UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS COMPUTACIONAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL
CURSO DE MESTRADO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

Dissertação de Mestrado

Uma Metodologia para o Ensino da Teoria dos Grafos utilizando Objetos Virtuais de Aprendizagem

Maria Elenice Schroeder de Sena

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal do Rio Grande, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Modelagem Computacional

Orientadora: Prof[a]. Dr[a]. Diana Francisca Adamatti
Co-orientadora: Prof[a]. Dr[a]. Catia Maria dos Santos Machado

Rio Grande, 2016

Ficha catalográfica

S474m Sena, Maria Elenice Schroeder de.
Uma metodologia para o ensino da Teoria dos Grafos utilizando Objetos Virtuais de Aprendizagem / Maria Elenice Schroeder de Sena. – 2016.
101 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional, Rio Grande/RS, 2016.
Orientadora: Drª. Diana Francisca Adamatti.
Coorientadora: Drª. Catia Maria dos Santos Machado.

1. Ensino médio 2. Metodologia 3. Objeto Virtual de Aprendizagem 4. Teoria dos Grafos I. Adamatti, Diana Francisca II. Machado, Catia Maria dos Santos III. Título.

CDU 004:37

Catalogação na Fonte: Bibliotecário Me. João Paulo Borges da Silveira CRB 10/2130

MARIA ELENICE SCHROEDER DE SENA

"Uma Metodologia para o Ensino de Teoria de Grafos Utilizando Objetos Virtuais de Aprendizagem"

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal do Rio Grande - FURG, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre. Área concentração: Modelagem Computacional.

Aprovada em

BANCA EXAMINADORA

Diana F. Adamatti

Profª. Drª. Diana Francisca Adamatti
Orientadora – FURG

Catia Machado.

Profª. Drª. Catia Maria dos Santos Machado
Co-orientadora – FURG

Prof. Dr. Alessandro de Lima Bicho
FURG

Profª. Drª. Elaine Corrêa Pereira
FURG

Júlia Marques Carvalho da Silva

Profª. Drª. Júlia Marques Carvalho da Silva
IFRS

Rio Grande - RS
2016

Dedico este trabalho aos meus pais, pelo amor e apoio incondicional.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por conceber-me suas graças diariamente durante a trajetória de minha vida, bem como daqueles que fazem parte dela.

A minha família que sempre me apoiou, em especial a minha mãe Erica Sena que sempre fez de tudo para que eu continuasse, me incentivando, me aconselhando nas minhas certezas e incertezas por tomar meus sonhos como se fossem seus, por me dedicar palavras carinhosas e amigas, enfim por estar presente incondicionalmente em todos os momentos de minha vida.

Ao meu pai Santos Sena, que me estimulou para que eu prosseguisse minha caminhada, que me apoiou de todas as formas para que eu não desistisse do meu sonho.

As minhas filhas, Eduarda Sena e Emanuelle Sena que, nos diversos momentos da minha vida, propiciam alegrias que somente as crianças são capazes.

Ao meu marido Gilmar Santos que acompanhou minha trajetória, e compartilhou momentos de cansaço e preocupações respeitando minhas escolhas e sempre me apoiando em minhas decisões.

Aos meus amigos(as) que sempre se fizeram presentes em todos os momentos que precisei, doando seu mais sincero afeto e dedicação.

As escolas que me deram a oportunidade e auxilio para que eu desenvolvesse as atividades propostas neste trabalho.

A minha orientadora, Diana Francisca Adamatti, e a minha coorientadora, Catia Maria dos Santos Machado, meu sincero agradecimento pela disponibilidade de tempo e paciência, por transmitir seus conhecimentos e experiências profissionais. Serei sempre grata a vocês.

Ao Carlos Alberto S. do Nascimento da Silva Longo meu mais sincero agradecimento.

Ao professor Andreoli *(in memoriam)*, minha mais profunda admiração por seus preciosos ensinamentos, e seu abraço amigo e acolhedor nas horas em que precisei.

"O saber a gente aprende com os mestres e os livros.
A sabedoria, se aprende é com a vida e com os humildes."
— Cora Coralina

RESUMO

SENA, Maria Elenice Schroeder de. **Uma Metodologia para o Ensino da Teoria dos Grafos utilizando Objetos Virtuais de Aprendizagem**. 2016. 101 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional. Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande.

Neste trabalho, apresenta-se uma metodologia de inserção da Teoria dos Grafos no Ensino Médio através de uma ferramenta computacional de aprendizagem. A importância em desenvolver metodologias de ensino que se adequem aos conhecimentos dos alunos e a busca por um ensino de qualidade são fatores que motivaram a realização dessa pesquisa. Contemplar o estudo da Teoria dos Grafos como parte do ensino da Matemática e na resolução de problemas tornará os estudantes mais preparados para um mundo, onde cada vez mais, é valorizada a capacidade de interpretação, raciocínio lógico e conhecimento aplicado. No campo das Tecnologias da Informação e Comunicação existe um amplo ferramental para desenvolvimento de atividades de ensino. Os Objetos Virtuais de Aprendizagem (OVAs), definidos como quaisquer recursos digitais reutilizáveis que auxiliem na aprendizagem de algum conceito e, ao mesmo tempo, estimulem o desenvolvimento de capacidades pessoais, como imaginação e criatividade, são um exemplo de ferramenta nessa área de pesquisa. O OVA foi desenvolvido baseado em problemas relacionados ao dia-a-dia do estudante. O estudo da Teoria dos Grafos, quando aplicada a problemas do cotidiano, pode permitir ao aluno explorar diversas propriedades Matemáticas. No contexto deste trabalho é estabelecida uma relação entre Grafos, Matrizes e Análise Combinatória, conteúdos do Ensino Médio. Esta pesquisa tem por objetivo avaliar a viabilidade do uso dessa ferramenta com estudantes do 3° ano do Ensino Médio em duas escolas públicas, situadas na cidade de Rio Grande - RS.

Palavras-chave: Ensino Médio, Metodologia, Objeto Virtual de Aprendizagem, Teoria dos Grafos.

ABSTRACT

SENA, Maria Elenice Schroeder de. **A Methodology to Teach Graph Theory using Virtual Learning Objects**. 2016. 101 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional. Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande.

This work presents a metodology to insert the Graph Theory in the high school by learning computational tool. The importance to develop educational methodologies that adapt the students knowledge and look for quality teaching are factors that motivate this research. Studing the Graph Theory in the Mathematics and in the problems solution could prepare the students for the world, where the capacity of interpretation, logical reasoning and the applied knowledge are more valued. In the Information Comunication Technologies (ICT) there are a large number of tool to develop the educational ativities. The Virtual Learning Objects (VLO), defined as a digital reusable resource, can help the students to learn some concepts and, in the same time, to encourage in developing of personal abilities, as criativity and imagination. The developed VLO was based in students daily problems. The Graph Theory studies, when applied in daily problems, could provide to students the exploration of many mathematical properties. In this research, we are established a connexion between Graphs, matrixes and combinatorial analisys with high school contents. This research has as goal to measure the viability to use this kind of tool with students of 3rd year of High School in two public schools, located in Rio Grande city - RS.

Keywords: High School, Methodology, Virtual Learning Objects, Graph Theory.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AP	Amapá
BA	Bahia
MA	Maranhão
MG	Minas Gerais
MS	Mato Grosso do Sul
MT	Mato Grosso
OVA	Objeto Virtual de Aprendizagem
PA	Progressão Aritmética
PA	Pará
RS	Rio Grande do Sul

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

No Ensino de Matemática, a utilização de recursos, sobretudo digitais, como os softwares e os objetos de aprendizagem, representa a possibilidade de aprender Matemática de forma reflexiva, construtiva e autônoma. Oportunizar ao estudante do Ensino Médio a possibilidade de desenvolver habilidades importantes, tais como explorar, analisar, e modelar problemas do cotidiano, através da Teoria dos Grafos, pode contribuir para que o estudante adquira a aptidão necessária para participar efetivamente deste mundo moderno onde é cada vez mais valorizado o conhecimento tecnológico. Apesar de possuir diversas aplicações, e apresentar aspectos pertinentes a um ensino de melhor qualidade, a Teoria dos Grafos não faz parte do Currículo Escolar. Refletir sobre essa proposta de se trabalhar a Teoria dos Grafos no Ensino Médio pode proporcionar ao estudante mudanças na prática de aprender, pois a utilização de novas metodologias de ensino motivam os estudantes a desenvolver habilidades e competências importantes em todas as áreas do conhecimento. Desta forma, BRASIL (1997):

> "Para isso faz-se necessária uma proposta educacional que tenha em vista a qualidade da formação a ser oferecida a todos os estudantes. O ensino de qualidade que a sociedade demanda atualmente expressa-se aqui como a possibilidade de o sistema educacional vir a propor uma prática educativa adequada às necessidades sociais, políticas, econômicas e culturais da realidade brasileira, que considere os interesses e as motivações dos alunos e garanta as aprendizagens essenciais para a formação de cidadãos autônomos, críticos e participativos, capazes de atuar com competência, dignidade e responsabilidade na sociedade em que vivem".

A Teoria dos Grafos proporciona uma estratégia de ensino concreta, viabilizando o ensino de problemas simples de entender, porém de complexa resolução. O processo de ensino-aprendizagem, como estratégia motivadora na transmissão de conceitos matemáticos, demonstra a viabilidade do ensino de Algoritmos e Pensamento Algorítmico/Computacional no Ensino Médio, através da Modelagem Matemática, Matemática Aplicada e da Matemática Discreta. A Teoria dos Grafos é imprescindível no desenvolvimento da Matemática, portanto no desenvolvimento da ciência e da tecnologia, tendo em vista que os conceitos que envolvem a Teoria dos Grafos têm fundamental importância para a solução de problemas recorrentes de sistemas usuais, com aplicações nos processos industriais, na análise de caminho crítico, na pesquisa de dados, na minimização de despesas, no acesso a terminais eletrônicos, no acesso à Internet, na escolha de uma rota ótima e nos fluxos em redes. LEAL (2009) salienta que:

> “A computação é uma aliada da Matemática, já que no mundo digitalizado em que vivemos, a computação está presente em praticamente todos os segmentos da criação humana, porém, a tomada de decisões necessária na solução de problemas teóricos ou práticos dá se através de pensamentos algorítmicos. Assim observamos a necessidade de que o ensino da Matemática contemple o desenvolvimento das habilidades do indivíduo no que se refere à solução de problemas. É primordial, portanto, que uma melhoria no ensino de algoritmos, ainda no ensino médio, seja implementada urgentemente, objetivando o aumento da abstração dos indivíduos na solução de problemas diversos”.

Acredita-se que, para contribuir com uma educação Matemática que trate dessa realidade computacional, assim como a utilização da tecnologia para entender a Matemática, é importante que o aluno transforme seus pensamentos, desenvolva atividades criativas, compreenda conceitos, reflita sobre eles e, consequentemente, esses fatores de alguma forma contribuirão na construção do seu conhecimento, conforme descreve JURKIEWICZ (2007):

> “O pensamento algorítmico pode e deve ser introduzido de forma educacionalmente pertinente de maneira a fornecer às sociedades do século XXI, não programadores (embora também), mas cidadãos aptos a viver num mundo onde a cultura dos procedimentos sequenciais se torna rapidamente um padrão”.

A Teoria dos Grafos permite, de forma simples e contextualizada, ao aluno entender os princípios básicos na resolução de problemas do cotidiano, assim como para a compreensão do funcionamento das tecnologias que o cercam construindo ideias básicas que permeiam os processos algorítmicos, a fim de contribuir para um ensino de Matemática experimental e contextualizada:

> “A extrema facilidade com que inúmeras situações reais do nosso cotidiano podem ser tratadas através dos Grafos de forma bastante acessível aos estudantes da Educação Básica. O inegável “potencial de competência”dessas aplicações/exemplos para aumentarem o poder de sedução da Matemática sobre nossos estudantes, notadamente àqueles que não possuem grandes afinidades com a mesma. A natural associação dos Grafos com o uso do computador, da qual o professor poderia se

> valer, com sensibilidade e criatividade, na medida certa, em função das possibilidades circunstanciais para a sua realização; por exemplo, até de forma indireta, através de algum trabalho criterioso com algoritmos em prol do desenvolvimento do raciocínio lógico, visto que naturalmente, em nosso cotidiano, movimentamo-nos muito "de forma algorítmica"sem nos darmos conta disso. A grande flexibilidade característica do estudo dos Grafos, no sentido de poderem ser introduzidos e trabalhados de várias formas distintas, em função da ênfase com que se julgue mais conveniente orientar sua exploração: formal ou intuitivamente, através de figuras/diagramas ou mais estruturalmente, de forma lúdica, a partir da resolução de problemas". BRIA (1998).

Diante dessa nova realidade, é necessário que a Matemática ensinada na sala de aula contemple o estudo de ferramentas, que propiciem o desenvolvimento das novas habilidades necessárias à compreensão, análise e utilização de processos algorítmicos, para contribuir com uma educação Matemática que represente essa realidade computacional, através da Teoria dos Grafos, podendo proporcionar ao estudante melhorias significativas no processo ensino-aprendizagem.

O surgimento e a utilização de Objetos Virtuais de Aprendizagem (OVAs) se tornam fortes aliados, sobretudo na dinâmica do contexto educacional. Essa evolução tem transformado o modo de como o processo de ensino vem sendo conduzido dentro do ambiente escolar. Os OVAs são ferramentas que podem potencializar a aprendizagem, a aplicabilidade no trabalho pedagógico no intuito de mediar a construção de novos conhecimentos. De acordo com NUNES (2004):

> "Os objetos de aprendizagem quando bem escolhidos ajudam o aluno em várias etapas do processo de aprendizagem como a relacionar novos conhecimentos [...] testar hipóteses, pensar onde aplicar o que estão aprendendo, expressar-se por meio de várias linguagens, aprender novos métodos, novos conceitos, e a ser crítico. Além de que motivam e contextualizam um novo conteúdo curricular a ser tratado".

Levando em conta os recursos e as estruturas disponíveis nas escolas para a inserção de novas ferramentas educativas, os Objetos Virtuais de Aprendizagem podem se tornar materiais importantes, quando associados aos cenários do cotidiano. A busca por novas metodologias com o propósito de motivar o aluno, despertar seu interesse e imaginação, pode contribuir para a sua formação intelectual. Além de auxiliar no processo ensino-aprendizagem, possibilita ao estudante fazer descobertas e desenvolver habilidades, como o enriquecimento de sua linguagem atrelada à aquisição de novos conhecimentos. Segundo SPINELLI (2005):

> "Um objeto virtual de aprendizagem é um recurso digital reutilizável que auxilie na aprendizagem de algum conceito e, ao mesmo tempo, es-

> timule o desenvolvimento de capacidades pessoais, como, por exemplo, imaginação e criatividade. Dessa forma, um objeto virtual de aprendizagem pode tanto contemplar um único conceito quanto englobar todo o corpo de uma teoria. Pode ainda compor um percurso didático, envolvendo um conjunto de atividades, focalizando apenas determinado aspecto do conteúdo envolvido, ou formando, com exclusividade, a metodologia adotada para determinado trabalho".

Apontar a possibilidades e a forma de utilização de Objetos Virtuais de Aprendizagem no ensino da Teoria dos Grafos, alia-se à necessidade de se utilizar recursos capazes de promover um melhor aprendizado. Para WILEY (2002) um Objeto de Aprendizagem (OA) é "qualquer recurso digital que pode ser reutilizado para suporte ao ensino".

Esses recursos, aliados aos objetivos educacionais, oferecem oportunidades ao professor de enriquecer as estratégias de ensino através de atividades contextualizadas, uma vez que os OVAs podem permitir uma maior interação entre professor-aluno, tornando os conteúdos mais acessíveis e interessantes do ponto de vista do estudante. Testar diferentes caminhos, relacionar conceitos, despertar a curiosidade e resolver problemas do cotidiano de forma atrativa e divertida, são fatores que podem proporcionar uma aprendizagem que estimule (ou conduza) o aluno a desenvolver o pensamento crítico. É nesse sentido que a utilização de OVAs pode impulsionar a educação de acordo com as necessidades sociais na época em que vivemos.

Segundo IEEE (2016), existe um padrão de metadados definido SCORM *(Sharable Content Object Reference Model)* para definição e desenvolvimento de OVAs, contudo neste trabalho este padrão não foi utilizado.

1.1 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é a definição de uma metodologia que contemple o uso de OVAs para o ensino de alguns conceitos da Teoria dos Grafos, fundamentados em conteúdos do Ensino Médio.

Para atingir ao objetivo geral, são necessários os seguintes objetivos específicos:

- Estudar os conceitos da Teoria dos Grafos;
- Analisar algumas ferramentas utilizadas para o ensino da Teoria dos Grafos no Ensino Médio;
- Implementar um Objeto Virtual de Aprendizagem neste contexto;
- Aplicar os conteúdos de matrizes e Análise Combinatória, presentes no ensino médio, utilizando alguns Teoria dos Grafos de forma contextualizada;
- Realizar testes, junto a estudantes do Ensino Médio utilizando o OVA desenvolvido.

1.2 Estrutura do Texto

Este texto está estruturado em cinco Capítulos. No Capítulo 2, apresenta-se o referencial teórico do trabalho e os trabalhos relacionados ao tema de pesquisa abordado. No Capítulo 3, apresentam-se os materiais e métodos utilizados no desenvolvimento desse trabalho. No Capítulo 4, apresentam-se os testes realizados e os resultados obtidos e no Capítulo 5 são expostas as conclusões do trabalho realizado e trabalhos futuros.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Esse capítulo aborda os conceitos gerais da Teoria de Grafos bem como os trabalhos relacionados sobre a utilização desta teoria no Ensino Médio, com a utilização (ou não) de Objetos Virtuais de Aprendizagem.

2.1 Noções sobre a Teoria dos Grafos

A definição de Grafo não está totalmente padronizada. Abaixo seguem as definições e notação utilizadas segundo FREITAS (2012).

Definição 2.1 *Um **Grafo** é uma estrutura G=G(V,E), construída por um conjunto finito e não vazio V, cujos elementos são denominados vértices ou nós, e um conjunto E de subconjuntos a dois elementos de V, denominados arestas. Indicamos por $|V|$ e $|E|$ respectivamente, o número de vértices e o número de arestas de G. Se e=(u,v) $\in E$, dizemos que e incide em u e v. O **grau de um vértice** v, denotado por gr(v), é o número de arestas que incidem em v. Vértices ligados por arestas são ditos vértices adjacentes. Quando V é um conjunto unitário e E= $\emptyset$ dizemos que G é um Grafo trivial. Um Grafo G é dito um **multiGrafo** quando existem múltiplas arestas entre pares de vértices de G.*

Definição 2.2 *Se todas as arestas têm uma orientação, então são chamadas de arcos e o Grafo de **orientado**. Se nenhuma aresta possui orientação, o Grafo é chamado de **não orientado**. E, por fim, se um Grafo possui arcos e arestas, o chamamos de Grafo **misto**. Chamamos de **laço** à aresta cujas extremidades estão em um mesmo vértice.*

Definição 2.3 *Em um Grafo orientado, **passeio** é uma sequência de vértices em que cada vértice é adjacente ao anterior. **Caminho** é uma sequência de arcos, onde o vértice final de um arco é o vértice inicial do próximo arco, isto é, é um passeio sem vértices repetidos. Analogamente, define-se **cadeia** para um Grafo não orientado, ou seja, a extremidade de uma aresta coincide com a extremidade da outra aresta.*

Definição 2.4 *Em um Grafo orientado, define-se como **grau de entrada** e **grau de saída** de um vértice v_i qualquer, o número total de arcos que têm o vértice v_i como vértice final e inicial, respectivamente.*

Teorema 2.1 *As somas dos graus dos vértices em um Grafo orientado ou não é igual a duas vezes o número de arestas.*

Demonstração 2.1 *Esta demonstração é apresentada por RABUSKE (1992). Desde que cada aresta contribua na contagem de um grau de cada dois vértices com os quais ela é incidente, então cada aresta é sempre contada duas vezes. Logo:*

$$\sum_{i=1}^{n} gr(v_i) = 2m. \tag{2.1}$$

Onde *m* é o número de arestas.

Teorema 2.2 *Em qualquer Grafo, existe sempre um número par de vértices de grau ímpar.*

Demonstração 2.2 *Vamos supor que exista um Grafo G(V,E) onde todos os vértices possuam grau ímpar. Logo:*

$$\sum_{i=1}^{n} gr(v_i) = \begin{cases} \textit{um número par, se } n \textit{ for par.} \\ \textit{um número ímpar, se } n \textit{ for ímpar.} \end{cases} \tag{2.2}$$

Pelo teorema 2.1 , a soma dos graus dos vértices é par, portanto, n obrigatoriamente é par.

Definição 2.5 *Um Grafo G é k-regular, ou regular de grau k quando todos os vértices de G têm o mesmo grau k.*

2.1.1 Ciclos e Caminhos Hamiltonianos

Segundo RABUSKE (1992) um **ciclo Hamiltoniano** em um Grafo conexo G é definido como um caminho simples fechado, isto é, passa-se em cada vértice de G exatamente uma vez, exceto naturalmente no vértice inicial que é considerado também o terminal.

Teorema 2.3 *Em um Grafo completo, com n vértices, existem (n-1)/2 ciclos Hamiltonianos com arestas disjuntas, se n for ímpar maior que 2, e (n-2)/2 se n for par.*

Demonstração 2.3 *A prova deste teorema, pode ser encontrada em Deo, N. (1952) apud RABUSKE (1992).*

Definição 2.6 ***Circuito*** *é um caminho fechado, isto é, o vértice inicial coincide com o vértice final. No caso de uma cadeia fechada tem-se o que é denominado por* **ciclo**.

Definição 2.7 *Diz-se que G é um* ***Grafo conexo*** *quando existe um caminho unindo cada par de seus vértices. Em caso contrário, G é denominado Grafo desconexo. Se G é um Grafo desconexo, dizemos que G'$\subset$ G é uma componente conexa de G quando G' é um Grafo conexo e não existe um Grafo conexo H $\subset$ G tal que G'$\subset$ H e G'$\neq$ H.*

Teorema 2.4 *Um Grafo G é não conexo, se e somente se, seu conjunto de vértices V pode ser particionado em dois subconjuntos disjuntos, não vazios, V_1 e V_2, tais que nenhuma aresta exista em G ligando vértices de V_1 a vértices de V_2.*

Demonstração 2.4 *RABUSKE (1992).*

$(\rightarrow)$ *Suponha que exista tal partição, isto é, V=V_1+V_2, tal que $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. Considere dois vértices arbitrários u e r de G, tal que u $\in V_1$ e r $\in V_2$. Nenhum caminho deve existir entre os dois vértices u e r, pois, caso contrário, existiria pelo menos uma aresta cujos vértices adjacentes estariam um em V_1 e o outro em V_2. Portanto, se existe tal partição, G é não conexo.*

$(\leftarrow)$ *Seja G um Grafo não conexo. Considere um vértice v$\in$ G. Seja V_1 o conjunto de todos os vértices que são ligados por um caminho passando por v. Desde que G é não conexo, V_1 não inclui todos os vértices de G. Os vértices restantes formarão um conjunto não vazio. Nenhum vértice em V_1 está ligado a algum vértice V_2 por uma aresta. Portanto o conjunto V é particionado.*

Definição 2.8 *Seja G um Grafo com n vértices. A matriz de adjacência $A(G)$ de G é a matriz quadrada de ordem n cujas entradas são:*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } v_i \text{ é adjacente a } v_j. \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases} \tag{2.3}$$

Isto significa que $a_{ij} = 1$ quando os vértices v_i e v_j são adjacentes, e $a_{ij} = 0$ em caso contrário. Note que, se o Grafo for não dirigido, a matriz de adjacência A(G) é uma matriz real e simétrica, formada por uns e zeros. Devemos notar que a soma das entradas não nulas de cada linha da matriz de adjacência de um Grafo é igual ao grau do vértice correspondente.

Definição 2.9 *Um Grafo, no qual um número w_{ij} está associado a cada aresta, é denominado de* ***Grafo ponderado*** *e o número w_{ij} é chamado o peso ou o custo da aresta. Em redes de transportes, por exemplo, este custo pode ser a distância.*

Definição 2.10 *Um Grafo simples* ***ponderado****, pode ser representado por uma matriz, chamada matriz de custo W=$[w_{ij}]$, onde:*

$$w_{ij} = \begin{cases} \text{custo da aresta se } \{v_i, v_j\} \in E. \\ 0 \text{ ou } \infty \text{ , caso contrário.} \end{cases} \tag{2.4}$$

Definição 2.11 *Dados dois vértices v e q pertencentes ao Grafo G(V, E), denomina-se* ***distância*** *entre v e q e denota-se por d(v, q) ao comprimento do menor caminho entre esses dois vértices. No caso da não existência desse caminho, considera-se a distância infinita. É possível construir a* ***matriz de distâncias****, onde a entrada d_{ij} representa a distância entre os vértices v_i e v_j. Observe que se o Grafo é não orientado, a matriz de distâncias é uma matriz simétrica.*

Teorema 2.5 *Segundo LIPSCHUTZ (2013): Um Grafo conexo finito é euleriano se, e somente se, cada vértice tem grau par.*

Demonstração 2.5 *Suponha que G é euleriano e T é uma trilha euleriana fechada. Para qualquer vértice v de G, a trilha T entra e sai de v o mesmo número de vezes sem repetir qualquer aresta. Logo, v tem um grau par. Suponha, reciprocamente, que cada vértice de G tem grau par. Construímos uma trilha euleriana. Começamos uma trilha T_1 em qualquer aresta e. Estendemos T_1 adicionando uma aresta após a outra. Se T_1 não for fechado em qualquer passo, digamos, T_1 começa em u, mas termina em $v \neq u$, então apenas um número ímpar das áreas incidentes sobre v aparecem em T_1; logo, podemos estender T_1 por outra aresta incidente sobre v. Assim podemos continuar a estender T_1 até T_1 retornar ao vértice inicial u, ou seja, até T_1 ser fechado. Se T_1 inclui todas as arestas de G, então T_1 é nossa trilha euleriana. Suponha que T_1 não inclui todas as arestas de G. Considere o Grafo H obtido de todas as arestas de T_1 de G. H pode não ser conexo, mas cada vértice de H tem grau par, pois T_1 contém um número par das arestas incidentes sobre qualquer vértice. Como G é conexo, há uma aresta e' de H que tem um ponto extremo u' em T_1. Construímos uma trilha T_2 em H, começando em u' e usando e'. Como todas as arestas em H têm grau par, podemos continuar a estender T_2 em H até T_2 retornar a u', podemos colocar T_1 e T_2 juntos para formar uma trilha maior em G. Continuamos esse processo até todas as arestas de G serem usadas. Finalmente, obtemos uma trilha euleriana e, assim, G é euleriano.*

2.1.2 Caminho Mínimo

Para CAMPOS (1980), os problemas de **Caminho Mínimo** compreendem a determinação do caminho ou rota de menor tamanho (distância, tempo ou um custo qualquer) entre dois nós (vértices). Em uma rede qualquer, dependendo das suas características, podem existir vários caminhos entre um par de nós, definidos como origem (u) e destino (v). Entre os vários caminhos, aquele que possui o menor "peso"é chamado de caminho mínimo. Este peso representa a soma total dos valores dos arcos que compõem o caminho e estes valores conforme referenciados anteriormente podem ser: o tempo de viagem, a distância percorrida ou um custo qualquer do arco. Assim, os algoritmos de Caminho Mínimo determinam a rota de menor tempo, distância ou custo entre um par ou pares de origem e destino.

2.1.2.1 Caminho ótimo

O **Caminho ótimo** é aquele que apresenta uma sequência de arcos unindo o nó de origem e o nó de destino de tal forma que a soma dos valores dos arcos no caminho é minimizada. Existem basicamente dois tipos de estrutura de algoritmos para cálculo de caminhos mínimos: árvores e matrizes. Nos algoritmos em árvore, determinam-se os caminhos mínimos de um nó para todos os outros nós da rede ou simplesmente entre um par de nós. Neste tipo de algoritmo, a solução é obtida construindo-se passo a passo uma árvore de caminhos mínimos. Para se obter os caminhos mínimos de todos os nós para todos os outros nós da rede, utilizam-se os algoritmos com estrutura de matriz e, neste caso, os caminhos mínimos entre todos os pares de nós são obtidos simultaneamente. Neste trabalho, utilizaremos os algoritmos com estrutura de matrizes para determinar os passeios e os caminhos.

Seja **A** a matriz de adjacência de um Grafo **G**:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}\dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} \tag{2.5}$$

O número de passeios em um Grafo pode ser obtido a partir do cálculo das matrizes *A*, A^2, A^3...A^k. Se considerarmos as potências A, A^2, A^3, ..., A^k, da matriz de adjacência $A = [a_{ij}]$ de um Grafo *G* temos que ${A^k}_{ij}$, denota o número de passeios de comprimento *k* começando no vértice *i* e terminando no vértice *j* para a matriz A^k.

Então, a matriz ${A^2}_{ij}$ a seguir mostra como o número de passeios pode ser obtido:

$$A^2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}\dots & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}\dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} a_{11}.a_{11} + a_{12}.a_{21} + a_{13}.a_{31} \dots + a_{1n}.a_{n1} & a_{11}.a_{12} + a_{12}.a_{22} + a_{13}.a_{32} \dots + a_{1n}.a_{n2} & a_{11}.a_{13} + a_{12}.a_{23} + a_{13}.a_{33} \dots + a_{1n}.a_{n3} & \dots & a_{11}.a_{1n} + a_{12}.\ a_{2n} + a_{13}a_{3n} \dots + a_{1n}.\ a_{nn} \\ a_{21}.a_{11} + a_{22}.a_{21} + a_{23}.a_{31} \dots + a_{2n}.a_{n1} & a_{21}.a_{12} + a_{22}.a_{22} + a_{23}.a_{32} \dots + a_{2n}.a_{n2} & a_{21}.a_{13} + a_{22}.a_{23} + a_{23}.a_{33} \dots + a_{2n}.a_{n3} & \dots & a_{21}.a_{1n} + a_{22}.\ a_{2n} + a_{23}.a_{3n} \dots + a_{2n}.\ a_{nn} \\ a_{31}.a_{11} + a_{32}.a_{21} + a_{33}.a_{31} \dots + a_{3n}.a_{n1} & a_{31}.a_{12} + a_{32}.a_{22} + a_{33}.a_{32} \dots + a_{3n}.a_{n2} & a_{31}.a_{13} + a_{32}.a_{23} + a_{33}.a_{33} \dots + a_{3n}.a_{n3} & \dots & a_{31}.a_{1n} + a_{32}.\ a_{2n} + a_{33}a_{3n} \dots + a_{3n}.a_{nn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}.a_{11} + a_{n2}.a_{21} + a_{n3}.a_{31} \dots + a_{nn}.a_{n1} & a_{n1}.a_{12} + a_{n2}.a_{22} + a_{n3}.a_{32}\dots + a_{nn}.a_{n2} & a_{n1}.a_{13} + a_{n2}.a_{23} + a_{n3}.a_{33} \dots + a_{nn}.a_{n3} & \dots & a_{n1}.a_{1n} + a_{n2}.a_{2n} + a_{n3}a_{3n} \dots + a_{nn}.a_{nn} \end{bmatrix}$$

Figura 1: Matriz de Passeios.
Fonte: Autora.

Através da Equação 2.7 se obtém o número de passeios de comprimento *3*.

$$A^3 = \sum_{s=1}^{n} a_{is}^2 a_{sj}^1. \tag{2.7}$$

Generalizando temos:

$$A^k = \sum_{s=1}^{n} a_{is}^{k-1} a_{sj}^1. \tag{2.8}$$

Por exemplo: Na matriz *A* observe que a_{23}^1 fornece o número de passeios de comprimento 1 do vértice 2 ao vértice 3. Na matriz a_{43}^2 fornece o número de passeios de comprimento 2 do vértice 4 ao vértice 3.

Detalhes sobre a demonstração encontra-se em LIPSCHUTZ (2013).

Exemplo 2.1 *Seja G o Grafo orientado na Figura 2 com vértices v_1, v_2, v_3 e v_4 e a matriz de adjacência A de G. Note que o número de 1's em A é igual ao número (oito) de arestas.*

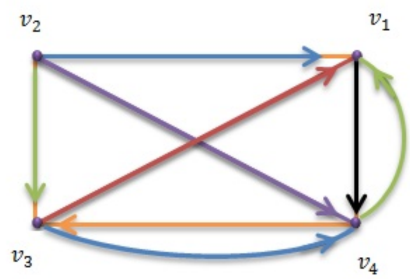


Figura 2: Grafo Orientado.
Fonte: LIPSCHUTZ (2013).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

Observe que $a_{ij}^1 = a_{ij}$ fornece o número de passeios de comprimento 1 do vértice v_i ao vértice v_j.

$$A^2 = \begin{bmatrix} a_{14} \cdot a_{41} & 0 & a_{14} \cdot a_{43} & 0 \\ a_{23} \cdot a_{31} + a_{24} \cdot a_{41} & 0 & a_{24} \cdot a_{43} & a_{21} \cdot a_{14} + a_{23} \cdot a_{34} \\ a_{34} \cdot a_{41} & 0 & a_{34} \cdot a_{43} & a_{31} \cdot a_{14} \\ a_{43} \cdot a_{31} & 0 & 0 & a_{41} \cdot a_{14} + a_{43} \cdot a_{34} \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

$a_{ij}^2 = a_{ij}$ *fornece o número de passeios de comprimento 2 do vértice v_i ao vértice v_j.*

$$A^3 = \begin{bmatrix} a_{14} \cdot a_{41} & 0 & a_{14} \cdot a_{43} & 0 \\ a_{23} \cdot a_{31} + a_{24} \cdot a_{41} & 0 & a_{24} \cdot a_{43} & a_{21} \cdot a_{14} + a_{23} \cdot a_{34} \\ a_{34} \cdot a_{41} & 0 & a_{34} \cdot a_{43} & a_{31} \cdot a_{14} \\ a_{43} \cdot a_{31} & 0 & 0 & a_{41} \cdot a_{14} + a_{43} \cdot a_{34} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & 0 & 0 & a_{34} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} (a_{14} \cdot a_{43}) \cdot a_{31} & 0 & 0 & (a_{14} \cdot a_{41}) \cdot a_{14} + (a_{14} \cdot a_{43}) \cdot a_{34} \\ (a_{24} \cdot a_{43}) \cdot a_{31} + (a_{21} \cdot a_{14} + a_{23} \cdot a_{34}) \cdot a_{41} & 0 & (a_{21} \cdot a_{14} + a_{23} \cdot a_{34}) \cdot a_{43} & (a_{23} \cdot a_{31} + a_{24} \cdot a_{41}) \cdot a_{14} + (a_{24} \cdot a_{43}) \cdot a_{34} \\ (a_{34} \cdot a_{43}) \cdot a_{31} + (a_{31} \cdot a_{14}) \cdot a_{41} & 0 & (a_{31} \cdot a_{14}) \cdot a_{43} & (a_{43} \cdot a_{31}) \cdot a_{41} + (a_{34} \cdot a_{43}) \cdot a_{34} \\ (a_{41} \cdot a_{14} + a_{43} \cdot a_{34}) \cdot a_{41} & 0 & (a_{41} \cdot a_{14} + a_{43} \cdot a_{34}) \cdot a_{43} & (a_{43} \cdot a_{31}) \cdot a_{14} \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

$a_{ij}^3 = a_{ij}$ *fornece o número de passeios de comprimento 3 do vértice v_i ao vértice v_j.*

$$A^4 = \begin{bmatrix} (a_{14}.a_{43}).a_{31} & 0 & 0 & (a_{14}.a_{41}).a_{14} + (a_{14}.a_{43}).a_{34} \\ (a_{24}.a_{43}).a_{31} + (a_{21}.a_{14} + a_{23}.a_{34}).a_{41} & 0 & (a_{21}.a_{14} + a_{23}.a_{34}).a_{43} & (a_{23}.a_{31} + a_{24}.a_{41}).a_{14} + (a_{24}.a_{43}).a_{34} \\ (a_{34}.a_{43}).a_{31} + (a_{31}.a_{14}).a_{41} & 0 & (a_{31}.a_{14}).a_{43} & (a_{43}.a_{31}).a_{14} + (a_{34}.a_{43}).a_{34} \\ (a_{41}.a_{14} + a_{43}.a_{34}).a_{41} & 0 & (a_{41}.a_{14} + a_{43}.a_{34}).a_{43} & (a_{43}.a_{31}).a_{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & 0 & 0 & a_{34} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} ((a_{14}.a_{41}).a_{14} + (a_{14}.a_{43}).a_{34})).a_{41} & 0 & ((a_{14}.a_{41}).a_{14} + (a_{14}.a_{43}).a_{34}).a_{43} & ((a_{14}.a_{43}).a_{31}).a_{14} \\ ((a_{21}.a_{14} + a_{23}.a_{34}).a_{43}).a_{31} + ((a_{23}.a_{31} + a_{24}.a_{41}).a_{14} + (a_{24}.a_{43}).a_{34}).a_{41} & 0 & ((a_{23}.a_{31} + a_{24}.a_{41}).a_{14} + (a_{24}.a_{43}).a_{34}).a_{43} & ((a_{24}.a_{43}).a_{31} + (a_{21}.a_{14} + a_{23}.a_{34}).a_{41}).a_{14} + ((a_{21}.a_{14} + a_{23}.a_{34}).a_{43}).a_{34} \\ ((a_{31}.a_{14}).a_{43}).a_{31} + ((a_{43}.a_{31}).a_{14} + (a_{34}.a_{43}).a_{34}).a_{41} & 0 & ((a_{43}.a_{31}).a_{14} + (a_{34}.a_{43}).a_{34}).a_{43} & ((a_{34}.a_{43}).a_{31} + (a_{31}.a_{14}).a_{41}).a_{14} + ((a_{31}.a_{14}).a_{43}).a_{34} \\ ((a_{41}.a_{14} + a_{43}.a_{34}).a_{43}).a_{31} + ((a_{43}.a_{31}).a_{14}).a_{41} & 0 & ((a_{43}.a_{31}).a_{14}).a_{43} & ((a_{41}.a_{14} + a_{43}.a_{34}).a_{41}).a_{14} + ((a_{41}.a_{14} + a_{43}.a_{34}).a_{43}).a_{34} \end{bmatrix}$$

Figura 3: Matriz de Passeios.
Fonte: Autora.

$$A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

Observe que $a_{41}^2 = 1$ e portanto, há um passeio de comprimento 2 de v_4 a v_1. Além disso, $a_{23}^3 = 2$ e, portanto, há dois passeios de comprimento 3 de v_2 a v_3; e $a_{24}^4 = 5$, logo, existem cinco passeios de comprimento 4 de v_2 a v_4.

Observação 2.1 *Seja A a matriz de adjacência de um Grafo G e B_r a matriz definida por:*

$$B_r = A + A^2 + A^3 + ...A^r. \tag{2.16}$$

Então a entrada ij da matriz B_r dá o número de passeios de comprimento r, ou menos, do vértice v_i ao vértice v_j.

2.1.3 Matriz de Passeios

De acordo com LIPSCHUTZ (2013): Seja *G=(V, E)* um Grafo orientado simples com m vértices $v_1, v_2, ..., v_m$. A matriz de passeios ou matriz de alcançabilidade de G é a matriz quadrada $P = [p_{ij}]$ de ordem m definida como:

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ , se existe um passeio de } (v_i, v_j). \\ 0 \text{ , caso contrário.} \end{cases} \tag{2.17}$$

Proposição 2.1 *Seja a matriz de adjacência de um Grafo G com m vértices. Então P é fortemente conexo se, e somente se,* B_m *não tem entradas nulas, onde*

$$B_m = A + A^2 + A^3 + ...A^m. \tag{2.18}$$

Exemplo 2.2 *Considerando o Grafo G e sua matriz de adjacência A que aparece na Figura 2. Aqui G tem m=4 vértices. Adicionando a matriz A às matrizes* A^2, A^3*e* A^4*, obtemos a seguinte matriz* B_4*, e também a matriz de passeios (alcançabilidade) P, substituindo as entradas não nulas em* B_4 *por 1:*

$$B_4 = \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & 0 & 0 & a_{34} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{14}.a_{41} & 0 & a_{14}.a_{43} & 0 \\ a_{23}.a_{31} + a_{24}.a_{41} & 0 & a_{24}.a_{43} & a_{21}.a_{14} + a_{23}.a_{34} \\ a_{34}.a_{41} & 0 & a_{34}.a_{43} & a_{31}.a_{14} \\ a_{43}.a_{31} & 0 & 0 & a_{41}.a_{14} + a_{43}.a_{34} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (a_{14}.a_{43}).a_{31} & 0 & 0 & (a_{14}.a_{41}).a_{14} + (a_{14}.a_{43}).a_{34} \\ (a_{24}.a_{43}).a_{31} + (a_{21}.a_{14} + a_{23}.a_{34}).a_{41} & 0 & (a_{21}.a_{14} + a_{23}.a_{34}).a_{43} & (a_{23}.a_{31} + a_{24}.a_{41}).a_{14} + (a_{24}.a_{43}).a_{34} \\ (a_{34}.a_{43}).a_{31} + (a_{31}.a_{14}).a_{41} & 0 & (a_{31}.a_{14}).a_{43} & (a_{43}.a_{31}).a_{14} + (a_{34}.a_{43}).a_{34} \\ (a_{41}.a_{14} + a_{43}.a_{34}).a_{41} & 0 & (a_{41}.a_{14} + a_{43}.a_{34}).a_{43} & (a_{43}.a_{31}).a_{14} \end{bmatrix} \right.$$

$$\left. + \begin{bmatrix} ((a_{14}.a_{41}).a_{14} + (a_{14}.a_{43}).a_{34})).a_{41} & 0 & ((a_{14}.a_{41}).a_{14} + (a_{14}.a_{43}).a_{34}).a_{43} & ((a_{14}.a_{43}).a_{31}).a_{14} \\ ((a_{21}.a_{14} + a_{23}.a_{34}).a_{43}).a_{31} + ((a_{23}.a_{31} + a_{24}.a_{41}).a_{14} + (a_{24}.a_{43}).a_{34}).a_{41} & 0 & ((a_{23}.a_{31} + a_{24}.a_{41}).a_{14} + (a_{24}.a_{43}).a_{34}).a_{43} & ((a_{24}.a_{43}).a_{31} + (a_{21}.a_{14} + a_{23}.a_{34}).a_{41}).a_{14} + ((a_{21}.a_{14} + a_{23}.a_{34}).a_{43}).a_{34} \\ ((a_{31}.a_{14}).a_{43}).a_{31} + ((a_{43}.a_{31}).a_{14} + (a_{34}.a_{43}).a_{34}).a_{41} & 0 & ((a_{43}.a_{31}).a_{14} + (a_{34}.a_{43}).a_{34}).a_{43} & ((a_{34}.a_{43}).a_{31} + (a_{31}.a_{14}).a_{41}).a_{14} + ((a_{31}.a_{14}).a_{43}).a_{34} \\ ((a_{41}.a_{14} + a_{43}.a_{34}).a_{43}).a_{31} + ((a_{43}.a_{31}).a_{14}).a_{41} & 0 & ((a_{43}.a_{31}).a_{14}).a_{43} & ((a_{41}.a_{14} + a_{43}.a_{34}).a_{41}).a_{14} + ((a_{41}.a_{14} + a_{43}.a_{34}).a_{43}).a_{34} \end{bmatrix} \right]$$

Figura 4: Matriz que fornece o número de passeios de comprimento r.
Fonte: Autora.

$$B_4 = \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \right] \tag{2.19}$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 & 4 \\ 11 & 0 & 7 & 11 \\ 7 & 0 & 4 & 7 \\ 7 & 0 & 4 & 7 \end{bmatrix} e \; P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

Analisando a matriz B_4 ou P, vemos entradas nulas; portanto G não é fortemente conexo. Em especial, percebemos que o vértice v_2 não é alcançável a partir de um dos demais vértices.

2.1.4 Algoritmo de Floyd

Segundo RABUSKE (1992):

Constrói-se uma matriz D^0 de custos das arestas, onde os laços possuem custo zero e a não existência de arestas atribui-se o custo infinito.

O algoritmo constrói, sucessivamente, n matrizes a partir de D^0, através de modificações efetuadas de acordo com a seguinte expressão

$$d_{ij}^{k} = MIN[d_{ij}^{k-1}, (d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1})]. \tag{2.21}$$

Para a determinação do caminho, parte-se do final para o inicio, levando-se em conta os vértices intermediários incluídos durante o processo (observe que quando se trabalha com o computador, é necessário que as substituições sejam anotadas, uma vez que a matriz apaga a anterior).

2.1.5 Passos do Algoritmo de Floyd

Considere que a matriz de custo foi iniciada de tal modo que $d_{ii} = 0$ para todo $i = 1, 2, ..., n$ e que $d_{ii} = \infty$, quando não existe a aresta (x_i, x_j).

Passo 1) Faça $k \leftarrow 0$;

Passo 2) Faça $k \leftarrow k + 1$;

Passo 3) Para todo $i \neq k$ tal que $d_{ik} \neq \infty$, e todo $j \neq k$ tal que $d_{jk} \neq \infty$, faça

$$d_{ij}^{k} = MIN[d_{ij}^{k-1}, (d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1})]. \tag{2.22}$$

Passo 4) [Teste de Finalização]

Se algum $d_{ii} < 0$, então existe um ciclo de custo negativo contendo o vértice x_i, e não existe solução possível. Pare.

Se todo $d_{ii} \geq 0$, e $k = n$, a solução foi achada, e $[d_{ii}]$ fornece os comprimentos de todos os menores caminhos. Pare.

Se todo $d_{ii} \geq 0$ mas $k < n$, então retorne ao Passo 2.

Para CAMPOS (1980) a **Matriz de Roteamento** também chamada de matriz de uni-roteamento, permite a descrição do caminho mínimo entre cada par de vértice, e baseia-se no princípio de que um vértice k pertence a um caminho d_{ij} se e somente se $d_{ik}+d_{kj} = d_{ij}$.

Considerando-se que a matriz de roteamento é formada pelos penúltimos vértices dos caminhos entre os pares de vértice do Grafo e definido-se este elemento como k , faz se:

$r_{ij} = k$ (elemento da matriz de roteamento)

$d_{ij} =?$

$r_{ik} = ...r_{ikm} = i$

Ou seja, vai-se substituindo o penúltimo vértice a cada caminho até que se chega ao nó inicial *i* do caminho procurado.

Se considerarmos que um caminho tem *m* nós intermediários, iniciando-se pelo penúltimo *k*, vamos chegar ao nó de origem , ao encontrarmos o elemento k_m.

Exemplo 2.3 *A Figura 5 mostra um Grafo ponderado G e sua matriz de pesos W. Aplicando o algoritmo Floyd no Grafo G obtemos as matrizes* $D^0, D^1, D^2, D^3 e\ D^4$. *As entradas na matriz* D^0 *são as mesmas da matriz de pesos W, exceto que cada 0 em W é substituído por* ∞*(um número muito grande).*

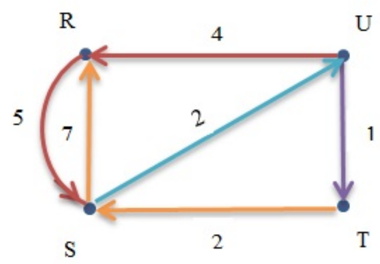


Figura 5: Grafo Ponderado.
Fonte: LIPSCHUTZ (2013).

$$D^0 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & \infty & \infty \\ 7 & 0 & \infty & 2 \\ \infty & 3 & 0 & \infty \\ 4 & \infty & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & q_{44} \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

A matriz de roteamento ψ^0 *contém os caminhos correspondente aos comprimentos da matriz* D^0.

$$\psi^0 = \begin{array}{c} \\ R \\ S \\ T \\ U \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} R & S & T & U \end{array} \\ \begin{bmatrix} - & S & T & U \\ R & - & T & U \\ R & S & - & U \\ R & S & T & - \end{bmatrix} \end{array} \tag{2.24}$$

Calculando a Matriz D^1.

$$D^1 = \begin{cases} d^1_{23} = min(d^0_{23}, d^0_{21} + d^0_{13}) \\ d^1_{24} = min(d^0_{24}, d^0_{21} + d^0_{14}) \\ d^1_{32} = min(d^0_{32}, d^0_{31} + d^0_{12}) \\ d^1_{34} = min(d^0_{34}, d^0_{31} + d^0_{14}) \\ d^1_{42} = min(d^0_{42}, d^0_{41} + d^0_{12}) \\ d^1_{43} = min(d^0_{43}, d^0_{41} + d^0_{13}) \end{cases} \tag{2.25}$$

$$D^1 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & \infty & \infty \\ 7 & 0 & \infty & 2 \\ 10 & 3 & 0 & \infty \\ 4 & 9 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

A matriz de roteamento ψ^1 contém os caminhos correspondente aos comprimentos da matriz D^1.

$$\psi^1 = \begin{array}{c} \\ R \\ S \\ T \\ U \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} R & S & T & U \end{array} \\ \begin{bmatrix} - & S & T & U \\ R & - & T & U \\ R & S & - & U \\ R & R & T & - \end{bmatrix} \end{array} \tag{2.27}$$

Calculando a Matriz D^2.

$$D^2 = \begin{cases} d^2_{13} = min(d^1_{13}, d^1_{12} + d^1_{23}) \\ d^2_{14} = min(d^1_{14}, d^1_{12} + d^1_{24}) \\ d^2_{23} = min(d^1_{22}, d^1_{12} + d^1_{23}) \\ d^2_{24} = min(d^1_{24}, d^1_{22} + d^1_{24}) \\ d^2_{31} = min(d^1_{31}, d^1_{32} + d^1_{21}) \\ d^2_{34} = min(d^1_{34}, d^1_{32} + d^1_{24}) \\ d^2_{41} = min(d^1_{41}, d^1_{42} + d^1_{21}) \\ d^2_{43} = min(d^1_{43}, d^1_{42} + d^1_{23}) \end{cases} \tag{2.28}$$

$$D^2 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & \infty & 7 \\ 7 & 0 & \infty & 2 \\ 10 & 3 & 0 & 5 \\ 4 & 9 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

A matriz de roteamento ψ^2 contém os caminhos correspondente aos comprimentos da matriz D^2.

$$\psi^2 = \begin{array}{c} \\ R \\ S \\ T \\ U \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} R & S & T & U \end{array} \\ \begin{bmatrix} - & S & T & S \\ R & - & T & U \\ S & S & - & S \\ R & R & T & - \end{bmatrix} \end{array} \tag{2.30}$$

Calculando a matriz D^3.

$$D^3 = \begin{cases} d^3_{12} = min(d^2_{12}, d^2_{13} + d^2_{32}) \\ d^3_{14} = min(d^2_{14}, d^2_{13} + d^2_{34}) \\ d^3_{21} = min(d^2_{21}, d^2_{23} + d^2_{31}) \\ d^3_{24} = min(d^2_{23}, d^2_{22} + d^2_{34}) \\ d^3_{41} = min(d^2_{41}, d^2_{43} + d^2_{31}) \\ d^3_{42} = min(d^2_{42}, d^2_{43} + d^2_{32}) \end{cases} \tag{2.31}$$

$$D^3 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & \infty & 7 \\ 7 & 0 & \infty & 2 \\ 10 & 3 & 0 & 5 \\ 4 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

A matriz de roteamento ψ^3 contém os caminhos correspondente aos comprimentos da matriz D^3.

$$\psi^3 = \begin{array}{c} \\ R \\ S \\ T \\ U \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} R & S & T & U \end{array} \\ \begin{bmatrix} - & S & T & S \\ R & - & T & U \\ S & S & - & S \\ R & T & T & - \end{bmatrix} \end{array} \tag{2.33}$$

Para calcular D^4.

$$D^4 = \begin{cases} d^4_{12} = min(d^3_{12}, d^4_{14} + d^3_{42}) \\ d^4_{13} = min(d^3_{13}, d^4_{14} + d^3_{43}) \\ d^4_{21} = min(d^3_{21}, d^4_{24} + d^3_{41}) \\ d^4_{23} = min(d^3_{22}, d^4_{24} + d^3_{43}) \\ d^4_{31} = min(d^3_{31}, d^4_{34} + d^3_{41}) \\ d^4_{32} = min(d^3_{32}, d^4_{34} + d^3 42) \end{cases} \tag{2.34}$$

$$D^4 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 8 & 7 \\ 6 & 0 & 3 & 2 \\ 9 & 3 & 0 & 5 \\ 4 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

A matriz de roteamento ψ^4 contém os caminhos correspondente aos comprimentos da matriz D^4.

$$\psi^4 = \begin{array}{c} \\ R \\ S \\ T \\ U \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} R & S & T & U \end{array} \\ \begin{bmatrix} - & S & U & S \\ U & - & U & U \\ U & S & - & S \\ R & R & T & - \end{bmatrix} \end{array} \tag{2.36}$$

A matriz D^4 fornece os comprimentos de menor caminho e a matriz R^4 é a matriz de roteamento.

Por exemplo: Para determinar a rota de:
S a R temos $\psi[S, R] = U$, SU= U então a rota é: SUR.
T a R temos $\psi[T, R] = U$, $\psi[T, U] = S$ então a rota é: TSUR.
U a R temos $\psi[U, R] = R$, então a rota é: UR.

R a S temos $\psi[R, S] = S$, então a rota é: RS.
T a S temos $\psi[T, S] = S$, então a rota é: TS.
U a S temos $\psi[U, S] = T$, $\psi[U, T] = T$, então a rota é: UTS.
R a T temos $\psi[R, T] = U$, $\psi[R, U] = S$, então a rota é: RSUT
S a T temos $\psi[S, T] = U$, então a rota é: SUT.
U a T temos $\psi[U, T] = T$, então a rota é: UT.
R a U temos $\psi[R, U] = S$, então a rota é: RSU.
S a U temos $\psi[S, U] = U$, então a rota é: SU.
T a U temos $\psi[T, U] = S$, então a rota é: TSU.

Logo;

$$\psi = \begin{bmatrix} - & RS & RSUT & RSU \\ SUR & - & SUT & SU \\ TSUR & TS & - & TSU \\ UR & UTS & UT & - \end{bmatrix} \tag{2.37}$$

2.1.6 Algoritmo de Dijkstra

De acordo com RABUSKE (1992): Um Grafo *G(V, E)* e uma função de distância *L* que associe cada aresta *(v, w)* a um número real não negativo *L(v, w)* e também um vértice fixo v_0 em V, chamado fonte. O problema consiste em se determinar os caminhos de v_0 para cada vértice *v* de *G*, de tal forma que a somatória das distâncias das arestas envolvidas em cada caminho seja mínima. Isto é equivalente a determinar um caminho $v_0, v_1, ..., v_k$ tal que

$$\sum_{i=0}^{k-1} L(v_i, v_{i+1}). \tag{2.38}$$

seja mínimo.

O algoritmo de Dijkstra, tem a seguinte ideia:

- Considere o diGrafo G(V, E), uma fonte v_0 e uma função *L* que associe cada aresta a um número real não negativo, isto é,

$$L(v_i, v_j) = \begin{cases} \infty, \text{ se não existe a aresta } (v_i, v_j). \\ 0, \text{ se } (v_i = v_j). \\ \text{custo, se } v_i \neq v_j \text{ e existe a aresta } (v_i, v_j). \end{cases} \tag{2.39}$$

- Constrói-se um conjunto *S*, que contém os vértices $v_i's$ cujo comprimento mínimo de v_0 a cada v_i, seja conhecido.

- A cada passo se adiciona ao conjunto *S* o vértice *w* partencente a $V - S$ tal que o comprimento do caminho v_0 a w, seja menor do que o correspondente de qualquer outro vértice de $V - S$.

- Pode-se garantir que o caminho mínimo de v_0 a qualquer vértice v em S contém somente vértices pertencentes a S.

Exemplo 2.4 *Algoritmo de Dijkstra operando no Grafo.*

Iniciamos pelo vértice P, a seguir fazemos:

Iteração (1) cor vermelha – Vértice Processado A_1

Iteração (2) cor azul – Vértice Processado A_4

Iteração (3) cor verde – Vértice Processado A_2

Iteração (4) cor lilás – Vértice Processado A_5

Iteração (5) cor amarela – Vértice Processado A_3

Iteração (6) cor laranja – Vértice Processado A_6

Terminamos com o vértice Q.

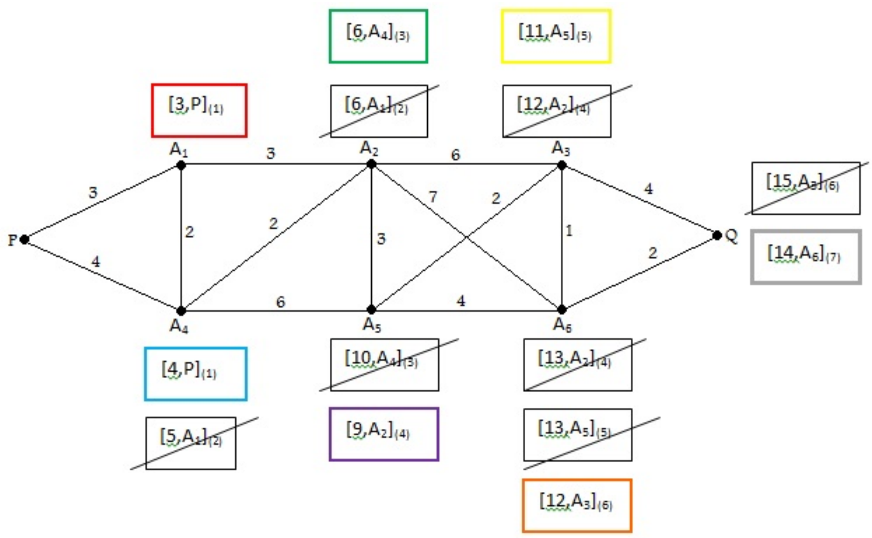


Figura 6: Algoritmo de Dijkstra operando no Grafo.
Fonte: LIPSCHUTZ (2013).

Queremos determinar o caminho do nó P ao vértice Q.

Então teríamos:

Q - A_6 - A_3 - A_5 - A_2 - A_4 - *P.*

(2 + 1 + 2 + 3 + 2 + 4) = 14.

2.1.7 Problema do Caixeiro Viajante

O problema do Caixeiro Viajante consiste em determinar um ciclo hamiltoniano.

Método Algébrico

Esse método, apresentado por Christofides (1975) apud RABUSKE (1992), envolve a geração de todos os caminhos simples por multiplicação sucessiva de matriz. Envolve os seguintes passos:

- Passo 1). Construa inicialmente a matriz de adjacência A do Grafo.

- Passo 2). Construa a matriz $B(n \cdot n)$ da seguinte forma

$$b_{i,j} = \begin{cases} v_i, \text{ se existe a aresta } (v_i,\ v_j). \\ 0, \text{ caso contrário }. \end{cases} \tag{2.40}$$

- Passo 3) Faça $P_1 \leftarrow$ A;

- Passo 4) $P_{i+1} \leftarrow$ B $\cdot$ P_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ onde

  $P_{i+1}(k, k) = 0$ para todo k.

$$P_{i+1}(s, t) = \sum_{k}^{n-1} (b(s, k) \cdot P_1(k, t)). \tag{2.41}$$

Observe que na matriz P_{i+1} obtém-se todos os caminhos hamiltonianos de cardinalidade *i+1*, entre os vértices *s* e *t*. Para todo P_{i+1} a diagonal é zero, por motivos óbvios, assim como todo caminho de *s* até *k* contendo *s*.

Exemplo 2.5 *Utilizaremos o Exemplo 2.1 para determinar os passeios, os ciclos e os caminhos através do Problema do Caixeiro Viajante.*

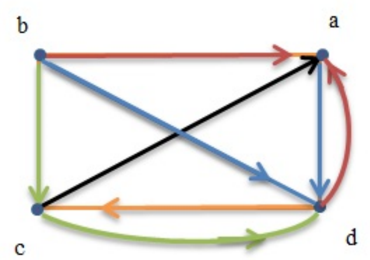


Figura 7: Grafo Orientado.
Fonte: LIPSCHUTZ (2013).

$$\textit{Matriz de Adjacência} A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \tag{2.42}$$

$$\textit{b é a matriz construída da seguinte forma :} b_{ij} = \begin{cases} v_j, \textit{ se existe a aresta } (v_i,\ v_j). \\ 0, \textit{ caso contrário }. \end{cases} \tag{2.43}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d \\ a & 0 & c & d \\ a & 0 & 0 & d \\ a & 0 & c & 0 \end{bmatrix} \tag{2.44}$$

$$P_1 = A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \tag{2.45}$$

$$P_2 = B \cdot P_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d \\ a & 0 & c & d \\ a & 0 & 0 & d \\ a & 0 & c & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} d & 0 & d & 0 \\ c+d & 0 & d & a+c \\ d & 0 & d & a \\ c & 0 & 0 & a+c \end{bmatrix} \end{array} \tag{2.46}$$

$$P_2 = B \cdot P_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d \\ a & 0 & c & d \\ a & 0 & 0 & d \\ a & 0 & c & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d & 0 & d & 0 \\ c+d & 0 & d & a+c \\ d & 0 & d & a \\ c & 0 & 0 & a+c \end{bmatrix} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} dc & 0 & 0 & da+dc \\ ad+cd+dc & 0 & ad+cd & ca+da+dc \\ ad+dc & 0 & ad & da+dc \\ ad+cd & 0 & ad+cd & ca \end{bmatrix} \end{array} \tag{2.47}$$

$$\textit{A matriz final dos caminhos será:} \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} dc & 0 & 0 & da+dc \\ ad+cd+dc & 0 & ad+cd & ca+da+dc \\ ad+dc & 0 & ad & da+dc \\ ad+cd & 0 & ad+cd & ca \end{bmatrix} \end{array} \tag{2.48}$$

Observe que dos passos P_3 e P_4 obtém-se as matrizes:

$$P_1 = A, P_2 = B \cdot P_1, P_3 = B \cdot P_2.$$

Os passeios do Grafo da Figura 7 são: adca, adad, adcd, bada, bcda, bdca, badc, bcdc, bcad, bdad, bdcd, cada, cdca, cadc, cdad, cdcd, dada, dcda, dadc, dcdc, dcad.

Temos também os ciclos do Grafo na Figura 7 são: adca, cadc, dcad.

Eliminando-se nas matrizes P_i os termos em vermelho, pois são caminhos de s até k que contém s. Faz-se também a diagonal igual à zero obtemos:

Os caminhos hamiltonianos do Grafo da Figura 7: bcda, bdca, badc, bcad.

Observação 2.2 *Observação: Quando as arestas são valoradas, então pode-se determinar o caminho de menor custo.*

2.1.7.1 Análise Combinatória

Permutação

Seja *E* um conjunto com *n* elementos, chama-se *permutação simples* dos *n* elementos, qualquer agrupamento (sequência) de *n* elementos distintos de *E*, GIOVANNI; BONJORNO; JUNIOR (2002).

O número de permutações simples de *n* elementos é indicado por:

$$P_n = n! \tag{2.49}$$

Combinação.

Seja *E* um conjunto com *n* elementos de *E, p* a *p*, todo subconjunto de *E* com *p* elementos GIOVANNI; BONJORNO; JUNIOR (2002).

Indica-se por:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}. \tag{2.50}$$

Lê-se $C_{n,p}$ o número de combinações de *n* objetos tomados *p* a *p*.

2.1.7.2 Problema do Caixeiro Viajante para um Grafo não orientado

Para um Grafo **não orientado** utilizaremos o seguinte contexto:

O Problema do Caixeiro Viajante consiste na determinação da rota de menor custo para um vendedor que deseja visitar um conjunto finito de cidades. Para tanto, ele deverá iniciar a viagem em uma cidade qualquer, passar por todas as demais cidades exatamente uma vez, e então retornar para a cidade onde a rota teve início. O problema do caixeiro viajante é o de achar um ciclo hamiltoniano de custo mínimo. Este é possivelmente o problema mais famoso da área de otimização combinatorial. A primeira vista determinar a rota mais econômica para um caixeiro viajante parece ter pouco valor, entretanto, esse modelo é componente central na determinação de soluções de outros problemas de interesse prático.

Exemplo 2.6 *Por exemplo, se tivermos quatro cidades A, B, C e D*

Uma rota seria A – B – C – D – A

Com as seguintes possibilidades

A – B – C – D – A.

A – B – D – C – A.

A – C – B – D – A.

A – C – D – B – A.

A – D – B – C – A.

A – D – C – B – A.

Para acharmos todas as rotas possíveis podemos reduzir o problema de otimização combinatória a um problema de enumeração onde todas as rotas são enumeradas o comprimento de cada uma delas é calculado, então rota de menor custo é determinada. Logo o problema de otimização é reduzido a um problema de enumeração.

Determinar o número de rotas R(n) é simples.

$$n = 4, \quad A, ..., ..., ..., A \rightarrow P3! \tag{2.51}$$

$$\textit{O número de rotas é } 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6. \tag{2.52}$$

Portanto o número de escolhas que poderá ser feita é de:

$$(n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1. \tag{2.53}$$

Ou seja $R(n) = (n-1)!$ *Rotas.*

Trabalho fácil para o computador?

Suponha que se tenha um computador muito veloz capaz de fazer 1 bilhão de operações de adições por segundo. Caso n=20, o computador precisa de 19 adições para dizer qual comprimento de uma rota e então será capaz de calcular:

$10^9/19 = 53$ *milhões de rotas por segundo.*

Contudo, essa velocidade é nada comparada com $19! = 121645100408832000$ *ou aproximadamente* $1,2 \cdot 10^{17}$ *rotas que precisará examinar*

Consequentemente

$$(1,2 \cdot 10^{17})/\textit{(53 milhões)} = 2,3 \cdot 10^9 \textit{segundos = 73 anos}. \tag{2.54}$$

$(n-1)!$ *Cresce com uma velocidade alarmante que muito rapidamente o computador torna-se incapaz de executar.*

2.1.8 Problema do Carteiro Chinês

O problema consiste em determinar um caminho fechado, que atravesse todas as arestas de *G* pelo menos uma vez e com um custo mínimo RABUSKE (1992).

Exemplo 2.7 *Determinar a solução do problema do Carteiro Chinês para o Grafo a seguir.*

- *Passo 1) Determine os vértices de grau ímpar;*
- *Passo 2) Construa a matriz de distância D, com apenas os vértices de grau ímpar; (utilize o algoritmo de Floyd);*

- *Passo 3) Determine, através da matriz D, o par de vértices v_i e v_j que contém o menor caminho;*
- *Passo 4) Construa o caminho artificial de v_i para v_j com o custo encontrado no Passo 3. (Este caminho artificial representa as arestas de menor custo que serão repetidas entre v_i e v_j);*
- *Passo 5) Elimine da matriz D as linhas e colunas correspondentes a v_i e v_j;*
- *Passo 6) Se ainda houver linha então volte ao Passo 3;*
- *Passo 7) Oriente o Grafo;*
- *Passo 8) O custo será igual à soma dos custos de todas as arestas acrescida dos custos das arestas encontradas no Passo 3.*

PROBLEMA 1

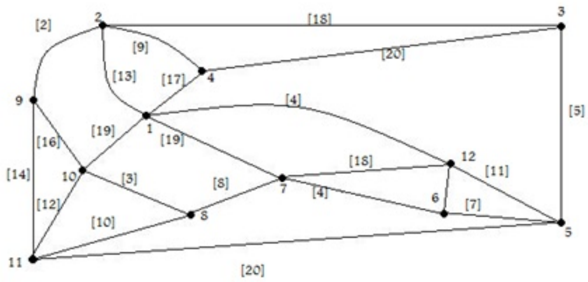


Figura 8: Grafo não Euleriano.
Fonte: RABUSKE (1992).

O Grafo da Figura 8 não é de Euler, logo, algumas arestas deverão ser repetidas. Os vértices de grau ímpar são: V_1= {1,3,4,6,8,9}. Aplicando o algoritmo de Floyd já estudado anteriormente obtemos a matriz de distâncias com os vértices de grau ímpar dado por V_1 é:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \\ 9 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 4 & 6 & 8 & 9 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 19 & 17 & 7 & 19 & 15 \\ 19 & 0 & 20 & 12 & 24 & 20 \\ 17 & 20 & 0 & 24 & 30 & 11 \\ 7 & 12 & 24 & 0 & 12 & 22 \\ 19 & 24 & 30 & 12 & 0 & 19 \\ 15 & 20 & 11 & 22 & 19 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \tag{2.55}$$

Determinando os pares v_i e v_j, em E, de vértices que produzem o menor caminho na matriz D. Temos:
1 com 6 – caminho 1–12–6 custo 7

3 com 8 – caminho 3–5–6–7–8 custo 24
4 com 9 – caminho 4–2–9 custo 11

O resultado, portanto, no custo 7+24+11=42.

Construindo o caminho artificial entre os vértices de grau ímpar, v_i para v_j, com o custo igual ao encontrado na matriz D, obtém-se a Figura 9. As linhas tracejadas, além de estarem representando a construção dos caminhos artificiais, também indicam repetição de aresta paralela.

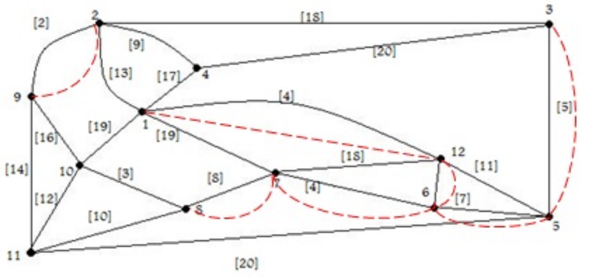


Figura 9: Grafo Euleriano.
Fonte: RABUSKE (1992).

Agora poderá ser usado um algoritmo para orientar o Grafo, e determinar o custo total do caminho, que será dado por 42 acrescido do custo de todas as arestas.

2.2 Trabalhos Relacionados

É apresentado a seguir, uma Tabela 1 comparativa e um breve resumo dos trabalhos relacionados. O objetivo é analisar os autores estudados e comparar de que forma o Conteúdo da Teoria dos Grafos vem sendo abordado pelos autores e se estes utilizam algum tipo de Tecnologia e de que forma a mesma está sendo inserida em sala de aula. Com relação ao Objeto Virtual de Aprendizagem, o propósito é investigar a presença e a forma de utilização desse objeto para ensinar a Teoria dos Grafos na Educação Básica e como essas alternativas de ensino estão sendo relacionadas a Matrizes e Análise Combinatória (conteúdos presentes no Ensino Médio).

2.2.1 Tabela Comparativa dos Trabalhos Relacionados

A importância da Teoria dos Grafos leva alguns autores a um estudo detalhado de atividades que podem ser aplicadas em sala de aula com estudantes da Educação Básica. Além disso, alguns pesquisadores apresentam propostas as quais contemplam o ensino da

Teoria dos Grafos, a Relação Matricial e Análise Combinatória (conteúdos utilizados no Ensino Médio). Parte das atividades propostas foi testada em sala de aula e apresentada por meio de textos. Problemas relatam fatos da história sobre a Teoria dos Grafos e sua aplicação no cotidiano, assim como a resolução de problemas desafiadores que contemplam o estudo desse conteúdo.

Tabela 1: Quadro Comparativo - Trabalhos relacionados

Autores	Teoria dos Grafos	Tecnologia	Objeto Virtual de Aprendizagem	Relação Matricial (conteúdos utilizados no E.M)
MUNIZ (2007)	Sim	Não	Não	Sim
MALTA (2008)	Sim	Não	Não	Sim
FERREIRA (2009)	Sim	Sim	Não	Sim
LEAL (2009)	Sim	Não	Não	Sim
DEGGERONI (2010)	Sim	Não	Não	Sim
GUALANDI (2012)	Sim	Não	Não	Sim
MATOS (2013)	Sim	Não	Não	Sim
SOUZA (2013)	Sim	Não	Não	Sim
MAGALHÃES (2014)	Sim	Não	Não	Sim

Os autores pesquisados em sua maioria não utilizam tecnologia nem Objetos de Aprendizagem para a aplicação das atividades propostas, geralmente utilizam material impresso, alguns propõem a utilização de software e jogos para o ensino de Grafos, porém não aplicam em sala de aula.

MUNIZ (2007) aborda em seu trabalho Ciclos Eulerianos, Problemas do Caminho Mínimo e do caminho Crítico, uma introdução ao conceito de complexibilidade, o Teorema de Festinger e o Problema do Caixeiro Viajante. O autor utiliza conteúdos presentes no Ensino Médio como Matrizes (Matriz de Adjacência) e Análise Combinatória através de problemas contextualizados seguido de uma serie de perguntas, o que permite a exploração e resolução de problemas propostos. Não foi utilizado nenhum tipo de tecnologia, mas foi explicado através de um problema como o algoritmo de Dijkstra deveria ser informado ao computador para que o menor caminho fosse determinado. O autor menciona no texto um software da Microsoft chamado Project que auxilia no planejamento de atividades que envolvam uma sequência de tarefas para a determinação do caminho Crítico o que seria uma alternativa interessante a ser utilizada em trabalhos futuros.

MALTA (2008) apresenta uma proposta de inserção da Teoria dos Grafos no Ensino Médio através da Resolução de Problemas, em suas atividades, a princípio, retoma a história da Teoria dos Grafos, e em seguida trabalha com a representação de Grafos e seus conceitos.

Já FERREIRA (2009) apresenta em seu estudo a possibilidade de se promover uma mudança no currículo da Matemática pré-universitária, embora tenha testado uma nova teoria no âmbito da Educação Básica (a Teoria dos Grafos), através de problemas motivadores a Teoria dos Grafos é apresentada aos alunos, bem como conceitos de Modelagem Matemática, com uso de um projetor de imagem, e o auxilio do programa Power Point.

LEAL (2009), através da apresentação de problemas motivadores, define a modelagem Matemática e com isso introduz conceitos da Teoria dos Grafos. Alguns alunos, segundo ele, tentaram modelar o problema proposto por meio da teoria dos conjuntos, enquanto outros do segundo ano procuraram modelar o problema por Análise Combinatória, além de uma intervenção acerca da teoria das matrizes.

DEGGERONI (2010) retoma a história do surgimento da Teoria dos Grafos na Matemática e propõe atividades organizadas que acompanham a origem histórica do problema, ou seja, modelagem, conceito de Grafo e apresentação do problema das Pontes de Königsberg, além de uma atividade em arruamento com e sem circuito euleriano.

GUALANDI (2012) investiga as abordagens metodológicas que podem contribuir para a introdução do conteúdo de Grafos na educação básica, 3° serie do Ensino Médio, de forma a integrar os conteúdos de matrizes e Análise Combinatória, para isso utiliza listas de atividades as quais compreende problemas envolvendo a Teoria dos Grafos e suas representações.

MATOS (2013) apresenta em seu trabalho algumas aplicações dos conceitos da Teoria dos Grafos, através de exemplos que constam em manuais adotados em escolas do ensino básico como: C. Letra, O Mundo da Carochinha ? Matemática 1ºano, Gailivro, 2010. A autora ressalta em seu trabalho a importância do ensino da Teoria dos Grafos na promoção e aquisição de informação, conhecimento e experiência em compreender conceitos matemáticos e da capacidade de os utilizar na análise, interpretação e resolução de situações em contexto matemático e não matemático.

SOUZA (2013) apresenta propostas para a abordagem de conceitos relacionados à Matemática Discreta no Ensino Médio. São propostos problemas curiosos cuja resolução usa estes conceitos. Além disso, são sugeridos encaminhamentos para o professor na introdução desses problemas nas aulas de Matemática. O autor sugere também o uso de programas de computador nas aulas de Matemática, onde alguns cálculos, por exemplo, podem ser realizados no Microsoft Mathematics. Ainda ressalta que o Microsoft Excel pode ser utilizado para converter o número x na base decimal para a base binária, os problemas apresentados são apenas um estímulo ao uso desse importante recurso: a Resolução de Problemas. Destaca ainda que o trabalho apresenta uma proposta de ensino. Por isso, faz-se necessário, à medida que se desenvolva a aplicação, refletir acerca dos resultados obtidos, permitindo assim a melhora nas conduções sugeridas.

MAGALHÃES (2014) apresenta considerações sobre o trabalho com resolução de problemas, estabelece uma relação entre Grafos e matrizes de adjacência e por fim uma sequência de atividades a ser desenvolvida em sala para a consolidação da proposta. Acredita que uma forma interessante de introduzir o uso dos Grafos é através dos jogos de sequência de ações [1].

A proposta do presente trabalho é a utilização de definições e aplicações práticas sobre o conteúdo da Teoria dos Grafos. A metodologia aplicada na sala de aula para alunos do Ensino Médio utiliza a tecnologia através de um Objeto Virtual de Aprendizagem.

Até o momento, todo o referencial teórico necessário para o trabalho foi estudado, bem como um levantamento sobre trabalhos relacionados ao tema de estudo. As próximas etapas deste trabalho envolvem o desenvolvimento da ferramenta e sua validação. Para tanto, é necessário o estudo de qual tecnologia será utilizada, bem como a forma de validação (questionários, exercícios, etc).

[1] http://rachacuca.com.br/jogos/o-lobo-e-a-ovelha/

3 MATERIAIS E MÉTODOS

O trabalho segue os passos descritos pela Figura 10, na qual apresenta a metodologia desenvolvida com estudantes do Ensino Médio utilizando conceitos da Teoria dos Grafos. As atividades foram estruturadas com o intuito de motivar os alunos, desafiando-os a estabelecer e construir estratégias de resolução, a fim de identificar e definir alguns conceitos da Teoria dos Grafos e por fim associar esses conceitos a Matemática ensinada no Ensino Médio.

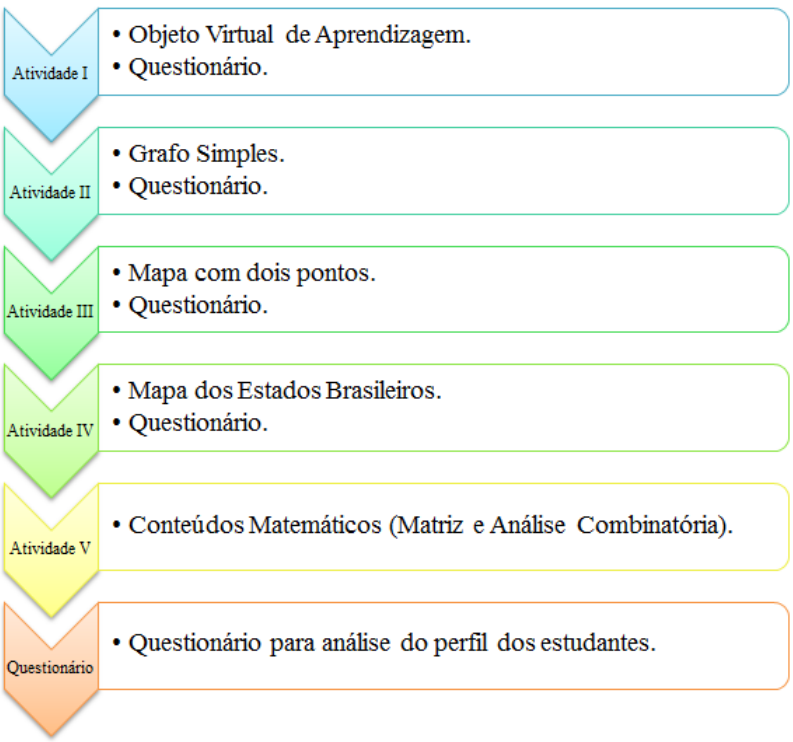


Figura 10: Metodologia Utilizada no Trabalho.
Fonte:Autora.

As atividades foram planejadas de acordo com os objetivos os quais se pretende alcançar. Uma vez que, aguçar a curiosidade e proporcionar ao estudante momentos de reflexão, pode contribuir de forma positiva para um aprendizado de melhor qualidade. Descrever, explicar e justificar suas respostas, bem como buscar resultados e conclusões facilita ao estudante o entendimento de novos conceitos e o aprofundamento dos mesmos.

Para a Atividade I, foi desenvolvido um objeto de aprendizagem na linguagem java (código do OVA disponível no Anexo V), que simula o algoritmo de Dijkstra explicado na seção 2.1. As demais atividades foram construídas a partir do OVA desenvolvido, criadas em formulários utilizando a ferramenta docs.google.com/forms, os quais constam nos Anexos I, II, III e IV. A seguir todas as atividades são explicadas detalhadamente.

3.0.1 Atividade I

A utilização de um Objeto Virtual de Aprendizagem na educação pode beneficiar o processo de ensino-aprendizagem e auxiliar, de forma simples, o entendimento de alguns conceitos sobre a Teoria dos Grafos. Desta forma, o objetivo desta atividade é fazer com que o aluno, por tentativa e erro, descubra qual é o menor caminho entre os pontos P e Q.

Após apresentar o Objeto Virtual de Aprendizagem[1] Figura 11 será feita a seguinte pergunta aos estudantes:

Qual é o menor custo que podemos obter saindo do ponto P e chegando ao ponto Q?

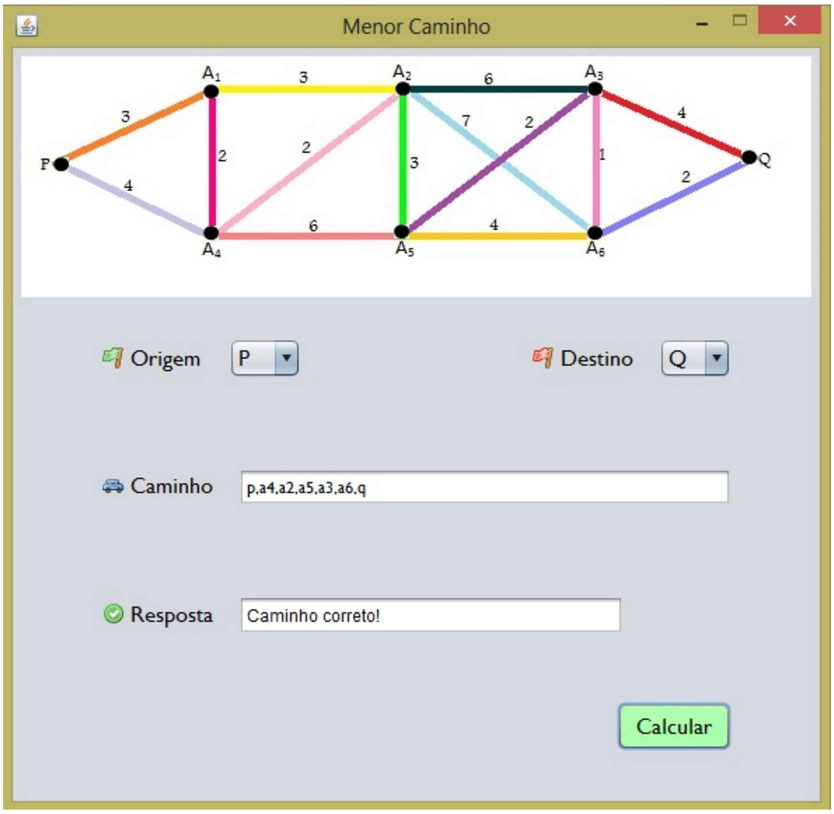


Figura 11: Objeto Virtual de Aprendizagem.
Fonte: Autora.

[1]O OVA foi desenvolvido com o auxílio do aluno de Graduação em Engenharia de Computação Carlos Alberto S. do Nascimento da Silva Longo

Observação 3.1 *Leva-se em consideração que os segmentos, com o mesmo tamanho, apresentados acima podem possuir valores diferentes, uma vez que não representam a mesma distância e sim o custo ou tempo gasto para chegar até o destino.*

3.0.2 Atividade II

Na Atividade I, os estudantes precisavam calcular a distância entre os pontos P e Q. Nessa Atividade, busca-se desafiar o estudante e estimular seu raciocínio, pensar e identificar possíveis associações do Grafo presente na Figura 12 com algo relacionado ao seu cotidiano. Diante disso, o objetivo é apresentar somente a figura de um Grafo e com isso observar se os alunos conseguem relacionar problemas do dia a dia com essa estrutura desenhada por meio de pontos e linhas. É importante salientar que os conceitos da Teoria dos Grafos não foram abordados nessa atividade.

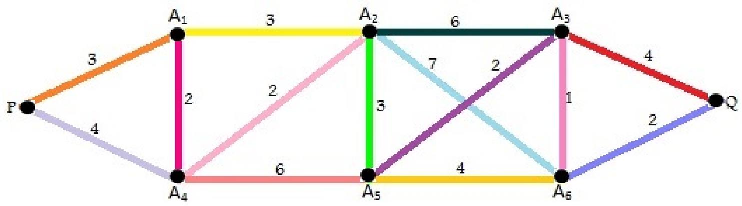


Figura 12: Grafo Simples.
Fonte: Autora.

Observação 3.2 *O questionário aplicado referente a essa atividade encontra-se no anexo I.*

3.0.3 Atividade III

As Atividades I e II propostas anteriormente foram associadas ao mapa da Figura 13 buscando identificar relações existentes entre Grafos e exemplos práticos da vida real. Em virtude disto, a atividade proposta foi desenvolvida com o objetivo de que os alunos observassem o mapa e identificassem a relação existente entre esta atividade e o Grafo apresentado nas atividades I e II.

Figura 13: Mapa com dois Pontos.
Fonte: Autora.

Observação 3.3 *O questionário aplicado referente a essa atividade encontra-se no anexo II.*

3.0.4 Atividade IV

As atividades desenvolvidas anteriormente para o ensino da Teoria dos Grafos através do uso de tecnologias e problemas relacionados ao cotidiano desperta o interesse do estudante. Considerar, o que ele entende, convive e vivencia de forma a poder argumentar e questionar a partir de seus conhecimentos prévios, contribui de forma significativa para a construção de novos saberes. Portanto, a Atividade IV tem como objetivo apresentar a Teoria dos Grafos e explicar (reforçar) a relação existente entre um Grafo (Atividade I) com um problema do cotidiano (atividade III). Abordar outros conceitos da Teoria dos Grafos como vértices, arestas, pesos, grafo orientado e não orientado é também importante. Observar se os estudantes percebem que é possível determinar através do grafo na Figura 14 o menor ou a maior custo entre os estados e a possibilidade de calcular (manualmente e através de algoritmos: Floyd e Dijkstra) esses custos.

Trazer a questão do quanto à informática está intimamente ligada à Matemática também é interessante. O aluno percebe que se o problema for de grande porte (muitos pontos e linhas) existe a necessidade de um computador que tenha um aplicativo que suporte algoritmos para determinar essas distâncias. Além disso, também é possível integrar as disciplinas de Matemática e Geografia, dando ao trabalho um caráter interdisciplinar.

Conceitos de Matemática estudados no 2° Ano do Ensino Médio utilizando a Teoria de Grafos (matrizes e Análise Combinatória) também podem ser introduzidos.

Observação 3.4 *Questionário disponível em anexo III.*

A Figura 14 mostra o mapa dos Estados Brasileiros. Para discutir alguns conceitos que serão apresentados na resolução deste problema, assim como outros que virão, são consideradas as seguintes cidades: Rio Grande do Sul, Mato Grosso do Sul, Minas Gerais, Mato Grosso, Bahia, Pará, Maranhão e Amapá.

Figura 14: Mapa dos Estados Brasileiros com Grafo.
Fonte: Autora.

Através da Figura 15, é possível trabalhar com conteúdos associados e Matrizes e Análise Combinatória.

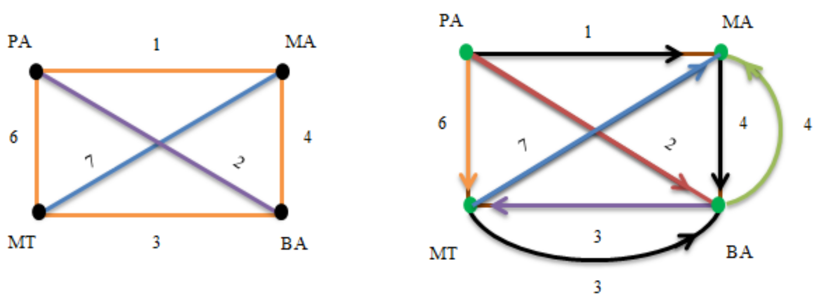


Figura 15: Grafo associado ao mapa dos Estados Brasileiros.
Fonte: Autora.

3.0.5 Atividade V

Após a Atividade IV, mais especificamente após apresentar a Figura 14, apresentou-se a Teoria dos Grafos relacionando-a as atividades propostas anteriomente. Para isso explicou-se aos estudantes o que é um Grafo, e alguns conceitos como: vértices, arestas, pesos, Grafo orientado e não orientado. Esse conceitos foram trabalhados através de uma parte do mapa dos Estados brasileiros (Figura 15).

A seguir, os detalhes de como os conteúdos de Análise Combinatória e Matrizes foram relacionados a Teoria dos Grafos:

Através do Grafo não orientado (Figura 16) mostrou-se a aplicação do conteúdo de Análise Combinatória em Grafos.

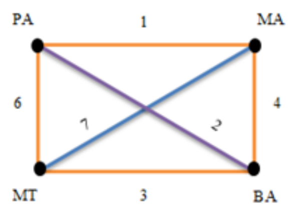


Figura 16: Grafo não Orientado.
Fonte: Autora.

O Grafo na Figura 16 foi utilizado para relembrar o conteúdo de Análise Combinatória.

Exemplo apresentado aos estudantes:

Utilizou-se a Figura 16 parte do mapa dos Estados brasileiros (MA – PA – MT – BA), para determinar as rotas entre os Estados.

Abordando o Problema do Caixeiro Viajante neste contexto tem-se o seguinte desafio:

Sair de MA e passar por todos os demais estados exatamente uma vez, e então retornar ao Estado incial MA.

Para determinar o número de rotas possíveis com n=4 deve-se fazer:

$R(n) = (n-1)!$ rotas.

Então:

$R(4) = (4-1)!$, ou seja;

$$\text{O número de rotas é } 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6. \tag{3.1}$$

Uma rota seria: MA – PA – MT – BA

Com as seguintes possibilidades

MA – PA – MT – BA – MA.

MA – PA – BA – MT – MA.

MA – MT – PA – BA – MA.
MA – MT – BA – PA – MA.
MA – BA – PA – MT – MA.
MA – BA – MT – PA – MA.

Utilizando ainda a Figura 16 trabalhou-se com os estudantes uma relação entre combinação e o número de arestas no Grafo.

A Equação 3.2 apresenta o número de combinações de *4* elementos tomados *2* a *2*.

$$C_{4,2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6. \tag{3.2}$$

Ou seja, o Grafo da Figura 16 possui 6 arestas são elas: AB, AC, AD, BC, BD e CD.

Matrizes

O conteúdo de Matrizes foi abordado através da Figura 17 utilizando a Matriz de Adjacência já mencionada no Capítulo Dois deste trabalho.

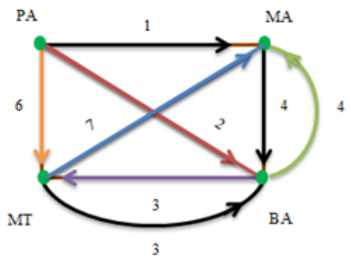


Figura 17: Grafo Orientado.
Fonte: Autora.

A Figura 17, foi utilizada para mostrar aos estudantes a aplicação do conteúdo de Matrizes em Grafos. A Matriz de Adjacência *A* na Figura 17 determina o número de passeios em um Grafo, que podem ser obtidos a partir do cálculo das Matrizes *A,* A^2, A^3...A^k.

As potências *A,* A^2, A^3...A^k, da Matriz de Adjacência denota o número de passeios de comprimento *k* começando no vértice *i* e terminando no vértice *j* para a Matriz A^k.

Para explicar a multiplicação de Matrizes aplicada em Grafos, utilizou-se os cálculos feito no Exemplo 2.1 tendo em vista que o objetivo não era explicar a multiplicação de Matrizes mas sim uma aplicação da mesma em situações reais, ou seja, em que o aluno utilizaria a multiplicação de Matrizes em seu cotidiano.

Os algoritmos de Dijkstra e Floyd também foram abordados. Mostrando aos alunos que se os problemas forem de grande porte necessitam de algoritmos para fazer os cálculos, e assim determinar o menor custo entre, por exemplo: os Estados, capitais, cidades e bairros que podem ser trabalhdos através do mapa apresentado nas atividades.

É importante ressaltar a possibilidade de associar a Teoria dos Grafos a vários outros exemplos do cotidiano, como: construção de tabelas, cardápio, distribuição de rotas comerciais, caminho percorrido pelos carteiros na distribuição de correspondências, coleta de lixo, construção de circuitos lógicos para computadores, Coloração de Mapas, distribuição dos serviços sociais em uma determinada região entre outros.

3.0.6 Questionário para análise do perfil dos estudantes

Para essa pesquisa foi aplicado, em escolas distintas, um questionário para conhecer o perfil de estudantes de duas turmas do 3° ano do Ensino Médio.

O questionário era composto por 10 questões fechadas e de escolha simples. Analisar a faixa etária de idade dos estudantes e se os mesmos possuem acesso ao uso de tecnologia se faz necessário para a viabilidade dessa proposta.

Observação 3.5 *O questionário encontra-se disponível em anexo IV.*

4 TESTES E RESULTADOS OBTIDOS

As atividades foram planejadas com o intuito de verificar a viabilidade de inserção do conteúdo da Teoria dos Grafos no Ensino Médio. Através destas atividades trabalhar alguns conceitos, buscando estabelecer uma relação entre as atividades e os resultados obtidos.

As atividades foram realizados, em duas escolas públicas da cidade de Rio Grande, com alunos do 3° ano do Ensino Médio. A escolha da turma de 3° ano ocorreu devido ao fato de que os estudantes já haviam estudado matrizes e Análise Combinatória.

4.1 Testes realizados na Escola Silva Paes

Este trabalho foi desenvolvido com 24 alunos, do 3º ano do Ensino Médio na Escola Estadual Silva Paes, localizado no município Rio Grande, Estado do Rio Grande do Sul. Sendo aplicada em dois períodos, no dia 23 de março de 2016, na disciplina de Matemática.

São analisadas 12 respostas, visto que o laboratório de informática conta apenas com 12 computadores.

4.1.1 Atividade I - Questionário para análise do perfil dos estudantes

Pergunta 7: Como você avalia o uso do Objeto Virtual de Aprendizagem trabalhado para o entendimento do conteúdo abordado?

A Figura 18 mostra que 71% dos alunos aprovam o uso de Objeto Virtual de Aprendizagem para o ensino da Teoria dos Grafos, ou seja, os estudantes aprovam a utilização de novas metodologias de ensino, as quais os desafiem a pensar, discutir e chegar ao resultado. Neste tipo de atividade, nem sempre o aluno chega ao melhor resultado, mas participa, conhece algo novo, gerando conhecimento.

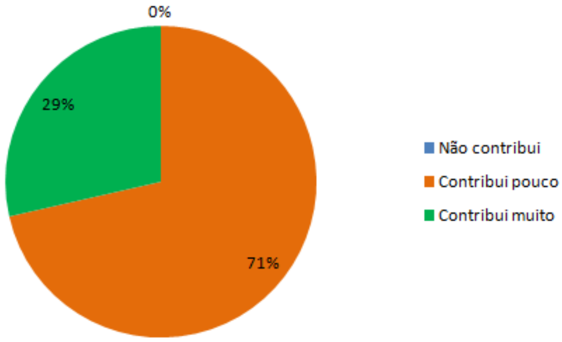


Figura 18: Avaliação do Objeto Virtual de Aprendizagem.
Fonte: Autora.

4.1.2 Atividade II - Questionário

Pergunta 1: Que raciocínio você utilizou para resolver essa questão?

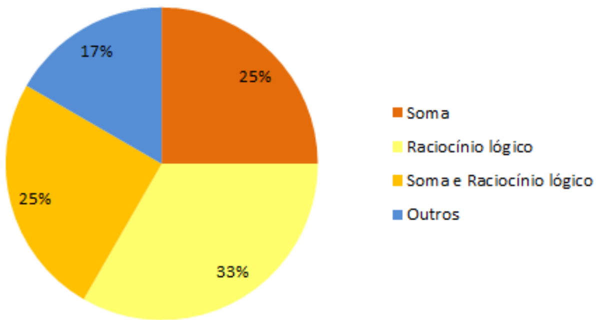


Figura 19: Estratégia de resolução dos alunos da E.E.E.M Silva Paes.
Fonte: Autora.

A maioria dos alunos utilizou o raciocínio lógico para resolver a questão proposta, evidenciado no fragmento a seguir: "Nós procurados usar o menor valor possível de números, na tentativa de obter pequenos valores independente do caminho utilizado". Já, 25 % dos estudantes encontrou a resposta correta através apenas da soma dos pesos das arestas, obtendo o menor custo sem realizar nenhum outro tipo de inferência lógica. Com isso, conclui-se que de forma empírica os estudantes utilizaram o algoritmo de Dijkstra para chegar a solução do problema proposto, que era sair do ponto P e chegar ao ponto Q, com menor custo. [1] Todas as respostas são apresentadas na Tabela 2.

[1]Para a classificação das respostas neste trabalho entende-se, raciocínio lógico como respostas onde houve o uso de inferência lógica. (Ex:"Raciocínio do menor caminho. E soma. E vértices"). Relacionado a classificação soma entende-se que as respostas envolviam apenas o uso de soma sem outras inferências. (Ex: "A soma").

Tabela 2: Respostas (pergunta 1) - Atividade II

Soma.
Nós procurados usar o menor valor possível de números, na tentativa de obter pequenos valores independente do caminho utilizado.
A soma.
Utilizamos a soma e a lógica dos pontos.
Soma.
Raciocínio lógico, somamos os pontos até obter o menor resultado.
Eu tentei de diversas formas, até chegar em um resultado, o certo.
Utilizamos o raciocínio dos pontinhos para calcular.
Tentamos achar o menor caminho e não encontramos a melhor solução.
Raciocínio do menor caminho. E soma. E vértices.
Chegamos a um consenso comum para podermos concluir a atividade.
Pelos números menores.

Fonte: Autora

Pergunta 2: Você acha que pode-se relacionar o “desenho”da figura acima com algo do nosso cotidiano? Se sua resposta for sim, com o que é possível relacionar?

Tabela 3: Respostas (pergunta 2) - Atividade II

Não.
Não.
Sim, com rotas para chegar a algum lugar.
Sim, pois pode ser comparado aos gastos que realizamos durante o mês, como compras, pagamentos, ou até mesmo empréstimos.
sim, pode se relacionar com um barco.
Não relacionamos a nenhuma imagem do cotidiano.
Sim, em vários momentos do nosso cotidiano escolhemos o menor caminho, um exemplo é a viagem.
Sim, com o percurso de uma viagem de carro, onde escolhemos o caminho mais curto para chegar no lugar desejado.
Planejamento financeiro.
Sim. Exemplo do campo de futebol em que se fazendo a volta completa no campo você leva mais tempo, só que indo pelo meio você economiza.
Sim, podemos relacionar a uma casa pois se levantarmos as extremidades da figura, podemos obter uma casa.
Não.

Fonte: Autora

A Tabela 3 apresenta todas as respostas correspondentes a Pergunta 2. Pode-se verificar que maioria dos alunos conseguiu relacionar o desenho com algo do seu cotidiano, como percurso de uma viagem de carro, gastos mensais (compras, pagamentos e empréstimos), campo de futebol, construção de casas e barcos.

Pergunta 3: Discuta com o grupo todas as possíveis soluções e registre as conclusões.

Os estudantes, ao discutiram a atividade com os colegas, chegaram a conclusão de que podiam resolver a questão através da soma, ou seja, somando os caminhos para obter a melhor solução. Isso fica evidente no excerto a seguir: “Nós somamos os pontos, por vários caminhos até obter o menor resultado, e escolhemos um dos caminhos até porque existem vários percursos que permitem chegar ao mesmo resultado”. Todas as respostas são apresentadas na Tabela 4.

Tabela 4: Respostas (pergunta 3) - Atividade II

P; A4; A2; A5; A3; A6; Q — P; A1; A2; A5; A3; A6; Q.
Primeiramente buscamos nos orientar com base nos determinados caminhos, em seguida calculamos o valor máximo obtido ao final de cada caminho escolhido.
concluímos que somando os números menores achamos o menor caminho.
Procuramos verificar o menor caminho.
3, 3, 3, 2, 1, 2.
Nós somamos os pontos, por vários caminhos até obter o menor resultado, e escolhemos um dos caminhos até porque existem vários percursos que permitem chegar ao mesmo resultado.
Foram muitas tentativas até chegar na certa, em torno de 7 tentativas.
Tentamos fazer 2 vezes, na primeira o resultado foi 12 e na segunda vez encontramos o resultado 14.
Há varias formas de chegar no final.
Entramos em um consenso.
Sim, podemos relacionar a uma casa pois se levantarmos as extremidades da figura,podemos obter uma casa.
Soma dos números.

Fonte: Autora

4.1.3 Atividade III - Questionário

Pergunta 1: Existe alguma relação entre a Atividade I (Objeto Virtual de Aprendizagem) e o mapa com dois pontos? Qual?

Os estudantes fazem a relação da Atividade I e o mapa através das “distâncias”, conseguem relacionar as arestas do Grafo a estradas no mapa, também relacionam os pontos de partida e de chegada, sempre buscando o menor caminho, saindo de um ponto e chegando em outro, como apresenta a Tabela 5, todas as respostas para essa questão.

Tabela 5: Respostas (pergunta 1) - Atividade III

As cores e pontos.
Sim, pois no mapa existe 2 pontos o inicial e o final.
As cores e os pontos.
Sim. Existem diversos caminhos para chegar mais rápido no lugar desejado, há um percurso entre os dois pontos.
Sim, a questão de distância, pois determinadas estradas não garantem o caminho mais curto.
Sim, para chegarmos até o destino final teremos que escolher algum caminho, procurando obter o de menor percurso e mais prático.
Os pontos de partida e chegada e as cores.
Podemos calcular diversas rotas assim como a atividade 1.
Sim. Pois no mapa também temos que achar um menor percurso, para chegar no lugar desejado.
Sim porque existe um ponto inicial e um ponto de chegada.
Existe, pois possuímos dois pontos distintos dentro do mapa do nosso pais , um na região sul e outro na região norte.
Sim. Pois existe dois pontos, a de partida e chegada.

Fonte: Autora

4.1.4 Atividade IV - Questionário

Pergunta 1: Que conclusões podem ser feitas quando comparada a Atividade I com a atividade que envolve o mapa dos Estados brasileiros?

Observando as respostas dos alunos na Tabela 6, onde cada linha do quadro corresponde a resposta de um estudante, percebe-se que conseguiram relacionar a Atividade I ao mapa com os estados brasileiros. Os estudantes identificaram que os pontos RS e AP podem ser interpretados como P e Q, respectivamente,(Atividade I). Porém, alguns não expressaram claramente essa idéia. Como relatou o estudante: "Podemos concluir que podemos concluir que AP é o ponto de partida e Rs é o Q". Alguns estudantes afirmam que a Atividade I e o mapa são iguais, possuem um ponto de partida e um ponto de chegada, o que é coerente pelo exemplo proposto. Em duas das respostas obtidas, os estudantes fazem relação com a distância entre os pontos RS e AP. Porém, vale ressaltar que os valores atribuídos as arestas no Grafo não correspondem a valores reais, e que neste exemplo trabalhar com custo ou tempo gasto para chegar no destino desejado.

Tabela 6: Respostas (pergunta 1) - Atividade IV

Podemos concluir que podemos concluir que AP é o ponto de partida e Rs é o Q.
Concluímos que o menor caminho ap é o mesmo da atividade 1.
Mostra a distancia de estado uma cidade até o outro.
Que o objetivo das duas atividades é o mesmo, tendo que descobrir o menor percurso até o destino final.
Concluímos que o menor caminho pra chegar ao ponto AP é o mesmo da atividade 1.
A conclusão é que a atividade 1 e o mapa são iguais. Achando o caminha mais curto.
Relatamos que é igual, pois procuramos o caminho mais curto para chegar.
Que a atividade 1 era para achar o menor caminho de AP até RS.
Que os dois são iguais.
Observamos que a geometria plana utilizada anteriormente na atividade um pode se encaixar no mapa do Brasil da atividade dois, pois podemos claramente utilizar a geometria plana para descobrirmos a rota mais vantajosa.
Que os dois exercícios são iguais pois tem um ponto de partida e um ponto de chegada.
Podemos concluir que na primeira atividade, os caminhos podem ser facilmente comparados a distancias de estradas em unidades de distancias.

Fonte: Autora

Pergunta 2: É possível relacionar a figura abaixo (uma parte do mapa dos Estados Brasileiros) com algum conteúdo de Matemática que é ensinado no 2° ano do Ensino Médio? Qual?

A Tabela 7 apresenta as respostas dos estudantes correspondente a pergunta 2.

Tabela 7: Respostas (pergunta 2) - Atividade IV

Sim, somando os números.
Da para relacionar com a atividade da área dos poligonos.
Pitagoras.
Sim. É possível relacionar com a geometria, figuras planas.
Sim, há uma relação com a área dos polígonos.
Sim. Com o conteúdo da área, calculando seus lados.
Sim, a matéria do perímetro , área, base..
Sim. Geometria Plana.
Sim, PA.
Sim, podemos relacionar esta atividade com a geometria plana.
Sim, geometria.
É possível ser relacionado com a matéria "Figuras Trigonométricas"onde se é trabalhado com catetos e hipotenusas.

Fonte: Autora

Todos os alunos conseguiram relacionar a figura que contém uma parte dos Estados Brasileiros a conteúdos do Ensino Médio. Alguns associaram a soma, área de polígonos, figuras trigonométricas e PA. Um dos estudantes respondeu: "É possível relacionar com a geometria, figuras planas"; outro estudante disse que podia relacionar com: "a matéria do perímetro , área, base..". Vale salientar que nenhum estudante relacionou a figura ao conteúdo de matrizes e Análise Combinatória, conteúdos estes que foram discutidos posteriormente na metodologia adotada nesse trabalho.

4.1.5 Questionário para análise do perfil dos estudantes

Pergunta 2: Utiliza computador? Com que frequência?

A fim de conhecer melhor o perfil dos estudantes, optou-se por utilizar um questionário para analisar algumas questões ligadas ao dia-a-dia do estudante e ainda o que achou das atividades propostas. Como mostra a Figura 20, 43% dos alunos pesquizados utilizam computador todos os dias.

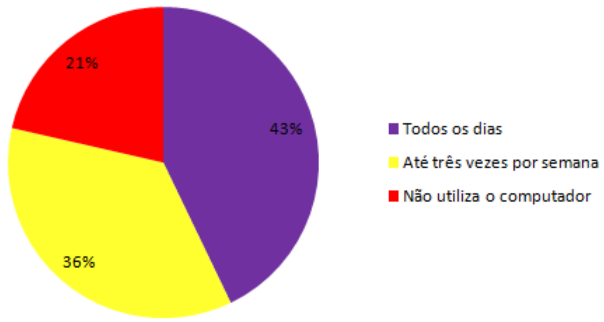


Figura 20: Frequência com que os alunos utilizam o computador.
Fonte: Autora.

Pergunta 3: Caso utilize, para quê utiliza?

Os estudantes relataram que em sua maioria utilizam o computador para estudar, jogar e acessar as redes sociais.

Pergunta 5: Como você avalia a experiência de utilizar o Laboratório de informática na aula de Matemática?

A Figura 21 mostra que 64% dos estudantes gostaram muito de utilizar o laboratório de informática nas aulas de Matemática.

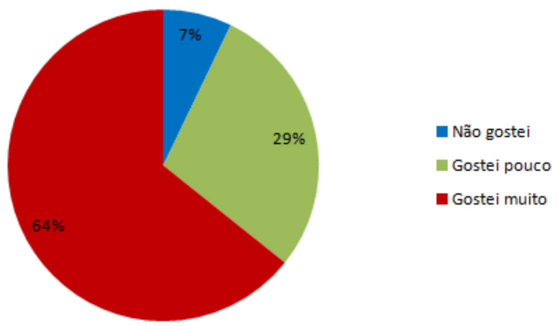


Figura 21: Experiência no laboratório de informática.
Fonte: Autora.

Contribuir e desenvolver estratégias que possibilite ao aluno a compreensão de novos conceitos é importante, a interação do estudante com o laboratório de informatica contribuiu positivamente, nesse caso.

Pergunta 6: Dentre as atividades desenvolvidas, qual chamou mais a sua atenção?

A maioria dos estudantes relataram que a Atividade I (OVA) chamou mais atenção devido ao desafio de utilizar estratégias para a resolução do problema, como pode-se observar no trecho a seguir: "O que me chamou a atenção foi a primeira atividade pois teve um desafio psicológico". Outro estudante relatou: "A primeira atividade, que requisitou a nossa lógica e raciocínio". Isso reforça a importância da utilização de Objetos Virtuais de Aprendizagem no Ensino pois, os alunos se sentem motivados diante dos desafios e isso de certa forma prende a atenção do estudante o que torna a aprendizagem mais prazerosa. Como mostra a Tabela 8.

Tabela 8: Respostas (pergunta 6) - Questionário para análise do perfil dos estudantes

A primeira.
A primeira.
Atividade 1.
Me chamou a atenção a atividade do mapa, onde eu conseguia identificar os mesmos pontos que na primeira atividade.
A experiência efetuada no desenvolvimento de uma possível resolução para o problema proposto.
A primeira atividade, que requisitou a nossa lógica e raciocínio.
A primeira atividade.
Atividade 1 que nos obriga a ter um raciocínio.
A atividade com o "Menor Caminho".
Me chamou a atenção a atividade do mapa, onde eu conseguia identificar os mesmos pontos que na primeira atividade.
Atividade 2.
A do mapa.

Fonte: Autora

Pergunta 8: Você acha importante estudar Grafos no Ensino Médio? Justifique sua resposta.

Para 92% dos estudantes é importante estudar Grafos no Ensino Médio, pois podem auxiliar de alguma forma seja no seu dia-a-dia ou na preparação para provas e concursos, um aluno respondeu: "Nas plantas de casas, prédios, edifícios e demais projetos planejados por meio de uma planta". Outro estudante: "Sim, porque é uma preparação para qualquer tipo de prova que talvez tenhamos que fazer no futuro em algum concurso ou coisas assim", como mostra a Tabela 9.

Tabela 9: Respostas (pergunta 8) - Questionário para análise do perfil dos estudantes

Sim, pois pode ser usado no ensino superior.
Sim, nos auxilia no Enem pois pode cair gráfico em qualquer parte da prova.
Sim, porque é uma preparação para qualquer tipo de prova que talvez tenhamos que fazer no futuro em algum concurso ou coisas assim.
Sim pois pode ser utilizado em muitas atividades.
Sim , pois ajuda a criar tabelas e rotas possíveis.
Sim, pois nos ajuda nos cursos e concursos.
Não, pois não acho que vou usar os Grafos no momento.
Sim, eu acho muito importante, pois podemos utilizarmos em situações do nosso cotidiano.
Sim, pois ajuda muito na base do conhecimento abordado e envolve várias áreas da Matemática.
Sim, pois em várias áreas do conhecimento humano podemos utilizar os Grafos, por exemplo: Nas plantas de casas, prédios, edifícios e demais projetos planejados por meio de uma planta.
Sim, pois os Grafos podem ser utilizados em determinadas situações do dia a dia, como percursos de frotas, correios, entregas.
Pode ajudar, no futuro pode se mostrar util.

Fonte: Autora

Através das respostas fornecidas pelos alunos, se pode afirmar que a maioria dos estudantes percebem a relação que é possível fazer entre Grafos e o cotidiano, pois citam exemplos que estão presentes no seu dia-a-dia.

Pergunta 9: Em qual situação prática de sua vida (diferente da apresentada na aula), você acha que poderia utilizar Grafos?

Tabela 10: Respostas (pergunta 9) - Questionário para análise do perfil dos estudantes

No cotidiano, ajudar a montar uma estratégia para uma atividade ou objetivo.
Nao sei.
Planejamento financeiro.
Para fazer plantas de casas e etc.
Rotas.
Poderia usar nos mapas para achar um jeito mais fácil de chegar em algum lugar.
Não.
No encanamento da casa, na construção de casas entre outros.
viagem.
Caso a gente cursasse alguma das áreas das exatas,poderiamos claramente nos utilizarmos de Grafos para o trabalho.
Em atividades que requerem um caminho planejado, como percursos de caminhadas.
Não sei.

Fonte: Autora

Alguns estudantes conseguiram associar a Teoria dos Grafos a uma situação prática diferente da apresentada, como: viagens, caminhadas, encanamento e construção de casas. Pode-se perceber que os alunos conseguiram associar a Teoria dos Grafos a diversas situações. Todas as respostas obtidas estão disponíveis na Tabela 10.

Pergunta 10: O que você sonha como profissão no futuro?

Ao perguntar aos estudantes o que eles sonham como profissão as respostas foram bem variadas, alguns deles querem cursar Fisioterapia, Psicologia, Engenharia, Medicina e Direito.

Três alunos responderam que querem fazer Educação Física e um estudante pretende ser Biólogo. E essa observação foi feita para que se tenha uma ideia de qual área os alunos se identificam mais, e com isso conclui-se que apenas 25% a 33% dos estudantes participantes da pesquisa querem ser professores.

4.1.6 Considerações sobre as atividades realizadas na Escola Silva Paes

Considera-se que os resultados obtidos foram satisfatórios. Os passos para a realização das atividades foram cumpridos, alcançando os objetivos gerais desse trabalho que é de inserir o conteúdo da Teoria dos Grafos no Ensino Médio. Através das respostas obtidas, pode-se concluir que é possível articular a Matemática e a Teoria dos Grafos a problemas do cotidiano. Proporcionar ao estudante novos métodos de ensino e novos conteúdos que podem facilmente ser inseridos no seu dia-a-dia pode contribuir muito para uma aprendizagem mais interessante do ponto de vista do estudante.

4.2 Testes realizados na Escola Lilia Neves

Este trabalho foi desenvolvido com 10 alunos, do 3º ano do Ensino Médio na Escola Estadual Lilia Neves, localizado no município Rio Grande, Estado do Rio Grande do Sul. Sendo aplicada em dois períodos, no dia 29 de março de 2016, na disciplina de Matemática.

São analisadas 10 respostas, visto que o número de estudantes presentes no dia foi reduzido. O laboratório de informática contava apenas com 1 máquina e dois notebooks (três maquinas), pois os demais computadores não tinham acesso a internet para instalar o OVA. Assim, optou-se por analisar as 10 respostas devido ao fato de que não havia computadores suficientes, ou seja, no minímo 5 para que as atividades fossem realizadas em duplas. Diante disso, as Atividades II, III, IV e o Questionário para a análise do perfil dos estudantes foram apresentadas utilizando um retro-projetor, e respondidas em papel, para posterior estudo dos resultados.

4.2.1 Atividade I - - Questionário para análise do perfil dos estudantes

Pergunta 7: Como você avalia o uso do Objeto Virtual de Aprendizagem trabalhado para o entendimento do conteúdo abordado?

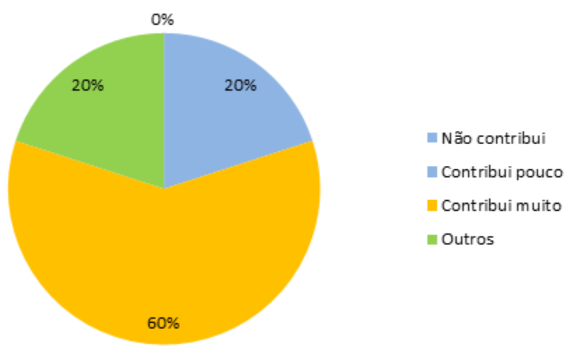


Figura 22: Avaliação do Objeto Virtual de Aprendizagem.
Fonte: Autora.

Segundo 60% dos estudantes, o Objeto Virtual de Aprendizagem contribui muito para o entendimento de Grafos, 20% relatam que esse tipo de atividade contribui, mas não especificaram quanto ela contribui se pouco ou muito. Observando as respostas pode-se concluir que, em geral, os estudantes aprovam o uso de atividades diferenciadas em sala de aula.

4.2.2 Atividade II - Questionário

Pergunta 1: Que raciocínio você utilizou para resolver essa questão?

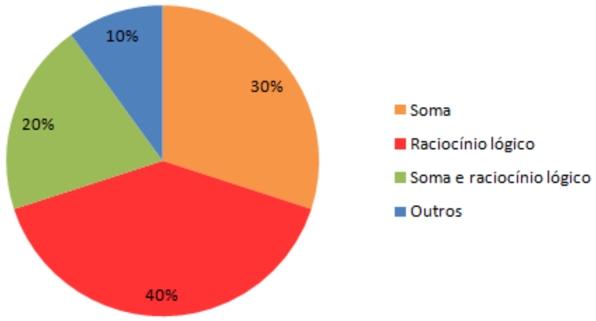


Figura 23: Estratégia de resolução dos alunos da E.E.E.M Lilia Neves.
Fonte: Autora.

Nesse caso pode-se dizer que 40% dos alunos resolveram a Atividade utilizando o raciocínio lógico, como relatou o estudante: "Procurei seguir pelos menores números". Para 30% dos estudantes a soma foi a estratégia de resolução utilizada. A resposta dada por 10 % dos estudantes a qual atribui-se na figura como sendo da classe outros, ocorreu devido ao fato do alunos responder a questão atravéz de um desenho dos pontos, ou seja, não pode-se afirmar que método o estudante utilizou para resolver o problema. As respostas são apresentadas na Tabela 11.

Tabela 11: Respostas (pergunta 1) - Atividade II

Apartir da soma dos valores dados pela atividade achei este caminho; P–A1–A2–A5–A3–A6–Q.
Fiz as somas.
Nas duas imagens podemos calcular qual o caminho mais próximo.
P–A1–A3–A4–A5–A6–Q, esse caminho, se somarmos os números, dá o melhor valor.
Procurei seguir pelos menores números.
Utilizando os menores caminhos.
Observando os menores números para ligar os traços.
Eu vi os menosres números.
Eu utilizei o método de somar os menores números.
Eu usei o método da soma dos menores números.

Fonte: Autora

Pergunta 2: Você acha que pode-se relacionar o “desenho”da figura acima com algo do nosso cotidiano? Se sua resposta for sim, com o que é possível relacionar?

Tabela 12: Respostas (pergunta 2) - Atividade II

Comparado ao trajeto de um carro numa cidade.
Sim, pois se ralciona com o caminho que fizemos no dia-a-dia.
Sim, com uma estrada quando buscamos o caminho mais curto e econômico até chegar em determinado lugar.
Sim. Se relaciona a um caminho feito no dia-a-dia por exemplo a ida e vinda da escola.
Trajeto de uma estrada ou de uma rua.
Sim, podemos relacionar com o caminho mais curto de casa até a escola.
Uma trajetória dentro de uma cidade.
Pode ser relacionado com o trajeto da escola até a minha casa.
Sim. A trajetória até chegar ao local desejado, ou seja, eu saio de um ponto (minha casa, escola,..etc) para chegar a outro.
Sim, pode ser relacionado com o trajeto que uma pessoa pode usar para ir de um determinado lugar a outro.

Fonte: Autora

Todos os estudantes relacionaram a figura com seu cotidiano. Alguns relacionaram o Grafo ao trajeto de casa a escola, ruas de uma determinada cidade e o deslocamento dos carros. A Tabela 12 apresenta as respostas dos alunos.

Pergunta 3: Discuta com o grupo todas as possíveis soluções e registre as conclusões.

Essa pergunta não foi resolvida pelos alunos pois, estes fizeram a atividade individualmente, devido ao fato de estarem presentes do dia apenas 10 estudantes.

4.2.3 Atividade III - Questionário

Pergunta 1: Existe alguma relação entre a atividade I (Objeto Virtual de Aprendizagem) e o mapa com dois pontos? Qual?

Tabela 13: Respostas (pergunta 1) - Atividade III

Sim, se quisermos ir a determinado lugar, também pensaríamos qual seria mais perto, por qual estado passaríamos; os dois pontos podem também ser P e Q, da imagem anterior.
Sim, ambos possuem dois pontos opostos. As cores dos Estados são semelhantes.
Sim, há relação, pois nas duas atividades há pontos de marcação e ainda pode se relacionar com a atividade 2, pois ligar os pontos pode envolver com o trajeto de um ponto a outro.
Sim. os dois pontos no mapa, são como se fosse P e Q na outra imagem.
Sim, os pontos que colocando P e Q ficariam com uma relação maior.
Sim, os dois pontos.
Sim. O caminho a distância entre um estado a outro, os dois pontos.
Sim os dois pontos de partida e de chegada e também se colocarmos o ponto P na parte de baixo do mapa situando a partida e o ponto Q como ponto de chegada, teremos que encontrar o menor caminho.
Sim. Pois tem 2 pontos no mapa, e a trejetória de um lugar ao outro.
Sim, os dois pontos no mapa e os diversos trajetos que levam de um ponto ao outro.

Fonte: Autora

A Tabela 13 que apresenta todos as respostas dos estudantes, permite afirmar que 100% dos alunos identificaram a relação existente entre a Atividade I e o mapa com dois pontos, associaram os pontos P e Q aos pontos do mapa.

4.2.4 Atividade IV - Questionário

Pergunta 1: Que conclusões podem ser feitas quando comparada a atividade I com a atividade que envolve o mapa dos Estados brasileiros?

Nessa pergunta 60% dos estudantes responderam que as conclusões foram análogas a da Atividade III, ou seja encontraram a mesma relação associaram os pontos do Grafo da Atividade I aos pontos no mapa da Atividade IV. O restante da turma associou a trajetórias que podem ser percorridas e ao caminho mais próximo.

Pergunta 2: É possível relacionar a figura abaixo (uma parte do mapa dos estados brasileiros) com algum conteúdo de Matemática que é ensinado no 2° ano do Ensino Médio? Qual?

Os alunos conseguiram relacionar a figura com os alguns conteúdos ensinados no Ensino Médio, entre eles: geometria, teorema de pitágoras, area, perímetro, trigonometria e função. A Tabela 14 apresentas as respostas dos alunos em relação a pergunta 2.

Tabela 14: Respostas (pergunta 2) - Atividade IV

Sim, trigonometria.
trigonometria, teorema de pitágoras, perímetros.
Sim, trigonometria, teorema de pitágoras, perímetros, geometria.
Sim. geometria, trigonometria, teorema de pitágoras, perímetro.
Sim, trigonometria, geometria, área, perímetro.
Sim, trigonometria, teorema de pitágoras, geometria, área, perímetro.
Sim. trigonometria, função, geometria, teorema de pitágoras.
Sim geometria, comprimentos.
Trigonometria, teorema de pitágoras, perímetro, área.
Trigonometria, teorema de pitágoras, perímetros.

Fonte: Autora

Neste caso, os estudantes também não relacionaram a figura a matrizes e Análise Combinatória.

4.2.5 Questionário para análise do perfil dos estudantes

Pergunta 2: Utiliza computador? Com que frequência?

Essas perguntas foram feitas com o intuito de conhecer melhor o estudante quanto ao uso de tecnologias no seu dia-a-dia, e avaliar o interesse dos estudantes pelas atividades apresentadas. Percebe-se que a maioria dos estudantes utilizam o computador até três vezes por semana, como mostra a Figura 25.

Figura 24: Frequência com que os alunos utilizam o computador.
Fonte: Autora.

Pergunta 3: Caso utilize, para quê utiliza?

Os estudantes relataram usar o computador para ver vídeos no YouTube, fazer trabalhos escolares, acessar redes sociais, ouvir música, armazenar arquivos e jogar.

Pergunta 5: Como você avalia a experiência de utilizar o Laboratório de informática na aula de Matemática?

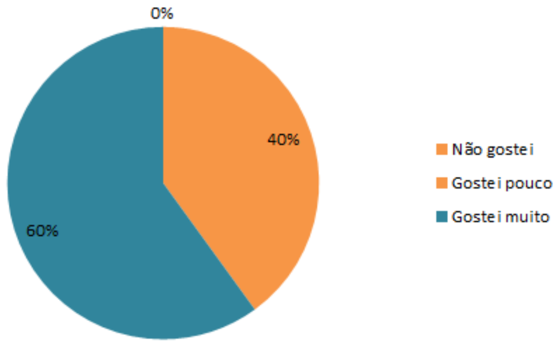


Figura 25: Experiência no laboratório de informática.
Fonte: Autora.

A Figura 25 mostra que utilizar o laboratório de informática pode ser interessante para a maioria dos estudantes. Na E.E.E.M. Lilia Neves, acredita-se que apesar da falta de computadores, a experiência de ter uma aula diferenciada pode ter sido atrativa, e isso pode ser constatado nas próximas perguntas feitas aos estudantes.

Pergunta 6: Dentre as atividades desenvolvidas, qual chamou mais a sua atenção?

Como observado anteriormente (Pergunta 5), apesar da falta de computadores para resolver os problemas propostos, 60% dos estudantes relatou gostar mais das atividades II, III e IV, as quais não foram utilizados computadores, diante disso pode-se concluir que a falta dos computadores não interferiu de forma negativa para a realização dos testes.

Pergunta 8: Você acha importante estudar Grafos no Ensino Médio? Justifique sua resposta.

Tabela 15: Respostas (pergunta 8) - Questionário para análise do perfil dos estudantes

Sim, pois os Grafos estão presentes na nossa vida.
Sim porque os Grafos fazem parte do nosso dia-a-dia.
Sim, pois o Enem pode usar isso, e porque informação nunca é demais.
Sim. Pois explica em teoria o que algumas pessoas já fazem no seu dia-a-dia.
Sim, pois pode nos ajudar no dia-a-dia.
Sim, para entender melhor o conteúdo.
Sim. Porque pode nos ajudar em muita coisa.
Sim pode ajudar em coisas comuns do dia-a-dia.
Sim, pois os Grafos estão presentes na nossa vida.
Sim, para ajudar até mesmo no dia-a-dia.

Fonte: Autora

Todos os estudantes relatam ser importante estudar Grafos, pois esse conteúdo está muito presente no cotidiano. Como evidenciado no fragmento: “Sim, pois explica em teoria o que algumas pessoas já fazem no seu dia-a-dia”. Ao observar as respostas conclui-se que os estudantes conseguiram perceber a relação feita nas atividades, essa relação envolvia Grafos e o mapa dos estados brasileiros, os alunos ampliaram essa relação incluindo-as em outras atividades do seu dia-a-dia. A Tabela 15 apresenta as respostas dos estudantes referente a pergunta 8.

Pergunta 9: Em qual situação prática de sua vida (diferente da apresentada na aula), você acha que poderia utilizar Grafos?

Tabela 16: Respostas (pergunta 9) - Questionário para análise do perfil dos estudantes

Nas pesquisas, estudos, caminhos.
Sugestão de amigos nas redes sociais, circuito de caminho.
Em pesquisas, no Gps.
No encanamento de casa, na relação de amigos do facebook, Gps.
Em alimentos, nas embalagens ou pesquisas, Gps.
Gps.
Se relaciona com, por exemplo, o Gps, que pesquisamos nele qual trajeto é mais curto.
Para o esporte, estratégias de jogo.
Pesquisas Gps, calcular rotas.
Sugesões de amigos nas redes sociais.

Fonte: Autora

Diante das respostas obtidas, verifica-se que os alunos associaram a Teoria dos Grafos a outros exemplos, nas sugestões de amigos nas redes sociais, GPS, encanamento de casa, nas pesquisas, estudos e caminhos, para o esporte e estratégias de jogo. Como mostra a Tabela 16.

Pergunta 10: O que você sonha como profissão no futuro?

Nota-se que 40% dos alunos pesquisados ainda não definiram qual profissão querem seguir, ainda estão em dúvida entre duas ou mais profissões, veterinária é umas das profissões mais citadas pelos estudantes, os demais querem ser médico, psicológo, engenheiro químico e nutricionista.

4.2.6 Considerações sobre as atividades realizadas na Lilia Neves

Mesmo diante das dificuldades encontradas em relação a utilização do laboratório de informática, as atividades propostas foram desenvolvidas dentro do esperado, ou seja, fazer com que o estudante perceba a utilização da Teoria dos Grafos em problemas do mundo real. Pelos resultados, pode-se afirmar que a maioria dos alunos aprovam o uso de novas metodologias de ensino e a possibilidade de inserção de novos conceitos ao currículo escolar.

5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho foi desenvolvido um OVA para o ensino da Teoria dos Grafos no Ensino Médio. Para tanto, foi proposta uma metodologia, objetivando a interligação da Teoria dos Grafos com os conteúdos de Análise Combinatória e Matrizes, abordados durante o Ensino Médio.

Durante os estudos dos trabalhos relacionados, constatou-se que alguns conceitos da Teoria dos Grafos vêem sendo aplicados no Ensino Médio no decorrer dos últimos anos. Esses estudos tem foco em atividades elaboradas, que geralmente envolvem diversos problemas do cotidiano, os quais proporcionam ao aluno a exploração de diversas propriedades Matemáticas interessantes. O ensino da Teoria dos Grafos contribui de forma positiva neste nível de ensino, pois a articulação da Matemática vista no Ensino Médio, com temas atuais e que envolvem tecnologia, desperta no estudante a motivação de aprender mais sobre um tema que está cada vez mais presente no seu cotidiano.

Diante disso, entende-se que há necessidade por parte dos educadores de estarem prontos a provocar mudanças e despertar a curiosidade dos alunos. A construção dos saberes, proporcionam momentos de reflexão, discussão e planejamento, o que reforça a necessidade de um ensino embasado na contextualização de problemas reais. Os OVAs, bem como a aplicação dos mesmos, nos desafiam a pensar e tomar decisões; estratégias de ensino como a que está sendo proposta neste trabalho, podem contribuir para o desempenho dos estudantes, compreender qual é o verdadeiro significado de estudar Matemática, sempre valorizando os saberes já adquiridos.

A análise dos trabalhos relacionados reforça a importância de desenvolver metodologias de ensino que se adequem aos conhecimentos dos alunos. A busca por um ensino de qualidade é uma constante na evolução do conhecimento, por esta razão este trabalho é relevante.

Os testes realizados nas duas escolas proporcionaram resultados satisfatórios. Diante das respostas apresentadas pelos estudantes, constatou-se que os objetivos desse trabalho foram alcançados, tendo em vista que a proposta era desenvolver um OVA, e que através dele fosse inserido o conteúdo da Teoria dos Grafos utilizando os conceitos de Matrizes e Análise Combinatória (conteúdos presentes no Ensino Médio) de forma contextualizada.

Pelas respostas apresentadas pelos estudantes, acredita-se que é possível articular a Matemática e a Teoria dos Grafos a problemas do cotidiano e que a maioria dos estudantes aprovam o uso metodologias diferenciadas em sala de aula, bem como a inserção de novos conteúdos ao currículo escolar.

Nota-se que os estudantes se envolvem mais nas atividades quando as mesmas os desafiam a pensar, organizando estratégias para a resolução dos problemas propostos. No decorrer das Atividades, os problemas propostos foram inseridos passo a passo, de forma gradual e com problemas concretos, para que no final a Teoria dos Grafos fosse apresentada e relacionada a Matemática presente no Ensino Médio.

Como contribuição científica, este trabalho apresentou as seguintes publicações:

- Planaridade de Grafos, o Teorema das Quatro Cores e o Ensino de Matemática. Apresentado na Conferência Sul em Modelagem Computacional - MCSUL, Universidade Federal do Rio Grande, 2014.

- Uma Ferramenta Computacional de Aprendizagem Utilizando Conceitos da Teoria dos Grafos: Uma Aplicação do Ensino Médio. 14ª Mostra de Produção Universitária da Universidade Federal do Rio Grande, 2015.

- Uma Metodologia para o Ensino da Teoria dos Grafos utilizando Objetos Virtuais de Aprendizagem. Trabalho aceito no Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional - CNMAC 2016.

Os OVAS contribuem de forma positiva para o ensino. A ferramenta desenvolvida e as demais atividades apresentadas foram bem aceitas pela maioria dos estudantes pesquisados. Acredita-se que uma sugestão para a melhoria das Atividades I, II, III, e IV apresentadas nesse trabalho, seria a aplicação da mesma sem que fosse necessário o uso da internet, pois nem todas as escolas dispõem de internet em todos os computadores, assim, seu uso poderia ser ampliado.

A proposta dessa dissertação foi embasada na inserção da Teoria dos Grafos no Ensino Médio, visto que esta proporciona a utilizacão de ferramentas acessíveis para a construção de modelos e na resolução de problemas, desde os mais simples aos mais elaborados. Acredita-se que as ferramentas computacionais possibilitam ao aluno o aprendizado e através da visualizacão. Os estudantes conseguem articular a Matemática com os problemas do cotidiano. Por esse motivo, propõe-se como trabalhos futuros:

- Desenvolver OVAs que contemplem o estudo de Grafos, para os algoritmos do Problema do Carteiro Chinês e Problema do Caixeiro Viajante, apresentados neste trabalho;

- Abordagem de Grafos dentro de Sistemas Lineares;

- Fazer uma análise qualitativa da metodologia desenvolvida a partir da amostra de dados observados. Possíveis métodos a serem utilizados são: Cartografia COSTA (2014), Análise de Conteúdo BARDIN (2011) e Discurso do Sujeito Coletivo LEFEVRE; LEFEVRE (2006);

- Fazer uma reorganização utilizando o padrão SCORM *(Sharable Content Object Reference Model)*.

REFERÊNCIAS

BARDIN, L. Análise de conteúdo. 3. reimp. **Lisboa: Edições**, [S.l.], v.70, 2011.

BRASIL. **Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais**: introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília: [s.n.], 1997.

BRIA, J. **Grafos, por que não**. [S.l.]: Caderno de Licenciatura em Matemática UFF, 1998.

CAMPOS, V. B. G. **Algoritmos para a Resolução de Problemas em Redes**. [S.l.: s.n.], 1980. 29p.

COSTA, L. B. da. Cartografia: uma outra forma de pesquisar. **Revista Digital do LAV**, [S.l.], v.7, n.2, p.066–077, 2014.

DEGGERONI, R. **Uma Introdução a Teoria dos Grafos no Ensino Médio**. 2010. Trabalho de Conclusão de Curso — Universidade federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul. Instituto de Matemática. (56).

FERREIRA, G. P. **A viabilidade do Ensino de Matemática discreta no Ensino Médio usando modelagem**. 2009. Pós-Graduação em Ensino de Ciências na Educação Básica — Universidade do Grande Rio prof. José de Souza Herdy, Duque de Caxias. (94).

FREITAS, C. R. **Teoria Espectral de Grafos Aplicada a Problemas de Localização**. 2012. Dissertação de (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Rio Grande. Programa de Pós Graduação em Modelagem Computacional. (104).

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R.; JUNIOR, J. R. G. **Matemática Fundamental**: Uma nova abordagem: Ensino Médio. São Paulo: [s.n.], 2002. 347-373p.

GUALANDI, J. H. **Investigações Matemáticas com Grafos para o Ensino Médio**. 2012. Dissertação de (Mestrado) — Universidade Católica de Minas Gerais, Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. (109).

IEEE. **IEEE Learning Technology Standards Committee (LTSC) - Systems Interoperability in Education and Training**. https://ieee-sa.imeetcentral.com/ltsc/.

JURKIEWICZ, S. **Qual é o menor caminho? (Conceitos, aplicações e experiências no Ensino Médio com Teoria dos Grafos e algoritmos)**. [S.l.: s.n.], 2007. 11p.

LEAL, W. S. **O ensino de algoritmos no Ensino Médio**: por que não? 2009. Dissertação de (Mestrado) — Universidade do Grande Rio Prof. José de Souza Herdy, Escola de Educação, Ciências, Letras, Artes e Humanidades, Minas Gerais. (97).

LEFEVRE, F.; LEFEVRE, A. M. C. O sujeito coletivo O sujeito coletivo que fala o que fala. **Interface-Comunic, Saúde, Educ**, [S.l.], v.10, n.20, p.517–24, 2006.

LIPSCHUTZ, S. **Matemática Discreta**. 3.ed. Porto Alegre: BooKman, 2013.

MAGALHÃES, T. M. **Grafos como Ferramenta para o Ensino de Matemática - Problemas, definições, matrizes, divisores, voos e afins. Abordagem para os ensinos fundamental e médio**. 2014. Dissertação de (Mestrado) — Universidade Federal da Bahia, Salvador/Bahia. (100).

MALTA, G. H. S. **Grafos no Ensino Médio**: uma Inserção Possível. 2008. Dissertação de (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. (154).

MATOS, I. M. D. **Teoria dos Grafos no Ensino Básico e Secundário**. 2013. Dissertação de (Mestrado) — Universidade de Aveiro. (89).

MUNIZ, I. J. **Encontrando, minimizando e planejando percursos**: uma introdução à teoria dos grafos no Ensino Médio. 2007. Dissertção de (Mestrado) — Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, Rio de Janeiro. (141).

NUNES, C. A. Objetos de aprendizagem em ação. **Educação & Tecnologia & Cidadania: Ambientes Virtuais de Aprendizagem no Ciberespaço-Série Cadernos Pedagógicos Reflexões**, [S.l.], n.6, p.1, 2004.

RABUSKE, M. A. **Introdução à teoria dos Grafos**. Florianópolis: UFSC, 1992.

SOUZA, J. R. **Matemática Discreta**: tópicos para o Ensino Médio. 2013. Dissertação de (Mestrado) — Universidade Estadual de Londrina. (132).

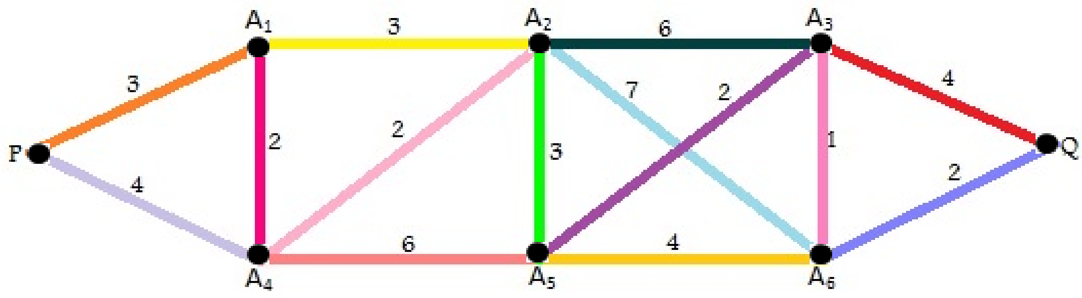
SPINELLI, W. **Aprendizagem Matemática em Contextos Significativos**: Objetos Virtuais de Aprendizagem e Percursos Temáticos. 2005. Dissertação de (Mestrado) — Faculdade de Educação da USP, São Paulo.

WILEY, D. Learning objects need instructional design theory. **The ASTD e-Learning handbook**, [S.l.], p.115–126, 2002.

6 ANEXO I

Atividade 2

*Obrigatório



1. **Que raciocínio você utilizou para resolver essa questão? ***

2. **Você acha que pode-se relacionar o "desenho" da figura acima com algo do nosso cotidiano? Se sua resposta for sim, com o que é possível relacionar? ***

3. **Discuta com o grupo todas as possíveis soluções e registre as conclusões. ***

Powered by
Google Forms

7 ANEXO II

Atividade 3

*Obrigatório

Mapa Estados Brasileiros

1. **Existe alguma relação entre a atividade 1 e o mapa? Qual?** *

Powered by Google Forms

8 ANEXO III

Atividade 4

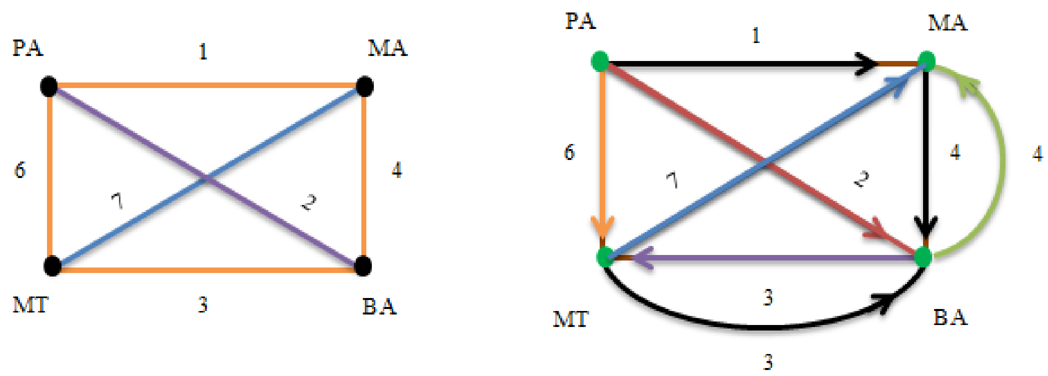
*Obrigatório

Mapa dos Estados Brasileiros

1. **Que conclusões podem ser feitas quando comparada a atividade 1 com a atividade que envolve o mapa dos Estados Brasileiros? ***

2. **É possível relacionar a figura abaixo (uma parte do mapa dos Estados Brasileiros) com algum conteúdo de Matemática que é ensinado no 2° ano do Ensino Médio? Qual?** *

Parte da Figura



Powered by
Google Forms

9 ANEXO IV

Questionário

*Obrigatório

1. **Qual é a sua idade? ***

2. **Utiliza computador? Com que frequência? ***
   Marcar apenas uma oval.
   - Todos os dias
   - Até três vezes por semana
   - Não utiliza computador

3. **Caso utilize, para quê utiliza? ***

4. **Tens acesso a internet? ***
   Marcar apenas uma oval.
   - Em casa
   - Na escola
   - No celular
   - Não acesso

5. **Como você avalia a experiência de utilizar o Laboratório de informática na aula de Matemática? ***
   Marcar apenas uma oval.
   - Não gostei
   - Gostei pouco
   - Gostei muito

6. **Dentre as atividades desenvolvidas, qual chamou mais a sua atenção?** *

7. **Como você avalia o uso do Objeto Virtual de Aprendizagem trabalhado para o entendimento do conteúdo abordado?** *
Marcar apenas uma oval.
   - Não contribui
   - Contribui pouco
   - Contribui muito

8. **Você acha importante estudar grafos no Ensino Médio? Justifique sua resposta.** *

9. **Em qual situação prática de sua vida (diferente da apresentada na aula), você acha que poderia utilizar Grafos?** *

10. **O que você sonha como profissão no futuro?** *

Powered by
Google Forms

10 ANEXO V

```java
/**
 *
 *
 */
public class CaminhoMinimo extends javax.swing.JFrame {

   /**
    * Creates new form CaminhoMinimo
    */
   public CaminhoMinimo() {
      initComponents();
   }

   /**
    * This method is called from within the constructor to initialize the form.
    * WARNING: Do NOT modify this code. The content of this method is always
    * regenerated by the Form Editor.
    */
   @SuppressWarnings("unchecked")
   // <editor-fold defaultstate="collapsed" desc="Generated Code">
   private void initComponents() {

      jLabel1 = new javax.swing.JLabel();
      jLabel2 = new javax.swing.JLabel();
      jLabel3 = new javax.swing.JLabel();
      jComboBox1 = new javax.swing.JComboBox<>();
      jComboBox2 = new javax.swing.JComboBox<>();
      jLabel4 = new javax.swing.JLabel();
      jTextField1 = new javax.swing.JTextField();
      jLabel5 = new javax.swing.JLabel();
      jTextField2 = new javax.swing.JTextField();
      jButton1 = new javax.swing.JButton();

      setDefaultCloseOperation(javax.swing.WindowConstants.EXIT_ON_CLOSE);
      setTitle("Menor Caminho");
      setResizable(false);

      jLabel1.setIcon(new                javax.swing.ImageIcon(getClass().getResource("/grafo
colorido.png"))); // NOI18N

      jLabel2.setFont(new java.awt.Font("Gill Sans MT", 0, 16)); // NOI18N
      jLabel2.setIcon(new javax.swing.ImageIcon(getClass().getResource("/flag_green.png"))); //
NOI18N
      jLabel2.setText("Origem");

      jLabel3.setFont(new java.awt.Font("Gill Sans MT", 0, 16)); // NOI18N
      jLabel3.setIcon(new   javax.swing.ImageIcon(getClass().getResource("/flag_red.png")));   //
NOI18N
      jLabel3.setText("Destino");

      jComboBox1.setFont(new java.awt.Font("Gill Sans MT", 0, 16)); // NOI18N
```

```
        jComboBox1.setModel(new javax.swing.DefaultComboBoxModel<>(new String[] { "P",
"A1", "A2", "A3", "A4", "A5", "A6", "Q" }));
        jComboBox1.addActionListener(new java.awt.event.ActionListener() {
            public void actionPerformed(java.awt.event.ActionEvent evt) {
                jComboBox1ActionPerformed(evt);
            }
        });

        jComboBox2.setFont(new java.awt.Font("Gill Sans MT", 0, 16)); // NOI18N
        jComboBox2.setModel(new javax.swing.DefaultComboBoxModel<>(new String[] { "P",
"A1", "A2", "A3", "A4", "A5", "A6", "Q" }));
        jComboBox2.addActionListener(new java.awt.event.ActionListener() {
            public void actionPerformed(java.awt.event.ActionEvent evt) {
                jComboBox2ActionPerformed(evt);
            }
        });

        jLabel4.setFont(new java.awt.Font("Gill Sans MT", 0, 16)); // NOI18N
        jLabel4.setIcon(new javax.swing.ImageIcon(getClass().getResource("/car.png"))); //
NOI18N
        jLabel4.setText("Caminho");

        jTextField1.setFont(new java.awt.Font("Gill Sans MT", 0, 12)); // NOI18N
        jTextField1.addActionListener(new java.awt.event.ActionListener() {
            public void actionPerformed(java.awt.event.ActionEvent evt) {
                jTextField1ActionPerformed(evt);
            }
        });

        jLabel5.setFont(new java.awt.Font("Gill Sans MT", 0, 16)); // NOI18N
        jLabel5.setIcon(new javax.swing.ImageIcon(getClass().getResource("/accept.png"))); //
NOI18N
        jLabel5.setText("Resposta");

        jTextField2.addActionListener(new java.awt.event.ActionListener() {
            public void actionPerformed(java.awt.event.ActionEvent evt) {
                jTextField2ActionPerformed(evt);
            }
        });

        jButton1.setBackground(new java.awt.Color(153, 255, 153));
        jButton1.setFont(new java.awt.Font("Gill Sans MT", 0, 16)); // NOI18N
        jButton1.setText("Calcular");
        jButton1.addActionListener(new java.awt.event.ActionListener() {
            public void actionPerformed(java.awt.event.ActionEvent evt) {
                jButton1ActionPerformed(evt);
            }
        });

        javax.swing.GroupLayout layout = new javax.swing.GroupLayout(getContentPane());
        getContentPane().setLayout(layout);
        layout.setHorizontalGroup(
```

```
        layout.createParallelGroup(javax.swing.GroupLayout.Alignment.LEADING)
        .addGroup(layout.createSequentialGroup()
            .addContainerGap()
            .addComponent(jLabel1)
            .addContainerGap(javax.swing.GroupLayout.DEFAULT_SIZE, Short.MAX_VALUE))
        .addGroup(layout.createSequentialGroup()
            .addGap(64, 64, 64)
            .addGroup(layout.createParallelGroup(javax.swing.GroupLayout.Alignment.LEADING)
                .addGroup(layout.createSequentialGroup()
                    .addComponent(jLabel5)
                    .addGap(18, 18, 18)
                    .addComponent(jTextField2,     javax.swing.GroupLayout.PREFERRED_SIZE,     275,
javax.swing.GroupLayout.PREFERRED_SIZE)
                    .addContainerGap(javax.swing.GroupLayout.DEFAULT_SIZE, Short.MAX_VALUE))
                .addGroup(javax.swing.GroupLayout.Alignment.TRAILING,
layout.createSequentialGroup()

.addGroup(layout.createParallelGroup(javax.swing.GroupLayout.Alignment.TRAILING)
                        .addGroup(layout.createSequentialGroup()
                            .addGap(0, 0, Short.MAX_VALUE)
                            .addComponent(jButton1))
                        .addGroup(javax.swing.GroupLayout.Alignment.LEADING,
layout.createSequentialGroup()
                            .addComponent(jLabel4)
                            .addGap(18, 18, 18)
                            .addComponent(jTextField1))
                        .addGroup(javax.swing.GroupLayout.Alignment.LEADING,
layout.createSequentialGroup()
                            .addComponent(jLabel2)
                            .addGap(20, 20, 20)
                            .addComponent(jComboBox1,      javax.swing.GroupLayout.PREFERRED_SIZE,
javax.swing.GroupLayout.DEFAULT_SIZE, javax.swing.GroupLayout.PREFERRED_SIZE)
                            .addPreferredGap(javax.swing.LayoutStyle.ComponentPlacement.RELATED,
javax.swing.GroupLayout.DEFAULT_SIZE, Short.MAX_VALUE)
                            .addComponent(jLabel3)
                            .addGap(18, 18, 18)
                            .addComponent(jComboBox2,      javax.swing.GroupLayout.PREFERRED_SIZE,
javax.swing.GroupLayout.DEFAULT_SIZE, javax.swing.GroupLayout.PREFERRED_SIZE)))
                    .addGap(63, 63, 63))))
    );
    layout.setVerticalGroup(
        layout.createParallelGroup(javax.swing.GroupLayout.Alignment.LEADING)
        .addGroup(layout.createSequentialGroup()
            .addContainerGap()
            .addComponent(jLabel1)
            .addGap(29, 29, 29)
            .addGroup(layout.createParallelGroup(javax.swing.GroupLayout.Alignment.BASELINE)
                .addComponent(jLabel2)
                .addComponent(jComboBox1,              javax.swing.GroupLayout.PREFERRED_SIZE,
javax.swing.GroupLayout.DEFAULT_SIZE, javax.swing.GroupLayout.PREFERRED_SIZE)
                .addComponent(jLabel3)
```

```
                .addComponent(jComboBox2,                javax.swing.GroupLayout.PREFERRED_SIZE,
javax.swing.GroupLayout.DEFAULT_SIZE, javax.swing.GroupLayout.PREFERRED_SIZE))
              .addGap(64, 64, 64)
              .addGroup(layout.createParallelGroup(javax.swing.GroupLayout.Alignment.BASELINE)
                .addComponent(jLabel4)
                .addComponent(jTextField1,                javax.swing.GroupLayout.PREFERRED_SIZE,
javax.swing.GroupLayout.DEFAULT_SIZE, javax.swing.GroupLayout.PREFERRED_SIZE))
              .addGap(64, 64, 64)
              .addGroup(layout.createParallelGroup(javax.swing.GroupLayout.Alignment.BASELINE)
                .addComponent(jLabel5)
                .addComponent(jTextField2,                javax.swing.GroupLayout.PREFERRED_SIZE,
javax.swing.GroupLayout.DEFAULT_SIZE, javax.swing.GroupLayout.PREFERRED_SIZE))
              .addGap(48, 48, 48)
              .addComponent(jButton1,          javax.swing.GroupLayout.PREFERRED_SIZE,          35,
javax.swing.GroupLayout.PREFERRED_SIZE)
              .addContainerGap(36, Short.MAX_VALUE))
        );

        pack();
        setLocationRelativeTo(null);
    }// </editor-fold>

    private void jComboBox1ActionPerformed(java.awt.event.ActionEvent evt) {
          jComboBox1.getSelectedIndex();
    }

    private void jComboBox2ActionPerformed(java.awt.event.ActionEvent evt) {
          jComboBox2.getSelectedIndex();
    }

    private void jTextField1ActionPerformed(java.awt.event.ActionEvent evt) {
          jTextField1.getText();
    }

    private void jTextField2ActionPerformed(java.awt.event.ActionEvent evt) {

    }

    private void jButton1ActionPerformed(java.awt.event.ActionEvent evt) {

          if((jComboBox1.getSelectedIndex()) == (jComboBox2.getSelectedIndex())){
          jTextField2.setText("Não existe caminho");
          }
          else if(jTextField1.getText().equals("")){
            jTextField2.setText("Digite um caminho");
          }
          else  if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 7 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
3)){
                if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("Q,A6,A3")){
                jTextField2.setText("Caminho correto!");
                }
                  else
```

```
            {
               jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [3]");
            }
        }
        else  if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 7 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
6)){
            if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("Q,A6")){
            jTextField2.setText("Caminho correto!");
            }
            else
              {
                 jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [2]");
              }
        }
        else  if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 7 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
2)){
            if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("Q,A6,A3,A5,A2"))
            jTextField2.setText("Caminho correto!");
            else
              {
                 jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [8]");
              }
        }
        else  if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 7 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
5)){
            if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("Q,A6,A3,A5"))
            jTextField2.setText("Caminho correto!");
            else
              {
                 jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [5]");
              }
        }
        else  if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 7 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
1)){
            if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("Q,A6,A3,A5,A2,A1"))
            jTextField2.setText("Caminho correto!");
            else
              {
                 jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [11]");
              }
        }
        else  if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 7 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
4)){
            if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("Q,A6,A3,A5,A4"))
            jTextField2.setText("Caminho correto!");
            else
              {
                 jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [10]");
              }
        }
        else  if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 7 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
0)){
```

```
            if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace("                                        ",
"").equals("Q,A6,A3,A5,A2,A4,P"))
            jTextField2.setText("Caminho correto!");
            else
              {
                jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [14]");
              }
        }
        else if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 3 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
7)){
            if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("A3,A6,Q"))
            jTextField2.setText("Caminho correto!");
            else
              {
                jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [3]");
              }
        }
        else if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 3 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
6)){
            if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("A3,A6"))
            jTextField2.setText("Caminho correto!");
            else
              {
                jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [1]");
              }
        }
        else if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 3 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
2)){
            if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("A3,A5,A2"))
            jTextField2.setText("Caminho correto!");
            else
              {
                jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [3]");
              }
        }
        else if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 3 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
5)){
            if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("A3,A5"))
            jTextField2.setText("Caminho correto!");
            else
              {
                jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [2]");
              }
        }
        else if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 3 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
1)){
            if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("A3,A5,A2,A1"))
            jTextField2.setText("Caminho correto!");
            else
              {
                jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [6]");
              }
```

```
        }
        else if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 3 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
4)){
            if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("A3,A5,A2,A4"))
            jTextField2.setText("Caminho correto!");
            else
              {
                jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [5]");
              }
        }
        else if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 3 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
0)){
            if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("A3,A5,A2,A4,P"))
            jTextField2.setText("Caminho correto!");
            else
              {
                jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [11]");
              }
        }
        else if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 6 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
7)){
            if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("A6,Q"))
            jTextField2.setText("Caminho correto!");
            else
              {
                jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [2]");
              }
        }
        else if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 6 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
3)){
            if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("A6,A3"))
            jTextField2.setText("Caminho correto!");
            else
              {
                jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [1]");
              }
        }
        else if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 6 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
2)){
            if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("A6,A3,A5,A2"))
            jTextField2.setText("Caminho correto!");
            else
              {
                jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [6]");
              }
        }
        else if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 6 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
5)){
            if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("A6,A3,A5"))
            jTextField2.setText("Caminho correto!");
            else
              {
```

```
            jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [3]");
          }
    }
    else if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 6 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
1)){
        if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("A6,A3,A5,A2,A1"))
        jTextField2.setText("Caminho correto!");
        else
          {
            jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [5]");
          }
    }
    else if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 6 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
4)){
        if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("A6,A3,A5,A2,A4"))
        jTextField2.setText("Caminho correto!");
        else
          {
            jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [4]");
          }
    }
    else if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 6 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
0)){
        if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("A6,A3,A5,A2,A4,P"))
        jTextField2.setText("Caminho correto!");
        else
          {
            jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [14]");
          }
    }
    else if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 2 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
7)){
        if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("A2,A5,A3,A6,Q"))
        jTextField2.setText("Caminho correto!");
        else
          {
            jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [8]");
          }
    }
    else if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 2 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
3)){
        if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("A2,A5,A3"))
        jTextField2.setText("Caminho correto!");
        else
          {
            jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [5]");
          }
    }
    else if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 2 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
6)){
        if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("A2,A5,A3,A6"))
        jTextField2.setText("Caminho correto!");
```

```
            else
              {
                jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [6]");
              }
        }
        else  if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 2 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
5)){
            if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("A2,A5"))
            jTextField2.setText("Caminho correto!");
            else
              {
                jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [3]");
              }
        }
        else  if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 2 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
1)){
            if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("A2,A1"))
            jTextField2.setText("Caminho correto!");
            else
              {
                jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [3]");
              }
        }
        else  if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 2 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
4)){
            if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("A2,A4"))
            jTextField2.setText("Caminho correto!");
            else
              {
                jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [2]");
              }
        }
        else  if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 2 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
0)){
            if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("A2,A4,P"))
            jTextField2.setText("Caminho correto!");
            else
              {
                jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [6]");
              }
        }
        else  if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 5 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
7)){
            if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("A5,A3,A6,Q"))
            jTextField2.setText("Caminho correto!");
            else
              {
                jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [5]");
              }
        }
        else  if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 5 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
3)){
```

```
                if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("A5,A3"))
                jTextField2.setText("Caminho correto!");
                else
                  {
                    jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [2]");
                  }
        }
        else  if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 5 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
6)){
                if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("A5,A3,A6"))
                jTextField2.setText("Caminho correto!");
                else
                  {
                    jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [3]");
                  }
        }
        else  if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 5 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
2)){
                if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("A5,A2"))
                jTextField2.setText("Caminho correto!");
                else
                  {
                    jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [3]");
                  }
        }
        else  if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 5 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
1)){
                if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("A5,A2,A1"))
                jTextField2.setText("Caminho correto!");
                else
                  {
                    jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [6]");
                  }
        }
        else  if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 5 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
4)){
                if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("A5,A2,A4"))
                jTextField2.setText("Caminho correto!");
                else
                  {
                    jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [5]");
                  }
        }
        else  if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 5 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
0)){
                if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("A5,A2,A4,P"))
                jTextField2.setText("Caminho correto!");
                else
                  {
                    jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [9]");
                  }
        }
```

```
        else if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 1 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
7)){
            if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("A1,A2,A5,A3,A6,Q"))
            jTextField2.setText("Caminho correto!");
            else
              {
                jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [11]");
              }
        }
        else if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 1 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
3)){
            if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("A1,A2,A5,A3"))
            jTextField2.setText("Caminho correto!");
            else
              {
                jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [6]");
              }
        }
        else if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 1 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
6)){
            if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("A1,A2,A5,A3,A6"))
            jTextField2.setText("Caminho correto!");
            else
              {
                jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [9]");
              }
        }
        else if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 1 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
2)){
            if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("A1,A2"))
            jTextField2.setText("Caminho correto!");
            else
              {
                jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [3]");
              }
        }
        else if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 1 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
5)){
            if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("A1,A2,A5"))
            jTextField2.setText("Caminho correto!");
            else
              {
                jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [6]");
              }
        }
        else if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 1 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
4)){
            if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("A1,A4"))
            jTextField2.setText("Caminho correto!");
            else
              {
                jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [2]");
```

```
            }
        }
        else if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 1 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
0)){
            if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("A1,P"))
            jTextField2.setText("Caminho correto!");
            else
              {
                jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [3]");
              }
        }
        else if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 4 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
7)){
            if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("A4,A2,A5,A3,A6,Q"))
            jTextField2.setText("Caminho correto!");
            else
              {
                jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [10]");
              }
        }
        else if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 4 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
3)){
            if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("A4,A2,A5,A3"))
            jTextField2.setText("Caminho correto!");
            else
              {
                jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [7]");
              }
        }
        else if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 4 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
6)){
            if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("A4,A2,A5,A3,A6"))
            jTextField2.setText("Caminho correto!");
            else
              {
                jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [8]");
              }
        }
        else if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 4 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
2)){
            if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("A4,A2"))
            jTextField2.setText("Caminho correto!");
            else
              {
                jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [2]");
              }
        }
        else if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 4 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
5)){
            if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("A4,A2,A5"))
            jTextField2.setText("Caminho correto!");
            else
```

```
            {
               jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [5]");
            }
        }
        else if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 4 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
1)){
            if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("A4,A1"))
            jTextField2.setText("Caminho correto!");
            else
            {
               jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [2]");
            }
        }
        else if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 4 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
0)){
            if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("A4,P"))
            jTextField2.setText("Caminho correto!");
            else
            {
               jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [4]");
            }
        }
        else if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 0 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
7)){
            if((jTextField1.getText().toUpperCase().replace("                    ",
"").equals("P,A4,A2,A5,A3,A6,Q"))  ||  (jTextField1.getText().toUpperCase().replace("   ",
"").equals("P,A1,A2,A5,A3,A6,Q")))
            jTextField2.setText("Caminho correto!");
            else
            {
               jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [14]");
            }
        }
        else if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 0 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
3)){
            if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("P,A4,A2,A5,A3"))
            jTextField2.setText("Caminho correto!");
            else
            {
               jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [11]");
            }
        }
        else if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 0 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
6)){
            if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("P,A4,A2,A5,A3,A6"))
            jTextField2.setText("Caminho correto!");
            else
            {
               jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [12]");
            }
        }
```

```
        else if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 0 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
2)){
            if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("P,A4,A2") ||
jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("P,A1,A2"))
            jTextField2.setText("Caminho correto!");
            else
              {
                jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [6]");
              }
        }
        else if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 0 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
5)){
            if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("P,A4,A2,A5"))
            jTextField2.setText("Caminho correto!");
            else
              {
                jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [9]");
              }
        }
        else if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 0 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
1)){
            if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("P,A1"))
            jTextField2.setText("Caminho correto!");
            else
              {
                jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [3]");
              }
        }
        else if((jComboBox1.getSelectedIndex() == 0 ) && (jComboBox2.getSelectedIndex() ==
4)){
            if(jTextField1.getText().toUpperCase().replace(" ", "").equals("P,A4"))
            jTextField2.setText("Caminho correto!");
            else
              {
                jTextField2.setText("Existe um caminho menor, de custo [4]");
              }
        }
    }

    /**
     * @param args the command line arguments
     */
    public static void main(String args[]) {
        /* Set the Nimbus look and feel */
        //<editor-fold defaultstate="collapsed" desc=" Look and feel setting code (optional) ">
        /* If Nimbus (introduced in Java SE 6) is not available, stay with the default look and feel.
         * For details see
http://download.oracle.com/javase/tutorial/uiswing/lookandfeel/plaf.html
         */
        try {
            for (javax.swing.UIManager.LookAndFeelInfo info :
javax.swing.UIManager.getInstalledLookAndFeels()) {
```

```
            if ("Nimbus".equals(info.getName())) {
                javax.swing.UIManager.setLookAndFeel(info.getClassName());
                break;
            }
        }
    } catch (ClassNotFoundException ex) {

java.util.logging.Logger.getLogger(CaminhoMinimo.class.getName()).log(java.util.logging.Level.
SEVERE, null, ex);
    } catch (InstantiationException ex) {

java.util.logging.Logger.getLogger(CaminhoMinimo.class.getName()).log(java.util.logging.Level.
SEVERE, null, ex);
    } catch (IllegalAccessException ex) {

java.util.logging.Logger.getLogger(CaminhoMinimo.class.getName()).log(java.util.logging.Level.
SEVERE, null, ex);
    } catch (javax.swing.UnsupportedLookAndFeelException ex) {

java.util.logging.Logger.getLogger(CaminhoMinimo.class.getName()).log(java.util.logging.Level.
SEVERE, null, ex);
    }
    //</editor-fold>

    /* Create and display the form */
    java.awt.EventQueue.invokeLater(new Runnable() {
        public void run() {
            new CaminhoMinimo().setVisible(true);
        }
    });
  }

  // Variables declaration - do not modify
  private javax.swing.JButton jButton1;
  private javax.swing.JComboBox<String> jComboBox1;
  private javax.swing.JComboBox<String> jComboBox2;
  private javax.swing.JLabel jLabel1;
  private javax.swing.JLabel jLabel2;
  private javax.swing.JLabel jLabel3;
  private javax.swing.JLabel jLabel4;
  private javax.swing.JLabel jLabel5;
  private javax.swing.JTextField jTextField1;
  private javax.swing.JTextField jTextField2;
  // End of variables declaration
}
```