Roberta da Silva Michaello

Propostas de atividades utilizando conceitos de topografia

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Agosto, 2016

Roberta da Silva Michaello

Propostas de atividades utilizando conceitos de topografia

Dissertação submetida por Roberta da Silva Michaello como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre, pelo Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Universidade Federal do Rio Grande - FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF

Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Orientador: Dra. Fabíola Aiub Sperotto

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Agosto, 2016

Colaboradores

Universidade Federal do Rio Grande
http://www.furg.br

Instituto de Matemática, Estatística e Física
http://www.imef.furg.br

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
http://www.profmat-sbm.org.br

Sociedade Brasileira de Matemática
http://www.sbm.org.br

Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
http://www.capes.gov.br

Ficha catalográfica

M621p Michaello, Roberta da Silva.

Propostas de atividades utilizando conceitos de topografia / Roberta da Silva Michaello. – 2016.

89 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Programa de Pós-graduação em Matemática, Rio Grande/RS, 2016.

Orientadora: Drª. Fabíola Aiub Sperotto.

1. Topografia 2. Matemática 3. Trigonometria 4. Geometria I. Sperotto, Fabíola Aiub II. Título.

CDU 528.425:37

Catalogação na Fonte: Bibliotecário Me. João Paulo Borges da Silveira CRB 10/2130

Roberta da Silva Michaello

Propostas de atividades utilizando conceitos de topografia

Dissertação submetida por Roberta da Silva Michaello como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre, pelo Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Trabalho aprovado. Rio Grande, 25 de agosto de 2016.

Fabiola Aiub Sperotto.

Dra. Fabíola Aiub Sperotto
(Orientador - FURG)

Lisandra de O. Sauer

Dra. Lisandra de Oliveira Sauer
(Avaliador - UFPel)

Cinthya Maria Schneider Meneghetti

Dra. Cinthya Maria Schneider Meneghetti
(Avaliador - FURG)

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil
Agosto, 2016

Este trabalho é dedicado aos meus pais, minha irmã e meu namorado. Tenho certeza que sem o apoio e o amor de vocês, nada disso seria possível.

Agradecimentos

À Profª. Dra. Fabíola Aiub Sperotto pela orientação, paciência, auxílio e contribuições ao longo do desenvolvimento desse trabalho.

À banca examinadora por aceitar discutir esse trabalho, a fim de contribuir para a melhoria do mesmo.

À Universidade Federal do Rio Grande (FURG) e ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, pelo apoio prestado à realização desse trabalho.

Ao Prof. Msc. José Antonio Antiqueira pela atenção e disponibilização do material do laboratório de topografia da FURG.

Por fim, agradeço aos meus pais, Roberto e Nina, por sempre estarem ao meu lado, por me apoiarem e incentivarem nas minhas escolhas acadêmicas, por me educarem e proporcionarem um bom estudo e formação pessoal. À minha irmã, Renata, por estar ao meu lado sempre, se alegrando com todas minhas vitórias, por fazer parte de todas elas, me motivando e apoiando. E ao meu namorado Rafael, por estar sempre presente, pelo apoio incondicional e incentivo para a conclusão desse trabalho.

"Se enxerguei mais longe, foi porque me apoiei sobre os ombros de gigantes."

(Isaac Newton)

Resumo

Nesse trabalho são apresentadas propostas de atividades para o Ensino Fundamental e Médio. O objetivo dessas atividades é expor o conteúdo de forma contextualizada, ou seja, relacionando a matemática estudada em sala de aula com a realidade vivida pelo aluno. A topografia, muito utilizada na engenharia, utiliza vários conceitos matemáticos, então a proposta principal é adaptar as atividades topográficas, para serem realizadas em sala de aula. Dentre as atividades elaboradas estão: a construção e aplicação do teodolito, onde são abordados conteúdos de trigonometria; uma atividade para realizar o cálculo de áreas, onde são abordados conteúdos de geometria analítica e uma atividade sobre coordenadas cartesianas, na qual são trabalhados conceitos de posicionamento de um ponto.

Palavras-Chave: Topografia, matemática, trigonometria, geometria.

Abstract

In this work presents proposals for activities for to the elementary and high school. The goal of these activities is to expose the content a contextualized way, that is, by relating the mathematical studied in the classroom with the reality experienced by the student. The topography, widely used in engineering, uses various mathematical concepts, so the main proposal is to adapt topographical activities, to be carried out in the classroom. Among the activities developed are: the construction and application of theodolite, where trigonometry contents are addressed; an activity to carry out the calculation of areas, on which are discussed analytic geometry content and activity about Cartesian coordinates, in which positioning concepts are worked from one point.

Keywords: Topography, math, trigonometry, geometry.

Lista de ilustrações

Figura 1 – (a) Mapa encontrado em Ga-Sur. (b) Esquema do mapa. 19
Figura 2 – Mapa das Ilhas Marshall. 19
Figura 3 – Groma Egípcia. 20
Figura 4 – Dioptra. 20
Figura 5 – (a) Esquema da utilização do Theodolitus. (b) Instrumento Theodolitus. 21
Figura 6 – Teodolito. 21
Figura 7 – Estação Total. 22
Figura 8 – Estação Total robotizada. 22
Figura 9 – Sistema de Posicionamento Global. 23
Figura 10 – Sistema de coordenadas cartesianas no plano. 25
Figura 11 – Sistema de coordenadas cartesianas no espaço. 25
Figura 12 – Sistema de coordenadas esféricas. 26
Figura 13 – Triângulo retângulo. 28
Figura 14 – Triângulo qualquer. 28
Figura 15 – Exemplo do processo gráfico. 30
Figura 16 – Polígono. 31
Figura 17 – Trapézios que compõe o polígono: (a) $B'BCDD'$ e (b) $B'BADD'$. . . . 32
Figura 18 – Material necessário. 39
Figura 19 – Traço da reta. 40
Figura 20 – Marcação dos ângulos. 40
Figura 21 – Indicação dos ângulos. 41
Figura 22 – Perfuração na marcação do grau zero. 42
Figura 23 – (a)Passagem do fio de nylon. (b) Detalhe. 42
Figura 24 – Fixação do canudo. 43
Figura 25 – Base do teodolito. 43
Figura 26 – (a)Junção das partes da estrutura com a base. (b)Detalhe. 44
Figura 27 – Teodolito finalizado. 44
Figura 28 – (a)Determinação da altura, com auxílio do teodolito construído. (b)Altura medida com auxílio de trena (c)Ângulo obtido na visada com o teodolito 49
Figura 29 – Esquematização do problema proposto. 50
Figura 30 – Teodolitos construídos pelos alunos. 51
Figura 31 – Comentários dos alunos, sobre a atividade. 52
Figura 32 – Área dividida em triângulos. 55
Figura 33 – Área dividida em várias figuras geométricas. 57
Figura 34 – Coordenadas dos vértices da figura que define o terreno. 59
Figura 35 – Pontos que definem o terreno. 61

Figura 36 – Polígono que representa a região do terreno. 61
Figura 37 – Cálculo da área do terreno. 62
Figura 38 – Detalhes dos "eixos" da maquete. 63
Figura 39 – Maquete. 64
Figura 40 – Distribuição dos móveis e aberturas. 67

Lista de tabelas

Tabela 1 – Principais escalas utilizadas por engenheiros e as suas respectivas aplicações. 29

Sumário

	Introdução	**15**
1	**HISTÓRIA DA TOPOGRAFIA**	**18**
2	**CONCEITOS MATEMÁTICOS UTILIZADOS NA TOPOGRAFIA**	**24**
2.1	**Sistema de Coordenadas**	**24**
2.1.1	Sistemas de Coordenadas Cartesianas	24
2.1.2	Sistemas de Coordenadas Esféricas	26
2.2	**Unidades de Medida**	**26**
2.2.1	Medida de Comprimento	26
2.2.2	Medida Angular	27
2.2.2.1	Unidade Sexagesimal	27
2.2.2.2	Unidade Decimal	27
2.3	**Revisão de Trigonometria**	**27**
2.3.1	Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo	27
2.3.2	Teorema de Pitágoras	28
2.3.3	Triângulo Qualquer	28
2.4	**Escalas**	**29**
2.5	**Áreas**	**30**
2.5.1	Processo Gráfico	30
2.5.2	Processo Analítico	31
3	**JUSTIFICATIVA E OBJETIVOS**	**34**
4	**ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS**	**36**
4.1	**Livros de Ensino Fundamental**	**36**
4.2	**Livros de Ensino Médio**	**38**
5	**CONSTRUÇÃO DO TEODOLITO**	**39**
6	**ATIVIDADES PROPOSTAS**	**45**
6.1	**Atividade 1 - Utilizando o teodolito no ensino da trigonometria.**	**45**
6.1.1	Atividade 1	49
6.1.2	Uma possível solução da atividade 1	50
6.1.3	Avaliação e expectativas da atividade 1	51
6.2	**Atividade 2 - Cálculo de áreas de figuras, usando decomposição e coordenadas totais.**	**52**

6.2.1 Atividade 2 53
6.2.2 Uma possível solução da atividade 2 54
6.2.3 Avaliação e expectativas da atividade 2 62
6.3 Atividade 3 - Introdução a coordenadas cartesianas. 63
6.3.1 Atividade 3 65
6.3.2 Uma possível solução da atividade 3 67
6.3.3 Avaliação e expectativas da atividade 3 69

7 CONCLUSÕES 70

REFERÊNCIAS 71

ANEXOS 73

ANEXO A – ATIVIDADE 1 74

ANEXO B – ATIVIDADE 2 84

ANEXO C – ATIVIDADE 3 88

Introdução

A Topografia é a base para diversos trabalhos de Engenharia, onde o conhecimento das formas e dimensões do terreno são importantes. Pode-se citar, como exemplos de aplicações da topografia: locação de obras, projetos e execução de estradas, trabalhos de terraplenagem e grandes obras de engenharia, como pontes, viadutos, túneis.

Segundo Veiga, Zanetti e Faggion (VEIGA; ZANETTI; FAGGION, 2012), em diversos trabalhos a Topografia está presente, na etapa de planejamento e projeto, fornecendo informações sobre o terreno, na execução e acompanhamento da obra, realizando locações e fazendo verificações métricas e finalmente no monitoramento da obra após a sua execução, para determinar, por exemplo, deslocamentos de estruturas.

A topografia possui duas divisões principais, a planimetria e altimetria. Conforme Borges (BORGES, 1977), na planimetria são medidas as grandezas, distâncias e ângulos, sobre um plano horizontal. A representação é feita através de uma vista de cima, onde aparecem as projeções das grandezas sobre um mesmo plano horizontal, essa representação chama-se planta. Já na altimetria, são feitas medidas de grandeza sobre um plano vertical e sua representação é feita em vista lateral, chamada ainda de perfil ou corte.

Segundo Borges (BORGES, 1977):

> A topografia é uma ciência aplicada milenar. Mas isso não impede que venha se atualizando através de aparelhos. A base é sempre a mesma: a geometria é parte da trigonometria. Alguns chamam a topografia de geometria aplicada. Os italianos denominam geômetras os topógrafos. (BORGES, 1977)

Neste sentido esse trabalho irá apresentar uma breve história da topografia. Desde os primórdios, com ferramentas e equipamentos rudimentares, até a atualidade com equipamentos modernos e sofisticados. Com o passar dos tempos as ferramentas utilizadas na topografia foram sendo aprimoradas, à medida que a tecnologia foi evoluindo. Mas desde a antiguidade até os dias atuais existe muito conhecimento matemático por trás disso.

Muitas vezes não percebe-se a aplicação da matemática no cotidiano. Aplicações diretas como operações com dinheiro, são fáceis de serem percebidas. É estabelecida uma relação direta com operações básicas. Mas em outras situações essa assimilação não é tão óbvia. É o caso da topografia que utiliza conceitos de trigonometria, geometria analítica, entre outros.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) destacam a grande aplicabilidade da matemática:

> Mas a vitalidade da Matemática deve-se também ao fato de que, apesar de seu caráter abstrato, seus conceitos e resultados têm origem no mundo real e encontram muitas aplicações em outras ciências e em inúmeros aspectos práticos da vida diária: na indústria, no comércio e na área tecnológica. Por outro lado ciências como Física, Química e Astronomia têm na Matemática ferramenta essencial.

A ideia desse trabalho é, justamente, apresentar os conteúdos de forma contextualizada. Acredita-se que assim, relacionando a matemática com o cotidiano, trabalhando com problemas reais e concretos, é possível dar sentido aos conteúdos. Os alunos podem compreender e visualizar uma aplicabilidade para o que antes parecia tão abstrato.

Brasil (BRASIL, 1998b) corrobora afirmando que é necessário compreender os princípios científicos presentes nas tecnologias e aplicar esses princípios para resolver situações reais ou simuladas, resolvendo os problemas de forma contextualizada.

Essa dissertação será estruturada da seguinte maneira:

No capítulo 1 será apresentada uma revisão histórica da topografia, serão apresentados fatos históricos de aplicação de conceitos topográficos. Entre os aspectos abordados estão, como eram feitos os cálculos antes de se ter materiais específicos para tal, o surgimento de equipamentos e sua recente modernização.

No capítulo 2 serão apresentados os conceitos matemáticos/teóricos dos principais temas abordados no presente trabalho, visando embasar as propostas elaboradas e o que é discutido ao longo dessa dissertação.

No capítulo 3 serão apresentadas justificativas para as escolhas das atividades apresentadas e do assunto eleito. Juntamente com os aspectos que motivaram a autora a tomar tais decisões e os objetivos que pretende alcançar com as atividades.

No capítulo 4 será apresentada uma análise de 8 livros didáticos para discutir como os assuntos abordados nesse trabalho são desenvolvidos nos livros, se é de forma contextualizada, se é apresentado um referencial histórico, entre outros. O objetivo é analisar o que é ofertado como recurso para os professores e verificar a inovação das propostas apresentadas.

No capítulo 5 será apresentado um passo-a-passo da construção do teodolito, que deverá ser construído em conjunto com os alunos durante uma das atividades propostas.

No capítulo 6 serão apresentadas sugestões de atividades para abordar conteúdos de matemática de forma contextualizada. Dentre as atividades apresentadas, parte são destinadas para o Ensino Fundamental e outra para o Ensino Médio, juntamente com as mesmas serão apresentadas suas possíveis soluções. Também constará, nesse capítulo, o objetivo de cada atividade e sugestões para o professor dar sequência a mesma e até mesmo adaptá-la.

Por fim, no capítulo 7 será apresentado a conclusão final, onde serão feitas as considerações da autora sobre o tema deste trabalho e possíveis desdobramentos das propostas apresentadas nessa dissertação. Nos anexos estarão as atividades propostas, prontas para impressão e aplicação em aula.

1 História da topografia

Sempre existiu a necessidade do homem de conhecer o meio em que vive, por questões de sobrevivência, orientação, segurança, navegação, construção, etc. Inicialmente a representação do espaço baseava-se na observação e descrição do meio. Cabe salientar que alguns historiadores afirmam que o homem já fazia mapas antes mesmo de desenvolver a escrita. Com o tempo surgiram técnicas e equipamentos de medição que facilitaram a obtenção de dados para posterior representação. (VEIGA; ZANETTI; FAGGION, 2012)

Etimologicamente a palavra Topografia tem origem na escrita grega e significa *topos* (lugar) e *graphein* (descrever). Desta maneira, segundo Casaca, Matos e Baio (CASACA; MATOS; BAIO, 2005), a topografia é uma ciência que se ocupa da arte de representar, de forma detalhada, o terreno localmente, ou seja, representar uma porção da superfície terrestre.

Conforme Corrêa, Weschenfelder e Baitelli (CORRÊA; WESCHENFELDER; BAITELLI, 2011):

> Desde os primórdios da civilização, ainda em seu estágio primitivo, o homem tratou de demarcar sua posição e seu domínio. Sem saber, ele já aplicava a Topografia. Os babilônicos, os egípcios, os gregos, os chineses, os árabes e os romanos foram os povos que nos legaram instrumentos e processos que, embora rudimentares, serviram para descrever, delimitar e avaliar propriedades tanto urbanas como rurais, com finalidades cadastrais.

Não existe uma data certa para a origem da Cartografia e topografia. Uma das cartas topográficas mais antigas, que se tem conhecimento foi feita por volta do ano de 2500 A.C. Segundo Fonseca (FONSECA, 1973), a origem da carta é babilônica, a mesma foi feita em um ladrilho de argila, encontrado em Ga-Sur, na Mesopotâmia, e representa o rio Eufrates e os acidentes geográficos adjacentes. Na Figura 1 podemos observar o mapa encontrado e um esquema da interpretação do mesmo. Em seu traçado é possível notar a semelhança de seus símbolos com os que são usados ainda hoje na Cartografia.

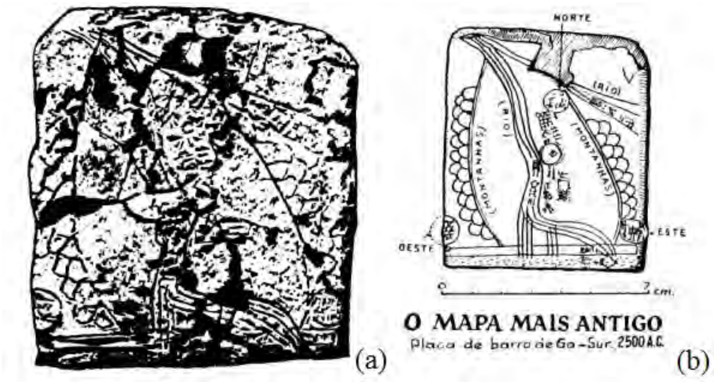


Figura 1 – (a) Mapa encontrado em Ga-Sur. (b) Esquema do mapa.

Fonte: http://www.ufrgs.br/igeo/m.topografia/

Fonseca (FONSECA, 1973) destaca ainda outro mapa, da área oceânica do arquipélago formado pelas Ilhas Marshall, no Pacífico, a nordeste da Austrália. Esse mapa foi feito com varetas de junco representando rumos e distâncias, pequenas conchas representando as ilhas e as linhas curvas representam as direções predominantes das ondas, conforme mostra a Figura 2.

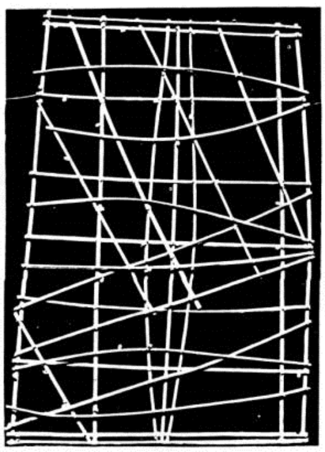


Figura 2 – Mapa das Ilhas Marshall.

Fonte: http://www.ufrgs.br/igeo/m.topografia/

Segundo Corrêa, Weschenfelder e Baitelli (CORRÊA; WESCHENFELDER; BAITELLI, 2011) e Olienik (OLIENIK, 2014), um dos primeiros instrumentos utilizados para levantamentos topográficos, que se tem conhecimento, foi a Groma Egípcia (Figura 3). Era utilizado em áreas planas para alinhar direções até objetos distantes e então, transferir as linhas de visada para o solo, marcando neles linhas retas. Alternativamente era possível marcar os ângulos necessários para erguer construções como as pirâmides.

Figura 3 – Groma Egípcia.

Fonte: http://www.ufrgs.br/igeo/m.topografia/

Em seguida a civilização romana desenvolveu a Dioptra (Figura 4). Segundo Corrêa (CORRÊA, 2016), a dioptra era um instrumento de medida angular através de operações de visadas. E consistia em uma placa circular com ângulos marcados, para medidas de ângulos horizontais e um segundo disco vertical para a medida dos ângulos verticais. E era normalmente utilizado para nivelamento de terrenos e na agrimensura. Esse instrumento é considerado um ancestral do teodolito, pois é desprovido de luneta, mas permite leitura de ângulos verticais e horizontais.

Figura 4 – Dioptra.

Fonte: http://www.archimedesclock.gr/eng

O termo teodolito (do grego: observar + claro), conforme indicado em Casaca, Matos e Baio (CASACA; MATOS; BAIO, 2005), surgiu somente na primeira metade do século XVI. Leonard Digges introduziu o termo em seu livro Pantometria e construiu um teodolito primitivo que recebeu o nome de Theodolitus, era um instrumento com um círculo dividido e um quadrado com uma bússola no centro sem o telescópio. Na Figura 5, tem-se um esquema da utilização do instrumento, que faz parte de seu livro e o Theodolitus.

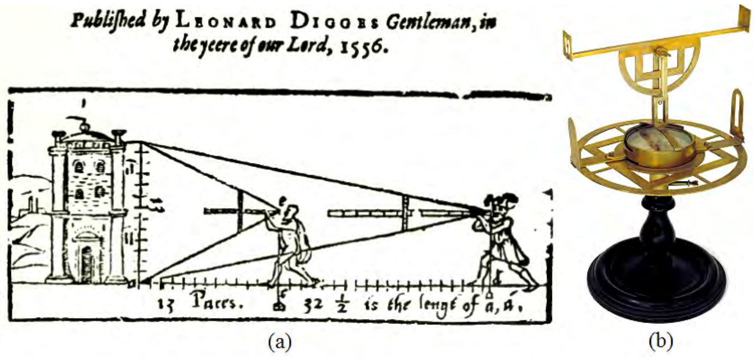


Figura 5 – (a) Esquema da utilização do Theodolitus. (b) Instrumento Theodolitus.

Fonte: http://lensonleeuwenhoek.net/content/how-be-surveyor

Segundo Olienik (OLIENIK, 2014), Jesse Ramsden inventou um motor de divisão mecânico, em 1773, que permitiu maior precisão e produção de teodolitos. Isto ocasionou um aumento da disponibilidade do dispositivo e colocou a Inglaterra na linha de frente da indústria de produção desse equipamento. Mas somente em 1835 o teodolito (Figura 6) foi inventado pelo italiano Ignazio Porro. Baseava-se em um único instrumento com telescópio, com boa capacidade óptica, com limbos horizontais e verticais graduados.

Figura 6 – Teodolito.

Fonte: Elaborado pela autora

Ao longo dos tempos poucas mudanças foram feitas nos teodolitos. Somente em 1950 que ocorreram mudanças significativas, onde foram desenvolvidas medidas eletrônicas de distância. Conforme Abrahão(ABRAHÃO, 2010), estes super-teodolitos com medição eletrônica de distâncias são chamados de Estação Total (Figura 7). Ao comparar a Estação Total com o Teodolito, Abrahão afirma que a Estação Total, além de mais veloz e exata, possibilita a transferência dos dados numéricos diretamente para o computador. E acrescenta: "Por essas vantagens e pelo custo decrescente destas estações eletrônicas, foi feita a substituição gradual de todos os métodos e instrumentos precedentes utilizados até à data." (ABRAHÃO, 2010).

Figura 7 – Estação Total.

Fonte: Elaborado pela autora

Com a evolução tecnológica surgiram, mais recentemente, uma nova geração de Estações Totais, que são automáticas e robotizadas. A Estação Total robotizada (Figura 8) possui um software integrado e permite o manuseio por controle remoto. Comparando com a Estação Total, a Estação Total robotizada ainda tem custo elevado, por esse motivo é normalmente utilizada em obras mais elaboradas como, por exemplo, plataformas e projetos de escavação subterrânea.

Figura 8 – Estação Total robotizada.

Fonte: Elaborado pela autora

Abrahão (ABRAHÃO, 2010) destaca, ainda, outro equipamento utilizado atualmente na topografia, o GPS (sistema de posicionamento global). Baseia-se em um receptor, que tem o seu posicionamento calculado usando sinais transportados por um sistema de tecnologias de posicionamento com recurso de satélites. Esse sistema é atualmente utilizado na composição de redes cartográficas, no estudo de comportamento de estruturas de diversos tipos, entre outros. Mas o GPS (Figura 9) possui algumas limitações, os receptores estão condicionados a bloqueio de sinal, devendo dispor de uma considerável abrangência de céu aberto. Ou seja, o sistema não irá funcionar dentro de espaços confinados ou onde existam barreiras naturais, bem como perto das construções ou superfícies verticais.

Figura 9 – Sistema de Posicionamento Global.

Fonte: Elaborado pela autora

2 Conceitos matemáticos utilizados na topografia

Neste capítulo serão apresentados os conceitos matemáticos dos principais temas abordados no presente trabalho, visando embasar as propostas elaboradas e o que é discutido ao longo dessa dissertação. Na atividade 1, na seção 6.1, página 45, será feita a montagem do teodolito juntamente com os alunos, em seguida o instrumento será utilizado pelos mesmos. Essa atividade possibilitará a abordagem de conteúdos de trigonometria. Já na atividade 2, na seção 6.2, página 52, será feito o cálculo da área de um terreno, esse cálculo deverá ser feito por dois métodos diferentes. Com isso, serão trabalhados conceitos de áreas de figuras geométricas, também será feita a demonstração de uma fórmula para cálculo de área, abordando outros conteúdos básicos. Para fazer a conferência dos resultados, será proposto o cálculo da área com auxilio do software GeoGebra. E na atividade 3, na seção 6.3, página 63 o conteúdo abordado será o sistema cartesiano, através de maquetes e planta do projeto de uma casa.

2.1 Sistema de Coordenadas

Conforme Veiga, Zanetti e Faggion (VEIGA; ZANETTI; FAGGION, 2012), um dos principais objetivos da Topografia é determinar o posicionamento de pontos sobre um plano, ou seja, determinar as coordenadas relativas de pontos. Para isso, é necessário que estas sejam expressas em um sistema de coordenadas. São utilizados basicamente dois tipos de sistemas para definição da posição de pontos no espaço, os sistemas de coordenadas cartesianas e sistemas de coordenadas esféricas.

2.1.1 Sistemas de Coordenadas Cartesianas

Para localização de ponto, como já foi comentado anteriormente, é necessário saber as coordenadas do mesmo. As coordenadas estão relacionadas à um sistema de coordenadas. O sistema de coordenadas cartesianas, no plano, consiste em um par de eixos perpendiculares X e Y, contidos no mesmo plano. A origem desse sistema é o cruzamento desses eixos, conforme indicado na Figura 10. O eixo X é chamado de eixo das abscissas e Y de eixo das ordenadas. Cada ponto P desse sistema corresponde um par ordenado (x, y), onde x é a abscissa e y a ordenada desse ponto.

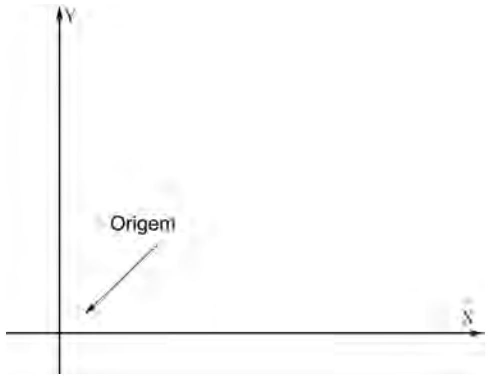


Figura 10 – Sistema de coordenadas cartesianas no plano.

Fonte: Elaborado pela autora

Para representar um ponto no espaço, utilizamos o sistema de coordenadas cartesianas no espaço. Esse sistema consiste em três eixos, mutuamente perpendiculares, X, Y e Z e a origem desse sistema é o cruzamento desses eixos. A posição de um ponto P nesse sistema é definida pelas coordenadas cartesianas (x, y, z), conforme indicado na Figura 11.

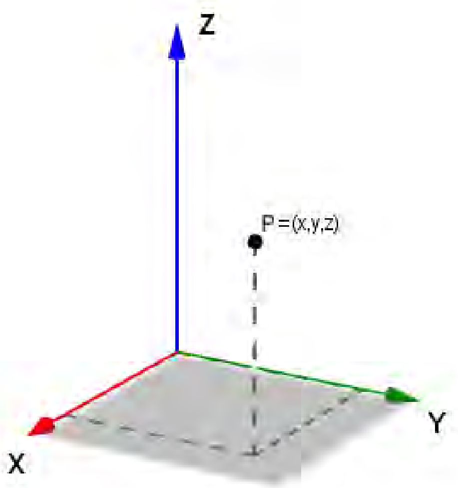


Figura 11 – Sistema de coordenadas cartesianas no espaço.

Fonte: Elaborado pela autora

2.1.2 Sistemas de Coordenadas Esféricas

Além da representação do ponto no sistema de coordenadas cartesianas é possível representá-lo no sistema de coordenadas esféricas. Nesse sistema as coordenadas do ponto P são dadas por (r, β, α), conforme a Figura 12. A distância entre a origem do sistema e o ponto P é dada por r , a projeção do segmento OP sobre o plano OXY (notação adotada por Lima (LIMA, 2002)) é o segmento OR, o ângulo que o segmento OR forma com o semi-eixo OX é chamado de β, e o ângulo formado entre os segmentos OP e OR é α.

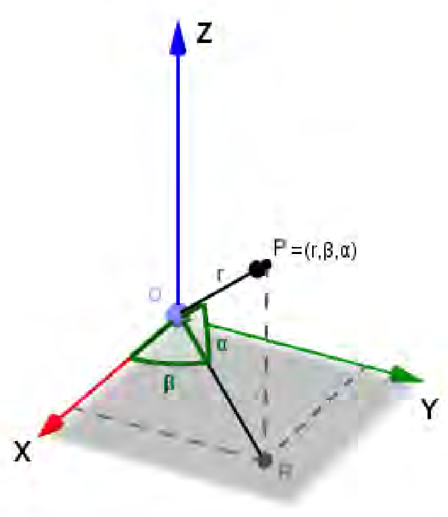


Figura 12 – Sistema de coordenadas esféricas.

Fonte: Elaborado pela autora

O Ponto P, desse sistema, é facilmente expresso em coordenadas cartesianas no espaço. Se (r, β, α) são as coordenadas no sistema de coordenadas esféricas, as coordenadas cartesianas desse mesmo ponto são $(r\cos(\alpha)\cos(\beta), r\cos(\alpha)\sin(\beta), r\sin(\alpha))$.

2.2 Unidades de Medida

As grandezas mais utilizadas na topografia são distâncias e ângulos, além de áreas e volumes. A seguir são apresentadas as unidades de medida, universalmente empregadas, para cada uma dessas grandezas.

2.2.1 Medida de Comprimento

O metro é uma unidade básica para a representação de medidas de comprimento no sistema internacional (SI). Para expressar áreas é utilizado o metro quadrado, salvo em zonas rurais, onde utiliza-se o hectare. E para volumes é empregado o metro cúbico. **Notação:** Metro=m. Metro Quadrado= m^2. Metro Cúbico= m^3. Hectare=ha=10000m^2.

2.2.2 Medida Angular

Conforme Borges (BORGES, 1977), para ângulos, a topografia só emprega os graus sexagesimais ou os grados centésimos. Para fins militares existe ainda o milésimo.

2.2.2.1 Unidade Sexagesimal

O grau sexagesimal é 1/360 da circunferência. Cada grau se divide em 60min e cada minuto em 60s. Logo:

Grau ($^\circ$) $\rightarrow 1^\circ$.

Minuto ($'$) $\rightarrow 1' = 1/60$.

Segundo ($''$) $\rightarrow 1'' = 1/3600$.

2.2.2.2 Unidade Decimal

O Grado centesimal é 1/400 da circunferência. Um grado é dividido em 100 min e cada minuto tem 100 segundos. Logo, a circunferência tem 40.000 min ou 4.000.000 s.

2.3 Revisão de Trigonometria

A trigonometria, talvez mais que outros ramos da matemática, segundo Kennedy (KENNEDY, 1992), desenvolveu-se como resultado da interação de conhecimentos matemáticos e técnicas acessíveis para aplicá-los. Essa interação permitiu a aplicação da teoria na Astronomia inicialmente. E tornou-se muito útil para navegadores e agrimensores.

2.3.1 Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo

A partir do triângulo retângulo da Figura 13, podem ser estabelecidas as relações para seno, cosseno e tangente, indicadas a nas Equações 2.1, 2.2 e 2.3, respectivamente.

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{Cateto\ oposto}{Hipotenusa}, \tag{2.1}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{Cateto\ adjacente}{Hipotenusa}, \tag{2.2}$$

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{Cateto\ oposto}{Cateto\ adjacente}. \tag{2.3}$$

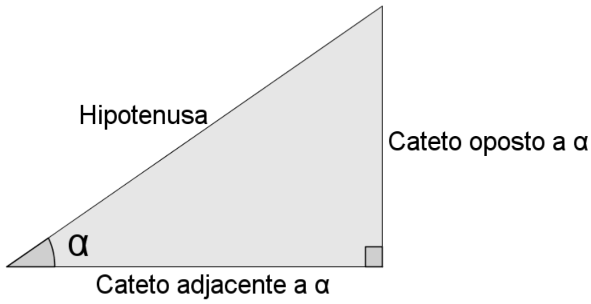


Figura 13 – Triângulo retângulo.

Fonte: Elaborado pela autora

2.3.2 Teorema de Pitágoras

Teorema 2.3.1. O quadrado do comprimento da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.

Considerando a figura 13, conforme o teorema 2.3.1, se a=hipotenusa, b e c são medidas dos catetos, então:

$$a^2 = b^2 + c^2. \tag{2.4}$$

2.3.3 Triângulo Qualquer

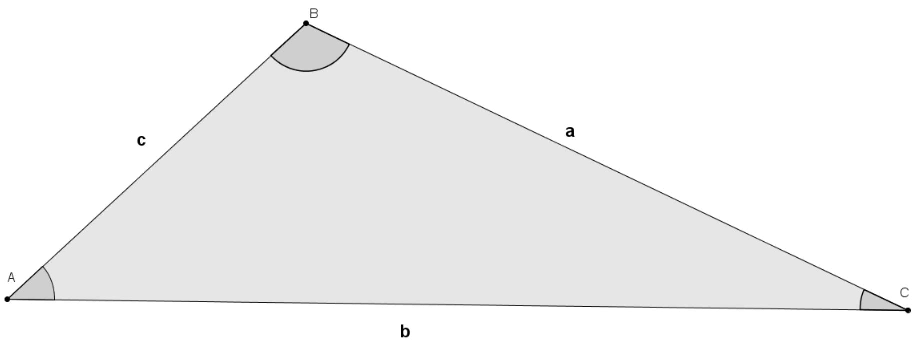


Figura 14 – Triângulo qualquer.

Fonte: Elaborado pela autora

Definição 2.3.1 (Lei dos Senos). Em um triângulo qualquer a razão entre cada lado e o seno do ângulo oposto é constante e igual ao diâmetro da circunferência circunscrita.

Assim,

$$\frac{a}{\text{sen}(A)} = \frac{b}{\text{sen}(B)} = \frac{c}{\text{sen}(C)}. \tag{2.5}$$

Definição 2.3.2 (Lei dos Cossenos). Em um triângulo qualquer, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois, menos o dobro do produto das medidas dos dois lados pelo cosseno do ângulo que eles formam.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A). \tag{2.6}$$

2.4 Escalas

Na topografia é comum a necessidade de se representar no papel a porção da superfície em que se realizou o levantamento. Nas plantas, para a planimetria, e nos perfis, para a altimetria, é necessário usar uma escala para reduzir as medidas reais à valores que caibam no papel.

Podemos definir escala, de forma resumida, como sendo a relação entre o valor de uma distância medida no desenho e sua correspondente no terreno. Por exemplo, uma escala $1 : 100$ (Lê-se um para cem), significa que cada unidade, representada no papel, equivale a cem unidades reais, ou seja, cada $100m$ na realidade valerão $1m$ no desenho.

A seguir é apresentado na Tabela 1, as principais escalas utilizadas por engenheiros e as suas respectivas aplicações.

Tabela 1 – Principais escalas utilizadas por engenheiros e as suas respectivas aplicações.

Aplicação	**Escala**
Detalhes de terrenos urbanos	1:50
Planta de pequenos lotes e edifícios	1:100 e 1:200
Planta de arruamentos e loteamentos urbanos	1:500 e 1:1000
Planta de propriedades rurais	1:1000 , 1:2000 e 1:5000
Planta cadastral de cidades e grandes propriedades rurais ou industriais	1:5000 1:10000 1:25000
Cartas de municípios	1:50000 1:100000
Mapas de estados, países, continentes, etc.	1:200000 a 1:10000000

Fonte:(VEIGA; ZANETTI; FAGGION, 2012)

2.5 Áreas

Na topografia é muito comum a necessidade de determinar a área de regiões, por diversos motivos. Um exemplo da importância da determinação da área é na situação de compra ou venda de imóveis. Saber a área do imóvel permite uma avaliação mais precisa do mesmo. As principais maneiras para a determinação de áreas, na topografia, são por meio de processos computacionais, mecânicos, gráficos e analíticos.

O processo computacional é uma forma bem prática de calcular a área. Muito utilizada atualmente, consiste em inserir os pontos que definem a área em um programa gráfico, como, por exemplo, o AutoCAD, e o mesmo calcula a área por métodos analíticos. Já no processo mecânico, segundo Veiga, Zanetti e Faggion (VEIGA; ZANETTI; FAGGION, 2012) "utiliza-se um equipamento denominado de planímetro. Este consiste em dois braços articulados, com um ponto fixo denominado de pólo e um cursor na extremidade dos braços, o qual deve percorrer o perímetro do polígono que se deseja calcular a área". Os outros dois processos serão explicados nas seções 2.5.1 e 2.5.2 , de forma mais detalhada.

2.5.1 Processo Gráfico

Este processo consiste em dividir a área a ser avaliada em figuras geométricas, onde seja possível calcular suas áreas, como triângulos e quadrados. A área final será determinada pelo somatório de todas as áreas das figuras geométricas. A Figura 15 exemplifica o método gráfico, através do processo de divisão da área em figuras geométricas equivalentes, ou seja, a área da figura, nesse exemplo, será igual ao somatório das áreas dos triângulos A, B e C.

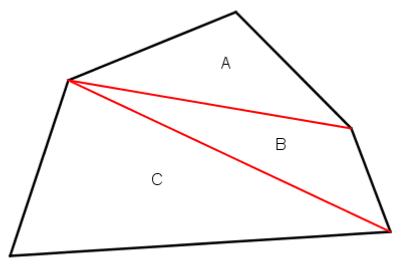


Figura 15 – Exemplo do processo gráfico.

Fonte: Elaborado pela autora

2.5.2 Processo Analítico

Neste processo a área de uma determinada região é calculada a partir das coordenadas dos seus vértices. Com auxílio de fórmulas matemáticas que permitem a realização dos cálculos desejados. A seguir, é apresentada uma dedução da fórmula que possibilita o cálculo da área de maneira prática. Esta é uma adaptação das deduções apresentadas por Borges (BORGES, 1977) e Veiga, Zanetti e Faggion(VEIGA; ZANETTI; FAGGION, 2012).

O polígono definido pelos vértices A, B, C e D (Figura 16) é o polígono que se pretende calcular a área.

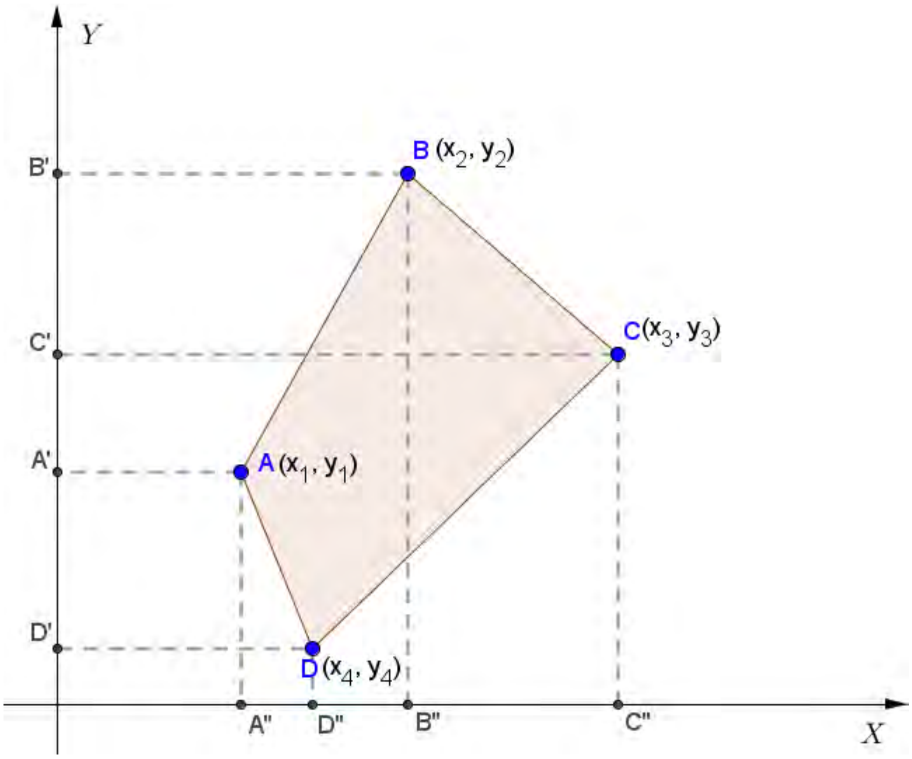


Figura 16 – Polígono.

Fonte: Elaborado pela autora

Para determinar a área do polígono $ABCD$, irá se calcular a área do polígono $B'BCDD'$ e subtrair a área do polígono $B'BADD'$. A área do polígono $B'BCDD'$ pode ser calculada a partir das áreas dos trapézios que o compõe (Figura 17(a)), o mesmo serve para o polígono $B'BADD'$(Figura 17(b)).

A área de um trapézio de bases B e b, com altura h é:

$$A = \frac{(B + b)h}{2}. \tag{2.7}$$

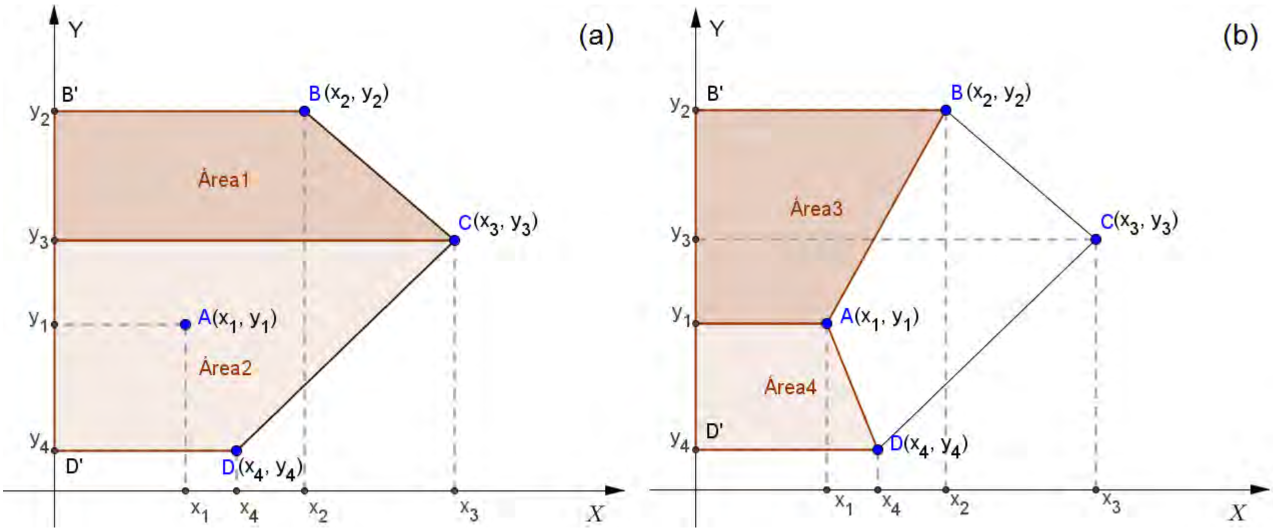


Figura 17 – Trapézios que compõe o polígono: (a) $B'BCDD'$ e (b) $B'BADD'$.

Fonte: Elaborado pela autora

Então a área do polígono ABCD, denotada por A, será:

$$A = \acute{a}rea_1 + \acute{a}rea_2 - \acute{a}rea_3 - \acute{a}rea_4. \tag{2.8}$$

A $\acute{a}rea_1$ é a área de um trapézio de altura $h = y_2 - y_3$, base menor $b = x_2$ e base maior $B = x_3$, então, pela equação 2.7:

$$\acute{a}rea_1 = \frac{(x_2 + x_3)}{2}(y_2 - y_3). \tag{2.9}$$

Analogamente podem ser calculadas as demais áreas, logo a equação 2.8 pode ser reescrita como:

$$A = \frac{(x_2 + x_3)}{2}(y_2 - y_3) + \frac{(x_3 + x_4)}{2}(y_3 - y_4) - \frac{(x_2 + x_1)}{2}(y_2 - y_1) - \frac{(x_1 + x_4)}{2}(y_1 - y_4). \tag{2.10}$$

Efetuando os produtos da equação 2.10:

$$2A = x_2y_2 - x_2y_3 + x_3y_2 - x_3y_3 + x_3y_3 - x_3y_4 + x_4y_3 - x_4y_4 + ...$$

$$... - x_2y_2 + x_2y_1 - x_1y_2 + x_1y_1 - x_1y_1 + x_1y_4 - x_4y_1 + x_4y_4. \tag{2.11}$$

Simplificando a equação 2.11 e agrupando os termos positivos e os negativos:

$$2A = x_3y_2 + x_4y_3 + x_2y_1 + x_1y_4 - (x_2y_3 + x_3y_4 + x_1y_2 + x_4y_1). \tag{2.12}$$

A equação 2.12 pode ser representada genericamente por:

$$2A = \sum(x_{(i+1)}.y_i) - \sum(x_i.y_{(i+1)}). \tag{2.13}$$

Será denotado $\sum(x_{(i+1)}.y_i) = \sum_1$ e $\sum(x_i.y_{(i+1)}) = \sum_2$.

Utilizando-se a equação 2.12 pode-se montar facilmente uma tabela com as coordenadas dos pontos, com o cuidado de repetir a coordenada do primeiro ponto no final da tabela, e multiplicando-se de acordo com o esquema a seguir, obtêm-se a área do polígono.

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{x_i} \arrow[d, dotted] & \boxed{y_i} \arrow[d, dotted] & \\
 & x_1 \arrow[dr] & y_1 \arrow[dl] & \\
y_1.x_2 & x_2 \arrow[l] \arrow[dr] & y_2 \arrow[r] \arrow[dl] & x_1.y_2 \\
y_2.x_3 & x_3 \arrow[l] \arrow[dr] & y_3 \arrow[r] \arrow[dl] & x_2.y_3 \\
y_3.x_4 & x_4 \arrow[l] \arrow[dr] & y_4 \arrow[r] \arrow[dl] & x_3.y_4 \\
y_4.x_1 \arrow[d, dotted] & x_1 \arrow[l] & y_1 \arrow[r] & x_4.y_1 \arrow[d, dotted] \\
\sum_1 & & & \sum_2
\end{tikzcd}$$

Sua área será:

$$A = \frac{\sum_1 - \sum_2}{2}. \tag{2.14}$$

3 Justificativa e Objetivos

A autora, desse trabalho, cursa engenharia civil e percebeu, ao longo do curso, que poderia aliar conhecimentos de engenharia em aulas de matemática, trabalhando assim de forma contextualizada. Justamente por isso, decidiu apresentar, nesse trabalho, propostas de atividades relacionando os conteúdos com o cotidiano do estudante. Como já foi mencionado anteriormente, trabalhar dessa forma contribui para a aprendizagem significativa do aluno.

As Diretrizes Curriculares Nacionais para o ensino médio assim (BRASIL, 1998a) explicam a aprendizagem em contexto:

> O tratamento contextualizado do conhecimento é o recurso que a escola tem para retirar o aluno da condição de espectador passivo. Se bem trabalhada, permite que, ao longo da transposição didática, o conteúdo de ensino provoque aprendizagens significativas que mobilizem o aluno e estabeleçam entre ele e o objeto do conhecimento uma relação de reciprocidade. A contextualização evoca por isso áreas, âmbitos ou dimensões presentes na vida pessoal, social e cultural, e mobiliza competências cognitivas já adquiridas. (Parecer 15/98 da Câmara de Educação Básica do Conselho Nacional de Educação).

A autora desse trabalho não leciona, mas enquanto esteve na graduação em matemática fez parte de inúmeros projetos. Onde teve oportunidade de ter contato com diversas turmas, ministrando aulas e oficinas. Dentre os projetos dos quais fez parte, destaca-se o PIBID (Programa Institucional de Bolsas de Iniciação a Docência), que incentiva a elaboração de atividades diferenciadas, para que o aluno seja mais participativo e o aprendizado seja significativo, ou seja, o aluno realmente compreenda o que está estudando.

Essas atividades são propostas pelos estudantes de graduação que fazem parte do programa, a autora teve a oportunidade de propor a confecção do teodolito para seu grupo e aplicar em uma turma de 8ª série. Na ocasião ainda não tinha sido feito um estudo elaborado sobre topografia e o próprio teodolito, o que motivou um estudo mais aprofundado neste trabalho. A confecção do teodolito é uma das propostas sugeridas, seguida da utilização e aplicação do mesmo.

A aplicação do teodolito vai de encontro com a recomendação das Orientações Curriculares para o Ensino Médio, "...o estudo da razão trigonométrica tangente pela sua importância na resolução de diversos tipos de problemas. Problemas de cálculos de distâncias inacessíveis são interessantes aplicações de trigonometria, e esse é um assunto que merece ser priorizado na escola." (BRASIL, 2008).

Outro destaque feito por Brasil (BRASIL, 2008) é sobre o estudo da geometria, onde afirma que o mesmo deve possibilitar a resolução de problemas práticos do cotidiano. Isso já foi amplamente defendido nesse trabalho. Entre os exemplos citados, para o estudo da geometria, estão: orientar-se no espaço, ler mapas e comparar distâncias percorridas. É exatamente isso que é proposto na sugestão de atividade sobre coordenadas cartesianas.

E uma terceira atividade que é sugerida é o cálculo da área de uma figura por dois métodos. Além, da já citada, contextualização do conteúdo, é mostrado um mesmo problema resolvido por diferentes maneiras.

Das atividades apresentadas, a de construção e aplicação do teodolito (Atividade 1, página 45) e a atividade de coordenadas cartesianas (Atividade 3, página 63) são destinadas para o Ensino Fundamental e a atividade sobre cálculo de áreas (Atividade 2, página 52) é destinada ao Ensino Médio. Mas isso não impede que o professor adapte as atividades e aplique em outras séries. A atividade do teodolito (seção 6.1), por exemplo, também é muito interessante para o Ensino Médio.

O objetivo deste trabalho é trazer essas sugestões para os professores aplicarem em suas aulas. As propostas foram elaboradas e discutidas, apresentando possíveis soluções para as mesmas e também possíveis adaptações e, em alguns casos, outras aplicações, foram apresentadas. Todas as atividades visam melhorar o aproveitamento/aprendizagem dos alunos e servem como alternativa para introduzir ou justificar o ensino destes conteúdos para os estudantes. Os professores têm com elas uma oportunidade de exercer uma prática docente diferenciada, alternativa para se afastar do ensino tradicional.

4 Análise de livros didáticos

Nesse capítulo será apresentada uma análise de livros didáticos do Ensino Fundamental e Médio. Serão discutidos a forma em que os conteúdos são apresentados nos livros, os tipos de exercícios que são realizados, entre outros aspectos. Essa análise será feita mais especificadamente com os conteúdos abordados nesse trabalho. O conteúdo de Coordenadas Cartesianas será avaliado nos livros de Ensino Fundamental, o conteúdo de áreas nos livros de Ensino Médio e o conteúdo de trigonometria em ambos. Embora a atividade de trigonometria (Atividade 1) seja uma atividade sugerida para o Ensino Fundamental, ela pode ser adaptada, tranquilamente, para o Ensino Médio.

Será avaliado se o livro traz dados históricos e como ele apresenta esses dados, se existe questionamento sobre eles ou não, ou seja, o texto serve apenas como complemento. Outro aspecto a ser avaliado é se, além de exercícios diretos (exercícios de aplicação direta do conteúdo), são apresentados exercícios contextualizados. Além disso, será observado se para introduzir o conteúdo é apresentado alguma aplicação no cotidiano ou até mesmo aspectos históricos, que também foi apresentado como item de avaliação.

4.1 Livros de Ensino Fundamental

O livro Matemática e Realidade (IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2005) introduz o conteúdo de coordenadas cartesianas relembrando pontos na reta e depois mostrando como representa-se um par ordenado. Explicando o que são eixos, o que é ordenada e o que é abscissa. Em seguida traz exercícios diretos, para identificar pares ordenados de pontos no plano cartesiano e localizar pontos no plano cartesiano de pares ordenados dados. Na sequência do capítulo, relaciona o conteúdo de coordenadas cartesianas com gráfico de equações. Somente no final do capítulo, depois de abordar outros conteúdos, traz um texto complementar que trata de aspectos históricos do eixo cartesiano.

Já o livro Matemática na medida certa (JAKUBO; LELLIS; CENTURIÓN, 2005) traz o conteúdo de coordenadas cartesianas juntamente a gráficos de uma função. Explicando os mesmos aspectos abordados por (IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2005) e sugerindo exercícios semelhantes. Os autores deste livro (JAKUBO; LELLIS; CENTURIÓN, 2005) não apresentam nenhum dado histórico a cerca deste conteúdo. Quando trabalham trigonometria também não fazem nenhuma menção ao vasto material histórico que se tem acesso. Mas apresenta alguns exercícios contextualizados e traz uma breve explicação sobre o teodolito, comentando que é um “aparelho especial” para medir ângulos. Uma atividade bem interessante sugerida no livro é a construção de um “transferidor especial”, que se baseia em um transferidor com um canudo, para medir alturas indiretamente.

No livro Matemática: Pensar & Descobrir (GIOVANNI; GIOVANNIJR., 2005), o conteúdo coordenadas cartesianas é apresentado em um capítulo separado. Embora nenhum aspecto histórico seja mencionado, diferente dos dois livros já avaliados, é sugerido um leitura inicial aos alunos. É apresentado inicialmente um texto sobre longitude e latitude, em seguida questões sobre posicionamento em mapas, para, então, introduzir, através da comparação com o que foi abordado nas leituras, os conceitos de coordenadas cartesianas. Além disso, boa parte dos exercícios propostos traz algum tipo de contextualização. Ao trabalhar o conteúdo de trigonometria, (GIOVANNI; GIOVANNIJR., 2005), além de apresentar exercícios contextualizados, introduz o conteúdo com dados históricos e aplicações da trigonometria, seguido de questionamentos sobre o mesmo. O livro traz uma imagem de um homem operando um equipamento topográfico, provavelmente um nível ótico, mas nenhum comentário é feito sobre isso. Apenas é descrito que existem aplicações da trigonometria na engenharia, sem maiores detalhes.

No livro Matemática: Compreensão e prática (SILVEIRA; MARQUES, 2008) o conteúdo de coordenadas cartesianas é apresentado no apêndice, provavelmente já foi abordado em outro volume da obra. Então, nesse volume, a apresentação é feita de maneira simples, seguida de exercícios. Quando trabalha o conteúdo de trigonometria, o livro traz uma breve descrição de aspectos históricos e várias aplicações reais. Os exercícios solicitados são em parte contextualizados e outra parte exercícios diretos. O que (SILVEIRA; MARQUES, 2008) traz, diferente de todos os livros anteriores, são exercícios contextualizados e resolvidos. Em um das apresentações de exercícios resolvidos, o contexto do problema envolve uma situação com uso do teodolito. É explicado o que é o teodolito, de maneira básica, nessa situação e posteriormente o livro ainda apresenta como curiosidade, de maneira bem completa, o que é o teodolito e sua aplicação.

O livro Projeto radix: matemática (RIBEIRO, 2011) traz um capítulo só para coordenadas cartesianas. O capítulo começa com um texto introdutório, seguido de questões sobre o mesmo. Em seguida uma situação de mesas na sala de aula é apresentada para, então, introduzir o conteúdo de coordenadas cartesianas. Ao longo do capítulo são apresentados aspectos históricos sobre o conteúdo e outras aplicações como, por exemplo, localização de pontos em um mapa. O conteúdo de trigonometria também é apresentado através de aspectos históricos sobre o mesmo e aplicações. Entre elas, uma que ganha destaque é na topografia, é explicado o que é um topógrafo e o que é um teodolito. Os exercícios são em sua maioria contextualizados. Assim como (JAKUBO; LELLIS; CENTURIÓN, 2005), (RIBEIRO, 2011) sugere a construção de um equipamento para medir alturas indiretamente, diferente do que é sugerido pelo primeiro, nesse livro o objeto recebe o nome de teodolito, fazendo menção ao equipamento apresentado anteriormente, e é feito com materiais mais complexos como potes com tampa, arame e linha, além dos solicitados para construção do "transferidor especial".

4.2 Livros de Ensino Médio

No livro Matemática fundamental (GIOVANNI; BONJORNO; GIOVANNIJR., 1994) o conteúdo trigonometria é introduzido por um texto com fatos históricos sobre o mesmo. O livro apresenta situações problema, ou seja, exercícios contextualizados resolvidos e sugere outros para resolução. Embora no texto introdutório se comente que a trigonometria possui aplicações na engenharia e topografia, não aparecem, ao longo do material, maiores informações sobre o assunto. Diferente do modo como é trabalhada a trigonometria, o conteúdo de áreas possui exercícios sugeridos mais diretos, poucos são contextualizados. Além de apresentar todas fórmulas clássicas para o cálculo de áreas das diferentes figuras geométricas é apresentado uma fórmula para a área de região triangular (que sejam conhecidas as medidas de dois lados e a medida do ângulo formado por esses lados). Vários exercícios propostos sobre determinação de áreas, para a resolução, necessitam que a área seja dividida em outras conhecidas.

No livro Matemática: ensino médio (YOUSSEF; SOARES; FERNANDEZ, 2009) o conteúdo de trigonometria também é introduzido por um texto com fatos históricos e também traz exercícios contextualizados que tem sua resolução apresentada. O livro traz, em vários capítulos, um espaço intitulado “De olho no mundo do trabalho.”, onde são apresentados profissões atuais que utilizem do conteúdo apresentado. Nesse capítulo, esse espaço apresenta o trabalho do topógrafo e descreve o que é feito por ele e como é aplicada a trigonometria. O conteúdo de áreas de figuras planas não possui um capítulo específico nesse livro, embora seja um volume único, parte do conteúdo é visto quando é trabalhado volume de prismas e área dos mesmos.

No livro Matemática (DANTE, 2009), assim como os outros dois, já analisados, apresenta exercícios contextualizados e fatos históricos sobre trigonometria são apresentados. Nesse livro, embora seja comentado que a trigonometria possui aplicações na topografia e embora exista exercício que comente sobre topógrafo e o uso do teodolito, não há uma explicação do seu funcionamento, nem do que efetivamente se trata. Diferente do livro anterior, esse traz um capítulo só para área de figuras planas, onde são apresentadas diversas fórmulas para o cálculo de área de diferentes figuras geométricas. Uma fórmula que difere das que são normalmente trabalhadas é a área da região triangular sendo conhecido os três lados, que é apresentada como fórmula de Heron. Os exercícios sugeridos são, em grande parte, contextualizados e vários deles necessitam que a figura, do qual deseja-se calcular a área, seja dividida em outras figuras, que se tenha conhecimento da área ou que seja possível calculá-la.

5 Construção do Teodolito

Nesse capítulo será apresentado um passo-a-passo da construção do teodolito para utilização na sugestão de atividade proposta a seguir (Atividade 1, página 45). Este teodolito deverá ser construído juntamente com os alunos. É importante que o professor tenha total controle de sua turma, para evitar imprevistos.

Os materiais necessários são materiais alternativos de baixo custo. O ideal é ver do que a escola dispõe e calcular o que será gasto para o total de alunos. Possivelmente serão poucas folhas de cartona, uma caixa de alfinetes e somente uma argila. O professor tem também a liberdade de substituir os materiais que julgar necessário.

Material necessário:

- Cartona;
- Isopor (20mm ou mais);
- Argila;
- 5 alfinetes;
- Fio de nylon (Linha de pesca);
- Canudo de plástico grosso;
- Fita adesiva;
- Tesoura;
- Transferidor;
- Régua;
- Estilete (Apenas para uso do professor).

Figura 18 – Material necessário.

Fonte: Elaborado pela autora

Sugestão: É aconselhável que o professor, antes da aula, divida a cartona em quadriláteros um pouco maiores que o transferidor. E corte o isopor, com auxílio do estilete, em tiras de aproximadamente 25 cm de comprimento e 2 cm de largura, e quadrados de aproximadamente 12cm x12cm. Com isso poupa-se tempo da aula e evita-se desperdício de material.

Construção:

1) O aluno deverá traçar um segmento de reta no pedaço de cartona e marcar um traço aproximadamente no meio dessa semi-reta, conforme indicado na Figura 19.

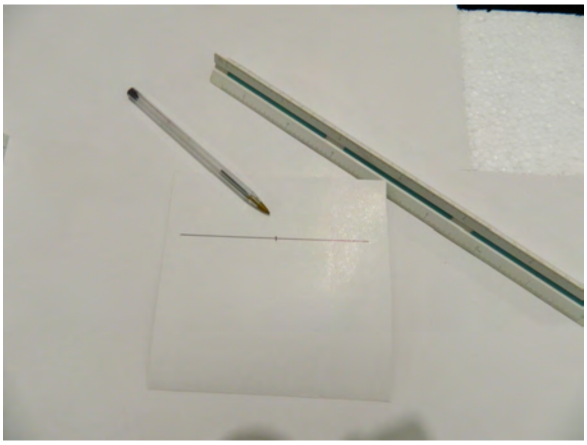


Figura 19 – Traço da reta.

Fonte: Elaborado pela autora

2) Com o auxílio do transferidor, marcar os ângulos, de 5° em 5°, conforme indicado na Figura 20.

Figura 20 – Marcação dos ângulos.

Fonte: Elaborado pela autora

3) Indicar, na parte interna da circunferência, os valores dos ângulos marcados. Os ângulos marcados vão de zero a 90°, começando na extremidade direita da reta traçada com 90°, descendo no sentido anti-horário até zerar e depois crescendo até chegar novamente aos 90°. Após, cortar toda a borda da semicircunferência, deixando apenas um pedaço (meio da semi-reta). A indicação dos ângulos e o pedaço que não deve ser cortado são mostrados na Figura 21.

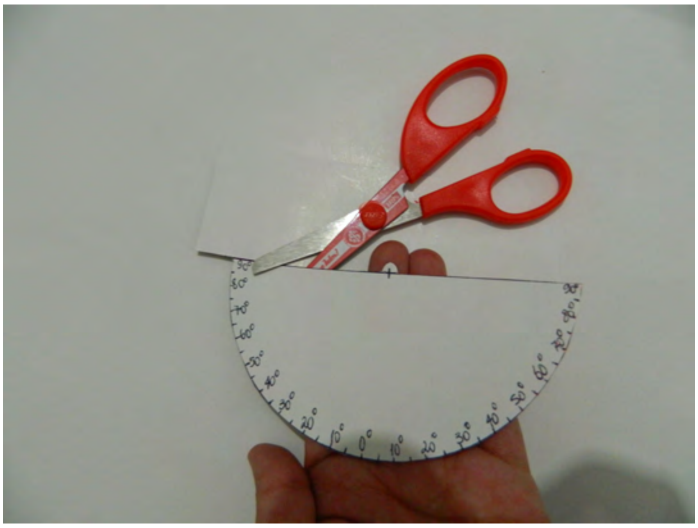


Figura 21 – Indicação dos ângulos.

Fonte: Elaborado pela autora

Sugestão: O professor pode fazer fotocópias de um transferidor e disponibilizar para seus alunos. Isso não foi feito aqui, pois a ideia é apresentar a construção do teodolito conforme foi realizada em sala de aula. Mas acredita-se que disponibilizando as fotocópias a precisão será maior e agilizará a construção do teodolito. Se optar pela fotocópia, as etapas 2 e 3 são desnecessárias. A única ressalva é que, quando for utilizar o teodolito, o aluno deverá ficar atento que ângulo o teodolito estará marcando, pois como o mesmo estará utilizando uma fotocópia de um transferidor, que possui uma graduação já definida, diferente da apresentada aqui. Isso ficará mais claro a seguir.

4) Com auxílio de um alfinete, fazer uma perfuração bem no cruzamento do traço e da reta (Centro do semicírculo), conforme a Figura 22 *(Tome cuidado com esta etapa! Auxilie e supervisione seus alunos sempre.)*.

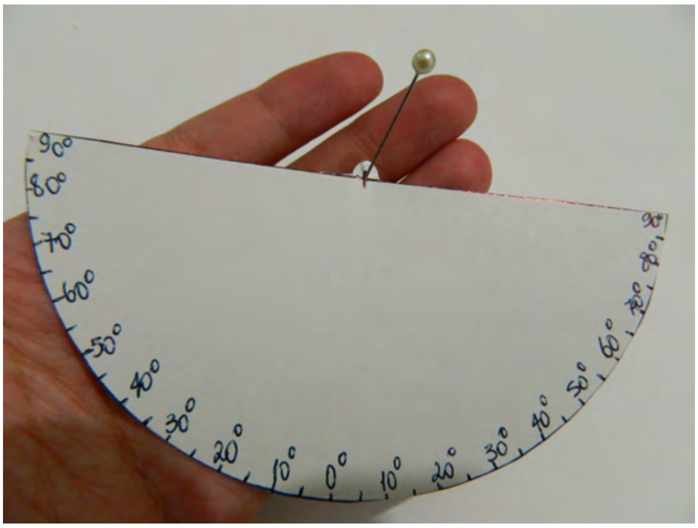


Figura 22 – Perfuração na marcação do grau zero.

Fonte: Elaborado pela autora

5) Passar o fio de nylon por este furo (Figura 23(a)), dobrar a ponta para trás e colar com fita adesiva sobre o restante do fio, conforme indicado no detalhe da Figura 23 (b).

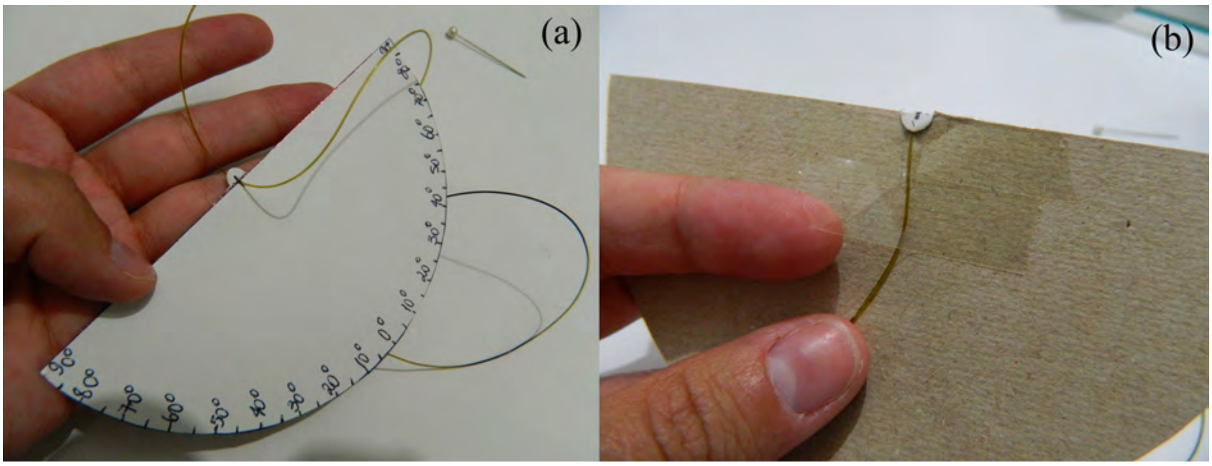


Figura 23 – (a)Passagem do fio de nylon. (b) Detalhe.

Fonte: Elaborado pela autora

6) Fixar, com auxílio da fita adesiva, o canudo no diâmetro do semicírculo, como indicado na Figura 24.

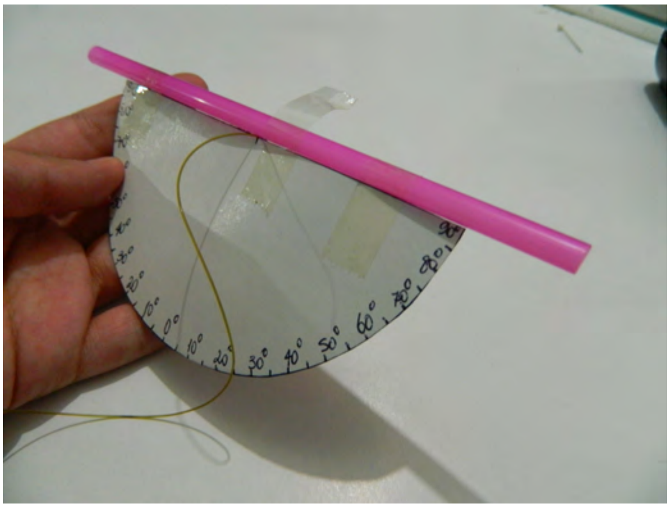


Figura 24 – Fixação do canudo.

Fonte: Elaborado pela autora

7) Montar a base do teodolito. Para isso, basta unir a tira e o quadrado de isopor. A união é feita com um alfinete de cada lado. Colocado inclinado, conforme indica a Figura 25.

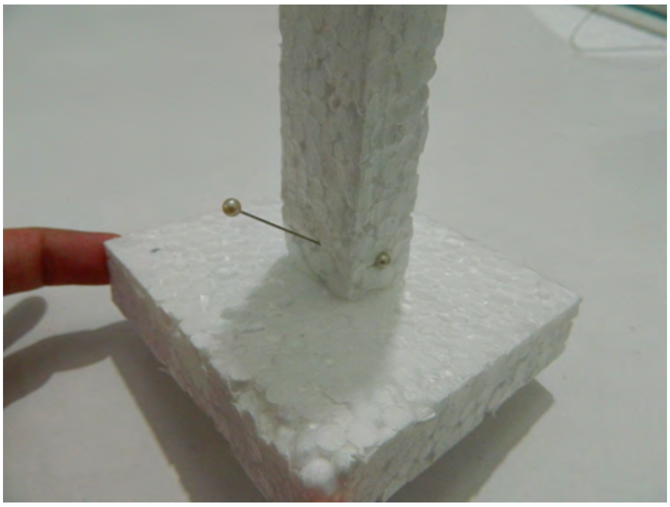


Figura 25 – Base do teodolito.

Fonte: Elaborado pela autora

8) Agora que a base está pronta, unir a estrutura finalizada na etapa 6 com a base da etapa 7. Essa união será com um alfinete (Isso irá permitir o movimento do teodolito). Para funcionar de maneira correta é importante que essa fixação seja feita pelo mesmo ponto que foi feito a perfuração anterior, conforme detalhe da Figura 26.

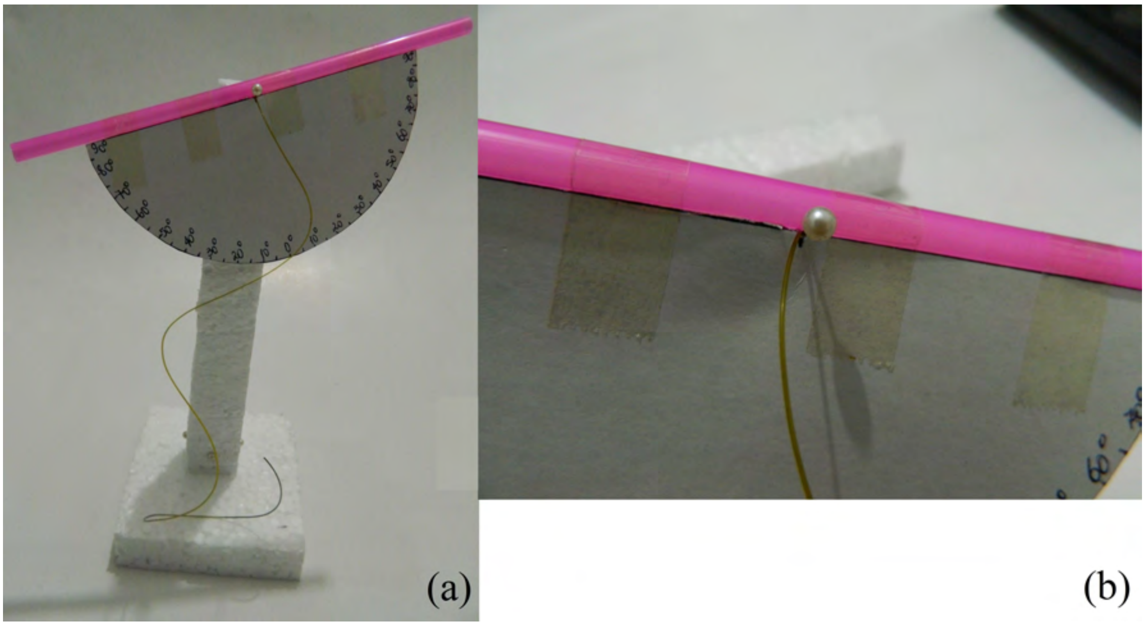


Figura 26 – (a)Junção das partes da estrutura com a base. (b)Detalhe.

Fonte: Elaborado pela autora

9) Por fim, para que a linha fique “reta” fazer um peso, utilizando argila. Conforme indicado na Figura 27. E prontinho! O teodolito está pronto para o uso!

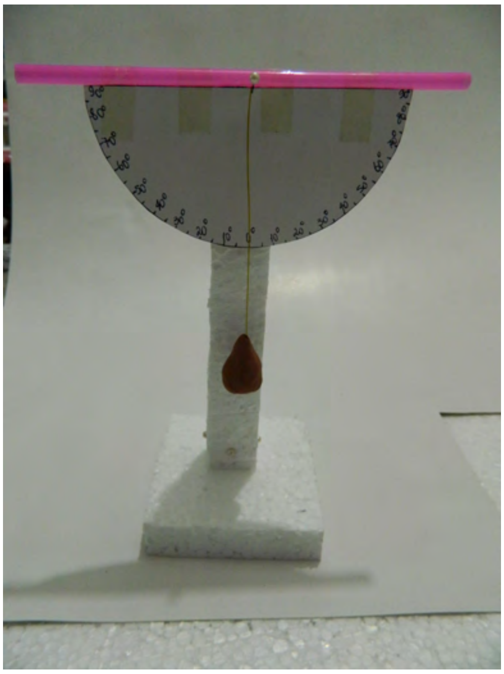


Figura 27 – Teodolito finalizado.

Fonte: Elaborado pela autora

6 Atividades Propostas

Nesse capítulo serão apresentadas sugestões de atividades para abordar conteúdos de matemática de forma contextualizada. O contexto que se decidiu trabalhar foi a topografia, por ser uma área da engenharia em que se aplicam vários conhecimentos matemáticos do Ensino Fundamental e Médio, de forma relativamente simples.

O professor deverá analisar as atividades apresentadas aqui e adaptá-las conforme necessário. Mendes (MENDES, 2001) defende justamente isso, que haja uma reflexão diante de atividades propostas por outros autores, para que as mesmas possam auxiliar no desenvolvimento das aulas e não se transformem em um manual. É necessário conhecer as turmas em que se pretende aplicar a atividade, suas limitações e necessidades maiores.

As atividades propostas abordam assuntos do Ensino Fundamental e Médio. Para cada atividade exposta, é apresentada uma possível solução, e também os objetivos da mesma. São discutidas as propostas, com apresentação de possíveis desdobramentos e sugestões para o professor.

6.1 Atividade 1 - Utilizando o teodolito no ensino da trigonometria.

Objetivos:

★ Fazer com que os alunos relacionem o conteúdo trabalhado com a realidade.

★ Estimular o interesse dos alunos através da construção e manuseio do teodolito.

Pré-requisitos: relações trigonométricas.
Material necessário: todos os itens descritos na confecção do teodolito (veja página 39). Além de fita métrica ou trena e caderno para anotações, esquematização e cálculo.
Tempo necessário: 4h/aula.

Sugestão: Mesmo que já tenha-se trabalhado o conteúdo de relações trigonométricas, sugere-se uma revisão. Esta revisão, se a escola possibilitar, deverá ser feita preferencialmente com slides. Como a ideia é trabalhar a construção do teodolito, além de apresentar os conteúdos matemáticos que se aplicam a este utensílio, seria interessante mostrar fotos de teodolitos (Estações Totais) verdadeiros e falar sobre suas aplicações na engenharia.

A seguir é exibido um exemplo/proposta de um material a ser apresentado para os alunos. Neste material é apresentada uma motivação para a construção e aplicação do teodolito, como foi sugerido anteriormente.

Aplicação da trigonometria na topografia.

Elaborado por Roberta Michaello

Existem situações em que é necessário conhecer a distância entre dois pontos, porém não é possível determiná-la diretamente.

Exemplo: Como determinar a altura do Pão de Açúcar?

Fonte: http://aloriodejaneiro.com

Elaborado por Roberta Michaello

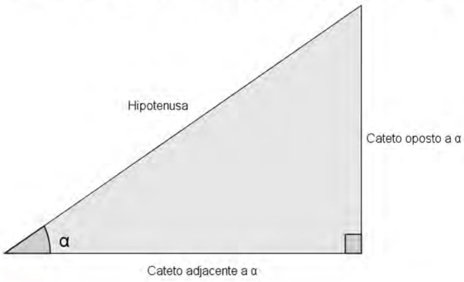
Para resolver situações desse tipo, topógrafos e engenheiros precisam aplicar alguns conceitos matemáticos importantes .

Na maioria das vezes, são utilizadas as relações trigonométricas no triângulo retângulo.

Elaborado por Roberta Michaello

Triângulo retângulo

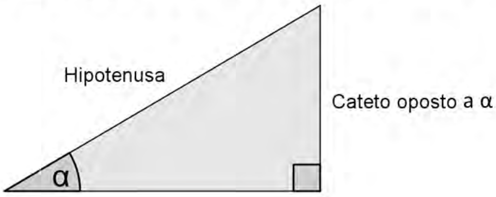
Triângulo retângulo é todo triângulo que apresenta um ângulo reto, ou seja, um ângulo de 90°.



Elaborado por Roberta Michaello

Seno

Seno do ângulo α é a razão entre as medidas do cateto oposto a α e a hipotenusa do triângulo.

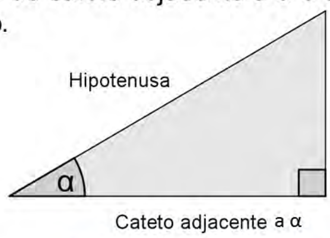


$$\boxed{sen\,\alpha = \frac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{hipotenusa}}$$

Elaborado por Roberta Michaello

Cosseno

Cosseno do ângulo α é a razão entre as medidas do cateto adjacente a α e a hipotenusa do triângulo.

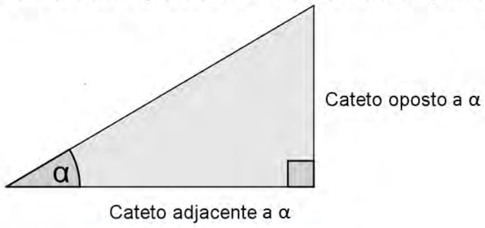


$$\boxed{\cos\alpha = \frac{cateto\ adjacente\ a\ \alpha}{hipotenusa}}$$

Elaborado por Roberta Michaello

Tangente

Tangente do ângulo α é a razão entre as medidas do cateto oposto a α e do cateto adjacente a α.



$$\boxed{tg\,\alpha = \frac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{cateto\ adjacente\ a\ \alpha}}$$

Elaborado por Roberta Michaello

Um instrumento muito utilizado por engenheiros e topógrafos, onde se aplicam esses conceitos, é o Teodolito.


Fonte: Elaborado pela autora


Fonte: Elaborado pela autora

Elaborado por Roberta Michaello

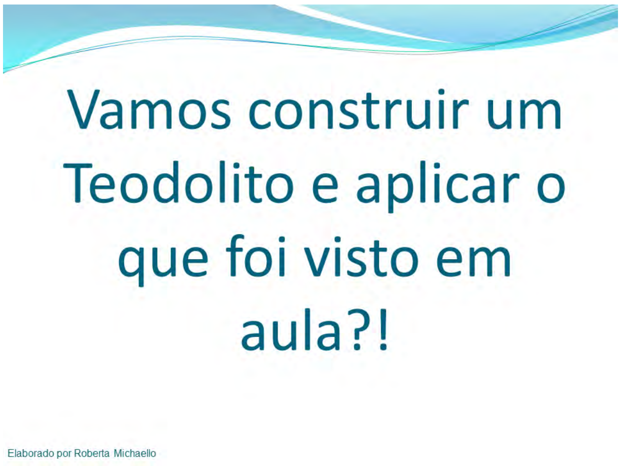
O QUE É UM TEODOLITO?

É um instrumento óptico utilizado principalmente na construção civil. Um conjunto óptico sobre uma base na forma de tripé, permite que se mire em referenciais. Dependendo do objetivo da utilização, podemos determinar ângulos verticais e horizontais


Fonte: Elaborado pela autora


Fonte: Elaborado pela autora

Elaborado por Roberta Michaello



6.1.1 Atividade 1

Depois de apresentar uma motivação para a construção do teodolito, realizar a sua construção conforme o passo-a-passo disponibilizado no capítulo 5 deste trabalho. Em seguida utilizar o teodolito construído para calcular dimensões.

Em um primeiro momento o teodolito poderá ser utilizado para, em pares, os alunos determinarem a altura um do outro. Após isso, comparar o valor calculado com auxílio do teodolito, com a altura medida diretamente com auxílio de trena. Nessa etapa é importante que o professor solicite que os alunos façam um esquema da situação real e após isso, efetuem os cálculos. Na Figura 28 é apresentada uma situação hipotética, semelhante ao que deverá ser realizado em aula.

Figura 28 – (a)Determinação da altura, com auxílio do teodolito construído. (b)Altura medida com auxílio de trena (c)Ângulo obtido na visada com o teodolito

Fonte: Elaborado pela autora

6.1.2 Uma possível solução da atividade 1

Como já foi comentado, o aluno deverá apresentar um esquema da situação junto com os cálculos para a determinação da altura. Na Figura 29, é apresentado um esquema da situação hipotética apresentada anteriormente.

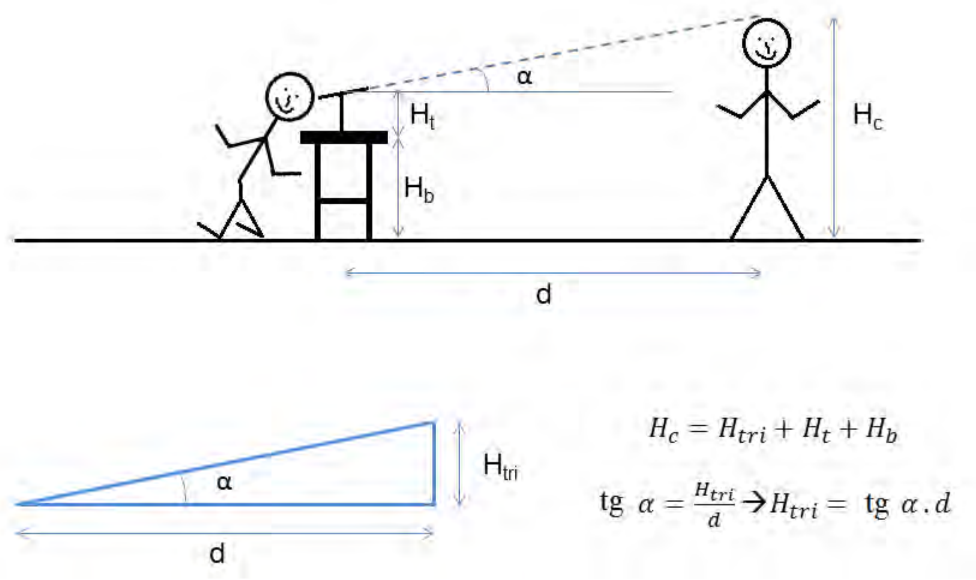


Figura 29 – Esquematização do problema proposto.

Sendo:
α: ângulo indicado pelo teodolito;
d: distância do teodolito até o colega, na horizontal;
H_t: altura do teodolito;
H_b: altura do banco;
H_c: altura do colega;
H_{tri}: altura do triângulo formado.

A altura do colega será dada, conforme o esquema da Figura 29, pela equação:

$$H_c = H_{tri} + H_t + H_b. \tag{6.1}$$

A H_t e H_b deverão ser medidas pelos alunos. No exemplo, $H_t = 21,5cm$ e $H_b = 61,5cm$. Já a H_{tri} deverá ser calculada, conforme o esquema, por:

$$H_{tri} = \text{tg}(\alpha)d. \tag{6.2}$$

Para isso, o aluno deverá ter feito a medida de d anteriormente. No exemplo

$d = 1m$ e o ângulo α, obtido com o teodolito (Figura 28 (c)), é igual a 39°, logo, pela Equação 6.2, $H_{tri} = 0,81m$.

Substituindo esse valor (H_{tri}) na Equação 6.1, é possível determinar a altura do colega. Que nesse exemplo equivale a $1,64m$. Em seguida o aluno deverá conferir o resultado obtido. Como já foi dito anteriormente, para conferir o resultado basta comparar o resultado da Equação 6.1 com a altura medida diretamente com uma trena (Figura 28 (b)). No exemplo, a altura, medida com trena também é $1,64m$. Isso mostra que o teodolito funciona. Claro que poderá existir uma diferença entre os valores, por ser um instrumento feito com isopor e cartona, não possui grandes precisões.

Após os alunos comprovarem a eficácia do teodolito que construíram e entenderem melhor seu funcionamento, propor uma segunda atividade. Medir algo do pátio ou rua, que seja difícil de ser alcançado. Exemplo, uma árvore ou um prédio pequeno. Nesse momento será necessário que grupos maiores façam a medida do mesmo objeto. Como não será possível medir o objeto, as verificações se os cálculos estão corretos e as indicações de ângulo também, serão feitas comparando os resultados entre os colegas.

A resolução dessa atividade é semelhante a anterior. E novamente é importante que os alunos façam anotações, esquemas e cálculos individualmente. Para posteriormente o professor poder avaliar se os alunos compreenderam a proposta, identificando uma aplicação do conteúdo no seu cotidiano.

6.1.3 Avaliação e expectativas da atividade 1

Como já foi relatado anteriormente, parte dessa atividade já foi aplicada pela autora do trabalho. Então, nesse momento serão apresentados resultados desta aplicação.

Foi realizada somente a confecção do teodolito e explicação de seu funcionamento. Os alunos não demonstraram dificuldades, foram bastante participativos e receptivos e mostraram-se bastante motivados. Construíram os teodolitos facilmente e alguns até personalizaram os mesmos, como pode-se observar na Figura 30.

Figura 30 – Teodolitos construídos pelos alunos.

No final foi solicitada uma escrita com o parecer dos mesmos sobre a proposta metodológica aplicada. Analisando as escritas, como as da Figura 31, evidenciou-se o quanto os alunos ficam estimulados quando o professor trabalha o conteúdo de maneira diferenciada. Assim, o ensino deixa de ser monótono, ou seja, deixa-se de trabalhar o conteúdo de maneira tradicional, onde se utiliza o quadro verde e o giz como ferramenta de ensino.

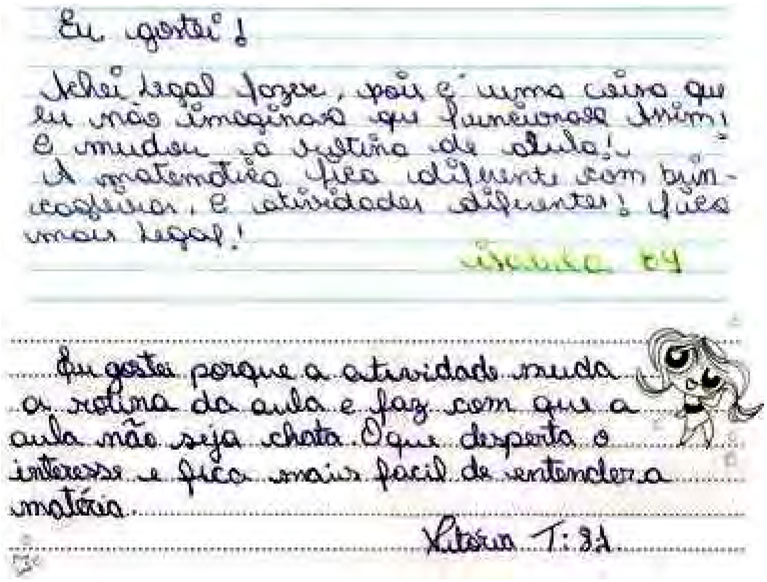


Figura 31 – Comentários dos alunos, sobre a atividade.

6.2 Atividade 2 - Cálculo de áreas de figuras, usando decomposição e coordenadas totais.

Objetivos:

★ Desenvolver a capacidade de resolver um problema de diversas formas;

★ Identificar os vértices da figura em um plano cartesiano e ser capaz de determinar sua área;

★ Dividir um polígono em figuras mais simples.

Pré-requisitos: Coordenadas Cartesianas, áreas de figuras.
Material necessário: régua.
Tempo necessário: 4h/aula.

Sugestão: Embora esteja explicado, na atividade a ser entregue aos alunos, o que seria o método decomposição de áreas, sugere-se que o professor explique e exemplifique antes de realizar a tarefa.

Para ser possível a realização do item b, dessa atividade, é necessário que o aluno conheça o método descrito no item 2.5.2 deste trabalho. Sugere-se que o professor faça a dedução da fórmula, juntamente com seus alunos. A dedução é bem simples e interessante, permite rever algumas regras e conteúdos matemáticos.

6.2.1 Atividade 2

A avaliação de áreas é uma atividade comum na Topografia. Por exemplo, na compra e venda de imóveis rurais e urbanos esta informação tem muita importância. Imagine que você é o engenheiro responsável pela avaliação do terreno que aparece na planta de situação *(Planta de situação é a planta que indica o posicionamento do terreno quanto às ruas adjacentes e seu posicionamento solar (Indicação da posição do norte)).* Para isso é necessário que se saiba a área do terreno. Então:

1 Calcule a área do terreno, pelos dois métodos abaixo:

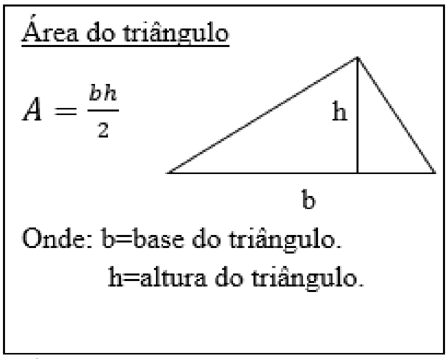
a) **Decomposição de áreas.** Este método consiste em dividir a área a ser avaliada em figuras geométricas, onde seja possível calcular suas áreas. A área final será determinada pela somatória de todas as áreas das figuras geométricas encontradas.

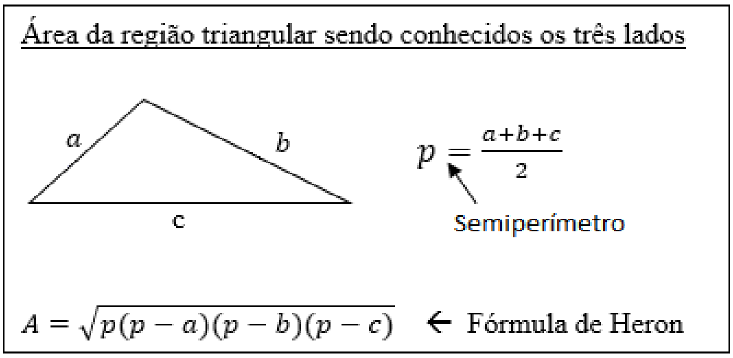
Esta atividade poderá ser feita tendo como base a planta de situação ou planta de detalhe (Plantas feitas pela a autora, com auxilio do AutoCAD, e disponibilizadas nos anexos). Quem optar por usar a planta de situação terá que calcular a escala, na planta de detalhe a escala já está indicada. O professor pode chamar atenção à isso. As medidas que estão na planta de situação deverão ser consideradas para a planta de detalhe, pois trata-se do mesmo terreno.

b) **Coordenadas totais.** Este método consiste em determinar as coordenadas dos vértices do polígono que descreve o terreno e aplicar a fórmula deduzida em aula.

O cálculo da área da região triangular sendo conhecidos os três lados é uma ferramenta bem prática e é apresentado por Dante (DANTE, 2009), assim como está indicado no quadro a seguir. Para resolver esse item, deve-se utilizar a ampliação do terreno e a malha quadriculada. A escala do desenho e da malha é 1:100, é importante que o professor discuta isso com o aluno antes.

Você pode precisar:





2 Com a modernização dos equipamentos topográficos é muito comum que as áreas sejam calculadas com auxílio computacional. É uma forma bem prática de calcular a mesma e muito utilizada atualmente, consiste em inserir os pontos que definem os vértices em um programa gráfico e o mesmo calcula a área. Vamos ver se isso funciona? Lembre-se que você é o engenheiro contratado para avaliar a área em questão. Você já comparou os resultados obtidos na questão anterior? Os dois métodos apresentam resultados semelhantes? Agora vamos calcular computacionalmente, com auxílio do *GeoGebra*. Compare os seus resultados com os colegas de aula!

O cálculo feito no software é bem mais simples e rápido. Mas é importante comentar com os alunos que não basta saber operar softwares e necessário saber o raciocínio matemático existente por trás disso. Assim, é possível refletir sobre os resultados obtidos e identificar possíveis erros.

O software escolhido foi o GeoGebra, essa escolha se deu por se tratar de um software gratuito e com uma interface amigável. Isso possibilita o aluno explorar o programa e executar construções e até mesmo alterações no que já está construído. O acesso aos comandos é feito através de botões com ícones intuitivos, permitindo que o aluno investigue sozinho as possibilidades do software.

6.2.2 Uma possível solução da atividade 2

No exercício 1 é solicitado que seja calculado a área do terreno por dois métodos diferentes. Para o método de áreas (item a) serão apresentadas duas, entre tantas outras possíveis, soluções. A primeira será dividir a área em triângulos, conforme a Figura 32.

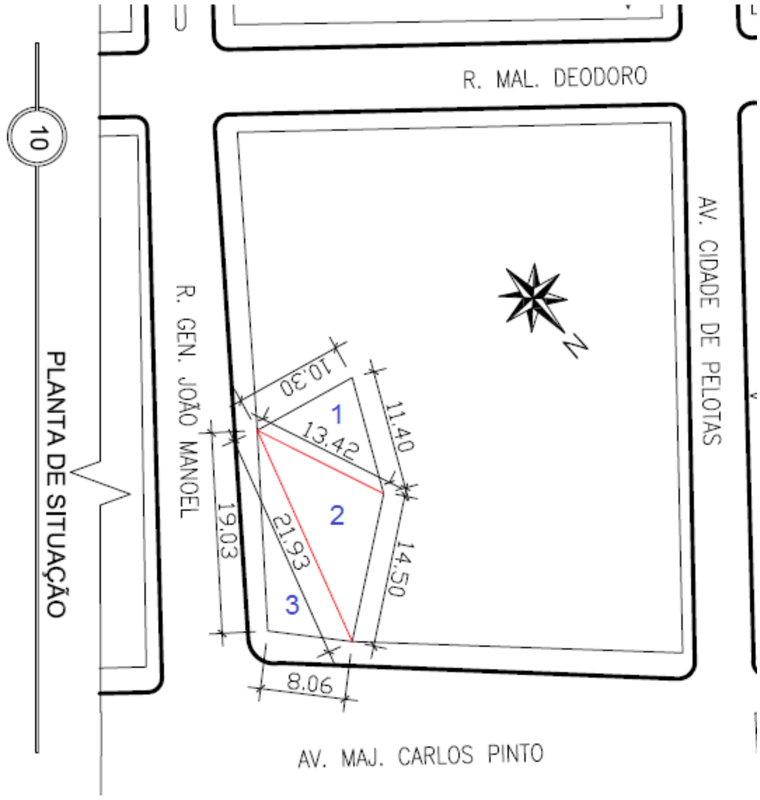


Figura 32 – Área dividida em triângulos.

Fonte: Elaborado pela autora

A área total do terreno será equivalente a soma das áreas desses triângulos, ou seja:

$$A = A_1 + A_2 + A_3. \tag{6.3}$$

Assim, A é a área total do terreno, A_1, A_2 e A_3 são as áreas dos triângulos $1, 2$ e 3, respectivamente.

Para calcular as áreas dos triângulos $1, 2$ e 3, será utilizada a fórmula de Heron:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \tag{6.4}$$

Sendo A a área do triângulo, p o semiperímetro do triângulo e a, b e c as medidas dos lados desse triângulo.

Para isso é necessário calcular, primeiramente, o semiperímetro. Para o triângulo 1, da Figura 32, temos:

$$p_1 = \frac{11,40 + 10,30 + 13,12}{2} = 17,56m. \tag{6.5}$$

Substituindo 6.5 em 6.4, temos:

$$A_1 = \sqrt{17,56(17,56-11,40)(17,56-10,30)(17,56-13,12)}. \tag{6.6}$$

A Equação 6.6, equivale a:

$$A_1 = 57,02m^2. \tag{6.7}$$

De maneira análoga calculamos as áreas dos triângulos 2 e 3. Obtemos como resultados para o triângulo 2, semiperímetro igual a:

$$p_2 = \frac{13,42+14,50+21,93}{2} = 24,925m. \tag{6.8}$$

E área igual a:

$$A_2 = 94,62m^2. \tag{6.9}$$

E para o triângulo 3, semiperímetro igual a:

$$p_1 = \frac{21,93+8,06+19,03}{2} = 24,51m. \tag{6.10}$$

E área igual a:

$$A_3 = 75,50m^2. \tag{6.11}$$

Substituindo 6.11, 6.9 e 6.7 em 6.3, obtemos:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 227,14m^2. \tag{6.12}$$

Outra maneira de determinar a área da figura que descreve o terreno é, a partir da planta detalhe que possui escala (Cada quadradinho equivale a um metro quadrado), dividir a área em triângulos retângulos e um retângulo, conforme mostra na Figura 33 .

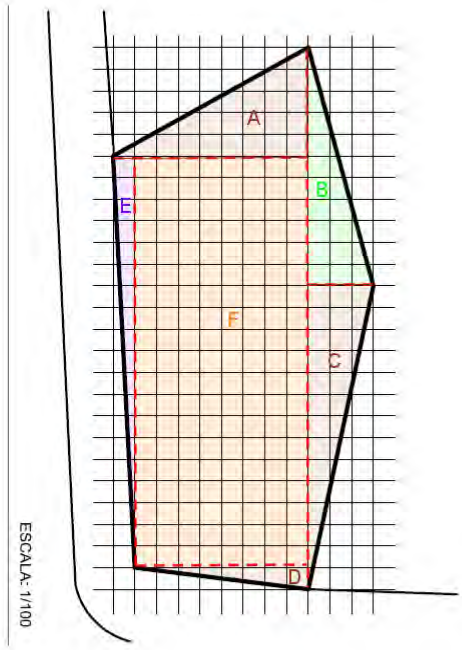


Figura 33 – Área dividida em várias figuras geométricas.

Fonte: Elaborado pela autora

A área do terreno será igual a:

$$A = A_A + A_B + A_C + A_D + A_E + A_F. \tag{6.13}$$

Temos que: A é a área total do terreno, A_F é a área do retângulo F e A_A, A_B, A_C, A_D e A_E são as áreas dos triângulos A, B, C, D e E respectivamente.

Sabendo que a medida da lateral de cada quadradinho é equivalente a um metro é possível determinar a área dos triângulos A, B, C, D e E, pela fórmula da área de um triângulo:

$$A = \frac{bh}{2}, \tag{6.14}$$

onde, A é a área triângulo, b a medida da sua base e h a medida da sua altura.

A área do triângulo A será igual a:

$$A_A = \frac{9.5}{2} = 22,5m^2. \tag{6.15}$$

E do triângulo B será:

$$A_B = \frac{3.11}{2} = 16,5m^2. \tag{6.16}$$

Do triângulo C:

$$A_C = \frac{3.14}{2} = 21m^2. \tag{6.17}$$

Do triângulo D:

$$A_D = \frac{1.8}{2} = 4m^2. \tag{6.18}$$

E do triângulo E será:

$$A_E = \frac{19.1}{2} = 9,5m^2. \tag{6.19}$$

A área do retângulo F pode ser calculada pela fórmula:

$$A_F = bh, \tag{6.20}$$

onde, A é a área retângulo, b a medida de sua base e h a medida da sua altura.

Assim, a área do retângulo F será:

$$A_F = 8.19 = 152m^2. \tag{6.21}$$

Como já determinamos as áreas de todas figuras geométricas, em que se decompõe a área do terreno, é possível, pela Equação 6.13 determinar a área do terreno:

$$A = 22,5 + 16,5 + 21 + 4 + 9,5 + 152 = 225,5m^2. \tag{6.22}$$

Percebe-se uma pequena diferença entre essas possíveis soluções. Isso ocorre, possivelmente, porque quando é feita a divisão da figura em triângulos as medidas envolvem números com algumas casas decimais. Essas medidas, se for analisar, já sofreram algum tipo de arredondamento e quando são feitos os cálculos das áreas, novamente são feitos arredondamentos. É interessante discutir essas observações com os alunos.

No item b é solicitado que o aluno faça o cálculo da área pelo método de coordenadas totais. Para isso é necessário que, inicialmente, o aluno determine as coordenadas dos vértices da figura que define o terreno. Nesse momento surgirão diferentes valores de coordenadas, mas o resultado final deverá ser igual. Isso possibilita outra discussão em sala de aula. Na Figura 34 apresentamos uma possível determinação das coordenadas.

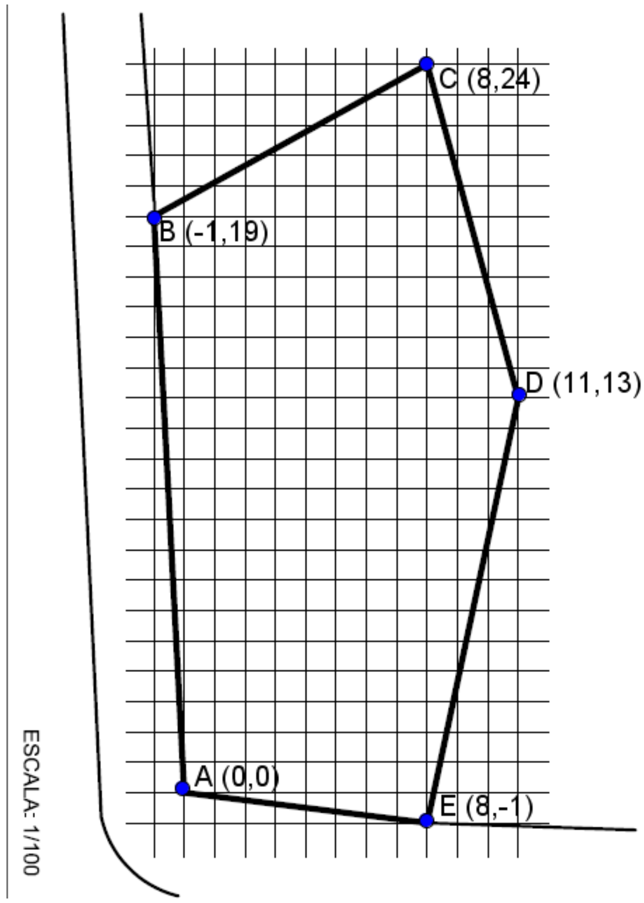
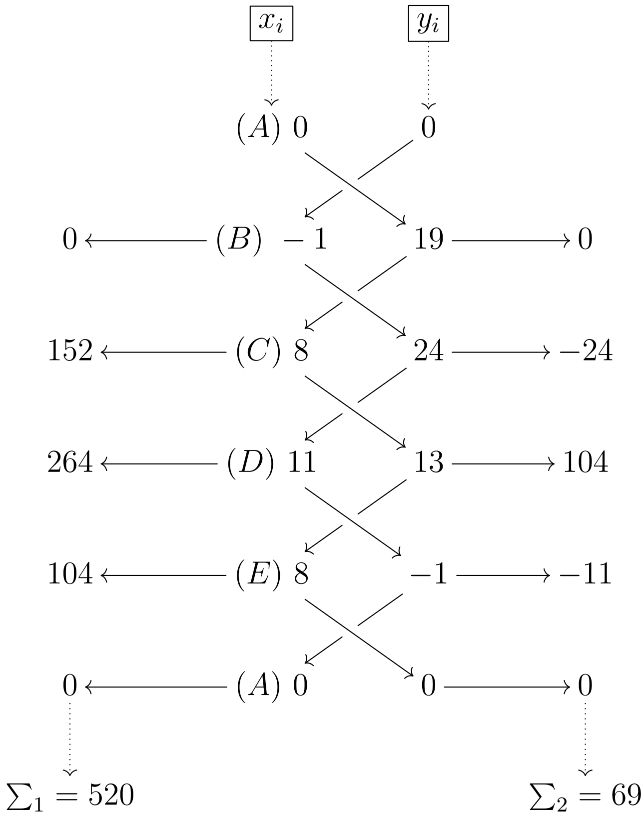


Figura 34 – Coordenadas dos vértices da figura que define o terreno.

Fonte: Elaborado pela autora

Após isso, é só aplicar o método de cálculo de áreas por coordenadas, conforme visto anteriormente no Cap. 2.5.2. Vamos dispor os pontos em tabela e efetuar as multiplicações, conforme esquema a seguir:



Logo, a área é igual a:

$$A = \frac{\sum_1 - \sum_2}{2} = \frac{520 - 69}{2} = 225,5m^2. \tag{6.23}$$

Os resultados obtidos aqui são iguais aos obtidos anteriormente por divisão da figura em diversas figuras geométricas. Isso mostra, aos alunos, que o método do cálculo de áreas por coordenadas, deduzido em aula, está correto e realmente se aplica para figuras com diversos vértices.

Por fim, é sugerido, no exercício 2, que o aluno faça o mesmo cálculo usando o software GeoGebra. No GeoGebra basta inserir as coordenadas dos vértices da figura e solicitar para calcular a área. Então, como já haviam sido determinadas as coordenadas dos vértices, utilizou-se esses valores no GeoGebra. Primeiro inserimos os pontos dos vértices, isso é feito digitando diretamente na “Entrada” as coordenadas, conforme mostrado na Figura 35 .

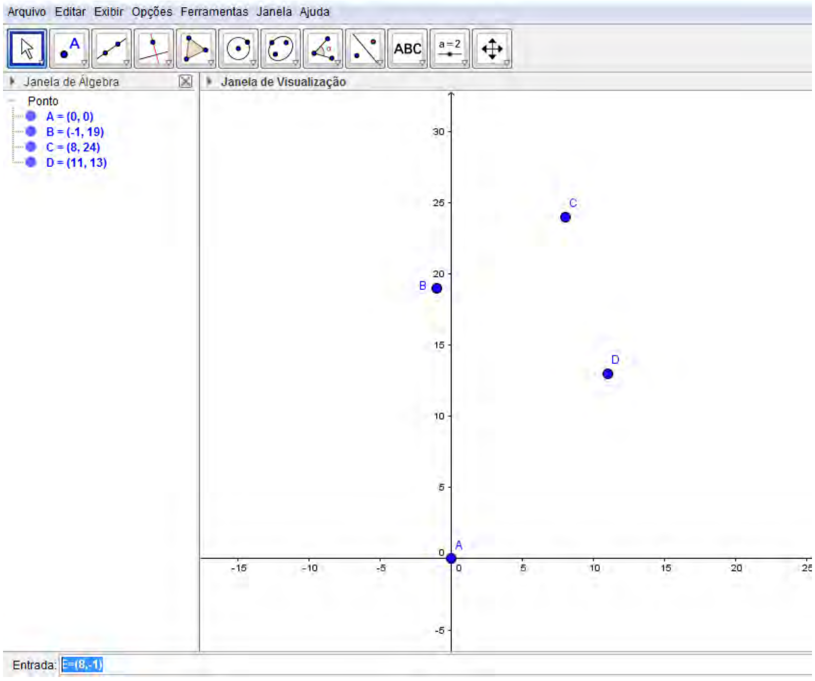


Figura 35 – Pontos que definem o terreno.

Depois traçamos um polígono que passa por todos esses pontos, conforme indicado na Figura 36.

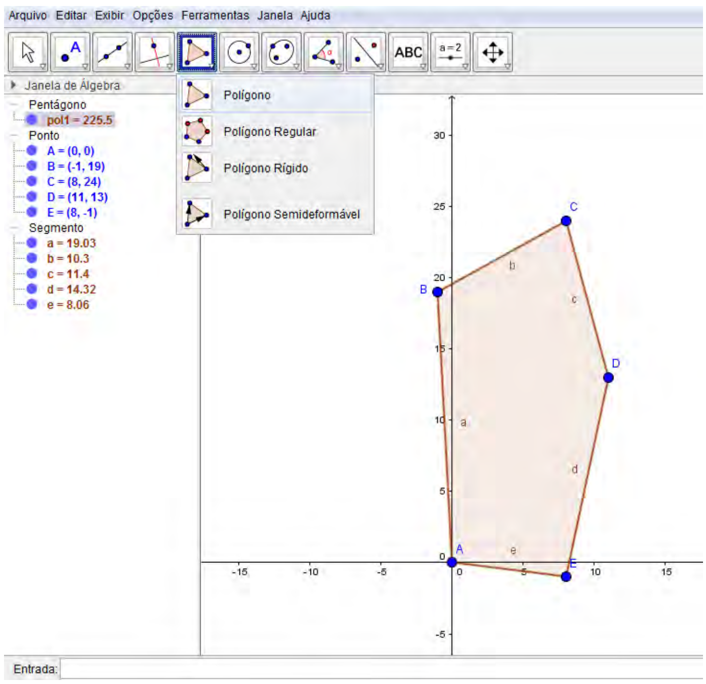


Figura 36 – Polígono que representa a região do terreno.

Fonte: Elaborado pela autora

Por fim, calcula-se a área desse polígono, conforme a Figura 37.

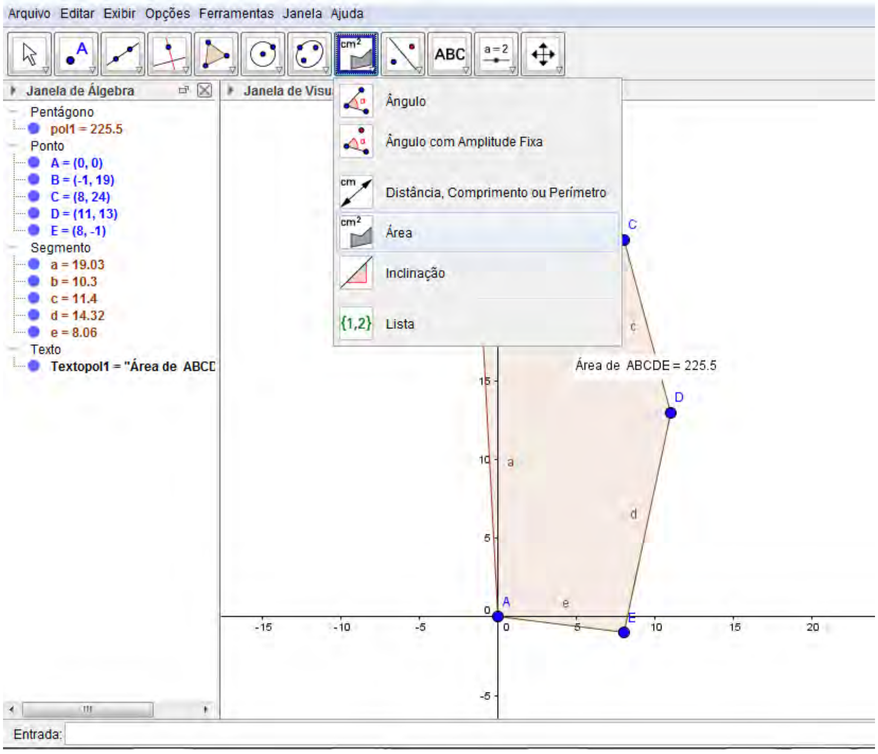


Figura 37 – Cálculo da área do terreno.

Fonte: Elaborado pela autora

6.2.3 Avaliação e expectativas da atividade 2

Acredita-se que os alunos não terão muita dificuldade com essas atividades. Uma possível dificuldade está no momento de deduzir a fórmula, pois embora seja simples é um pouco longa. Normalmente os alunos não estão acostumados com deduções mais extensas.

No item 1b) o aluno deverá completar os eixos de coordenadas como lhe convir. Isso é interessante para observar os alunos que acompanharam bem e que realmente compreenderam a demonstração da fórmula. A escolha dos eixos pode facilitar ou dificultar as contas. Por exemplo, um ponto na origem, diminui o número de cálculos, mas muitos pontos com coordenadas negativas podem atrapalhar.

Espera-se que no item 2 os alunos consigam comparar suas respostas e identificar que por ambos métodos o resultado é semelhante. Além disso, que o aluno possa perceber que o software facilita não só essa atividade específica, mas que também pode ser utilizado em várias outras atividades matemáticas, como complemento para o estudo.

6.3 Atividade 3 - Introdução a coordenadas cartesianas.

Objetivos:

★ Compreender a importância dos eixos cartesianos na localização de objetos e figuras no plano;

★ Reconhecer e identificar os diferentes quadrantes do plano cartesiano.

Pré-requisitos: nenhum.
Material necessário: cópias das plantas, tesoura e cola.
Tempo necessário: 2h/aula.

Sugestão: Antes de aplicar a atividade sugerida, recomenda-se trabalhar conceitos de introdução ao plano cartesiano, como, por exemplo, mapas. Muitos livros didáticos trazem, além de mapas, esquemas diferenciados, para identificação e posicionamento de pontos, quando trabalham o conteúdo de coordenadas cartesianas. Uma sugestão de atividade bem simples de ser adaptada é a localização dos alunos na sala de aula, cada aluno pode considerar sua posição como origem e determinar o posicionamento dos colegas.

Outra sugestão bem simples é, a partir dos mapas fornecidos pelos livros didáticos, confeccionar uma maquete. As Figuras 38 e 39 trazem um exemplo de maquete, a mesma foi construída com materiais baratos, como cartolina, papel ofício e materiais reciclados como caixinhas de objetos.

Figura 38 – Detalhes dos "eixos" da maquete.

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 39 – Maquete.

Fonte: Elaborado pela autora

A sugestão é que, se confeccione uma maquete e se faça alguns questionamentos aos alunos, sobre a localização de prédios e outros. Antes faça algumas observações, do tipo: "Quando for solicitado o posicionamento de algo, primeiro informem a letra, depois o número", para posteriormente estabelecer uma ligação com o termo abscissa e ordenada.

Para o modelo de maquete apresentado, sugere-se alguns questionamentos que podem ser feitos. Como:

1 O que está localizado em (B,1)?
Uma casa.

2 Qual a localização da igreja?
A localização da igreja é $(A, 2)$ *e* $(A, 3)$.

3 O que está localizado em (F,2)?
Um cinema.

4 Qual a localização do posto de gasolina?
A localização é $(I, 3)$ *e* $(J, 3)$.

5 E qual a localização da bomba de gasolina?
Está localizada em $(I, 3)$.

6 Qual a localização da fábrica?
A localização da fábrica é $(H, 6), (I, 6)$ *e* $(J, 6)$.

7 O que está localizado em (D,5)?
Uma árvore.

8 Qual a localização do lago?
A localização é $(I, 1), (J, 2), (I, 2)$ *e* $(J, 1)$.

9 Qual a localização do Hospital?
A localização do Hospital é $(B, 5)$ *e* $(B, 6)$.

10 Quais são as localizações das árvores?
Estão localizadas em: $(D, 1), (D, 5)$ *e* $(H, 1)$

11 Se eu sair da escola e ir ao cinema, por quais localizações irei passar?
Pelas localizações: $(E, 4), (F, 4), (G, 4), (G, 3), (G, 2)$.

12 E se eu sair da casa e ir na sorveteria, por quais localizações irei passar?
Pelas localizações: $(C, 1), (C, 2), (C, 3), (C, 4), (D, 4), (E, 4), (F, 4)$.

6.3.1 Atividade 3

Toda vez que um engenheiro ou arquiteto projeta uma casa é necessário atender aos pedidos de seus clientes é claro, mas também é necessário avaliar se o que foi solicitado é possível. Muitas vezes os clientes têm dificuldades para imaginar o tamanho real dos cômodos, apenas imaginando suas medidas. Uma boa tática é apresentar o projeto desejado, em forma de planta baixa mobilhada.

Vamos imaginar que você é um engenheiro e seu cliente deseja realizar a construção da casa representada na planta dada. Percebe-se que o cômodo destinado para o quarto, ainda está sem janela, porta e móveis. Então como engenheiro você deve:

a) Dispor os móveis, a porta e a janela no quarto e indicar o posicionamento dos mesmos. Ou seja, indicar a coordenada em que os pontos destacados ficarão. O que podemos comentar sobre as coordenadas desses pontos? Discuta com o restante da turma e o(a) professor(a).

   Nesse momento espera-se discutir sobre quadrantes, posicionamento dos pares ordenados, entre outros.

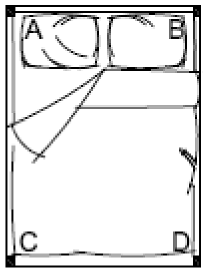
b) Como engenheiro, você achou o tamanho do quarto adequado? Justifique o posicionamento dos móveis e aberturas (porta e janela).

   Nesse momento o aluno deve levar em consideração não somente encaixar os móveis no quarto. E sim dispor os mesmos de maneira usual. Por exemplo, a cama de costas para o televisor não terá muita utilidade. Outro caso é o posicionamento das aberturas, janelas para dentro da casa não teriam utilidade.

c) As numerações que estão junto à porta significam suas dimensões (largura x altura) e as que estão junto à janela indicam largura x altura /altura do peitoril. Sabendo disso, embora a janela e a porta tenham apenas um ponto destacado para indicar a posição, é possível determinar as coordenadas das extremidades contrárias a estes pontos. Você concorda? Como isso pode ser feito? Quais seriam essas coordenadas?

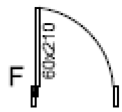
Recorte os objetos a seguir, escolha o local adequado e cole na planta.

Cama



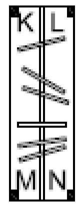
Janela

Porta



Televisor

Guarda-roupa



6.3.2 Uma possível solução da atividade 3

No item a) é solicitado para os alunos que os mesmos disponham os móveis e aberturas no dormitório. Uma possível distribuição é apresentada na Figura 40.

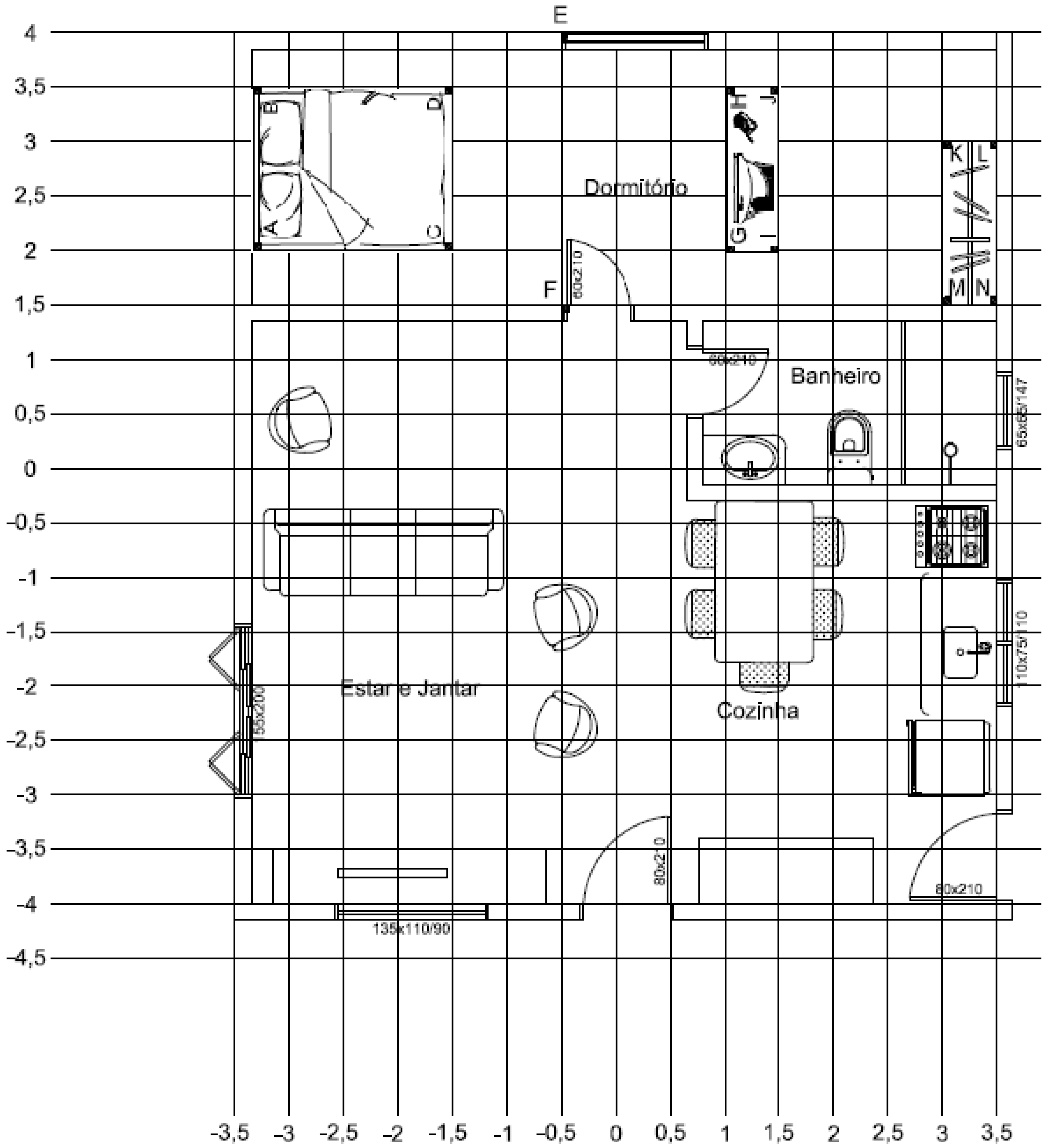


Figura 40 – Distribuição dos móveis e aberturas.

Fonte: Elaborado pela autora

Assim, as coordenadas dos pontos são:

Cama:

$A = (-3,5; 2); B = (-3,5; 3,5); C = (-1,5; 2)$ e $D = (-1,5; 3,5)$.

Janela:

$E = (-0,5; 4)$.

Porta:

$F = (-0,5; 1,5)$.

Televisor:

$G = (1; 2); H = (1; 3,5); I = (1,5; 2)$ e $J = (1,5; 3,5)$.

Guarda-roupa:

$K = (3; 3); L = (3,5; 3); M = (3; 1,5)$ e $N = (3,5; 1,5)$.

Sobre os pontos, nesse caso, podemos observar que a maioria pertence ao primeiro quadrante. Que é o caso dos pontos do Televisor e Guarda-roupa, os demais pertencem ao segundo quadrante. Não existe nenhum ponto que tenha ordenada negativa, ou seja, nenhum ponto do terceiro ou quarto quadrante. Independente do posicionamento que o aluno escolher, nenhum ponto pertencerá a esses quadrantes, pois localização do dormitório não permite. Mas o professor pode indagar sobre os outros cômodos da casa, como, por exemplo, o posicionamento de qualquer móvel da sala, que está no terceiro quadrante, e da cozinha, que está no quarto.

Sobre as coordenadas dos pontos, pode-se observar que os pontos D e J possuem valores iguais para as ordenadas e iguais em módulo para abscissas. O que diferencia os pontos é, justamente, o sinal das abcissas. Isso faz com que os pontos pertençam a quadrantes diferentes como já foi exposto anteriormente. Outras observações podem ser feitas, dependendo do posicionamento dos objetos. O professor deve intermediar a discussão e estimulá-la com questionamentos.

Provavelmente existam motivos para as escolhas dos posicionamentos dos objetos na planta. É exatamente isso que é questionado no item b). Para o exemplo resolvido optou-se por colocar a porta mais a direita possível, para permitir que a parede da sala esteja livre para ser ocupada por um móvel grande. De acordo com o posicionamento dos imóveis nesse exemplo, percebe-se que o espaço do quarto poderia ser melhor aproveitado, com um closet ou banheiro, ou até mesmo que sua área fosse reduzida, possibilitando ampliação de outro cômodo.

No item c) é solicitado que sejam determinadas as coordenadas das extremidades contrárias a aos pontos da janela e da porta. Para isso, é necessário que se some ao valor da abscissa ou ordenada (dependendo do posicionamento da abertura), o valor da largura do objeto. Para a solução apresentada, os pontos das extremidades contrárias foram calculados somando a largura dos objetos na abscissa do ponto. Os valores das coordenadas são apresentados a seguir.

Janela:

$E^{'} = (-0,5 + 1,35; 4) = (0,85, 4)$.

Porta:

$F^{'} = (-0,5 + 0,6; 1,5) = (0,1; 1,5)$.

Outra possibilidade de trabalhar com as ordenadas e abcissas é solicitar que os alunos determinem as medidas (largura e comprimento) dos móveis, a partir das coordenadas de seus pontos.

6.3.3 Avaliação e expectativas da atividade 3

Acredita-se que das atividades propostas esta seja a que os alunos terão menos dificuldade. A atividade inicial é bem simples de ser feita e poderá modificar bastante a aula. Quando afasta-se do clássico quadro e giz, por mais simples que seja, a atividade desperta a atenção do aluno. Nesse intuito pensou-se a atividade com a maquete. A maquete foi produzida com papeis coloridos, EVA e cartona. Utilizou-se também caixas de sabonete, sucrilhos e escova de dentes na confecção.

Na atividade a) é esperado que as discussões sobre quadrantes e outras propostas sejam levantadas pelos alunos. Mas existe a possibilidade dos mesmos não perceberem as relações, então é sugerido que o professor sirva como intermediador e facilitador desta discussão, assim como nas possíveis discussões dos outros itens.

7 Conclusões

No decorrer deste trabalho foi possível perceber o quanto o homem evolui para resolução de seus problemas, a matemática é uma ferramenta necessária para resolução de muitos deles. Os equipamentos utilizados na topografia evoluíram muito, de planilhas feitas à mão a softwares e equipamentos que resolvem os cálculos apenas inserindo valores. Mas os conceitos matemáticos permanecem sendo aplicados, mesmo que por trás dos códigos dos softwares, o que as vezes passa desapercebido. O conhecimento sobre esses conceitos é necessário para poder utilizar os equipamentos, executar medidas de forma correta e interpretar os resultados obtidos, observando se são possíveis.

Essa relação direta da topografia com a matemática, observada pela autora durante suas aulas na engenharia civil, possibilitou que fossem elaboradas propostas para a sala de aula. A apresentação dessas atividades mostra que é possível elaborar aulas relacionando o conteúdo trabalhado com a realidade do aluno, ou com situações que são comuns ao seu cotidiano. As atividades, além de contextualizar o conteúdo, usam materiais simples, facilitando sua aplicação.

Durante a elaboração deste trabalho, foram feitas consultas a diversos livros didáticos, para observar como que a abordagem dos conteúdos trabalhados aqui é apresentada. Muitos trazem os conteúdos desassociados de aplicações reais, embora a maioria traga situações problema. Muitos outros trazem parte da história matemática para introduzirem conteúdos mas, em geral, uma explicação da utilização real ou antiga, do conteúdo em si, é pouco abordada. E apenas dois livros sugerem que o aluno se envolva mais na aula, na confecção e manuseio de material. Mostramos justamente isso, que é possível tornar o aluno mais participativo na construção do conhecimento. Miguel et al. concordam com este pensamento, "...os estudantes passam de meros espectadores para se posicionarem como criadores ativos,..., numa posição em que participem, compreendam e questionem o próprio conhecimento matemático escolar." (MIGUEL et al., 2009).

Ao longo das propostas foram feitas algumas sugestões. Talvez uma das que possibilitaria uma sequência deste trabalho seria a utilização de softwares no cálculo de áreas e outras atividades. Existem diversos softwares livres e com capacidade gráfica muito boa. Como foi já foi relatado, nenhuma atividade foi aplicada ainda, em sua totalidade, seria interessante também a aplicação destas propostas, em diferentes turmas, para comparar os resultados alcançados e propor mudanças ou melhorias.

Referências

ABRAHÃO, R. *A evolução da topografia através dos tempos*. 2010. Disponível em: <http://geoeasy.com.br/blog/?p=1202>. Acesso em: 20.04.2016. Citado 3 vezes nas páginas 21, 22 e 23.

BORGES, A. de C. *Topografia*. 2. ed. São Paulo: Blucher, 1977. v. 1. Citado 3 vezes nas páginas 15, 27 e 31.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília, 1997. 142 p. Citado na página 15.

BRASIL. *Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*. Resolução CEB n.3 de 26 de junho, 1998. Citado na página 34.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio*. Brasília, 1998. 360 p. Citado na página 16.

BRASIL. *Orientações curriculares para o ensino médio: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias Matemática*. Brasília, 2008. 135 p. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 35.

CASACA, J. M.; MATOS, J. L. de; BAIO, J. M. *Topografia Geral*. 4. ed. Lisboa: Lidel-edições técnicas, Ida, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 20.

CORRÊA, I. C. S. A história da agrimensura. *Revista A Mira - Agrimensura e Cartografia*, Editora e Livraria Luana Ltda., Santa Catarina, 2016. Disponível em: <http://www.amiranet.com.br/artigo/a-historia-da-agrimensura-16>. Citado na página 20.

CORRÊA, I. C. S.; WESCHENFELDER, J.; BAITELLI, R. *Museu de Topografia Prof. Laureano Ibrahim Chaffe: 15 anos de história : 1996 – 2011*. Porto Alegre: IGEO/UFRGS, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 19.

DANTE, L. R. *Matemática*. 1. ed. São Paulo: Editora Ática, 2009. volume único. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 53.

FONSECA, R. S. *Elementos de desenho topográfico*. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1973. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 19.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R.; GIOVANNIJR., J. R. *Matemática fundamental, 2º grau*. São Paulo: FTD, 1994. volume único. Citado na página 38.

GIOVANNI, J. R.; GIOVANNIJR., J. R. *Matemática: pensar & descobrir*. Nova edição. São Paulo: FTD, 2005. v. 4. Citado na página 37.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. *Matemática e realidade: 7ª série*. 5. ed. São Paulo: Atual, 2005. Citado na página 36.

JAKUBO, J.; LELLIS, M.; CENTURIÓN, M. *Matemática na medida certa, 8ª série: ensino fundamental*. 9. ed. São Paulo: Scipione, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 37.

KENNEDY, E. S. *História da trigonometria*. São Paulo: Atual, 1992. v. 5. Citado na página 27.

LIMA, E. L. *Coordenadas no plano*. 4. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2002. Citado na página 26.

MENDES, I. A. *O uso da história no ensino da matemática: reflexões teóricas e experiências*. Belém: EDUEPA, 2001. Citado na página 45.

MIGUEL, A. et al. *História da Matemática em atividades didáticas*. 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009. Citado na página 70.

OLIENIK, L. M. *História da topografia*. 2014. Disponível em: <https://prezi.com/mthxohyuds49/historia-da-topografia/>. Acesso em: 20.04.2016. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 21.

RIBEIRO, J. da S. *Projeto radix: matemática, 9º ano*. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2011. Citado na página 37.

SILVEIRA Ênio; MARQUES, C. *Matemática: compreensão e prática* - 9º *ano*. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2008. v. 4. Citado na página 37.

VEIGA, L. A. K.; ZANETTI, M. A. Z.; FAGGION, P. L. *Fundamentos de topografia*. Paraná: Universidade Federal do Paraná, 2012. Citado 6 vezes nas páginas 15, 18, 24, 29, 30 e 31.

YOUSSEF, A. N.; SOARES, E.; FERNANDEZ, V. P. *Matemática: ensino médio*. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2009. volume único. Citado na página 38.

Anexos

ANEXO A – Atividade 1

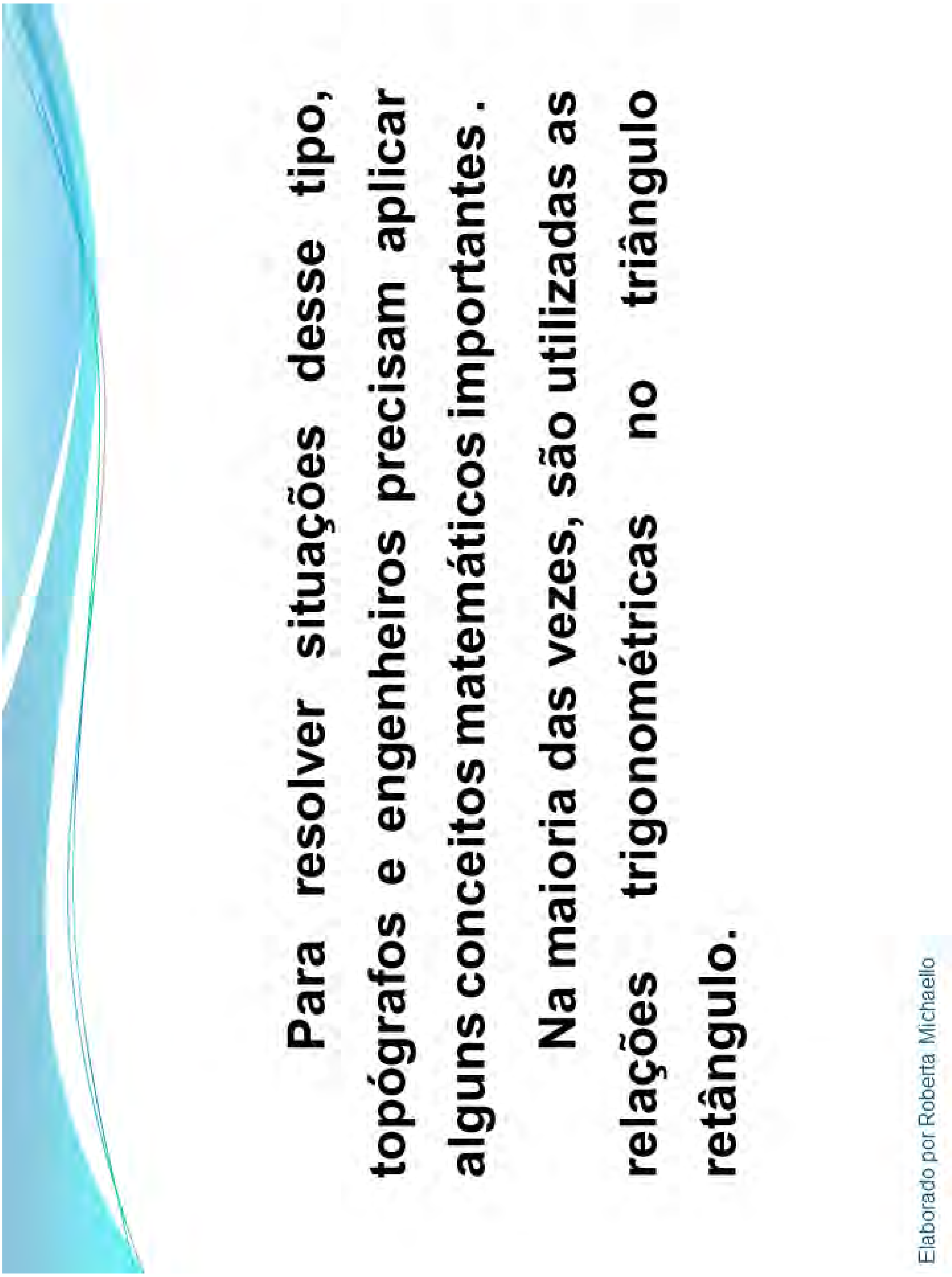
Motivação para a construção e aplicação do teodolito.

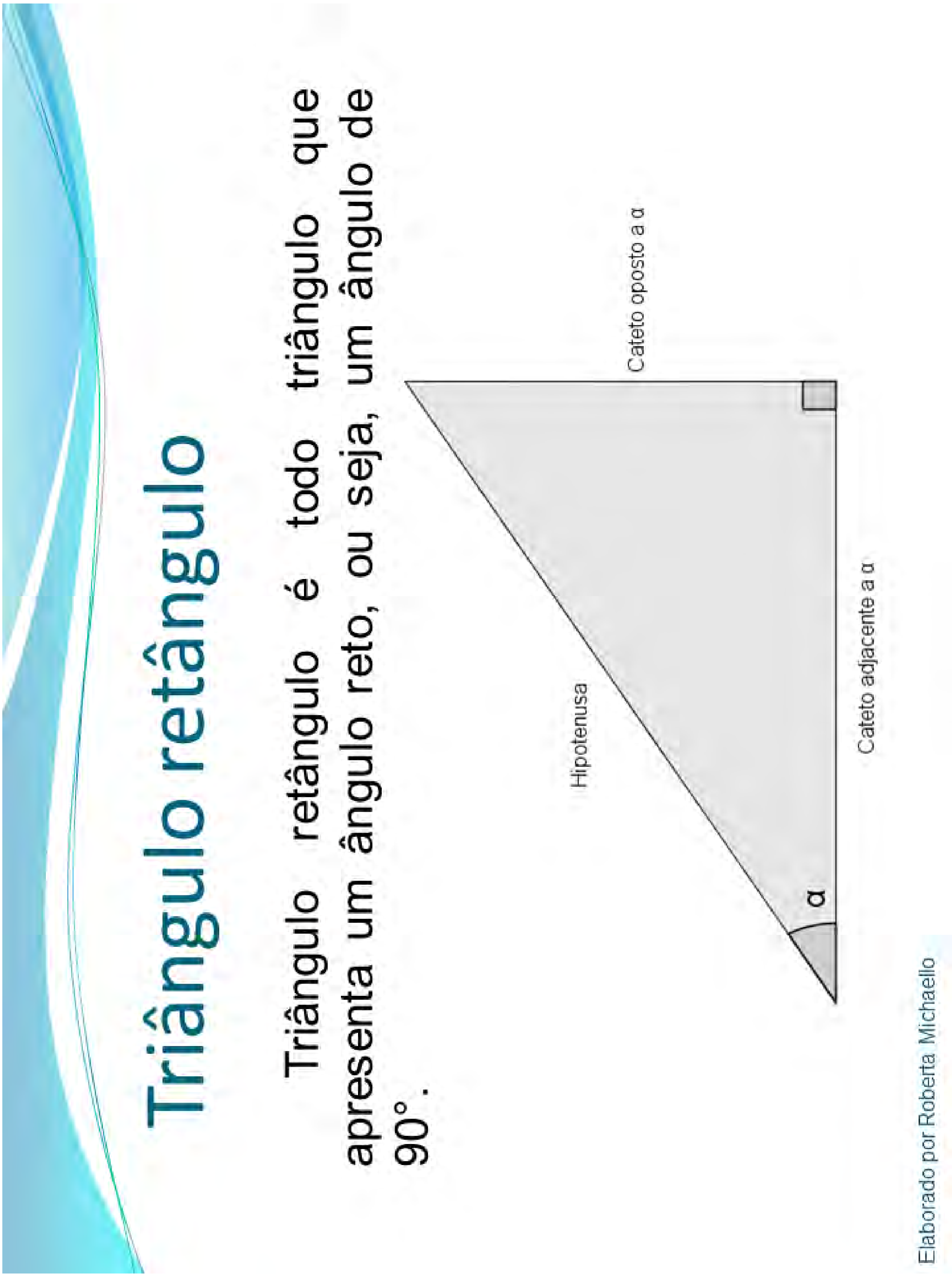
Existem situações em que é necessário conhecer a distância entre dois pontos, porém não é possível determiná-la diretamente.

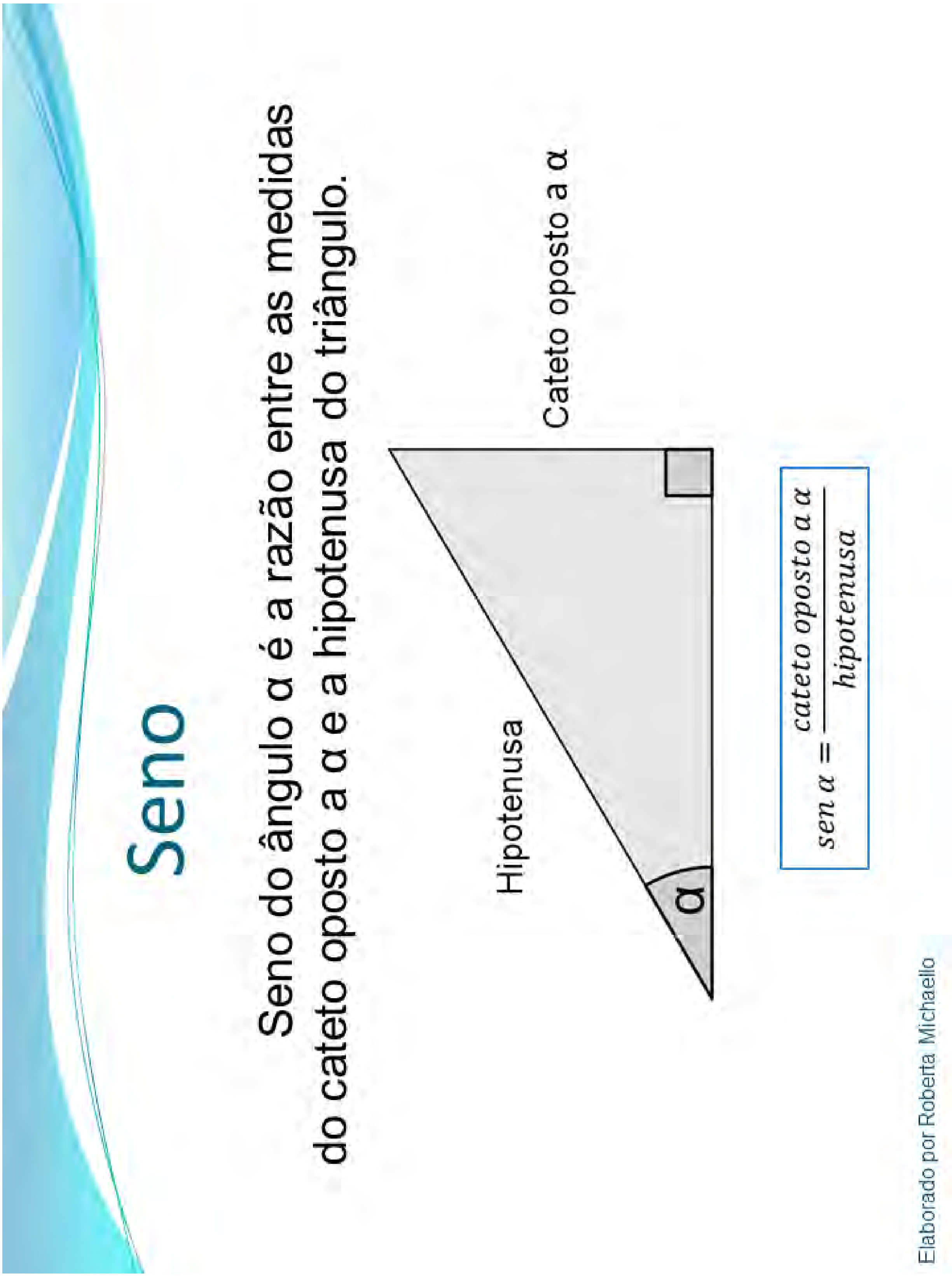
Exemplo: Como determinar a altura do Pão de Açúcar?

Fonte: http://aloriodejaneiro.com

Elaborado por Roberta Michaello

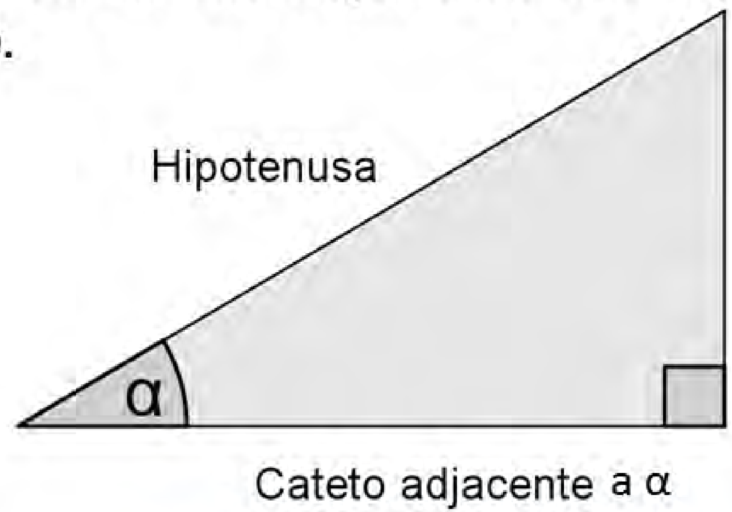

Para resolver situações desse tipo, topógrafos e engenheiros precisam aplicar alguns conceitos matemáticos importantes .
Na maioria das vezes, são utilizadas as relações trigonométricas no triângulo retângulo.
Elaborado por Roberta Michaello


Triângulo retângulo
Triângulo retângulo é todo triângulo que apresenta um ângulo reto, ou seja, um ângulo de 90°.
Cateto oposto a α
Hipotenusa
α
Cateto adjacente a α
Elaborado por Roberta Michaello


Seno
Seno do ângulo α é a razão entre as medidas do cateto oposto a α e a hipotenusa do triângulo.
Cateto oposto a α
Hipotenusa
α
$sen\ \alpha = \frac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{hipotenusa}$
Elaborado por Roberta Michaello

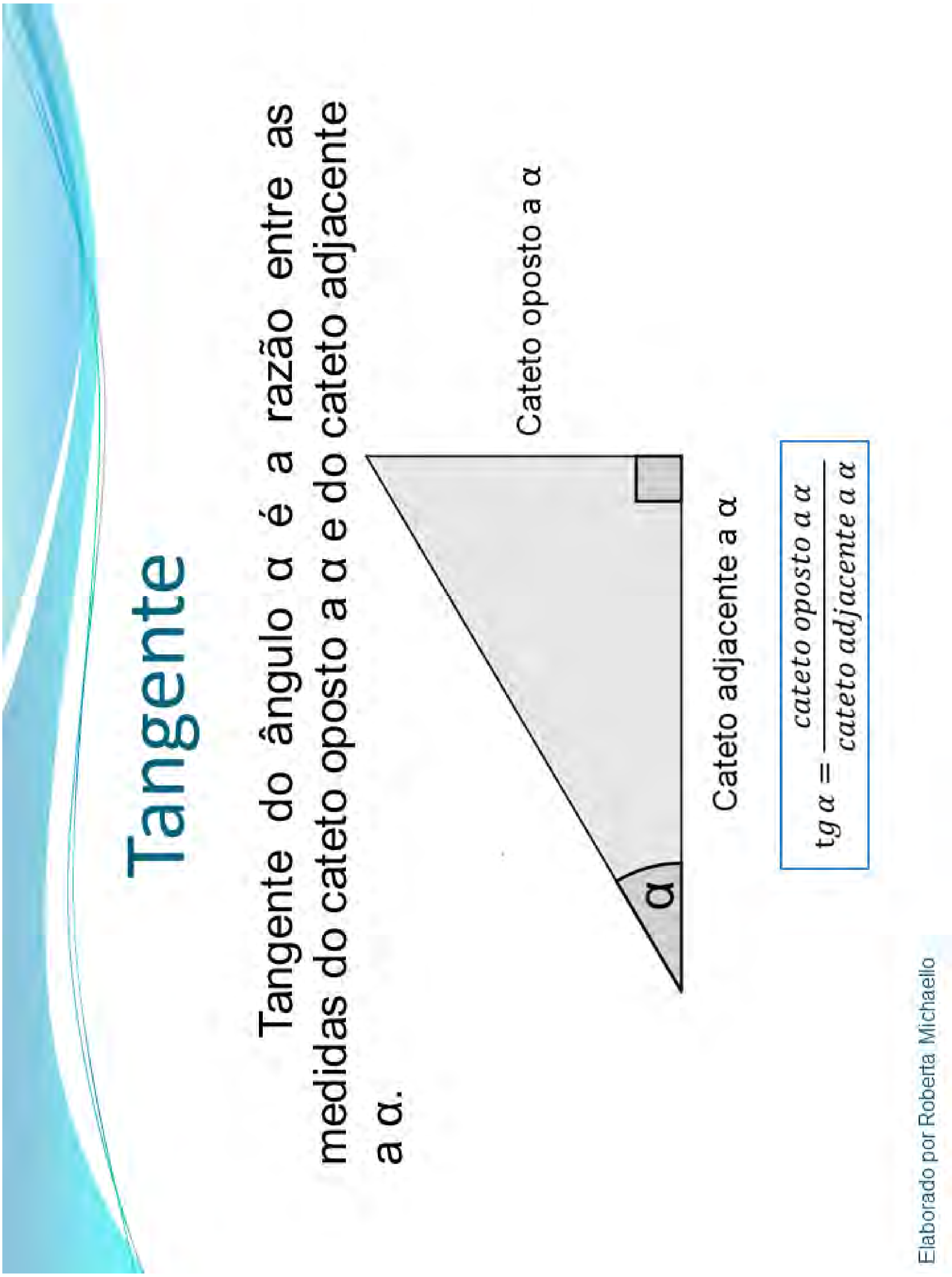
Cosseno

Cosseno do ângulo α é a razão entre as medidas do cateto adjacente a α e a hipotenusa do triângulo.



$$\cos\alpha = \frac{cateto\ adjacente\ a\ \alpha}{hipotenusa}$$

Elaborado por Roberta Michaello


Tangente
Tangente do ângulo α é a razão entre as medidas do cateto oposto a α e do cateto adjacente a α.
Cateto oposto a α
α
Cateto adjacente a α
$tg\ \alpha = \frac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{cateto\ adjacente\ a\ \alpha}$
Elaborado por Roberta Michaello

Um instrumento muito utilizado por engenheiros e topógrafos, onde se aplicam esses conceitos, é o Teodolito.

Fonte: Elaborado pela autora

Fonte: Elaborado pela autora

Elaborado por Roberta Michaello

O QUE É UM TEODOLITO?

É um instrumento óptico utilizado principalmente na construção civil. Um conjunto óptico sobre uma base na forma de tripé, permite que se mire em referenciais. Dependendo do objetivo da utilização, podemos determinar ângulos verticais e horizontais

Fonte: Elaborado pela autora

Fonte: Elaborado pela autora

Elaborado por Roberta Michaello


Vamos construir um
Teodolito e aplicar o
que foi visto em
aula?!
Elaborado por Roberta Michaello

ANEXO B – Atividade 2

Atividade: Cálculo de áreas de figuras, por diferentes técnicas.

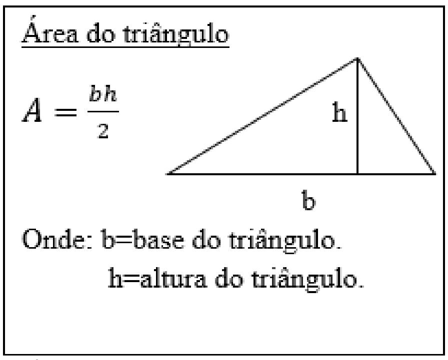
A avaliação de áreas é uma atividade comum na Topografia. Por exemplo, na compra e venda de imóveis rurais e urbanos esta informação tem muita importância. Imagine que você é o engenheiro responsável pela avaliação do terreno que aparece na planta de situação *(Planta de situação é a planta que indica o posicionamento do terreno quanto às ruas adjacentes e seu posicionamento solar (Indicação da posição do norte))*. Para isso é necessário que se saiba a área do terreno. Então:

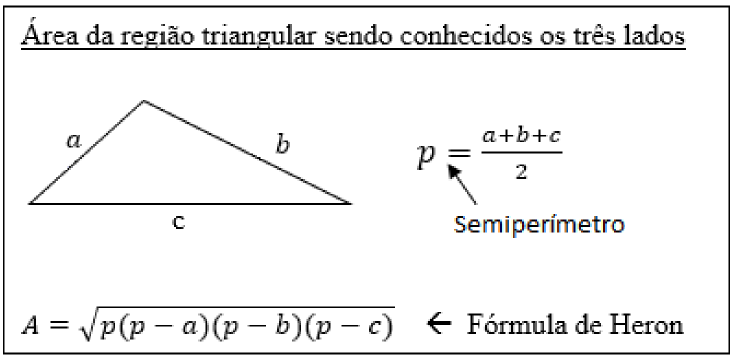
1 Calcule a área do terreno, pelos dois métodos abaixo:

a) **Decomposição de áreas.** Este método consiste em dividir a área a ser avaliada em figuras geométricas, onde seja possível calcular suas áreas. A área final será determinada pela somatória de todas as áreas das figuras geométricas encontradas.

b) **Coordenadas totais.** Este método consiste em determinar as coordenadas dos vértices do polígono que descreve o terreno e aplicar a fórmula deduzida em aula.

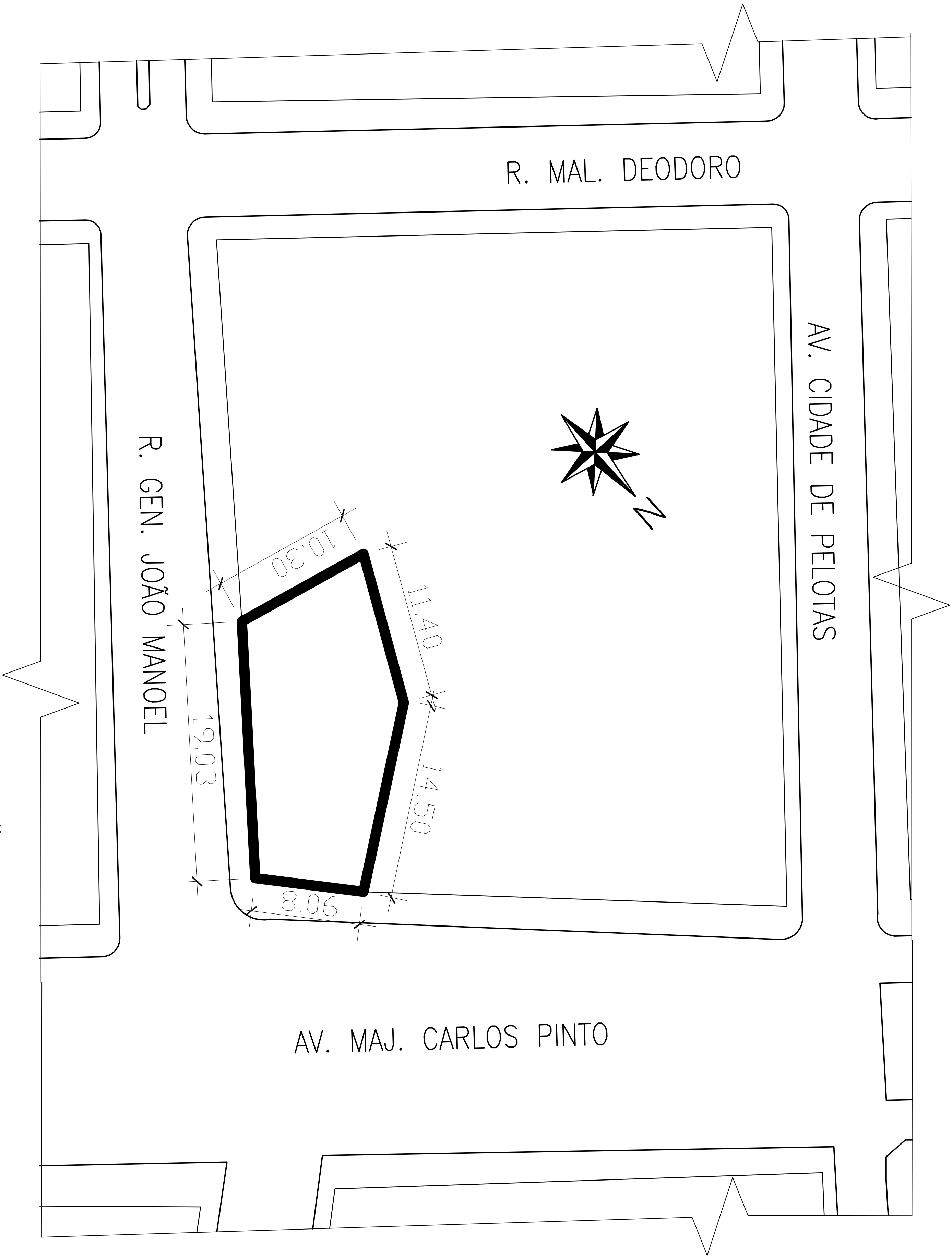
Você pode precisar:





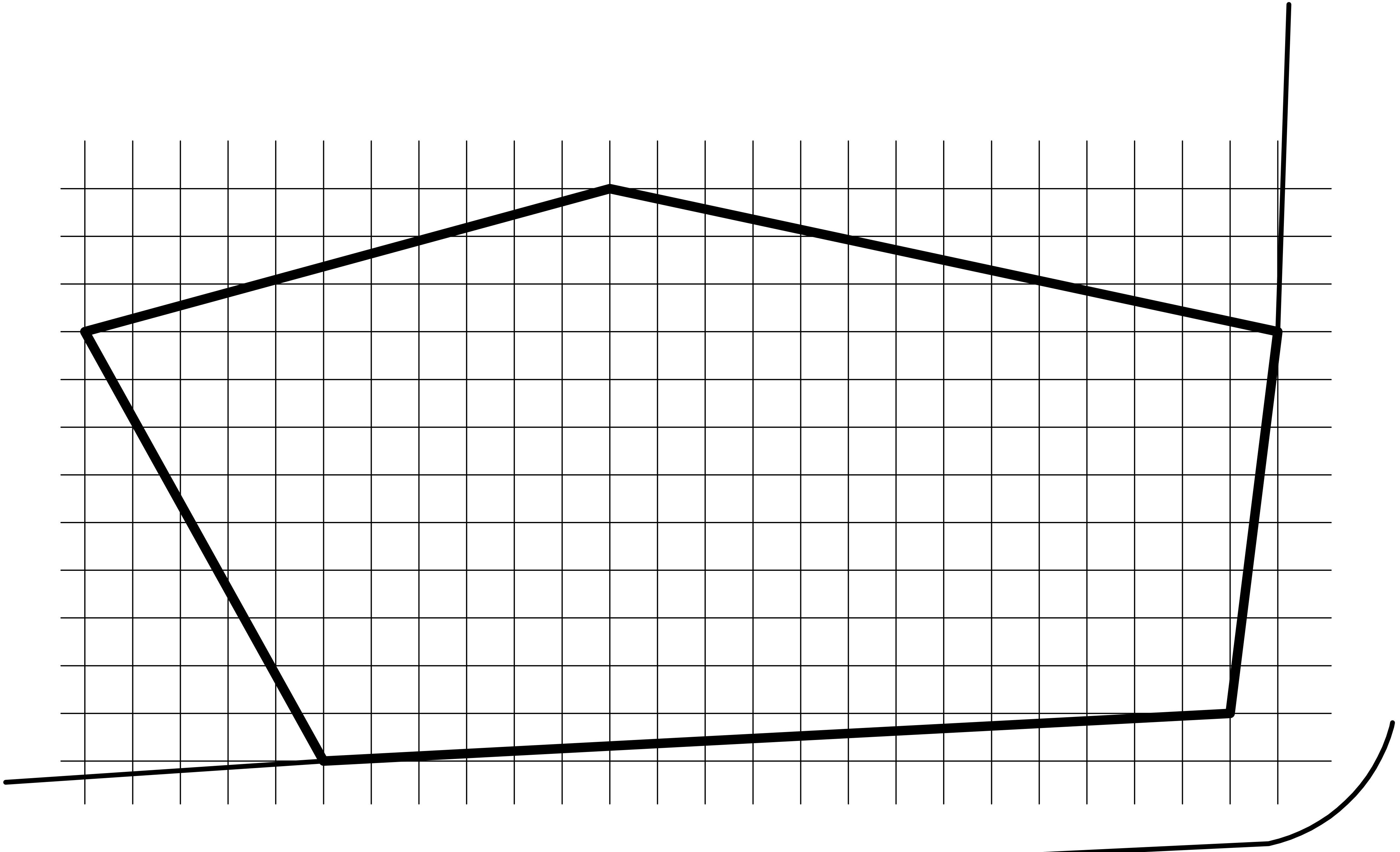
2 Com a modernização dos equipamentos topográficos é muito comum que as áreas sejam calculadas com auxílio computacional. É uma forma bem prática de calcular a mesma e muito utilizada atualmente, consiste em inserir os pontos que definem os

vértices em um programa gráfico e o mesmo calcula a área. Vamos ver se isso funciona? Lembre-se que você é o engenheiro contratado para avaliar a área em questão. Você já comparou os resultados obtidos na questão anterior? Os dois métodos apresentam resultados semelhantes? Agora vamos calcular computacionalmente, com auxílio do *GeoGebra*. Compare os seus resultados com os colegas de aula!



10

PLANTA DE SITUAÇÃO



PLANTA DETALHE

ESCALA: 1/100

ANEXO C – Atividade 3

Atividade: Introdução a coordenadas cartesianas.

Toda vez que um engenheiro ou arquiteto projeta uma casa é necessário atender aos pedidos de seus clientes é claro, mas também é necessário avaliar se o que foi solicitado é possível. Muitas vezes os clientes têm dificuldades para imaginar o tamanho real dos cômodos, apenas imaginando suas medidas. Uma boa tática é apresentar o projeto desejado, em forma de planta baixa mobilhada.

Vamos imaginar que você é um engenheiro e seu cliente deseja realizar a construção da casa representada na planta dada. Percebe-se que o cômodo destinado para o quarto, ainda está sem janela, porta e móveis. Então como engenheiro você deve:

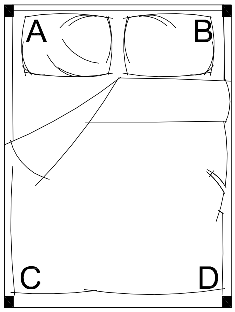
a) Dispor os móveis, a porta e a janela no quarto e indicar o posicionamento dos mesmos. Ou seja, indicar a coordenada em que os pontos destacados ficarão. O que podemos comentar sobre as coordenadas desses pontos? Discuta com o restante da turma e o(a) professor(a).

b) Como engenheiro, você achou o tamanho do quarto adequado? Justifique o posicionamento dos móveis e aberturas (porta e janela).

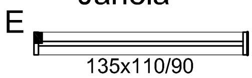
c) As numerações que estão junto à porta significam suas dimensões (largura x altura) e as que estão junto à janela indicam largura x altura /altura do peitoril. Sabendo disso, embora a janela e a porta tenham apenas um ponto destacado para indicar a posição, é possível determinar as coordenadas das extremidades contrárias a estes pontos. Você concorda? Como isso pode ser feito? Quais seriam essas coordenadas?

Recorte os objetos a seguir, escolha o local adequado e cole na planta.

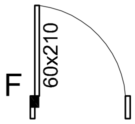
Cama



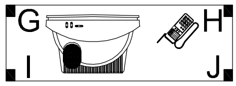
Janela



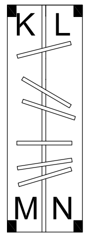
Porta

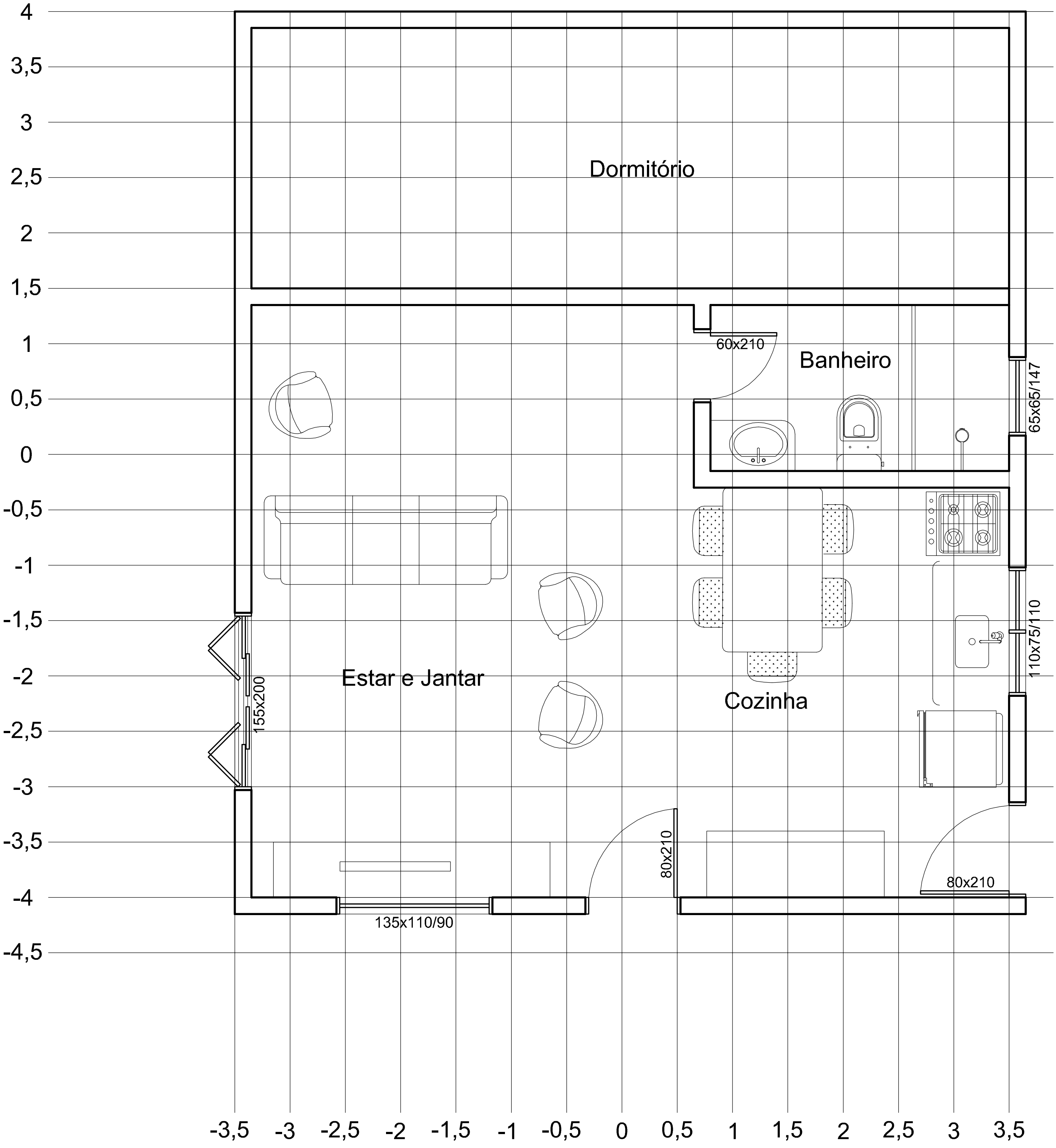


Televisor



Guarda-roupa




Dormitório
60x210
Banheiro
65x65/147
Estar e Jantar
155x200
Cozinha
110x75/110
80x210
80x210
135x110/90
4
3,5
3
2,5
2
1,5
1
0,5
0
-0,5
-1
-1,5
-2
-2,5
-3
-3,5
-4
-4,5
-3,5
-3
-2,5
-2
-1,5
-1
-0,5
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5