em (3.1.2) temos  $\nabla \times E = 0$ . Portanto,  $E$  é um campo conservativo. Assim  $E$  é o gradiente de algum campo escalar  $u$ . Ou seja,  $E$  pode ser expresso por um potencial escalar  $u$ , da forma

$$E = -\nabla u. \quad (3.1.9)$$

Devido ao fato de podermos negligenciar o tempo derivado do campo elétrico, a expressão  $\frac{\partial P}{\partial t} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\frac{\partial E}{\partial t}$  é zero. Assim, usando (3.1.8) e (3.1.9) obtemos

$$J = aE = -a\nabla u. \quad (3.1.10)$$

Usando (3.1.10) e adicionando um vetor de corrente primária  $J^P$  para fonte das atividades do cérebro humano, temos

$$J = J^P - a\nabla u. \quad (3.1.11)$$

Além disso, negligenciando a derivada do tempo na equação de continuidade (3.1.7) obtemos  $\nabla \cdot J = 0$ . Utilizando isso juntamente com a equação (3.1.11) podemos descrever a equação do potencial para o problema direto em EEG como uma EDP elíptica da forma

$$-\operatorname{div}(a\nabla u) = \nabla \cdot J^P. \quad (3.1.12)$$

Interpretando tal quantidade como uma densidade da fonte de fluxo podemos escrever

$$f = \nabla \cdot J^P, \quad (3.1.13)$$

onde  $f \in L^2(\Omega)$ , consultar (WAGNER, 2011; MOHR, 2003).

Para que a equação diferencial (3.1.12) seja bem posta, necessitamos de outras considerações. Primeiramente, observamos que  $a$  é um tensor (matriz  $3 \times 3$ ) descrevendo a condutividade do meio. Haja visto que o material que constitui o cérebro humano é condutor em todas as direções, podemos assumir que  $a$  é uma matriz positiva definida. Além disso, considerando uma cabeça simétrica, assumiremos que  $a$  também é simétrica, consultar (MOHR, 2003), Teorema 9. A divergência de  $J^P$  é uma quantidade escalar. Pela hipótese a condutividade  $a$  é simétrica e positiva definida, e pela Definição 2.9.1 temos que a equação (3.1.13) é uma EDP elíptica (WAGNER,

2011; MOHR, 2003).

Por fim, para que o problema direto em EEG esteja completo, necessitamos impor condições na fronteira do volume condutor  $\Omega$ . Faremos isso de acordo com as seguintes hipóteses físicas sobre  $\Omega$ : No bioeletromagnetismo lidamos com modelos de cabeça que consistem em componentes diferentes, por exemplo, o couro cabeludo, o crânio e o tecido cerebral com diferentes valores de condutividade. Assim, a condutividade a poderá ter saltos nas interfaces entre duas componentes. Vamos assumir que a condutividade é constante e isotrópica dentro de cada componente. Com isso, o potencial  $u$  não é diferenciável entre duas componentes com diferentes valores de condutividade. Mas, a seguinte condição de continuidade é cumprida

$$\lim_{\Omega_l \ni x \rightarrow x^*} u_l(x) = \lim_{\Omega_k \ni x \rightarrow x^*} u_k(x), \quad (3.1.14)$$

onde  $\Omega_l$  é a  $l$ -ésima componente de  $\Omega$  e  $x^*$  um ponto arbitrário na interface entre as componentes  $l$ -ésima e  $k$ -ésima. Isto é um requisito físico, uma vez que o potencial  $u$  é contínuo no condutor de volume e os valores em uma interface arbitrária entre duas componentes de ambos os lados devem ser iguais.

Outro fato importante é que a corrente  $a\nabla u$  é contínua em seu volume condutor e ao longo da sua interface. Isso pode ser representado por

$$\lim_{\Omega_l \ni x \rightarrow x^*} \langle a_l(x) \nabla u_l(x), n \rangle = \lim_{\Omega_k \ni x \rightarrow x^*} \langle a_k(x) \nabla u_k(x), n \rangle \quad (3.1.15)$$

Para completar o modelo para o problema direto em EEG será introduzido a condição de contorno. Se a interface for a superfície do volume condutor, a equação (3.1.15) leva a

$$\lim_{\Omega \ni x \rightarrow x^*} \langle a(x) \nabla u(x), n \rangle = 0. \quad (3.1.16)$$

Tal hipótese é razoável, devido ao fato de que o ar que rodeia a cabeça humana é não condutor, o qual pode ser representado por uma condutividade nula do lado direito da (3.1.15), quando  $\Omega_k$  representa o componente exterior à cabeça humana. Uma vez que o termo  $a\nabla u$  descreve fisicamente as correntes, a equação (3.1.16) significa que no sentido físico nenhuma corrente pode fluir para dentro ou fora da cabeça. As condições de contorno (3.1.16) são chamadas condições de fronteira homogêneas de Neumann.

Com a equação (3.1.12) e as condições de fronteira na (3.1.16) o problema direto para EEG está formulado. Para podermos considerar fontes  $f = \nabla \cdot J^p$  gerais teremos que considerar soluções não-clássicas para o problema direto em EEG.

Uma vez que usamos condutores volumétricos de múltiplas camadas com condutividades diferentes, a condutividade  $a$  é descontínua na interface entre distintos componentes. Para obter uma solução clássica  $u$  do problema direto para EEG, a expressão  $(a\nabla u)$  deve ser contínua através dos diferentes componentes do condutor de volume  $\Omega$ . Portanto, é necessário que  $a\nabla u$  também salte na interface entre diferentes componentes, isto cancelará os saltos de  $a$ , (WAGNER, 2011). Se usarmos um volume condutor  $\Omega$  com bordo e interfaces Lipschitziana

contínuas e assumir que  $f \in L^2$ , o melhor que podemos esperar é que o potencial  $u$  esteja no espaço de Sobolev  $H^1(\Omega)$ , como veremos a seguir.

Antes de seguirmos, formularemos as hipóteses gerais deste trabalho

(H<sub>1</sub>)  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  é um domínio convexo e limitado com  $\partial\Omega$  Lipschitz.

(H<sub>2</sub>) Existem constantes  $C_1, C_2 > 0$  tais que  $C_1 \leq a(x) \leq C_2$  para todo  $x \in \Omega$ .

(H<sub>3</sub>)  $a(x)$  é simétrica para todo  $x \in \Omega$ .

### 3.1.1 O problema direto em EEG

No contexto do problema de EEG que estamos formulando nesta dissertação, o **Problema Direto em EEG** consiste em determinar a distribuição do potencial elétrico  $u$  na cabeça humana devido a corrente primária  $J^p$  causada pela atividade do cérebro. Em outras palavras, determinar uma solução para o problema (3.1.12) com condições de fronteira de Neumann (3.1.16).

### 3.1.2 Propriedades da solução do problema direto em EEG

O objetivo desta Subseção é mostrar que o problema direto em EEG é bem posto no sentido de Hadamard, ou seja, que a EDP (3.1.12) com condições de fronteira de Neumann (3.1.16) possui uma única solução, a qual depende continuamente dos dados iniciais.

Com isso em mente, iniciaremos definindo o seguinte subespaço do Espaço de Hilbert  $H^1(\Omega)$ , dado por

$$H_*^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) : \int_{\partial\Omega} v dx = 0\}.$$

Gostaríamos de observar que  $H_*^1(\Omega)$  é um subespaço fechado do Espaço de Hilbert  $H^1(\Omega)$ , haja visto que o funcional linear  $\int_{\partial\Omega} v dx$  é contínuo.

**Proposição 3.1.1** Seja  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  um domínio aberto e Lipschitziano. Então,  $H_*^1(\Omega)$  é convexo.

**Demonstração 3.1.2** O conjunto  $H_*^1(\Omega)$  será convexo se para quaisquer  $v, w \in H_*^1(\Omega)$  tivermos que

$$(1 - \lambda)v + \lambda w \in H^1, \forall \lambda \in (0, 1).$$

Como  $H^1$  é um espaço vetorial e portanto, convexo. Assim, para provarmos que  $H_*^1$  é convexo temos que verificar o que acontece com a condição

$$\int_{\partial\Omega} (1 - \lambda)v + \lambda w = 0.$$

Para isso, sejam  $v, w \in H_*^1(\Omega)$  então,

$$\int_{\partial\Omega} v = 0$$

e

$$\int_{\partial\Omega} w = 0.$$

Assim, para qualquer  $\lambda \in [0, 1]$ , temos que

$$\int_{\partial\Omega} [(1 - \lambda)v + \lambda w] = (1 - \lambda) \int_{\partial\Omega} v + \lambda \int_{\partial\Omega} w = 0. \quad (3.1.17)$$

Portanto, ainda teremos que  $(1 - \lambda)v + \lambda w$  pertence a  $H^1$ .

Implicando que  $H_*^1(\Omega)$  é convexo.

**Observação 3.1.1** Portanto, pelo Teorema de Mazur 2.5.2,  $H_*^1$  é fracamente fechado. Esse resultado é importante na demonstração do resultado de compacidade.

Para provarmos a boa colocação do nosso problema direto, primeiramente definiremos a forma bilinear

$$\begin{aligned} \bar{a} : H_*^1(\Omega) \times H_*^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \bar{a}(u, v) &= \int_{\Omega} a(x) \nabla u \nabla v dx, \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

e o funcional linear

$$\begin{aligned} l : H_*^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto l(v) := \int_{\Omega} f(x)v(x)dx. \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

No próximo lema provaremos que a forma bilinear definida em (3.1.18) é contínua em  $H_*^1(\Omega)$ .

**Lema 3.1.3** Sob as Hipóteses  $(H_1) - (H_3)$  temos que a forma bilinear (3.1.18) é contínua em  $H_*^1(\Omega)$ , isto é, existe uma constante  $C_c$  tal que

$$|\bar{a}(u, v)| \leq C_c \|u\|_{H_*^1} \|v\|_{H_*^1}. \quad (3.1.20)$$

**Demonstração 3.1.4** Dadas as hipóteses do lema, podemos escrever

$$|\bar{a}(u, v)| = \left| \int_{\Omega} a(x) \nabla u \nabla v dx \right| \leq \int_{\Omega} |a(x) \nabla u \nabla v| dx = \int_{\Omega} |a(x)| |\nabla u| |\nabla v| dx.$$

Usando a Hipótese  $(H_2)$ , a desigualdade de Hölder (Definição 2.6.3) e o fato de  $H^1$  ser continuamente imerso em  $L^2$  (Observação 2.6.2) na equação acima obtemos,

$$|\bar{a}(u, v)| \leq C_2 \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} \leq C_2 \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$$

e o lema está provado.

No próximo lema mostraremos que a forma bilinear (3.1.18) é coerciva.

**Lema 3.1.5** *Pelas Hipóteses  $(H_1) - (H_3)$  temos que a forma bilinear (3.1.18) é coerciva, isto é, existe uma constante  $C_1 > 0$  tal que*

$$|\bar{a}(u, v)| \geq C_1 \|u\|_{H_*^1}^2. \quad (3.1.21)$$

**Demonstração 3.1.6** *Pela Hipótese  $(H_2)$  temos por hipótese que  $0 < C_1 \leq a(x)$ , para todo  $x \in \Omega$ . Assim,*

$$|\bar{a}(u, u)| = \left| \int_{\Omega} a(x) \nabla u \nabla u \, dx \right| \geq C_1 \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \right) \geq C_1 \|u\|_{H_*^1}^2, \quad (3.1.22)$$

onde usamos a desigualdade de Poincaré (ver Teorema 2.6.5) na última desigualdade. Portanto, o lema está provado.

O próximo lema trata da continuidade do funcional linear (3.1.19).

**Lema 3.1.7** *Sob as Hipóteses  $(H_1) - (H_3)$ , o funcional linear  $l$  definido em (3.1.19) é contínuo em  $H_*^1(\Omega)$ .*

**Demonstração 3.1.8** *Dadas as hipóteses do lema, juntamente com a desigualdade de Hölder e a definição da norma em  $H^1(\Omega)$  temos que,*

$$|l(v)| \leq \int_{\Omega} |f(x) \cdot v(x)| \, dx = \int_{\Omega} |f| |\nabla v| \, dx \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{H^1}, \quad (3.1.23)$$

e o lema está provado.

Agora estamos prontos para provar que a EDP (3.1.12) com condições de Neumann (3.1.16) possui uma única solução. O ingrediente fundamental na prova é o Teorema de Lax-Milgram 2.7.1.

**Teorema 3.1.9** *Sob as Hipóteses  $(H_1) - (H_3)$ , existe uma única solução fraca  $u \in H_*^1(\Omega)$  para a EDP (3.1.12) com condições de Neumann (3.1.16). Em outras palavras, o problema variacional  $\bar{a}(u, v) = l(v)$ , para todos  $v \in H_*^1(\Omega)$  possui uma única solução.*

**Demonstração 3.1.10** *Pelos Lemas 3.1.3 e 3.1.5, temos que a forma bilinear  $\bar{a}(u, v)$  é coerciva e contínua. Pelo Lema 3.1.7, o funcional  $l$  é contínuo. Portanto, pelo Teorema de Lax-Milgram 2.7.1, existe uma única solução  $u \in H_*^1(\Omega)$  para o problema variacional  $\bar{a}(u, v) = l(v)$ , para qualquer  $v \in H_*^1(\Omega)$ .*

## 3.2 O problema direto como uma equação de operadores

Nesta Seção introduziremos o problema direto em EEG como uma equação de operadores. Em particular, provaremos resultados importantes para o operador  $A$ , como estar bem definido e ser compacto. Além disso, provaremos que  $A$  é Fréchet diferenciável, ou seja,  $dA(h) = w|_{\partial\Omega}$ , onde  $w \in H_*^1(\Omega)$  é a única solução da (3.2.6).

Defina o seguinte operador

$$\begin{aligned} A : L^2(\Omega) &\rightarrow L^2(\partial\Omega) \\ f &\mapsto A(f) = g = u|_{\partial\Omega} \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

onde  $u \in H_*^1(\Omega)$  é a única solução da EDP (3.1.12) com condições de Neumann (3.1.16).

Inicialmente, provaremos que o operador  $A$  em (3.2.1) está bem definido.

**Lema 3.2.1** O operador  $A$  definido em (3.2.1) está bem definido.

**Demonstração 3.2.2** De fato, pelo Teorema 3.1.9, para cada  $f \in L^2(\Omega)$ , existe uma única  $u(f) \in H_*^1(\Omega)$  solução de (3.1.12)-(3.1.16). Da unicidade no Teorema do Traço 2.9.1, temos que  $g(f) := u(f)|_{\partial\Omega} \in L^2(\Omega)$  é única. Assim,  $A$  está bem definido.

A seguir provaremos que o operador  $A$  é linear e limitado.

**Lema 3.2.3** O operador  $A$  em (3.2.1) é linear e limitado.

**Demonstração 3.2.4** Iniciaremos provando que  $A$  é linear. Sejam  $f_1, f_2 \in L^2(\Omega)$  e  $\alpha, \beta$  constantes. Pela linearidade da solução da EDP (3.1.12) com condições de fronteira de Neumann com relação a fonte, temos que  $\alpha u(f_1) + \beta u(f_2)$  é a única solução do problema (3.1.12), com fonte  $\alpha f_1 + \beta f_2$ . Pela linearidade do Teorema do Traço 2.9.2, segue que  $A(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha u(f_1)|_{\partial\Omega} + \beta u(f_2)|_{\partial\Omega} = \alpha A(f_1) + \beta A(f_2)$ .

Para provar que  $A$  é limitado, seja  $f \in L^2(\Omega)$ . Pela definição do operador  $A$  em (3.2.1) e da continuidade do operador do traço 2.9.2 e pela dependência contínua da solução  $u$  de (3.1.12) com relação a fonte  $f$  (EVANS, 2010), (BREZIS, 2013), temos que

$$\|A(f)\|_{L^2(\partial\Omega)} = \|u(f)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_1 \|u(f)\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}, \tag{3.2.2}$$

provando assim que  $A$  é limitado.

O próximo resultado é de fundamental importância nesse trabalho, o qual será melhor entendido no Capítulo 4. Antes disso, provaremos um lema auxiliar que servirá para a demonstração da Proposição que vem logo a seguir.

**Lema 3.2.5** *Sejam  $u_k = u(f_k) \in H_*^1(\Omega)$  e  $u = u(f) \in H_*^1(\Omega)$  soluções das equações (3.1.12) e (3.1.16), respectivamente a  $f_k \in L^2(\Omega)$  e  $f \in L^2(\Omega)$ , para  $k \in \mathbb{N}$ . Se a sequência  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  é tal que  $f_k \rightharpoonup f$  em  $L^2(\Omega)$ , então a sequência  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  possui uma subsequência que converge para  $u$  em  $H^1(\Omega)$ .*

**Demonstração 3.2.6** *Defina  $w_k = u(f_k) - u(f)$ , onde  $u(f_k)$  e  $u(f)$  são as únicas soluções de (3.1.12) e (3.1.16), para  $f_k, f$ , respectivamente. Pela linearidade da EDP(3.1.12), temos que  $w_k$  satisfaz*

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (a(x)\nabla w_k(x)) &= f_k(x) - f(x) & x \in \Omega \\ a \frac{\partial w_k(x)}{\partial \eta} &= 0, & x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Como  $f_k - f \in L^2(\Omega)$ , segue do Teorema 3.1.9 que  $w_k \in H_*^1(\Omega)$ , para cada  $k \in \mathbb{N}$ . Como  $H_*^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ , temos que  $w_k$  também satisfaz a seguinte identidade variacional

$$\int_{\Omega} -\nabla \cdot (a\nabla w_k)\varphi dx = \int_{\Omega} (f_k - f)\varphi dx \quad (3.2.3)$$

para qualquer  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ .

Como o lado direito de (3.2.3) converge para zero, haja visto que  $f_k \rightharpoonup f$  em  $L^2(\Omega)$ , temos que o limite  $w_k \rightharpoonup z$  no sentido das distribuições ( usando a dualidade em  $H^1(\Omega)$ ) onde  $z$  satisfaz (no sentido das distribuições e usando a dualidade em  $H^1(\Omega)$ )

$$-\nabla \cdot (a(x)\nabla z) = 0 \quad (3.2.4)$$

com condição de fronteira de Neumann homogênea

$$\frac{\partial z}{\partial \eta} = 0. \quad (3.2.5)$$

Pelo Princípio do Máximo (Teorema 2.10.1) temos que  $z = \text{constante}$ .

Como  $H_*^1(\Omega)$  é convexo e fechado, portanto, pelo Teorema 2.5.2 temos que é fracamente fechado. Assim,  $z \in H_*^1(\Omega)$ . Portanto, segue que

$$0 = \int_{\partial\Omega} z dz = \int_{\partial\Omega} \text{constante} dx = 0 \Rightarrow \text{constante} = z = 0.$$

Em particular, temos que  $w_k = u_k - u \rightharpoonup 0$ .

Escolha  $\varphi = w_k$ , em (3.2.3). Pela hipótese  $(H_2)$  temos que  $0 < C_1 \leq a(x)$ , o que implica que o lado esquerdo da (3.1.12) satisfaz

$$\|\nabla w_k\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow +\infty.$$

Deste último fato e da desigualdade de Poincaré em  $H_*^1(\Omega)$ , concluímos que

$$\|w_k\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$$

e o lema está provado.

Agora sim podemos provar o seguinte resultado.

**Proposição 3.2.7** O operador  $A$  definido em (3.2.1) é compacto.

**Demonstração 3.2.8** Como  $L^2(\Omega)$  é separável, é suficiente mostrar que o operador  $A$  é sequencialmente compacto, ou seja, que para cada sequência  $\{f_k\} \in L^2(\Omega)$  convergindo fracamente para  $f \in L^2(\Omega)$ , temos que provar que, pelo menos uma subsequência  $A(f_k) \rightarrow A(f)$  em  $L^2(\partial\Omega)$ .

Como, por definição (veja Eq. (3.2.1)),  $A(f) = (T_D \circ u(f))$ , onde  $T_D$  é o operador do traço de Dirichlet, o qual é linear e limitado entre  $H^1(\Omega)$  e  $L^2(\partial\Omega)$  (MEDEIROS; FERREL; BIAZUTTI, 2000), segue do Lema 3.2.5 que  $A(f_k) = T_D(u(f_k)) \rightarrow A(f) = T_D(u(f))$ .

**Observação 3.2.1** Como  $A$  é linear e limitado (contínuo), segue que  $A$  é fracamente contínuo (consultar (EVANS, 2010), (BREZIS, 2013)), ou seja, para cada sequência  $\{f_k\} \in L^2(\Omega)$  convergindo fracamente para  $f \in L^2(\Omega)$  temos que  $A(f_k) \rightharpoonup A(f)$  em  $L^2(\partial\Omega)$ .

Um último resultado que apresentamos nesta Seção está relacionado à derivada de Fréchet do operador  $A$ .

**Lema 3.2.9** Seja  $A$  como definido em (3.2.1). Então  $A$  é diferenciável para todo  $h \in L^2(\Omega)$ . A derivada de  $A$ , denotada por  $dA : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$  é um operador linear limitado e assim  $A$  é Fréchet diferenciável.

Por fim, temos que  $dA(h) = w|_{\partial\Omega}$ , onde  $w \in H^1(\Omega)$  é a única solução do seguinte problema (Veja Teorema 3.1.9)

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (a\nabla w) &= h, & \text{em } \Omega \\ a \frac{\partial w}{\partial \eta} &= 0, & \text{na } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

**Demonstração 3.2.10** Como  $A$  é linear e contínuo pelo Lema 3.2.3, assim  $A$  é Fréchet-diferenciável e  $w|_{\partial\Omega} = dA(x)(h) = A$ , para todo  $h$  em  $L^2(\Omega)$  e  $dA(x)(h)$  é linear e limitada, consultar (BOTELHO; PELLEGRINO; TEIXEIRA, 2015).

### 3.3 Operador adjunto

Nesta Seção dedicaremos a determinação do operador adjunto da derivada de Fréchet de  $A$ , que como visto anteriormente, (ver Seção 3.2) por  $A$  ser linear e limitado satisfaz  $dA = A : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$ .

Como  $L^2$  é um espaço de Hilbert e  $A$  é um operador linear e limitado, sabemos da existência do operador  $A^* : L^2(\partial\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  (adjunto de  $A$ ) ver Teorema 2.4.1, tal que

$$\langle A^*r, h \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle r, Ah \rangle_{L^2(\partial\Omega)}, \quad \forall h \in L^2(\Omega). \quad (3.3.1)$$

Queremos determinar quem é  $A^*r$ . Em particular, tal quantidade será de muita importância para a solução do problema de interesse no caso particular em que  $r = A(f) - g^\delta$ , como será explorado na Subseção 3.3.1 e na Seção 3.4.

Considere  $w$  como em (3.2.6). Assim, temos de (3.3.1) que

$$\int_{\partial\Omega} wrdS = \langle r, w \rangle_{L^2(\partial\Omega)} = \langle r, Ah \rangle_{L^2(\partial\Omega)} = \langle A^*r, h \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Seja  $v \in H^1(\Omega)$  a única solução (veja Teorema 3.1.9) do problema de Neumann

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (a\nabla v) &= 0, & \text{em } \Omega \\ a \frac{\partial v}{\partial \eta} &= r, & \text{na } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Então, usando a fórmula de Green (Proposição 2.6.6) e as equações (3.2.6) e (3.3.2) obtemos

$$\begin{aligned} \langle r, Ah \rangle_{L^2(\partial\Omega)} &= \int_{\partial\Omega} wrdS = \int_{\partial\Omega} aw \frac{\partial v}{\partial \eta} dS + \int_{\Omega} -\nabla \cdot (a\nabla v) w dx \\ &= \int_{\partial\Omega} wvdS + \int_{\Omega} (a\nabla v) \nabla w dx - \int_{\partial\Omega} aw \frac{\partial v}{\partial \eta} dS \\ &= \int_{\Omega} -\nabla \cdot (a\nabla w) v dx + \int_{\partial\Omega} av \frac{\partial w}{\partial \eta} dS \\ &= \int_{\Omega} v h dx = \langle A^*r, h \rangle_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Logo, segue que  $A^*r = v \in L^2(\Omega)$ , onde  $v \in H^1(\Omega)$  é a única solução de (3.3.2).

### 3.3.1 Operador adjunto: Caso de medidas contínuas no problema de EEG

Nesta Subseção faremos uma breve discussão sobre a representação do problema adjunto no caso onde as medidas no problema de EEG são obtidas em toda a superfície  $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Essa discussão terá aplicações relevantes no que segue, para a solução do problema inverso em questão (veja detalhes no Capítulo 4).

Assuma que tenhamos acesso às medidas  $g^\delta|_{\partial\Omega} \in L^2(\partial\Omega)$ . Neste caso, definimos  $r = A(f) - g^\delta \in L^2(\partial\Omega)$ , para cada  $f \in L^2(\Omega)$ .

Segue dos resultados obtidos na Seção 3.5 que

$$A^*r = v$$

onde  $v \in L^2(\Omega)$  é a única solução de (3.3.2).

Usando ainda a definição de  $r$  dada acima, e a linearidade de  $A^*$ , obtemos que

$$A^*A(f) - A^*g^\delta = v$$

que é conhecida como equação normal.

### 3.4 Caso de medidas reais no problema de EEG: Sistema de operadores

Diferentemente do que assumimos na Seção 3.3.1, nos casos reais, as medições em EEG são tomadas em termos do potencial  $u$  (solução de (3.1.12)) em uma quantidade finita  $\{g_j^\delta\} = g(x_j)$  para  $j = \{1, \dots, N\}$  de pontos  $x_j$  localizados no couro cabeludo, em termos de um potencial de referência  $g_0 = g(x_0)$ , para  $x_0 \in \partial\Omega$ , consultar (MOHR, 2003), (CICHOCKI; SANEI, 2007).

**Observação 3.4.1** Se considerarmos medidas de maneira pontual, no modelo contínuo (3.1.12) e (3.1.16), vemos que  $r = A(f) - g_j^\delta$  deve ser considerado pontualmente na fronteira de  $\Omega$ , (DASSIOS; HADJILOIZI, 2009), (VALLAGHÉ; PAPADOPOULOU; CLERE, 2008), (FAUGERAS et al., 1999). Ou seja, teremos que considerar o operador direto  $A(f)(x_j)$ , onde  $A(f)(x_j)$  deve ser visto como o potencial  $A(f) = g(x_j) \in \partial\Omega$ . Portanto,  $r = r_j = A(f)(x_j) - g_j^\delta$  é um número real. Assim, tem medida nula em  $\partial\Omega$ . Desta forma,  $r = 0 \in L^2(\partial\Omega)$  (ao menos, no sentido de  $L^2(\Omega)$ ). Disto segue de (3.3.2) e do Princípio do Máximo (Teorema 2.10.1) que  $v = \text{constante}$ . Em outras palavras, independe de  $f$  na equação (3.2.1).

Com a Observação 3.4.1 em mente, assumiremos o seguinte:

**Hipótese 3.4.1** Assumiremos que os eletrodos possuem (de fato) uma pequena região mensurável (no sentido de  $L^2$ ) em torno do ponto  $x_j \in \partial\Omega$ . Em tal região, que denotaremos por  $\xi_j \subset \partial\Omega$ , as medidas são tomadas constantes e dadas por  $\xi_j$ .

Dada a Hipótese 3.4.1, temos duas possibilidades para o resíduo  $r$ .

**Caso 1:** Assumiremos que as medidas sejam feitas considerando a contribuição de todos os eletrodos, ou seja

$$g^\delta = \sum_{j=1}^N \xi_j g_j^\delta - \xi_0 g_0$$

onde  $\xi_0 g_0$  é o potencial medido no eletrodo de referência.

Neste caso, obteremos  $v \in L^2(\Omega)$ , solução de (3.3.2) com relação ao resíduo  $r = A(f) - g^\delta = A(f) - (\sum_{j=1}^N \xi_j g_j^\delta - \xi_0 g_0)$ .

**Caso 2:** Assumiremos que as medidas sejam feitas considerando a contribuição individual de um dos eletrodos com relação a medida de referências  $\xi_0 g_0$ . Assim, obtemos um vetor  $N$ -dimensional de medidas

$$g_j^\delta = \xi_j g_j^\delta - \xi_0 g_0, \quad j = 1, \dots, N.$$

Neste caso, definiremos o seguinte sistema de operadores

$$\begin{aligned} A_j &: L^2(\Omega) \rightarrow (L^2(\partial\Omega)) \\ f &\mapsto A_j(f) = \xi_j g|_{\partial\Omega} \quad j = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

onde  $g = g(f)$  é a única solução de (3.1.12) e (3.1.16).

Com as propriedades que provamos a respeito do operador  $A$  definido em (3.2.1), enunciaremos o seguinte resultado.

**Corolário 3.4.1** Sob as Hipóteses ( $H_1 - H_3$ ), temos que para cada  $j = 1, \dots, N$ , o operador  $A_j$  definido em (3.4.1) é

- i) bem definido, linear e limitado;
- ii) compacto;
- iii) Fréchet diferenciável;
- iv) possui um operador adjunto  $A_j^*$  bem definido, tal que

$$A_j^* r_j = v_j,$$

onde  $r_j = A_j(f) - g_j^\delta$  e  $v_j \in L^2(\Omega)$  é a única solução de (3.3.2), com  $r = r_j$ , respectivamente.

**Demonstração 3.4.2** A demonstração se resume às propriedades do operador  $A$  provadas no Capítulo 2 e na Seção 3.5.

## 3.5 A abordagem adjunta-discreta

Nesta Seção discursaremos um pouco sobre a abordagem adjunta-discreta do problema de EEG, a qual é amplamente utilizada na literatura sobre o assunto, (FAUGERAS *et al.*, 1999), (VALLAGHÉ; PAPADOPOULOU; CLERE, 2008).

Para tal, temos que lembrar que o operador  $A$  definido em (3.2.1), que associa a cada corrente primária  $J^P$  (que representa a atividade elétrica cerebral) e as medidas do potencial  $u$  (solução de (3.1.12) e (3.1.16)) avaliada nos eletrodos, é um operador linear (veja Lema 3.2.1). Na literatura sobre EEG este operador é conhecido como "lead field" - campo de vetores principal, (VALLAGHÉ; PAPADOPOULOU; CLERE, 2008).

Do ponto de vista numérico, o campo de vetores principal é discretizado (dependendo do tipo de discretização utilizado como, por exemplo, por volumes finitos, elementos finitos, diferenças finitas, etc) e cuja representação associada a um número finito de dipolos (medidas discretas na fronteira de  $\Omega$  como na Subseção 3.4), é dada pela matriz  $L_{mn}$ , conhecida como a matriz do campo principal.

Orientando as medidas nos diferentes dipolos, com relação a medida de referência como na Subseção 3.4, podemos observar que cada coluna  $j \in \{1, \dots, n\}$  da matriz  $L_{mn}$  fornece o valor do potencial elétrico  $u$  no eletrodo correspondente. Portanto,  $n$  é igual ao número de dipolos considerados (em torno de 10000 em um modelo para fontes distribuídas). Também é fácil ver que tal matriz  $L_{mn}$  possui um número de linhas  $i \in \{1, \dots, n\}$  que é igual ao número de eletrodos.

Consideremos, que temos uma discretização no domínio  $\Omega$ , e denotemos por  $x$  o vetor resultado da discretização da fonte  $f$  em (3.1.12) (equivalentemente  $\nabla \cdot J^p$ ) e  $L$  a matriz do campo principal, com respeito a tal discretização. Finalmente, denotemos por  $y^\delta$  o vetor de medidas do potencial  $u$  nos eletrodos, correspondentes aos diferentes dipolos. Com esta configuração, o problema pode ser escrito de forma simples, como o sistema linear

$$Lx = y^\delta, \quad (3.5.1)$$

onde o vetor  $x$  é a quantidade a ser encontrada no problema inverso em EEG neste caso. O problema (3.5.1) é mal posto no sentido de Hadamard, no capítulo 4 iremos tratar com mais detalhes sobre esse assunto.

## 4 PROBLEMA INVERSO EM EEG

Neste capítulo apresentaremos uma breve introdução dos problemas inversos e mal postos, bem como algumas estratégias de regularização para problemas inversos. Em particular, trataremos do método de regularização de Tikhonov (métodos contínuos), consultar (KIRSCH, 1996), (BAUMEISTER, 1987). Além disso, apresentaremos o método iterativo de Landweber e algumas variantes como opção de estratégia de regularização para o problema inverso em EEG, (KIRSCH, 1996), (BAUMEISTER, 1987).

### 4.1 Problemas inversos e mal postos

O estudo dos chamados problemas inversos surgiram da necessidade de interpretar medições indiretas e incompletas. Como uma área da matemática contemporânea, o campo de problemas inversos é fortemente dirigido para as aplicações e tem crescido constantemente nos últimos 30 anos. Esse crescimento foi promovido tanto pelos avanços na computação quanto pelos avanços teóricos. Sensores digitais modernos fornecem grandes quantidades de dados relacionados a diversas áreas, incluindo engenharia, geografia, medicina, biologia, física, química, e finanças (KIRSCH, 1996), (SILTANEN; MUELLER, 2012).

Muitos problemas inversos podem ser modelados abstratamente como  $A(f) = g$ , onde  $A$  é um dado operador entre espaços de funções apropriados, e  $f$  é dado pela medida dos parâmetros "externos" e a solução desejada  $f$  representa os parâmetros "internos", que são inacessíveis por medição direta. No caso especial, onde  $A$  é um operador linear e compacto, é bem conhecido na literatura que o problema de determinar  $f$ , a partir de medidas  $g^\delta$ , é mal posto no sentido de Hadamard. Isto gera problemas na aproximação numérica e na interpretação de soluções, (GROETSCH, 1983). Veremos nas próximas seções como o problema inverso em EEG se enquadra como um problema mal posto no sentido de Hadamard. Um exemplo para um problema mal posto, é o exemplo clássico de Hadamard em seu famoso artigo, ver (HADAMARD, 1923).

#### Exemplo 4.1.1 (Problema de Cauchy para a equação de Laplace)

Encontrar uma solução  $u$  para a equação de Laplace

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0 \text{ em } \mathbb{R} \times [0, \infty) \quad (4.1.1)$$

que satisfaça as condições de contorno

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial}{\partial y} u(x, 0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.1.2)$$

onde  $f$  e  $g$  são funções dadas. Assim, a (única) solução para  $f(x) = 0$  e  $g(x) = \frac{1}{n^2} \text{sen}(nx)$  é dada por

$$u(x, y) = \frac{1}{n^2} \text{sen}(nx) \text{senh}(ny), \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \geq 0. \quad (4.1.3)$$

Com isso, temos

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \{|f(x) + g(x)|\} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow \infty \quad (4.1.4)$$

mas,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x, y)| = \frac{1}{n^2} \operatorname{senh}(ny) \longrightarrow \infty, \quad n \longrightarrow \infty \quad (4.1.5)$$

para todo  $y > 0$ . O erro nos dados tende a zero enquanto o erro da solução  $u$  tende para infinito. Portanto, a solução não depende continuamente dos dados e o problema é mal posto.

## 4.2 Problemas inversos como equações de operadores

Nesta Seção formularemos de maneira mais precisa o conceito de problemas inversos usando equações de operadores. Tal formulação pode ser feita tanto para operadores lineares, como não lineares. Haja visto que o problema de interesse nesta dissertação é linear (Veja Capítulo 3), nos deteremos a formular esta Seção utilizando a teoria linear.

Considere a equação de operadores

$$A(f) = g, \quad (4.2.1)$$

onde  $A$  é um operador linear e compacto entre espaços de Hilbert  $X$  e  $Y$ .

No contexto de identificação de parâmetros em equações diferenciais, o operador  $A$  associa a cada parâmetro  $f$ , informações sobre a solução  $g_f$  da equação diferencial (veja Capítulo 3 para um tal exemplo). Por isso, em geral nos referimos ao operador  $A$  em (4.2.1), como o operador direto.

Assim, o problema inverso associado a equação (4.2.1), consiste em determinar  $f$  pelo conhecimento parcial de  $g \in Y$ . Em aplicações práticas, em geral, não conhecemos precisamente os dados, mas somente uma aproximação  $g^\delta \in Y$  com

$$\|g - g^\delta\| \leq \delta, \quad (4.2.2)$$

onde  $\delta > 0$  é conhecido como o nível de ruído. Em particular,  $\delta$  pode ser interpretado como erros de modelagem ou imprecisões nos aparelhos de medidas.

Desta forma, nas aplicações práticas, a equação de operadores que é conhecida como

$$A(f) = g^\delta, \quad (4.2.3)$$

ao invés de (4.2.1).

Note que o problema inverso associado, com dados  $g^\delta \in Y$  satisfazendo (4.2.2) pode não ser solucionável, pois não podemos assumir que os dados medidos em  $g^\delta$  estão na imagem  $\mathcal{R}(A)$  de  $A$ . Assim, o melhor que podemos esperar é determinar uma aproximação  $f^\delta \in X$  para a solução exata  $f$ .

Além disso, gostaríamos que a uma solução aproximada  $f^\delta$  de  $f$  dependa continuamente dos dados  $g^\delta$ . Dada a hipótese que  $A$  é compacto, temos que  $A^{-1}$  (se existir) não é limitada (Ver Teorema 2.3.1). Portanto, uma solução aproximada  $f^\delta = A^{-1}g^\delta$  não depende continuamente dos dados em (4.2.2). Assim, nosso objetivo é construir aproximações estáveis  $R : Y \rightarrow X$  para a inversa generalizada do operador  $A$ , denotada por  $A^\dagger : \mathcal{R}(A) \rightarrow X$ , a qual é chamada de uma estratégia de regularização.

Veremos na Seção abaixo que o problema inverso para EEG se enquadra no que foi discutido acima.

### 4.3 Estratégias de regularização

Para contornar a falta de dependência contínua das medidas, como no Exemplo 4.1.1 e como veremos a seguir para o problema inverso em EEG, faz-se necessário o uso de algum método de regularização, afim de obter uma aproximação estável e convergente para a solução do problema inverso.

Uma regularização para um problema é uma aproximação de um problema mal posto por uma família de problemas bem postos, como segue:

**Definição 4.3.1** Uma estratégia de regularização é uma família (a um parâmetro  $\alpha$ ) de operadores limitados

$$R_\alpha : Y \rightarrow X, \quad \alpha > 0 \quad (4.3.1)$$

tal que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} R_\alpha A(f) = f \quad \forall f \in X. \quad (4.3.2)$$

Note que a família  $R_\alpha$  em (4.3.1) - (4.3.2) deve ser construída tal que os operadores  $R_\alpha A$  convirjam pontualmente para a identidade.

Pela Definição 4.3.1 e pela compacidade de  $A$ , podemos concluir o seguinte,

**Teorema 4.3.1** Seja  $R_\alpha$  uma estratégia para um operador compacto  $A : X \rightarrow Y$  onde  $\dim X = \infty$ . Então, temos

- (1) os operadores  $R_\alpha$  não são uniformemente limitado, ou seja, existe uma sequência  $(\alpha_j)$  com  $\|R_{\alpha_j}\| \rightarrow \infty$  para  $j \rightarrow \infty$ ;
- (2) a sequência  $(R_\alpha A(f))$  não pode convergir uniformemente em subconjuntos limitados de  $X$ ; ou seja, em  $(R_\alpha A(f))$  não existe convergência de  $R_\alpha A$  para a identidade  $I$  na norma do operador.

O método de regularização depende da escolha de parâmetros  $\alpha$ , a qual pode ser feita a-priori ( $\alpha = \alpha(\delta)$ ), ou a-posteriori ( $\alpha = \alpha(\delta, g^\delta)$ ). Portanto, a solução regularizada  $f_\alpha^\delta$  deve convergir

para a solução  $f$  de  $Af = g$ , quando  $\delta \rightarrow 0$ , para todo  $f \in X$ , ou seja, se o erro de pior caso (consultar (KIRSCH, 1996)), satisfazer

$$\sup \{ \|R_{\alpha(\delta)}g^\delta - g\| : g^\delta \in Y, \|A(f) - g^\delta\| \leq \delta \} \rightarrow 0. \quad (4.3.3)$$

Nas Seções 4.4 e 4.5.2 discutiremos como construir estratégias de regularização para o problema inverso em EEG.

### 4.3.1 Problema inverso em EEG

O problema inverso em EEG sob investigação é determinar a fonte, a localização e a intensidade da atividade cerebral  $f$  em (3.1.12), a partir de medidas indiretas do potencial  $g^\delta|_{\partial\Omega}$ , feitas por eletrodos localizados na parte externa do crânio.

O problema acima pode ser descrito como uma equação de operadores como da Seção 4.2. A próxima proposição mostra que o problema inverso em EEG é mal posto no sentido de Hadamard. Iniciaremos mostrando que o problema inverso em EEG não depende continuamente dos dados  $g^\delta|_{\partial\Omega}$ . No Capítulo 5, discutiremos o problema de não unicidade da solução do problema inverso em EEG. Portanto, o problema sob investigação não satisfaz dois dos itens da Definição de Hadamard.

A próxima proposição mostra que o problema inverso em EEG não é estável com relação as medidas.

**Proposição 4.3.2** Considere a equação de operadores em (3.2.1), para medidas do potencial com nível de ruído  $\delta > 0$  tal que  $\|g|_{\partial\Omega} - g^\delta|_{\partial\Omega}\| \leq \delta$ . Então o problema inverso em EEG não depende continuamente das medidas.

**Demonstração 4.3.3** Como o operador  $A$  é compacto (ver Lema 3.2.5) e está definido entre espaços de dimensão infinita, segue do Teorema 2.3.1 que o operador inverso  $A^{-1}$  (se existir), é ilimitado, ou seja, dado  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\|A^{-1}\| \geq n$ . Assim, para  $f$  e  $f^\delta$  soluções respectivas do problema inverso associado a equação de operadores (3.2.1), para os dados  $g$  e  $g^\delta$ , temos que, dado qualquer que seja  $\delta > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n_0\delta > 1$ , e

$$\|f - f^\delta\| = \|A^{-1}(g - g^\delta)\| \geq n_0\delta > 1.$$

Assim, o problema inverso em EEG não depende continuamente das medidas.

Uma das consequências da Proposição 4.3.2 é que necessitamos de uma estratégia de regularização para o problema inverso em EEG. Discutiremos algumas estratégias específicas de regularização nas Seções 4.4 e 4.5.

## 4.4 Regularização de Tikhonov

Nesta Seção introduziremos uma das estratégias de regularização para problemas inversos, a qual é conhecida como regularização de Tikhonov [(TIKHONOV; ARSENIN, 1977), (NEUBAUER; HANKE; H, 1996)]. Durante essa Seção consideraremos  $A : X \rightarrow Y$  como um operador linear e limitado entre os espaços de Hilbert  $X$  e  $Y$ , a menos que se faça menção em contrário. Além disso, denotaremos por  $A^* : Y \rightarrow X$  o operador adjunto de  $A$  (que existe e é um operador linear e limitado, segundo o Teorema 2.4.1).

Primeiramente iniciaremos analisando o que acontece se olharmos para a estratégia de mínimos quadrados, amplamente utilizada para encontrar soluções de problemas da forma  $A(f) - g^\delta = 0$ . Isso ficará claro logo abaixo. Por enquanto, considere o seguinte lema:

**Lema 4.4.1** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Hilbert,  $A : X \rightarrow Y$  linear e limitado, e  $g \in Y$ . Então, existe  $\hat{f} \in X$  com  $\|A\hat{f} - g\| \leq \|Af - g\|, \forall f \in X$  se, e somente se,  $\hat{f} \in X$  resolver a equação normal  $A^*A\hat{f} = A^*g$ .*

Um método para lidar com sistemas lineares finitos da forma  $Af = g$  é determinar o melhor ajuste no sentido de minimizar o ruído  $\|Af - g\|$  em relação a  $f \in X$  para alguma norma em  $Y$ . Se  $X$  é de dimensão infinita e  $A$  é compacto, este problema de minimização também é mal posto.

Do Lema 4.4.1, segue o seguinte resultado.

**Proposição 4.4.2** *Assuma que o operador  $A : X \rightarrow Y$  seja linear, limitado e compacto. Então o problema de mínimos quadrados*

$$\min_f \|Af - g^\delta\|^2, \quad (4.4.1)$$

com  $\|g - g^\delta\| \leq \delta$  é mal posto no sentido de Hadamard.

**Demonstração 4.4.3** *Pelo Lema 4.4.1, temos que a solução do problema 4.4.1 é equivalente a equação normal  $A^*A\hat{f} = A^*g^\delta$ . Como por hipótese  $A$  é compacto e  $A^*$  é linear e limitado, segue do Teorema 2.4.3 que  $A^*A$  é compacto. Agora, segue de argumentos similares aos utilizados na Proposição 4.3.2 que o problema 4.4.1 é mal posto.*

A proposição acima, em particular, implica no seguinte resultado para o problema inverso em EEG.

**Corolário 4.4.4** *O método dos mínimos quadrados (4.4.1) não fornece uma maneira de obter uma solução estável para o problema inverso em EEG.*

**Demonstração 4.4.5** *De fato, segue dos Lemas 3.2.1 e 3.2.5 que o operador  $A$  definido em (3.2.1) é linear, limitado e compacto. Portanto, considerando a equação (4.4.1), o resultado segue diretamente da Proposição 4.4.2.*

A regularização de Tikhonov consiste em determinar  $f^\alpha \in X$  que minimiza o funcional de Tikhonov

$$J_\alpha(f) = \|Af - g\|^2 + \alpha\|f\|^2 \quad \forall \quad f \in X. \quad (4.4.2)$$

onde  $\alpha > 0$  é chamado de parâmetro de regularização, consultar (KIRSCH, 1996).

O próximo teorema garante que o problema de minimização (4.4.2) é bem posto.

**Teorema 4.4.6** *Sejam  $\alpha > 0$  e  $g \in Y$ . Então, o funcional de Tikhonov  $J_\alpha$  tem um único mínimo  $f^\alpha \in X$ . Este mínimo  $f^\alpha$  é uma única solução da equação normal*

$$\alpha f^\alpha + A^*A f^\alpha = A^*g. \quad (4.4.3)$$

O próximo teorema nos garante que a minimização do funcional de Tikhonov 4.4.2 é uma estratégia de regularização.

**Teorema 4.4.7** *Seja  $\alpha > 0$ . Então:*

- (a) *O operador  $\alpha I + A^*A$  tem inversa limitada. Em particular a família de operadores  $R_\alpha : Y \rightarrow X$  definidos por  $R_\alpha := (\alpha I + A^*A)^{-1}A^* : Y \rightarrow X$  formulam uma estratégia de regularização, conhecida como método de regularização de Tikhonov.*

*Para dados  $g^\delta \in Y$  com  $\|g - g^\delta\| \leq \delta$ , temos que*

*$R_\alpha g^\delta$  é determinado com uma única solução  $f_\alpha^\delta \in X$  da equação do segundo tipo*

$$\alpha f_\alpha^\delta + A^*A f_\alpha^\delta = A^*g^\delta. \quad (4.4.4)$$

*Além disso, toda escolha do parâmetro de regularização  $\alpha > 0$  satisfazendo  $\alpha(\delta) \rightarrow 0$  ( $\delta \rightarrow 0$ ) com  $\delta^2 \alpha(\delta) \rightarrow 0$  ( $\delta \rightarrow 0$ ), produz uma estratégia de regularização.*

- (b) *Seja  $g = A^*z \in \mathcal{R}(A^*A)$  com  $\|z\| \leq E$ . Escolhendo  $\alpha(\delta) = c\delta/E$  para algum  $c > 0$ , temos a seguinte estimativa de erros entre a solução regularizada para dados com ruídos  $g^\delta \in Y$  e a solução sem ruídos  $f \in X$ :*

$$\|f_{\alpha(\delta)}^\delta - f\| \leq \frac{1}{2}(1/\sqrt{c} + \sqrt{c})\sqrt{\delta E}. \quad (4.4.5)$$

- (c) *Seja  $u = A^*Az \in \mathcal{R}(A^*A)$  com  $\|z\| \leq E$ . Escolhendo  $\alpha(\delta) = c(\delta/E)^{2/3}$  para alguns  $c > 0$  obtemos a seguinte estimativa de erro*

$$\|f_{\alpha(\delta)}^\delta - f\| \leq \left( \frac{1}{2\sqrt{c}} + c \right) E^{1/3} \delta^{2/3}. \quad (4.4.6)$$

Assim, o método de regularização de Tikhonov produz taxas ótimas (com relação a informação a-priori sobre a solução de  $f$ ) para  $\|(A^*)^{-1}f\| \leq E$  ou  $\|(A^*A)^{-1}f\| \leq E$ , respectivamente (supondo  $A^*$  injetor), [(NEUBAUER; HANKE; H, 1996)].

Os autovalores de  $A$  tendem a zero, e os autovalores de  $\alpha I + A^*A$  são separados de zero por  $\alpha > 0$ . Deste teorema observamos que  $\alpha$  deve ser escolhido para depender de  $\delta$  de tal maneira que convirja para zero quando  $\delta$  tende a zero, mas não tão rápido quanto  $\delta^2$ . De (b) e (c), concluímos que quanto mais suave a solução de  $f$  for, mais lento  $\alpha$  tenderá para zero. Por outro lado, a convergência pode ser arbitrariamente lenta se, não assumirmos a-priori sobre a solução de  $f$  (como (b) ou (c)).

O próximo Teorema 4.4.8 mostra que o método de regularização de Tikhonov não é ótimo para suposições mais fortes de “suavidade” na solução  $f$ ; isto é, sob o pressuposto de  $f \in (A^*A)^r(X)$  para algum  $r \in \mathbb{N}$ ,  $r \geq 2$ . Por isso, iremos tratar na Subseção 4.5.2 do Método iterativo de Landweber.

**Teorema 4.4.8** *Seja  $A : X \rightarrow Y$  linear, compacto e injetor tal que a imagem  $\mathcal{R}(A)$  é de dimensão infinita. Além disso, considere  $f \in X$ , e assumindo que existe uma função contínua  $\alpha : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  com  $\alpha(0) = 0$  tal que*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|f_{\alpha(\delta)}^\delta - f\| \delta^{-2/3} = 0 \quad (4.4.7)$$

Para todo  $g^\delta \in Y$  com  $\|g^\delta - Af\| \leq \delta$ , onde  $f_{\alpha(\delta)}^\delta \in X$  resolve (4.4.4). Então,  $f = 0$ .

## 4.5 Regularização por métodos iterativos para problemas lineares

Uma alternativa para regularização de operadores são os métodos iterativos de regularização, pois, eles tem a vantagem de possuir propriedades auto-regularizantes, ver (KIRSCH, 1996). Os métodos iterativos conhecidos e bem desenvolvidos, são amplamente utilizados para resolver problemas bem postos. Dentre os métodos, mencionamos o método de Landweber, o método de Newton, o método do Gradiente Conjugado.

### 4.5.1 Métodos iterativos associados a estratégias de ponto Fixo

Como mencionado acima, alguns métodos iterativos poderiam ser usados como estratégias de regularização para problemas inversos.

Podemos pensar em um primeiro candidato para solucionar

$$A(f) = g^\delta \quad (4.5.1)$$

de maneira iterativa, usando o método de Newton

$$f_{k+1} = f_k + A'(f_k)^{-1}(g^\delta - A(f_k)), \quad (4.5.2)$$

dado um chute inicial  $f_0$ . Segundo a literatura, o método de Newton possui taxas de convergência muito boas, principalmente se  $f_0$  está próximo da solução. Mas, o problema com este método está na inversão do operador  $A'$ , na equação (4.5.2).

Um maneira para resolver a estabilidade do método, seria aplicar a regularização de Tikhonov na linearização de (4.5.1). Isto nos leva ao método de Levenberg-Marquardt (ver (GROETSCH, 1999)) que no caso linear é dado pela iteração

$$f_{k+1} = f_k + (A^*A + \alpha_k I)^{-1}A^*(g - A(f_k)), \quad (4.5.3)$$

em que os  $\alpha_k$  são números positivos.

Adicionando em (4.5.3) o termo

$$-(\alpha_k I + A^*A)^{-1}\alpha_k(f_k - \xi)$$

como uma estabilização adicional, temos o método de Gauss-Newton iterativamente regularizado, ver (GROETSCH, 1999).

$$f_{k+1} = f_k + (A^*A + \alpha_k I)^{-1}[A^*(g - A(f_k)) - \alpha_k(f_k - \xi)]. \quad (4.5.4)$$

Tomamos, em geral,  $\xi$  como  $f_0$ .

Embora os métodos acima sejam estratégias de regularização, estes envolvem, em cada passo, a inversão de um operador (que pode ser caro computacionalmente). Por isso, nos ateremos a um método de regularização mais simples na próxima Seção.

## 4.5.2 O método de Landweber

Assim, como em (4.5.3) e (4.5.4), muitos métodos iterativos para resolver (4.5.1) são baseados na solução da equação normal

$$A(f)^*A(f) = A(f)^*g \quad (4.5.5)$$

via sucessivas iterações partindo de  $f_0$ .

Como vimos na Proposição 4.4.2, a equação (4.5.5) é uma condição de otimalidade (de primeira ordem) para o problema de mínimos quadrados, (4.4.1). Uma possibilidade para en-

contrar uma solução da (4.5.5) é interpretá-la como um método de descida máxima para o funcional (4.4.1). Isto é dado por

$$f_{k+1} = f_k + \gamma A'(f_k)^*(g - A(f_k)), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.5.6)$$

Regularização em que  $\|A\|^{-2} \leq \gamma > 0$  é o parâmetro de relaxação, de forma que a iteração tenha a propriedade de descida. A equação (4.5.6) é conhecida como Método de Landweber.

Destacaremos aqui, o método de Landweber, ver (KIRSCH, 1996) que em 1951 ao estudar equações integrais de primeira tipo, quando propôs o método de Regularização de Landweber.

No caso de dados com ruídos  $u^\delta$ , denotando as iterações por

$$f_k^\delta + A'(f_k^\delta)^*(g^\delta - A(f_k^\delta)). \quad (4.5.7)$$

Como anteriormente, a iteração começa com uma aproximação inicial  $f_0$ . No caso de termos dados com ruído ( $f_0^\delta = f_0$ ). No caso em que  $A$  é um operador linear, a iteração (4.5.7), pode ser escrita da forma

$$f_{k+1}^\delta = f_k^\delta + A^*(g^\delta - A(f_k^\delta)). \quad (4.5.8)$$

Passemos agora ao seguinte funcional de Tikhonov

$$J_{\alpha_k}(f) = \|Af - g^\delta\|^2 + \alpha_k \|f - f_k^\alpha\|^2, \quad \alpha_k > 0, \quad (4.5.9)$$

chamado de Tikhonov Iterado, ver (BAUMEISTER, 1987), (NEUBAUER; HANKE; H, 1996).

Vamos supor que o funcional de Tikhonov Iterado (4.5.9) está bem definido. Portanto, existe

$$f_{k+1}^\delta = \arg \min J_{\alpha_k}(f).$$

Note que a condição de otimalidade para o funcional (4.5.9) da como resultado  $f_{k+1}^\delta$  é a iteração de Landweber (4.5.8), com um certo peso  $\alpha_k^{-1}$ . Então, podemos esperar propriedades de regularização da iteração de Landweber, advindas da regularização de Tikhonov. Seremos mais específicos a seguir.

Passamos a considerar (4.5.7), em uma versão sem ruídos, como uma iteração de ponto fixo da forma

$$f_{k+1} = \phi(f_k) \quad (4.5.10)$$

para o operador

$$\phi(f) = f + A'(f)^*(g - A(f)), \quad (4.5.11)$$

onde  $A$  é linear e limitado, como anteriormente. Para obtermos resultados de convergência precisamos da seguinte hipótese:

**Hipótese 4.5.1** Assumiremos que  $A$  é um operador linear, limitado e que  $\|A\| \leq 1$ .

Esta hipótese não é tão restritiva no caso linear, haja visto que o problema pode ser multiplicado

por um fator  $\gamma = \frac{1}{\|A\|}$ , sem alterar os resultados que seguem.

**Teorema 4.5.1** *Suponha que a Hipótese 4.5.1 seja satisfeita. Se  $g \in D(A^\dagger)$ , então a sequência  $f_k$  gerada pela iteração de Landweber (4.5.8) converge para  $A^\dagger g$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Se  $g \notin D(A^\dagger)$ , então  $\|f_k\| \rightarrow \infty$  quando  $k \rightarrow \infty$ , onde  $A^\dagger$  representa a inversa generalizada de  $A$  (ver (NEUBAUER; HANKE; H, 1996)).*

**Observação 4.5.1** *O Teorema 4.5.1 nos ensina que  $f_k$  gerada pela iteração de Landweber converge para uma solução de quadrados mínimos da equação (4.5.1) quando  $g \in D(A^\dagger)$ . Como, em geral, dados perturbados  $g^\delta$  são tais que  $g^\delta \notin D(A^\dagger)$ , então do Teorema 4.5.1 sabemos que a sequência  $f_k^\delta$  diverge, quando  $k \rightarrow \infty$ . Assim, temos que considerar um critério de parada, no caso de dados com ruídos. Tal critério é motivado pelo seguinte resultado.*

**Lema 4.5.2** *Suponha que a Hipótese 4.5.1 seja satisfeita. Sejam  $g, g^\delta$  com  $\|g - g^\delta\| \leq \delta$ ,  $f_k$  e  $f_k^\delta$  as correspondentes iterações de Landweber dadas por (4.5.8). Então,*

$$\|f_k - f_k^\delta\| \leq \sqrt{k\delta}, \quad k \geq 0. \quad (4.5.12)$$

Note que, com erros nos dados temos

$$\|A^\dagger g - f_k^\delta\| \leq \|A^\dagger g - f_k\| + \|f_k - f_k^\delta\|, \quad (4.5.13)$$

esta é a estimativa fundamental para a iteração de Landweber.

Percebemos que o erro total possui duas componentes, um erro de aproximação que diminui lentamente e um erro nos dados que cresce a ordem, de no máximo,  $\sqrt{k\delta}$  como no Lema 4.5.2. Isso nos leva a seguinte conclusão: Para valores de  $k$  pequenos, o erro nos dados é desprezível e a iteração parece convergir para a solução exata  $A^\dagger g$ . Quando  $\sqrt{k\delta}$  atinge a magnitude da ordem do erro de aproximação, o erro propagado nos dados torna-se grande e a aproximação tende a piorar.

Segue que a propriedade de regularização por métodos iterativos para problemas mal postos depende fortemente de um **critério de parada** que detecte a transição entre a convergência e a divergência do método. O índice da iteração faz o papel do parâmetro de regularização e o critério de parada apropriado deve levar em conta a informação adicional do nível de ruído  $\delta$ .

**Lema 4.5.3** *Suponha que a Hipótese 4.5.1 seja satisfeita. Então, a norma do resíduo  $g^\delta - Af_k^\delta$  é sempre monótona decrescente durante as iterações.*

**Demonstração 4.5.4** *De fato, pela definição da iteração de Landweber,*

$$g^\delta - Af_k^\delta = g^\delta - A(f_{k-1}^\delta + A^*(g^\delta - Af_{k-1}^\delta)) = (I - A^*A)(g^\delta - Af_{k-1}^\delta).$$

Por outro lado, se  $g^\delta \notin D(A)$ , pelo Teorema 4.5.1, a iteração  $f_k^\delta$  diverge para infinito. Portanto, um resíduo pequeno não implica que a aproximação para a solução seja a melhor escolha para tal critério de parada, ver a estimativa (4.5.13).

Uma alternativa para a escolha do critério de parada é o **princípio da discrepância**: a iteração é parada no índice  $k = k(\delta, g_\delta)$  quando, pela primeira vez,

$$\|g^\delta - Af_{k(\delta, g^\delta)}\| \leq \tau\delta, \quad \tau > 1 \text{ fixo.} \quad (4.5.14)$$

O próximo Teorema garante que, enquanto o princípio da discrepância (4.5.14) não é atingida, a aproximação para a solução não piora.

**Teorema 4.5.5 (Monotonia)** Seja  $g \in D(A)$  e  $f$  denotando uma solução de (4.5.1). Se  $\|g^\delta - Af_{k(\delta, g^\delta)}\| \geq \tau\delta$ , então

$$\|f_{k+1}^\delta - f^\dagger\| \leq \|f_k^\delta - f^\dagger\|. \quad (4.5.15)$$

Um fato de importância vital é mostrar que o índice de parada é finito. Este é o nosso próximo resultado.

**Teorema 4.5.6** Seja  $\tau > 1$  em (4.5.14). Então o princípio de discrepância determina um índice de parada  $k(\delta, g^\delta)$  finito para a iteração de Landweber, com  $k(\delta, g^\delta) = O(\delta^{-2})$ .

Para obtermos taxas, é preciso fazer hipóteses sobre a solução  $f^\dagger$ . Assim, temos:

**Teorema 4.5.7** Seja  $g \in \mathcal{R}(A)$  e o princípio de discrepância (4.5.14) é válido. Então, a iteração de Landweber possui ordem de convergência  $k(\delta, g^\delta) = O(\delta^{-1})$  com a condição de fonte  $f^\dagger \in \mathcal{R}(A^*A)^{1/2}$ .

### 4.5.3 Método de Landweber para o problema de EEG

Nesta subseção vamos mostrar que o método de Landweber apresentado anteriormente, bem como todos os resultados associados são válidos para o problema de EEG.

**Teorema 4.5.8** Considerando a iteração de Landweber (4.5.16) aplicada para o problema de EEG descrito pela equação de operador (4.2.1). Temos que:

i) (Convergência para dados sem ruídos). Assuma que as medidas para o problema de EEG sejam sem ruídos, isto é  $\delta = 0$ . Então a iteração de Landweber produz uma sequência  $\{f_k\}$  que converge (em  $L_2$ ) para  $f$  solução do problema  $A(f) = g$ .

ii) (Estabilidade para dados com ruídos). Considere que as medidas no problema de EEG sejam tais que  $\|g - g^\delta\| \leq \delta$ . Assuma ainda que a iteração de Landweber (4.5.16) seja parada de acordo com o Princípio da Discrepância (4.5.17). Então, a sequência  $\{f_{k(\delta)}^\delta\}$  gerada pela iteração de Landweber é uma sequência convergente em  $L^2$ , quando  $\delta \rightarrow 0$ .

iii) Valem os resultados de convergência e taxas de convergência dos Teoremas 4.5.6 e 4.5.7.

**Demonstração 4.5.9** Segue do fato de que o operador  $A$  definido em (3.2.1) é linear e limitado (ver Lema 3.2.3).

#### 4.5.4 Algoritmo de iteração baseado no método de Landweber para o problema em EEG.

0) Dado  $f_0^\delta = f_0$  como o chute inicial, para  $k$  indo de zero até o critério de parada.

1) Avaliar o resíduo  $r_k = (Af_k - g^\delta) = (u_k)|_{\partial\Omega} - g^\delta$ , onde  $u_k$  resolve o problema

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(a\nabla u_k) &= f_k \quad \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u_k}{\partial \eta} &= 0 \quad \text{na } \partial\Omega. \end{aligned}$$

2) Avaliar  $w_k = A^*(Af_k - g^\delta) \in L^2(\Omega)$ , onde  $w_k$  resolve o problema adjunto

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(a\nabla w_k) &= 0 \quad \text{em } \Omega \\ \frac{\partial w_k}{\partial \eta} &= r_k \quad \text{na } \partial\Omega. \end{aligned}$$

3) Atualização na iteração de Landweber

$$f_{k+1} = f_k + \gamma w_k \tag{4.5.16}$$

4) Critério de parada: (Princípio da discrepância) primeiro  $k^*$  tal que

$$\|Af_{k^*} - g^\delta\| \leq \tau\delta. \tag{4.5.17}$$

## 5 NÃO UNICIDADE PARA O PROBLEMA INVERSO EM EEG

Nesta Seção queremos provar que o problema inverso em EEG, não possui solução única, além de não ser estável, como mostrado no Capítulo 4. Para tal, por simplicidade reescrevendo o problema (3.1.12) e (3.1.16), agora construindo em coordenadas esféricas. Neste Capítulo iremos seguir o artigo (DASSIOS; HADJILOIZI, 2009) para apresentar uma caracterização quantitativa da não unicidade para o problema inverso em Eletroencefalograma. Para isso, é considerado um modelo esférico do sistema cérebro-cabeça e uma distribuição contínua da corrente neural que é suportada no interior da esfera. Na primeira Seção é identificado o suporte singular do potencial elétrico gerado por uma corrente de dipolo dentro do modelo esférico do cérebro. Na Seção seguinte, traduziremos a informação obtida na Seção anterior sobre o suporte singular em uma representação do tipo integral de Green para o potencial elétrico. Na última Seção deste Capítulo, usando uma representação para a corrente, chamada de representação de Hansen, mostrando que dentre as três funções representantes escalares, apenas duas são necessárias para representar o potencial elétrico observado na superfície ou no exterior da cabeça. Isso implica, em particular, a não unicidade para o problema inverso em EEG.

Preferimos não apresentar as provas dos resultados básicos do artigo (DASSIOS; HADJILOIZI, 2009) pois isto iria deixar a dissertação longa. Preferimos nos ater apenas às provas dos Teoremas 2, 3 e 4, que tratam especificamente do problema da não unicidade do problema inverso em EEG.

### 5.1 O suporte singular do potencial elétrico

Vamos considerar um modelo esférico e homogêneo do cérebro, com condutividade  $\sigma$ , (constante) e uma corrente dipolar de momento  $J$  no ponto  $\tau$ . O potencial elétrico relativo ao interior,  $u^-$ , é governado pela solução do problema de Neumann:

$$\sigma \Delta u^-(r, \tau) = J(\tau) \cdot \nabla \delta(r - \tau), \quad r < a, \tau < a \quad (5.1.1)$$

$$\frac{\partial u^-}{\partial r}(r, \tau) = 0, \quad r = a. \quad (5.1.2)$$

O valor  $a$  está relacionado ao raio da esfera, e  $\delta$  é a medida de Dirac, ver (CAVALCANTI; D, 2010). Se  $u^-$  satisfaz as equações acima então o potencial elétrico exterior  $u$  é governado pelo problema de Dirichlet:

$$\Delta u(r, \tau) = 0, \quad r > a \quad (5.1.3)$$

$$u(r, \tau) = u^-(r, \tau), \quad r = a \quad (5.1.4)$$

$$u(r, \tau) = O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (5.1.5)$$

A solução do problema (5.1.3)-(5.1.5) é dada por

$$u(r, \tau) = \frac{1}{4\pi\sigma} (w_1(r, \tau) + w_2(r, \tau)), \quad r > a, \tau < a, \quad (5.1.6)$$

onde

$$w_1(r, \tau) = 2J(\tau) \cdot \frac{r - \tau}{\|r - \tau\|^3} = 2J(\tau) \cdot \nabla_r \frac{1}{\|r - \tau\|}, \quad r > a, \tau < a \quad (5.1.7)$$

e

$$w_2(r, \tau) = J(\tau) \cdot \frac{\|r - \tau\|\hat{r} + r - \tau}{F(r, \tau)}, \quad r > a, \tau < a. \quad (5.1.8)$$

Na expressão de  $w_2$ , a função  $F$  é definida por

$$F(r, \tau) = r\|r - \tau\|^2 + \|r - \tau\|r \cdot (r - \tau) \quad (5.1.9)$$

e  $\hat{r}$  é o vetor unitário ao longo de  $r$ .

Nosso objetivo nessa Seção é calcular o valor da integral

$$\Delta u(\Phi) = \int_{\mathbb{R}^3} (\Delta_r u(r, \tau)) \Phi(r) dv(r) \quad (5.1.10)$$

onde  $\Phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$  é uma função teste do  $\mathbb{R}^3$ . De (5.1.7) a (5.1.9) temos que as singularidades de  $u$  ficam no segmento que liga a posição  $\tau$  do dipolo com o centro da esfera condutora. Assim, para calcularmos a integral (5.1.10) precisamos utilizar um processo de limite. Para tal, seja o domínio

$$\Omega_\varepsilon(\tau) = C_\varepsilon(\tau) \cup S_\varepsilon(0) \cup S_\varepsilon(\tau), \quad (5.1.11)$$

onde  $C_\varepsilon(\tau)$  denota o interior da superfície cilíndrica

$$\partial C_\varepsilon(\tau) = \left\{ r' \in \mathbb{R}^3 : \rho = \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2} = \varepsilon, 0 \leq x_3' \leq \tau \right\}, \quad (5.1.12)$$

$S_\varepsilon(0)$  denota o interior da semi-esfera

$$\partial S_\varepsilon(0) = \{ r' \in \mathbb{R}^3 : r' = \varepsilon, x_3' \leq 0 \}, \quad (5.1.13)$$

e, finalmente,  $S_\varepsilon(\tau)$  representa o interior da semi-esfera

$$\partial S_\varepsilon(\tau) = \{ r' \in \mathbb{R}^3 : \|r' - \tau\| = \varepsilon, x_3' \geq \tau \}. \quad (5.1.14)$$

Utilizando diferenciação distribucional (ver Capítulo 2), a identidade clássica de Green, (ver Proposição 2.6.6), a harmonicidade do potencial elétrico fora das fontes e o fato que  $u$  e

$\Phi$  ambos se anulam no infinito, haja visto que  $u$  satisfaz (5.1.5) e  $\Phi_C^\infty(\mathbb{R}^3)$  obtemos

$$\Delta u(\Phi) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{\partial\Omega_\varepsilon(\tau)} \left[ u(r, \tau) \frac{\partial}{\partial n} \Phi(r) - \Phi(r) \frac{\partial}{\partial n} u(r, \tau) \right] ds(r). \quad (5.1.15)$$

Como a função  $w_1$  tem uma singularidade isolada no ponto  $\tau$ , e a função  $w_2$  tem singularidades isoladas nos pontos 0 e  $\tau$ , bem como uma distribuição contínua de singularidades ao longo do segmento que liga 0 a  $\tau$ , segue que podemos separar o lado direito de (5.1.15) como

$$4\pi\sigma\Delta u(\Phi) = I_1(\partial\Omega_\varepsilon(\tau)) + I_2(\partial C_\varepsilon(\tau)) + I_2(S(0)) + I_2(S(\tau)). \quad (5.1.16)$$

**Observação 5.1.1** Onde  $I_1$  é o potencial elétrico exterior ao cilindro e  $I_2$  é o potencial elétrico exterior as semi-esferas.

Com relação aos valores em (5.1.16) temos os seguintes resultados:

Com relação ao termo  $I_1(\partial\Omega_\varepsilon(\tau))$  temos que

$$I_1(\partial\Omega_\varepsilon(\tau)) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{\partial\Omega_\varepsilon(\tau)} \left[ w_1(r, \tau) \frac{\partial}{\partial n} \Phi(r) - \Phi(r) \frac{\partial}{\partial n} w_1(r, \tau) \right] ds(r). \quad (5.1.17)$$

Como a função  $w_1$ , definida em (5.1.7), tem uma singularidade isolada em  $\tau$ , podemos usar a segunda identidade de Green (Proposição 2.6.6) em (5.1.17) e reescrevendo esta identidade usando coordenadas esféricas como

$$I_1(\partial\Omega_\varepsilon(\tau)) = -8\pi J(\tau) \cdot \nabla_r \Phi(\tau). \quad (5.1.18)$$

A prova deste resultado pode ser obtida na Seção 2 do artigo (DASSIOS; HADJILOIZI, 2009).

Os três últimos termos do lado direito de (5.1.16) são calculados a partir do seguinte limite

$$I_2(S) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_S \left[ w_2(r, \tau) \frac{\partial}{\partial n} \Phi(r) - \Phi(r) \frac{\partial}{\partial n} w_2(r, \tau) \right] ds(r), \quad (5.1.19)$$

onde  $S$  é a superfície cilíndrica  $\partial C_\varepsilon(\tau)$ , uma esfera de raio  $\varepsilon$  centrada em 0 no caso  $S = S(0)$ , e uma esfera de raio  $\varepsilon$  centrada em  $\tau$  para  $S = S(\tau)$ .

Assim, o segundo termo de (5.1.16) pode ser reduzido a

$$I_2(\partial C_\varepsilon(\tau)) = -\frac{4\pi}{\tau} J(\tau) \cdot (\tilde{\mathbb{I}} - \hat{\tau} \otimes \hat{\tau}) \int_0^\tau \nabla \Phi(t\hat{\tau}) dt, \quad (5.1.20)$$

onde  $\tilde{\mathbb{I}} = \hat{\tau}_1 \otimes \hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_2 \otimes \hat{\tau}_2 + \hat{\tau}_3 \otimes \hat{\tau}_3$  denota a identidade diádica. Por outro lado, os terceiro e quarto termos de (5.1.16) são reduzidos a, respectivamente,

$$I_2(\partial S_\varepsilon(0)) = \frac{4\pi}{\tau} \hat{\tau} \cdot J(\tau) \Phi(0); \quad (5.1.21)$$

$$I_2(\partial S_\varepsilon(\tau)) = -\frac{4\pi}{\tau} \hat{\tau} \cdot J(\tau) \Phi(\tau). \quad (5.1.22)$$

Por fim, utilizando as expressões (5.1.18), (5.1.20), (5.1.21) e (5.1.22) na expressão (5.1.15) obtemos o seguinte resultado:

**Proposição 5.1.1** A ação da distribuição  $\Delta u$  na função teste  $\Phi$  é dada por

$$\begin{aligned} -\Delta u(\Phi) = & \frac{2}{\sigma} J(\tau) \cdot \nabla_{\tau} \Phi(\tau) + \frac{\hat{\tau} \cdot J(\tau)}{\sigma \tau} [\Phi(\tau) - \Phi(0)] \\ & + \frac{1}{\sigma \tau} J(\tau) \cdot (\tilde{\mathbb{I}} - \hat{\tau} \otimes \hat{\tau}) \cdot \int_0^{\tau} \Delta \Phi(t\hat{\tau}) dt. \end{aligned} \quad (5.1.23)$$

Assim, o suporte singular de  $\Delta u$ , que são as fontes do potencial elétrico exterior  $u$ , envolve um polo na origem, um polo e um dipolo no ponto  $\tau$ , e uma distribuição contínua dos dipolos ao longo do segmento de reta que liga o ponto  $\tau$  com a origem.

Observamos que o primeiro termo do lado direito de (5.1.23) representa a contribuição do dipolo no ponto  $\tau$  que é devida ao componente  $w_1$  do potencial elétrico. O segundo termo representa a contribuição de dois polos, um em  $\tau$  e um em 0, e o terceiro termo representa a contribuição da distribuição contínua das singularidades, todas devidas à componente  $w_2$  do potencial elétrico. Além disso, no primeiro termo do lado direito de (5.1.23) temos a contribuição completa do dipolo de momento  $J$ , no segundo termo observamos a contribuição apenas da componente radial de  $J$ , e no terceiro termo apenas a contribuição da componente tangencial de  $J$ .

## 5.2 Representação de Green

Vamos expressar o potencial elétrico exterior como uma representação da integral de Green. O potencial elétrico no ponto  $r$  gerado por um dipolo de momento  $J(\tau)$  no ponto  $\tau$  é dado pelas equações (5.1.6)-(5.1.9). O potencial correspondente devido corrente distribuída no interior da esfera de raio  $a$  é dada por

$$u(r) = \int_{\|\tau\| \leq a} u(r, \tau) dv(\tau). \quad (5.2.1)$$

**Teorema 5.2.1** Se  $u(r)$  denota o potencial elétrico exterior dado por (5.2.1), então

$$\begin{aligned} u(r) = & -\frac{1}{4\pi\sigma r} \int_{\|r'\| \leq a} \frac{J_{r'}(r')}{r'} dv(r') - \frac{1}{2\pi\sigma} \int_{\|r'\| \leq a} \frac{(\nabla_{r'} \cdot J(r'))}{\|r - r'\|} dv(r') \\ & + \frac{1}{4\pi\sigma} \int_{\|r'\| \leq a} \frac{J_{r'}(r')}{r' \|r - r'\|} dv(r') - \frac{1}{4\pi\sigma} \int_{\|r'\| \leq a} \frac{1}{r'^3} \int_{r'}^a \frac{t}{\text{sen } v'} \\ & \times \left[ \frac{\partial}{\partial v'} (\text{sen } v' J_{v'}(t\hat{r}')) + \frac{\partial}{\partial \varphi'} J_{\varphi'}(t\hat{r}') \right] \frac{1}{\|r - r'\|} dt dv(r') \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

onde assumimos a seguinte decomposição esférica da corrente:

$$J(r) = J_r(r)\hat{r} + J_v(r)\hat{v} + J_{\varphi}(r)\hat{\varphi}, \quad r < a. \quad (5.2.3)$$

O próximo teorema implica que a função escalar  $F$  não entra na representação do potencial elétrico, implicando que  $F$  não pode ser recuperada, ou seja, não podemos garantir a unicidade da solução do problema em EEG. Podemos, portanto, afirmar que o problema é mal posto segundo Hadamard. Sendo assim, o potencial elétrico depende apenas das funções  $J_r$  e  $G$ .

**Teorema 5.2.2** Se  $F$  e  $G$  são funções escalares angulares da decomposição de Hansen

$$J(r) = J_r(r)\hat{r} + \hat{r} \times \nabla F(r) - \hat{r} \times (\hat{r} \times \nabla G(r)) \quad (5.2.4)$$

então, o potencial elétrico  $u$ , definido em (5.2.1), é dado por

$$\begin{aligned} u(r) = & -\frac{1}{4\pi\sigma r} \int_{\|r'\| \leq a} \frac{J_{r'}(r')}{r'} dv(r') - \frac{1}{4\pi\sigma} \int_{\|r'\| \leq a} \left[ 2 \frac{\partial}{\partial r'} J_{r'}(r') + \frac{3}{r'} J_{r'}(r') \right] \frac{1}{\|r - r'\|} dv(r') \\ & - \frac{1}{4\pi\sigma r} \int_{\|r'\| \leq a} \left[ \frac{2}{r'^2} \mathbb{B}' G(r', v', \varphi') + \frac{1}{r'^3} \int_{r'}^a \mathbb{B}' G(t, v', \varphi') dt \right] \frac{1}{\|r - r'\|} dv(r') \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

onde

$$\mathbb{B} = \frac{1}{\text{sen } v} \left[ \frac{\partial}{\partial v} \left( \text{sen } v \frac{\partial}{\partial v} \right) + \frac{1}{\text{sen } v} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (5.2.6)$$

**Demonstração 5.2.3** Utilizando a representação esférica (5.2.3) na decomposição de Hansen obtemos

$$J_v(r) = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial v} G(r) - \frac{1}{\text{sen } v} \frac{\partial}{\partial \varphi} F(r) \right] \quad (5.2.7)$$

$$J_\varphi(r) = \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\text{sen } v} \frac{\partial}{\partial \varphi} G(r) + \frac{\partial}{\partial v} F(r) \right]. \quad (5.2.8)$$

As expressões (5.2.7) e (5.2.8) podem ser escritas respectivamente como

$$r J_v(r) = \frac{\partial}{\partial v} G(r) - \frac{1}{\text{sen } v} \frac{\partial}{\partial \varphi} F(r) \quad (5.2.9)$$

$$r J_\varphi(r) = \frac{1}{\text{sen } v} \frac{\partial}{\partial \varphi} G(r) + \frac{\partial}{\partial v} F(r). \quad (5.2.10)$$

Multiplicando (5.2.9) por  $\text{sen } v$  e depois derivando em relação a  $v$  obtemos

$$\frac{\partial}{\partial v} (r \text{sen } v J_v(r, v, \theta)) = \frac{\partial}{\partial v} \left( \text{sen } v \frac{\partial}{\partial v} G(r) - \frac{\partial}{\partial \varphi} F(r) \right) \quad (5.2.11)$$

pelas regras de derivação temos que

$$r \frac{\partial}{\partial v} (\text{sen } v J_v(r, v, \theta)) = \frac{\partial}{\partial v} \left( \text{sen } v \frac{\partial}{\partial v} G(r) \right) - \frac{\partial^2}{\partial v \partial \varphi} F(r). \quad (5.2.12)$$

Agora, derivando (5.2.10) em relação a  $\varphi$  e utilizando a regra de derivação da soma obtemos

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (r J_\varphi(r, v, \theta)) = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\text{sen } v} \frac{\partial}{\partial \varphi} G(r) \right) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial v} F(r). \quad (5.2.13)$$

Somando (5.2.12) e (5.2.13) resulta em

$$\begin{aligned} r \frac{\partial}{\partial v} (\text{sen } v J_v(r, v, \theta)) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r J_\varphi(r, v, \theta)) &= \frac{\partial}{\partial v} \left( \text{sen } v \frac{\partial}{\partial v} G(r) \right) - \frac{\partial^2}{\partial v \partial \varphi} F(r) \\ &+ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\text{sen } v} \frac{\partial}{\partial \varphi} G(r) \right) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial v} F(r) \\ &= \frac{\partial}{\partial v} \left( \text{sen } v \frac{\partial}{\partial v} G(r) \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\text{sen } v} \frac{\partial}{\partial \varphi} G(r) \right). \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

Considerando que

$$\mathbb{B} = \frac{1}{\text{sen } v} \left[ \frac{\partial}{\partial v} \left( \text{sen } v \frac{\partial}{\partial v} \right) + \frac{1}{\text{sen } v} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (5.2.15)$$

Dividindo (5.2.14) por  $\text{sen } v$  e utilizando a definição de  $\mathbb{B}$  obtemos finalmente que

$$\frac{r}{\text{sen } v} \left[ \frac{\partial}{\partial v} (\text{sen } v J_v(r, v, \varphi)) + \frac{\partial}{\partial \varphi} J_\varphi(r, v, \varphi) \right] = \mathbb{B} G(r, v, \varphi). \quad (5.2.16)$$

Analogamente, obtemos

$$\begin{aligned} \nabla \cdot J(r) &= \frac{\partial}{\partial r} J_r(r) + \frac{2}{r} J_r(r) + \frac{1}{r \text{sen } v} \left[ \frac{\partial}{\partial v} (\text{sen } v J_v(r, v, \varphi)) + \frac{\partial}{\partial \varphi} J_\varphi(r, v, \varphi) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial r} J_r(r) + \frac{2}{r} J_r(r) + \frac{1}{r^2} \mathbb{B} G(r, v, \varphi). \end{aligned} \quad (5.2.17)$$

A ideia agora é substituir (5.2.16) e (5.2.17) em (5.2.2) para então obtermos a representação dada em (5.2.5). Temos inicialmente que (5.2.2) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} u(r) &= -\frac{1}{4\pi\sigma r} \int_{\|r'\| \leq a} \frac{J_{r'}(r')}{r'} dv(r') - \frac{1}{2\pi\sigma} \int_{\|r'\| \leq a} \left\{ \frac{(\nabla_{r'} \cdot J(r'))}{\|r - r'\|} + \frac{1}{2} \frac{J_{r'}(r')}{r' \|r - r'\|} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2r'^3} \int_{r'}^a \frac{t}{\text{sen } v'} \left[ \frac{\partial}{\partial v'} (\text{sen } v' J_{v'}(t\hat{r}')) + \frac{\partial}{\partial \varphi'} J_{\varphi'}(t\hat{r}') \right] \frac{1}{\|r - r'\|} dt \right\} dv(r'). \end{aligned} \quad (5.2.18)$$

Utilizando a expressão para  $\nabla_{r'} \cdot J(r')$  dada em (5.2.17),  $\mathbb{B}$  aplicada em  $G(t, v', \varphi')$  e ainda  $\mathbb{B}$  aplicada em  $G(r', v', \varphi')$  diretamente em (5.2.18) obtemos, finalmente, a expressão para  $u(r)$  dada em (5.2.5).

### 5.3 O problema inverso

O problema inverso investigado é o de obter parte da corrente neural que pode ser recuperada das medidas do potencial elétrico na superfície da esfera. A representação (5.2.5) implica que

$$\begin{aligned} \Delta u(r) &= \frac{\delta(r)}{\sigma} \int_{\|\tau\| \leq a} \frac{J_\tau(\tau)}{\tau} dv(\tau) + \frac{1}{\sigma r^3} \int_r^a \mathbb{B}G(t, v, \varphi) dt \\ &+ \frac{1}{\sigma} \left[ 2 \frac{\partial}{\partial r} J_r(r) + \frac{3}{r} J_r(r) + \frac{2}{r^2} \mathbb{B}G(r) \right], \quad r < a \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

e

$$\Delta u(r) = 0, \quad r > a. \quad (5.3.2)$$

O potencial exterior tem a seguinte expansão

$$u(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_n^m \frac{Y_n^m(\hat{r})}{r^{n+1}}, \quad r > a \quad (5.3.3)$$

e as funções  $J_\tau$  e  $G$  podem ser estendidas a

$$J_\tau(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n j_n^m(\tau) Y_n^m(\hat{\tau}), \quad \tau < a \quad (5.3.4)$$

$$G(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n g_n^m(\tau) Y_n^m(\hat{\tau}), \quad \tau < a, \quad (5.3.5)$$

onde a forma complexa ortonormalizada das harmônicas esféricas é dada por

$$Y_n^m(\hat{\tau}) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}} P_n^{|m|}(\cos v) e^{im\varphi} \quad (5.3.6)$$

e  $P_n^{|m|}$  são as funções de Legendre associadas.

**Teorema 5.3.1** Os coeficientes  $c_n^m$  na expansão (5.3.3) do potencial elétrico exterior são conectados aos coeficientes  $j_n^m(t)$  e  $g_n^m(t)$  nas expansões (5.3.4) e (5.3.5) das duas representações em funções correspondentes para a corrente pela seguinte expressão:

$$c_n^m = \frac{1}{\sigma} \int_0^a j_n^m(t) t^{n+1} dt + \frac{n+1}{\sigma} \int_0^a g_n^m(t) t^n dt, \quad n = 1, 2, \dots, \quad m = -n, \dots, n. \quad (5.3.7)$$

Para resolver o problema inverso do eletroencefalograma equivale a determinar as funções  $j_n^m$  e  $g_n^m$  das constantes  $c_n^m$  conhecidas. Assim, o algoritmo de inversão se reduz a um problema de momento. Os coeficientes  $c_n^m$  dados são conectados aos coeficientes desconhecidos  $j_n^m$  e  $g_n^m$  de modo que essas relações envolvem os momentos dos coeficientes na expansão das correspondentes representações em funções. Portanto, o problema inverso é reduzido a um problema de momento.

Como consequência do Teorema 5.2.2, o problema inverso em EEG não tem uma única solução. Assim, o Teorema 5.3.1 mostra que mesmo a parte recuperável da corrente é obtida apenas via os momentos de duas sequências de funções desconhecidas. Podemos ainda investigar esse problema inverso se impormos a seguinte hipótese da norma mínima para a corrente:

$$W = \int_{\|r\| \leq a} \|J(r)\|^2 dv(r) = \text{mínima.} \quad (5.3.8)$$

Sob essa hipótese, o problema do momento pode ser resolvido exatamente, conforme o seguinte resultado:

**Teorema 5.3.2** Se a corrente neural  $J$  satisfaz a condição da norma mínima (5.3.8), então  $J$  é dado pela representação (5.2.4), onde

$$J_r(r) = \sigma \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{n(2n+1)(2n+3)}{n(2n+1)a^{2n+3} + (n+1)(2n+3)a^{2n+1}} c_n^m r^{n+1} Y_n^m(\hat{\tau}), \quad \tau < a \quad (5.3.9)$$

$$F(\tau) = 0, \quad \tau < a \quad (5.3.10)$$

$$G(r) = \sigma \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{(2n+1)(2n+3)}{n(2n+1)a^{2n+3} + (n+1)(2n+3)a^{2n+1}} c_n^m r^n Y_n^m(\hat{\tau}), \quad \tau < a \quad (5.3.11)$$

e  $c_n^m$  são os coeficientes da expansão (5.3.3) do potencial elétrico.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS E TRABALHOS FUTUROS

Vários exames são utilizados nos dias atuais para auxiliar na detecção e no auxílio ao tratamento de doenças cerebrais em seres humanos. Um exame importante é o Eletroencefalograma (EEG) que auxilia médicos e cientistas a lidar com, entre outras doenças e distúrbios, a epilepsia. O EEG é um exame não invasivo que capta sinais elétricos neuronais para posterior análise dos dados pelos especialistas.

Nesse sentido, o estudo do EEG e dos dados cerebrais obtidos através deste exame são de vital importância para um conhecimento mais aprofundado do cérebro e de seu funcionamento. Uma técnica com consequências importantes para a medicina consiste em obter a área cerebral de um sinal elétrico neural advindo de um estímulo físico no corpo do paciente. A análise desse tipo de procedimento é efetuada através da conhecida Teoria dos Problemas Inversos. Deste modo, estudamos teoricamente o modelo físico para EEG, tanto o Problema Direto quanto o Problema Inverso. Inicialmente propomos uma modelagem para o Problema Direto em EEG, que foi modelado por uma equação diferencial parcial elíptica (EDP) com condições de Neumann homogênea, advindas das equações de Maxwell.

O primeiro resultado obtido afirma que a EDP que modela o Problema Direto está bem definida. Considerando o Problema Direto como uma equação de operadores, provamos, entre outras propriedades, que o operador  $A$  associado a EDP é compacto, este fato é de originalidade de nossa proposta. A compacidade de  $A$  implica que, pelo Teorema 2.3.1, o operador inverso de  $A$  é ilimitado, com isso temos que o nosso Problema Inverso é mal posto, no sentido de Hadamard. Além disso, obtemos que  $A$  é Fréchet diferenciável, e a EDP elíptica com condições de Neumann não homogênea, que é a EDP Adjunta, está bem definida.

Verificamos que o nosso Problema Inverso em EEG apresenta dois obstáculos: a não unicidade e a continuidade nos dados, não satisfazendo, portanto, duas das três condições de Hadamard. Para contornar este fato utilizamos o método de Regularização de Tikhonov e o método iterativo de Landweber para EEG. Deste modo, obtemos teoricamente a fonte  $f$  associada ao problema inverso.

No entanto, gostaríamos de deixar claro que o estudo apresentado aqui é apenas o princípio de um grande estudo necessário para entender todo o processo complexo envolvendo o exame em EEG. Assim, deixamos alguns pontos a serem estudados nos trabalhos futuros, os quais listamos logo abaixo.

### 6.1 Trabalhos futuros

Pretende-se implementar o Problema Direto e o Problema Inverso para o problema em EEG, levando em conta a regularização de Tikhonov e o método iterativo de Landweber.

Pretende-se utilizar dados reais para as simulações numéricas, e para isto utilizaremos os

*softwares Matlab e Python para, então, fazermos uma avaliação dos resultados obtidos (para os Problemas Direto e Inverso).*

## **Referências Bibliográficas**

- ALVES, M. M. *Método de Landweber Sem Derivadas para Identificação de Parâmetros em Equações Diferenciais Parciais Elípticas*. 2005. Dissertação — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.
- BAUMEISTER, J. *Stable Solution of Inverse Problems*. 1.ed. Vieweg, 1987.
- BERGER, H. *Über das Elektrenkephalogramm des Menschen*. *Arch Psychiatr Nervenkr*, v.87, p.527–70, abril 1929.
- BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E. *Fundamentos de Análise Funcional*. 1.ed. SBM, 2015.
- BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. 1.ed. Springer, 2013.
- CAVALCANTI, M. M.; D, C. V. N. *Introdução à Análise Funcional*. 1.ed. UEM, 2010.
- CICHOCKI, A.; SANEI, S. *EEG/MEG Signal Processing*. 1.ed. Computational Intelligence Neuroscience, 2007.
- DASSIOS, G.; HADJILOIZI, D. *On the non-uniqueness of the inverse problem associated with electroencephalography*. *Inverse Problems*, v.25, p.1–18, outubro 2009.
- EVANS, L. *Partial Differential Equations*. 2.ed. American Mathematical Society, 2010.
- FAUGERAS, O.; CLÉMENT, F.; DERICHE, R.; R., D.; R., K.; T., P.; J., R.; T., V.; F., D.; J., G.; G., H.; P., K.; D., L. *The inverse EEG and MEG problems; The adjoint state approach I: The continuous case*. *INRIA*, v.3673, p.1–29, maio 1999.
- FEYNMAN, R.; LEIGHTON, R.; SANDS, M. *The Feynman Lectures on Physics*. 1.ed. Addison-Wesley Publishing Company, 1977.
- FOERSTER, O.; H, A. *Elektrobiologische Vorgänge an der menschlichen Hirnrinde nkephalogramm des Menschen*. *Dtsch Z Nervenheilk*, v.135, p.277–88, abril 1934.
- GROETSCH, W. C. *Inverse Problems in the Mathematical Sciences*. 1.ed. Vieweg, 1983.
- GROETSCH, W. C. *Inverse Problems*. 1.ed. Mathematical Association of America, 1999.
- HADAMARD, J. *Lectures on the Cauchy Problem in Linear Partial Differential Equations*. 1.ed. Yale University Press, 1923.
- HSU, H. P. *Análise Vetorial*. 1.ed. coleção técnica, 1972.

- JASPER, H. *Electrical activity of the brain. Annu Rev Physiol*, v.3, p.377–98, 1941.
- KIRSCH, A. *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*. 2.ed. Springer, 1996.
- KREYSZIG, E. *Introductory functional analysis with applications*. 1.ed. United States of America: John Wiley Sons, 1978.
- LOGG, A.; MARDAL, K.; WELLS, G. *Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method*. 1.ed. Springer, 2012.
- MEDEIROS, L. A.; FERREL, J. L.; BIAZUTTI, A. C. *Métodos Clássicos em equações Diferenciais Parciais*. 2.ed. UFRJ, 2000.
- MOHR, M. *Simulation bioelektrischer Felder: Das direkte und inerse Problem der elektroenzephalographischen Quellenrekonstruktion*. 2003. Tese — Universität Erlangen-Nurnberg, Erlangen.
- NEUBAUER, A.; HANKE, M.; H, W. *Regularization of Inverse Problems (Mathematics and Its Applications)*. 1.ed. Kluwer Academic Publishers, 1996.
- ODJEL, Z.; ETAL. *The history of electroencephalography. Journal PubMed*, v.59(4), p.307–13, 2005.
- PENFIELD, W.; BOLDREY, E. *Somatic motor and sensory representations in the cerebral cortex of man as studied by electrical stimulation. Brain*, v.60, p.389–443, 1937.
- REIF, P. S.; STRZELCZYK, A.; ROSENOW, F. *The history of invasive EEG evaluation in epilepsy patients. Journal Seizure*, v.41, p.191–195, 2016.
- RUDIN, W. *Functional Analysis*. 2.ed. International Series in Pure and Applied Mathematics, 1991.
- SADIKU, M. N. O. *Elementos de Eletromagnetismo*. 5.ed. Bookman, 2012.
- SILTANEN, S.; MUELLER, J. *Linear and Non-Linear Inverse Problem with Practical Application*. 1.ed. SIAM, 2012.
- TALAIRACH, J.; BANCAUD, J. *Lesion, "irritative" zone and epileptogenic focus. Confin Neurol*, v.27, p.91–4, 1966.
- TANZER, O. *Numerical Modeling in Electro- and Magnetoencephaligraphy*. 2006. Tese — Helsinki University of Technology, Espoo.
- TIKHONOV, A.; ARSENIN, V. *Solutions of Ill-Posed Problems*. 1.ed. V.H. Winston Sons, Washington DC, 1977.

VALLAGHÉ, S.; PAPADOPOULOU, T.; CLERE, M. *The adjoint method for general EEG and MEG sensor-based lead field equations*. **INRIA**, v.54, p.135–147, junho 2008.

WAGNER, S. *An adjoint FEM approach for the EEG forward problem*. 2011. *Dissertação* — , Munster.

WOLTERS, C. H. *Influence of Tissue Conductivity Inhomogeneity and Anisotropy on EEG/MEG based Source Localization in the Human Brain*. 2003. *Tese* — *Max-Planck-Institute of Cognitive Neuroscience, Leipzig*.

WOLTERS, C. H.; KÖRSTLER, H.; MÖLLER, C.; HÄRDITLEIN, J.; GRASEDYCK, L.; HACKBUSCH, W. *Numerical mathematics for the modeling of a current dipole in EEG source reconstruction using finite element head models*. **Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften**, v.47, p.1–33, 2007.

YOSIDA, K. *Functional Analysis*. 6.ed. Springer-Verlag, 1980.

## 7 APÊNDICES

### 7.1 Fundamentos fisiológicos e os geradores de sinais do EEG

A principal contribuição do problema direto em EEG é calcular o potencial elétrico nos eletrodos do couro cabeludo localizados na cabeça humana. Tal potencial é gerado a partir da comunicação química entre as células nervosas ou neurônios, a qual gera uma pequena fonte elétrica. Para entender melhor como esse processo ocorre, é interessante destacar que cada neurônio pode ser dividido em três sub-partes: os dendritos, o corpo celular chamado de soma e o axônio. A maneira como os neurônios tratam os sinais gerados no cérebro humano são: os sinais de outras células nervosas no cérebro são captados a partir dos dendritos e transferidos para o soma, que os combina e dá origem, se for possível, a um novo sinal. Se for gerado, o axônio envia este sinal para outros neurônios ou células musculares. Quando ocorrer de um neurônio não tratar nenhum sinal, é chamado de potencial transmembrana.

A sinapse consiste na transmissão de informações, geradas no soma, para a próxima célula nervosa. A parte da sinapse do lado do axônio é chamada de terminal pré-sináptico, e a parte na célula conectada e denominada terminal pós-sináptico. Os sinais só podem atravessar a sinapse em uma direção, da parte pré-sináptica para a pós-sináptica, devido ao fato de que a célula pré-sináptica cria um transmissor químico. Como o cérebro é separado dos eletrodos por algumas camadas de tecido (ósseo, epitelial), que possuem uma condutividade muito baixa, um grande número de neurônios deve estar sincronamente ativo para gerar um campo mensurável pelos eletrodos no couro cabeludo.

Portanto, não é normal que um grande número de neurônios vizinhos criem um potencial de ação exatamente ao mesmo tempo. As alterações nos potenciais transmembranares localizados nas partes pós-sinápticas dos neurônios alteram o campo potencial medido pelos eletrodos em EEG. Os campos elétricos têm de ser organizados de forma semelhante para que não se cancelem mutuamente. Uma classe de neurônios que podem gerar elementos mensuráveis pelos eletrodos em EEG são chamadas de células piramidais, assim, são os geradores de sinal em EEG.

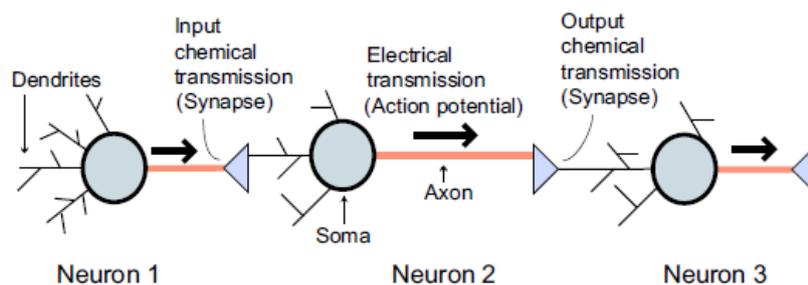


Figura 71: Uma imagem simples da transmissão de sinal nos neurônios, consultar (TANZER, 2006)

## 7.2 Caso discreto

### 7.2.1 Discretização para a solução da equação (3.1.12), (3.1.16) por elementos finitos

Vamos considerar a equação diferencial parcial seguinte

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, & \text{em } \Omega, \\ u &= u_0, & \text{em } \Gamma_D \subset \partial\Omega, \\ -\partial_n u &= g, & \text{em } \Gamma_N \subset \partial\Omega, \end{aligned} \tag{7.2.1}$$

onde  $f$  é uma função em um domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  com bordo  $\partial\Omega$ .

Para discretizar a equação (7.2.1) pelo método dos elementos finitos, vamos seguir de perto o tutorial do software FEniCS na referência (LOGG; MARDAL; WELLS, 2012).

Inicialmente multiplicamos essa equação por uma função teste  $v$  e integramos por partes para obter

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \, dx - \int_{\Omega} v \partial_n u \, ds = \int_{\Omega} v f \, dx.$$

Considerando que a função teste  $v$  se anula no bordo de Dirichlet  $\Gamma_D$ , onde a solução  $u$  é conhecida, obtemos o seguinte problema variacional clássico: Achar  $u \in V$  tal que

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \, dx = \int_{\Omega} v f \, dx - \int_{\Gamma_N} v g \, ds, \quad \forall v \in \hat{V}. \tag{7.2.2}$$

O espaço teste  $\hat{V}$  é definido por

$$\hat{V} = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ em } \Gamma_D\},$$

e o espaço trial  $V$  contém membros de  $\hat{V}$  deslocados pela condição de Dirichlet,

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : v = u_0 \text{ em } \Gamma_D\}.$$

Agora, discretizamos a equação (7.2.1) restringindo o problema variacional (7.2.2) a um par de espaços discretos: Achar  $u_h \in V_h \subset V$  tal que

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u_h \, dx = \int_{\Omega} v f \, dx - \int_{\Gamma_N} v g \, ds, \quad \forall v \in \hat{V}_h \subset \hat{V}. \tag{7.2.3}$$

Notamos que a condição de Dirichlet  $u = u_0$  em  $\Gamma_D$  entra na definição de  $V_h$  (esta é uma condição do bordo essencial), ao passo que a condição de Neumann,  $-\partial_n u = g$  em  $\Gamma_N$ , entra no problema variacional (esta é uma condição no bordo natural).

Para resolver o problema discreto variacional (7.2.3), devemos construir um espaços  $\hat{V}_h$  e  $V_h$  adequados. Por ora, vamos assumir que temos uma base  $\{\hat{\phi}_i\}_{i=1}^N$  para  $\hat{V}_h$ , e uma base  $\{\phi_j\}_{j=1}^N$

para  $V_h$ . Podemos então fazer uma aproximação para  $u_h$  em termos das funções do espaço  $V_h$ ,

$$u_h = \sum_{j=1}^N U_j \phi_j,$$

onde  $U \in \mathbb{R}^3$  é o vetor de graus de liberdade a ser calculado. Inserindo essa igualdade em (7.2.3) e variando a função teste  $v$  sobre as funções base do espaço de teste discreto  $\hat{V}_h$ , obtemos

$$\sum_{j=1}^N U_j \int_{\Omega} \nabla \hat{\phi}_i \cdot \nabla \phi_j \, dx = \int_{\Omega} \hat{\phi}_i f \, dx - \int_{\Gamma_N} \hat{\phi}_i g \, ds, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Podemos assim calcular a solução de elementos finitos  $u_h = \sum_{j=1}^N U_j \phi_j$  resolvendo o sistema linear

$$AU = b,$$

onde

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \hat{\phi}_i \cdot \nabla \phi_j \, dx,$$

$$b_i = \int_{\Omega} \hat{\phi}_i f \, dx - \int_{\Gamma_N} \hat{\phi}_i g \, ds.$$