

UNIVERSIDADE FEDERAL DE RIO GRANDE  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

JUILSON ANTÓNIO PINA PAIVA PEREIRA

**Princípio variacional de Herglotz para campos não conservativos: Uma teoria  
de gravitação não conservativa**

Rio Grande

2017

JUILSON ANTÓNIO PINA PAIVA PEREIRA

**Princípio variacional de Herglotz para campos não conservativos: Uma teoria  
de gravitação não conservativa**

Versão original

Dissertação apresentada à Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal de Rio Grande para obtenção do título de Mestre em Física pelo Programa de Pós-graduação em Física.

Área de concentração: Física Matemática

Orientador: Prof. Dr. Matheus Jatkoske Lazo

Coorientador: Prof. Dr. Gastão Silves Freire

Rio Grande

2017

Ficha catalográfica

Dissertação de autoria de Julilson Ant3nio Pina Paiva Pereira, sob o t3tulo “**Princ3pio variacional de Herglotz para campos n3o conservativos: Uma teoria de gravita33o n3o conservativa**”, apresentada ao Instituto de Matem3tica, Estat3stica e F3sica da Universidade de Rio Grande, para obten33o do t3tulo de Mestre em F3sica pelo Programa de P3s-gradua33o em F3sica, na 3rea de concentra33o F3sica Matem3tica, aprovada em \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ pela comiss3o julgadora constitu3da pelos doutores:

-----  
**Prof. Dr.** -----  
Institui33o: -----  
Presidente

-----  
**Prof. Dr.** -----  
Institui33o: -----

-----  
**Prof. Dr.** -----  
Institui33o: -----

-----  
**Prof. Dr.** -----  
Institui33o: -----

*Dedico este trabalho à minha família.*

## Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a minha família pelo apoio e pela confiança que depositaram em mim desde muito cedo. Em especial agradeço a minha mãe Maria Odete, heroína que me deu o apoio incondicional, suporte que sempre precisei para manter firme e forte nesta luta. Agradeço ao meu tio Adérito e minha tia Domingas, por serem praticamente um pai e uma mãe, e me apoiaram desde começo até ao fim.

Agradeço ao meu orientador Matheus Lazo, por ser um pai científico, pelo apoio em pouco tempo que lhe coube, pelo conhecimento que adquiri durante o mestrado, pelas correções e incentivos.

Agradeço também o meu coorientador Gastão Frederico, pelo acompanhamento da minha vida acadêmica desde a graduação até aqui.

Também agradeço: Aos amigos meus amigos e colegas que presenciaram esta luta diariamente, pelos bons momentos que compartilhamos;

À Universidade Federal do Rio Grande, ao Instituto de Matemática, Estatística e Física e ao Programa de Pós-Graduação em Física;

À CAPES pelo apoio financeiro;

À PRAE pelo apoio à moradia e alimentação; E por fim não menos importante, a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, muito obrigado.

*"A mente que se abre para alguma coisa nova, nunca mais será a mesma". (Albert Einstein)*

## Resumo

Nos últimos séculos, diversos métodos foram propostos tentando estabelecer um Princípio da Mínima Ação não conservativo, no entanto nenhum foi bem sucedido, permitindo que esse problema encontre-se ainda em aberto. O objetivo desta dissertação é propor um Princípio da mínima ação capaz de descrever processos físicos não conservativos. Estenderemos o princípio variacional de Herglotz, bem como o teorema de Noether correspondente, para o caso de vários campos, onde demonstraremos a equação generalizada de Euler-Lagrange. A partir da equação generalizada de Euler-Lagrange abordaremos sistemas não conservativos como no caso do electromagnetismo, mecânica quântica e gravitação. Estudaremos os efeitos das ondas gravitacionais considerando o tecido espaço-tempo com uma geometria não conservativa. Os resultados mostram que a teoria de gravidade não conservativa proposta explica a expansão do universo sem a necessidade da energia escura, e a dificuldade na detecção das ondas gravitacionais.

Palavras-chaves: Princípio da Mínima Ação. Euler-Lagrange. Sistemas não conservativos. Gravidade não conservativa.



## Abstract

In recent centuries, various methods have been proposed trying to establish a non-conservative principle of least action, however none were successful, allowing this problem to still be unsolved. The goal of this dissertation is to propose a principle of stationary action capable of describing non-conservative physical processes. We will extend Herglotz's variational principle, as well as the corresponding Noether's theorem, for the case of multiple fields, where we will demonstrate the generalized Euler-Lagrange equation. From the generalized Euler-Lagrange equation we will discuss non-conservative systems as in the case of electromagnetism, quantum mechanics, and gravitation. We will study the effects of gravitational waves considering the space-time fabric with a non-conservative geometry. The results show that the proposed Non-conservative theory of gravity explains the expansion of the universe without the need of dark energy, and the difficulty in the detection of gravitational waves.

Keywords: Principle of Least Action. Euler-Lagrange. Non-conservative systems. Non-conservative Gravity.

## Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Princípio da Mínima Ação</b> . . . . .	<b>3</b>
2.1	<i>Princípio da Mínima Ação para sistemas conservativos</i> . . . . .	3
2.2	<i>Princípio da Mínima Ação para sistemas não conservativos</i> . . . . .	10
2.2.1	Lagrangianas físicas . . . . .	11
2.2.2	Princípio variacional de Herglotz . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Princípio Variacional de Herglotz e teorema de Noether para campos</b> . . . . .	<b>17</b>
3.1	<i>Princípio Variacional de Herglotz para campos</i> . . . . .	17
3.2	<i>Teorema de Noether para campos não conservativos</i> . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Aplicações do princípio variacional de Herglotz e teorema de Noether para campos não conservativos</b> . . . . .	<b>28</b>
4.1	<i>Equação de Maxwell para sistemas não conservativos</i> . . . . .	28
4.1.1	Ondas eletromagnéticas amortecida . . . . .	30
4.1.2	Lei de Gauss e Ampère . . . . .	33
4.1.3	Leis de conservação . . . . .	34
4.2	<i>Equação de Schrödinger para sistemas não conservativos</i> . . . . .	35
4.2.1	Equação de continuidade . . . . .	39
4.2.2	Limite macroscópico . . . . .	40
4.2.3	Leis de conservação . . . . .	41
<b>5</b>	<b>Gravitação</b> . . . . .	<b>43</b>
5.1	<i>Equação de Einstein para sistemas não conservativos</i> . . . . .	43
5.2	<i>Limite para campos fraco</i> . . . . .	49
5.2.1	Ondas gravitacionais amortecidas . . . . .	50
5.2.2	Gravitação Newtoniana não conservativa . . . . .	56
5.3	<i>Universo Bianchi I</i> . . . . .	58
5.3.1	Equação de Friedmann . . . . .	69

<b>6</b>	<b>Conclusão</b> . . . . .	<b>71</b>
	<b>Referências</b> . . . . .	<b>73</b>

## 1 Introdução

Uma teoria física consistente é caracterizada por uma estrutura lógica matemática, onde cada propriedade, resultado e objeto matemático da teoria encontra no mundo real um análogo físico, descrevendo com exatidão o comportamento do sistema real. Ainda não temos uma teoria física consistente capaz de descrever o mundo físico em todas as suas escalas de tamanhos e energias. A incapacidade de conciliar os princípios da relatividade geral com os princípios da mecânica quântica é o maior desafio da física teórica em aberto. Assim como uma teoria matemática é construída a partir de verdades assumidas *à priori* e que não podem ser provadas, chamadas de axiomas, as teorias físicas são construídas *à partir de verdades *á priori* chamadas de postulados*. Para que a teoria seja boa, esses postulados devem descrever leis naturais observadas e testadas experimentalmente, e o conjunto dos postulados deve produzir uma estrutura matemática lógica e consistente. Se a escolha do conjunto de postulados contiver algum erro, quer seja pela formulação errada por um deles, quer seja pela ausência de algum postulado ainda desconhecido, ou pelo uso de um falso postulado, a teoria física não será consistente.

Nesta dissertação, trataremos justamente da modificação de um dos postulados mais universais da física, o postulado da Mínima Ação. É a partir deste postulado que se obtém a dinâmica em qualquer teoria física, desde a mecânica clássica até o mundo quântico, desde a escala de distância entre as partículas fundamentais até escalas cosmológicas. No entanto na forma com que o Princípio da Mínima Ação é formulado atualmente, ele só pode ser aplicado à sistemas conservativos, como foi provado rigorosamente por Bauer em 1931 (BAUER, 1931). Por outro lado, a expansão acelerada do universo é comumente explicada na literatura a partir da definição de um tipo exótico de energia, chamada de energia escura, que apresenta em muitas teorias propriedades de viscosidade, violando a conservação de energia. No entanto, tanto a energia escura quanto a não conservação de energia não foram observadas, diretamente na natureza até hoje. Além disso, como essas teorias envolvem a inclusão de um novo objeto físico com propriedades não conservativas, a teoria obtida não é uma teoria de primeiros princípios, pois a dinâmica não pode ser obtida a partir do Princípio da Mínima Ação.

Neste contexto, no presente trabalho mostramos que é possível generalizar o Princípio da Mínima Ação para sistemas não conservativos, generalizando o problema

variacional de Herglotz ([HERGLOTZ, 1930](#)) para vários campos. Mais importante, a partir desta Ação generalizada é possível construir uma teoria para a gravitação que mesmo sem a energia escura, e com conservação de energia-momentum, descreve qualitativamente e quantitativamente o fenômeno da expansão acelerada do universo. Na nossa teoria, diferente das outras propostas conhecidas na literatura, a não conservação está presente na lado geométrico da equação de Einstein generalizada e não no lado físico. Além disso, como o nosso Princípio da Mínima Ação é geral, estudamos também a sua aplicação no eletromagnetismo e na mecânica quântica. Estudamos também as leis de conservação a partir da generalização do teorema de Noether.

O trabalho está dividido da seguinte forma: No capítulo 2 apresentamos uma breve revisão do Princípio da Mínima Ação e de algumas tentativas de estende-lo para sistemas não conservativos. No capítulo 3 formulamos nosso Princípio da Mínima Ação a partir da generalização do problema de Herglotz. Também apresentamos neste capítulo o teorema de Noether associado. O capítulo 4 é dedicado às aplicações no eletromagnetismo e na mecânica quântica. No capítulo 5 formulamos nossa teoria de gravitação não conservativa, estudamos o modelo cosmológico de Bianchi I, as ondas gravitacionais e o limite Newtoniano da teoria. As conclusões são apresentadas no capítulo 6.

**Nota 1** *Ao longo do trabalho sempre que estiverem presentes índices repetidos, significa que existe a soma sobre índice. Ao longo dos cálculos escolhemos a velocidade da luz no vácuo  $c = 1$ .*

## 2 Princípio da Mínima Ação

Neste capítulo faremos uma breve revisão do Princípio da Mínima Ação para sistemas conservativos, e de tentativas de estendê-lo para sistemas não conservativos. O Princípio da Mínima Ação é um dos pilares fundamentais da física moderna. A dinâmica em qualquer teoria física, desde a mecânica clássica de Newton à relatividade geral de Einstein à teoria dos campos quânticos de Schrödinger, foi reformulada com este único princípio, por Euler, Hilbert e Feynman, respectivamente. Ele foi proposto inicialmente, por Maupertuis (MAUPERTUIS, 1999) em 1744, com o objetivo inicial de unificar as leis da natureza. Maupertuis inspirou-se no princípio de Fermat da ótica e tentou adaptá-lo para a mecânica Newtoniana. Mais tarde este princípio foi corretamente estendido por Euler (EULER, 1952), mantendo a mesma ideia de Maupertuis. A formulação moderna do Princípio da Mínima Ação, também conhecida como princípio de Hamilton, foi finalmente proposta por Hamilton usando o princípio de D’Alambert (VUJANOVIC; JONES, 1989).

### 2.1 Princípio da Mínima Ação para sistemas conservativos

Nesta seção apresentaremos o Princípio da Mínima Ação na forma proposta por Euler, e na sequência mostraremos como obter o princípio como se conhece hoje. Em nossa demonstração usaremos um caminho diferente do usado por Hamilton e em livros textos.

Apesar da grande contribuição de Maupertuis, o Princípio da Mínima Ação, que serviu de base para a formulação moderna da mecânica analítica, foi proposto por Euler. Segundo Euler a trajetória descrita por uma partícula é aquela que minimiza a ação integral  $S = \int_{s_0}^{s_f} mv ds$ , onde  $m$  é a massa,  $v$  o módulo da velocidade da partícula,  $ds$  é o elemento infinitesimal da trajetória,  $s_0$  e  $s_f$  comprimento do arco inicial e final da trajetória, respectivamente. Além disso, deveria ser imposta à trajetória a condição de conservação da energia do sistema. Lembrando que  $ds = v dt$ , podemos escrever a ação como sendo

$$S = \int_{t_0}^{t_f} mv^2 dt, \quad (2.1)$$

onde  $t$  é a variável tempo e  $t_0, t_f$  tempo inicial e final da partícula. Por outro lado, a versão de Hamilton, como é conhecida hoje o princípio da mínima ação, consiste em minimizar o funcional ação

$$S = \int_{t_0}^{t_f} (T - U) dt, \quad (2.2)$$

onde  $T$  é energia cinética e  $U$  a energia potencial. Para fazer a transição do ponto de vista de Euler para Hamilton, considera-se apenas sistemas físicos conservativos, ou seja a energia mecânica do sistema ( $T + U$ ), é constante ao longo da trajetória. Se a energia é constante ao longo da trajetória, digamos  $E$ , a sua integração no intervalo  $[t_0, t_f]$  também é, logo o princípio da mínima ação proposta por Euler se reduz a uma classe problemas variacionais com restrição, conhecidos como problemas isoperimétricos (SAGAN, 2012). Em outras palavras, o Princípio da Mínima Ação para sistemas físicos onde há conservação de energia consiste em minimizar o funcional

$$\int_{t_0}^{t_f} mv^2 dt$$

sujeito à condição

$$\int_{t_0}^{t_f} \left( \frac{m}{2} v^2 + U \right) dt = E\Delta t = \text{constante} \quad (2.3)$$

O problema (2.3) pode ser convertido para um problema variacional clássico, de modo que a lei da conservação de energia fica de forma implícita. Fazendo a conservação de energia permanecer de forma implícita, segue o Princípio da Mínima Ação para mecânica clássica na forma mais conhecida atualmente (Princípio de Hamilton).

**Teorema 2.1.1 (Princípio da Mínima Ação conservativo)** *Consideremos um sistema físico conservativo de uma única partícula, a trajetória descrita por essa partícula no intervalo de tempo  $[t_0, t_f]$ , é caracterizada pelas funções  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) que deixam o funcional integral*

$$S = \int_{t_0}^{t_f} (T - U) dt \quad (2.4)$$

*estacionário.*

**Prova** Se  $x_i(t)$  é a trajetória que a partícula descreve, então é solução do problema (2.3). Usando o método multiplicador de Lagrange (ADAMS, 2010) o problema (2.3) equivale minimizar o funcional

$$S = \int_{t_0}^{t_f} L(t, x_i, \dot{x}_i) dt, \quad (2.5)$$

onde

$$L = m (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - \lambda \left( \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) + U \right) \quad (2.6)$$

e  $\lambda$  um número real, conhecido como multiplicador de Lagrange. Se  $x_i$  deixa o funcional (2.5) estacionário, então a sua primeira variação é nula

$$\delta S = 0. \quad (2.7)$$

Variando a Ação, vem que

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_0}^{t_f} \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i \right) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} \delta x_i - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right) dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \Big|_{t_0}^{t_f}. \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \delta x_i dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \Big|_{t_0}^{t_f}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde na segunda linha foi usada a integração por partes e com  $i = 1, 2, 3$ . A quantidade  $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i$  é nula nos extremos, logo quantidade  $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \Big|_{t_0}^{t_f}$  também é nula. Então usando (2.7) temos que

$$\int_{t_0}^{t_f} \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \delta x_i dt = 0, \quad (2.9)$$

para qualquer variação  $\delta x_i$ . Como a igualdade (2.9) é válido para qualquer variação  $\delta x_i$ , logo

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.10)$$

De (2.6) temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_i} &= -\lambda \frac{\partial U}{\partial x_i} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} &= m (2 - \lambda) \dot{x}_i. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Substituindo essas duas quantidades em (2.10) temos

$$m (\lambda - 2) \frac{d^2 x_i}{dt^2} - \lambda \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0. \quad (2.12)$$

Comparando (2.12) com a segunda lei de Newton conclui-se que  $\lambda = 1$ . Com a escolha desse multiplicador de Lagrange, temos que  $L = T - U$ , logo a demonstração fica concluída. C.Q.D

Na formulação de Hamilton, que é válida apenas quando o sistema é conservativo, a Lagrangeana é construída com a diferença entre a energia cinética  $T$  e potencial  $U$  do sistema

$$L = T - U. \quad (2.13)$$



Embora tenha sido formulado inicialmente no contexto da mecânica Newtoniana, ao longo dos séculos, e em especial na primeira metade do século XX, verificou-se que o Princípio da Mínima Ação era de fato um dos princípios fundamentais da física, sendo fundamental para a construção de todas as teorias físicas modernas. De fato, a descrição dinâmica de qualquer sistema físico em qualquer teoria satisfaz o Princípio da Mínima Ação.

Para obter a dinâmica em um sistema físico a partir do Princípio da Mínima Ação é necessário definir uma função Lagrangeana. Como a Ação é uma quantidade escalar, sendo assim, ela deve ser um invariante por mudanças de coordenadas de escala, a Lagrangeana deve ser uma função construída com escalares, ou invariantes da teoria. Para fixar a ideia da construção da ação a partir dos invariantes da teoria, aplicaremos o Princípio da Mínima Ação na teoria eletromagnética e na teoria quântica. Analogamente a uma partícula material, na teoria de campos a função Lagrangeana é construída da mesma maneira, fazendo a seguinte transição: A função Lagrangeana já não depende mais da posição  $x^i(t)$  em função do tempo, mas do campo escalar  $\phi^i(x^\mu)$ . Campo é uma quantidade definida em cada ponto do espaço tempo  $x^\mu$ , enquanto que uma partícula clássica é caracterizada pela sua posição  $x^i(t)$ , conseqüentemente a ação  $S$  é um funcional dependente desses campos e das derivadas. Usaremos as seguintes notações para coordenadas e derivadas:

$$\begin{aligned} x^0 = t, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z \\ \partial_\mu \phi^i = \frac{\partial \phi^i}{\partial x^\mu}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \quad i = 1, \dots, n. \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Quando envolve campos, a função Lagrangeana pode ser expressa como uma integral sobre uma densidade Lagrangeana  $\mathcal{L}$ :

$$L = \int \mathcal{L}(x^\mu, \phi^i, \partial_\mu \phi^i) d^3x. \quad (2.15)$$

Nesse caso a ação fica definida por

$$S = \int L dt = \int \mathcal{L}(x^\mu, \phi^i, \partial_\mu \phi^i) d^4x, \quad (2.16)$$

para quaisquer  $n$  campos escalares  $\phi^i$  que extremizem (2.16). Estes necessariamente devem satisfazer a equação de Euler-Lagrange para campos escalares (SAGAN, 2012; GOLDSTEIN CHARLES P. POOLE, 2001)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} - \frac{d}{dx^\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \right) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.17)$$

Antes de investigar os invariantes, introduziremos algumas definições. Chamaremos de  $A_\mu$  o quadri-vetor eletromagnético, onde a componente temporal  $A_0$  é o potencial elétrico

e a parte espacial  $\mathbf{A}$  é o vetor potencial magnético. A quantidade  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  (CARROLL, 2004; JACKSON, 1999) é conhecida na literatura como tensor campo eletromagnético, que na sua forma mais explícita, em termo de componentes, é dado por

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Os únicos invariantes (LANDAU, 2013) que podem ser construídos com o tensor eletromagnético  $F_{\mu\nu}$  são:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= \mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 \\ \tilde{\varepsilon}_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta} &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

onde  $\tilde{\varepsilon}_{\mu\nu\alpha\beta}$  é o simbolo de Levi-Civita definido de forma seguinte

$$\tilde{\varepsilon}_{\mu\nu\alpha\beta} = \begin{cases} +1 & \text{se } \mu\nu\alpha\beta \text{ for permutação par de } 0123 \\ -1 & \text{se } \mu\nu\alpha\beta \text{ for permutação impar de } 0123 \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (2.20)$$

e  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  são os campos elétrico e magnético, respectivamente, e onde  $F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}$ , sendo  $\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$  a métrica do espaço de Minkowski  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  (CARROLL, 2004). Se existirem fontes, introduz-se o produto escalar do quadri-potencial eletromagnético  $A_\mu$  com o quadri-vetor densidade de carga  $J^\mu$  ( $A_\mu J^\mu$ ), que representa o termo de acoplamento entre a corrente e o campo. Além disso, se estivermos interessados que a equação do campo seja linear, então a densidade Lagrangeana tem que ser quadrática em  $A_\mu$  e  $\partial_\nu A_\mu$ . Então a densidade Lagrangeana deriva-se da combinação linear entre  $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ ,  $\tilde{\varepsilon}_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}$  e  $A_\mu J^\mu$ . Portanto, a ação para o potencial eletromagnético é

$$S = \int d^4x (a_1 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + a_2 A_\mu J^\mu + a_3 \tilde{\varepsilon}_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}) \quad (2.21)$$

onde  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$  são constantes não nulas, a serem determinadas de modo que minimize a ação (2.21). A densidade Lagrangeana é

$$\mathcal{L} = a_1 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + a_2 A_\mu J^\mu + a_3 \tilde{\varepsilon}_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta} \quad (2.22)$$

Então, segundo o Princípio da Mínima Ação, se o quadri-potencial  $A_\mu$  minimiza (2.21), é necessário que satisfaça a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \frac{d}{dx^\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right) = 0. \quad (2.23)$$

Para encontrar a equação do campo, comecemos a calcular os termos da equação de Euler-Lagrange (2.23). Observa-se que o terceiro termo que aparece na densidade Lagrangeana (2.21), não tem contribuição nenhuma para a equação do campo, pois levando em conta que o índice na qual se realiza a soma é mudo, e usando a matriz da métrica para baixar e subir índices no tensor eletromagnético, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a_3 \tilde{\varepsilon}_{\lambda\gamma\alpha\beta} F^{\lambda\gamma} F^{\alpha\beta}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} &= a_3 \tilde{\varepsilon}_{\lambda\gamma\alpha\beta} \left( \eta^{\lambda\rho} \eta^{\gamma\sigma} \frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} F^{\alpha\beta} + \eta^{\alpha\rho} \eta^{\beta\sigma} F^{\lambda\gamma} \frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right) \\
&= a_3 \tilde{\varepsilon}_{\lambda\gamma\alpha\beta} \left( \eta^{\lambda\rho} \eta^{\gamma\sigma} F^{\alpha\beta} + \eta^{\alpha\rho} \eta^{\beta\sigma} F^{\lambda\gamma} \right) \left( \delta^\mu_\rho \delta^\nu_\sigma - \delta^\mu_\sigma \delta^\nu_\rho \right) \\
&= a_3 \tilde{\varepsilon}_{\lambda\gamma\alpha\beta} \left( F^{\alpha\beta} \left( \eta^{\mu\lambda} \eta^{\gamma\nu} - \eta^{\nu\lambda} \eta^{\gamma\mu} \right) + F^{\lambda\gamma} \left( \eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} - \eta^{\alpha\nu} \eta^{\beta\mu} \right) \right) \quad (2.24) \\
&= a_3 \tilde{\varepsilon}_{\lambda\gamma\alpha\beta} \left( 2F^{\alpha\beta} \eta^{\mu\lambda} \eta^{\gamma\nu} + 2F^{\lambda\gamma} \eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} \right) \\
&= a_3 \tilde{\varepsilon}_{\lambda\gamma\alpha\beta} 4F^{\lambda\gamma} \eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu},
\end{aligned}$$

pois  $\tilde{\varepsilon}_{\lambda\gamma\alpha\beta}$  apresenta a propriedade da anti-simetria nos seus índices. Como  $\tilde{\varepsilon}_{\lambda\gamma\alpha\beta}$  só é não nulo para os índices todos diferentes e  $\eta^{\beta\nu}$  é diagonal, logo

$$\tilde{\varepsilon}_{\lambda\gamma\alpha\beta} \partial_\mu F^{\lambda\gamma} \eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} = 0. \quad (2.25)$$

Então chega-se a conclusão que o terceiro termo em (2.22) não contribui para a equação do campo. Já o segundo termo contribui, com

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = \frac{\partial}{\partial A_\nu} (a_2 A_\mu J^\mu) = a_2 \delta^\nu_\mu J^\mu = a_2 J^\nu. \quad (2.26)$$

E por fim, do primeiro termo obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} &= \frac{\partial a_1 F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = a_1 \left( \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} F^{\alpha\beta} + \eta^{\alpha\rho} \eta^{\beta\sigma} F_{\alpha\beta} \frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right) \\
&= a_1 \left( (\delta^\mu_\alpha \delta^\nu_\beta - \delta^\mu_\beta \delta^\nu_\alpha) F^{\alpha\beta} + F^{\rho\sigma} (\delta^\mu_\rho \delta^\nu_\sigma - \delta^\mu_\sigma \delta^\nu_\rho) \right) \quad (2.27) \\
&= a_1 (F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu} + F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu}).
\end{aligned}$$

Tendo em conta que tensor eletromagnético  $F^{\mu\nu}$  é anti-simétrico, então temos que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = 4a_1 F^{\mu\nu} \quad (2.28)$$

substituindo (2.36) e (2.28) em (2.35) tem-se

$$\begin{aligned}
4a_1 \partial_\mu F^{\mu\nu} &= a_2 J^\nu \\
\partial_\mu F^{\nu\mu} &= -\frac{a_2}{4a_1} J^\nu.
\end{aligned} \quad (2.29)$$

Comparando a equação acima com o primeiro par das equações de Maxwell, ou com a primeira equação na forma tensorial (CARROLL, 2004; JACKSON, 1999) conclui-se que  $a_1 = -\frac{1}{4}$  e  $a_2 = 1$  ou  $a_1 = \frac{1}{4}$  e  $a_2 = -1$ .

**Nota 2** A segunda possibilidade se descarta porque maximiza a ação, contradizendo o Princípio da Mínima Ação, então a única opção é a primeira, na qual minimiza a ação.

O segundo par das equações de Maxwell, que são as equações homogêneas, é uma consequência da anti-simetria do tensor eletromagnético  $F_{\mu\nu}$ . Pois devido à propriedade da anti-simetria e da definição de  $F_{\nu\lambda}$  temos

$$\partial_{[\mu}F_{\nu\lambda]} = 0, \quad (2.30)$$

com efeito

$$\begin{aligned} \partial_{[\mu}F_{\nu\lambda]} &= \partial_{\mu}F_{\nu\lambda} + \partial_{\nu}F_{\lambda\mu} + \partial_{\lambda}F_{\mu\nu} \\ &= \partial_{\mu}(\partial_{\nu}A_{\lambda} - \partial_{\lambda}A_{\nu}) + \partial_{\nu}(\partial_{\lambda}A_{\mu} - \partial_{\mu}A_{\lambda}) + \partial_{\lambda}(\partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (2.31)$$

onde foi usada a definição do tensor eletromagnético  $F_{\mu\nu}$  e que as derivadas comutam entre si.

Já do ponto de vista da mecânica quântica, constrói-se a ação com invariantes a partir da função de onda  $\psi$ . Cada função  $\psi$  é complexa e pertence a um espaço de Hilbert (COHEN-TANNOUJJI, 1977), então a ação com Lagrangeana quadrática que determina a equação do movimento é dada por

$$\begin{aligned} S = \int d^4x \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla\psi^*(\mathbf{r}, t)\nabla\psi(\mathbf{r}, t) - V(\mathbf{r})\psi^*(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r}, t) \right. \\ \left. + \frac{i\hbar}{2} \left( \psi^*(\mathbf{r}, t)\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t}\psi^*(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r}, t) \right) \right), \end{aligned} \quad (2.32)$$

onde  $\psi^*$  é o complexo conjugado de  $\psi$  e  $\nabla\psi^*$  é o complexo conjugado de  $\nabla\psi$ . Para a ação (2.32) a densidade Lagrangeana é (GERGELY, 2002)

$$\mathcal{L} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla\psi^*(\mathbf{r}, t)\nabla\psi(\mathbf{r}, t) - V(\mathbf{r})\psi^*(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r}, t) \quad (2.33)$$

$$+ \frac{i\hbar}{2} \left( \psi^*(\mathbf{r}, t)\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t}\psi^*(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r}, t) \right) \quad (2.34)$$

Podemos tratar  $\psi$  e  $\psi^*$  como dois campos independentes. De acordo com o Princípio da Mínima Ação se o par  $(\psi, \psi^*)$  minimiza (2.32), tem que satisfazer a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_{\nu}} - \frac{d}{dx^{\mu}} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}A_{\nu})} \right) = 0, \quad \nu = 1, 2. \quad (2.35)$$

com  $A_1 = \psi$  e  $A_2 = \psi^*$ , fornecendo duas equações de movimento

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi^*(\mathbf{r}, t) - V(\mathbf{r})\psi^*(\mathbf{r}, t) - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^*(\mathbf{r}, t) &= 0 \\ \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) - V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}, t) + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) &= 0, \end{aligned} \quad (2.36)$$

conhecidas como equações de Schrödinger (COHEN-TANNOUJJI, 1977) para  $\psi$  e  $\psi^*$ .

## 2.2 Princípio da Mínima Ação para sistemas não conservativos

Desde a introdução do Princípio da Mínima Ação em sua formulação madura por Euler, Lagrange e Hamilton, sabe-se que a equação do movimento para sistemas dissipativos lineares não pode ser obtida diretamente a partir do princípio variacional. Uma prova rigorosa da falha do Princípio da Mínima ação tradicional para descrever sistemas não conservativos foi dada por Bauer (BAUER, 1931) em 1931, em um trabalho onde ele provou matematicamente a impossibilidade de se obter um termo dissipativo proporcional à velocidade em Lagrangeanas físicas a partir do Princípio da Mínima Ação. No último século, diversos métodos foram propostos na tentativa de contornar este problema. Alguns exemplos incluem Lagrangeanas dependentes do tempo (STEVENS, 1958; RAZAVY, 2006; VUJANOVIC; JONES, 1989) e coordenadas auxiliares descrevendo o sistema com tempo invertido (BATEMAN, 1931; VUJANOVIC; JONES, 1989). Infelizmente, todas essas propostas utilizam Lagrangeanas não físicas no sentido de elas não fornecerem relações corretas para o momentum e para a energia do sistema (RIEWE, 1996). Recentemente também foi proposta uma alternativa que, embora contenha Lagrangeanas físicas, utiliza derivadas fracionárias que são operadores não-locais e com uma estrutura algébrica complicada, dificultando a sua aplicação (RIEWE, 1996; LAZO; KRUMREICH, 2014). Apesar de todo esse esforço ao longo do século XX e início do século XXI para se generalizar o Princípio da Mínima Ação para sistemas não conservativos, uma proposta promissora feita por Herglotz em 1930 passou praticamente desconhecida ao longo desse tempo.

Nosso trabalho se baseia justamente na generalização do Princípio de Herglotz (HERGLOTZ, 1930) para campos. Resumimos a seguir as características de algumas dessas formulações.

### 2.2.1 Lagrangeanas físicas

Como já foi dito anteriormente, uma das limitações do Princípio da Mínima Ação é o fato de ser válido apenas para sistemas conservativos. Sabe-se que, na realidade, no mundo macroscópico existe sempre a dissipação de energia, então é extremamente importante estabelecer um princípio para processos não conservativos. Várias dessas propostas, apresentam equação de movimento correta para certos sistemas dissipativos, porém a função Lagrangeana não é física. Uma Lagrangeana é dita física, se apresenta o momento e o Hamiltoniano corretamente.

Para entender melhor o significado de Lagrangeanas físicas vamos ilustrar alguns exemplos. Vamos considerar o caso do movimento unidimensional de uma partícula sob a ação de uma força resistiva proporcional à velocidade. Como primeiro exemplo temos a Lagrangiana dependente do tempo (STEVENS, 1958; RAZAVY, 2006)<sup>1</sup>

$$L = \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - U \right) e^{\frac{\gamma}{m} t}. \quad (2.37)$$

Da equação de Euler-Lagrange (2.9), temos a equação que descreve a trajetória da partícula

$$e^{\frac{\gamma}{m} t} \left( m \ddot{x} + \frac{\partial U}{\partial x} + \gamma \dot{x} \right) = 0 \quad (2.38)$$

com o momento conjugado

$$p = m \dot{x} e^{\frac{\gamma}{m} t} \quad (2.39)$$

e o Hamiltoniano correspondente

$$H = \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + U \right) e^{\frac{\gamma}{m} t} \quad (2.40)$$

Dividindo a equação (2.38) pelo fator  $e^{\frac{\gamma}{m} t}$ , temos a equação correta da trajetória da partícula. Por outro lado as expressões (2.39) e (2.40) não representam momento e Hamiltoniano respectivamente, devido a presença do fator  $e^{\frac{\gamma}{m} t}$ . Conclui-se então que a Lagrangeana (2.37) não é física. Para finalizar condiremos o mesmo problema, em que a formulação é proposta em (BATEMAN, 1931; RIEWE, 1996), onde uma coordenada auxiliar com tempo reverso ( $t \rightarrow -t$ ),  $y$  é introduzida. A Lagrangiana para este caso é:

$$L = m \dot{x} \dot{y} + \frac{1}{2} \gamma (x \dot{y} - y \dot{x}) - U, \quad (2.41)$$

<sup>1</sup> Aqui a Lagrangeana foi escolhida de uma maneira mais geral, em vez de considerar o caso da partícula livre.

que nos dá duas equações de movimento

$$m\ddot{x} + \frac{\partial U}{\partial x} + \gamma\dot{x} = 0, \quad m\ddot{y} + \frac{\partial U}{\partial y} - \gamma\dot{y} = 0, \quad (2.42)$$

os momentos

$$p_x = m\dot{y} - \frac{1}{2}\gamma y, \quad p_y = m\dot{x} + \frac{1}{2}\gamma x, \quad (2.43)$$

e Hamiltoniano

$$H = \frac{p_x p_y}{m} + \frac{\gamma^2}{2m} xy - \frac{\gamma}{2m} (y p_y - x p_x) + U. \quad (2.44)$$

Novamente vê-se que a função Lagrangeana (2.41) não tem significado físico. Portanto ambas as funções Lagrangeanas que foram apresentadas aqui não servem para fazer a descrição física do sistema, e também não apresentam uma formulação geral. Apesar dessas funções Lagrangeanas apresentarem equações do movimentos corretas para o movimento, fisicamente são importantes as quantidades que se conservam ao longo da trajetória. Essas quantidades são consequências da invariância da ação sobre transformações de coordenadas, como por exemplo, podemos ver que a Lagrangeana (2.41), não é invariante por uma translação na direção de  $x$  ou de  $y$ , em consequência a ação também não é invariante.

Para contornar esse problema, na próxima seção apresentaremos um princípio variacional mais geral conhecido como princípio variacional de Herglotz.

### 2.2.2 Princípio variacional de Herglotz

Como discutimos no início do capítulo, a função Lagrangeana é construída com os escalares, ou invariantes, da teoria. Neste sentido, a própria Ação é um invariante. Poderíamos perguntar então o que aconteceria se a Lagrangeana também fosse uma função da própria Ação. A resposta desta pergunta é dada pelo Princípio variacional proposto por Herglotz ([HERGLOTZ, 1930](#)).

**Definição 2.2.1** *O princípio variacional proposto por Herglotz consiste em determinar a curva  $x(t)$  que extremiza (maximiza ou minimiza)  $S(b)$ , onde  $S(t)$  é a solução da equação diferencial*

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &= L(t, x(t), \dot{x}(t), S(t)), & t &\in [a, b] \\ S(a) &= S_a, & x(a) &= x_a, & x(b) &= x_b, & S_a, x_a, x_b &\in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (2.45)$$

As condições acima são conhecidas como condições de contorno. É importante notar que a equação em (2.45) representa uma família de equações diferenciais, ou seja para cada  $x(t)$  corresponde uma equação diferencial. O problema (2.45) reduz-se ao problema clássico quando a função Lagrangeana não depende da ação. Nesse caso

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &= L(t, x(t), \dot{x}(t)), & t \in [a, b] \\ S(a) &= S_a, & x(a) = x_a, & x(b) = x_b, & S_a, x_a, x_b \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (2.46)$$

integrando a equação diferencial em (2.46), junto com a condição de fronteira recupera-se o problema clássico.

$$S(b) = \int_a^b \tilde{L}(t, x(t), \dot{x}(t)) \rightarrow \text{extremizar} \quad (2.47)$$

onde  $x(a) = x_a$ ,  $x(b) = x_b$  e

$$\tilde{L} = L(t, x(t), \dot{x}(t)) + \frac{S_a}{b-a}. \quad (2.48)$$

Herglotz demonstrou que a condição necessária para que a curva  $x(t)$  seja solução do problema (2.45), equivale  $x(t)$  ser solução da equação diferencial

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial L}{\partial S} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0. \quad (2.49)$$

No caso clássico onde a função Lagrangeana ( $L$ ) não depende da ação, temos  $\frac{\partial L}{\partial S} = 0$ , obtém-se a equação de Euler-Lagrange clássico a partir de (2.45).

Vamos apresentar o resultado (2.49) obtida por Herglotz na forma de teorema e depois prová-lo.

**Teorema 2.2.1** *Seja  $x(t)$  a função que extremiza  $S(b)$  definida no problema (2.45). Então  $x(t)$  é solução da equação de Euler-Lagrange*

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial L}{\partial S} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0. \quad (2.50)$$

Para provar a condição necessária (2.50) devemos resolver a família de equações diferenciais em (2.45), que define o funcional  $S(t)$ , para qualquer função real  $x(t)$ .

**Prova** Começemos por definir uma variação (variação fraca) na variável dependente  $x(t)$ , definida da forma  $x_\varepsilon(t) = x(t) + \varepsilon\eta(t)$ . Onde  $\eta$  é uma função qualquer pertencente à classe  $C^2([a, b]; \mathbb{R})$  e  $\varepsilon$  é um número real qualquer. Assumimos que a função  $\eta$  é identicamente nula na fronteira, ou seja  $\eta(a) = \eta(b) = 0$ . Repare que essa hipótese é crucial para que



a família de curvas  $x_\varepsilon(t)$  sejam funções admissíveis (funções satisfazendo a condição de contorno). Consideremos agora a equação diferencial (2.45) definida pela família de curvas  $x_\varepsilon(t)$  que estão definidas na vizinhança de  $x(t)$

$$\dot{S}(x + \varepsilon\eta; t) = L(t, x(t) + \varepsilon\eta(t), \dot{x}(t) + \varepsilon\dot{\eta}(t), S(t)), \quad (2.51)$$

derivando em relação a variável  $\varepsilon$  temos

$$\frac{d}{d\varepsilon} \dot{S}(x + \varepsilon\eta; t) = \frac{\partial L}{\partial x_\varepsilon} \eta + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\varepsilon} \dot{\eta} + \frac{\partial L}{\partial S} \frac{dS}{d\varepsilon}, \quad (2.52)$$

uma vez que a variável  $\varepsilon$  e  $t$  são independentes podemos inverter a ordem da diferenciação. Introduzindo a notação  $\zeta = \frac{dS}{d\varepsilon}$  podemos escrever (2.52) como

$$\frac{d\zeta}{dt} - \frac{\partial L}{\partial S} \zeta = \frac{\partial L}{\partial x_\varepsilon} \eta + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\varepsilon} \dot{\eta}. \quad (2.53)$$

A equação (2.53) representa uma equação diferencial linear da primeira ordem, que pode ser resolvida por vários métodos diferentes. Optamos por determinar a solução pelo método de fator integrante (RITGER; ROSE, 1968). Logo temos a solução geral

$$\exp\left(-\int \frac{\partial L}{\partial S} dt\right) \zeta(\varepsilon, t) - \zeta(\varepsilon, a) = \int_a^t \exp\left(-\int \frac{\partial L}{\partial S} dt\right) \left(\frac{\partial L}{\partial x_\varepsilon} \eta + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\varepsilon} \dot{\eta}\right) d\tau. \quad (2.54)$$

Se  $x(t)$  é solução do problema (2.45) então,  $\zeta(0, a) = \zeta(0, b) = 0$ , pois para  $\varepsilon = 0$  o funcional é estacionário, ou seja  $S(b)$  é o seu valor máximo (mínimo). Então fazendo  $\varepsilon = 0$  e  $t = b$ , depois aplicando uma integração por partes no segundo termo do integrando em (2.54), e lembrando que  $\eta(a) = \eta(b) = 0$  temos que

$$\int_a^b \exp\left(-\int \frac{\partial L}{\partial S} dt\right) \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial L}{\partial S}\right) \eta d\tau = 0. \quad (2.55)$$

A seguir apresentaremos o lema fundamental do cálculo variacional (LOGAN, 1987) que nos permite calcular a função  $x(t)$ , candidato á solução do problema, pois a condição (2.55) é uma condição necessária, porém não fixa diretamente a função  $x(t)$ .

**Lema 2.2.1 (Lema fundamental)** *Seja  $f \in C([a, b]; \mathbb{R})$  tal que*

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = 0$$

*para toda função  $g \in C([a, b]; \mathbb{R})$  e  $g(a) = g(b) = 0$ . Então  $f(t) = 0$  para todo  $t \in [a, b]$ .*

Identificando  $f = \exp\left(-\int \frac{\partial L}{\partial S} dt\right)$   $\left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial L}{\partial S}\right)$  e  $g = \eta$ , então o lema nos dá que

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial L}{\partial S} = 0. \quad (2.56)$$

Assim, a demonstração do teorema fica concluída. C.Q.D

**Nota 3** Quando o movimento da partícula é tridimensional, as equações (2.50) para esse sistema são dadas por

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial L}{\partial S} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.57)$$

Tendo em mão a equação generalizada de Euler-Lagrange (2.57), estamos em condições de apresentar a equação do movimento de partículas em sistemas não conservativos.

**Teorema 2.2.2 (Princípio da mínima ação não conservativo)** *Consideremos um sistema físico não conservativo, que consiste de uma única partícula. A trajetória descrita por essa partícula no intervalo de tempo  $[t_i, t_f]$ , é caracterizada pelas funções  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) que deixam o funcional integral  $S(b)$  estacionário, onde  $S(t)$  é solução da equação diferencial*

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &= T - U + L_d(S) \\ S(a) &= S_a, \end{aligned} \quad (2.58)$$

com  $T$  a energia cinética,  $U$  a energia potencial da partícula e  $L_d(S)$  representa a função Lagrangeana não conservativa.

**Prova** De (2.58) temos que  $L = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - U + L_d(S)$ , logo

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_i} &= -\frac{\partial U}{\partial x_i} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} &= m\dot{x}_i. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Supondo que  $x_i$  é solução de (2.58), então a equação (2.57) nos dá

$$m\ddot{x}_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i} - m\dot{x}_i \frac{\partial L_d}{\partial S}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.60)$$

C.Q.D

Pela equação do movimento (2.60), conclui-se que este princípio é muito mais geral, comparando com os dois exemplos propostos com as Lagrangeanas (2.37) e (2.41). Com efeito para cada escolha da função Lagrangeana  $L_d$ , na equação do movimento (2.60)

surtem diferentes tipos de forças não conservativas. Além disso, a Lagrangeana tem significado físico. Para ilustrar isso foquemos no mesmo problema onde foram consideradas as Lagrangeanas (2.37) e (2.41), isto é, o caso do movimento unidimensional de uma partícula sob a ação de uma força de atrito viscoso que é proporcional à velocidade. Escolhendo a Lagrangeana não conservativa dada pela expressão (GEORGIEVA, 2001)

$$L_d = -\alpha S, \quad (2.61)$$

onde  $\alpha$  é uma constante real positiva, a equação (2.60) resulta na equação do movimento

$$m\ddot{x} + \frac{\partial U}{\partial x} + m\alpha\dot{x} = 0, \quad (2.62)$$

com momentum

$$p = m\dot{x} \quad (2.63)$$

e Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U + \alpha S. \quad (2.64)$$

Se considerarmos o termo  $\alpha S$  como um potencial efetivo, então conclui-se que com a escolha feita em (2.61), resulta na mesma equação de movimento que as Lagrangeanas (2.37) e (2.41), e que as expressões do momento e o Hamiltoniano têm significados físicos. Além da Lagrangeana (2.61) apresentar equação de movimento correta, apresenta também simetrias em relação a uma translação no tempo, já que a função Lagrangeana é autônoma<sup>2</sup>. O teorema de Noether garante que devido a essa simetria, existe uma quantidade que se conserva, como veremos nos próximos capítulos. Então conclui-se que é muito mais vantajoso trabalhar com o princípio de Herglotz do que com o princípio variacional clássico, por duas razões: Apresenta a equação do movimento adequada para o movimento da partícula e, mesmo sendo o sistema com dissipação, não quebra a invariância do problema.

---

<sup>2</sup> Função Lagrangeana que não depende explicitamente do tempo

### 3 Princípio Variacional de Herglotz e teorema de Noether para campos

#### 3.1 Princípio Variacional de Herglotz para campos

Nesta secção vamos estender o princípio variacional de Herglotz para campos escalares e determinar a equação de Euler-Lagrange correspondente, com o objetivo de descrever sistemas físicos não conservativos que envolvem campos, tal como no electromagnetismo, na mecânica quântica e na relatividade geral. Dados  $n$  campos  $\phi^i(x^1, x^2, \dots, x^d)$  (com  $i = 1, 2, \dots, n$ ) definidos no domínio  $\Omega \in \mathbb{R}^d (d \in \mathbb{N})$ , sendo que esses campos podem ser eletromagnéticos, gravitacionais etc... O problema variacional de Herglotz que propomos para campos consiste em determinar os campos  $\phi^i$  que extremizam o funcional

$$S(\delta\Omega) = \int_{\delta\Omega} \mathcal{L}(x^\mu, \phi^i(x^\mu), \partial_\nu \phi^i(x^\mu), s^\mu) d^d x \quad (3.1)$$

onde  $\delta\Omega$  é a fronteira de  $\Omega$  e  $\phi^i$  satisfazem as condições de fronteira  $\phi^i(\delta\Omega) = \phi_{\delta\Omega}^i$  com  $\phi_{\delta\Omega}^i : \delta\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Assim como (2.45), para vários campos  $\phi^i$ , o funcional (3.1) reduz-se a uma função de fronteira  $\delta\Omega$ . Com vista em generalizar o princípio de Herglotz para campos, consideremos  $\delta\Omega$  uma superfície de Jordan orientável com a normal  $n_\mu$ . Se  $s^\mu$  é um campo vetorial diferenciável tal que

$$S(\delta\Omega) = \int_{\delta\Omega} s^\mu n_\mu d\sigma, \quad (3.2)$$

onde  $d\sigma$  é o elemento da superfície diferenciável, então pelo teorema da divergência temos

$$S(\delta\Omega) = \int_{\delta\Omega} s^\mu n_\mu d\sigma = \int_{\Omega} \partial_\mu s^\mu d^d x = \int_{\Omega} \mathcal{L}(x^\mu, \phi^i(x^\mu), \partial_\nu \phi^i(x^\mu), s^\mu) d^d x \quad (3.3)$$

Consequentemente podemos generalizar o princípio variacional de Herglotz como:

**Definição 3.1.1 (Problema fundamental)** *Seja  $s^\mu$  um campo vetorial diferenciável em  $\Omega \in \mathbb{R}^d$ . O problema fundamental do princípio variacional para campos consiste em determinar os campos  $\phi^i$  que extremizam (maximizam ou minimizam)  $S(\delta\Omega)$ , onde  $S(\delta\Omega)$  é definida por*

$$S(\delta\Omega) = \int_{\delta\Omega} s^\mu n_\mu d\sigma, \quad x^\mu = (x^1, x^2, \dots, x^d) \in \Omega \quad (3.4)$$

$$\partial_\mu s^\mu = \mathcal{L}(x^\mu, \phi^i(x^\mu), \partial_\nu \phi^i(x^\mu), s^\mu), \quad \phi^i(\delta\Omega) = \phi_{\delta\Omega}^i, \quad \phi^i(\delta\Omega) : \delta\Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

**Teorema 3.1.1 (Generalização da equação de Euler-Lagrange para campos)** *Seja  $\partial_{s^\mu} \mathcal{L} = \Lambda_\mu = \partial_\mu f(x^\nu)$  o gradiente de um campo escalar  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  e sejam  $\phi^{i*}$  os campos*

que extremizam  $S(\delta\Omega)$ , definida em (3.4). Então os campos  $\phi^{i*}$  são soluções das equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^{i*}} - \frac{d}{dx^\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^{i*})} \right) + \Lambda_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^{i*})} = 0. \quad (3.5)$$

**Nota 4** A derivada total que aparece na equação (3.5) é frequentemente escrita na literatura como uma derivada parcial, já que quando os campos dependem apenas das coordenadas independentes essas derivadas tornam equivalentes.

**Prova** Consideremos a família de campos  $\phi^i$  (variação fraca) definida por

$$\phi^i(x^\mu) = \phi^{i*}(x^\mu) + \varepsilon \eta^i(x^\mu), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.6)$$

Onde  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  e,  $\eta^i(x^\mu)$  são campos que satisfazem as condições de fronteira  $\eta^i(\delta\Omega) = 0$ . Se  $S(\delta\Omega)$  atinge um mínimo em  $\phi^{i*}$ , então temos

$$\left. \frac{dS(\delta\Omega)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0. \quad (3.7)$$

De acordo com (2.12) temos

$$\left. \frac{dS(\delta\Omega)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{\delta\Omega} \left. \frac{ds^\mu}{d\varepsilon} n_\mu \right|_{\varepsilon=0} d\sigma = 0 \quad (3.8)$$

Por outro lado, integrando sobre o domínio  $\Omega$  ambos os membros da equação diferencial (3.4) temos

$$S(\delta\Omega) = \int_{\Omega} \mathcal{L}(x^\mu, \phi^i(x^\mu), \partial_\mu \phi^i(x^\mu), s^\mu) d^d x \quad (3.9)$$

derivando em relação a  $\varepsilon$  obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dS(\delta\Omega)}{d\varepsilon} &= \int_{\Omega} \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{L}(x^\mu, \phi^i(x^\mu), \partial_\mu \phi^i(x^\mu), s^\mu) d^d x \\ &= \int_{\Omega} \left[ \eta^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} + \partial_\mu \eta^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} + \Lambda_\mu \frac{s^\mu}{d\varepsilon} \right] d^d x. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Partindo de (2.12) e aplicando o teorema da divergência temos

$$\frac{dS(\delta\Omega)}{d\varepsilon} = \int_{\delta\Omega} \frac{ds^\mu}{d\varepsilon} n_\mu d\sigma = \int_{\Omega} \partial_\mu \frac{ds^\mu}{d\varepsilon} d^d x \quad (3.11)$$

De (3.10) e (3.11) podemos escrever

$$\int_{\Omega} \left[ \partial_\mu \frac{ds^\mu}{d\varepsilon} - \eta^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} - \partial_\mu \eta^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} - \Lambda_\mu \frac{s^\mu}{d\varepsilon} \right] d^d x = 0. \quad (3.12)$$

A condição suficiente para que (3.12) se verifique é que o integrando se anule, ou seja

$$\partial_\mu \frac{ds^\mu}{d\varepsilon} - \eta^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} - \partial_\mu \eta^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} - \Lambda_\mu \frac{s^\mu}{d\varepsilon} = 0, \quad (3.13)$$

onde  $\zeta^\mu = \frac{ds^\mu}{d\varepsilon}$ . Desde que  $\Lambda_\mu = \partial_\mu f(x^\nu)$  é o vetor gradiente em  $\Omega$ , podemos resolver a equação diferencial (3.13) determinando o fator integrante  $E(x^\mu) = e^{-\int \Lambda_\mu dx^\mu}$ , e multiplicar em (3.13) de modo a encontrar o divergente total, podendo integrar resultando na seguinte solução

$$\zeta^\mu(\varepsilon) = A^\mu(x^\mu, \phi^i, \partial_\nu \phi^i, s^\mu) E(x^\mu)^{-1} \quad (3.14)$$

onde

$$\partial_\mu A^\mu(x^\mu, \phi^i, \partial_\mu \phi^i, s^\mu) = \left( \eta^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} + \partial_\mu \eta^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \right) E(x^\mu) \quad (3.15)$$

De (3.8) temos

$$\int_{\delta\Omega} \zeta^\mu(0) n_\mu d\sigma = 0, \quad (3.16)$$

lembrando que a função exponencial não se anula temos que

$$\int_{\delta\Omega} A^\mu n_\mu \Big|_{\varepsilon=0} d\sigma = \int_{\Omega} \partial_\mu A^\mu \Big|_{\varepsilon=0} d^d x = 0. \quad (3.17)$$

Logo

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[ \eta^i \frac{\partial \mathcal{L}(x^\mu, \phi^{i*}, \partial_\mu \phi^{i*}, s^\mu)}{\partial \phi^{i*}} + \partial_\mu \eta^i \frac{\partial \mathcal{L}(x^\mu, \phi^{i*}, \partial_\mu \phi^{i*}, s^\mu)}{\partial (\partial_\mu \phi^{i*})} \right] E(x^\mu) d^d x = \\ & \int_{\Omega} \eta^i \left[ \frac{\partial \mathcal{L}(x^\mu, \phi^{i*}, \partial_\mu \phi^{i*}, s^\mu)}{\partial \phi^{i*}} - \frac{d}{dx^\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}(x^\mu, \phi^{i*}, \partial_\mu \phi^{i*}, s^\mu)}{\partial (\partial_\mu \phi^{i*})} \right) \right] E(x^\mu) d^d x + \\ & \int_{\Omega} \left[ \Lambda_\mu \frac{\partial \mathcal{L}(x^\mu, \phi^{i*}, \partial_\mu \phi^{i*}, s^\mu)}{\partial (\partial_\mu \phi^{i*})} E(x^\mu) + \frac{d}{dx^\mu} \left( \eta^i \frac{\partial \mathcal{L}(x^\mu, \phi^{i*}, \partial_\mu \phi^{i*}, s^\mu)}{\partial (\partial_\mu \phi^{i*})} E(x^\mu) \right) \right] d^d x = 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Aplicando o teorema da divergência e levando em conta que  $\eta(\delta\Omega)$  é identicamente nula sobre toda a fronteira da superfície, logo o último termo se anula. Então temos como condição necessária de otimalidade

$$\int_{\Omega} \eta^i \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^{i*}} - \frac{d}{dx^\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^{i*})} \right) + \Lambda_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^{i*})} \right] E(x^\mu) d^d x = 0, \quad (3.19)$$

onde  $\Lambda_\mu = \partial_{s^\mu} \mathcal{L}$ . Aplicando o lema fundamental do cálculo variacional para campos escalares, concluímos a demonstração do teorema, isto é

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^{i*}} - \frac{d}{dx^\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^{i*})} \right) + \Lambda_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^{i*})} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.20)$$

C.Q.D

**Nota 5** Repare que quando a função lagrangeana não depende de  $s^\mu$  ( $\Lambda_\mu = 0$ ) a equação (3.5) reduz-se a equação de Euler-Lagrange para várias variáveis no caso clássico

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} - \frac{d}{dx^\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \right) = 0, \quad (3.21)$$

justificando que a equação de Euler-Lagrange (3.5) é uma generalização.

Antes de prosseguir, é importante salientar que a nossa Ação  $S(\delta\Omega)$  é invariante por transformações de calibre (LAZO et al., ), uma vez que o problema fundamental (3.4) não fixa totalmente o campo vetorial  $s^\mu$ . Por exemplo, no caso tridimensional  $s^\mu$  é fixado a menos do rotacional de qualquer campo vetorial, pois dado  $\vec{s} = \vec{s} + \vec{\nabla} \times \vec{v}$ , sendo  $\vec{\nabla} \cdot \vec{s} = \mathcal{L}(\vec{x}, \dots, \vec{s})$ , e  $\vec{\nabla} \cdot \vec{s} = \mathcal{L}(\vec{x}, \dots, \vec{s})$ , então

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\delta\Omega) &= \int_{\delta\Omega} \vec{n} \cdot \vec{s} d\sigma = \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{s} d^3x = \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot (\vec{s} + \vec{\nabla} \times \vec{v}) d^3x \\ &= \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{s} d^3x = \int_{\delta\Omega} \vec{n} \cdot \vec{s} d\sigma = S(\delta\Omega) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Embora o problema fundamental fixe as equações da dinâmica dos campos  $\phi^i$  independentemente de  $s^\mu$  estar totalmente fixado, essa liberdade na escolha na definição de  $s^\mu$  desempenha um papel importante na análise de simetrias do problema, como veremos na próxima seção. De forma a fixar totalmente o campo  $s^\mu$  podemos impor uma condição adicional à  $s^\mu$  que chamaremos de escolha de calibre canônico:

**Definição 3.1.2 (Calibre canônico)** *Seja  $s^\mu$  um campo vetorial diferenciável. Se  $s^\mu$  satisfaz a condição*

$$\Lambda_\mu \partial_\nu s^\nu - \Lambda_\nu \partial_\mu s^\nu = 0, \quad (3.23)$$

então  $s^\mu$  satisfaz o calibre canônico.

### 3.2 Teorema de Noether para campos não conservativos

Vamos considerar por simplicidade o caso de apenas um campo  $\phi$  ( $n = 1$ ). O caso geral de  $n$  campos pode ser obtido facilmente de maneira análoga. A equação de Euler-Lagrange para problema de Herglotz para campos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{d}{dx^\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) + \Lambda_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0, \quad (3.24)$$

descreve sistemas físicos que são, em geral, não conservativos. Também são equações em geral não lineares e de segunda ordem, que apresentam bastante dificuldade na determinação da solução do problema. Neste contexto, a generalização do teorema de Noether é fundamental para estudar quantidades conservadas em sistemas não conservativos descritos pelo problema de Herglotz. Pois o teorema de Noether faz corresponder a cada simetria do sistema uma lei de conservação. Uma vantagem que se obtém, é a redução da ordem da equação diferencial de Euler-Lagrange. Nesta seção apresenta-se a generalização

do teorema de Noether para campos, começando com noções básicas de transformações de coordenadas e definição de invariância.

Consideremos a família de transformações uni-paramétricas no espaço  $(x^\mu, \phi)$  que depende do parâmetro  $\varepsilon$

$$\begin{cases} \bar{x}^\mu = \varphi^\mu(x^\mu, \phi; \varepsilon), & \mu = 1, \dots, d \\ \bar{\phi} = \psi(x^\mu, \phi; \varepsilon), \end{cases} \quad (3.25)$$

onde  $\varphi^\mu$  e  $\psi$  são funções diferenciáveis em relação a  $\varepsilon$ , satisfazendo  $\varphi^\mu(x^\mu, \phi; 0) = x^\mu$  e  $\psi(x^\mu, \phi; 0) = \phi$ .

**Definição 3.2.1** *Seja  $\bar{s}^\mu$  a densidade da ação resultante das transformações (3.25), da densidade da ação  $s^\mu$ , dada pela definição (3.4). Então  $\bar{s}^\mu$  é a solução da equação diferencial*

$$\bar{\partial}_\mu \bar{s}^\mu = \mathcal{L}(\bar{x}^\mu, \bar{\phi}, \bar{\partial}_\mu \bar{\phi}, \bar{s}^\mu), \quad \bar{x}^\mu = (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^d) \in \bar{\Omega}, \quad (3.26)$$

onde  $\bar{\Omega}$  é o domínio resultante das transformações (3.25) do domínio  $\Omega$ .

Agora estamos nas condições de apresentar a definição de invariância para o problema (3.4).

**Definição 3.2.2 (Invariância do problema (3.4))** *Seja  $\mathcal{D}$  um subdomínio fechado de  $\Omega$  que tem como fronteira  $\delta\mathcal{D} \subset \Omega$ . Dizemos que o funcional definido por (3.4) é invariante sob a família das transformações (3.25) se, e só se, o funcional  $\bar{S}(\delta\bar{\mathcal{D}})$  definido pela equação transformada (3.26), e o funcional  $S(\delta\mathcal{D})$  sem transformações, satisfazem*

$$\bar{S}(\delta\bar{\mathcal{D}}) = \int_{\delta\bar{\mathcal{D}}} \bar{s}^\mu \bar{n}_\mu d\bar{\sigma} = \int_{\delta\mathcal{D}} \bar{s}^\mu n_\mu d\sigma = \int_{\delta\mathcal{D}} s^\mu n_\mu d\sigma = S(\delta\mathcal{D}), \quad (3.27)$$

onde  $\bar{\mathcal{D}}$  e  $\delta\bar{\mathcal{D}}$  são os transformados de  $\mathcal{D}$  e  $\delta\mathcal{D}$  resultante das transformações (3.25). Além disso, se o funcional é invariante sob um grupo local de transformações uniparamétricas  $G$  (3.25), dizemos que  $G$  é um grupo de simetria.

**Exemplo 1** *Consideremos  $d = 2$  com  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$  e a densidade Lagrangeana*

$$\mathcal{L} = (\partial_x \phi)^2 + (\partial_y \phi)^2 + \gamma_\mu s^\mu, \quad (3.28)$$

onde  $\gamma_\mu = (\gamma_1, \gamma_2)$  é um vetor constante. O problema com a densidade Lagrangeana (3.28), é invariante em relação a rotação

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x \cos(\varepsilon) - y \sin(\varepsilon) \\ \bar{y} &= x \sin(\varepsilon) + y \cos(\varepsilon) \\ \bar{\phi} &= \phi, \end{aligned} \quad (3.29)$$



onde  $\varepsilon$  é uma constante arbitrária. De fato, se a inversa da transformação (3.29) é

$$\begin{aligned} x &= \bar{x} \cos(\varepsilon) + \bar{y} \sin(\varepsilon) \\ y &= -\bar{x} \sin(\varepsilon) + \bar{y} \cos(\varepsilon) \\ \phi &= \bar{\phi}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

onde

$$\bar{\phi} = \phi(\bar{x} \cos(\varepsilon) + \bar{y} \sin(\varepsilon), -\bar{x} \sin(\varepsilon) + \bar{y} \cos(\varepsilon)) = \bar{\phi}(\bar{x}, \bar{y}), \quad (3.31)$$

temos que

$$\begin{aligned} \bar{S}(\delta\bar{\mathcal{D}}) &= \int_{\delta\bar{\mathcal{D}}} \left( (\partial_{\bar{x}}\bar{\phi})^2 + (\partial_{\bar{y}}\bar{\phi})^2 + \gamma_{\mu}\bar{s}^{\mu} \right) d\bar{x}d\bar{y} = \\ &= \int_{\delta\mathcal{D}} \left( (\cos(\varepsilon)\partial_x\phi - \sin(\varepsilon)\partial_y\phi)^2 + (\cos(\varepsilon)\partial_x\phi + \sin(\varepsilon)\partial_y\phi)^2 + \gamma_{\mu}s^{\mu} \right) \frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(x, y)} dx dy = (3.32) \\ &= \int_{\delta\mathcal{D}} \left( (\partial_x\phi)^2 + (\partial_y\phi)^2 + \gamma_{\mu}s^{\mu} \right) dx dy = S(\delta\mathcal{D}), \end{aligned}$$

desde que

$$\int_{\delta\mathcal{D}} \gamma_{\mu}\bar{s}^{\mu} dx dy = \int_{\delta\mathcal{D}} \gamma_{\mu}s^{\mu} dx dy. \quad (3.33)$$

Se (3.33) verificar, o problema é invariante em relação à rotação.

**Teorema 3.2.1** Se  $S(\delta\mathcal{D})$  for invariante sob as transformações (3.25) no sentido da definição (3.2.2), então a quantidade

$$\frac{d}{dx^{\mu}} \left[ \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)} \eta + \mathcal{L}\xi_{\mu} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)} \frac{\partial\phi}{\partial x^{\nu}} \xi^{\nu} \right) E(x^{\mu}) \right] + E(x^{\mu}) \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial s^{\mu}} \left( \frac{\partial s^{\mu}}{\partial x^{\mu}} \xi^{\nu} - \frac{\partial s^{\nu}}{\partial x^{\mu}} \xi^{\mu} \right) = 0 \quad (3.34)$$

é válida ao longo da solução da equação de Euler-Lagrange (3.5), onde  $\xi^{\mu} = \frac{d\varphi^{\mu}}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0}$  e  $\eta = \frac{d\psi}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0}$ , com  $\mu = 1, \dots, d$ , são conhecidas na literatura como geradores infinitesimais de  $\varphi^{\mu}$  e  $\psi$  respectivamente.

**Prova** Para provar o teorema 1, consideremos  $\varepsilon$  uma quantidade suficientemente pequena. Então pelo teorema de Taylor

$$\begin{cases} \bar{x}^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x^{\mu}, \phi)\varepsilon + o(\varepsilon) \\ \bar{\phi} = \phi + \eta(x^{\mu}, \phi)\varepsilon + o(\varepsilon), \quad \mu = 1, \dots, d. \end{cases} \quad (3.35)$$

Da condição (3.27) temos

$$\begin{aligned} \bar{S}(\delta\bar{\mathcal{D}}) &= \int_{\delta\bar{\mathcal{D}}} \bar{s}^{\mu} \bar{n}_{\mu} d\bar{\sigma} = \int_{\bar{\mathcal{D}}} \bar{\partial}_{\mu} \bar{s}^{\mu} d^d \bar{x} = \\ &= \int_{\bar{\mathcal{D}}} \mathcal{L}(\bar{x}^{\mu}, \bar{\phi}, \bar{\partial}_{\mu} \bar{\phi}, \bar{s}^{\mu}) d^d \bar{x} = \int_{\delta\mathcal{D}} \bar{s}^{\mu} n_{\mu} d\sigma = \int_{\mathcal{D}} \partial_{\mu} \bar{s}^{\mu} d^d x. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Fazendo a mudança de variáveis em (3.36) de modo a voltar para as variáveis iniciais  $x^\mu$  e  $\phi$ , então

$$\int_{\mathcal{D}} \partial_\mu \bar{s}^\mu d^d x = \int_{\mathcal{D}} \mathcal{L}(\bar{x}^\mu \bar{\phi}, \bar{\partial}_\mu \bar{\phi}, \bar{s}^\mu) \det \left( \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} \right) d^d x, \quad (3.37)$$

onde  $\det \left( \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} \right)$  é o jacobiano da transformação das variáveis. Tomando a derivada de (3.37) em relação  $\varepsilon$  e de seguida igualando  $\varepsilon$  a zero, temos

$$\left. \frac{d\bar{S}(\delta\bar{\mathcal{D}})}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{\mathcal{D}} \partial_\mu \left. \frac{d\bar{s}^\mu}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} d^d x = \int_{\mathcal{D}} \left[ \frac{d\mathcal{L}}{d\varepsilon} \det \left( \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} \right) + \mathcal{L} \frac{d}{d\varepsilon} \det \left( \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} \right) \right] \Big|_{\varepsilon=0} d^d x = 0, \quad (3.38)$$

pois por hipótese o grupo uniparamétrico de transformações (3.35) deixa o funcional  $S(\delta D)$  invariante, ou seja  $\bar{S}(\delta\bar{\mathcal{D}}) = S(\delta\mathcal{D})$ . Uma vez que de (3.35) obtemos  $\left. \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} \right|_{\varepsilon=0} = \delta^\mu_\nu$ , temos que

$$\det \left( \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} \right) \Big|_{\varepsilon=0} = 1. \quad (3.39)$$

Precisamos calcular o termo

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \left[ \det \left( \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} \right) \right] \right|_{\varepsilon=0}. \quad (3.40)$$

Seja  $a = \det(a_\nu^\mu)$ , onde  $a_\nu^\mu$  é função dependendo do mesmo parâmetro  $\varepsilon$ , então

$$\frac{da}{d\varepsilon} = \frac{da_\nu^\mu}{d\varepsilon} A_\mu^\nu, \quad (3.41)$$

onde  $A_\mu^\nu$  é o cofator do elemento  $a_\nu^\mu$  da matriz no cálculo do determinante. Aplicando esta fórmula ao jacobiano  $\det \left( \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} \right)$  temos

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left[ \det \left( \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} \right) \right] = \frac{d}{d\varepsilon} \left( \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} \right) A_\mu^\nu, \quad (3.42)$$

onde  $A_\mu^\nu$  é o cofator de  $\frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu}$ . Levando em conta que as derivadas comutam

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left( \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} \right) = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left( \frac{d\bar{x}^\mu}{d\varepsilon} \right) = \frac{\partial^2 \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu \partial \varepsilon} + \frac{\partial^2 \bar{x}^\mu}{\partial \varepsilon \partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu}, \quad (3.43)$$

pois  $\bar{x}^\mu = \bar{x}^\mu(x^\mu, \phi(x^\mu); \varepsilon)$ ,  $\mu = 1, \dots, d$ . Substituindo esta expressão em (3.42)

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left[ \det \left( \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} \right) \right] = \left( \frac{\partial^2 \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu \partial \varepsilon} + \frac{\partial^2 \bar{x}^\mu}{\partial \varepsilon \partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} \right) A_\mu^\nu. \quad (3.44)$$

Fazendo  $\varepsilon = 0$ , junto com as notações  $\xi^\mu = \left. \frac{d\bar{x}^\mu}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}$ , e observando que  $A_\mu^\nu|_{\varepsilon=0} = \delta_\mu^\nu$  é o cofator da matriz identidade

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \left[ \det \left( \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} \right) \right] \right|_{\varepsilon=0} = \left( \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \xi^\mu}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} \right) \delta_\mu^\nu = \frac{d\xi^\mu}{dx^\nu} \delta_\mu^\nu = \frac{d\xi^\mu}{dx^\mu}. \quad (3.45)$$

Substituindo (3.39) e (3.45) em (3.38) nós temos

$$\int_{\mathcal{D}} \partial_{\mu} \frac{d\bar{s}^{\mu}}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} d^d x = \int_{\mathcal{D}} \left[ \frac{d\mathcal{L}}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} + \mathcal{L} \frac{d\xi^{\mu}}{dx^{\mu}} \right] d^d x. \quad (3.46)$$

Depois de calcular a expressão  $\frac{d\mathcal{L}}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}$  temos que

$$\int_{\mathcal{D}} \partial_{\mu} \zeta^{\mu} d^d x = \int_{\mathcal{D}} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\mu}} \xi^{\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} \frac{d}{d\varepsilon} \left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^{\mu}} \right) \Big|_{\varepsilon=0} + \Lambda_{\mu} \zeta^{\mu} + \mathcal{L} \frac{d\xi^{\mu}}{dx^{\mu}} \right] d^d x, \quad (3.47)$$

onde a função  $\zeta^{\mu} = \frac{d\bar{s}^{\mu}}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}$ . Derivando as expressões  $\bar{\phi}^{\mu} = \bar{\phi}^{\mu}(\bar{x}^{\mu}; \varepsilon)$  e  $\bar{\phi}^{\nu} = \psi^{\nu}(x^{\mu}, \phi(x^{\mu}); \varepsilon)$ , em relação a  $x^{\nu}$  temos

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^{\mu}} \frac{d\bar{x}^{\mu}}{dx^{\nu}} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^{\mu}} \left( \frac{\partial \bar{x}^{\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial \bar{x}^{\mu}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\nu}} \right). \quad (3.48)$$

Escolhendo  $\varepsilon = 0$ , e substituindo as igualdades

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x^{\nu}} \Big|_{\varepsilon=0} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \phi} \Big|_{\varepsilon=0} = 1, \quad \frac{\partial \bar{x}^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \Big|_{\varepsilon=0} = \delta_{\nu}^{\mu}, \quad \frac{\partial \bar{x}^{\mu}}{\partial \phi} \Big|_{\varepsilon=0} = 0, \quad (3.49)$$

em (3.48) temos que

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^{\nu}} \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial \phi}{\partial x^{\nu}}. \quad (3.50)$$

Calculamos o termo

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^{\mu}} \right) \Big|_{\varepsilon=0}, \quad (3.51)$$

que aparece em (3.47). Depois de derivar (3.48) em relação a  $\varepsilon$ , e fazendo  $\varepsilon = 0$  temos

$$\frac{d}{d\varepsilon} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x^{\nu}} + \frac{d}{d\varepsilon} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\nu}} = \frac{d}{d\varepsilon} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^{\mu}} \left( \frac{\partial \bar{x}^{\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial \bar{x}^{\mu}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\nu}} \right) + \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^{\mu}} \left( \frac{d}{d\varepsilon} \frac{\partial \bar{x}^{\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{d}{d\varepsilon} \frac{\partial \bar{x}^{\mu}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\nu}} \right). \quad (3.52)$$

Fazendo  $\varepsilon = 0$  em (3.52), usando a expressão (3.50) e as quantidades

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x^{\nu}} \Big|_{\varepsilon=0} &= \frac{\partial \eta}{\partial x^{\nu}}, \quad \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \phi} \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial \eta}{\partial \phi}, \quad \frac{\partial \bar{x}^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \Big|_{\varepsilon=0} = \delta_{\nu}^{\mu}, \\ \frac{\partial \bar{x}^{\mu}}{\partial \phi} \Big|_{\varepsilon=0} &= 0, \quad \frac{d}{d\varepsilon} \frac{\partial \bar{x}^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\nu}}, \quad \frac{d}{d\varepsilon} \frac{\partial \bar{x}^{\mu}}{\partial \phi} \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial \phi}, \end{aligned} \quad (3.53)$$

em (3.52), temos que

$$\frac{\partial \eta}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial \eta}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\nu}} = \frac{d}{d\varepsilon} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^{\mu}} \Big|_{\varepsilon=0} \delta_{\nu}^{\mu} + \frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu}} \left( \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\nu}} \right), \quad (3.54)$$

depois de identificar as derivadas totais podemos escrever, e fazendo  $\nu = \mu$

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^{\mu}} \right) \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{d\eta}{dx^{\mu}} - \frac{\partial \phi}{\partial x^{\nu}} \frac{d\xi_{\nu}}{dx^{\mu}}. \quad (3.55)$$

Finalmente, substituindo (3.55) em (3.47) resulta em

$$\int_{\mathcal{D}} \left[ \partial_{\mu} \zeta^{\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\mu}} \xi^{\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \eta - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} \left( \frac{d\eta}{dx^{\mu}} - \frac{\partial \phi}{\partial x^{\nu}} \frac{d\xi^{\nu}}{dx^{\mu}} \right) - \mathcal{L} \frac{d\xi^{\mu}}{dx^{\mu}} - \Lambda_{\mu} \zeta^{\mu} \right] d^d x = 0. \quad (3.56)$$

Uma condição suficiente para que a equação (3.56) seja verdadeira, é

$$\partial_{\mu} \zeta^{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\mu}} \xi^{\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} \left( \frac{d\eta}{dx^{\mu}} - \frac{\partial \phi}{\partial x^{\nu}} \frac{d\xi^{\nu}}{dx^{\mu}} \right) + \mathcal{L} \frac{d\xi^{\mu}}{dx^{\mu}} + \Lambda_{\mu} \zeta^{\mu}. \quad (3.57)$$

Uma vez que  $\Lambda_{\mu} = \partial_{s^{\mu}} \mathcal{L} = \partial_{s^{\mu}} f(x^{\nu})$  é o vetor gradiente em  $\mathcal{D} \subset \Omega$ , a solução da equação (3.57) é da forma

$$\zeta^{\mu}(x^{\mu}, \phi, \partial_{\mu} \phi, s^{\mu}) = B^{\mu}(x^{\mu}, \phi, \partial_{\mu} \phi, s^{\mu}) E(x^{\nu}), \quad (3.58)$$

onde  $E(x^{\nu}) = e^{-\int \Lambda_{\mu} dx^{\mu}}$  e

$$\partial_{\mu} B^{\mu}(x^{\mu}, \phi, \partial_{\mu} \phi, s^{\mu}) = \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\mu}} \xi^{\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} \left( \frac{d\eta}{dx^{\mu}} - \frac{\partial \phi}{\partial x^{\nu}} \frac{d\xi^{\nu}}{dx^{\mu}} \right) + \mathcal{L} \frac{d\xi^{\mu}}{dx^{\mu}} \right] E(x^{\nu}). \quad (3.59)$$

De (3.36) pode-se escrever que

$$\left. \frac{d\bar{S}(\delta\bar{\mathcal{D}})}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{\delta\mathcal{D}} \left. \frac{d\bar{s}^{\mu}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} n_{\mu} d\sigma = \int_{\delta\mathcal{D}} \zeta^{\mu} n_{\mu} d\sigma = 0. \quad (3.60)$$

Uma condição suficiente para que (3.60) seja verdadeira, é que a função  $B^{\mu}(x^{\mu}, \phi, \partial_{\mu} \phi, s^{\mu})$  satisfaça a condição do produto escalar  $B^{\nu}(x^{\mu}, \phi, \partial_{\mu} \phi, s^{\mu}) n_{\nu} = 0$ , para todo  $x^{\mu} \in \delta\mathcal{D}$ .

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \int_{\delta\mathcal{D}} B^{\nu}(x^{\mu}, \phi, \partial_{\mu} \phi, s^{\mu}) n_{\nu} d\sigma &= \int_{\mathcal{D}} \partial_{\nu} B^{\nu}(x^{\mu}, \phi, \partial_{\mu} \phi, s^{\mu}) d^d x = \\ &= \int_{\mathcal{D}} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\mu}} \xi^{\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} \left( \frac{d\eta}{dx^{\mu}} - \frac{\partial \phi}{\partial x^{\nu}} \frac{d\xi^{\nu}}{dx^{\mu}} \right) + \mathcal{L} \frac{d\xi^{\mu}}{dx^{\mu}} \right] E(x^{\nu}) d^d x = 0. \end{aligned} \quad (3.61)$$

O ponto crucial para terminar a demonstração, é fazer com que a equação generalizada de Euler-Lagrange (3.5) apareça no integrando de (3.61). Da regra do produto em relação à derivada temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx^{\mu}} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} \eta \right) &= \left[ \frac{d}{dx^{\mu}} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} \right) \eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} \frac{d\eta}{dx^{\mu}} - \Lambda_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} \eta \right] E(x^{\nu}) \\ \frac{d}{dx^{\mu}} (\mathcal{L} \xi^{\mu} E(x^{\nu})) &= \frac{d\mathcal{L}}{dx^{\mu}} \xi^{\mu} E(x^{\nu}) + \mathcal{L} \frac{d\xi^{\mu}}{dx^{\mu}} E(x^{\nu}) - \Lambda_{\mu} \xi^{\mu} \mathcal{L} E(x^{\nu}) \end{aligned} \quad (3.62)$$

Inserindo as quantidades em (3.62) na (3.61) e usando a equação (3.5), temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} \left[ \frac{d}{dx^{\mu}} \left( \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} \eta + \mathcal{L} \xi^{\mu} \right) E(x^{\nu}) \right) + \left( \Lambda_{\mu} \xi^{\mu} \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\mu}} \xi^{\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\nu}} \frac{d\xi^{\nu}}{dx^{\mu}} \right) E(x^{\nu}) \right] d^d x \\ - \int_{\mathcal{D}} \left[ \frac{d\mathcal{L}}{dx^{\mu}} \xi^{\mu} E(x^{\nu}) \right] d^d x = 0, \end{aligned} \quad (3.63)$$

supondo que  $\phi$  é solução da equação de Euler-Lagrange (3.5), então podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx^\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} \xi^\nu E(x^\nu) \right) &= \frac{d}{dx^\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} \xi^\nu E(x^\nu) + \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \frac{d}{dx^\mu} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} \right) \xi^\nu E(x^\nu) &+ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} \frac{d\xi^\nu}{dx^\mu} E(x^\nu) - \Lambda_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi)} \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \xi^\mu E(x^\nu) \quad (3.64) \\ &= \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} \xi^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} \frac{d\xi^\nu}{dx^\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \frac{d}{dx^\mu} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} \right) \xi^\nu \right) E(x^\nu) \end{aligned}$$

Logo, a expressão (3.63) equivale a

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} \left[ \frac{d}{dx^\mu} \left( \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \eta + \mathcal{L} \xi^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} \xi^\nu \right) E(x^\nu) \right) + \Lambda_\mu \xi^\mu \mathcal{L} E(x^\nu) \right] d^d x + \\ \int_{\mathcal{D}} \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \frac{d}{dx^\mu} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} \right) \right) \xi^\nu - \frac{d\mathcal{L}}{dx^\mu} \xi^\mu \right] E(x^\nu) d^d x = 0. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Depois de considerar que

$$\frac{d\mathcal{L}}{dx^\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \frac{d}{dx^\mu} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} \right) + \Lambda_\nu \partial_\mu s^\nu, \quad (3.66)$$

podemos simplificar a expressão (3.65)

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} \left[ \frac{d}{dx^\mu} \left( \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \eta + \mathcal{L} \xi^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} \xi^\nu \right) E(x^\nu) \right) + \Lambda_\mu \xi^\mu \mathcal{L} E(x^\nu) \right] d^d x + \\ \int_{\mathcal{D}} \left[ \frac{d\mathcal{L}}{dx^\nu} \xi^\nu - \Lambda_\nu \partial_\mu s^\nu \xi^\mu - \frac{d\mathcal{L}}{dx^\mu} \xi^\mu \right] E(x^\nu) d^d x = 0. \end{aligned} \quad (3.67)$$

e, por fim usando  $\partial_\nu s^\nu = \mathcal{L}$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} \left[ \frac{d}{dx^\mu} \left( \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \eta + \mathcal{L} \xi^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} \xi^\nu \right) E(x^\nu) \right) d^d x + \right. \\ \left. (\Lambda_\mu \partial_\nu s^\nu - \Lambda_\nu \partial_\mu s^\nu) \xi^\mu E(x^\nu) \right] d^d x = 0. \end{aligned} \quad (3.68)$$

C.Q.D

**Nota 6** Para o caso de vários campos  $\phi^\nu, \nu = 1, \dots, n$ , temos

$$\frac{d}{dx^\mu} \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^\nu)} \eta^\nu + \mathcal{L} \xi^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^\nu)} \frac{\partial \phi^\nu}{\partial x^\rho} \xi^\rho \right) E \right] + (\Lambda_\mu \partial_\nu s^\nu - \Lambda_\nu \partial_\mu s^\nu) \xi^\mu E = 0. \quad (3.69)$$

Do teorema 1 e da equação (3.69) não obtemos de forma direta uma quantidade conservada que seja relacionada à invariância em relação à transformação (3.35). Isto ocorre devido ao termo  $(\Lambda_\mu \partial_\nu s^\nu - \Lambda_\nu \partial_\mu s^\nu) \xi^\mu E$  presente nessas relações. No entanto podemos usar a invariância de  $S(\delta\Omega)$  por transformações de calibre para obter quantidades conservadas. Podemos então formular a generalização do teorema de Noether.

**Teorema 3.2.2 (Noether generalizado)** *Se  $S(\delta\mathcal{D})$  for invariante sob as transformações (3.25) no sentido da definição (3.2.2), e se  $s^\mu$  satisfaz o calibre canônico (3.23), então a quantidade*

$$\left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^\nu)} \eta^\nu + \mathcal{L} \xi^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^\nu)} \frac{\partial \phi^\nu}{\partial x^\rho} \xi^\rho \right) E \quad (3.70)$$

é uma constante ao longo da equação generalizada de Euler-Lagrange (5.90).

## 4 Aplicações do princípio variacional de Herglotz e teorema de Noether para campos não conservativos

Neste capítulo faremos aplicações da equação generalizada de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{d}{dx^\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) + \Lambda_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0. \quad (4.1)$$

A equação do movimento neste caso descreve um sistema físico não conservativo, como foi dito na capítulo anterior. Com o objetivo de entender o efeito da dependência da Lagrangeana em relação à densidade de Ação  $s^\mu$  e de caracterizar o tipo de efeitos não conservativos introduzidos por essa dependência, aplicaremos o nosso Princípio da Mínima Ação para o electromagnetismo e para a mecânica quântica.

### 4.1 Equação de Maxwell para sistemas não conservativos

Para obter uma generalização das equações de Maxwell a partir do nosso Princípio de Mínima Ação, precisamos acrescentar à Lagrangeana (2.22) uma dependência em  $s^\mu$ . Como a equação de Euler-Lagrange (4.1) foi obtida no caso em que  $\Lambda_\mu$  é um vetor independente de  $s^\mu$ , a Lagrangeana deve ser linear em  $s^\mu$ . O caso mais simples é dado pela Lagrangeana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + A_\mu J^\mu + \gamma_\mu s^\mu, \quad (4.2)$$

onde  $\gamma_\mu = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$  é um quadri-vetor constante e  $s_\mu = (s_0, s_1, s_2, s_3)$  será chamado de quadri-vetor densidade de ação. Aproveitando os cálculos já feitos no capítulo anterior, a equação (3.5) para a densidade de Lagrangeana (4.2) é

$$\partial_\mu F^{\nu\mu} + \gamma_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \quad (4.3)$$

onde ainda podemos escrever na forma de operadores, junto com os outros dois pares de equação

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} - \gamma' \times \mathbf{B} + \gamma_0 \mathbf{E} &= \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} - \gamma' \cdot \mathbf{E} &= \rho \\ \nabla \times \mathbf{E} - \partial_t \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Dessas equações podemos interpretar os efeitos do quadri-vetor  $\gamma^\mu$ . O termo  $\gamma' \cdot \mathbf{E}$  descreve um efeito semelhante à de uma densidade de carga elétrica sobre o vácuo, que está

relacionada a não conservação da carga elétrica total do sistema. Já os termos  $\boldsymbol{\gamma}' \times \mathbf{B}$  e  $\gamma_0 \mathbf{E}$  representam correntes induzidas. Veremos mais a frente os efeitos físicos dessas densidades induzidas.

De seguida vamos calcular a densidade da força de Lorentz, que de acordo com (JACKSON, 1999), é dada por  $\mathcal{F}_i = F_{i\nu} \partial_\mu F^{\nu\mu}$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Por questão de simplificação consideremos a parte espacial do quadri-vector  $\gamma_\mu$  nula. Da equação (4.3) a densidade da força de Lorentz pode ser escrita como:

$$\mathcal{F}_i = \mathbf{f}_i + \gamma_0 \mathbf{S}_i \quad (4.5)$$

sendo  $\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$  a densidade de força de Lorentz clássica, e  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}$  o vetor Poynting, que representa quantidade de energia transportada pelos campos por unidade de tempo e área. Da expressão (4.5) conclui-se que sistemas onde a densidade Lagrangeana é escolhida da forma que foi proposta em (4.2), são sistemas com forças não conservativas proporcionais ao vetor de Poynting. Pode-se notar que quando a componente temporal  $\gamma_0$  do quadri-vector constante  $\gamma_\mu$  for nula, e o vetor constante da parte espacial  $\boldsymbol{\gamma}' = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$  for paralelo ao campo magnético  $\mathbf{B}$  e perpendicular ao campo elétrico  $\mathbf{E}$ , as equações (4.4) reduzem-se as equações de Maxwell tradicionais.

Tomando a derivada parcial na segunda equação de (4.4) e usando a primeira chega-se à equação de continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \gamma_0 \rho + \boldsymbol{\gamma}' \cdot \mathbf{J} - \nabla \cdot \mathbf{J} \quad (4.6)$$

Em particular se o quadri-vector constante  $\gamma^\mu$  for nulo, a equação (4.6) reduz-se a equação de continuidade clássica, o que representa a conservação local da carga. Já os termos  $\gamma_0 \rho$  e  $\boldsymbol{\gamma}' \cdot \mathbf{J}$  estão relacionados à dissipação da carga, como veremos. Resolvendo a equação diferencial (4.6) e integrando sobre a superfície cujo o volume delimitado é  $V$ , temos a expressão da carga total contida no volume,

$$Q = \int \rho dV = Q_0 - e^{\gamma_0 t} \int_0^t \left( e^{-\gamma_0 t'} \int (\nabla \cdot \mathbf{J}) dV \right) dt'. \quad (4.7)$$

Aplicando o teorema do divergente

$$\begin{aligned} Q &= Q_0 - e^{\gamma_0 t} \int_0^t \left( e^{-\gamma_0 t'} \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \right) dt' \\ &= Q_0 - e^{\gamma_0 t} \int_0^t e^{-\gamma_0 t'} I dt'. \end{aligned} \quad (4.8)$$



Se  $I$  não depende do tempo, a expressão da carga relacionada com a corrente é da seguinte maneira

$$Q = Q_0 + \frac{1}{\gamma_0} I (-1 + e^{\gamma_0 t}) \quad (4.9)$$

Vemos de (4.9) que para  $\gamma_0 < 0$  a carga total  $Q$  não é conservada, sendo reduzida com o tempo.

#### 4.1.1 Ondas eletromagnéticas amortecida

Vamos agora investigar os efeitos do quadri-vetor  $\gamma^\mu$  sobre as ondas eletromagnéticas. Em notação tensorial temos:

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\nu\mu} + \gamma_\mu F^{\mu\nu} &= J^\nu \\ \partial_\mu (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) + \gamma_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) &= \\ -\square^2 A^\nu + \gamma_\mu \partial^\mu A^\nu + \partial_\mu \partial^\nu A^\mu - \gamma_\mu \partial^\nu A^\mu &= . \end{aligned} \quad (4.10)$$

Devido a liberdade na escolha dos potenciais podemos escolher o calibre de Lorentz modificado

$$\partial_\mu A^\mu - \gamma_\mu A^\mu = 0, \quad (4.11)$$

com essa escolha a (4.10) resulta na equação da onda para os potenciais

$$\square^2 A^\nu - \gamma_\mu \partial^\mu A^\nu = -J^\nu. \quad (4.12)$$

Da definição do tensor eletromagnético  $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ , tomemos o operador D'alembertiano, para determinar a equação da onda para o campo eletromagnético.

$$\begin{aligned} \square^2 F^{\mu\nu} &= \partial^\mu \square^2 A^\nu - \partial^\nu \square^2 A^\mu \\ &= \partial^\mu (\gamma_\alpha \partial^\alpha A^\nu - J^\nu) - \partial^\nu (\gamma_\alpha \partial^\alpha A^\mu - J^\mu). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Então a equação para campo eletromagnético na forma tensorial é dada por

$$\square^2 F^{\mu\nu} - \gamma_\alpha \partial^\alpha F^{\mu\nu} = \partial^\nu J^\mu - \partial^\mu J^\nu. \quad (4.14)$$

Na ausência da fonte a equação reduz-se em

$$\square^2 F^{\mu\nu} - \gamma_\alpha \partial^\alpha F^{\mu\nu} = 0, \quad (4.15)$$

que representa uma equação de onda amortecida ou forçada dependendo do quadri-vetor  $\gamma^\mu$ . A equação (4.15) contém seis componentes independentes devido a propriedade de

antissimetria do tensor  $F_{\mu\nu}$  e da ausência dos elementos na diagonal principal. É fácil verificar que a equação (4.15) admite a solução

$$F^{\mu\nu} = F_0^{\mu\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma}, \quad (4.16)$$

onde  $F_0^{\mu\nu}$  é um tensor constante com a diagonal principal nula e com a propriedade de antissimetria, e o quadri-vetor  $k_\sigma$  satisfazendo a relação

$$k_\sigma k^\sigma + i\gamma_\sigma k^\sigma = 0. \quad (4.17)$$

Da relação (4.17) conclui-se que o quadri-vetor  $k_\sigma$  é complexo, logo a sua parte imaginária contribuirá para o amortecimento da onda. Concluímos então, que para sistemas não conservativos, as ondas eletromagnéticas amortecem.

Vamos usar a equação (4.17) para fixar o quadri-vetor  $k_\sigma$ . Separando a parte temporal da espacial do quadri-vetor  $k_\sigma$  temos que

$$k^2 + i\gamma'k \cos \varphi - \omega^2 - i\gamma_0\omega = 0, \quad (4.18)$$

onde  $k$  é o módulo da parte espacial do quadri-vetor  $k_\sigma$ ,  $\gamma'$  é o módulo da parte espacial do quadri-vetor  $\gamma_\sigma$ ,  $\omega$  é frequência, e  $\varphi$  é o ângulo formado entre  $k_j$  e  $\gamma_j$ . Dessa equação podemos afirmar que ou  $k$  ou  $\omega$  é complexo. Por questão de simplicidade vamos considerar dois casos separadamente, onde só o  $\omega$  é complexo e  $k$  real, e o caso contrário. Consideremos que  $\omega$  é complexo e  $k$  real, então  $\omega$  pode ser escrita na forma

$$\omega = \alpha + i\beta, \quad (4.19)$$

onde a equação (4.18) dá nos a seguinte solução (com  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  ou  $\gamma' = 0$ ):

$$\begin{aligned} \alpha &= \pm \left( k^2 - \frac{\gamma_0^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \beta &= -\frac{\gamma_0}{2} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Sabemos que de (4.16) os campos apresentam a solução seguinte

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 e^{i(kn_j x^j - \omega t)} \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 e^{i(kn_j x^j - \omega t)}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

com  $\mathbf{E}_0$ ,  $\mathbf{B}_0$  vetores constantes, e  $n_j$  é um vetor unitário na mesma direção que  $k_j$ . De (4.20) temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}'_0 e^{i(k_j x^j - \alpha t)} \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}'_0 e^{i(k_j x^j - \alpha t)}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

onde  $\mathbf{E}'_0 = \mathbf{E}_0 e^{-\frac{\gamma_0}{2}t}$ ,  $\mathbf{B}'_0 = \mathbf{B}_0 e^{-\frac{\gamma_0}{2}t}$ . Fica claro que para o caso onde  $\omega$  é complexo e  $k$  real, a solução (4.16) representa uma onda eletromagnética com a amplitude caindo ( $\gamma_0 > 0$ ) com o tempo.

Agora consideremos o outro caso onde  $k$  é complexo e  $\omega$  real, então

$$k = \alpha + i\beta. \quad (4.23)$$

Neste caso a equação (4.18) torna muito difícil de resolver, para facilitar vamos supor que os vetores  $\gamma_j$  e  $k_j$  são ortogonais ( $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ). Se  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  temos que

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{\omega^2}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma_0}{\omega}\right)^2} \right) \\ \beta^2 &= \frac{\omega^2}{2} \left( -1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma_0}{\omega}\right)^2} \right) \end{aligned} \quad (4.24)$$

Uma conclusão que podemos tirar da constante  $\gamma_0$ , é que tem o efeito análogo no caso das ondas eletromagnéticas propagando num meio condutor, caracterizada pela constante de condutividade  $\gamma_0$  (JACKSON, 1999). Então fica entendido que o efeito da dissipação das ondas eletromagnético no vácuo é como se estivessem se propagando num meio condutor fictício com a constante de condutividade  $\gamma_0$ . Tomando as raízes positivas de  $\alpha$  e  $\beta$  podemos caracterizar o meio condutor fictício em dois casos extremos

$$\begin{aligned} \alpha &= \left( \frac{\omega^2}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma_0}{\omega}\right)^2} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\ \beta &= \left( \frac{\omega^2}{2} \left( -1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma_0}{\omega}\right)^2} \right) \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Primeiro caso  $\frac{\gamma_0}{\omega} \ll 1$ , que corresponde a um condutor fraco (sistema aproximadamente conservativo), podemos considerar apenas termos de primeira ordem para escrever

$$k = \alpha + i\beta \simeq \omega + i\gamma_0. \quad (4.26)$$

No segundo caso consideremos  $\frac{\gamma_0}{\omega} \gg 1$ , que corresponde a um condutor puro (sistema altamente dissipativo) temos que

$$k \simeq (1 + i) \sqrt{\gamma_0 \omega}. \quad (4.27)$$

Em geral para o vetor de onda  $k_j = (\alpha + i\beta) n_j$ , os campos podem ser escritos como

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 e^{-\beta n_j x^j} e^{i(\alpha n_j x^j - \omega t)} \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 e^{-\beta n_j x^j} e^{i(\alpha n_j x^j - \omega t)}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

onde  $n_j$  é o vetor unitário na direção de  $k_j$ . Das duas equações homogêneas em (4.4) podemos concluir que

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_0 &= \frac{1}{\omega} (\alpha + i\beta) \mathbf{n} \times \mathbf{E}_0 \\ \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{n} &= 0.\end{aligned}\tag{4.29}$$

A primeira equação mostra que  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  estão em fase quando existe dissipação. Usemos a notação exponencial para números complexos para reescrever  $k$ . Definindo o módulo e o ângulo de  $k$ :

$$\begin{aligned}|k| &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \omega \left( 1 + \left( \frac{\gamma_0}{\omega} \right)^2 \right)^{\frac{1}{4}} \\ \theta &= \tan^{-1} \left( \frac{\alpha}{\beta} \right) = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{\gamma_0}{\omega} \right)\end{aligned}\tag{4.30}$$

podemos escrever a primeira relação em (4.29) na forma:

$$\mathbf{B}_0 = \left( 1 + \left( \frac{\gamma_0}{\omega} \right)^2 \right)^{\frac{1}{4}} e^{i\theta} \mathbf{n} \times \mathbf{E}_0,\tag{4.31}$$

cuja interpretação é o seguinte: O campo magnético  $\mathbf{B}$  atrasa o campo elétrico  $\mathbf{E}$  com relação ao tempo, com um ângulo de fase  $\theta$  e com uma amplitude relativa

$$\frac{|\mathbf{B}_0|}{|\mathbf{E}_0|} = \left( 1 + \left( \frac{\gamma_0}{\omega} \right)^2 \right)^{\frac{1}{4}}.\tag{4.32}$$

Para sistemas onde há bastante dissipação ( $\frac{\gamma_0}{\omega} \gg 1$ ), vemos que o campo magnético é muito mais intenso do que o campo elétrico, e encontram-se numa fase aproximadamente  $\frac{1}{2} \tan^{-1} \infty = 45^\circ$ . O caso clássico das ondas eletromagnéticas no vácuo, que nos é familiar, recupera-se quando  $\gamma_0 = 0$ .

#### 4.1.2 Lei de Gauss e Ampère

No electromagnetismo, as duas primeiras equações em (4.4) na forma integral são conhecidas como lei Gauss e de Ampère, respectivamente. Com a modificação das equações de Maxwell, com certeza existem modificações nas leis em forma de integral, pois são equivalentes. A seguir veremos de que forma as leis na forma integral se modificam.

Integrando as duas primeiras equações (4.4) sobre um volume  $V$  limitado por uma superfície  $S$ , que contem uma carga total  $Q$ , e com uma densidade de corrente total  $I$

passando por um caminho fechado  $C$ , obtém-se a lei de Gauss e de Ampère na forma de integral para sistemas não conservativos

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_V \gamma' \cdot \mathbf{E} dV + Q \quad (4.33)$$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} - \partial_t \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \gamma_0 \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} - \oint_S \gamma' \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = I, \quad (4.34)$$

Em particular se  $\gamma' = (0, 0, 0)$  temos

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q \quad (4.35)$$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = I + \oint_S J_d \cdot d\mathbf{S}, \quad (4.36)$$

onde  $J_d = \partial_t \mathbf{E} - \gamma_0 \mathbf{E}$  é o vetor densidade de corrente de deslocamento. Com a escolha da parte espacial do quadri-vetor  $\gamma_\mu$  nula, a lei de Gauss permanece na sua forma original, e quanto a lei de Ampère continua apresentando alteração. A expressão (4.36) permite concluir que, mesmo sem a variação do campo elétrico há a indução do campo magnético. Em outras palavras mesmo que o campo elétrico não varie com o tempo, ele irá induzir um campo magnético, e vice versa. Na prática esse efeito não é detectável, o que nos leva a justificar que a constante  $\gamma_0$  tem uma ordem de grandeza muito pequena.

#### 4.1.3 Leis de conservação

É importante analisarmos as leis de conservação dadas pela generalização do teorema de Noether para essa teoria eletromagnética não conservativa. Em particular, fazendo a translação nas coordenadas do espaço tempo  $x^\mu$ , ou seja

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \varepsilon^\mu, \quad (4.37)$$

logo  $\xi_\mu = \delta^\rho_\mu$  e  $\eta_\nu = 0$ . Obtemos de (4.2) e (3.70) que,

$$\frac{d}{dx^\mu} \left[ \left( \left( -\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + A_\alpha J^\alpha + \gamma_\alpha s^\alpha \right) \delta_\rho^\mu + F^{\mu\nu} \partial_\rho A_\nu \right) e^{-\gamma_\mu x^\mu} \right] = 0 \quad (4.38)$$

onde  $s^\mu$  é solução da equação diferencial  $\partial_\mu s^\mu = \mathcal{L}$ . Então podemos concluir que a quantidade

$$T_\rho^\mu = \left( \delta_\rho^\mu \left( -\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + A_\alpha J^\alpha + \gamma_\alpha s^\alpha \right) + F^{\mu\nu} \partial_\rho A_\nu \right) e^{-\gamma_\mu x^\mu} \quad (4.39)$$

se conserva através de uma translação no espaço-tempo, e o chamaremos de tensor energia-momento do campo eletromagnético. Se olharmos para (4.39) vemos que o tensor energia-momento em geral não é simétrico. Voltando para teoria da relatividade geral (observando o lado direito da equação de Einstein), vemos que tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$  e o tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  são ambos simétricos, então para obter uma teoria consistente, o tensor energia-momento deve preservar a propriedade de simetria. Essa consistência é feita introduzindo um termo adicional (RYDER, 1996)  $\partial_\rho M^{\rho\mu\nu}$ , tal que  $M^{\rho\mu\nu} = -M^{\mu\rho\nu}$ , então

$$\partial_\rho \partial_\mu M^{\rho\mu\nu} = 0. \quad (4.40)$$

Quanto à liberdade de adicionar esse termo extra, podemos claramente fazê-la, uma vez que (4.39) não é definida unicamente. Para o novo tensor energia-momento temos

$$T_\rho{}^\mu = \left( \delta_\rho{}^\mu \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + A_\mu J^\mu + \gamma_\mu s^\mu \right) + F^{\mu\nu} \partial_\rho A_\nu + \partial_\rho M^{\rho\mu\nu} \right) e^{-\gamma_\mu x^\mu}. \quad (4.41)$$

Como  $F_{\rho\nu} = \partial_\rho A_\nu - \partial_\nu A_\rho$ , podemos escrever tensor energia-quantidade de movimento

$$T^\rho{}_\mu = \left( \delta^\rho{}_\mu \left( -\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + A_\alpha J^\alpha + \gamma_\alpha s^\alpha \right) + F^{\mu\nu} F_{\rho\nu} + \partial_\nu A_\rho F^{\mu\nu} + \partial_\rho M^{\rho\mu\nu} \right) e^{-\gamma_\mu x^\mu} \quad (4.42)$$

Fazendo a escolha  $\partial_\rho M^{\rho\mu\nu} = \partial_\nu A_\rho F^{\mu\nu}$ , temos claramente o tensor energia-momento simétrico

$$T^\rho{}_\mu = \left( \delta^\rho{}_\mu \left( -\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + A_\alpha J^\alpha + \gamma_\alpha s^\alpha \right) + F^{\mu\nu} F_{\rho\nu} \right) e^{-\gamma_\mu x^\mu}. \quad (4.43)$$

Para  $\gamma^\mu = 0$  obtém-se para o caso clássico

$$T_\rho{}^\mu = -\delta_\rho{}^\mu \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + F^{\mu\nu} F_{\rho\nu}, \quad (4.44)$$

na qual não existem fontes ( $J^\nu = 0$ ).

#### 4.2 Equação de Schrödinger para sistemas não conservativos

Tal como no mundo macroscópico, existem também forças de dissipação no mundo microscópico. Por exemplo, na teoria de colisões de íons pesados, a colisão entre  $^{84}\text{Kr}$  (Criptônio) e  $^{209}\text{Bi}$  (Bismuto), certas características do espalhamento podem ser explicadas se assumirmos a presença de um meio viscoso em torno dos núcleos pesados. No caso da dissipação da energia cinética, momento angular relativo e o aprisionamento dos núcleos estão entre os fenômenos dissipativos que podem ser descritos por uma força

de amortecimento simples (NÖREBERG, 1980). Sabe-se que a equação de Schrödinger é válida apenas em sistemas nas quais atuam forças conservativas. Para sistemas não conservativos vários métodos foram propostos para estudá-los. Alguns desses métodos envolvem derivadas fracionárias, como exemplo, em (RIEWE, 1996), ilustra-se força de dissipação proporcional à velocidade. Além do uso de derivadas fracionárias, Bateman (BATEMAN, 1931) sugeriu dois métodos baseados na ideia de construção da Lagrangeana que leva a equações múltiplas de movimento. Nesta seção ilustraremos exemplo, com a densidade Lagrangeana correspondente à parte dissipativa semelhante a (4.2)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi^*(\mathbf{r}, t) \nabla \psi(\mathbf{r}, t) - V(\mathbf{r}) \psi^*(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t) \\ & + \frac{i\hbar}{2} \left( \psi^*(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \psi^*(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t) \right) + \gamma_\mu s^\mu \end{aligned} \quad (4.45)$$

onde  $\gamma_\mu = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$  é um quadri-vetor constante e  $s_\mu = (s_0, s_1, s_2, s_3)$  será chamado de quadri-vetor densidade de ação. Aplicando (4.1) em (4.45) temos a equação do movimento

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}, t) + i\hbar \frac{\gamma_0}{2} \psi(\mathbf{r}, t) + \frac{\hbar^2}{2m} \gamma' \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t), \quad (4.46)$$

onde podemos escrever na forma de operadores

$$\hat{\mathcal{H}} \psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) \quad (4.47)$$

onde  $\hat{\mathcal{H}} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) + i\hbar \frac{\gamma_0}{2} + \frac{\hbar^2}{2m} \gamma' \cdot \nabla$ . A equação (4.46) representa a equação de Schrödinger para um sistema mecânico não conservativo. Segundo (RAZAVY, 2006) a equação (4.46) representa um sistema físico onde as forças de dissipação que atuam no sistema são proporcionais á velocidade (lei da resistência de Stokes), e o quadrado da velocidade (lei da resistência de Newton). A lei da resistência de Stokes é predominante quando a velocidade da partícula for menor do que  $24m \cdot s^{-1}$ , enquanto que a resistência de Newton para valores de velocidade da partícula compreendida entre  $30m \cdot s^{-1}$  e  $330m \cdot s^{-1}$ . Quando o vetor  $\gamma'$  for completamente nulo, a equação (4.46) se reduz a

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}, t) + i\hbar \frac{\gamma_0}{2} \psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t), \quad (4.48)$$

que apresenta uma força não conservativa proporcional à velocidade. Esta equação foi proposta por um método diferente em (WU et al., 2009) e, portanto a equação obtida em (4.46) é muito mais geral que a equação apresentada em (WU et al., 2009). Um outro caso

particular é considerar apenas a constante  $\gamma_1 \neq 0$  e o movimento unidimensional. Neste caso a equação (5.90) reduz-se a

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi - V\psi + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi - \frac{\gamma_1 \hbar^2}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \psi = 0, \quad (4.49)$$

que de acordo com (RAZAVY, 2006), representa um sistema não conservativo na qual a força dissipativa é proporcional ao quadrado da velocidade. Para ilustrar o efeito da equação de Schrödinger para sistemas não conservativos, consideremos o caso de uma partícula de massa  $m$  em uma dimensão com o movimento na direção do eixo  $x$ . Então a equação de Schrödinger que descreve a evolução da partícula é

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi - V\psi + i\hbar \left( \frac{\partial}{\partial t} \psi - \frac{\gamma_0}{2} \psi \right) - \frac{\gamma_1 \hbar^2}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \psi = 0 \quad (4.50)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi + \frac{2mV}{\hbar^2} \psi + \frac{2im}{\hbar} \left( \frac{\partial}{\partial t} \psi - \frac{\gamma_0}{2} \psi \right) - \gamma_1 \frac{\partial}{\partial x} \psi = 0 \quad (4.51)$$

Fazendo a separação de variáveis, onde assumimos que  $\psi(x, t) = \varphi(x) \phi(t)$ , a equação (4.51) se escreve

$$\frac{1}{\varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\gamma_1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{2m}{\hbar^2} V(x) + \frac{2im}{\hbar \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{im\gamma_0}{\hbar}. \quad (4.52)$$

De (4.52) conclui-se que

$$\frac{1}{\varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\gamma_1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{2m}{\hbar^2} V(x) = C_1 \quad (4.53)$$

$$\frac{2im}{\hbar \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} = C_2, \quad (4.54)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes tais que  $C_1 + C_2 = \frac{im\gamma_0}{\hbar}$ . Em particular, para uma partícula livre, as funções que satisfazem as equações (4.53) e (4.54) são:

$$\begin{aligned} \phi(t) &= e^{-\frac{i\hbar C_2}{2m} t} \\ \varphi(x) &= e^{\frac{\gamma_1}{2} x} (A_1 e^{iRx} + A_2 e^{-iRx}) \end{aligned} \quad (4.55)$$

onde  $R = \frac{\sqrt{-\gamma_1^2 - 4C_1}}{2}$  e  $C_1 < -\frac{\gamma_1^2}{4}$ .

A equação (4.53) é conhecida como equação de Schrödinger independente do tempo, de maneira mais familiar temos

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\hbar^2 \gamma_1}{2m} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + V(x) \varphi = -\frac{\hbar^2 C_1}{2m} \varphi. \quad (4.56)$$

Comparando a equação (4.56) com a equação de Schrödinger clássica independente do tempo conclui-se que  $C_1 = -\frac{2mE}{\hbar^2}$ , onde  $E$  é a energia mecânica da partícula.



**Exemplo 2 (Poço de potencial quadrado infinito)** *Consideremos o poço de potencial na figura abaixo*

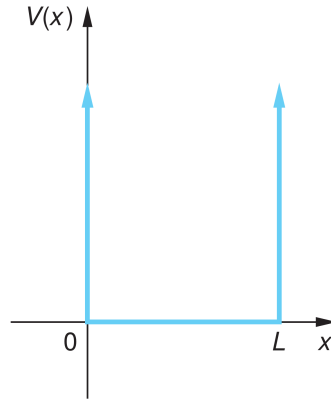


Figura 1 – Poço potencial infinito

Da primeira condição de fronteira  $\varphi(0) = 0$  obtém-se que  $A_1 = -A_2$ , e da segunda ( $\varphi(L) = 0$ )

$$e^{\frac{\gamma_1}{2}L} (A_1 e^{iRL} - A_1 e^{-iRL}) = 2iA_1 e^{\frac{\gamma_1}{2}L} \sin(RL) = 0, \quad (4.57)$$

que implica que  $RL = n\pi$ , com  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Usando  $C_1 = -\frac{2mE}{\hbar^2}$  e  $R = \frac{\sqrt{-\gamma_1^2 - 4C_1}}{2}$ , temos a quantização da energia

$$E(n) = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mL^2} + \frac{\gamma_1^2 \hbar^2}{8m}. \quad (4.58)$$

Podemos observar que o espectro de energia é deslocado pela quantidade  $E_d = \frac{\gamma_1^2 \hbar^2}{8m}$ . Uma observação importante é que as distâncias entre as linhas espectrais de energia são as mesmas que no caso clássico, devido à constância de  $E_d$ . A função  $\varphi(x)$  fica determinada por

$$\varphi(x) = B e^{\frac{\gamma_1 x}{2}} \sin(Rx). \quad (4.59)$$

A função de onda completa para o poço de potencial infinito fica determinada da seguinte forma

$$\psi(x, t) = B e^{-\frac{i\hbar C_2}{2m}t + \frac{\gamma_1 x}{2}} \sin(Rx), \quad (4.60)$$

onde  $C_2 = -\frac{2mE}{\hbar^2} + \frac{i\gamma_1}{\hbar}$ . A função  $\psi(x, t)$  está associada a uma onda amortecida onde a amplitude é dada por  $B e^{-\frac{i\hbar C_2}{2m}t + \frac{\gamma_1 x}{2}}$  que varia com o tempo e a posição.

### 4.2.1 Equação de continuidade

Na mecânica quântica a evolução temporal do sistema é governada pela *equação de Schrödinger*, onde a solução está associada à uma função de onda que representa a densidade de probabilidade. Como a *equação de Schrödinger* descreve uma evolução temporal, para ser útil, a função de onda deve permitir fluxos de probabilidade. Vamos procurar a equação da conservação local de probabilidade, definindo a densidade de probabilidade por

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}, t)\psi^*(\mathbf{r}, t). \quad (4.61)$$

Derivando em relação ao tempo, e com a ajuda da *equação de Schrödinger* (4.46) e o seu conjugado, podemos deduzir a *equação da continuidade*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \psi^*(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) + \psi(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial t} \psi^*(\mathbf{r}, t) \\ &= \psi^*(\mathbf{r}, t) \left( -\frac{\hbar}{2mi} \nabla^2 \psi + \frac{1}{\hbar i} V \psi + \frac{\gamma_0}{2} \psi + \frac{\hbar}{2mi} \gamma' \cdot \nabla \psi \right) + \\ &\quad \psi(\mathbf{r}, t) \left( \frac{\hbar}{2mi} \nabla^2 \psi^* - \frac{1}{\hbar i} V \psi^* + \frac{\gamma_0}{2} \psi^* - \frac{\hbar}{2mi} \gamma' \cdot \nabla \psi^* \right). \end{aligned} \quad (4.62)$$

Organizando os termos e simplificando, segue *equação de continuidade* na forma diferencial

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{r}, t) = -\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \gamma' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \gamma_0 \rho(\mathbf{r}, t), \quad (4.63)$$

onde  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar}{2mi} (\psi^*(\mathbf{r}, t) \nabla \psi(\mathbf{r}, t) - \psi(\mathbf{r}, t) \nabla \psi^*(\mathbf{r}, t))$  é o vetor corrente de probabilidade. Em particular se o vetor constante  $\gamma'$  for ortogonal ao vetor densidade de carga  $\mathbf{J}$ , a equação (4.63) reduz-se a equação de continuidade clássica, ou seja tem-se a conservação local da corrente. Tomando o integral sobre todo espaço em (4.63), obtém-se a formal integral desse resultado

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho d^3\mathbf{r} - \gamma_0 \int_V \rho d^3\mathbf{r} = \int_V \gamma' \cdot \mathbf{J} d^3\mathbf{r} - \oint_{\partial V} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} d^3\mathbf{r}, \quad (4.64)$$

onde foi usada a lei de Gauss. Seja  $I = \oint_{\partial V} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$  a corrente de probabilidade que atravessa a superfície que delimita a carga de probabilidade  $Q = \int_V \rho d^3\mathbf{r}$ , e  $D = \int_V \gamma' \cdot \mathbf{J} d^3\mathbf{r}$ , obtém-se

$$\dot{Q} - \gamma_0 Q = -I + D \quad (4.65)$$

Em particular escolhendo  $\gamma' = 0$ , e levando em conta que a função de onda se anula sobre a superfície  $\partial V$ , temos como solução da equação diferencial (4.65)

$$\int_V \rho(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r} = e^{\gamma_0 t} \int_V \rho(\mathbf{r}, 0) d^3\mathbf{r}. \quad (4.66)$$

Com  $\gamma_0 < 0$  conclui-se que a probabilidade da partícula ser encontrada em uma determinada região do espaço decai com o passar do tempo, incluindo os estados estacionários. Este resultado mostra que a dissipação está relacionada a um sistema aberto, com a partícula escapando do sistema, conseqüentemente a probabilidade de encontrar a partícula no sistema vai a zero para  $t \rightarrow \infty$ .

#### 4.2.2 Limite macroscópico

Em diversos livros textos (COHEN-TANNOUJJI, 1977) se conecta a mecânica quântica e clássica através do teorema de Ehrenfest (BOLIVAR, 2004). Esse teorema é válido sob a condição de pacote de onda de Ehrenfest. De maneira que para pequenos pacotes de onda (Pacote de Ehrenfest), valores médios dos observáveis têm de obedecer às leis da mecânica clássica. Vamos tomar o limite macroscópico para equação de Schrödinger no que corresponde à segunda lei de Newton, podendo observar quais são as forças dissipativas presentes no problema.

Começemos por considerar apenas uma dimensão por questão de simplicidade nos cálculos. Usando a equação de continuidade temos:

$$\frac{d}{dt} \langle x \rangle = \int x \frac{\partial \rho}{\partial t} dx = \int x \left( -\frac{\partial J}{\partial x} + \gamma_1 J + \gamma_0 \rho \right) dx \quad (4.67)$$

Fazendo a integração por partes apenas no primeiro termo da última igualdade, e lembrando que a função de onda se anula nos extremos da integração, nos dá que

$$\frac{d}{dt} \langle x \rangle = -\frac{i\hbar}{m} \int \psi^* \frac{\partial}{\partial x} \psi dx + \int x (\gamma_1 J + \gamma_0 \rho) dx \quad (4.68)$$

Tomando a derivada em relação a varável tempo  $t$  em (4.68), temos

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle x \rangle = -\frac{i\hbar}{m} \int \left( \frac{\partial}{\partial t} \psi^* \frac{\partial}{\partial x} \psi + \psi^* \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial t} \psi \right) \right) dx + \int x \left( \gamma_1 \frac{\partial}{\partial t} J + \gamma_0 \frac{\partial}{\partial t} \rho \right) dx. \quad (4.69)$$

Com a ajuda da equação de Schrödinger

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi - V\psi + i\hbar \left( \frac{\partial}{\partial t} \psi - \frac{\gamma_0}{2} \psi \right) - \frac{\gamma_1 \hbar^2}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \psi = 0, \quad (4.70)$$

e o seu complexo conjugado

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi^* - V\psi^* - i\hbar \left( \frac{\partial}{\partial t} \psi^* - \frac{\gamma_0}{2} \psi^* \right) - \frac{\gamma_1 \hbar^2}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \psi^* = 0 \quad (4.71)$$

podemos escrever

$$\begin{aligned}
i\hbar \int \left( \frac{\partial}{\partial t} \psi^* \frac{\partial}{\partial x} \psi + \psi^* \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial t} \psi \right) \right) dx &= i\hbar \int \left( \frac{\partial}{\partial t} \psi^* \frac{\partial}{\partial x} \psi - \frac{\partial}{\partial t} \psi \frac{\partial}{\partial x} \psi^* \right) dx = \\
\int \left( \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi^* - V \psi^* + i\hbar \frac{\gamma_0}{2} \psi^* - \frac{\gamma_1 \hbar^2}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \psi^* \right) \frac{\partial}{\partial x} \psi dx &- \\
\int \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi + V \psi + i\hbar \frac{\gamma_0}{2} \psi + \frac{\gamma_1 \hbar^2}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \psi \right) \frac{\partial}{\partial x} \psi^* dx &
\end{aligned} \tag{4.72}$$

Depois da integração por partes, e levando em conta que a função de onda é identicamente nula nos extremos da integração, temos

$$\begin{aligned}
i\hbar \int \left( \frac{\partial}{\partial t} \psi^* \frac{\partial}{\partial x} \psi + \psi^* \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial t} \psi \right) \right) dx &= \int \psi^* \frac{\partial V}{\partial x} \psi dx + \\
i\hbar \frac{\gamma_0}{2} \int \left( \psi^* \frac{\partial}{\partial x} \psi - \psi \frac{\partial}{\partial x} \psi^* \right) dx &- \frac{\gamma_1 \hbar^2}{m} \int \frac{\partial}{\partial x} \psi^* \frac{\partial}{\partial x} \psi dx
\end{aligned} \tag{4.73}$$

Introduzindo (4.73) na (4.69),

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2} \langle x \rangle &= -\frac{1}{m} \left[ \int \left( \psi^* \frac{\partial V}{\partial x} \psi + i\hbar \gamma_0 \psi^* \frac{\partial}{\partial x} \psi - \frac{\gamma_1 \hbar^2}{m} \frac{\partial}{\partial x} \psi^* \frac{\partial}{\partial x} \psi \right) dx \right] + \\
\int \gamma_1 x \left( \frac{\partial}{\partial t} J + \gamma_0 \frac{\partial}{\partial t} \rho \right) dx. &
\end{aligned} \tag{4.74}$$

De (4.68) temos

$$\begin{aligned}
m \frac{d^2}{dt^2} \langle x \rangle &= \left\langle -\frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle + 2\gamma_0 m \frac{d}{dt} \langle x \rangle + \gamma_0^2 m \langle x \rangle + \frac{\gamma_1 \hbar^2}{m} \int \psi^* \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi dx + \\
\int \gamma_1 x \left( \frac{\partial}{\partial t} J + \gamma_0 J \right) dx. &
\end{aligned} \tag{4.75}$$

$$m \frac{d^2}{dt^2} \langle x \rangle = \left\langle -\frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle + 2\gamma_0 m \frac{d}{dt} \langle x \rangle + \gamma_0^2 m \langle x \rangle + \frac{\gamma_1}{m} \langle p^2 \rangle + \frac{\gamma_1}{2} \left( \frac{d}{dt} \langle xp \rangle + \gamma_0 \langle xp \rangle \right) \tag{4.76}$$

A equação (4.76) é equivalente à segunda lei de Newton. Podemos concluir que o problema inclui várias forças dissipativas, que aparecem de forma acoplada com as constantes  $\gamma_0$  e  $\gamma_1$ .

### 4.2.3 Leis de conservação

Em particular, fazendo a translação na coordenada do tempo  $x^0$ , ou seja

$$x^0 \rightarrow x^0 + \varepsilon. \tag{4.77}$$

Como a densidade Lagrangeana não depende de  $x^0$ , logo o problema (3.4) é invariante no sentido da definição (3.2.1). Então o teorema Noether (3.70) garante que existe quantidade

que se conserva, como consequência dessa invariância do problema. De (4.77) temos os geradores infinitesimais  $\xi^0 = 1$ ,  $\xi^i = 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ) e  $\eta^\nu = 0$ , onde obtemos de (4.45) e (3.70) que,

$$\left( \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi^* \nabla \psi - V \psi^* \psi + \frac{i\hbar}{2} \left( \psi^* \frac{\partial}{\partial t} \psi - \frac{\partial}{\partial t} \psi^* \psi \right) + \gamma_\mu s^\mu \right) - \frac{i\hbar}{2} \psi^* \frac{\partial}{\partial t} \psi + \frac{i\hbar}{2} \psi \frac{\partial}{\partial t} \psi^* \right) e^{-\gamma_\mu x^\mu} = \text{constante.} \quad (4.78)$$

Simplificando a expressão temos que,

$$\left( \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi^* \nabla \psi + V \psi^* \psi - \gamma_\mu s^\mu \right) e^{-\gamma_\mu x^\mu} = \text{constante} \quad (4.79)$$

onde  $s^\mu$  é solução da equação diferencial  $\partial_\mu s^\mu = \mathcal{L}$ . Então podemos concluir que a quantidade

$$\mathcal{H} = \left( \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi^* \nabla \psi + V \psi^* \psi - \gamma_\mu s^\mu \right) e^{-\gamma_\mu x^\mu} \quad (4.80)$$

se conserva através de uma translação ao longo do tempo. Chamaremos  $\mathcal{H}$  de densidade de energia. Para obter a energia total basta fazer uma integração em todo o espaço.

**Nota 7** Note que para recuperar o caso clássico basta fazer  $\gamma_\mu = 0$

$$\mathcal{H} = \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi^* \nabla \psi + V \psi^* \psi. \quad (4.81)$$

## 5 Gravitação

Neste capítulo apresentaremos o principal resultado desta dissertação. Usaremos o nosso Princípio da Mínima Ação generalizado para construir uma teoria não conservativa para a gravidade. Esta teoria depende de um quadri-vetor cosmológico. Mostraremos que, dependendo do valor desse quadri-vetor, a teoria descreve um universo com expansão acelerada sem a necessidade de introduzir a energia escura (constante cosmológica). Além disso, a teoria apresenta ondas gravitacionais amortecidas, e boas concordâncias com as estimativas experimentais e observacionais para a taxa de variação temporal da constante de gravitação  $G$ . Os resultados apresentados neste capítulo foram publicadas em (LAZO et al., 2017).

### 5.1 Equação de Einstein para sistemas não conservativos

Da mesma forma que as equações de Maxwell descrevem como o campo elétrico e magnético respondem à presença das distribuições de cargas e correntes, a equação de Einstein descreve como a métrica responde à energia e o momento. Neste capítulo apresenta-se o principal resultado deste trabalho. Estamos interessados num problema mais geral para o campo gravitacional, em que a função Lagrangeana depende linearmente da densidade da Ação, mas também depende de várias variáveis independentes. Segundo Einstein a gravidade é uma teoria puramente geométrica. Então, nesse caso lidaremos com variedades onde a métrica não é a do espaço Euclidiano e a equação generalizada de Euler-Lagrange (3.5) para campos não é aplicável.

A equação (3.5) pode ser deduzida de maneira análoga para espaços curvos, mas isso está fora do nosso objetivo, pois a dedução da equação do campo gravitacional direto da equação de Euler-Lagrange apresenta bastante dificuldade. Para contornar esse problema seguimos os livros textos (CARROLL, 2004; DIRAC, 1975; WEINBERG, 1972), onde se varia diretamente a Ação. Vamos considerar o espaço curvo com a métrica  $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x^1, x^2, \dots, x^d)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) definida no domínio  $\Omega \in \mathbb{R}^d$  ( $d = 1, 2, 3, \dots$ ). Então, o problema clássico para o campo gravitacional consiste em determinar o tensor métrico  $g_{\alpha\beta}$ , que extremiza o funcional integral

$$S(\delta\Omega) = \int_{\delta\Omega} \mathcal{L}(x^\mu, g_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta,\mu}) d^d x, \quad (5.1)$$

onde,  $g_{\alpha\beta,\mu} = \partial_\mu g_{\alpha\beta}$ ,  $\delta\Omega$  é a fronteira de  $\Omega$ , e  $g_{\alpha\beta}$  satisfazem as condições de contorno  $g_{\alpha\beta}(\delta\Omega) = g_{\alpha\beta}^{\delta\Omega}$  com  $g_{\alpha\beta}^{\delta\Omega} : \delta\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Para generalizar o problema de Herglotz na forma covariante para o campo gravitacional, notemos primeiro que, da mesma forma que na seção (3.1), para um dado fixo  $g_{\alpha\beta}$  o funcional  $S$  definido em (5.1) reduz para uma função de fronteira  $\delta\Omega$ . Vamos considerar que  $\delta\Omega$  é uma superfície orientável de Jordan com normal  $n^\mu$ . Se houver um campo vetorial diferenciável  $s^\mu$  tal que

$$S(\delta\Omega) = \int_{\delta\Omega} n_\nu s^\nu \sqrt{-h} d^{d-1}x, \quad (5.2)$$

onde  $h$  é o determinante da métrica induzida  $h_{ij}$  em  $\delta\Omega$ , então obtemos, a partir do teorema de Stokes para espaços curvo, que

$$\begin{aligned} S(\delta\Omega) &= \int_{\delta\Omega} n_\nu s^\nu \sqrt{-h} d^{d-1}x = \int_{\Omega} \nabla_\nu s^\nu \sqrt{-g} d^d x \\ &= \int_{\Omega} \mathcal{L}(x^\mu, g_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta,\mu}) \sqrt{-g} d^d x. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Consequentemente, podemos generalizar o Princípio da mínima Ação para o campo gravitacional, afirmando que a métrica do espaço-tempo  $g_{\mu\nu}$  que determina a equação do campo é a que extremiza a Ação  $S(\delta\Omega)$ , dada por

$$\begin{aligned} \partial_\nu s^\nu &= \mathcal{L}(x^\mu, g_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta,\mu}, s^\mu), \quad x^\mu = (x^1, \dots, x^d) \in \Omega \\ S(\delta\Omega) &= \int_{\delta\Omega} n_\nu s^\nu \sqrt{-h} d^{d-1}x, \quad g_{\alpha\beta}(\delta\Omega) = g_{\alpha\beta}^{\delta\Omega}, \quad g_{\alpha\beta}^{\delta\Omega} : \delta\Omega \rightarrow \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

É importante notar que o nosso Princípio da Mínima Ação (5.4) se reduz ao Princípio da Mínima Ação clássico quando o Lagrangeano é independente da densidade de Ação  $s^\mu$ .

O próximo passo é verificar quais são os possíveis invariantes para construir a densidade Lagrangeana  $\mathcal{L}$ . Do tensor de Riemann

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho{}_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho{}_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\mu\sigma}, \quad (5.5)$$

notamos as seguintes propriedades (CARROLL, 2004; WEINBERG, 1972):

- i) Simetria  $R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma}$
- ii) Anti-simetria  $R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu} = -R_{\rho\sigma\nu\mu} = R_{\sigma\rho\nu\mu}$
- iii) Cíclica  $R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\sigma\mu} + R_{\rho\sigma\mu\nu} = 0$ ,

onde  $R_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\lambda\rho} R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu}$ . Podemos contrair o tensor de Riemann  $R_{\rho\sigma\mu\nu}$  com o tensor métrico  $g^{\rho\sigma}$ , para construir o tensor de Ricci

$$R_{\sigma\nu} = g^{\rho\mu} R_{\rho\sigma\mu\nu}. \quad (5.6)$$

A propriedade de simetria *i*), garante que o tensor de Ricci também exibe a propriedade de simetria

$$R_{\sigma\nu} = R_{\nu\sigma}, \quad (5.7)$$

e a propriedade de anti-simetria *ii*) diz-nos que  $R_{\sigma\nu}$  é o único tensor de segunda ordem que pode ser construído através do tensor  $R_{\rho\sigma\mu\nu}$ . Consequentemente, multiplicando *ii*) por  $g^{\rho\mu}$ ,  $g^{\rho\sigma}$  e  $g^{\mu\nu}$  temos

$$\begin{aligned} R_{\sigma\nu} &= -g^{\rho\mu} R_{\sigma\rho\mu\nu} = -g^{\rho\mu} R_{\rho\sigma\nu\mu} = g^{\rho\mu} R_{\sigma\rho\nu\mu} \\ g^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma\mu\nu} &= g^{\mu\nu} R_{\rho\sigma\mu\nu} = 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Então, a natureza anti-simétrica do tensor  $R_{\rho\sigma\mu\nu}$  permite construir apenas um único tensor de segunda ordem. Em consequência, os únicos escalares são obtidos contraindo as expressões em (5.8), ou seja

$$\begin{aligned} R &= g^{\sigma\nu} R_{\sigma\nu} = g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} R_{\rho\sigma\mu\nu} = -g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} R_{\sigma\rho\mu\nu} \\ g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma\mu\nu} &= 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

E por fim, pela propriedade *iii*) temos

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \tilde{\epsilon}^{\rho\sigma\mu\nu} R_{\rho\sigma\mu\nu} = 0 \quad (5.10)$$

Podemos concluir que o único invariante (escalar) não nulo que pode ser construído a partir do tensor Ricci  $R_{\sigma\nu}$  é o escalar de Ricci  $R = g^{\sigma\nu} R_{\sigma\nu}$ .

Com um único invariante, a densidade Lagrangeana que propomos para o campo gravitacional é  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_g$ , onde  $\mathcal{L}_m$  é a Lagrangeana correspondente à parte da matéria e

$$\mathcal{L}_g(x^\mu, g_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta,\mu}, s^\mu) = R - \lambda_\nu s^\nu \quad (5.11)$$

$\lambda_\nu$  é um quadri-vetor constante, que será denominado de quadri-vetor constante cosmológica. Em (5.11)  $R = \tilde{L} - L$  é o escalar de Ricci, com  $\tilde{L} = g^{\mu\nu} (\Gamma_{\mu\sigma,\nu}^\sigma - \Gamma_{\mu\nu,\sigma}^\sigma)$  e  $L = g^{\mu\nu} (\Gamma_{\mu\nu}^\sigma \Gamma_{\sigma\rho}^\rho - \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\nu\rho}^\sigma)$ . Uma vez que a segunda derivada ocorre em  $\tilde{L}$  linearmente, podemos pela regra do produto, escrever

$$\tilde{L} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left( (g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma \sqrt{-g})_{,\nu} - (g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \sqrt{-g})_{,\sigma} - (g^{\mu\nu} \sqrt{-g})_{,\nu} \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma + (g^{\mu\nu} \sqrt{-g})_{,\sigma} \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \right), \quad (5.12)$$

onde o operador  $(\cdot)_{,\sigma} = \frac{\partial}{\partial x^\sigma}$  e  $\sqrt{-g} = \sqrt{-\det g}$ , onde  $g$  é o determinante do tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ . Os dois primeiros termos são derivadas totais, então não têm contribuição para a



equação do campo gravitacional (DIRAC, 1975). Sobrando apenas os dois últimos termos, que com o auxílio da derivação covariante podem ser escritos na forma equivalente à  $2L$ . Conseqüentemente, a equação do campo gravitacional pode ser obtida apenas levando em conta termos efetivos na densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L}(x^\mu, g_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta,\mu}, s^\mu) = \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_{ef}, \quad (5.13)$$

com

$$\mathcal{L}_{ef} = L - \lambda_\nu s^\nu \quad (5.14)$$

pois  $\int_\Omega \tilde{L} \sqrt{d^d x} = 2 \int_\Omega L \sqrt{d^d x} + \text{constante}$ .

Para obter as equações de campo generalizadas, vamos definir uma família da métrica  $g_{\alpha\beta}$  tal que

$$g_{\alpha\beta}(x^\mu) = g_{\alpha\beta}^*(x^\mu) + \delta_\epsilon(g_{\alpha\beta})(x^\mu), \quad (5.15)$$

onde  $g_{\alpha\beta}^*$  é a métrica que extremiza  $S(\delta\Omega)$  em (5.4),  $\epsilon \in \mathbb{R}$ , e  $\delta_\epsilon(g_{\alpha\beta})$  satisfazendo as condições de fronteira  $\delta_\epsilon(g_{\alpha\beta})(\delta\Omega) = 0$  e  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(g_{\alpha\beta})(x^\mu) = 0$  (variação fraca). Como  $S(\delta\Omega)$  atinge um extremo em  $g_{\alpha\beta}^*$ , temos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\delta_\epsilon(S)(\delta\Omega)}{\epsilon} = 0. \quad (5.16)$$

De (5.2) temos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\delta_\epsilon(S)(\delta\Omega)}{\epsilon} = \int_{\delta\Omega} n_\nu \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\delta_\epsilon(s^\nu)}{\epsilon} \sqrt{-h} d^{d-1}x = 0, \quad (5.17)$$

já que a superfície  $\delta\Omega$  é independente de  $\epsilon$ , e conseqüentemente  $\sqrt{-h}$  também. Uma condição suficiente para satisfazer (5.17) para o contorno  $\delta\Omega$  arbitrário, é que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\delta_\epsilon(s^\nu)(\delta\Omega)}{\epsilon} = 0. \quad (5.18)$$

Por outro lado, ao integrar sobre  $\Omega$  ambos os lados da equação diferencial em (5.4) obtemos

$$S(\delta\Omega) = \int_\Omega \mathcal{L}(x^\mu, g_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta,\mu}, s^\mu) \sqrt{d^d x}, \quad (5.19)$$

e tomando a variação de (5.19) com (5.13) obtemos

$$\delta_\epsilon(S) = \int_\Omega \delta_\epsilon(\mathcal{L}(x^\mu, g_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta,\mu}, s^\mu) \sqrt{d^d x}) = \int_\Omega [\delta_\epsilon(L\sqrt{d^d x}) + \delta_\epsilon(\mathcal{L}_m \sqrt{d^d x}) - \lambda_\nu \delta_\epsilon(s^\nu \sqrt{d^d x})] d^d x. \quad (5.20)$$

Ainda temos que de (5.3), usando a relação entre a derivada usual e a covariante  $\nabla_\nu(\cdot)\sqrt{g} = \partial_\nu(\cdot)\sqrt{g}$ ,

$$\delta_\epsilon(S) = \delta_\epsilon \int_\Omega \nabla_\nu s^\nu \sqrt{g} d^d x = \int_\Omega \partial_\nu \delta_\epsilon(s^\nu \sqrt{g}) d^d x. \quad (5.21)$$

De (5.20) e (5.21) temos que

$$\int_\Omega [\partial_\nu \delta_\epsilon(s^\nu \sqrt{g}) - \delta_\epsilon((L + \mathcal{L}_m)\sqrt{g}) + \lambda_\nu \delta_\epsilon(s^\nu \sqrt{g})] d^d x = 0. \quad (5.22)$$

Como (5.22) satisfaz para qualquer domínio  $\Omega$ , temos

$$\partial_\nu \zeta^\nu = \delta_\epsilon(L\sqrt{g}) + \delta_\epsilon(\mathcal{L}_m\sqrt{g}) - \lambda_\nu \zeta^\nu, \quad (5.23)$$

com  $\zeta^\nu = \delta_\epsilon(s^\nu \sqrt{g})$ . Devido ao fato de que  $\lambda_\nu$  é um quadri-vetor constante, a solução da equação (5.23) pode ser escrita como

$$\zeta^\nu(\epsilon) = A^\nu(x^\mu, g_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta,\mu}, s^\mu) e^{\lambda_\gamma x^\gamma}, \quad (5.24)$$

onde

$$\partial_\nu A^\nu = (\delta_\epsilon(L\sqrt{g}) + \delta_\epsilon(\mathcal{L}_m\sqrt{g})) e^{-\lambda_\gamma x^\gamma}. \quad (5.25)$$

Da condição (5.18) nós temos, para todo  $x^\mu \in \delta\Omega$ ,

$$\zeta^\nu(0) = A^\nu|_{\epsilon=0} e^{\lambda_\gamma x^\gamma} = 0, \quad (5.26)$$

desde que  $\delta_\epsilon(g_{\mu\nu})(\delta\Omega) = 0$ , para todo  $x^\mu \in \delta\Omega$ . Como consequência,  $A^\nu$  é identicamente nula sobre  $\delta\Omega$ . Neste caso, obtemos do Teorema de Stokes

$$\int_{\delta\Omega} n_\nu \frac{A^\nu}{\sqrt{g}} \sqrt{-h} d^{d-1}x = \int_\Omega \partial_\nu A^\nu d^d x = 0. \quad (5.27)$$

Calculamos os termos da Lagrangeana referente à parte da geometria que contribuem para a equação do campo,  $\delta_\epsilon(L\sqrt{g})$ :

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon \left( \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta g^{\mu\nu} \sqrt{g} \right) &= \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \delta_\epsilon \left( \Gamma_{\alpha\beta}^\beta g^{\mu\nu} \sqrt{g} \right) + \delta_\epsilon \left( \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \right) \Gamma_{\alpha\beta}^\beta g^{\mu\nu} \sqrt{g} \\ &= \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \delta_\epsilon \left( g^{\mu\nu} \sqrt{g} \right)_{,\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^\beta \left[ \delta_\epsilon \left( \Gamma_{\mu\nu}^\alpha g^{\mu\nu} \sqrt{g} \right) - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \delta_\epsilon \left( g^{\mu\nu} \sqrt{g} \right) \right] \\ &= \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \delta_\epsilon \left( g^{\mu\nu} \sqrt{g} \right)_{,\alpha} - \Gamma_{\alpha\beta}^\beta \delta_\epsilon \left( g^{\alpha\nu} \sqrt{g} \right)_{,\nu} - \Gamma_{\alpha\beta}^\beta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \delta_\epsilon \left( g^{\mu\nu} \sqrt{g} \right), \end{aligned} \quad (5.28)$$

onde foi usado o produto das derivadas e as igualdades

$$\begin{aligned} \Gamma_{\nu\mu}^\mu \sqrt{g} &= \sqrt{g} \text{,}_{,\nu} \\ \left( g^{\mu\nu} \sqrt{g} \right)_{,\nu} &= -g^{\nu\beta} \Gamma_{\beta\nu}^\mu \sqrt{g}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Da mesma maneira temos que

$$\begin{aligned}
\delta_\epsilon (\Gamma_{\mu\alpha}^\beta \Gamma_{\nu\beta}^\alpha g^{\mu\nu} \sqrt{\phantom{x}}) &= \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \delta_\epsilon (\Gamma_{\nu\beta}^\alpha g^{\mu\nu} \sqrt{\phantom{x}}) + \delta_\epsilon (\Gamma_{\mu\alpha}^\beta) \Gamma_{\nu\beta}^\alpha g^{\mu\nu} \sqrt{\phantom{x}} \\
&= \Gamma_{\mu\alpha}^\beta [\delta_\epsilon (\Gamma_{\nu\beta}^\alpha) g^{\mu\nu} \sqrt{\phantom{x}} + \Gamma_{\nu\beta}^\alpha \delta_\epsilon (g^{\mu\nu} \sqrt{\phantom{x}})] + \delta_\epsilon (\Gamma_{\mu\alpha}^\beta) \Gamma_{\nu\beta}^\alpha g^{\mu\nu} \sqrt{\phantom{x}} \\
&= 2\delta_\epsilon (\Gamma_{\mu\alpha}^\beta) \Gamma_{\nu\beta}^\alpha g^{\mu\nu} \sqrt{\phantom{x}} + \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \Gamma_{\nu\beta}^\alpha \delta_\epsilon (g^{\mu\nu} \sqrt{\phantom{x}}) \\
&= 2\delta_\epsilon (\Gamma_{\nu\beta}^\alpha g^{\mu\nu} \sqrt{\phantom{x}}) \Gamma_{\mu\alpha}^\beta - \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \Gamma_{\nu\beta}^\alpha \delta_\epsilon (g^{\mu\nu} \sqrt{\phantom{x}}) \\
&= -\delta_\epsilon (g^{\mu\alpha}{}_{,\beta} \sqrt{\phantom{x}}) \Gamma_{\mu\alpha}^\beta - \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \Gamma_{\nu\beta}^\alpha \delta_\epsilon (g^{\mu\nu} \sqrt{\phantom{x}}),
\end{aligned} \tag{5.30}$$

tendo em mente que

$$g^{\mu\nu}{}_{,\sigma} = - (g^{\nu\beta} \Gamma_{\sigma\beta}^\mu + g^{\mu\beta} \Gamma_{\sigma\beta}^\nu). \tag{5.31}$$

Podemos escrever que

$$\delta_\epsilon (L\sqrt{\phantom{x}}) = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \delta_\epsilon (g^{\mu\nu} \sqrt{\phantom{x}})_{,\alpha} - \Gamma_{\alpha\beta}^\beta \delta_\epsilon (g^{\alpha\nu} \sqrt{\phantom{x}})_{,\nu} + (\Gamma_{\mu\alpha}^\beta \Gamma_{\nu\beta}^\alpha - \Gamma_{\alpha\beta}^\beta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha) \delta_\epsilon (g^{\mu\nu} \sqrt{\phantom{x}}) \tag{5.32}$$

Então

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \delta_\epsilon (L\sqrt{\phantom{x}} + \mathcal{L}_m \sqrt{\phantom{x}}) e^{-\lambda_\gamma x^\gamma} d^d x \\
&= \int_{\Omega} [\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \delta_\epsilon (g^{\mu\nu} \sqrt{\phantom{x}})_{,\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha \delta_\epsilon (g^{\mu\nu} \sqrt{\phantom{x}})_{,\nu} + (\Gamma_{\mu\alpha}^\beta \Gamma_{\nu\beta}^\alpha - \Gamma_{\alpha\beta}^\beta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha) \delta_\epsilon (g^{\mu\nu} \sqrt{\phantom{x}}) \\
&\quad + 8\pi G T_{\mu\nu} \delta_\epsilon (g^{\mu\nu} \sqrt{\phantom{x}})] e^{-\lambda_\gamma x^\gamma} d^d x.
\end{aligned} \tag{5.33}$$

Depois da integração por partes, e dado que  $\delta_\epsilon (g^{\mu\nu} \sqrt{\phantom{x}}) = \delta_\epsilon (g^{\mu\nu}) \sqrt{\phantom{x}} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\alpha\beta} \delta_\epsilon (g^{\alpha\beta}) \sqrt{\phantom{x}}$ , nós temos

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \delta_\epsilon (L\sqrt{\phantom{x}} + \mathcal{L}_m \sqrt{\phantom{x}}) e^{-\lambda_\gamma x^\gamma} d^d x \\
&= - \int_{\Omega} \delta_\epsilon (g^{\mu\nu}) \sqrt{\phantom{x}} \left[ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \Lambda - 8\pi G T_{\mu\nu} \right] e^{-\lambda_\gamma x^\gamma} d^d x \\
&\quad + \int_{\Omega} \left[ (\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \delta_\epsilon (g^{\mu\nu} \sqrt{\phantom{x}}) - \Gamma_{\mu\nu}^\nu \delta_\epsilon (g^{\mu\alpha} \sqrt{\phantom{x}})) e^{-\lambda_\gamma x^\gamma} \right]_{,\alpha} d^d x = 0,
\end{aligned} \tag{5.34}$$

onde definimos o tensor simétrico  $\Lambda_{\mu\nu} = \lambda_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \frac{1}{2} (\lambda_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha + \lambda_\mu \Gamma_{\nu\alpha}^\alpha)$ , e  $\delta_\epsilon (\mathcal{L}_m \sqrt{\phantom{x}}) = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \delta_\epsilon (g^{\mu\nu}) \sqrt{\phantom{x}}$  onde  $T_{\mu\nu}$   o tensor energia-momento. A última integral em (5.33)  nula, desde que  $\delta_\epsilon (g_{\mu\nu}) (\delta\Omega) = 0$ . Assim, a partir do lema fundamental do cálculo variacional obtemos de (5.33) a equação do campo gravitacional generalizado:

$$R_{\mu\nu} + \Lambda_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R + \Lambda) = 8\pi G T_{\mu\nu}. \tag{5.35}$$

**Nota 8** A última passagem que foi feita no integral (5.33), onde aparece a expressão  $\Lambda_{\mu\nu} = \lambda_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \frac{1}{2} (\lambda_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha + \lambda_\mu \Gamma_{\nu\alpha}^\alpha)$ , consistiu na simetrização da expressão  $\Lambda_{\mu\nu} = \lambda_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \lambda_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha$  para que a equação (5.35) seja simétrica. Repare que temos a liberdade de simetrizar  $\Lambda_{\mu\nu}$ , pois ela está contraída com a variação do tensor métrico  $\delta_\epsilon(g^{\mu\nu})$ .

É importante observar que se o quadri-vetor cosmológico  $\lambda_\mu$  for nulo, teremos  $\Lambda_{\mu\nu} = 0$  e  $\Lambda = 0$ , reduzindo nossa equação de campo (5.35) à equação de Einstein.

Uma outra forma de escrever a equação (5.35), onde as vezes torna-se muito mais fácil a resolução do problema, é fazendo a contração com o tensor métrico  $g^{\mu\nu}$ , obtendo

$$R + \Lambda = -8\pi GT, \quad (5.36)$$

e substituindo em (5.35) temos

$$R_{\mu\nu} + \Lambda_{\mu\nu} = 8\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right). \quad (5.37)$$

## 5.2 Limite para campos fraco

A fim de melhor compreender as implicações da Equação generalizada de Einstein, o melhor que podemos fazer, e o mais simples, é trabalhar no limite do campo fraco, onde podemos facilmente fazer conexões em relação com a gravidade newtoniana. Se o campo em uma determinada região do espaço-tempo é "fraco", então o espaço-tempo é apenas ligeiramente curvo, e em toda essa região, devemos ser capazes descrevê-la por uma métrica tal que (CARROLL, 2004; DIRAC, 1975; WEINBERG, 1972)

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \quad (5.38)$$

onde  $\eta_{\mu\nu}$  é a métrica do espaço de Minkowsky. Usando (5.38) é fácil mostrar que o simbolo de Christoffel é dada por

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\rho} [h_{\rho\nu,\mu} + h_{\rho\mu,\nu} - h_{\mu\nu,\rho}] + O(h^2), \quad (5.39)$$

que em consequência tem-se que

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = \frac{1}{2} (h_{\rho\nu,\sigma\mu} + h_{\sigma\mu,\rho\nu} - h_{\rho\mu,\sigma\nu} - h_{\sigma\nu,\rho\mu}) \quad (5.40)$$

$$\Lambda_{\mu\nu} = \frac{\lambda_\alpha}{2} \eta^{\rho\alpha} (h_{\rho\nu,\mu} + h_{\rho\mu,\nu} - h_{\mu\nu,\rho}) - \frac{\lambda_\nu}{4} h_{\alpha,\mu}^\alpha - \frac{\lambda_\mu}{4} h_{\alpha,\nu}^\alpha. \quad (5.41)$$

Contraindo o tensor de Riemann temos o tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\rho\sigma} (-h_{\mu\nu,\rho\sigma} + h_{\rho\nu,\mu\sigma} + h_{\rho\mu,\sigma\nu} - h_{\rho\sigma,\nu\mu}), \quad (5.42)$$

substituindo essas quantidades em (5.37)

$$\frac{1}{2}(-\eta^{\rho\sigma}h_{\mu\nu,\rho\sigma} + H_{\nu,\mu} + H_{\mu,\nu}) - \frac{1}{2}\lambda^\rho h_{\mu\nu,\rho} = 8\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right) \quad (5.43)$$

$H_\nu = \eta^{\rho\sigma} (h_{\rho\nu,\sigma} - \frac{1}{2}h_{\rho\sigma,\nu} + \lambda_\rho h_{\sigma\nu} - \frac{1}{2}\lambda_\nu h_{\sigma\rho})$ . Da mesma forma que as equações de Maxwell não são suficientes para fixar os potenciais escalar e vetor, a equação de Einstein também não fixa a métrica. Essa ambiguidade nos dá a liberdade de fazer imposições adicionais, de modo que a equação torna-se mais fácil possível. Essa escolha no electromagnetismo é conhecida como escolha de Gauge (JACKSON, 1999). A melhor escolha que podemos fazer é a generalização do Gauge harmônico

$$H_\nu = \eta^{\rho\sigma} \left( h_{\rho\nu,\sigma} - \frac{1}{2}h_{\rho\sigma,\nu} + \lambda_\rho h_{\sigma\nu} - \frac{1}{2}\lambda_\nu h_{\sigma\rho} \right) = 0. \quad (5.44)$$

Feita essa escolha, a equação (5.43) reduz-se a

$$\square^2 h_{\mu\nu} + \lambda^\rho h_{\mu\nu,\rho} = -16\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right), \quad (5.45)$$

onde  $\square^2 = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  é o operador D'alembertiano. No nosso caso temos interesse em explorar a equação (5.45), quando  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$$\square^2 h_{\mu\nu} - \lambda_0 h_{\mu\nu,0} = -16\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T \right). \quad (5.46)$$

### 5.2.1 Ondas gravitacionais amortecidas

As ondas gravitacionais são ondulações na curvatura do tecido espaço-tempo, que transportam informações sobre as mudanças no campo gravitacional de um objeto, através do espaço vazio. Agora que temos em mão a equação generalizada do campo gravitacional (5.45) podemos explorar as ondas gravitacionais no limite do campo fraco, e analisá-las no vácuo. A equação generalizada de Einstein (5.35) descreve campos não conservativos, mas até o momento não foi mencionado a descrição desse processo não conservativo. Uma consequência notável desta não conservação é considerar que o tecido espaço-tempo se comporta de forma semelhante à uma folha de borracha não perfeitamente flexível.

Como estamos considerando o tecido espaço-tempo comportando semelhante a uma folha de borracha não perfeitamente flexível, é de se esperar que as ondas gravitacionais amortçam. Para ilustrar esse efeito de amortecimento (devido à não conservação no lado geométrico da equação de campo (5.35) quando  $\lambda_\mu \neq 0$ ), é interessante investigar o comportamento das ondas gravitacionais. Suponhamos que a métrica esteja próxima da métrica de Minkowski, isto é,  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$  com  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ . Para a primeira ordem em  $h$ , e trabalhando em um sistema de coordenadas harmônicas temos a equação do campo

$$\square^2 h_{\mu\nu} + \lambda^\rho h_{\mu\nu,\rho} = -16\pi G S_{\mu\nu}, \quad (5.47)$$

onde  $S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T$ . Para investigar as ondas gravitacionais, vamos considerar a equação homogênea no caso em que  $S_{\mu\nu} = 0$  (que representa o vácuo).

$$\square^2 h_{\mu\nu} + \lambda^\rho h_{\mu\nu,\rho} = 0 \quad (5.48)$$

$h_{\mu\nu}$  tem 10 componentes independentes e (5.44) equivale a quatro condições, portanto permanecem seis componentes independentes. Estes, no entanto, nem todos têm significado físico, então é conveniente usar condições adicionais seguintes, para a solução do problema desejado (CARROLL, 2004; SCHUTZ, 2009):

$$\begin{aligned} h_{0\nu} &= 0 \\ \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} &= 0 \end{aligned} \quad (5.49)$$

As condições (5.49) permitem escrever o Gauge modificado (5.44) de uma maneira mais simples

$$h^{\mu\nu}{}_{,\mu} + \lambda_\mu h^{\mu\nu} = 0. \quad (5.50)$$

Uma solução particular para a equação de onda amortecida (5.48), é dada por

$$h_{\mu\nu} = C_{\mu\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma}, \quad (5.51)$$

onde  $C_{\mu\nu}$  é um tensor constante (complexo<sup>1</sup>) simétrico de segunda ordem,  $k_\sigma$  é um quadri-vetor constante complexo. O tensor  $C_{\mu\nu}$  tem as propriedades:

$$\begin{aligned} C_{0\nu} &= 0 \\ \eta^{\mu\nu} C_{\mu\nu} &= 0, \end{aligned} \quad (5.52)$$

---

<sup>1</sup> No final será tomado a parte real ou imaginária, qualquer um terá mesma interpretação física

usando as duas condições em (5.49). Da equação (5.48) temos

$$\begin{aligned}\square^2 h_{\mu\nu} + \lambda^\rho h_{\mu\nu,\rho} &= 0 \\ \eta^{\rho\sigma} (ik_\sigma h_{\mu\nu,\rho} + ik_\sigma \lambda^\sigma h_{\mu\nu}) &= 0 \\ (-k_\sigma k^\sigma + ik_\sigma \lambda^\sigma) h_{\mu\nu} &= 0\end{aligned}\tag{5.53}$$

A equação acima tem duas soluções possíveis, mas o que nos interessa é  $h_{\mu\nu} \neq 0$  e

$$-k_\sigma k^\sigma + ik_\sigma \lambda^\sigma = 0.\tag{5.54}$$

Então  $h_{\mu\nu}$  é solução da equação de onda amortecida (5.46) se (5.54) for verdade. Escolhendo a direção da propagação da onda no eixo  $x^3 = z$ , ou seja  $k^\mu = (\omega, 0, 0, k^3)$  e  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ , temos que

$$k_3^2 + i\lambda_0\omega - \omega^2 = 0.\tag{5.55}$$

Supondo que  $k_3$  é real e  $\omega$  é complexo, cuja parte real é  $\alpha$  e a parte imaginária  $\beta$ , então a equação (5.55) equivale a um sistema de duas equações

$$\begin{aligned}\alpha^2 - \beta^2 + \lambda_0\beta - k_3^2 &= 0 \\ 2\alpha\beta + \lambda_0\alpha &= 0.\end{aligned}\tag{5.56}$$

Juntando a primeira equação com a segunda temos a solução

$$\begin{aligned}k_3 &= \pm\alpha \left(1 - 3\left(\frac{\lambda_0}{2\alpha}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ \beta &= -\frac{\lambda_0}{2},\end{aligned}\tag{5.57}$$

onde  $\alpha$  é a frequência da onda.

Voltando a condição de Gauge modificado (5.50) temos

$$\begin{aligned}h^{\mu\nu}{}_{,\mu} + \lambda_\mu h^{\mu\nu} &= 0 \\ (ik_\mu + \lambda_\mu) C^{\mu\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma} &= 0,\end{aligned}\tag{5.58}$$

que é verdade se

$$(ik_\mu + \lambda_\mu) C^{\mu\nu} = 0.\tag{5.59}$$

Juntando as condições  $(ik_\mu + \lambda_\mu) C^{\mu\nu} = 0$ ,  $C_{0\nu} = 0$ , e que a onda se propaga na direção  $z$ , implica que

$$C_{3\nu} = 0.\tag{5.60}$$

Logo as únicas componentes não nulas de  $C_{\mu\nu}$  são:  $C_{11}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{21}$ , e  $C_{22}$ . Da propriedade de simetria de  $h_{\mu\nu}$  e do traço  $\eta^{\mu\nu}C_{\mu\nu} = 0$ , o tensor  $C_{\mu\nu}$  fica completamente determinado por

$$C_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{11} & C_{12} & 0 \\ 0 & C_{12} & -C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.61)$$

Assim, para uma onda plana viajando na direção  $z$  com a escolha de Gauge feita, as duas componentes  $C_{11}$  e  $C_{12}$  caracterizam completamente a onda. Então a solução física para as ondas gravitacionais é

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu} &= C_{\mu\nu} e^{-\frac{\lambda_0}{2}ct} \sin(k_\sigma x^\sigma) \\ &= C_{\mu\nu} e^{-\frac{\lambda_0}{2}ct} \sin(k_3 z - c\alpha t). \end{aligned} \quad (5.62)$$

Foi escolhida apenas a parte imaginária da função de onda  $h_{\mu\nu}$ , pois a parte real tem a mesma interpretação física. Logo, o elemento de linha para uma região do espaço-tempo onde existem ondas gravitacionais amortecida é dada por

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu \\ &= -dt^2 + (\eta_{11} + h_{11}) dx^2 + 2h_{12} dx dy + (\eta_{22} - h_{11}) dy^2 + dz^2. \end{aligned} \quad (5.63)$$

A exponencial em (5.62) indica um amortecimento na amplitude da onda ao longo do tempo, quanto maior for o valor de  $\lambda_0$  ( $\lambda_0 > 0$ ) maior será o amortecimento. Então podemos concluir que a constante  $\lambda_0$  pode ser interpretada como um medidor da flexibilidade do tecido espaço-tempo.

Da solução (5.62) observa-se seguintes aspectos: Para  $\lambda_0 > 0$  temos uma onda cuja amplitude ( $C_{\mu\nu} e^{-\frac{\lambda_0}{2}ct}$ ) amortece com o tempo, para  $\lambda_0 = 0$  recupera-se as ondas gravitacionais clássicas, e para  $\lambda_0 < 0$  temos um aumento exponencial na amplitude ( $C_{\mu\nu} e^{-\frac{\lambda_0}{2}ct}$ ) da onda ao longo tempo. É conveniente escolhermos  $\lambda_0 > 0$  para ter o efeito desejado (amortecimento). O efeito que se observa é que a função de onda acima tem amplitude que decai com o tempo, e com o efeito do amortecimento das ondas temos a queda na velocidade  $v = \frac{c\alpha}{k_3}$ , concluindo que as ondas não se propagam no tecido espaço-tempo com a velocidade da luz, mas sim com  $v < c$ , e  $v = c$  quando  $\lambda_0 = 0$ . Assim o amortecimento das ondas e a sua velocidade são consistentes com um tecido espaço-tempo comportando de forma semelhante a uma folha de borracha não perfeitamente flexível. Além disso, a relação de dispersão  $|k_3| = \alpha \left(1 - 3 \left(\frac{\lambda_0}{2\alpha}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$  relacionando as frequências de



tempo e espaço nos dá um teste experimental para a existência do quadri-vetor constante cosmológico  $\lambda_\mu$ .

Para entender os efeitos reais das ondas gravitacionais amortecidas, usemos o tensor métrico para determinar a distância entre as partículas. Consideremos um conjunto de partículas no plano  $xy$  (antes da onda passar perto) que estão configuradas sobre uma circunferência de raio  $r$ . Agora imaginemos uma onda gravitacional que se encontra verticalmente polarizada ( $h_{12} = 0$ ) move-se na direção  $+z$  através desta circunferência. A posição de qualquer partícula que se localiza inicialmente em cima da circunferência é:  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$  (T.A., 2010; RYDER, 2009). Então, a distância entre pontos do círculo que está situado no meio onde existem ondas gravitacionais é obtida por

$$ds^2 = -dt^2 + (1 + h_{11}) dx^2 + (1 - h_{11}) dy^2 + dz^2. \quad (5.64)$$

Como as partículas se encontram no plano  $xy$ , logo  $dt = dz = z = 0$ , onde podemos escrever

$$ds^2 = (1 + h_{11}) dx^2 + (1 - h_{11}) dy^2. \quad (5.65)$$

Para partículas que possuem o mesmo valor de coordenada  $y$ , a distância entre elas é representada pelo elemento de linha

$$\begin{aligned} ds^2 &= (1 + h_{11}) dx^2 \\ &= r^2 (1 + h_{11}) \sin^2 \theta d\theta^2, \end{aligned} \quad (5.66)$$

como partículas que têm mesmo valor de  $y$  e  $x$  diferente se encontram defasados com ângulos  $\theta$  ( $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) e  $\pi - \theta$ , então elas se distanciam

$$s = 2r (1 + h_{11})^{\frac{1}{2}} \cos \theta. \quad (5.67)$$

A componente  $h_{11}$  depende de uma função senoidal, então ela é limitada, ou seja

$$-C_{11} e^{-\frac{\lambda_0}{2} ct} \leq h_{11} \leq C_{11} e^{-\frac{\lambda_0}{2} ct}, \quad (5.68)$$

portanto as partículas com mesmo valor de  $y$  se afastam inicialmente (com  $C_{11} > 0$ ) com uma distância máxima, oscilando e amortecendo com o tempo, enquanto que as partículas com mesmo valor de  $x$  estão separadas por

$$\begin{aligned} ds^2 &= (1 - h_{11}) dy^2 \\ &= r^2 (1 - h_{11}) \cos^2 \theta d\theta^2 \end{aligned} \quad (5.69)$$

Partículas com mesmo valor de  $x$  e  $y$  diferentes possuem ângulo  $0 < \theta < \pi$  simétricos, a distância entre elas calcula-se facilmente

$$s = 2r(1 - h_{11})^{\frac{1}{2}} \sin \theta. \quad (5.70)$$

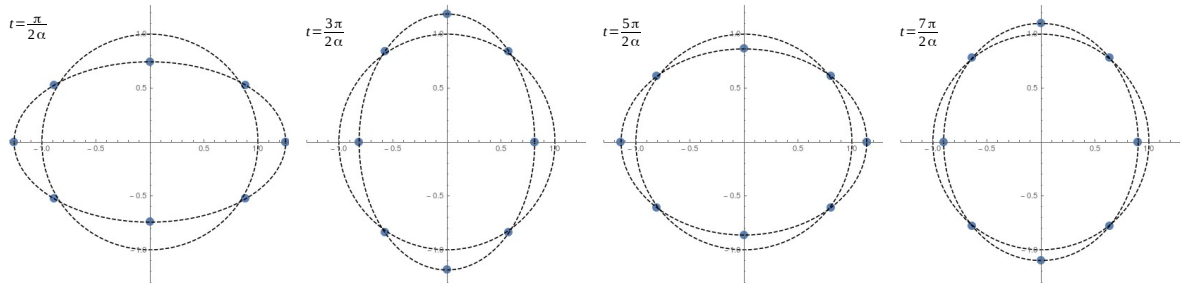


Figura 2 – Distorções do círculo produzidas por uma onda amortecida com a polarização '+'.  
'+'.

Essas partículas aproximam-se inicialmente (com  $C_{11} > 0$ ) por uma distância mínima, oscilando e amortecendo com o tempo. As partículas em pontos intermediários do círculo se moverão de forma intermediária, de modo que o círculo definido pelas partículas será comprimida como mostrado na primeira parte da figura 2. De (5.68) conclui-se que, depois de um curto período de tempo  $h_{11}$  retorna a zero e o círculo é restaurado, em seguida  $h_{11}$  assumirá um valor negativo e o círculo é alongado, voltando mais tarde a uma forma circular, mas essa oscilação cai com o tempo. Devido ao amortecimento das ondas o círculo entra numa fase em que existe restauração definitiva. Assim, a configuração das partículas oscila como se mostra na figura 2. Este é claramente um movimento transversal, e a onda (representada por  $h_{11}$ ) é dito ter uma polarização +.

Agora consideremos uma onda com  $h_{11} = 0$ , uma onda caracterizada por  $h_{12}$ . Então o elemento de linha é dada por

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + 2h_{12}dxdy. \quad (5.71)$$

Para ver qual é efeito desse tipo onda causa sobre o círculo é mais fácil e conveniente fazer uma rotação de  $45^\circ$  sobre os eixos. Sabemos que a matriz de rotação no plano  $xy$ , com o ângulo de rotação  $\phi$  (sentido anti-horário) é representada por

$$R(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}. \quad (5.72)$$

Depois da rotação os eixos passam a ter as coordenadas relacionadas pelo produto matricial

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = R(45) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (5.73)$$

ou em termos não matricial

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x \cos 45 + y \sin 45 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \\ \bar{y} &= -x \sin 45 + y \cos 45 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x + y). \end{aligned} \quad (5.74)$$

Então  $dx^2 + dy^2 = d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2$ ,  $2dxdy = d\bar{x}^2 - d\bar{y}^2$ , logo o elemento de linha (5.71) pode ser escrito

$$ds^2 = (1 + h_{12}) d\bar{x}^2 + (1 - h_{12}) d\bar{y}^2, \quad (5.75)$$

que tem a mesma forma que elemento de linha em (5.65). Logo, a polarização  $h_{11} = 0$  representa o mesmo tipo oscilação que a polarização  $+$ , mas só que com eixos sofrendo uma rotação de  $45^\circ$ , conforme mostra a figura 3. Este tipo de polarização é conhecida como polarização  $\times$ .

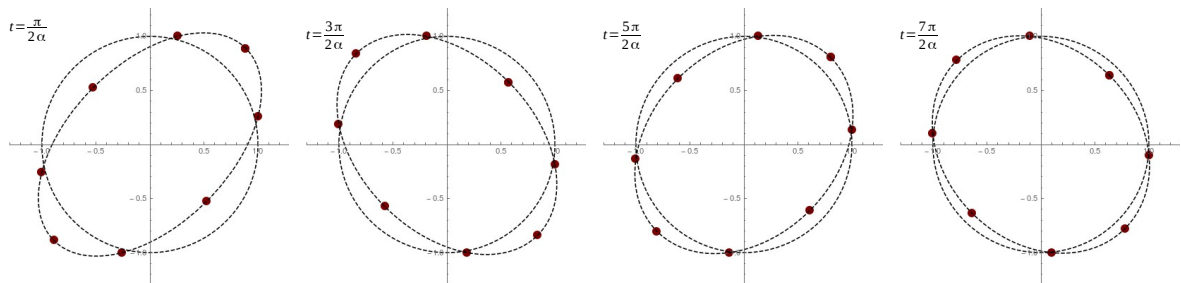


Figura 3 – Distorções do círculo produzidas por uma onda amortecida com a polarização  $\times$ .

## 5.2.2 Gravitação Newtoniana não conservativa

A gravidade newtoniana é conhecida por ser válida quando os campos gravitacionais são muito fracos para produzirem velocidades próximas da velocidade da luz (não relativísticas):  $|\phi| \ll c^2$ ,  $|v| \ll c$ , onde  $\phi$  é o potencial gravitacional Newtoniana. Afim de obter a gravitação Newtoniana, consideremos o caso de um campo fraco e estático (como uma boa aproximação, o do Sol), e uma partícula que se move lentamente nela ( $|v| \ll c$ ),

com  $x^0 = ct$ ,  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$ ,  $x^3 = z$ . Um campo fraco é aquele para o qual o tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  pode ser dado por

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (5.76)$$

onde  $\eta_{\mu\nu}$  é a métrica do espaço de Minkowski e  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ . Vimos que, quando o campo gravitacional é fraco, a equação (5.37) para  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$  reduz-se a

$$\square^2 h_{\mu\nu} - \frac{\lambda_0}{c} h_{\mu\nu,0} = -\frac{16\pi G}{c^4} \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} T \right) = -\frac{16\pi G}{c^4} S_{\mu\nu}. \quad (5.77)$$

A definição do tensor  $T_{\mu\nu}$  para matéria constituída por partículas não interagentes é (CARROLL, 2004; RYDER, 2009)

$$T^{\mu\nu}(x) = \rho(x) U^\mu(x) U^\nu(x), \quad (5.78)$$

onde  $\rho(x)$  é a densidade de energia no referencial em repouso e  $U^\mu(x)$  o quadri-vetor velocidade das partículas individuais

$$U^\mu(x) = \frac{dx^\mu}{d\tau}. \quad (5.79)$$

Temos que

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -c^2 dt^2 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right), \quad (5.80)$$

então

$$\frac{d\tau}{dt} = \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\gamma}, \quad (5.81)$$

com  $\gamma$  conhecido como fator de Lorentz. Logo

$$T^{00} = \rho c^2 \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 = \rho c^2 \gamma^2. \quad (5.82)$$

A interpretação do fator  $\gamma$  é fácil de entender: na Relatividade Especial, a massa (estritamente massa-energia) do material em movimento aumenta ao longo do seu valor de repouso por um fator  $\gamma$ , e o volume diminui pelo mesmo fator. Assim,  $T^{00}$  é a densidade de energia relativística da matéria. De maneira análoga

$$T^{0i} = \rho(x) U^0(x) U^i(x) = \rho \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^i}{d\tau} = \gamma^2 \rho v^i, \quad (5.83)$$

onde  $v^i = \frac{dx^i}{dt}$  e, por fim,

$$T^{ij} = \rho(x) U^i(x) U^j(x) = \rho \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} = \gamma^2 \rho v^i v^j. \quad (5.84)$$

Juntando essas componentes podemos escrever o tensor energia-momento

$$T^{\mu\nu} = \gamma^2 \rho \begin{pmatrix} c^2 & v_x & v_y & v_z \\ v_x & v_x^2 & v_x v_y & v_x v_z \\ v_y & v_x v_y & v_y^2 & v_y v_z \\ v_z & v_x v_z & v_y v_z & v_z^2 \end{pmatrix}, \quad (5.85)$$

Para aproximações não relativísticas o termo dominante na equação (5.37) é  $\frac{1}{c^4} S_{00} \approx \frac{1}{2c^2} \rho$ . Logo, para campos fracos e estáticos (a métrica não depende do tempo) a equação (5.37) equivale a

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{00} + \nabla^2 h_{00} - \frac{\lambda_0}{c} \frac{\partial}{\partial t} h_{00} = \nabla^2 h_{00} = -\frac{8\pi G}{c^2} \rho(x, y, z). \quad (5.86)$$

Escolhendo  $h_{00} = -\frac{2}{c^2} \phi$  obtém-se a equação de Poisson para a gravitação Newtoniana

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho(x, y, z) \quad (5.87)$$

Concluimos que a nossa proposta não se difere da gravidade clássica no regime do campo fraco. Mesmo com a presença da constante  $\lambda_0$ , o limite para campos fracos e estáticos continua apresentando a mesma equação do movimento. Para que houvesse efeitos teríamos que considerar as componentes da parte espacial do quadri-vetor cosmológico  $\lambda_\mu$  não nulos. Com efeito

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{00} + \nabla^2 h_{00} - \frac{\lambda_0}{c} \frac{\partial}{\partial t} h_{00} + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x} h_{00} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial y} h_{00} + \lambda_3 \frac{\partial}{\partial z} h_{00} \\ & = \nabla^2 h_{00} + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x} h_{00} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial y} h_{00} + \lambda_3 \frac{\partial}{\partial z} h_{00} = -\frac{8\pi G}{c^2} \rho(x, y, z). \end{aligned} \quad (5.88)$$

A equação (5.88) representa a equação de Poisson para o potencial Newtoniano diferente que a clássica. Então para a parte espacial do quadri-vetor  $\lambda_\mu$  não nula, a teoria de gravidade para sistemas não conservativos apresentada nesse trabalho, apresenta modificações para regiões do espaço-tempo onde o campo é fraco e estático.

### 5.3 Universo Bianchi I

Finalmente, a fim de investigar as consequências cosmológicas do quadri-vetor constante  $\lambda_\mu$ , analisaremos a dinâmica do universo Bianchi I (CALOGERO; HEINZLE, 2011; ELLIS; ELST, 1999) preenchido com um fluido perfeito. Consideremos o modelo do universo onde, em geral a expansão é anisotrópico, descrita pela métrica de Bianchi I

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)dx^2 + b^2(t)dy^2 + c^2(t)dz^2. \quad (5.89)$$

A generalização da equação de Einstein para campos é dada por

$$R_{\mu\nu} + \Lambda_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(R + \Lambda) = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (5.90)$$

onde  $\Lambda_{\mu\nu} = \lambda_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \frac{1}{2}(\lambda_\mu \Gamma_{\nu\alpha}^\alpha + \lambda_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha)$ . Escolhendo o universo se comportando como um fluido perfeito, então o tensor energia-momento é caracterizado por:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu - pg_{\mu\nu} \quad (5.91)$$

com  $\rho$  densidade,  $p$  pressão e  $U^\mu$  quadri-vetor velocidade do fluido. Podemos considerar que o fluido está em repouso no referencial em que o tensor métrico é  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, a^2(t), b^2(t), c^2(t))$ , então as componentes do quadri-vetor velocidade são  $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$ .

Para obter a equação da dinâmica do universo comecemos por calcular os termos da equação (5.90). Fazendo  $\dot{a} = \frac{da}{dt}$ ,  $\dot{b} = \frac{db}{dt}$ ,  $\dot{c} = \frac{dc}{dt}$ , os símbolos de Christoffel não nulos são:

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^1 &= \frac{\dot{a}}{a} & \Gamma_{02}^2 &= \frac{\dot{b}}{b} & \Gamma_{03}^3 &= \frac{\dot{c}}{c} \\ \Gamma_{11}^0 &= \dot{a}a & \Gamma_{22}^0 &= \dot{b}b & \Gamma_{33}^0 &= \dot{c}c. \end{aligned} \quad (5.92)$$

As componentes do tensor de Ricci e do tensor  $\Lambda_{\mu\nu}$  são:

$$\begin{aligned} R_{00} &= -\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c}\right) & R_{11} &= a\left(\frac{\dot{a}\dot{b}}{b} + \frac{\dot{a}\dot{c}}{c} + \ddot{a}\right) \\ R_{22} &= b\left(\frac{\dot{a}\dot{b}}{a} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{c} + \ddot{b}\right) & R_{33} &= c\left(\frac{\dot{a}\dot{c}}{a} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{b} + \ddot{c}\right) \\ \Lambda_{00} &= -\lambda_0\left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c}\right) & \Lambda_{11} &= \lambda_0\dot{a}a \\ \Lambda_{22} &= \lambda_0\dot{b}b & \Lambda_{33} &= \lambda_0\dot{c}c \\ \Lambda_{01} &= \frac{\lambda_1}{2}\left(\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{b}}{b} - \frac{\dot{c}}{c}\right) & \Lambda_{02} &= \frac{\lambda_2}{2}\left(\frac{\dot{b}}{b} - \frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{c}}{c}\right) \\ \Lambda_{03} &= \frac{\lambda_3}{2}\left(\frac{\dot{c}}{c} - \frac{\dot{b}}{b} - \frac{\dot{a}}{a}\right) \end{aligned} \quad (5.93)$$

Como o tensor  $T_{\mu\nu}$  não tem elementos fora da diagonal, consideremos que  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ . Feita essa escolha, os elementos não nulos são apenas diagonais. Fazendo a contração no tensor de Ricci e  $\Lambda_{\mu\nu}$ , obtém-se os escalares:

$$\begin{aligned} R &= -2 \left( \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{a}\dot{c}}{ac} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc} + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} \right) \\ \Lambda &= -2\lambda_0 \left( \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} \right) \end{aligned} \quad (5.94)$$

Substituindo essas quantidades na equação (5.90) obtemos o conjunto de quatro equações diferenciais não lineares que governam a dinâmica do universo:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{a}\dot{c}}{ac} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc} &= 8\pi G\rho \\ \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc} + \lambda_0 \left( \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} \right) &= -8\pi Gp \\ \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{a}\dot{c}}{ac} + \lambda_0 \left( \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{c}}{c} \right) &= -8\pi Gp \\ \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \lambda_0 \left( \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} \right) &= -8\pi Gp \end{aligned} \quad (5.95)$$

Usemos a igualdade  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) = \frac{\ddot{a}}{a} - \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2$  para reescrever as equações

$$\begin{aligned} AB + AC + BC &= 8\pi G\rho \\ \dot{B} + \dot{C} + B^2 + C^2 + \lambda_0 (B + C) &= -8\pi Gp \\ \dot{A} + \dot{C} + A^2 + C^2 + \lambda_0 (A + C) &= -8\pi Gp \\ \dot{A} + \dot{B} + A^2 + B^2 + \lambda_0 (A + B) &= -8\pi Gp, \end{aligned} \quad (5.96)$$

onde  $A = \frac{\dot{a}}{a}$ ,  $B = \frac{\dot{b}}{b}$ ,  $C = \frac{\dot{c}}{c}$ . Aqui estudaremos apenas fluidos perfeitos com equação de estado

$$p = \gamma\rho \quad (0 \leq \gamma \leq 1). \quad (5.97)$$

Antes de resolver a equação de Einstein tomaremos a componente temporal ( $\nu = 0$ , as outras componentes são todas nulas) do divergente covariante (CARROLL, 2004) da equação (5.90). Apesar da não conservação no lado geométrico da equação de campo (5.90), existem duas possibilidades simples que permitem soluções onde temos a conservação de energia-momento (que implica  $T_{\nu;\mu}^\mu = 0$ ). O primeiro é mudar como a energia e massa geram a curvatura considerando que a constante de gravidade  $G$  de fato é uma função

de  $x^\mu$ . Nesta abordagem, a função  $G$  equaliza o lado da matéria conservada em (5.35), com uma geometria não conservativa. A segunda possibilidade é introduzir uma constante cosmológica  $\Lambda$  na teoria considerando-a como uma função de  $x^\mu$ . A constante cosmológica pode ser facilmente incluída adicionando  $-2\Lambda\sqrt{g}$  no Lagrangiano (5.11) e (5.13). Por simplicidade, no presente trabalho consideramos apenas o primeiro caso

$$\begin{aligned} \left( \Lambda^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\Lambda \right)_{;\mu} &= 8\pi (GT^{\mu\nu})_{;\mu} \Leftrightarrow -2\lambda_0 (AB + AC + BC) = 8\pi (GT^{\mu 0})_{;\mu} \\ &\Leftrightarrow -2\lambda_0 G\rho = \dot{G}T^{00} + GT^{\mu 0}_{;\mu} \\ &\Leftrightarrow -2\lambda_0 G = \dot{G}, \end{aligned} \quad (5.98)$$

onde  $()_{;\mu}$  representa a derivada covariante (CARROLL, 2004; DIRAC, 1975). Logo

$$G = G_0 e^{-2\lambda_0 t}, \quad (5.99)$$

onde  $G_0$  é a constante da integração. Da conservação da matéria temos

$$\begin{aligned} T^{\mu 0}_{;\mu} &= 0 \\ (A + B + C)(p + \rho) + \dot{\rho} &= 0. \end{aligned} \quad (5.100)$$

Usando a equação de estado (5.97) podemos escrever a equação diferencial

$$\dot{\rho} = -\rho(1 + \gamma) \left( \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} \right), \quad (5.101)$$

cuja solução é

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{abc}{a_0 b_0 c_0} \right)^{-(1+\gamma)}. \quad (5.102)$$

A equação (5.102) mostra como responde a densidade de massa enquanto o universo se expande. Ao longo da resolução do sistema de equações (5.96) seguiremos Jacobs (JACOBS, 1969). Para simplificar o sistema de equações (5.96) vamos fazer a seguinte mudança de variáveis:

$$\begin{cases} a(t) = R(t)e^{\alpha(t)} \\ b(t) = R(t)e^{\beta(t)} \\ c(t) = R(t)e^{\xi(t)} \end{cases}, \quad (5.103)$$

onde

$$\alpha(t) + \beta(t) + \xi(t) = 0. \quad (5.104)$$



Nós chamaremos o trio ordenado  $(a, b, c)$  de funções expansão,  $R$  de "raio médio" e  $(\alpha, \beta, \xi)$  de funções anisotropias. As equações (5.103) e (5.104) implicam em

$$V = abc = R^3 \quad (5.105)$$

Derivando a expressão acima e em seguida dividindo por  $V$ , obtemos que

$$A + B + C = 3\frac{\dot{R}}{R} \quad (5.106)$$

De (5.103) temos que

$$A = \frac{\dot{R}}{R} + \dot{\alpha} \quad B = \frac{\dot{R}}{R} + \dot{\beta} \quad C = \frac{\dot{R}}{R} + \dot{\xi} \quad (5.107)$$

Subtraindo a segunda equação da terceira, e a quarta da segunda em (5.96), o sistema de equações que governa a dinâmica do campo gravitacional equivale a:

$$3\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 - (\dot{\alpha}^2 + \dot{\alpha}\dot{\beta} + \dot{\beta}^2) = 8\pi\rho G \quad (5.108)$$

$$\ddot{\alpha} - \ddot{\beta} + (\dot{\alpha} - \dot{\beta})\left(3\frac{\dot{R}}{R} + \lambda_0\right) = 0 \quad (5.109)$$

$$\ddot{\xi} - \ddot{\alpha} + (\dot{\xi} - \dot{\alpha})\left(3\frac{\dot{R}}{R} + \lambda_0\right) = 0 \quad (5.110)$$

Definindo duas funções anisotrópicas perpendiculares contidas no plano  $xy$  por:

$$\eta = \alpha + \beta \quad ; \quad \sigma = \alpha - \beta \quad (5.111)$$

e usando as quantidades (5.99) e (5.102), o sistema de equações acima pode ser escrito na forma mais simplificada

$$3\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 - \frac{1}{4}(3\dot{\eta}^2 + \dot{\sigma}^2) = 8\pi\rho_0 G_0 e^{-2\lambda_0 t} \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-3(1+\gamma)} \quad (5.112)$$

$$\ddot{\sigma} + \dot{\sigma}\left(3\frac{\dot{R}}{R} + \lambda_0\right) = 0 \quad (5.113)$$

$$\ddot{\eta} + \dot{\eta}\left(3\frac{\dot{R}}{R} + \lambda_0\right) = 0. \quad (5.114)$$

Integrando as equações (5.113) e (5.114) temos, respectivamente,

$$\frac{\sigma}{\dot{\sigma}_0} = \int e^{-\lambda_0 t} \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-3} dt \quad (5.115)$$

$$\frac{\eta}{\dot{\eta}_0} = \int e^{-\lambda_0 t} \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-3} dt \quad (5.116)$$

Substituindo (5.115) e (5.116) em (5.112) temos que:

$$e^{-\lambda_0 t} dt = \left[ \frac{1}{12} (3\dot{\eta}_0^2 + \dot{\sigma}_0^2) \left( \frac{R}{R_0} \right)^{-4} + \frac{8\pi}{3} \rho_0 G_0 \left( \frac{R}{R_0} \right)^{-(1+3\gamma)} \right]^{-\frac{1}{2}} d \left( \frac{R}{R_0} \right) \quad (5.117)$$

Usando (5.117) podemos escrever (5.115) e (5.116) na seguinte forma:

$$\frac{\sigma}{\dot{\sigma}_0} = \int \left[ \frac{1}{12} (3\dot{\eta}_0^2 + \dot{\sigma}_0^2) \left( \frac{R}{R_0} \right)^2 + \frac{8\pi}{3} \rho_0 G_0 \left( \frac{R}{R_0} \right)^{-(3\gamma-5)} \right]^{-\frac{1}{2}} d \left( \frac{R}{R_0} \right) \quad (5.118)$$

$$\frac{\eta}{\dot{\eta}_0} = \int \left[ \frac{1}{12} (3\dot{\eta}_0^2 + \dot{\sigma}_0^2) \left( \frac{R}{R_0} \right)^2 + \frac{8\pi}{3} \rho_0 G_0 \left( \frac{R}{R_0} \right)^{-(3\gamma-5)} \right]^{-\frac{1}{2}} d \left( \frac{R}{R_0} \right) \quad (5.119)$$

Depois de integrar (5.117) e isolar a variável tempo temos

$$-\frac{1}{\lambda_0} (e^{-\lambda_0 t} - 1) = \int \left[ k_1 \left( \frac{R}{R_0} \right)^{-4} + k_2 \left( \frac{R}{R_0} \right)^{-(1+3\gamma)} \right]^{-\frac{1}{2}} d \left( \frac{R}{R_0} \right), \quad (5.120)$$

com  $k_1 = \frac{1}{12} (3\dot{\eta}_0^2 + \dot{\sigma}_0^2)$  e  $k_2 = \frac{8\pi}{3} \rho_0 G_0$ .

Agora estamos em perfeitas condições para determinar a solução do nosso problema. Começemos com a equação (5.120), fazendo algumas simplificações no integrando e definindo uma nova variável

$$T = \frac{t'}{\tau}, \quad (5.121)$$

que chamaremos de tempo normalizado. A variável  $t'$  é o integral que aparece na expressão (5.120) e

$$\tau = (1 + \gamma)^{-1} (6\pi\rho_0 G_0)^{-\frac{1}{2}}, \quad (5.122)$$

é o tempo de escala. Logo

$$T = (1 + \gamma) \int \left( \frac{R}{R_0} \right)^2 \left[ \frac{4}{9} \left( \frac{R}{R_0} \right)^{3(1-\gamma)} + \frac{1}{12} \frac{(3\dot{\eta}_0^2 + \dot{\sigma}_0^2)}{6\pi\rho_0 G_0} \right]^{-\frac{1}{2}} d \left( \frac{R}{R_0} \right). \quad (5.123)$$

Finalmente, introduzindo um novo parâmetro

$$\Omega^2 = 3 \left[ \frac{(1 + \gamma)\tau}{4} \right]^2 (3\dot{\eta}_0^2 + \dot{\sigma}_0^2) \quad (5.124)$$

e fazendo mudança de variável na integral (5.123),

$$\left( \frac{R}{R_0} \right)^{3(1-\gamma)} = y^2 - \Omega^2 \Rightarrow d \left( \frac{R}{R_0} \right) = \frac{2y}{3(1-\gamma)} (y^2 - \Omega^2)^{\frac{3\gamma-2}{3(1-\gamma)}} dy, \quad (5.125)$$

ficamos com a solução completa do problema

$$T = \begin{cases} \frac{1+\gamma}{1-\gamma} \int (y^2 - \Omega^2)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} dy & , 0 \leq \gamma < 1 \\ (1 + \Omega^2)^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{R}{R_0} \right)^3 & , \gamma = 1 \end{cases} \quad (5.126)$$

$$\frac{\eta}{\dot{\eta}_0} = \begin{cases} \left( \frac{\tau}{2\Omega} \right) \left( \frac{1+\gamma}{1-\gamma} \right) \ln \left( \frac{y-\Omega}{y+\Omega} \right) + const & , 0 \leq \gamma < 1 \\ 3\tau (1 + \Omega^2)^{-\frac{1}{2}} \ln \left( \frac{R}{R_0} \right) + const & , \gamma = 1 \end{cases} \quad (5.127)$$

$$\frac{\sigma}{\dot{\sigma}_0} = \begin{cases} \left( \frac{\tau}{2\Omega} \right) \left( \frac{1+\gamma}{1-\gamma} \right) \ln \left( \frac{y-\Omega}{y+\Omega} \right) + const & , 0 \leq \gamma < 1 \\ 3\tau (1 + \Omega^2)^{-\frac{1}{2}} \ln \left( \frac{R}{R_0} \right) + const & , \gamma = 1 \end{cases} \quad (5.128)$$

Notemos que temos dois parâmetros anisotrópicos ( $\dot{\eta}_0$  e  $\dot{\sigma}_0$ ) para a solução geral no caso do universo modelado segundo um fluido perfeito. Quando  $0 \leq \gamma < 1$  é conveniente definirmos um novos parâmetros,  $\varepsilon$  e  $\psi$ , definidos pelas relações:

$$\varepsilon = -2\Omega, \quad \tau (\dot{\alpha}_0, \dot{\beta}_0, \dot{\xi}_0) = \pm \left[ \frac{2|\varepsilon|}{3(1+\gamma)} \right] \sin \left( \psi, \psi + \frac{2\pi}{3}, \psi + \frac{4\pi}{3} \right), \quad 0 \leq \psi < \frac{4\psi}{3} \quad (5.129)$$

O sinal de (+) e (-) é por conta de  $\varepsilon > 0$  e  $\varepsilon < 0$ , respetivamente. Notemos que as equações em (5.129) são consistentes com as condições (5.104), (5.111) e (5.123). O parâmetro  $\psi$  tem as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \sin(\psi) + \sin\left(\psi + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\psi + \frac{4\pi}{3}\right) &= 0 \\ \sin^2(\psi) + \sin^2\left(\psi + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin^2\left(\psi + \frac{4\pi}{3}\right) &= \frac{3}{2} \\ \sin(\psi) \sin\left(\psi + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin(\psi) \sin\left(\psi + \frac{4\pi}{3}\right) + \sin\left(\psi + \frac{2\pi}{3}\right) \sin\left(\psi + \frac{4\pi}{3}\right) &= -\frac{3}{4}. \end{aligned} \quad (5.130)$$

Agora precisamos expressar a solução em termos das varáveis originais. As funções expansão ( $a, b, c$ ) ficam determinadas combinando as equações (5.103), (5.111), (5.127), (5.128), e (5.129). Assim as funções expansão anisotrópicas são dadas por:

$$\frac{(a, b, c)}{R} \propto \begin{cases} \left\{ \frac{\left[ 4 \left( \frac{R}{R_0} \right)^{3(1-\gamma)} + \varepsilon^2 \right]^{\frac{1}{2}} + |\varepsilon|}{\left[ 4 \left( \frac{R}{R_0} \right)^{3(1-\gamma)} + \varepsilon^2 \right]^{\frac{1}{2}} - |\varepsilon|} \right\}^{\pm \frac{2z}{3(1-\gamma)}} & , 0 \leq \gamma < 1 \\ \left( \frac{R}{R_0} \right)^{\mp 2|\varepsilon|z(4+\varepsilon^2)^{-1/2}} & , \gamma = 1, \end{cases} \quad (5.131)$$

onde

$$z = \left( \sin(\psi), \sin\left(\psi + \frac{2\pi}{3}\right), \sin\left(\psi + \frac{4\pi}{3}\right) \right), \quad (5.132)$$

e  $R$  é uma função de tempo,  $t$ , dada pela equação (5.120) ou equivalente a (5.126). As funções taxa expansão de Hubble do trio  $(A, B, C)$  são:

$$(A, B, C) = \frac{\left[ 4 \left( \frac{R}{R_0} \right)^{3(1-\gamma)} + \varepsilon^2 \right]^{\frac{1}{2}} \mp 2|\varepsilon|z}{3(1+\gamma)\tau \left( \frac{R}{R_0} \right)^3}, \quad 0 \leq \gamma < 1 \quad (5.133)$$

De (5.102) temos a expressão que relaciona a densidade total de massa do universo e o seu raio médio:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left( \frac{R}{R_0} \right)^{-3(1+\gamma)}. \quad (5.134)$$

Para obter as funções expansão em função do tempo, basta resolver a integral em (5.126), combinando com (5.120) e (5.122) para determinar  $\frac{R}{R_0}$ . O nosso passo seguinte é investigar as propriedades do universo com o modelo de Bianchi tipo I com o comportamento de um fluido perfeito usando o integral (5.126). A equação (5.134) nos dá que existe sempre singularidade física inicial ( $R \rightarrow 0$ ). Das equações (5.123) e (5.126) indicam que  $R(t)$  é uma família de funções monótonas que apresentam as seguintes propriedades para  $0 \leq \gamma < 1$ :

- a) Existem singularidades do tipo panqueca (isto é,  $a \rightarrow 0$ ,  $b$  e  $c$  constantes, e claro com  $R \rightarrow 0$ ) quando  $\psi = \frac{\pi}{6}$  ( $\varepsilon > 0$ ) e  $\psi = \frac{\pi}{2}$  ( $\varepsilon < 0$ ), enquanto que a singularidade do tipo cigarro (isto é,  $a \rightarrow \infty$ ,  $b$  e  $c \rightarrow 0$ , com  $R \rightarrow 0$ ) ocorre para qualquer valor de  $\psi$ .
- b) Quando  $R, t \rightarrow \infty$ , a solução tende a ser isotrópico com  $\varepsilon = 0$ , com funções expansão

$$a(t) = b(t) = c(t) \propto \left( \frac{e^{-\lambda_0 t} - 1}{\lambda_0} \right)^{\frac{2}{3(1+\gamma)}} \quad (5.135)$$

- c) No caso da solução com simetria (por exemplo  $a = b$  para todo  $t$ ) quando  $\psi = \frac{\pi}{6}$  ( $\varepsilon > 0$ ) e  $\psi = \frac{\pi}{2}$  ( $\varepsilon < 0$ ), existem singularidades do tipo cigarro e panqueca.

Para  $\gamma = 1$  temos a solução explícita, basta inverter a expressão em (5.126) para obter de forma explícita o raio médio do universo  $R(t)$ .

Em geral, a integral em (5.126) apresenta a solução em termos da função hipergeométrica  $F$  (AOMOTO, 2011),

$$T = y (y^2 - \Omega^2)^{\frac{\gamma}{1+\gamma}} \left(1 - \frac{\Omega^2}{y^2}\right)^{-\frac{\gamma}{1+\gamma}} F\left(\frac{1}{2}, -\frac{\gamma}{1+\gamma}, \frac{3}{2}, \frac{y^2}{\Omega^2}\right), \quad (5.136)$$

onde

$$F\left(\frac{1}{2}, -\frac{\gamma}{1+\gamma}, \frac{3}{2}, \frac{y^2}{\Omega^2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\gamma}{1+\gamma}\right) \Gamma\left(\frac{3+5\gamma}{2+2\gamma}\right)} \int_0^1 \frac{t^{\frac{-1-2\gamma}{1+\gamma}} (1-t)^{\frac{1+2\gamma}{1+\gamma}}}{\left(1+t\frac{y^2}{\Omega^2}\right)^{\frac{1}{2}}} dt \quad (5.137)$$

e  $\Gamma$  é a função gamma. A função hipergeométrica não é uma função elementar, então torna difícil obtê-la em termos de funções analíticas, sendo assim fica difícil obter  $R(t)$  na sua forma explícita. Analisemos para que valores de  $\gamma$  podemos obter a solução explícita e de interesse físico. A solução para  $\gamma = 0$  é conhecida como universo dominado pela matéria. A integral em (5.126) para  $\gamma = 0$ , tem como solução

$$T + const = y = \left[ \left(\frac{R}{R_0}\right)^3 + \Omega^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (5.138)$$

que podemos escrever na forma

$$\left(\frac{R}{R_0}\right) = [T_d (T_d + |\varepsilon_d|)]^{\frac{1}{3}}, \quad (5.139)$$

onde o índice subscrito significa valor de cada variável para  $\gamma = 0$ , com

$$T_d = -\frac{e^{-\lambda_0 t} - 1}{\lambda_0 \tau_d}; \quad \tau_d = (6\pi\rho_0 G_0)^{-\frac{1}{2}}, \quad (5.140)$$

onde  $T_d$  é o tempo de normalização e  $\tau_d$  o tempo de escala. As funções expansão  $(a, b, c)$  ficam completamente definidas por

$$(a, b, c) \propto T_d^{\frac{1}{3(1\mp 2z)}} (T_d + |\varepsilon_d|)^{\frac{1}{3(1\pm 2z)}}, \quad (5.141)$$

enquanto que as funções de taxa de expansão de Hubble tomam a forma:

$$(A, B, C) = \left( 2T_d + \frac{|\varepsilon_d| (1 \mp 2z)}{3\tau_d T_d (T_d + |\varepsilon_d|)} \right). \quad (5.142)$$

A variável  $z$  que aparece nas equações (5.141) e (5.142) é aquela que definimos em (5.129), e o sinal  $-(+)$  é para  $\varepsilon > (<)0$ . Por fim, temos a densidade de massa pela relação

$$\frac{G\rho}{G_0\rho_0} = e^{-2\lambda_0 t} [T_d (T_d + |\varepsilon_d|)]^{-1}, \quad (5.143)$$

onde a singularidade inicial ocorre quando  $T_d = 0$ .  $\lambda_0 \rightarrow 0$  representa a solução que foi encontrada por Raychaudhuri (RAYCHAUDHURI, 1958). Quando  $\varepsilon_d = 0$  a solução torna-se isotrópica

$$a(t) = b(t) = c(t) = R(t) \propto T_d^{\frac{2}{3}} = \left( \frac{e^{-\lambda_0 t} - 1}{\lambda_0 \tau_d} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad (5.144)$$

e  $\lambda_0 \rightarrow 0$  representa a solução isotrópica de Einstein–de Sitter (ELLIS; ELST, 1999). Um outro caso de extrema importância na física é o universo dominado pela era da radiação, que é caracterizada por  $\gamma = \frac{1}{3}$  (isto é,  $p_r = \frac{1}{3}\rho_r$ , onde o subscrito  $r$  significa radiação).

$$T_r = \frac{1}{2} \left[ \frac{R}{R_0} E - \frac{\varepsilon_r^2}{2} \ln \left| \frac{2\frac{R}{R_0} + E}{\varepsilon_r} \right| \right], \quad (5.145)$$

onde  $E = \left( 4 \left( \frac{R}{R_0} \right)^2 + \varepsilon_r^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ , e o tempo de normalização e tempo de escala são

$$T_r = -\frac{e^{-\lambda_0 t} - 1}{\lambda_0 \tau_r} \quad \text{e} \quad \tau_r = \left( \frac{3}{32\pi\rho_0 G_0} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (5.146)$$

respectivamente. Partindo das equações de (5.131) até (5.134) torna-se fácil a solução para as funções expansão ( $a, b, c$ ), as taxas de expansão de Hubble ( $A, B, C$ ) e a densidade de massa  $\rho_r$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{R}(a, b, c) &\propto \left( \frac{E + |\varepsilon_r|}{E - |\varepsilon_r|} \right)^{\pm z} \\ (A, B, C) &= \frac{E \mp 2|\varepsilon_r|}{4\tau_r \left( \frac{R}{R_0} \right)^3} \\ \frac{G_r \rho_r}{G_0 \rho_0} &= e^{-2\lambda_0 t} \left( \frac{R}{R_0} \right)^{-4} \end{aligned} \quad (5.147)$$

Existe o caso onde essa solução se torna isotrópica, que ocorre exatamente quando  $\varepsilon_r = 0$

$$a(t) = b(t) = c(t) = R(t) = T_r^{\frac{1}{2}} = \left( -\frac{e^{-\lambda_0 t} - 1}{\lambda_0 \tau_r} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.148)$$

É importante notar que de (5.99) que, para  $\lambda_0 < 0$  ( $\lambda_0 > 0$ ) o acoplamento  $G$  entre geometria e matéria é fortalecido (enfraquecido) como consequência da não conservação no lado geométrico da equação do campo (5.35). Na figura 4 mostramos a solução isotrópica do fator de escala  $a(t) = b(t) = c(t) = R(t)$ , nos casos onde  $\gamma$  assume valores 0 e 1, correspondendo às eras dominadas pela matéria e fortemente pela radiação, respectivamente. Em ambos os casos, pode-se ver que a consequência mais importante do

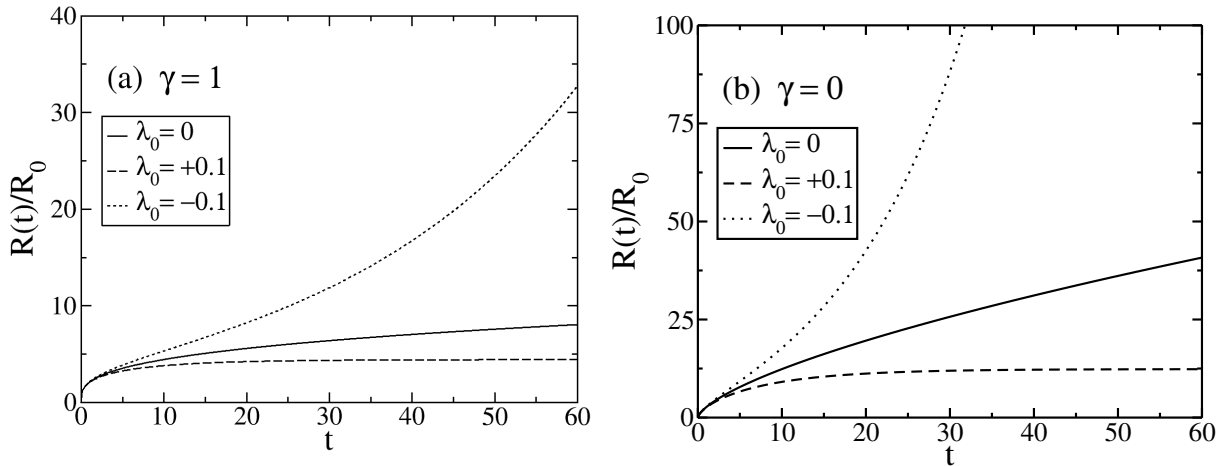


Figura 4 – As figuras mostram o fator de escala isotrópico  $R(t)$  com  $G_0 = \rho_0 = R_0 = 1$ ,  $\dot{\eta}_0 = \dot{\sigma}_0 = 0$  e  $p = \gamma\rho$ . O painel (a) mostra o caso de uma era dominada pela radiação ( $\gamma = 1$ ) e o painel (b) mostra a era dominada pela matéria ( $\gamma = 0$ ).

quadri-vetor constante cosmológico constante é o surgimento de um universo com taxa de expansão acelerada quando  $\lambda_0 < 0$  sem a necessidade de introduzir a energia escura. A taxa de expansão acelerada é evidente a partir da inversão de concavidade por  $R(t)$  quando  $\lambda_0 < 0$ . Para uma era dominada pela matéria no caso de expansão isotrópica, essa inversão de concavidade ocorre no tempo  $t^* = \frac{1}{|c\lambda_0|} \ln\left(\frac{3}{2}\right)$  ( $\approx \frac{4,1}{c}$  para  $\lambda_0 = \pm 0,1$ ). Conseqüentemente, a partir de evidências observacionais (FRIEMAN; TURNER; HUTERER, 2008), devemos ter  $|\lambda_0|c$  da ordem  $10^{-10}$  anos $^{-1}$ . Apesar de considerarmos um modelo cosmológico muito simples (Bianchi I), esse resultado está de acordo com os limites observacionais e experimentais para a taxa de variação temporal de  $G$  (UZAN, 2003). Além disso, embora tenhamos mostrado na figura 4 apenas o caso isotrópico, verificamos que o mesmo comportamento é obtido no caso anisotrópico mais geral. Na verdade, esperamos que o mesmo fenômeno esteja presente em modelos mais realistas, uma vez que o mecanismo principal por trás da expansão acelerada é a não conservação no lado geométrico da equação do campo (5.35). Finalmente, da Figura 4 também é evidente que quando  $\lambda_0 > 0$  o universo atinge rapidamente um estado estacionário. Além disso, neste caso, o enfraquecimento do acoplamento (5.99) para  $\lambda_0 > 0$  resulta na dissociação assintótica entre matéria e geometria.

Por fim, devido ao seu valor muito pequeno, os efeitos de  $\lambda_0$  no sistema solar para escalas de tempo não cosmológicas são muito pequenos. Por um curto intervalo de tempo, mostramos anteriormente que uma distribuição de massa com simetria esférica reproduz a

gravidade newtoniana para campos fracos, pois, neste caso, obtemos  $h_{00} = \frac{2\phi}{c^2}$ , onde  $\phi$  é o potencial gravitacional newtoniano. Além disso, como a métrica deve ser uma função suave do tempo, podemos estimar um limite superior de apenas  $|\Delta\theta_\lambda - \Delta\theta_0| \lesssim 10^{-7}$  arco segundos por século para a diferença entre a precessão de Mercúrio  $\Delta\theta_\lambda$  em nossa teoria (com  $|\lambda_0|c \approx 10^{-10}$ ) e a precessão de  $\Delta\theta_0 = 43,03''$  por século na gravidade clássica (WEINBERG, 1972).

### 5.3.1 Equação de Friedmann

Multiplicando a primeira equação em (5.95) por  $3abc$  e os restantes por  $abc$  temos,

$$\begin{aligned} 3(\dot{a}\dot{b}\dot{c} + \dot{a}\dot{b}\dot{c} + \dot{a}\dot{b}\dot{c}) &= 24\pi abc G\rho \\ \ddot{a}\dot{b}\dot{c} + a\ddot{b}\dot{c} + ab\ddot{c} + \lambda_0(\dot{a}\dot{b}\dot{c} + \dot{a}\dot{b}\dot{c}) &= -8\pi abc Gp \\ \ddot{a}\dot{b}\dot{c} + a\ddot{b}\dot{c} + ab\ddot{c} + \lambda_0(\dot{a}\dot{b}\dot{c} + \dot{a}\dot{b}\dot{c}) &= -8\pi abc Gp \\ \ddot{a}\dot{b}\dot{c} + a\ddot{b}\dot{c} + ab\ddot{c} + \lambda_0(\dot{a}\dot{b}\dot{c} + \dot{a}\dot{b}\dot{c}) &= -8\pi abc Gp \end{aligned} \quad (5.149)$$

Somando essas quatro equações temos que

$$2[\ddot{a}\dot{b}\dot{c} + a\ddot{b}\dot{c} + ab\ddot{c} + 2(\dot{a}\dot{b}\dot{c} + \dot{a}\dot{b}\dot{c} + \dot{a}\dot{b}\dot{c}) + \lambda_0(\dot{a}\dot{b}\dot{c} + \dot{a}\dot{b}\dot{c} + \dot{a}\dot{b}\dot{c})] \quad (5.150)$$

$$= 24\pi abc G(\rho - p), \quad (5.151)$$

que equivale, em termos do raio do universo, a

$$(R^3)'' + \lambda_0 (R^3)' = 12\pi R^3 (\rho - p). \quad (5.152)$$

Multiplicando a equação por  $dR^3$ , então

$$\frac{d}{dt} (R^3)' dR^3 + \lambda_0 (R^3)' dR^3 = 12\pi G(\rho - p) R^3 dR^3 \quad (5.153)$$

A equação que representa a conservação de energia é

$$\frac{d}{dt} (G\rho) = -2\lambda_0 - 3\frac{\dot{R}}{R}G(\rho + p), \quad (5.154)$$

multiplicando por  $R^6 dt$ , e depois isolar  $GpR^3 dR^3$  e substituir na (5.153), temos

$$d(R^3)' (R^3)' + \lambda_0 (R^3)' dR^3 - 24\pi\lambda_0 G\rho R^6 dt = 12\pi d(G\rho R^6). \quad (5.155)$$

Depois da integração

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho + \frac{C_1}{R^6} - \frac{2\lambda_0}{9R^6} \int (9\dot{R}^2 R^4 - 24\pi G\rho R^6) dt, \quad (5.156)$$



onde  $C_1$  é a constante da integração. Da equação (5.150),

$$\frac{\ddot{R}}{R} + 2 \left( \frac{\dot{R}}{R} \right)^2 + \lambda_0 \left( \frac{\dot{R}}{R} \right) = 4\pi G (\rho - p). \quad (5.157)$$

As equações (5.156) e (5.157) são a generalização da equação de Friedmann (SCHUTZ, 2009; CARROLL, 2004). Em uma outra notação podemos escrever a equação da aceleração do raio médio do universo

$$\frac{\ddot{R}}{R} + 2 \left( \frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = 4\pi G \left[ \rho(1 - \gamma) + \frac{\Lambda(t)}{24\pi G} \right], \quad (5.158)$$

onde  $\Lambda(t) = -6\lambda_0 \frac{\dot{R}}{R}$ . Aqui foram usados (5.94) e (5.106). Essa equação possibilita-nos fazer uma análise da expansão acelerada do universo mais detalhada em termo da taxa de expansão do raio médio do universo. Comparando (5.158) com modelos que incluem a constante cosmológica (SCHUTZ, 2009), podemos concluir que o nosso quadri-vetor cosmológico  $\lambda_\mu$  desempenha um efeito análogo à de uma densidade da energia escura dada por

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad (5.159)$$

então

$$\frac{\ddot{R}}{R} + 2 \left( \frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = 8\pi G \left[ \rho(1 - \gamma) + \frac{1}{3}\rho_\Lambda \right]. \quad (5.160)$$

A equação acima descreve a dinâmica do raio "médio" do universo, contendo explicitamente a aceleração ( $\ddot{R}$ ). O termo  $\rho_\Lambda$  está associado a nenhuma matéria conhecida, com uma pressão negativa. De acordo com os cosmologistas  $\Lambda$  é positivo, estando de acordo com a nossa teoria, que revela um universo se expandindo aceleradamente com  $\lambda_0$  negativo.

## 6 Conclusão

O propósito deste trabalho consistiu na apresentação de um Princípio da Mínima Ação capaz de descrever sistemas não conservativos. Discutimos o porquê de construir Lagrangeanas que dependem da Ação, introduzindo a própria ação na função densidade Lagrangeana, e estabelecemos um Princípio da Mínima Ação não conservativo. Em seguida, estabelecemos a equação generalizada de Euler-Lagrange, bem como o teorema de Noether, que consistem de condições necessárias para a otimização e invariância do funcional propostas nesta dissertação, respectivamente. O teorema de Noether não foi obtido de forma usual, tivemos a necessidade de fazer escolha de calibre para obter o teorema na forma usual. Apresentamos um capítulo que dedicamos às aplicações da equação generalizada de Euler-Lagrange e da generalização do teorema de Noether, para obter as equações de Schrödinger e Maxwell para sistemas não conservativos, escolhendo uma densidade Lagrangeana linear para a parte que contribui com efeito de dissipação. Estudamos as ondas eletromagnéticas no vácuo e vimos que a dissipação no campo causa o efeito do amortecimento e o defasamento na amplitude das ondas, os mesmos efeitos que se manifestam no caso das ondas eletromagnéticas propagando em um meio condutor. No último capítulo, onde foi obtido o principal resultado do trabalho, apresentamos uma generalização do Princípio da Mínima Ação para Lagrangiana dependente da Ação e consideramos isso em um espaço curvo com métrica  $g_{\mu\nu}(x^\mu)$ . Com este princípio da Mínima Ação, obtivemos uma equação de campo gravitacional generalizada, que pode ser usada na descrição de fenômenos não conservativos. Uma característica interessante desta teoria é que o campo gravitacional depende de um quadri-vetor constante cosmológica. A importância potencial desta nova teoria gravitacional é evidente quando aplicada ao problema das ondas gravitacionais e à cosmologia. Dependendo do quadri-vetor cosmológico, mostramos que ondas gravitacionais se propagam com velocidade menor do que a velocidade da luz e com amplitudes que diminuem (ou aumentam) com o tempo. Além disso, a aplicação à cosmologia levou a outro resultado notável: um universo (aqui consideramos o universo preenchido por um fluido perfeito) exibindo uma taxa de expansão acelerada sem necessidade de introduzir a energia escura. Observou-se um aspecto de amortecimento das ondas, semelhante em ambas as teorias tratadas nesse trabalho. Finalmente, para trabalhos futuros existem muitas direções de investigação para explorar, relacionadas aos desenvolvimentos dos nossos resultados

anteriores. Em especial, descreveremos o limite pós-newtoniano para uma distribuição de massa com simetria esférica, permitindo a investigação da estabilidade das órbitas planetárias em escalas de tempo cosmológicas e os efeitos na rotação das galáxias.

## Referências

- ADAMS, C. E. R. *Calculus - Several Variables*. 7th ed. ed. [S.l.]: Pearson, 2010. Citado na página 4.
- AOMOTO, M. K. a. K. *Theory of hypergeometric functions*. 1. ed. [S.l.]: Springer Tokyo, 2011. (Springer Monographs in Mathematics). ISBN 4431539123,9784431539124. Citado na página 66.
- BATEMAN, H. On dissipative systems and related variational principles. *Physical Review*, APS, v. 38, n. 4, p. 815, 1931. Citado 3 vezes nas páginas 10, 11 e 36.
- BAUER, P. S. Dissipative dynamical systems i. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Acad Sciences, v. 17, n. 5, p. 311–314, 1931. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 10.
- BOLIVAR, A. O. *Quantum-classical correspondence : dynamical quantization and the classical limit*. 1. ed., softcover version of original hardcover ed. 2004. ed. [S.l.]: Springer, 2004. (The frontiers collection). ISBN 3642057659,978-3-642-05765-6,978-3-662-09649-9,116-130-132-1,122-147-148-1. Citado na página 40.
- CALOGERO, S.; HEINZLE, J. M. Bianchi cosmologies with anisotropic matter: locally rotationally symmetric models. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier, v. 240, n. 7, p. 636–669, 2011. Citado na página 58.
- CARROLL, S. M. *Spacetime and geometry. An introduction to general relativity*. [S.l.: s.n.], 2004. Citado 10 vezes nas páginas 7, 9, 43, 44, 49, 51, 57, 60, 61 e 70.
- COHEN-TANNOUJDI, C. *Claude Cohen-Tannoudji; Bernard Diu; Franck Laloë: Quantum mechanics*. [S.l.]: John Wiley, 1977. Citado 3 vezes nas páginas 9, 10 e 40.
- DIRAC, P. A. M. *General theory of relativity*. [S.l.]: Wiley, 1975. ISBN 0471215759,9780471215752,069101146X,9780691011462. Citado 4 vezes nas páginas 43, 46, 49 e 61.
- ELLIS, G. F.; ELST, H. V. Cosmological models. In: *Theoretical and Observational Cosmology*. [S.l.]: Springer, 1999. p. 1–116. Citado 2 vezes nas páginas 58 e 67.
- EULER, L. *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1952. Citado na página 3.
- FRIEMAN, J. A.; TURNER, M. S.; HUTERER, D. Dark energy and the accelerating universe. *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, Annual Reviews, v. 46, p. 385–432, 2008. Citado na página 68.
- GEORGIEVA, B. A. *Noether-type theorems for the generalized variational principle of Herglotz*. Tese (Doutorado), 2001. Citado na página 16.
- GERGELY, L. Á. On hamiltonian formulations of the schrödinger system. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 298, n. 2, p. 394–402, 2002. Citado na página 9.

- GOLDSTEIN CHARLES P. POOLE, J. L. S. H. *Classical mechanics*. 3. ed. [S.l.]: Addison Wesley, 2001. ISBN 9780201657029,0201657023. Citado na página 6.
- HERGLOTZ, B. G. *Lectures at the University of Göttingen*. [S.l.]: Göttingen, 1930. Citado 3 vezes nas páginas 2, 10 e 12.
- JACKSON, J. D. *Classical electrodynamics*. [S.l.]: Wiley, 1999. Citado 5 vezes nas páginas 7, 9, 29, 32 e 50.
- JACOBS, K. *Bianchi I cosmological models*. Tese (Doutorado) — Caltech, 1969. Citado na página 61.
- LANDAU, L. D. *The classical theory of fields*. [S.l.]: Elsevier, 2013. Citado na página 7.
- LAZO, M. J.; KRUMREICH, C. E. The action principle for dissipative systems. *Journal of Mathematical Physics*, AIP Publishing, v. 55, n. 12, p. 122902, 2014. Citado na página 10.
- LAZO, M. J. et al. Em andamento. Citado na página 20.
- LAZO, M. J. et al. Action principle for action-dependent lagrangians toward nonconservative gravity: Accelerating universe without dark energy. *Physical Review D*, APS, v. 95, n. 10, p. 101501, 2017. Citado na página 43.
- LOGAN, J. D. *Applied mathematics. A Wiley-Interscience Publication*. [S.l.]: John Wiley & Sons Inc.. New York. A contemporary approach, 1987. Citado na página 14.
- MAUPERTUIS, M. de. Maupertuis 1698-1759 e o princípio da mínima ação. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 21, n. 1, 1999. Citado na página 3.
- NÖRENBERG, H. A. W. a. W. *Introduction to the Theory of Heavy-Ion Collisions*. [S.l.]: Springer-Verlag New York, 1980. Citado na página 36.
- RAYCHAUDHURI, A. An anisotropic cosmological solution in general relativity. *Proceedings of the Physical Society*, IOP Publishing, v. 72, n. 2, p. 263, 1958. Citado na página 67.
- RAZAVY, M. *Classical And Quantum Dissipative Systems*. [S.l.]: Imperial College Press, 2006. ISBN 1860945309,9781860945304,1860945252,9781860945250,9781860949180. Citado 4 vezes nas páginas 10, 11, 36 e 37.
- RIEWE, F. Nonconservative lagrangian and hamiltonian mechanics. *Physical Review E*, APS, v. 53, n. 2, p. 1890, 1996. Citado 3 vezes nas páginas 10, 11 e 36.
- RITGER, P. D.; ROSE, N. J. *Differential equations with applications*. [S.l.]: Courier Corporation, 1968. Citado na página 14.
- RYDER, L. *Introduction to General Relativity*. 1. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009. ISBN 978-0-511-58004-8,978-0-521-84563-2. Citado 2 vezes nas páginas 54 e 57.
- RYDER, L. H. *Quantum field theory*. 2nd ed. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 1996. ISBN 0521478146,9780521478144,0521472423. Citado na página 35.
- SAGAN, H. *Introduction to the Calculus of Variations*. [S.l.]: Courier Corporation, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 6.

SCHUTZ, B. *A first course in general relativity*. [S.l.]: Cambridge university press, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 51 e 70.

STEVENS, K. The wave mechanical damped harmonic oscillator. *Proceedings of the Physical Society*, IOP Publishing, v. 72, n. 6, p. 1027, 1958. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 11.

T.A., M. *A general relativity workbook*. web draft. [S.l.: s.n.], 2010. Citado na página 54.

UZAN, J.-P. The fundamental constants and their variation: observational and theoretical status. *Reviews of modern physics*, APS, v. 75, n. 2, p. 403, 2003. Citado na página 68.

VUJANOVIC, B. D.; JONES, S. E. *Variational methods in nonconservative phenomena*. [S.l.]: Academic Press, 1989. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 10.

WEINBERG, S. *Gravitation and cosmology: principles and applications of GR*. First edition. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., 1972. ISBN 0471925675,9780471925675. Citado 4 vezes nas páginas 43, 44, 49 e 69.

WU, X.-Y. et al. Quantum wave equation of non-conservative system. *International Journal of Theoretical Physics*, Springer, v. 48, n. 7, p. 2027–2035, 2009. Citado na página 36.